অধ্যায়-৬ (মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ)

গ্যালিলিও-১ : স্থির অবস্থান ও একই উচ্চতা থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত সকল বস্তু সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করবে।

গ্যালিলিও-২ → স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে প্রাপ্ত বেগ ঐ সময়ের সমানুপাতিক। ($v \propto t$)

গ্যালিলিও-৩ → স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তু নির্দিষ্ট সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা ঐ সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

$h \propto t^2$

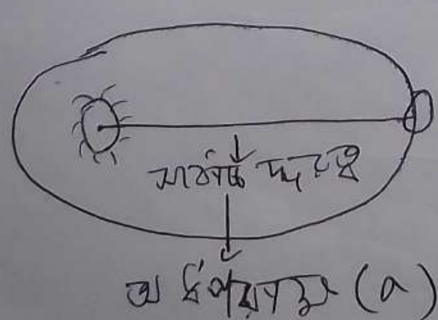
(ii)

কেপলারের সূত্র

১ম সূত্র (কক্ষের সূত্র) → প্রতিটি গ্রহই সূর্যকে একটি ফোকাসে রেখে উপবৃত্তাকার পথে ঘুরে।

২য় সূত্র (ক্ষেত্রফলের সূত্র) → গ্রহ ও সূর্যের সংযোজক সরলরেখা সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে।

৩য় সূত্র (আবর্তনকালের সূত্র) → সূর্যের চারদিকে প্রতিটি গ্রহের আবর্তনকালের বর্গ ঐ কক্ষপথের অর্ধ পরাক্ষের ঘনফলের সমানুপাতিক।



$$\boxed{T^2 \propto a^3}$$

$$\therefore \boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}}$$

<u>প্রতিপাদন (৩য় সূত্র)</u>

$$F_G = \frac{GmM}{r^2} \quad [\text{মহাকর্ষ বল}]$$

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad [\text{কেন্দ্রমুখী বল}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\therefore \frac{GmM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

$$\Rightarrow T^2 = k r^3$$

$$\therefore \boxed{T^2 \propto r^3}$$

(iv)

Let's Go, do some math

পৃথিবী হতে সূর্যের দূরত্ব 13.8×10^{30} km। ইউরেনাস হতে সূর্যের দূরত্ব ~~1.8~~ 18×10^{30} km হলে ইউরেনাসে প্রতিবছরে কয়দিনে হবে?

$\Rightarrow$

$$r_1 = 13.8 \times 10^{30} \text{ km}$$

$$r_2 = 18 \times 10^{30} \text{ km}$$

$$T_1 = 365 \text{ day}$$

$$T_2 = ?$$

$$\therefore \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1^2 r_2^3}{r_1^3} = T_2^2$$

$$\Rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{(365)^2 \times \cancel{13.8}(18 \times 10^{30})^3}{(13.8 \times 10^{30})^3}}$$

$$\therefore T_2 = \cancel{\frac{365 \times 18 \times 10^{30}}{13.8 \times 10^{30}}} \quad 543.73 \text{ day}$$

(Ans.)

② (i)

অভিকর্ষ ও অভিকর্ষজ ত্বরণ

অভিকর্ষজ ত্বরণ: ভূ-পৃষ্ঠে মুক্তভাবে পড়ন্ত কোনো বস্তুর সময়ের সাথে বেগ বৃদ্ধির হারকে অভিকর্ষজ ত্বরণ বলে।

মহাকর্ষ: এই মহাবিশ্বের যেকোনো দুটি বস্তুর মধ্যবর্তী আকর্ষণকে মহাকর্ষ বল বলে।

অভিকর্ষ: পৃথিবী ও এই মহাবিশ্বের যেকোনো বস্তুর মধ্যবর্তী আকর্ষণকে অভিকর্ষ বল বলে।

g - এর পরিবর্তন

(i) ভূ-পৃষ্ঠ থেকে উচ্চতর কোন স্থানে।

(ii) পৃথিবীর অভ্যন্তরে কোন স্থানে।

(iii) পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য।

(ii)

(i) ভূ-পৃষ্ঠ থেকে উচ্চতায় কোনো স্থানে (g):

↳ ধরি,

ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = \frac{GM}{R^2}$

$\therefore$ ভূ-পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় " " , $g' = \frac{GM}{(R+h)^2}$

$$\therefore \frac{g'}{g} = \frac{\frac{GM}{(R+h)^2}}{\frac{GM}{R^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}}$$

$$\therefore \boxed{g' = \frac{R^2}{(R+h)^2} \times g}$$ → ভূ-পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় কোনো স্থানে g'।

Let's go, do some math ☺

ভূ-পৃষ্ঠ হতে 1000 km উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ কত?

