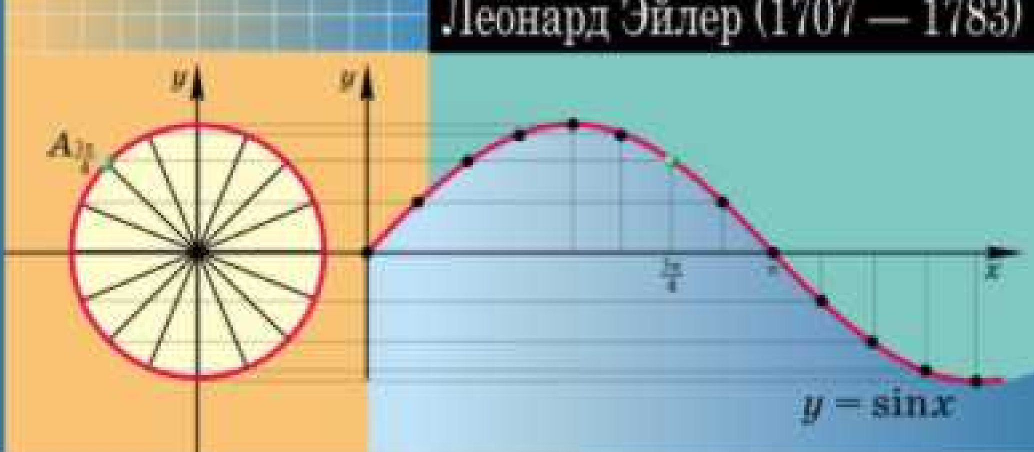
АЛГЕБРА

10

Леонард Эйлер (1707 — 1783)



АЛГЕБРА

Учебное пособие для 10 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Под редакцией профессора
Л. Б. Шнепермана

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

3-е издание, пересмотренное и исправленное

Минск «Народная асвета» 2013

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721
А45

Авторы:
Е. П. Кузнецова, Г. Л. Муравьева, Л. Б. Шнеперман, Б. Ю. Ящин

Рецензенты:
кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета (канд. физ.-мат. наук доцент *Ю. Д. Чурбанов*);
методист высшей категории отдела общеобразовательных дисциплин государственного учреждения дополнительного образования взрослых «Витебский областной институт развития образования» *Т. Т. Талькова*;
учитель математики высшей категории государственного учреждения образования «Миорская средняя школа № 1» *И. А. Ханецкая*

А45 **Алгебра** : учеб. пособие для 10-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Е. П. Кузнецова [и др.] ; под ред. проф. Л. Б. Шнепермана. — 3-е изд., пересмотр. и испр. — Минск : Нар. асвета, 2013. — 271 с. : ил.
ISBN 978-985-12-2131-4.

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721

ISBN 978-985-12-2131-4

ОТ АВТОРОВ

В 10-м классе вы познакомитесь с очень важным понятием производной функции и узнаете, как с помощью производной можно установить некоторые свойства функции. Вы также будете изучать тригонометрические выражения и тригонометрические функции, изображать графики таких функций, решать тригонометрические уравнения.

Упражнения в учебном пособии нумеруются по главам. Число перед точкой обозначает номер главы, число после точки — номер упражнения в этой главе. Например, 1.15 — это 15-е упражнение из 1-й главы. Аналогично пункт теории 3.7 обозначает 7-й пункт из 3-й главы.

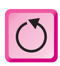
Среди упражнений встречаются номера с кружком (например, 2.20°), со звездочкой (например, **1.111***) и номера без всяких обозначений (например, 2.38). Кружком отмечены упражнения, которые должны уметь решать все учащиеся. Остальные задания адресованы тем, кто хочет лучше знать алгебру и получать отметки выше, чем 5—6 баллов. Наиболее трудные задания отмечены звездочкой.

Пояснения к преобразованиям при решении примеров размещаются между двумя вертикальными стрелками (↓...↓ или ↑...↑); направление стрелок показывает, какое преобразование поясняется.

Окончание доказательства теоретического утверждения обозначается следующим символом ☒. Теоретический материал, выделенный треугольниками ▲, предназначен для учащихся, которые интересуются математикой. Особенности теории, на которые надо обратить внимание, отмечены восклицательным знаком .

Весы  нарисованы там, где можно сравнить варианты решения или доказательства.

Исторические сведения, которые встречаются в книге, отмечены знаком .

Материал для повторения отмечен знаком .

После каждого пункта теории предложены вопросы под знаком . Они помогут повторить новый материал и выделить в нем главное.

Глава 1
Производная и ее применение

1.1. Функция

Напомним определение функции и введем некоторые обозначения, связанные с этим понятием.

Определение. ***Функцией*, определенной на числовом множестве D, называется закон, по которому каждому значению x из множества D ставится в соответствие одно определенное число y.**

При этом x называют *независимой переменной* или *аргументом*, y — *зависимой переменной* или *функцией от* x, множество D — *областью определения функции*.

Будем обозначать функцию какой-нибудь буквой, скажем f. Число y, которое функцией f ставится в соответствие числу x, называется значением функции f в точке x и обозначается $f(x)$ (читается «*эф от икс*»).

При таких обозначениях аргумента и функции тот факт, что y является функцией от x, записывается в виде равенства $y = f(x)$, а функцию f называют еще «*функция* $y = f(x)$».

Заметим, что для обозначения функции употребляются и другие буквы, например g, h и т. п.

Рассмотрим несколько примеров функций.

Пример 1. Для функции f, заданной формулой $y = x^2$, символ f означает возведение аргумента в квадрат, а $f(x) = x^2$.

Пример 2. Для функции f, заданной формулой $y = \frac{1}{x}$, символ f означает отыскание числа, обратного аргументу, а $f(x) = \frac{1}{x}$.

Пример 3. Для функции f, заданной формулой $y = \sqrt{x}$, символ f означает извлечение арифметического квадратного корня из аргумента, а $f(x) = \sqrt{x}$.

Область определения функции f обозначается $D(f)$.

Если функция f задана формулой $y = f(x)$, а ее область определения не указана, то считается, что область определения $D(f)$ состоит из тех значений x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл, т. е. $D(f)$ совпадает с естественной областью определения выражения $f(x)$. Когда в задании требуется найти область определения функции $y = f(x)$, то имеется в виду, что надо указать именно естественную область определения выражения $f(x)$.

Так, в примере 1 область определения $D(f) = \boldsymbol{R}$; в примере 2 область определения $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; в примере 3 область определения $D(f) = [0; +\infty)$.

Напомним, что множество всех значений, которые может принимать функция, называется ***множеством*** **(*областью*)** ***значений функции***.

Множество значений функции f обозначается $E(f)$. Так, в примере 1 множество значений $E(f) = [0; +\infty)$; в примере 2 множество значений $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; в примере 3 множество значений $E(f) = [0; +\infty)$.

Графиком функции f называется множество всех точек $(x; f(x))$ на координатной плоскости, где $x \in D(f)$, т. е. множество всех точек, абсциссы которых — значения аргумента, а ординаты — соответствующие им значения функции.

Таким образом, при изображении графика функции $y = f(x)$ на координатной плоскости Oxy отмечают точки $(x; f(x))$.

На рисунках 1, 2, 3 изображены графики функций $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$ соответственно.

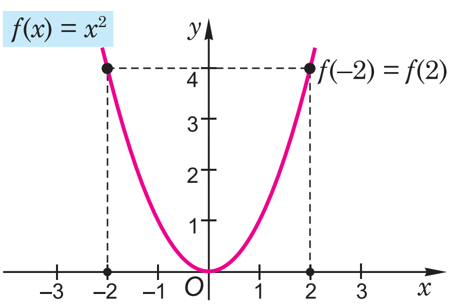


Рис. 1

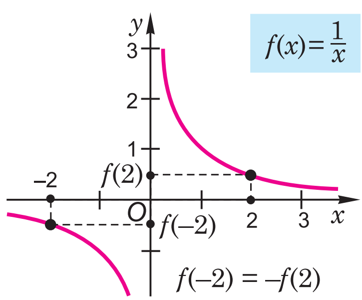


Рис. 2

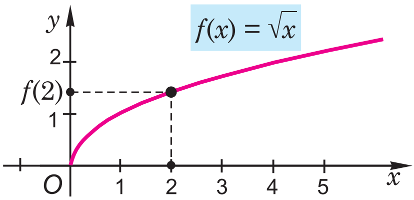


Рис. 3

Используя введенное обозначение функции, напомним определения возрастающей и убывающей функций и сформулируем определения четной и нечетной функций.

