

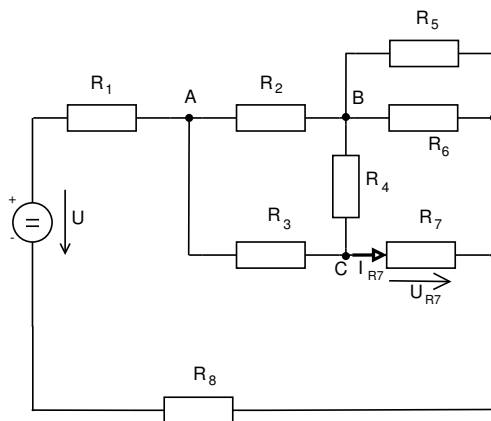
Teória obvodov 2014/2015

Projekt

21. decembra 2014

Autor: Matej Marušák, xmarus06@stud.fit.vutbr.cz
Fakulta Informačních Technologí
Vysoké Učení Technické v Brně

Príklad 1, Varianta F



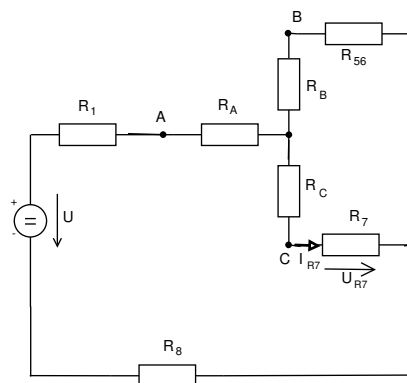
Obr.1

Rezistory R_5 a R_6 sú zapojené paralelne a teda platí vzťah:

$$R_{56} = \frac{R_5 * R_6}{R_5 + R_6}$$

Ďalej môžeme nahradiť zapojenie do trojuholníka ABC zapojením do hviezdy. (Uzly A,B,C sú v prekreslenom obrázku len pre orientáciu, nakoľko sa nejedná už o uzly.)

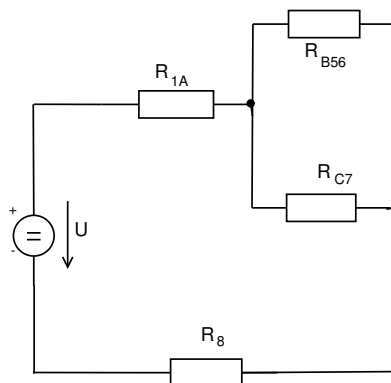
$$R_A = \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3 + R_4} ; R_B = \frac{R_2 * R_4}{R_2 + R_3 + R_4} ; R_C = \frac{R_3 * R_4}{R_2 + R_3 + R_4}$$



Obr.2

Následne pre sériovo zapojené rezistory platia vzťahy:

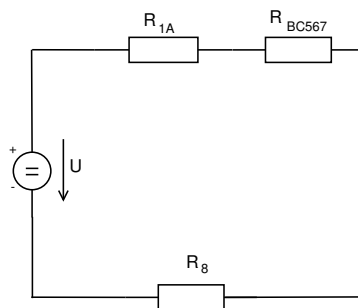
$$R_{C7} = R_C + R_7 ; R_{B56} = R_B + R_{56} ; R_{1A} = R_1 + R_A$$



Obr.3

Rezistor R_{B56} a rezistor R_{C7} vieme prepísať na jeden, a to vzorcom:

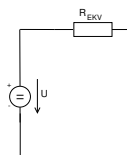
$$R_{BC567} = \frac{R_{B56} * R_{C7}}{R_{B56} + R_{C7}}$$



Obr.4

Následne vieme spojiť rezistory R_{1A} , R_{BC567} , R_8 do jedného a to ich sčítaním.

$$R_{EKV} = R_{1A} + R_{BC567} + R_8$$



Obr.5

Teraz môžeme dosadiť hodnoty do všetkých vyššie napísaných vzorcov, až sa dopracujeme k R_{EKV} . Pre zadanie F sú to hodnoty:

U[V]	$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$R_5[\Omega]$	$R_6[\Omega]$	$R_7[\Omega]$	$R_8[\Omega]$
125	510	500	550	250	300	800	330	250

$$R_{56} = \frac{300 * 800}{300 + 800} = \frac{2400}{11} \doteq 218.181818\Omega$$

$$R_A = \frac{500 * 550}{500 + 550 + 250} = \frac{2750}{13} \doteq 211.538461\Omega$$

$$R_B = \frac{500 * 250}{500 + 550 + 250} = \frac{1250}{13} \doteq 96.153846\Omega$$

$$R_C = \frac{550 * 250}{500 + 550 + 250} = \frac{1375}{13} \doteq 105.769230\Omega$$

$$R_{C7} = \frac{1375}{13} + 330 = \frac{5665}{13} \doteq 435.769230\Omega$$

$$R_{B56} = \frac{1250}{13} + \frac{2400}{11} = \frac{44950}{143} \doteq 314.335664\Omega$$

$$R_{1A} = 510 + \frac{2750}{13} = \frac{9380}{13} \doteq 721.538461\Omega$$

$$R_{BC567} = \frac{\frac{44950}{143} * \frac{5665}{13}}{\frac{44950}{143} + \frac{5665}{13}} \doteq 182.61540\Omega$$

$$R_{EKV} = 721.538461 + 182.61540 + 250 \doteq 1154.153861\Omega$$

Následne vieme vypočítať I v obrázku Obr.1

$$I = \frac{U}{R_{EKV}} = \frac{125}{1154.153861} = 0.108304A$$

Potom vyrátame U na prvku $U_{R_{BC567}}$

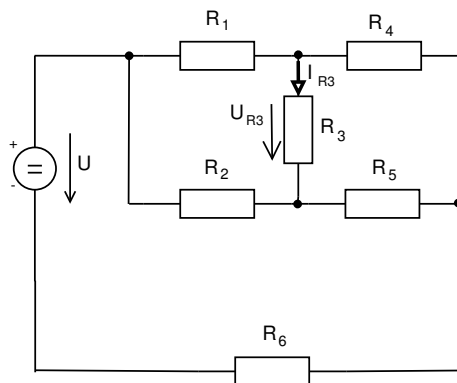
$$U_{R_{BC567}} = I * R_{BC567} = 0.108304 * 182.61540 = 19.778060V$$

$U_{R_{BC567}}$ je rovnako aj napätie na odpore R_{C7} . Vyrátme si teda prúd pretekajúci touto súčiastkou. $I_{R_{C7}} = \frac{U_{R_{BC567}}}{R_{C7}} = \frac{19.778060}{435.769230} = \mathbf{0.045387A}$.

A platí $I_{C7} = I_C = I_7$.

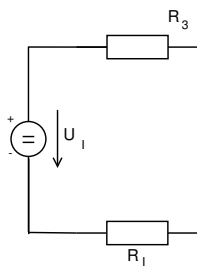
Následne dorátame U_7 . $U_7 = R_7 * I_7 = 330 * 0.045387 = \mathbf{14.97771V}$

Príklad 2, Varianta B



Obr.6

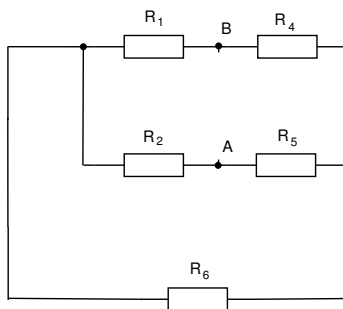
Vytvoríme náhradné zapojenie: Pričom platí vzťah:



Obr.7

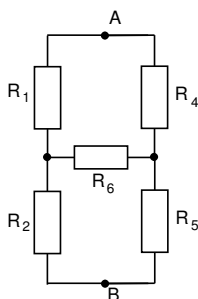
$$I_{R_3} = \frac{U_i}{R_i + R_3}$$

Vytvoríme si náhradné zapojenie a skratujeme zdroj.



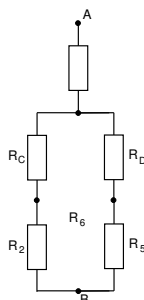
Obr.8

Obvod prekreslíme, aby sme ho vedeli vypočítať.



Obr.9

Upravíme trojuholník na hviezdu (rovnako ako v príklade 1.)