$\Rightarrow R = 6.4 \times 10^6$ m

$h = 1000 \times 10^3$ m $= 10^6$ m.

$g = 9.8$

$\therefore g' = \frac{R^2}{(R+h)^2} \times g$

$\Rightarrow g' = \frac{(6.4 \times 10^6)^2}{\{(6.4 \times 10^6) + 10^6\}^2} \times 9.8$

$\therefore g' = 7.33$ ms^{-2} (Ans.)

(iv) ৯.০ পৃথিবীর $\boxed{\begin{matrix} M = 6\times10^{24} \\ R = 6.4\times10^{6}\end{matrix}}$ $\therefore \boxed{\rho = \frac{M}{V} = 9.375\times10^{17}}$

(ii) ~~ভূ.~~ পৃথিবীর অভ্যন্তরে কোনস্থানে

গোলকের আয়তন, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\therefore M = \rho V \quad [\because \rho = \frac{M}{V}]$$

$$\Rightarrow M = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\therefore M = \frac{4}{3}\pi \rho R^3$$

আবার,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\Rightarrow g = \frac{G}{R^2} \times \frac{4}{3}\pi \rho R^3$$

$$\therefore g = \frac{4}{3}\pi \rho G R$$

$$\therefore \boxed{g' = \left(1 - \frac{h}{R}\right) g} \rightarrow$$ ভূ-অভ্যন্তরে h গভীরে g'

Let's go, do some math:

অভিকর্ষ g - অভ্যন্তরীন নিয়মে পৃথিবীর পৃষ্ঠ থেকে 10 km নিচে গেলে, তার অভিকর্ষজ ত্বরণ কত?

[পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6.06×10^6 m]

$$\Rightarrow h = 10\ km = 10{,}000\ m$$

$$\therefore g' = \left(1 - \frac{h}{R}\right) g$$

$$= \left(1 - \frac{10000}{6.4\times10^6}\right)\times 9.8$$

$$= 9.78\ ms^{-2}$$

(Ans.)

(ii)

(iii) পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য

$$\boxed{g_\lambda = g - \omega^2 R\cos^2\lambda}$$

বিষুব রেখা বরাবর $\lambda = 0^\circ$

মেরু অঞ্চলে $\lambda = 90^\circ$

Let's go, do some math:

ঘূর্ণনের জন্য মেরু অঞ্চল হতে বিষুব অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ কত কমে? [$R = 6.4\times10^6$ m]

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{24\times60\times60} = 7.27\times10^{-5}\ \text{rad s}^{-1}$$

∴ মেরু অঞ্চলে,

$$g_{\lambda_1} = g - \omega^2 R\cos^2\lambda_1 = 9.8\ \text{ms}^{-2}$$

∴ বিষুবীয় অঞ্চলে,

$$g_{\lambda_2} = g - \omega^2 R\cos^2\lambda_2$$

$$= 9.8 - (7.27\times10^{-5})^2\times(6.4\times10^6)\times(\cos 0^\circ)^2$$

$$= 9.77\ \text{ms}^{-2}$$

∴ $(9.8-9.77)$ বা $\boxed{0.03\ \text{ms}^{-2}}$ কমে (Ans.)