Определение. **Функция f называется *возрастающей на некотором промежутке*, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.**

Функция f называется *убывающей на некотором промежутке*, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

Так, в примере 1 функция f — убывающая на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастающая на промежутке $[0; +\infty)$; в примере 2 функция f — убывающая на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывающая на промежутке $(0; +\infty)$; в примере 3 функция f — возрастающая в области определения.

! При исследовании функций на возрастание и убывание принято указывать промежутки возрастания и промежутки убывания наибольшей длины.

Определение. **Функция f называется *четной*, если для любого значения x из ее области определения значение $-x$ также принадлежит области определения и верно равенство $f(-x) = f(x)$.**

! Таким образом, область определения четной функции симметрична относительно нуля.

Функция $f(x) = x^2$ четная, так как область определения $D(f) = \boldsymbol{R}$ симметрична относительно нуля и при этом для любого $x \in D(f)$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

По определению четной функции точки $(x; f(x))$ и $(-x; f(-x))$ ее графика с противоположными абсциссами x и $-x$ имеют одну и ту же ординату $f(x)$. Значит, эти точки симметричны относительно оси ординат, и, следовательно, график четной функции симметричен относительно оси ординат (см. рис. 1).

Определение. **Функция f называется *нечетной*, если для любого значения x из ее области определения значение $-x$ также принадлежит области определения и верно равенство**

$$f(-x) = -f(x).$$

Таким образом, область определения нечетной функции симметрична относительно нуля.

Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ нечетная, так как область определения $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ симметрична относительно нуля и при этом для любого $x \in D(f)$

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x).$$

По определению нечетной функции точки $(x; f(x))$ и $(-x; f(-x))$ ее графика с противоположными абсциссами x и $-x$ имеют ординатами противоположные числа $f(x)$ и $-f(x)$. Значит, эти точки симметричны относительно начала координат, и, следовательно, график нечетной функции симметричен относительно начала координат (см. рис. 2).

При изображении графика четной или нечетной функции достаточно сначала построить часть графика, состоящую из всех точек с неотрицательными абсциссами, а затем отобразить построенную часть графика симметрично относительно *оси Oy* для *четной* функции и симметрично относительно *начала координат* для *нечетной* функции.

Пример 4. На рисунке 4 изображена часть графика некоторой функции f, состоящая из всех точек с неотрицательными абсциссами. Изобразить график функции, если известно, что она:

а) четная; б) нечетная.

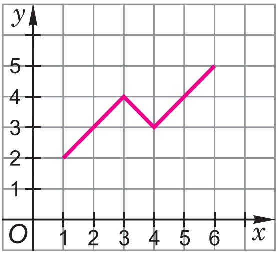


Рис. 4

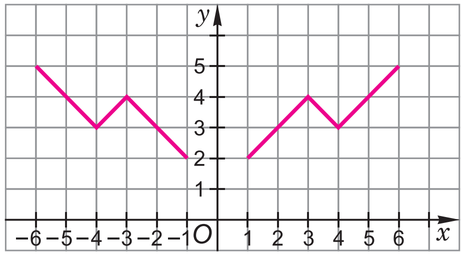


Рис. 5

Решение. Отобразим данную часть графика относительно оси Oy (рис. 5).

б) Отобразим данную часть графика относительно начала координат (рис. 6).

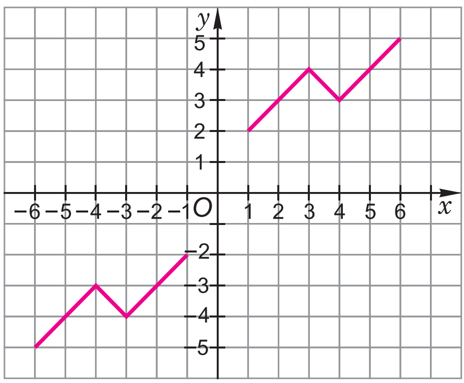


Рис. 6

Функция $f(x)=\sqrt{x}$ не является *ни четной*, *ни нечетной*, так как ее область определения не симметрична относительно нуля ($D(f)$ содержит только неотрицательные числа, см. рис. 3).

На рисунке 7 изображен график функции с симметричной относительно нуля областью определения. Однако эта функция также не является ни четной, ни нечетной, так как ее график не симметричен ни относительно оси ординат Oy, ни относительно начала координат.

Функция $y = 0$ является одновременно и четной, и нечетной.

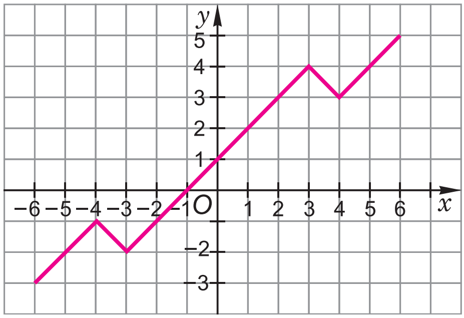
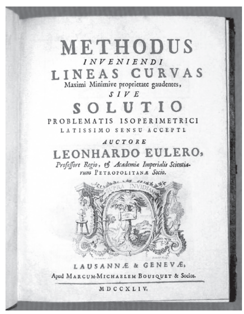


Рис. 7

Обозначение $f(x)$ для произвольной функции в 1734 г. ввел Леонард Эйлер (1707—1783). Он родился в швейцарском городе Базеле, но большую часть своей творческой жизни провел в России. Современники называли Эйлера общим учителем и первым математиком мира, а XVIII век в истории математики часто называют веком Эйлера. Его именем названы различные формулы, уравнения, теоремы, методы.



Эйлер отличался необычайной широтой интересов. Среди его произведений есть труды по гидравлике, кораблестроению, артиллерии, геометрической оптике, теории музыки, астрономии, механике твердого тела, небесной механике.

1. Сформулируйте определение функции.
2. Что называется графиком функции f?
3. Может ли график функции иметь несколько точек пересечения с осью Ox? С осью Oy?
4. Как обозначаются область определения и множество (область) значений функции f?
5. Сформулируйте определение функции, возрастающей (убывающей) на некотором промежутке.
6. Сформулируйте определение четной (нечетной) функции. Каковы особенности ее области определения и ее графика?

Упражнения

1.1°. На каком из рисунков 8 (*а*—*е*) линия синего цвета может служить изображением графика некоторой функции $y = f(x)$?

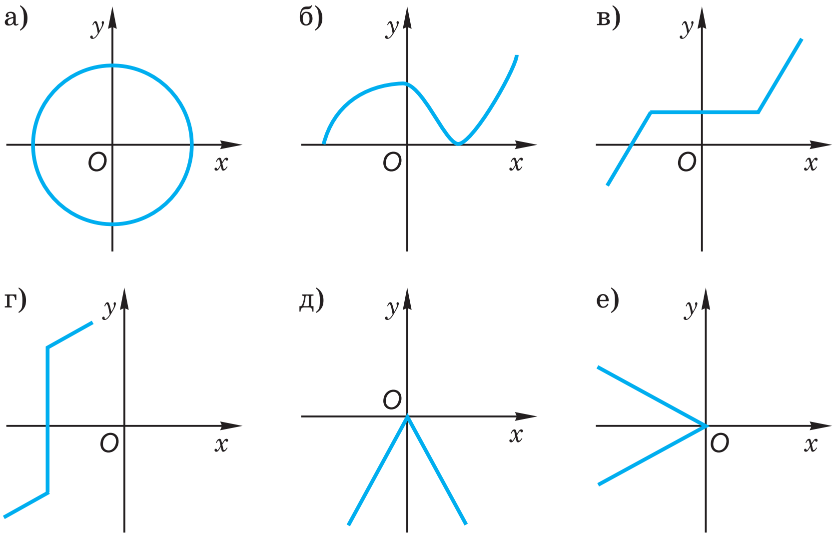


Рис. 8

1.2°. Для функции f, заданной графиком (рис. 9—12), укажите:

а) область определения $D(f)$;

б) множество (область) значений $E(f)$;

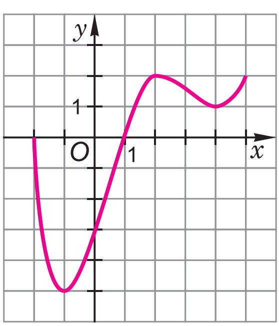


Рис. 9

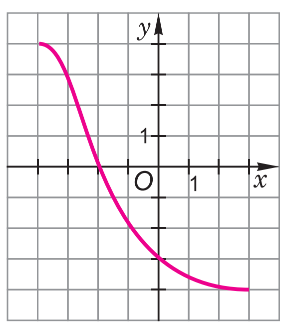


Рис. 10

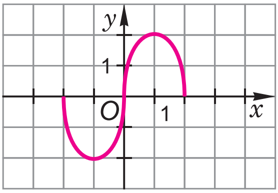


Рис. 11

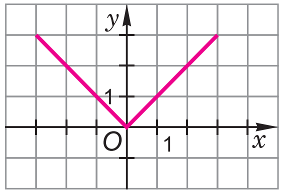


Рис. 12

в) ее нули;

г) координаты точки пересечения ее графика с осью Oy.