Obr.10

$$R_A = \frac{R_1 * R_4}{R_1 + R_4 + R_6} ; R_C = \frac{R_1 * R_6}{R_1 + R_4 + R_6} ; R_D = \frac{R_4 * R_6}{R_1 + R_4 + R_6}$$

Následne vieme urobiť sériovú kombináciu rezistorov R_C a R_2 a rovnako aj pre rezistory R_D a R_5 .

$$R_{C2} = R_C + R_2 ; R_{D5} = R_D + R_5$$

Následne môžeme spojiť rezistory R_{C2} a R_{D5} do jedného a to vzorcom:

$$R_{CD25} = \frac{R_{C2} * R_{D5}}{R_{C2} + R_{D5}}$$

Pre dokončenie už len sčítame hodnoty rezistorov R_A a R_{CD25} .

$$R_i = R_{ACD25} = R_A + R_{CD25}$$

Dosadíme do vyššie napísaných vzorcov hodnoty pre zadanie B.

U[V]	R ₁ [Ω]	R ₂ [Ω]	R ₃ [Ω]	R ₄ [Ω]	R ₅ [Ω]	R ₆ [Ω]
100	310	610	220	570	200	170

$$R_A = \frac{1178}{7} \Omega$$

$$R_C = \frac{1054}{21} \Omega$$

$$R_D = \frac{646}{7} \Omega$$

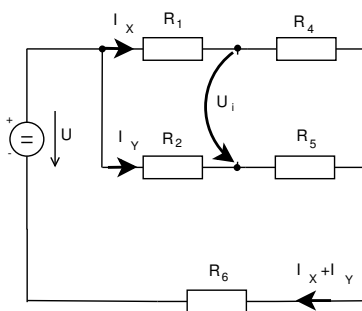
$$R_{C2} = \frac{13864}{21} \Omega$$

$$R_{D5} = \frac{2046}{7} \Omega$$

$$R_{CD25} = 202.592198 \Omega$$

$$\mathbf{R_i} = \mathbf{R_{ACD25}} = \mathbf{370.877912 \Omega}$$

Teraz potrebujeme vypočítať U_i . Vytvoríme si nasledujúce zapojenie a stanovíme si pomocné prúdy I_X a I_Y .



Obr.11

Podľa druhého Kirchhoffoveho zákona zostavíme 3 rovnice o 3och neznámych.

$$R_1 * I_X + U_i + R_5 * I_Y + R_6 * (I_X + I_Y) - U = 0$$

$$R_1 * I_X + U_i - R_2 * I_Y = 0$$

$$R_4 * I_X - U_i - R_5 * I_Y = 0$$

Dosadením hodnôt a upravením rovníc získavame:

$$\begin{aligned}
480 * I_X + U_i + 370 * I_Y &= 100 \\
310 * I_X + U_i - 610 * I_Y &= 0 \\
570 * I_X - U_i - 200 * I_Y &= 0
\end{aligned}$$

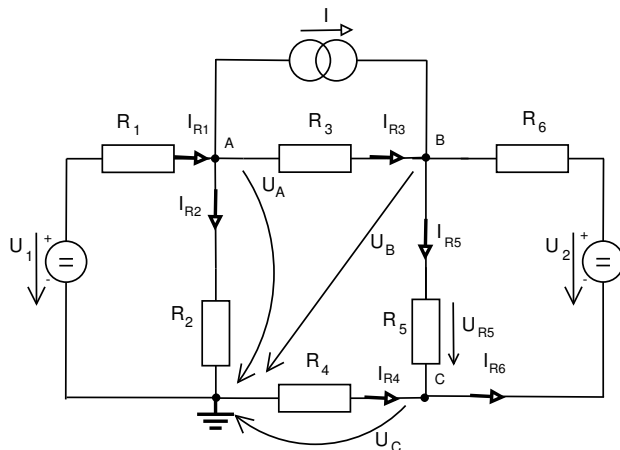
Na výpočet využijeme Cramerovo pravidlo.

$$\mathbf{U}_i = \frac{\begin{vmatrix} 480 & 100 & 370 \\ 310 & 0 & -610 \\ 570 & 0 & -200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 480 & 1 & 370 \\ 310 & 1 & -610 \\ 570 & -1 & -200 \end{vmatrix}} = \frac{285700}{10001} \doteq \mathbf{28.567143V}$$