(iii)

মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র

সংজ্ঞা: কোনো বস্তুর আশেপাশে যে অঞ্চলব্যাপী মহাকর্ষীয় প্রভাব বজায় থাকে অর্থাৎ অন্য কোনো বস্তু স্থাপন হলে সেটি আকর্ষণ বল লাভ করে, তাকে ঐ বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র বলে।

মহাকর্ষীয় প্রাবল্য: মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একক ভরের কোনো বস্তু স্থাপন করলে তার উপর যে মহাকর্ষীয় বল প্রযুক্ত হয়, তাকে ঐ বিন্দুর মহাকর্ষীয় প্রাবল্য বলে।

$$\boxed{E_G = \frac{Gm_1}{d^2}} \qquad m_2 = 1\,kg$$

$$\boxed{E_G = \frac{F}{m_2}} \rightarrow \text{একক } \boxed{N\,kg^{-1}}$$

মহাকর্ষীয় বিভব: অসীম দূরত্ব হতে একক ভরের কোনো বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে স্থানান্তর করতে মহাকর্ষীয় বল দ্বারা সম্পন্ন কাজের পরিমাণকে ঐ বিন্দুর মহাকর্ষীয় বিভব বলে।

∴ m ভরের বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে আনতে কৃতকাজ = W

∴ 1 " " " " " " = $\frac{W}{m}$

$$\therefore \boxed{V_G = \frac{W}{m}} \rightarrow \text{একক: } J\,kg^{-1}$$

$$\boxed{V_G = \frac{E_G}{R}}$$

$$\boxed{V_G = \frac{GM}{R}}$$

(i:)

মুক্তিবেগ

সংজ্ঞা: সর্বনিম্ন যে বেগে কোনো বস্তুকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে তা আর পৃথিবীতে ফিরে আসে না, সে বেগকে মুক্তিবেগ বলে।

পৃথিবীর মুক্তিবেগ $\underbrace{11.2 \text{ km s}^{-1}}_{v_e}$

v_e = মুক্তিবেগ

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = \frac{GMm}{R}$$

$$\Rightarrow v_e^2 = \frac{2GM}{R}$$

$$\therefore \boxed{v_e = \frac{\sqrt{2GM}}{\sqrt{R}}}$$

$$\Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R^2} \cdot R}$$

$$\therefore v_e = \sqrt{2gR}$$

(iii)

02.06/22

মহাকর্ষীয় বল দ্বারা কৃত কাজ

$$\boxed{W = \frac{GMm}{r}}$$

কৃত্রিম উপগ্রহ

$F_c = \frac{mv^2}{(R+h)}$ → কেন্দ্রমুখী বল

$F = \frac{GMm}{(R+h)^2}$ → আকর্ষণ বল

$$\therefore \frac{mv^2}{R+h} = \frac{GMm}{(R+h)^2}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R+h}$$

$$\therefore \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}}$$ → কৃত্রিম উপগ্রহের বেগ নির্ণয়।

$$\boxed{v = \frac{2\pi(R+h)}{T}}$$

পর্যায়কাল : $T = \frac{2\pi(R+h)}{v}$

(iv)

$$\therefore \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \frac{2\pi(R+h)}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{R+h} = \frac{4\pi^2(R+h)^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow T^2 = 4\pi^2(R+h)^2 \times \frac{R+h}{GM}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi(R+h)\sqrt{\frac{R+h}{GM}}$$

$$\therefore \boxed{T = \sqrt{4\pi^2 \frac{(R+h)^3}{GM}}}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 (R+h)^3}{GM}$$

$$\Rightarrow \frac{GMT^2}{4\pi^2} = (R+h)^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = R+h$$

$$\therefore \boxed{h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R}$$

(Ans.)

(c) (i)

Let's go, do some math:

\# ভূ-পৃষ্ঠ থেকে 10 km উচ্চতায় একটি কৃত্রিম উপগ্রহ স্থাপন করলে এর আবর্তন কাল ও বেগ কত হবে?

$\Rightarrow h = 10 \times 10^{3}\ m$

$R = 6.4 \times 10^{6}\ m$

$M = 6 \times 10^{24}\ kg$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)}}$$

$= 7903.28\ ms^{-1}$

$$\therefore T = \frac{2\pi(R+h)}{v}$$

$$= \frac{2\pi(6.4\times10^{6} + 10\times10^{3})}{7903.28}$$

$= 5096.01\ s$ (Ans.)