1.3. Для функции f, заданной графиком (рис. 13—16), укажите:

а) промежутки возрастания;

б) промежутки убывания;

в) наибольшее значение;

г) наименьшее значение;

д) ее нули;

е) промежутки знакопостоянства;

ж) координаты точки пересечения ее графика с осью Oy;

з) координаты точек пересечения ее графика с осью Ox.

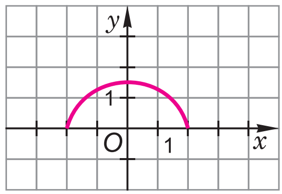


Рис. 13

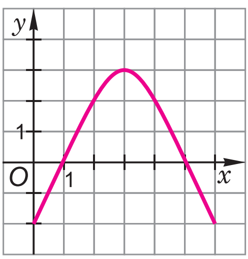


Рис. 14

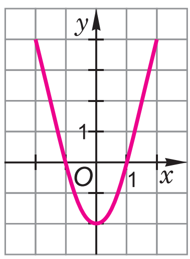


Рис. 15

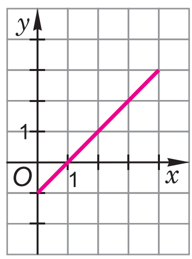


Рис. 16

1.4. Укажите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{5 + 10x}$;

2) $f(x) = \sqrt{6 - 24x}$;

3) $f(x) = \dfrac{x+8}{\sqrt{9+8x-x^2}}$;

4) $f(x) = \dfrac{3x-21}{\sqrt{40-3x-x^2}}$;

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-25x}}{x^2-1}$;

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-49x}}{x^2-11x-26}$.

1.5. Найдите нули функции:

1) $f(x) = |x - 5| - 1$; 2) $f(x) = |x + 4| - 8$;

3) $f(x) = |x^2 + 3x| - 4$; 4) $f(x) = |x^2 + 11x| - 12$;

5) $f(x) = (x - 3)^3 - (x^2 - 9)$;

6) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

1.6°. Используя изображение графика функции $y = f(x)$, укажите для этой функции промежутки возрастания (убывания), если:

1) $f(x) = x + 3$; 2) $f(x) = -3x + 6$; 3) $f(x) = \frac{6}{x}$;

4) $f(x) = -\frac{7}{x}$; 5) $f(x) = x^2$; 6) $f(x) = x^3$.

1.7. Укажите промежутки знакопостоянства функции f:

1) $f(x) = -3x^2 + 7x$; 2) $f(x) = -5x^2 + 12x$;

3) $f(x) = \frac{1}{x+3} - 1$; 4) $f(x) = \frac{1}{x-5} + 2$;

5) $f(x) = 3 - 5\sqrt{2-x}$; 6) $f(x) = 4 - 3\sqrt{6-x}$.

1.8°. Укажите, какие из функций, заданных графиком (рис. 17), являются:

1) четными; 2) нечетными.

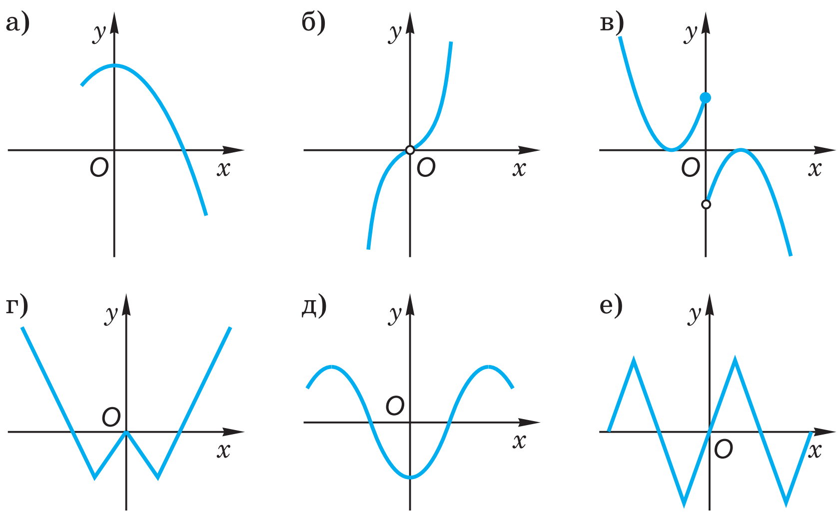


Рис. 17

1.9. 1) Изобразите график четной функции, определенной на отрезке [–4; 4], часть графика которой изображена:
а) на рисунке 18; б) на рисунке 19.

2) Изобразите график нечетной функции, определенной на отрезке [–4; 4], часть графика которой изображена:
а) на рисунке 18; б) на рисунке 19.

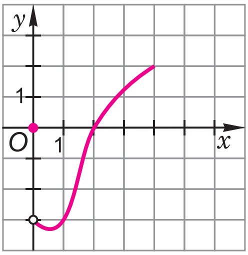


Рис. 18

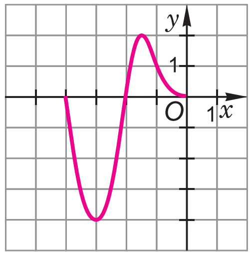


Рис. 19

1.10°. 1) Известно, что функция f является четной и $f(2) = 5$, $f(-10) = -8$, $f(7) = -9{,}3$, $f(-4) = 0$. Найдите $f(-2)$, $f(10)$, $f(-7)$, $f(4)$.
2) Известно, что функция f является нечетной и $f(-5) = 2$, $f(16) = 1$, $f(-1) = 2{,}5$, $f(-3) = -4$. Найдите $f(5)$, $f(-16)$, $f(1)$, $f(3)$.

1.11. Докажите, что функция f четная, если:

1) $f(x) = \frac{16x^4}{x^2+1}$; 2) $f(x) = \frac{x^2-4}{|x|}$;

3) $f(x) = \sqrt{2x^2-4x^8} + |x| + \frac{3}{x^6-1}$;

4) $f(x) = \sqrt{x^4+4x^2+4} - \sqrt{x^2} - \frac{x^{10}}{6-x^6}$;

5) $f(x) = \sqrt{5x^2-3} + \sqrt{3x^2-5}$;

6) $f(x) = |8x^4-10| + |10-8x^4|$.

1.12. Докажите, что функция f нечетная, если:

1) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-9}$; 2) $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$;

3) $f(x) = x^{13} - \frac{2x^{21}}{\sqrt{x^8}}$; 4) $f(x) = (x^3)^5 + \frac{2}{(x^{11})^3}$;

5) $f(x) = x\sqrt{25x^{12}} - \dfrac{6x^{10}}{x^5 - x^3}$;

6) $f(x) = x\sqrt{x^4} + \dfrac{3}{x^3\sqrt{x^4 + 10x^2 + 25}}$.

1.13°. Функция f задана на множестве $\boldsymbol{R}$ и является возрастающей в области определения. Сравните ее значения:

1) $f(5)$ и $f(-2)$;
2) $f(-8)$ и $f(8)$;
3) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ и $f\left(\frac{1}{4}\right)$;
4) $f\left(-\frac{4}{5}\right)$ и $f\left(-\frac{5}{7}\right)$;
5) $f\left(2\sqrt{2}\right)$ и $f\left(\sqrt{11}\right)$;
6) $f\left(3\sqrt{2}\right)$ и $f\left(\sqrt{19}\right)$.