Následne už len dosadíme do pôvodneho vzorca a dopočítame U_{R_3} a I_{R_3} .

$$\begin{aligned}
\mathbf{I_{R_3}} &= \frac{\mathbf{285700}}{\mathbf{370.877912 + 220}} = \mathbf{0.048347A} \\
\mathbf{U_{R_3}} &= \mathbf{0.048347 * 220 = 10.636328V}
\end{aligned}$$

Príklad 3, Varianta A



Obr.12

Prvý Kirchhoffov zákon „Algebraický súčet prúdov v uzle je rovný nule“. Na základe tohto zostavíme pre každý uzol rovnicu s výnimkou jedného, ktorý je uzemnený.

$$A : I_{R_1} - I_{R_2} - I_{R_3} - I = 0$$

$$B : I_{R_3} - I_{R_5} + I_{R_6} + I = 0$$

$$C : I_{R_5} - I_{R_6} + I_{R_4} = 0$$

Zadané hodnoty pre skupinu A:

$U_1[\text{V}]$	$U_2[\text{V}]$	$I[\text{A}]$	$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$R_5[\Omega]$	$R_6[\Omega]$
120	90	0.7	530	490	650	390	320	120

Vytvoríme si náhradné zapojenia a pomocou druhého Kirchhoffovho zákona napíšeme rovnice:

$$\begin{aligned} I_{R_1} &= \frac{U_1 - U_A}{R_1} = \frac{120 - U_A}{530} & I_{R_4} &= \frac{-U_C}{R_4} = \frac{-U_C}{390} \\ I_{R_2} &= \frac{U_A}{R_2} = \frac{U_A}{490} & I_{R_5} &= \frac{U_B - U_C}{R_5} = \frac{U_B - U_C}{320} \\ I_{R_3} &= \frac{U_A - U_B}{R_3} = \frac{U_A - U_B}{650} & I_{R_6} &= \frac{U_C - U_B + U_2}{R_6} = \frac{U_C - U_B + 90}{120} \end{aligned}$$

Dosadením a upravovaním rovníc postupne získavame:

$$\begin{aligned} \frac{120 - U_A}{530} - \frac{U_A}{490} - \frac{U_A - U_B}{650} - 0.7 &= 0 \\ \frac{U_A - U_B}{650} + 0.7 - \frac{U_B - U_C}{320} + \frac{U_C - U_B + 90}{120} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{U_B - U_C}{320} - \frac{U_C - U_B + 90}{120} + \frac{-U_C}{390} = 0$$

$$U_A = 0.281457U_B - 86.6408$$

$$\frac{0.281457U_B - 86.6408 - U_B}{650} + 0.7 - \frac{U_B - U_C}{320} + \frac{U_C - U_B + 90}{120} = 0$$

$$U_B = 0.912013U_C + 104.802$$

$$\frac{0.912013U_C + 104.802 - U_C}{320} - \frac{U_C - (0.912013U_C + 104.802) + 90}{120} + \frac{-U_C}{390} = 0$$

$$\mathbf{U_C = 126.2085V}$$

$$\mathbf{U_B = 219.9057V}$$

$$\mathbf{U_A = -24.7467V}$$

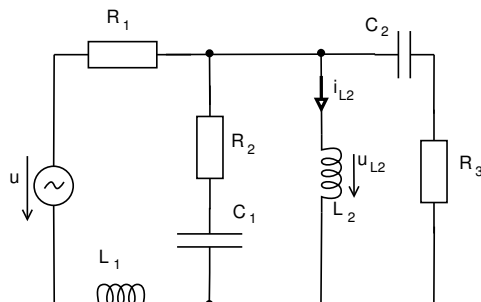
Vypočítame I_{R_5} .

$$I_{R_5} = \frac{219.9057 - 126.2085}{320} = \mathbf{0.2928A}$$

A následne U_{R_5} .