(ii)

কৃত্রিম উপগ্রহের গতিশক্তি

$$\boxed{T = 24\,hr}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{R+h}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m \times \frac{GM}{R+h}$$

$$\boxed{K = \frac{GMm}{2(R+h)}}$$

যে কৃত্রিম উপগ্রহের T = 24hr তাকে ~~ভূ~~ ভূস্থির উপগ্রহ বলে।

ভূ-স্থির উপগ্রহ, [illegible] ও কৃত্রিম উপগ্রহের সম্পর্ক

math:

একটি ভূস্থির? কৃত্রিম উপগ্রহের পর্যায়কাল 24hr হলে তার ভূপৃষ্ঠ হতে উচ্চতা কত?

$\Rightarrow T = 24\,hr = (24 \times 60 \times 60)\,s = 86400\,s$

~~$\therefore v = \frac{2\pi(R+h)}{T} =$~~

~~$\therefore v = \sqrt{G}$~~

$$\therefore h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R$$

$$= 3.59 \times 10^7\,m \text{ (Ans.)}$$

(iii)

২/০৬/২২

যদি কৃত্রিম উপগ্রহ ভূ-পৃষ্ঠ হতে ৮০০km উঁচুতে অবস্থান করলে g: অভিকর্ষজ ত্বরণ কত হবে?

⇒ দেওয়া আছে,

$h = ৮00\ km = ৮ \times 10^{৫}\ m$

$\therefore g' = \frac{R^2}{(R+h)^2} \times g$

$= 8.43\ ms^{-2}$ (Ans.)

পৃথিবীর ভর উপগ্রহের ভরের 12 গুণ এবং ব্যাসার্ধ 4 গুণ হলে উপগ্রহের অভিকর্ষজ ত্বরণ কত?

⇒ ধরি, উপগ্রহের ভর, $M' = 12 \times M_e$

$= \frac{6 \times 10^{24}}{12}\ kg$

$= ৫ \times 10^{23}\ kg$

(iv)

∴ উপগ্রহের ব্যাসার্ধ, $R' = \frac{R_e}{4}$

$$= \frac{6.4\times10^{6}}{4}$$

$$= 1.6\times10^{6}$$

অনুরূপ জানি,

পৃথিবীর জন্য, $g_e = \frac{GM_e}{R_e^2}$

∴ উপগ্রহের জন্য, $g' = \frac{GM'}{R'^2}$

$$= \frac{6.673\times10^{-11}\times5\times10^{23}}{(1.6\times10^{6})^2}$$

$$= 13.03\ ms^{-2}$$

(Ans.)

(ঘ)

পৃথিবী থেকে চাঁদের দূরত্ব 13.4×10^{6} m । পৃথিবী ও চাঁদের অভিকর্ষজ কোন বিন্দুতে অভিকর্ষীয় প্রাবল্য সমান হবে। [পৃথিবীর ভর চাঁদের 16 গুণ ও ব্যাসার্ধ 3 গুণ]

⇒ আমরা জানি,

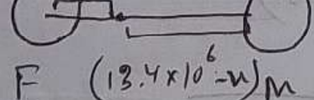
পৃথিবীর ভর, $M_e = 6\times10^{24}$ kg

$\therefore$ চাঁদের ভর, $M_m = \dfrac{6\times10^{24}}{16}$ kg

$= 3.75\times10^{23}$ kg

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R_e = 6.4\times10^{6}$ m

$\therefore$ চাঁদের ব্যাসার্ধ, $R_m = \dfrac{6.4\times10^{6}}{3}$ m $= 2.13\times10^{6}$ m



$$\therefore E_e = \frac{G M_e}{R_e^2} = \frac{6.673\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{\cancel{(6.4\times10^{6})^2}\ x^2} = \frac{4.0038\times10^{14}}{x^2}$$

$$\therefore E_m = \frac{G M_m}{R_m^2} = \frac{6.673\times10^{-11}\times3.75\times10^{23}}{(13.4\times10^{6}-x)^2} = \frac{2.5024\times10^{13}}{(13.4\times10^{6}-x)^2}$$

(ii)

$$\frac{4.0038\times10^{14}}{x^2}=\frac{2.8024\times10^{13}}{(13.4\times10^6-x)^2}$$

$\therefore x=1.072\times10^7$ m (Ans.)