1.14°. Функция f задана на множестве $\boldsymbol{Q}$ и является убывающей в области определения. Сравните ее значения:

1) $f(29)$ и $f(30)$;
2) $f(-100)$ и $f(200)$;
3) $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $f\left(-\frac{4}{5}\right)$;
4) $f\left(\frac{5}{7}\right)$ и $f\left(\frac{17}{21}\right)$.

1.2. Уравнение прямой с данным угловым коэффициентом

Изобразим на координатной плоскости Oxy прямую

$$y = kx + b. \tag{1}$$

Углом наклона этой прямой к оси Ox называется угол α, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против хода часовой стрелки (рис. 20, *а*, *б*). Если прямая (1) параллельна оси Ox, то угол наклона считается равным нулю.

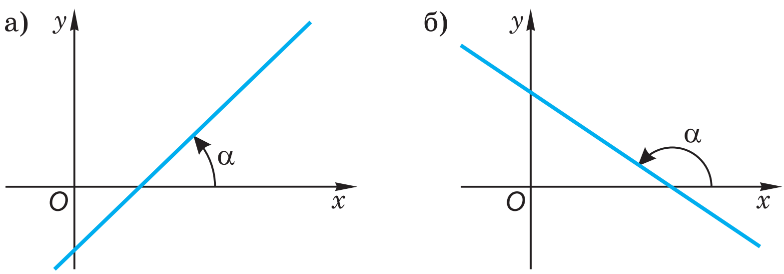


Рис. 20

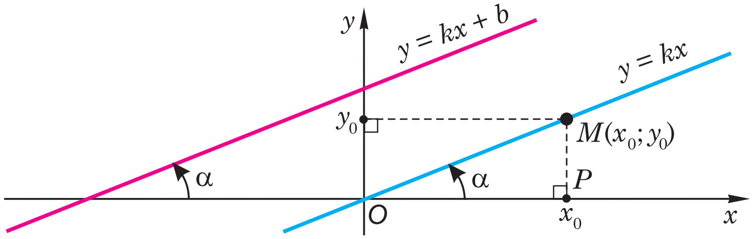


Рис. 21

Как мы знаем, прямая (1) не параллельна оси Oy (поясните почему), поэтому $\alpha \neq 90°$, т. е. $0° \leqslant \alpha < 90°$ или $90° < \alpha < 180°$.

Прямая $y = kx + b$ параллельна прямой $y = kx$ (рис. 21).

Пусть точка $M(x_0;\ y_0)$ принадлежит прямой $y = kx$, тогда $k = \frac{y_0}{x_0}$. Из треугольника MPO ($\angle P = 90°$) получаем:

$$k = \frac{y_0}{x_0} = \frac{MP}{OP} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Коэффициент k в уравнении $y = kx + b$ называется ***угловым коэффициентом прямой***.

Таким образом, ***угловой коэффициент прямой*** **— это тангенс угла наклона этой прямой к оси** Ox. Значит:

1) если угловой коэффициент прямой положительный, то она образует острый угол с положительным направлением оси Ox;

2) если угловой коэффициент прямой отрицательный, то она образует тупой угол с положительным направлением оси Ox;

3) если угловой коэффициент прямой равен нулю, то она параллельна оси Ox.

Верны и обратные утверждения.

Пример 1. Написать уравнение прямой с угловым коэффициентом 3, проходящей через точку $T(-2;\ 1)$.

Решение. Пусть $y = 3x + b$ — уравнение искомой прямой. Подставив в него координаты точки T, получим уравнение

$$1 = 3(-2) + b,$$

откуда найдем $b = 7$.

Ответ: $y = 3x + 7$.

Пример 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M(-2;\ 9)$ и $P(4;\ -3)$.

Решение. Пусть $y = kx + b$ — уравнение искомой прямой. Подставив в него координаты точек M и P, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 9 = -2k + b, \\ -3 = 4k + b. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем: $k = -2$, $b = 5$.

Ответ: $y = -2x + 5$.

Если прямая (1) проходит через точку $(x_0; y_0)$, то будет верным равенство

$$y_0 = kx_0 + b.$$

Откуда $b = y_0 - kx_0$. Подставляя это значение b в уравнение (1), получаем

$$y = kx + y_0 - kx_0,$$

откуда

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется ***уравнением прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(x_0; y_0)$.***

Пример 3. Написать уравнение прямой с угловым коэффициентом 2, проходящей через точку (3; –1).

Решение. *Способ 1* аналогичен решению примера 1.

Способ 2. В уравнение (2) подставим $k = 2$, $x_0 = 3$ и $y_0 = -1$. Тогда получим уравнение прямой:

$$y + 1 = 2(x - 3), \text{ т. е. } y = 2x - 7.$$

Ответ: $y = 2x - 7$.

▲ Пусть прямая (1) проходит через две точки: $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$; тогда имеем два верных числовых равенства:

$$y_1 = kx_1 + b, \quad y_2 = kx_2 + b.$$

Откуда получаем также верное равенство (поясните как):

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Так как прямая (1) не параллельна оси Oy, то $x_2 \neq x_1$ (поясните почему). Следовательно, имеем

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3)$$

Это ***формула углового коэффициента прямой, проходящей через две данные точки.***

Пример 4. Написать уравнение прямой, проходящей через точки (–1; 7) и (2; 4).

Решение. *Способ 1* аналогичен решению примера 2.

Способ 2. Угловой коэффициент прямой найдем по формуле (3):

$$k = \frac{4-7}{2+1} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Запишем уравнение прямой с угловым коэффициентом –1, проходящей через точку (–1; 7):

$$y - 7 = -1(x + 1), \text{ т. е. } y = -x + 6.$$

Ответ: $y = -x + 6$.

Понятно, что можно было записать и уравнение прямой с угловым коэффициентом –1, проходящей через точку (2; 4). Получился бы такой же результат (проверьте это). ▲

1. Сформулируйте определение угла наклона прямой к оси Ox.

2. Что называется угловым коэффициентом прямой?

3. Чему равен угловой коэффициент прямой?

4. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(x_0; y_0)$.

5. Какой угол с положительным направлением оси Ox образует прямая, если ее угловой коэффициент:
а) положительный; б) отрицательный; в) равен нулю?

6. Какой знак имеет угловой коэффициент прямой, если она образует с положительным направлением оси Ox:
а) острый угол; б) тупой угол?

7*. Запишите формулу углового коэффициента прямой, проходящей через две данные точки.

Упражнения

1.15°. Укажите угловой коэффициент прямой:

1) $y = 3x + 8$; 2) $y = 12x - 7$; 3) $y = 5 - 1{,}5x$;

4) $y = 4 + \frac{2}{3}x$; 5) $y = \frac{x}{6} - 4$; 6) $y = 9 - \frac{x}{12}$.

1.16°. Укажите угловой коэффициент прямой, изображенной на рисунке 22.

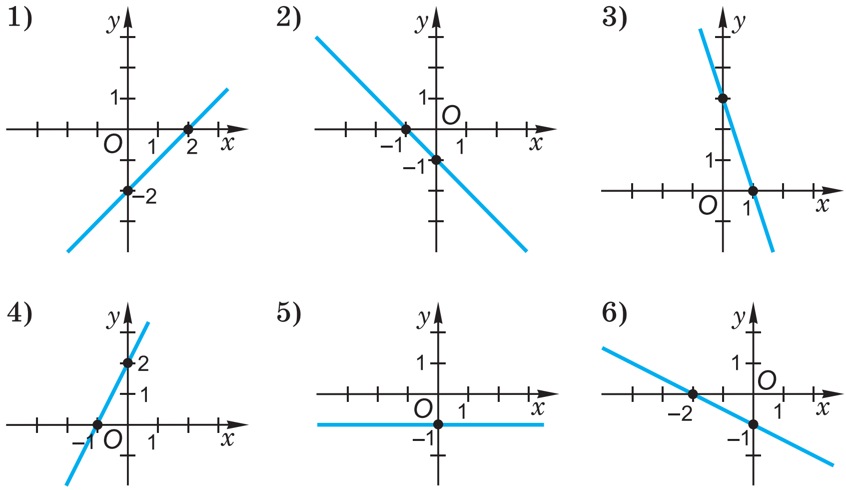


Рис. 22

1.17. Изобразите прямую, проходящую через точку $F(2;\ 6)$, с угловым коэффициентом k, если:

1) $k = 4$; 2) $k = -4$;

3) $k = -\frac{1}{3}$; 4) $k = 0{,}2$.