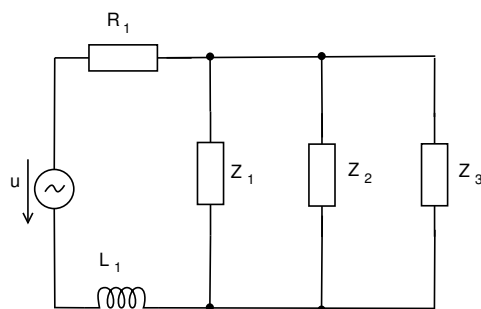
$$U_{R_5} = 320 * 0.2928A = \mathbf{93.6972V}$$

Príklad 4, Varianta F



Obr.13

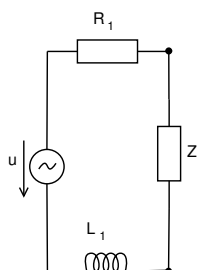
Prerobíme rezistor R_3 a kondenzátor C_2 na impedanciu $Z_3 = C_2 + R_3$. Ďalej len pre jednoduchosť nahradíme cievku L_2 impedanciou Z_2 . Následne vytvoríme impedanciu $Z_1 = R_2 + C_1$.



Obr.13

Teraz môžeme nahradiť paralelne zapojené impedancie Z_1 a Z_2 a Z_3 impedanciou Z podľa vzorca:

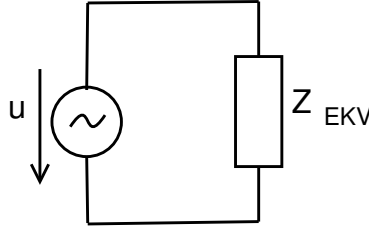
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$



Obr.14

Teraz už môžeme vytvoriť Z_{EKV} a to vzorcom:

$$Z_{EKV} = Z + R_1 + j * \omega * L_1$$



Obr.14

Teraz môžeme vypočítať I . $I = \frac{u}{Z_{EKV}}$

Zopakujeme podobný postup ako v príklade 1. Vypočítame $U_Z = U_{Z_1} = U_{Z_2} = U_{Z_3} = U_{L_2} = I * Z$

Nakoniec už len dorátame $\varphi_{L_2} = \arctan \frac{Im}{Re}$

Dosadíme do vyššie napísaných vzorcov hodnoty pre zadanie F:

U[V]	$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$L_1[mH]$	$L_2[mH]$	$C_1[\mu F]$	$C_2[\mu F]$	$f[Hz]$
75	165	150	380	430	320	310	235	95

$$\omega = 2 * \pi * f = 190\pi \text{ rad/s}$$

$$Z_3 = -\frac{j}{190 * \pi * 0.000235} + 380 = (380 - 7.1290j)\Omega$$

$$Z_2 = j * \pi * 0.32 = 191.008833j\Omega$$

$$Z_1 = 150 - \frac{j}{190 * \pi * 0.00031} = (150 - 5.404243j)\Omega$$

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{150 - 5.404243j} + \frac{1}{191.008833j} + \frac{1}{380 - 7.1290j}} = (83.875422 + 44.662846j)\Omega$$

$$Z_{EKV} = 83.875422 + 44.662846j + 165 + j * 190 * \pi * 0.43 = (248.875422 + 301.330966j)\Omega$$

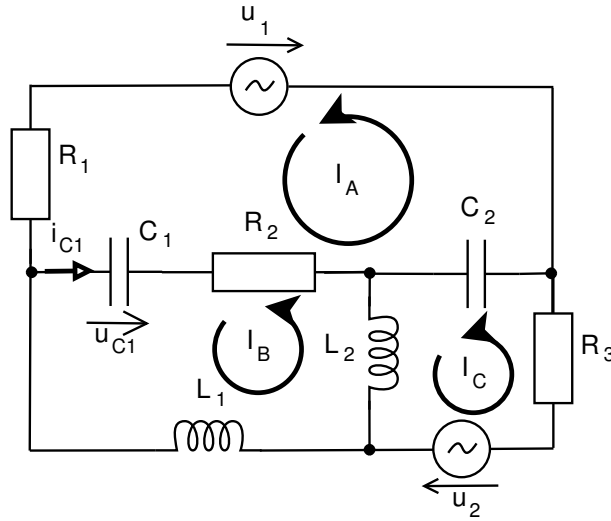
$$\text{Zo zadania } u = U * \sin(2 * \pi * f * t) = 75 * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 75V$$

$$I = \frac{75}{248.875422 + 301.330966j} = (0.122206 - 0.147963j)A$$

$$U_{L_2} = (0.122206 - 0.147963j) * (83.875422 + 44.662846j) = 16.858528 - 6.952391j = \mathbf{18.2358V}$$

