

Vizualizace řešení Lorenzových rovnic

Matej Marušák, xmarus06, FIT VUT, 2017

I. ÚVOD

V tejto správe je popísaná aplikácia vytvorená v rámci projektu SFC v akademickom roku 2017/18. V kapitole 2 je úvod do riešenej problematiky, nasledovaný popisom aplikácie v kapitole 3. Kapitola 4 sa zaoberá prekladom a spustením a záverečná kapitola popisuje ovládanie aplikácie.

II. LORENZOV SYSTÉM

Lorenzov systém je systém obyčajných diferenciálnych rovníc, ktoré sú pomenované po svojom objaviteľovi Edwardovi Lorenzovi.

Lorenzove rovnice sú zadané trojicou diferenciálnych rovníc, ktorých hlavnou črtou je chaotické správanie:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

Jedná sa o idealizovaný model tekutín, kde tekutina je naspodku ohrievaná teplou platňou, takáto ohriata tekutina stúpa hore, kde naopak je platňa, ktorá tekutinu ochladzuje a tá následne klesá nadol. Prandtlovo číslo σ , Rayleighovo číslo ρ a β sú parametre systému. Premenná x je úmerná cirkulačnej rýchlosti toku tekutiny. Ak $x > 0$ kvapalina cirkuluje v smere hodinových ručičiek a pri $x < 0$ protismeru hodinových ručičiek. Šírka toku je určená vzdialenosťou ochladzovacej a ohrievacej platne. Parameter β je tejto šírky úmerný. Premenná y je úmerná rozdielu teplôt platní a z skresleniu vertikálneho tepelného profilu.

Pre hodnoty $\sigma = 10$, $b = 8/3$ Lorenz prišiel na to, že sa systém správa chaoticky, vždy keď ρ presiahne hranicu 24.74. [1]

A. Riešenie diferenciálnych rovníc

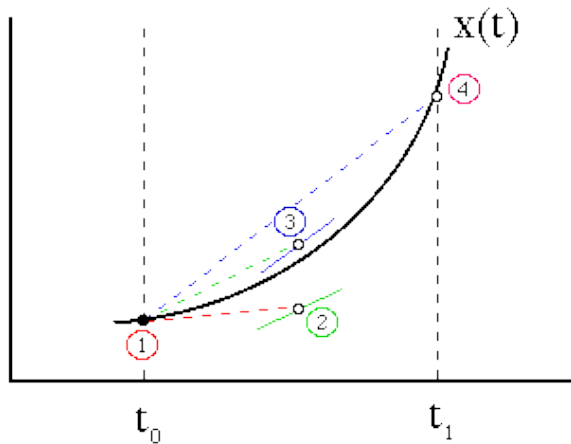
Riešiť diferenciálne rovnice je možné analyticky alebo numericky. Popisu metód analytického riešenia sa táto správa nevenuje, nakoľko možnosti tejto metódy sú obmedzené v možnostiach riešenia ľubovoľnej rovnice i keď poskytujú presné výsledky. V rámci tejto aplikácie sa využíva numerické riešenie, ktoré je menej presné, avšak použiteľné na ľubovoľne zložité rovnice. Najznámejšou metódou je Eulerova metóda, ktorej predpis je zobrazený v rovnici 1. Metóda je avšak kvôli svojej jednoduchosti nie úplne presná a preto existujú ďalšie modifikácie, ako napríklad Runge Kutta druhého či štvrtého rádu. Rovnice pre Runge Kutta štvrtého rádu sú zobrazené v rovniciach 2 a schéma fungovania na obrázku 1.

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t)) \quad (1)$$

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(t, y(t)) \\ k_2 &= hf\left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(t+h, y(t) + k_3) \\ y(t+h) &= y(t) + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}\end{aligned} \quad (2)$$

B. Equilibrium

Equilibrium, teda stav rovnováhy je bod, do ktorého sa systém pokúša dostať. Ak ho systém dosiahne, hovoríme, že sa jedná o priťahujúce equilibriu. Bod $(0, 0, 0)$ je stav rovnováhy pre ľubovoľné hodnoty parametrov a pre $\rho < 1$. Pre $\rho \geq 1$ vznikajú dve nové equilibria, ktorých súradnice sú: $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ a $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Hraničné hodnoty atraktoru sú zobrazené v tabuľke III-D.



Obrázek 1. Znáznornenie princípu Runge Kutta 4 [2]

III. APLIKÁCIA

Aplikácia sa skladá zo štyroch modulov, ktorých vzájomné prepojenie je znázornené na diagrame 3.