1.18. Напишите уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M(x_0;\ y_0)$, если:

1) $k = -\frac{1}{9}$, $M(-1;\ -2)$; 2) $k = \frac{2}{3}$, $M(7;\ -1)$;

3) $k = \sqrt{121}$, $M(2;\ 6)$; 4) $k = -\sqrt{100}$, $M(-4;\ 1)$.

1.19. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B, если:

1) $A(1;\ -2)$; $B(-3;\ 2)$; 2) $A(2;\ 5)$; $B(3;\ 0)$;
3) $A(-4;\ -5)$; $B(2;\ 1)$; 4) $A(-6;\ 3)$; $B(-1;\ -1)$.

1.20°. Назовите пары параллельных прямых:

$y = 4x - 9$; $y = 5x - 1$; $y = 4 - x$; $y = 3 + 4x$;
$y = \sqrt{25}x + 1$; $y = (-1)^{15}x + 3$.

1.21. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $P(x; y)$ и параллельной прямой $y = -x + 5$:

1) $P(2; -3)$;
2) $P(-5; -1)$;
3) $P(4; -1)$;
4) $P(-1; -1)$.

1.22. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $P(-5; 2)$ и параллельной прямой:

1) $y = \frac{x}{4} - 1$;
2) $y = 6 - \frac{x}{3}$;
3) $y = \sqrt{5} - 0{,}7x$;
4) $y = \sqrt{\pi} + 0{,}1x$.

1.23. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $4(x + 2y) - 8 = 5x - 2$ и проходит через точку пересечения прямых:

1) $y = 2x$ и $y = x + 3$;
2) $y = 4x$ и $y = x - 3$;
3) $y = 2x - 3$ и $x = 9$;
4) $y = 4x + 6$ и $y = -2$.

1.24. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $R(3; 1)$ и пересекающей ось Ox под углом α, если:

1) $\alpha = 30°$;
2) $\alpha = 60°$;
3) $\alpha = 45°$;
4) $\alpha = 120°$.

1.25. Составьте уравнение прямой, имеющей угол наклона к оси Ox 30° и проходящей через точку пересечения прямых:

1) $y = 5 - x$ и $y = x - 3$;
2) $y = 1 - 2x$ и $y = 2x - 3$;
3) $2x + 11y = 15$ и $10x - 11y = 9$;
4) $x + 3y = -7$ и $2x + 15y = -11$.

1.26. 1) Найдите угловой коэффициент прямой $y = kx + 5$, если она пересекается с прямой $y = -0{,}5x - 1$ в точке с абсциссой, равной $-0{,}8$.

2) Найдите угловой коэффициент прямой $y = kx - 1$, если она пересекается с прямой $y = 8x + 2$ в точке с абсциссой, равной $-0{,}2$.

1.27. Найдите угол наклона прямой MN к оси Ox, если:

1) $M(-1; 2)$ и $N(-4; -1)$;
2) $M(1; 2)$ и $N(5; -2)$.

1.3. Приращение функции

Напомним, что числовые промежутки вида $(a; b)$, $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$ называются ***интервалами***.

Окрестностью точки $\boldsymbol{x_0}$ называется любой интервал, содержащий эту точку.

Например, окрестностью точки -1 является интервал $(-2; 0)$, окрестностью точки 3 — интервал $(-1; 10)$, а окрестностью точки 5 — интервал $(0; +\infty)$ (рис. 23).

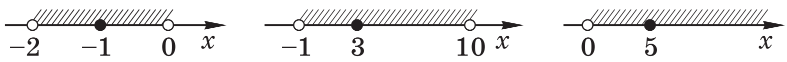


Рис. 23

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на некотором промежутке. Пусть x_0 — фиксированная точка из области определения этой функции, x — произвольная точка из некоторой окрестности точки x_0, причем $x \neq x_0$.

Разность $x - x_0$ называется ***приращением аргумента в точке*** x_0.

Разность $f(x) - f(x_0)$ называется ***приращением функции в точке*** x_0.

Приращение аргумента в точке x_0 обозначается Δx (читается «*дельта икс*»), приращение функции в точке x_0 обозначается Δy (читается «*дельта игрек*») или Δf (читается «*дельта эф*»). Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0, \text{ откуда } x = x_0 + \Delta x;$$
$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Геометрический смысл приращений Δx и Δy виден на рисунке 24.

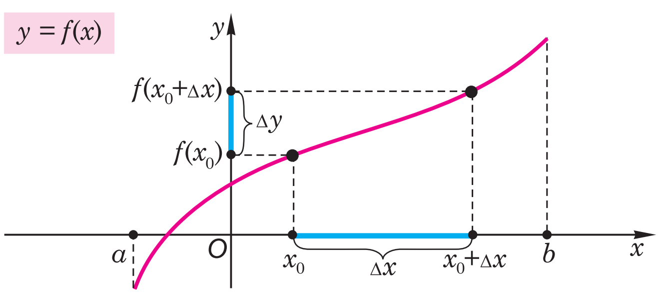


Рис. 24

Пример 1. Найти приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, если:

а) $f(x) = 3x - 1$; б) $f(x) = x^2$;

в) $f(x) = \frac{4}{x}$; г)* $f(x) = \sqrt{x}$.

Решение.

а) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x) - 1 - 3x_0 + 1 = 3\Delta x$.
б) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$.

в) Пусть $x_0 + \Delta x \neq 0$, тогда

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{4}{x_0 + \Delta x} - \frac{4}{x_0} = \frac{-4\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

▲ г) Пусть $x_0 + \Delta x \geqslant 0$, тогда

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$ ▲

Пример 2. Вычислить значения приращений функций из примера 1, если $x_0 = 1$, а $\Delta x = 0,5$. Изобразить приращение каждой из функций на графике.

Решение. а) $\Delta y = 3\Delta x = 3 \cdot 0,5 = 1,5$ (рис. 25).
б) $\Delta y = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 2 \cdot 1 \cdot 0,5 + (0,5)^2 = 1,25$ (рис. 26).

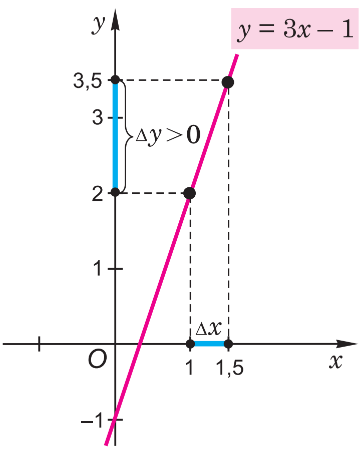


Рис. 25

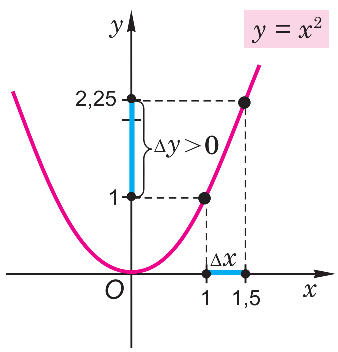


Рис. 26

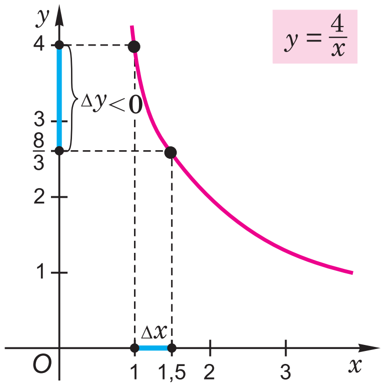


Рис. 27

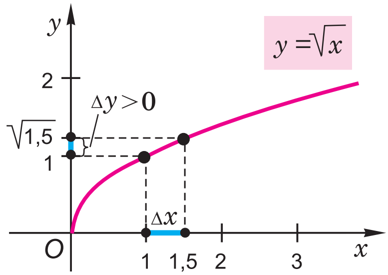


Рис. 28

в) $\Delta y = \dfrac{-4\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)} = \dfrac{-4\cdot 0{,}5}{1(1+0{,}5)} = -\dfrac{4}{3}$ (рис. 27).

г) $\Delta y = \sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0} = \sqrt{1+0{,}5} - \sqrt{1} = \sqrt{1{,}5} - 1 \approx 0{,}22$ (рис. 28).

?

1. Что называется окрестностью точки x_0?
2. Что называется приращением аргумента функции f в точке x_0?
3. Что называется приращением функции f в точке x_0?
4. Как обозначается:
   а) приращение аргумента; б) приращение функции?