$$\varphi_{L_2} = \arctan \frac{-6.952391}{16.858528} = \mathbf{-0.3911rad}$$

Príklad 5, Varianta B



Obr.15

Platia axiómy:

$$Z_C = -\frac{j}{160 * \pi * C}$$

$$Z_L = j * 160 * \pi * C$$

Pre každú smyčku zostavíme rovnicu:

$$U_1 - \frac{j}{160 * \pi * C_2} * (I_A - I_C) + (I_A - I_B) * (R_2 - \frac{j}{160 * \pi * C_1}) + R_1 * I_A = 0$$

$$(I_B - I_A) * (R_2 - \frac{j}{160 * \pi * C_1}) + (j * \pi * 160 * L_2) * (I_B - I_C) + (j * \pi * 160 * L_1) * I_B = 0$$

$$-U_2 + (j * 160 * \pi * L_2) * (I_C - I_B) + (I_C - I_A) * (-\frac{j}{160 * \pi * C_2}) + R_3 * I_C = 0$$

Dosadíme hodnoty pre zadanie B:

$U_1[V]$	$U_2[V]$	$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$L_1[mH]$	$L_2[mH]$	$C_1[\mu F]$	$C_2[\mu F]$	$f[Hz]$
25	40	115	150	130	100	85	220	95	80

$$-25 - \frac{j}{160 * \pi * 0.000095} * (I_A - I_C) + (I_A - I_B) * (150 - \frac{j}{160 * \pi * 0.00022}) + 115 * I_A = 0$$

$$(I_B - I_A) * (150 - \frac{j}{160 * \pi * 0.00022}) + (j * \pi * 160 * 0.085) * (I_B - I_C) + (j * \pi * 160 * 0.1) * I_B = 0$$

$$-40 + (j * 160 * \pi * 0.085) * (I_C - I_B) + (I_C - I_A) * \left(-\frac{j}{160 * \pi * 0.000095}\right) + 130 * I_C = 0$$

A upravíme rovnice:

$$(265 - 29.984432j) * I_A + (-150 + 9.042899j) * I_B + 20.941532j * I_C = 25$$

$$(-150 + 9.042894j) * I_A + (150 + 83.948248j) * I_B + (-42.725660j) * I_C = 0$$

$$(20.941439j) * I_A + (-42.725660j) * I_B + (130 + 21.784220j) * I_C = 40$$

Napišeme determinant menovateľa pre výpočet Cramerovým pravidlom.

$$\begin{vmatrix} 265 - 29.984432j & -150 + 9.042899j & 20.941532j \\ -150 + 9.042894j & 150 + 83.948248j & -42.725660j \\ 20.941439j & -42.725660j & 130 + 21.784220j \end{vmatrix} \\ = 2415733.1801 + 3090649.6063j$$

A následne napíšeme detrimanty pre I_A, I_B, I_C .

$$D_{I_A} = \begin{vmatrix} 25 & -150 + 9.042899j & 20.941532j \\ 0 & 150 + 83.948248j & -42.725660j \\ 40 & -42.725660j & 130 + 21.784220j \end{vmatrix} \\ = 573192.8057 + 485227.9532j$$

$$D_{I_B} = \begin{vmatrix} 265 - 29.984432j & 25 & 20.941532j \\ -150 + 9.042894j & 0 & -42.725660j \\ 20.941439j & 40 & 130 + 21.784220j \end{vmatrix} \\ = 558462.4011 + 379544.7763j$$

$$D_{I_C} = \begin{vmatrix} 265 - 29.984432j & -150 + 9.042899j & 25 \\ -150 + 9.042894j & 150 + 83.948248j & 0 \\ 20.941439j & -42.725660j & 40 \end{vmatrix} \\ = 847565.2718 + 900150.9828j$$

Podielom vyrátame I_A, I_B a I_C .

$$I_A = 0.187443 - 0.038949jA$$

$$I_B = 0.163904 - 0.052582jA$$

$$I_C = 0.313854 - 0.028919jA$$

Následne dopočítame i_{C_1} .

$$i_{C_1} = I_A - I_B = (0.187443 - 0.038949j) - (0.163904 - 0.052582j) \\ = 0.0235 + 0.0136jA.$$

Teraz už môžeme dopočítať U_{C_1} .