A. Modul Lorenz

Jedná sa o časť na výpočet bodov lorenzových rovníc. Z implementačného pohľadu je to trieda, ktorá poskytuje verejné rozhranie na vynútenie výpočtu určitého počtu bodov a na ich získanie. Konštruktor ako parametre prijíma všetky podstatné parametre (napr. typ metódy výpočtu, počiatočné podmienky a parametre lorenzových rovníc). Nakoľko je aplikácia schopná vykresľovať -donekonečna-, body sa ukladajú do polí bodov (pre každú súradnicu jedno), ktoré sa podľa potreby zväčšujú podľa potreby za pomoci volanie funkcie -realloc-. Tento modul implementuje 3 metódy riešenia diferenciálnych rovníc (Euler, RK2 a RK4).

B. Modul Camera

Tento modul je trieda, ktorá ukladá aktuálne informácie o polohe a natočení kamery. Vďaka informáciám je možné sa voľne pohybovať v priestore a otáčať kameru dookola. Verejné funkcie sú typu -set- na nastavenie polohy a natočenia kamery a jedna funkcia typu -get- na získanie parametrov, potrebných na vykreslenie scény.

ρ	Atraktor
(inf, 1.00)	(0, 0, 0) je priťahujúce equilibrium
(1.00, 13.39)	C_{-+} a C_{--} sú priťahujúce equilibria
(13.39, 24.06)	Prechodný chaos: Existujú chaotické dráhy, ale žiadne chaotické atraktory
(24.06, 24.74)	Chaotický atraktor existuje spolu s priťahujúcimi equilibriumami C_{-+} a C_{--}
(24.74, ?)	Chaos: Chaotický atraktor existuje, ale C_{-+} a C_{--} už nie sú priťahujúce
Tabulka I.	HRANIČNÉ HODNOTY ATRAKTORU

C. Modul Canvas

Základné 3D vykreslovacie plátno pre zobrazenie riešenia Lorenzových rovníc. Jedná sa takmer o samotnú aplikáciu, ktorej stačí pridať okno do ktorého môže kresliť a napojiť signály od klávesnice a myši. Všetko ostatné zvláda tento modul samostatne od zadávania príkazov kamere, dotazovanie sa na body krivky a ich vykresľovanie. Okrem toho umožňuje vykresľovať súradnicový systém, body equilibria a meniť farby všetkých komponent. K vykresleniu je využité OpenGL.

D. Modul Window

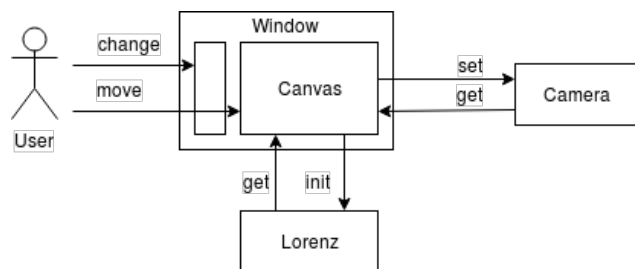
V tomto module je implementované užívateľské rozhranie aplikácie. Jedná sa prevažne o XML súbor popisujúci rozmiestenie ovládacích prvkov (tvorený v QtCreator) a definíciu slotov, do ktorých prichádzajú signály od ovládacích prvkov.

IV. PREKLAD A SPUSTENIE APLIKÁCIE

Preklad a spustenie sa skladá z troch krokov:

- qmake - Vygenerovanie Makefile
- make - samotný preklad
- ./fpl - spustenie aplikácie

Nakoľko ale referenčný server Merlin má neštandardne nainštalované Qt, je potrebné si upraviť premenné prostredia. Aby sa tomuto kroku dalo vyhnúť bol vytvorený skript **make_and_run**, ktorý správne nastaví cesty, preloží a spustí program. Toto je odporúčaný postup na všetkých Linux počítačoch.



Obrázek 2. Vzájomné interakcie v aplikácii

V. OVLÁDANIE APLIKÁCIE

Aplikácia sa dá rozdeliť do dvoch celkov podľa spôsobu ovládania. Jedná sa o nastavovanie parametrov a pohyb v trojdimenzionálnom priestore obsahujúcom krivku.