প্রতি বছরে ৮০০ দিন হলে পৃথিবীর অভিকর্ষজ ত্বরণ কত হবে?

$\Rightarrow$ ~~R = 6.~~

$R=6.4\times10^6$ m

$$\omega=\frac{2\pi N}{t}=\frac{2\pi\times1}{800\times24\times60\times60}=1.45\times10^{-7}\ \text{rads}^{-1}$$

$$\therefore g_\lambda=g-\omega^2R\cos^2\lambda$$

$$=9.8-(1.45\times10^{-7})^2\times6.4\times10^6\times\cos^2 0$$

$$=9.7999\ \text{ms}^{-2}\ \text{(Ans.)}$$

(iii)

২১/৮/২২

মুক্তিবেগের সাথে কৃত্রিম উপগ্রহের উৎক্ষেপন বেগের সম্পর্ক

We know,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

$$v_e = \sqrt{2gR}$$

$R >>> h$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{gR^2}{R}}$$

$$\therefore v = \sqrt{gR}$$

$$\therefore \frac{v}{v_e} = \frac{\sqrt{gR}}{\sqrt{2gR}}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v_e} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \boxed{v = 0.707\, v_e} \text{ A}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} v_e$$

$$\therefore v^2 = \frac{1}{2} v_e$$

(i) $v^2 < \frac{1}{2} v_e^2$

= যদি উপবৃত্তাকার পথে ঘুরতে ঘুরতে ভূ-পৃষ্ঠে ফিরে পড়বে।

(ii) $v^2 = \frac{1}{2} v_e^2$

= বৃত্তাকার পথে চাঁদের মত পৃথিবীর চারদিকে ঘুরবে। (যেমনঃ কৃত্রিম উপগ্রহ)

(iii) $v^2 > \frac{1}{2} v_e^2$ বা $v < v_e$

$(7.92 < v < 11.2)$

= কৃত্রিম উপগ্রহটি পৃথিবীকে একটি ফোকাসে রেখে উপবৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকবে।

(iv) $v > v_e$ হয়,

= তাহলে Bye বিদায়।

(iv)

Math

মঙ্গলের ভর পৃথিবীর ভরের ৪ গুন ও ব্যাসার্ধ $\frac{1}{2}$ গুন। মঙ্গলে একটি কৃত্রিম উপগ্রহকে কত বেগে নিক্ষেপ করলে তা আবর্ত উপগ্রহে পরিণত হবে?

⇒

আমরা জানি,

পৃথিবীর ভর, $M_e = 6\times10^{24}$ kg

∴ মঙ্গলের ভর, $M_m = 4\times M_e = 2.4\times10^{25}$ kg

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R_e = 6.4\times10^{6}$ m

∴ মঙ্গলের ব্যাসার্ধ, $R_m = \frac{1}{2}\times6.4\times10^{6} = 3.2\times10^{6}$ m

∴ মঙ্গলের মুক্তিবেগ, $V_m = \sqrt{\frac{2GM_m}{R_m}}$

$= \cancel{2.14\times10^{4}\ ms^{-1}}\ 3.1638\times10^{4}\ ms^{-1}$

$= \cancel{21.4\ kms^{-1}}\ 31.64\ kms^{-1}$

আমরা জানি, কৃত্রিম উপগ্রহের বেগ যদি ঐ গ্রহের মুক্তিবেগের সমান হয়, তখন ঐ উপগ্রহটি আবর্ত উপগ্রহ হবে।

∴ $2.14\times10^{4}\ ms^{-1}$ বেগে নিক্ষেপ করতে হবে।

$21.4\ kms^{-1}$

(৭)(i)

$$\therefore v_m^2 = \frac{1}{2} v_{em}^2$$

$$\therefore v = 22.37\ kms^{-1}$$

∴ কৃত্রিম উপগ্রহটিকে 22.37 kms^{-1} বেগে নিক্ষেপ করলে তা [illegible] উপগ্রহের পরিণত হবে।