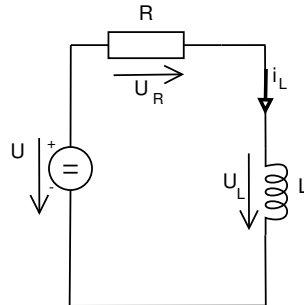
$$U_{C_1} = i_{C_1} * -\frac{j}{160 * \pi * 0.00022} = 0.1233 - 0.2129jV$$

Vypočítame $|U_{C_1}|$.

$$|U_{C_1}| = \mathbf{0.2460V}.$$

$$\varphi_{C_1} = \arctan \frac{-0.2129}{0.1233} = \mathbf{-1.0459rad}$$

Príklad 6, Varianta A



Obr.16

Platí druhý Kirchhoffov zákon a teda aj vzťah:

$$U = U_R + U_L$$

Využitím Ohmovho zákona upravíme rovnicu na tvar:

$$U = R * I + L * I'_L$$

Rovnako platí aj vzťah:

$$I = I_L = I_R$$

Zadané hodnoty pre skupinu A:

U[V]	L[H]	R[Ω]	$i_L(0)$ [A]
20	40	10	9

Dosadením hodnôt a upravením získavame rovnicu v tvare:

$$4I'_L + I_L = 2$$

Zostrojíme charakteristickú rovnicu a vyjadríme z nej:

$$4\lambda + 1 = 0 \quad \lambda = -\frac{1}{4}$$

Napišeme očakávaný tvar riešenia a dosadíme λ :

$$i_L(t) = C(t) * e^{\lambda t}$$

$$i_L(t) = C(t) * e^{-\frac{1}{4}t}$$

Zderivujeme a dosadíme do zadania:

$$i'_L = C'(t) * e^{-\frac{1}{4}t} + C(t) * e^{\frac{1}{4}t} * -\frac{1}{4}$$

$$4 * C'(t) * e^{-\frac{1}{4}t} - C(t) * e^{\frac{1}{4}t} + C(t) * e^{-\frac{1}{4}t} = 2$$

$$C'(t) = \frac{1}{2} * e^{\frac{1}{4}t}$$

Zintegrujeme a dosadíme do očakávaného riešenia:

$$C(t) + k_1 = \frac{1}{2} * e^{\frac{1}{4}t} * 4 + k_2$$

$$i_L(t) = (2 * e^{\frac{1}{4}t} + k) * e^{-\frac{1}{4}t}$$

Roznásobením a upravením získame obecné riešenie:

$$i_L = 2 + k * e^{-\frac{1}{4}t}$$

Dosadením počiatočnej podmienky dostaneme:

$$k = 7$$

Dosadením získavame hľadané analytické riešenie:

$$\mathbf{i_L(t) = 7 * e^{-\frac{1}{4}t} + 2}$$

Následne vykonáme skúšku riešenia:

Zderivujeme analytické riešenie a dosadíme do zadania:

$$\begin{aligned} i'_L(t) &= 7 * e^{-\frac{1}{4}t} * -\frac{1}{4} \\ 4 * (7 * e^{-\frac{1}{4}t} * -\frac{1}{4}) + 7 * e^{-\frac{1}{4}t} + 2 &= 2 \end{aligned}$$

Po upravení rovnice získame rovnicu:

$$\mathbf{0 = 0}$$

A teda sme potvrdili že sme správne vypočítali príklad.

Súhrn výsledkov

Príklad č.	Varianta zadania	Výsledok
1	F	$U_{R_7} = 14.9777V$ $I_{R_7} = 0.0454A$
2	B	$U_{R_3} = 10.6363V$ $I_{R_3} = 0.0483A$
3	A	$U_{R_5} = 93.6972V$ $I_{R_5} = 0.2928A$
4	F	$ U_{C_1} = 18.2358V$ $\varphi_{C_1} = -0.3911rad$
5	B	$ U_{C_1} = 0.2460V$ $\varphi_{C_1} = -1.0458rad$
6	A	$I_L(t) = 7 * e^{-\frac{1}{4}t} + 2$