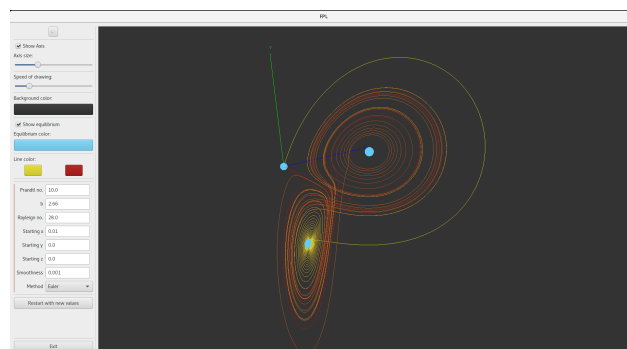
A. Nastavovanie parametrov

Panel umiestený vľavo obsahuje 19 užívateľských prvkov, ktoré sú rozdelené do dvoch častí. Jedná sa o časť s dynamickými voľbami v hornej časti a v spodnej časti označené červenou čiarou sa nachádzajú nastavenia statických parametrov. Dynamické vlastnosti sú tie, ktoré je možné zmeniť za behu aplikácie a ich efekt sa prejaví okamžite. Patrí sem zobrazovanie ôs, equilibria, ich veľkosti a farby ako aj nastavovanie farby pozadia a krivky. Je možné rovnako aj zrýchľovať a spomaľovať vykresľovanie krivky či jej vykresľovanie úplne pozastaviť. Statické vlastnosti sú tie, ktoré sa prejavajú až po reštartovaní aktuálne vykresľovanej krivky. Sem hlavne patria parametre lorenových rovníc, počiatkové podmienky, typ výpočtu diferenciálnych rovníc a veľkosť kroku týchto metód.

B. Pohyb v 3D priestore

Aplikácia umožňuje tzv. -first-person- pohyb v priestore s rozšírením a pohyb kolmo hore a dole. Pohyb dopredu/dozadu/doprava/dole je vykonávaný za pomoci w/s/d/a. Je potrebné aby pri tomto pohybe bolo vybrané práve vykresľovanie plátna (kliknutím naň). Pohyb kolmo hore a kolmo dole je vykonávaný za pomoci koliečka myši. Samotné

otáčanie pohľadu je možné za pomoci myši - kliknúť a potiahnuť.



Obrázek 3. Výsledná aplikácia

VI. HODNOTY PARAMETROV

Aplikácia umožňuje voľné nastavovanie parametrov pre účely experimentovania ako s lorenzovými rovnicami, tak s presnosťou výpočtu diferenciálnych rovníc.

A. Parametre lorenzových rovníc

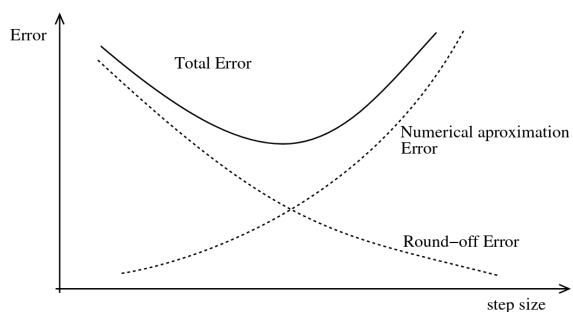
V rovniciach sa predpokladá úprava parametra označeného ako **Rayleigh no.** a ostatné argumenty ostávajú konštantné. Avšak aplikácia umožňuje meniť všetky parametre. Rovnako je možné meniť počiatkové podmienky, ktoré sú označené ako **Starting ..**, kde .. sú jednotlivé osi.

B. Parametre výpočtu diferenciálnych rovníc

Aplikácia umožňuje vybranie metódy výpočtu diferenciálnej rovnice. Okrem metódy je možné vybrať aj veľkosť kroku (**smoothes**), s ktorou vybraná metóda počíta. Je avšak potrebné myslieť na fakt, že menší krok neznamena lepšiu presnosť, ako je zrejme z diagramu 4.

VII. ZNÁME CHYBY

Počas vývoja bola objavená chyba vo frameworku Qt. Chyba bola nahlásená vývojárom a na jej opravení sa pracuje. (<https://bugreports.qt.io/browse/QTBUG-63720>)



Obrázek 4. Chyba numerickej metódy [3]

Chyba sa prejavuje iba pri použití protokolu Wayland a jedná sa o nemožnosť skrolovať koliečkom myši a teda nie je možný pohyb v kolmo hore a dole.

REFERENCE

- [1] K. Alligood T. Sauer and J. A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
- [2] S. McMillan, *The Runge-Kutta Method*, dostupné z: http://www.physics.drexel.edu/~steve/Courses/Comp_Phys/Integrators/rk4.html, prevzane: 22.10.2017 [online].
- [3] P. Peringer and M. Hrubý, *Modelování a simulace*, dostupné z: <http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/IMS/public/prednasky/IMS.pdf>, verzia: 17.10.2017 [online].