5*. Почему приращение функции Δy в точке x_0 можно считать функцией от приращения аргумента Δx?

Упражнения

1.28°. По рисунку 29 запишите числовым промежутком заштрихованную окрестность точки x_0.

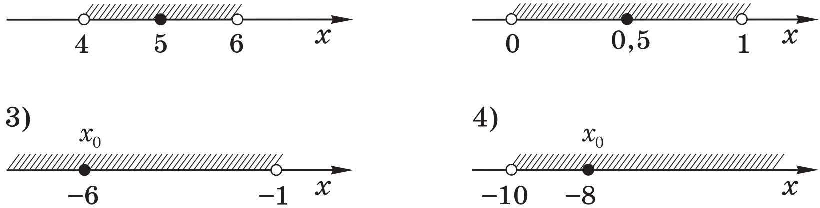


Рис. 29

1.29°. Укажите три различные окрестности точки:

1) 2; 2) 7; 3) –12; 4) –25.

1.30°. Укажите три точки, принадлежащие окрестности:

1) (12; 15); 2) (–13; –11);
3) $(-\infty; -100)$; 4) $(31; +\infty)$.

1.31°. По рисунку 30 укажите приращение аргумента Δx в точке x_0 и приращение функции Δf в точке x_0.

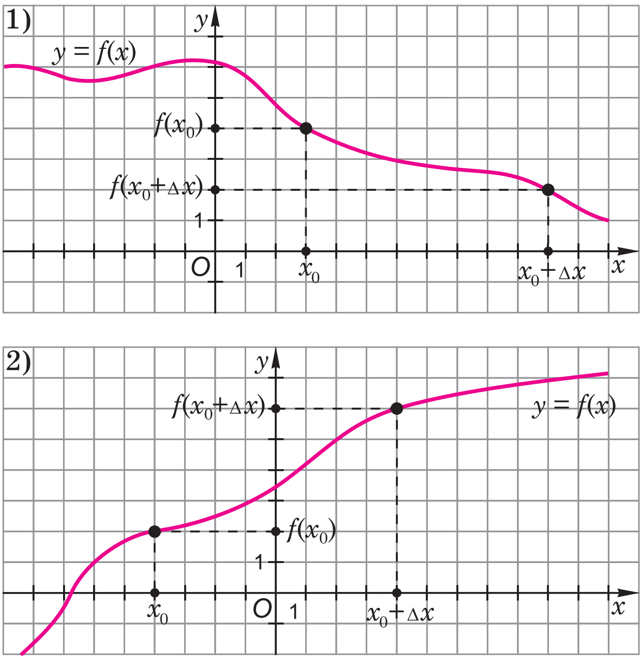


Рис. 30

1.32°. Найдите приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, если:

1) $f(x) = 5x - 3$; 2) $f(x) = 1 - 3x$;
3) $f(x) = x^2 + 1$; 4) $f(x) = 2 - x^2$;
5) $f(x) = \frac{1}{x}$; 6) $f(x) = \frac{3}{x} + 4$.

1.33. Найдите приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0 и изобразите его на графике функции f, если:

1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}4$;

2) $f(x) = 5x + 2$, $x_0 = 0{,}2$, $\Delta x = 0{,}5$;

3) $f(x) = 2x^2 + 1$, $x_0 = \frac{1}{4}$, $\Delta x = -0{,}8$;

4) $f(x) = 4 - 3x^2$, $x_0 = 5$, $\Delta x = -0{,}6$;

5) $f(x) = -\frac{6}{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}6$;

6) $f(x) = \frac{2}{x} - 1$, $x_0 = -2$, $\Delta x = -0{,}9$.

1.34. Найдите для функции $y = f(x)$ приращение аргумента Δx и приращение функции Δy в точке x_0, если:

1) $f(x) = \frac{x}{4} + 8$, $x_0 = -4{,}9$, $x = -3{,}4$;

2) $f(x) = 5 - \frac{x}{2}$, $x_0 = -2{,}4$, $x = 1{,}2$;

3) $f(x) = x + 2x^2$, $x_0 = 2{,}1$, $x = -1{,}3$;

4) $f(x) = \frac{x^2}{6} - x$, $x_0 = -1{,}8$, $x = 0{,}4$.

1.35*. Найдите приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, если:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 1$;　　2) $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$;

3) $f(x) = \sqrt{4x-1}$;　　4) $f(x) = 2 - \sqrt{2x+3}$.

1.36. Сравните приращения функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ в точке x_0 при данном Δx, если:

1) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 5x + 25$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}1$;

2) $f(x) = 2x^2 - 3$, $g(x) = -2x - 10$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}5$.

1.37. 1) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $E(1; -2)$, если известно, что $\Delta y = -0{,}3$ — приращение функции, графиком которой является эта прямая, соответствует приращению аргумента $\Delta x = 0{,}1$.

2) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $P(-4; 3)$, если известно, что $\Delta y = 1{,}5$ — приращение функции, графиком которой является эта прямая, соответствует приращению аргумента $\Delta x = -0{,}4$.

1.4. Производная

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $f(x) = x^2$. Приращение этой функции в точке x_0 (см. п. 1.3, пример 1, б) равно

$$\Delta y = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Рассмотрим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x. \qquad (1)$$

Будем придавать приращению Δx значения, все меньше и меньше отличающиеся от нуля, но не равные нулю. Это записывается так: $\Delta x \to 0$ (читается «*Δx стремится к нулю*»).

Так как значение $2x_0$ постоянно и не зависит от Δx, то, когда Δx все меньше и меньше отличается от нуля, сумма $2x_0 + \Delta x$ все меньше и меньше отличается от числа $2x_0$. Это записывается так:

$$(2x_0 + \Delta x) \to 2x_0 \text{ при } \Delta x \to 0 \qquad (2)$$

(читается «*$2x_0 + \Delta x$ стремится к $2x_0$ при Δx, стремящемся к нулю*»).

Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x_0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Число $2x_0$, к которому стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю, называется ***производной функции $y = x^2$ в точке x_0***.

Определение. ***Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0*** **называется число, к которому стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.**

Функция, которая имеет производную в точке x_0, называется *дифференцируемой в этой точке*.

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ (читается «*эф штрих от x_0*»).

Таким образом, для функции $f(x) = x^2$ мы получили производную в точке x_0:

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке из некоторого промежутка. Поставив в соответствие каждому числу x из этого промежутка число $f'(x)$, мы получим новую функцию, которая называется ***производной функции f*** и обозначается f' или y'.

Так, для функции $f(x) = x^2$ на множестве $\boldsymbol{R}$ мы получили производную $f'(x) = 2x$. Пишут также

$$\boxed{(x^2)' = 2x.}$$

Пример 1. Найти производную линейной функции

$$y = kx + b.$$

Решение. Здесь $f(x) = kx + b$. Найдем Δy — приращение функции f в точке x_0:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x.$$

Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (напомним, что $\Delta x \neq 0$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не зависит от Δx; при любом значении Δx оно равно k. Значит, и при Δx, стремящемся к нулю, это отношение равно k. А раз так, то можно сказать, что оно стремится к k. Итак:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to k \text{ при } \Delta x \to 0,$$

т. е. $f'(x_0) = k$.

Таким образом,

$$\boxed{(kx + b)' = k.}$$

Ответ: $(kx + b)' = k$.

! В частности, при $k = 0$ получаем $b' = 0$, т. е. ***производная постоянной равна нулю***.

Пример 2. Найти производную квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Решение. Здесь $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдем Δy — приращение функции в точке x_0:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$$
$$= a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c - \left(ax_0^2 + bx_0 + c\right) =$$
$$= 2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x.$$

Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x}{\Delta x} = 2ax_0 + a\Delta x + b.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2ax_0 + b$, т. е. $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Таким образом,

$$\boxed{(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b.}$$

Ответ: $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$.

! Решенные примеры показывают, что для вычисления производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 нужно:
1) ***найти Δy — приращение функции f в точке x_0;***
2) ***найти отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;***
3) ***найти, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx стремится к нулю.***

Вычисление производной функции называется ***дифференцированием функции.***

Пример 3. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{k}{x}.$$

Решение. Пусть x_0 — произвольная точка из области определения функции $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

1) Выберем Δx так, чтобы выражение $f(x_0 + \Delta x)$ имело смысл, т. е. $x_0 + \Delta x \neq 0$, тогда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{-k\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$ (см. п. 1.3, пример 1, в).

2) Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-k}{x_0(x_0 + \Delta x)}. \tag{3}$$

3) Найдем, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx стремится к нулю. Понятно, что

$$(x_0 + \Delta x) \to x_0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Значит, знаменатель дроби в правой части равенства (3) стремится к x_0^2:

$$x_0(x_0 + \Delta x) \to x_0^2 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

А так как числитель этой дроби равен $-k$ при любом значении Δx, то имеем:

$$\frac{-k}{x_0(x_0+\Delta x)} \to \frac{-k}{x_0^2} \text{ при } \Delta x \to 0. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{-k}{x_0^2}$ при $\Delta x \to 0$.

Таким образом,

$$\boxed{\left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}.}$$

Ответ: $\left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}$.

Пример 4*. Найти производную функции $f(x) = \sqrt{x}$.

Решение. Пусть $x_0 > 0$.

1) Выберем Δx так, чтобы выражение $f(x_0 + \Delta x)$ имело смысл, т. е. $x_0 + \Delta x \geqslant 0$, тогда

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$ (см. п. 1.3, пример 1, г).

2) Найдем отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}.$$

3) Найдем, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, когда Δx стремится к нулю. Имеем:

$$\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right) \to 2\sqrt{x_0} \text{ при } \Delta x \to 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \text{ при } \Delta x \to 0;$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Таким образом,

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.}$$

Ответ: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ для любого $x > 0$.

Вообще, функция может и не иметь производной в данной точке. Так, в точке $x = 0$ производная функции $f(x) = \sqrt{x}$ не существует. Но мы будем рассматривать функции лишь на промежутках, где производная существует.

?

1. Как читается и что означает запись $\Delta x \to 0$?
2. Что называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0?
3. Как обозначается производная функции $y = f(x)$?
4. Чему равна производная линейной функции
$$f(x) = kx + b?$$
5. Чему равна производная постоянной?
6. Чему равна производная квадратичной функции
$$f(x) = ax^2 + bx + c?$$
7. Чему равна производная функции:

а) $f(x) = \frac{1}{x}$; б)* $f(x) = \sqrt{x}$?

Упражнения

1.38°. Вычислите отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ в точке x_0, если:

1) $f(x) = 4x - 6$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}5$;
2) $f(x) = 12 - 3x$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}1$;
3) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 0{,}2$;
4) $f(x) = 6x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}4$.

1.39°. К какому числу стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ в точке x_0 при $\Delta x \to 0$, если:

1) $f(x) = 3x - 1$, $x_0 = -2$;
2) $f(x) = 0{,}5 - 5x$, $x_0 = 10$;
3) $f(x) = 2x^2 - 1$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = 1 - 3x^2$, $x_0 = -5$?

Пользуясь определением производной, найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = a$ **(1.40—1.46)**.

1.40°. 1) $f(x) = 3$, $a = 10$;
2) $f(x) = -6$, $a = 1$;
3) $f(x) = \pi$, $a = -4$;
4) $f(x) = \sqrt{8}$, $a = -5$.

1.41°. 1) $f(x) = 4x$, $a = 1$;
2) $f(x) = -5x$, $a = 7$;
3) $f(x) = -2{,}5x - 2$, $a = -2$;
4) $f(x) = -4{,}2x + 3$, $a = -6$;
5) $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$, $a = 0$;
6) $f(x) = 2 + \frac{3x}{4}$, $a = 1$.

1.42°. 1) $f(x) = 4x^2$, $a = 0$;
2) $f(x) = -7x^2$, $a = 0{,}5$;
3) $f(x) = \frac{x^2}{4} + 2$, $a = -2$;
4) $f(x) = 3 - \frac{x^2}{6}$, $a = 3$.

1.43. 1) $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $a = 0{,}25$;
2) $f(x) = x^2 - x + 2$, $a = 0$;
3) $f(x) = \frac{x^2}{6} - 0{,}2x + 8$, $a = 3$;
4) $f(x) = \frac{4x^2}{5} - \frac{x}{10} + 1$, $a = -1$;
5) $f(x) = \frac{6x^2 - 3x + 9}{3}$, $a = -2$;
6) $f(x) = \frac{6 - 6x - 12x^2}{6}$, $a = -3$.

1.44. 1) $f(x) = (3 + x)^2$, $a = -2$;
2) $f(x) = (4 - x)^2$, $a = -1{,}5$;
3) $f(x) = x(x + 2)$, $a = 0{,}1$;
4) $f(x) = x(x - 4)$, $a = 1$;
5) $f(x) = x^2 - (x + 2)^2$, $a = -0{,}5$;
6) $f(x) = (x - 1)^2 - x^2$, $a = 2{,}5$.

1.45. 1) $f(x) = \frac{5}{x}$, $a = 0{,}1$;
2) $f(x) = -\frac{6}{x}$, $a = -0{,}1$;
3) $f(x) = -\frac{1}{x} + 1$, $a = -1$;
4) $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$, $a = -0{,}5$;
5) $f(x) = \frac{3}{x} + x^2$, $a = 5$;
6) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $a = 0{,}2$.

1.46*. 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0{,}01$;
2) $f(x) = \sqrt{4x}$, $a = 0{,}04$;
3) $f(x) = -\sqrt{0{,}01x}$, $a = 100$;
4) $f(x) = \sqrt{9x} + 1$, $a = 1$.

1.47. Используя рисунок 31, где изображен график функции $y = f(x)$ (на рисунках 1), 2) — прямые, на рисунках 3)—6) — параболы), изобразите график производной $y = f'(x)$.

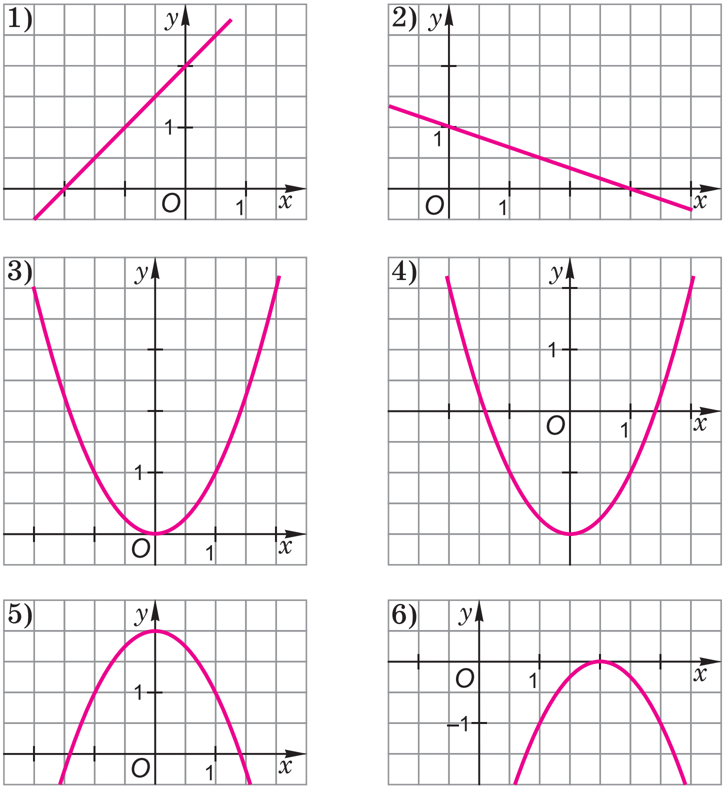


Рис. 31

1.48. Решите уравнение $f'(x) = 0$:

1) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x$;
2) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x$;
3) $f(x) = (x - 4)^2$;
4) $f(x) = (2 - x)^2 - 4$.

1.49. Решите неравенство $f'(x) \leqslant 0$:

1) $f(x) = 5x^2 + x + 2$;
2) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$;
3) $f(x) = \frac{2}{1+x}$;
4) $f(x) = \frac{5}{x-2}$;
5)* $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$;
6)* $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{4} + 1$.

1.50*. Укажите точки из области определения функции f, в которых производная функции f не существует, если:

1) $f(x) = \sqrt{x+2}$; 2) $f(x) = -\sqrt{x-6}$;

3) $f(x) = 4\sqrt{8+x}$; 4) $f(x) = 9 + \sqrt{x+1}$.

