知識工学II 課題2(演習編その1)

下記の課題をレポート用紙に解き，指定期日までに提出しなさい．尚，レポートはA4サイズの紙に横書きにし，ホチキスなどでとめず，全ての用紙に科目名・クラス・出席番号・氏名を書くこと．また，計算問題に関しては，計算の過程を省略しないで書くこと．

【課題 2-1】

$\overrightarrow{x} = (3, -2, 5)^t, \overrightarrow{y} = (4, 3, -2)^t$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の計算を行いなさい．

(1) $\overrightarrow{x}^t \overrightarrow{y}$

(2) $\overrightarrow{x} \overrightarrow{y}^t$

(3) $A\vec{x}$

(4) $\overrightarrow{x}^t A$

【課題 2-2】

分散・共分散行列について，以下の設問に応えなさい．

(1) d 次の分散・共分散行列の定義を示しなさい．その際，この行列の (i, j) 成分がどのような統計量になるかを明確にして定義すること．

(2) あるクラスの d 次元サンプルデータを $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ とし，その平均を $\overrightarrow{m}$ とするとき，このクラスの分散・共分散行列は，

$$\Sigma = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{m})(\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{m})^t$$

で表すことができる．この式と前問で示した分散・共分散行列の定義とを比較することにより，Σ が分散・共分散行列であることを証明しなさい．

【課題 2-3】

d 次の正方行列について以下の設問に答えなさい．

(1) 実対称行列とはどのようなものか．定義を述べなさい．

(2) 分散・共分散行列は実対称行列か．理由とともに答えなさい．

(3) 行列の固有値・固有ベクトルとは何か．定義を述べ，それらの直観的な意味を説明しなさい．

(4) d 個の固有ベクトル $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_d}$ が正規直交系をなすとはどういうことか，定義を示しなさい．

(5) d 次の実対称行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ とし，λ_k に対応する固有ベクトルを $\overrightarrow{e_k}$ とする．$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_d}$ が正規直交系をなすとき，次式が成り立つことを示しなさい．

$$A = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k \overrightarrow{e_k} \overrightarrow{e_k}^t$$

【**課題 2-4**】

あるクラスの分散・共分散行列を Σ とし，このクラスの分散が最も大きくなる方向を単位ベクトル $\overrightarrow{A}$ で表すものとする．学習用データ $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ をベクトル $\overrightarrow{A}$ 方向に投影したデータの分散は，$\overrightarrow{A}^t \Sigma \overrightarrow{A}$ で表されるが，$\|\overrightarrow{A}\| = 1$ という制約のもとで分散を最大にする問題は，ラグランジュの未定係数法を用いて解くことができる．すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{A}} \left\{ \overrightarrow{A}^t \Sigma \overrightarrow{A} - \lambda \left(\overrightarrow{A}^t \overrightarrow{A} - 1 \right) \right\} = \overrightarrow{0} \tag{1}$$

となる $\overrightarrow{A}$ を求めればよい．このことについて以下の設問に答えなさい．

(1) 式 (1) を解くと次のような式が得られることを証明しなさい．

$$\Sigma \overrightarrow{A} - \lambda \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$$

(2) 前問の結果から，$\overrightarrow{A}$ は Σ の最大固有値に対応する固有ベクトルでなければならないことを説明しなさい．

以上