1.51. Укажите функцию, производная которой равна:

1) 2; 2) -6; 3) $2x$; 4) $-x$;

5) $x + 1$; 6) $x - 2$; 7)* $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2$; 8)* $4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1.5. Механический смысл производной

Будем рассматривать прямолинейное движение точки. Каждому моменту времени t поставим в соответствие путь $s(t)$, пройденный точкой за время t. Тогда путь, пройденный точкой за отрезок времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, т. е. за Δt, будет равен $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \Delta s$.

Средняя скорость точки на отрезке времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ определяется как отношение пройденного пути Δs ко времени Δt, за которое этот путь пройден:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Когда промежуток времени Δt стремится к нулю, то значение средней скорости $v_{\text{ср}}$, как правило, стремится к некоторому числу. Это число считается значением скорости в момент времени t_0 и обозначается $v(t_0)$ (в механике такую скорость называют *мгновенной скоростью*):

$$v_{\text{ср}} \to v(t_0) \text{ при } \Delta t \to 0.$$

А по определению производной функции s в точке t_0 имеем:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \to s'(t_0) \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Таким образом, при Δt, стремящемся к нулю, левая часть равенства (1) стремится к $v(t_0)$, а правая — к $s'(t_0)$. Значит,

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Поэтому, когда закон движения точки задается дифференцируемой функцией s, скорость точки в момент времени t определяется формулой

$$\boxed{v(t) = s'(t).} \qquad (2)$$

! В равенстве (2) и заключается ***механический*** (говорят еще ***физический***) ***смысл производной***.
Его обычно формулируют так: *скорость есть производная от пройденного пути по времени*.

Пример 1. Найти скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = 0{,}25t^2$ (s — путь в метрах, t — время в минутах), через 6 минут после начала движения.

Решение. Используем механический смысл производной и формулу производной квадратичной функции (см. пример 2 п. 1.4):

$$v(t) = s'(t) = 0{,}5t;$$

$$v(6) = 0{,}5 \cdot 6 = 3 \left(\frac{\text{м}}{\text{мин}}\right).$$

Ответ: $3\ \frac{\text{м}}{\text{мин}}$.

Пример 2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 70\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Какую скорость будет иметь тело на высоте 240 м от поверхности Земли?

Решение. Из курса физики известно, что закон движения тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, задается формулой $h(t) = v_0t - \frac{gt^2}{2}$. Полагая в этой формуле $h(t) = 240$ м, $v_0 = 70\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и $g = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, получаем уравнение $240 = 70t - \frac{10}{2}t^2$, т. е. $t^2 - 14t + 48 = 0$.

Решая его, находим: $t = 6$ или $t = 8$.

Используя механический смысл производной и формулу производной квадратичной функции (см. пример 2 п. 1.4), находим:

$$v(t) = h'(t) = v - gt = 70 - 10t.$$

При $t = 6$ получим $v(6) = 70 - 10 \cdot 6 = 10$, а при $t = 8$ получим $v(8) = 70 - 10 \cdot 8 = -10$.

Таким образом, на высоте 240 м от поверхности Земли на 6-й секунде движения тело будет лететь вверх со скоростью $10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а на 8-й секунде — падать вниз (на это указывает знак «минус») с той же скоростью.

Ответ: $10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Уже в первой половине XVII в. французский математик Пьер Ферма умел находить производные от простейших функций — многочленов. Но систематическое использование производных при решении различных задач физики и математики началось с создания математического анализа Исааком Ньютоном (Англия) и Готфридом Вильгельмом Лейбницем (Германия). В книге Ньютона «Математические начала натуральной философии» доказаны основные законы движения небесных тел. В своих трудах «Рассуждения о квадратуре кривых» и «Метод флюксии и бесконечных рядов» Ньютон разработал основы математического анализа.

1. Как определяется средняя скорость тела на отрезке времени $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$?
2. В чем заключается механический (физический) смысл производной?

Упражнения

1.52°. По графику (рис. 32) найдите среднюю скорость движения мотоциклиста на отрезке времени:

1) [0; 2]; 2) [2; 5]; 3) [2; 6]; 4) [5; 9].

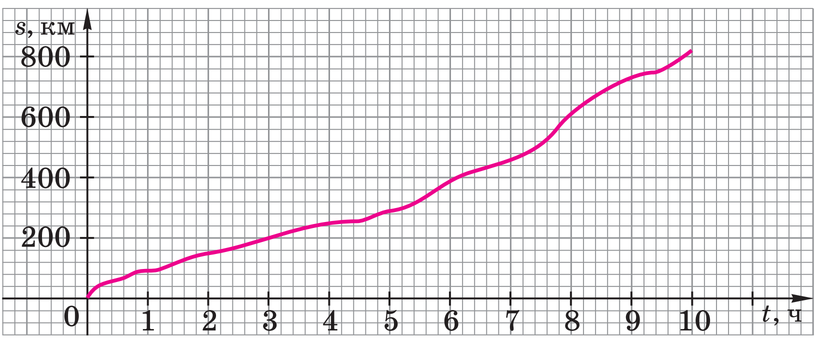


Рис. 32

1.53. На отрезке времени $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$ найдите среднюю скорость тела, движущегося прямолинейно по закону:

1) $s(t) = 12t + 9$; 2) $s(t) = 5 - 4t$;
3) $s(t) = t^2 + 1$; 4) $s(t) = 6 - t^2$.

1.54°. Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 2t^2 - 8t - 9$ (s — путь в метрах, t — время в секундах). Вычислите скорость движения точки в момент времени:

1) $t = 5$ с; 2) $t = 12$ с; 3) t с.

1.55°. Движение точки происходит по закону $s(t) = t^2 + 4t + 2$ (s — путь в метрах, t — время в секундах). В какой момент времени t скорость движения точки v равна:

1) $6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 2) $0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 3) $12\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$?

1.56. Найдите скорость в указанный момент времени t точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t)$, где s — путь в метрах, t — время в секундах:

1) $s(t) = t^2 + 2t + 1$, $t = 3$;
2) $s(t) = 2t^2 - 3t + 4$, $t = 2$.

1.57. Маховик вращается вокруг своей оси по закону $\varphi = t^2 - 1$ (φ — угол поворота в радианах, t — время в секундах). Найдите угловую скорость вращения маховика ω в момент времени:

1) t с; 2) 2 с; 3) 8 с.

1.58. Путь, пройденный клетью подъемной машины, определяется из уравнения $s = 6 + 8t$ (s — путь в метрах, t — время в секундах). Укажите скорость движения клети в любой момент времени t.

1.59. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам s_1 и s_2 (t — время в секундах, s — путь в метрах). В какой момент времени их скорости равны, если:

1) $s_1 = 2{,}5t^2 + 6t + 1$, $s_2 = 3{,}5t^2 - t - 12$;
2) $s_1 = \frac{3t^2}{2} + 5t - 13$, $s_2 = 1 - 7t - 4t^2$?

1.60. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам s_1 и s_2 (t — время в секундах, s — путь в метрах). В какой момент времени скорость первой точки в n раз больше скорости второй, если:

1) $s_1 = t^2 - 8t + 4$, $s_2 = 5t^2 - 4t - 9$, $n = 3$;
2) $s_1 = 0{,}5t^2 + 8t + 1$, $s_2 = 9t - 7$, $n = 2$?

1.61. Температура тела в зависимости от времени задается формулой $T = 0{,}3t^2$ (T — температура в градусах, t — время в секундах). Найдите скорость изменения температуры тела в момент времени t, если:

1) $t = 5$; 2) $t = 4$; 3) $t = 1$.

1.62. Тело брошено вертикально вверх и движется по закону $h(t)$. Найдите скорость тела в момент соприкосновения с поверхностью Земли $\left(h\right.$ — высота в метрах, t — время в секундах, ускорение g считать равным $\left.10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$, если:

1) $h(t) = 4 + 8t - 5t^2$; 2) $h(t) = 6 + 7t - 5t^2$.

1.63*. Тело брошено вертикально вверх с высоты 20 м от поверхности Земли с начальной скоростью 50 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. $\left(\text{Ускорение } g\right.$ считать равным $\left.10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.\right)$

1) В какой момент времени скорость брошенного тела будет равной нулю?
2) На каком расстоянии от поверхности Земли будет находиться тело в тот момент, когда его скорость равна нулю?

1.64. Изменение силы тока I в зависимости от времени t задано уравнением $I = 4t^2 - 9t$ (I — сила тока в амперах, t — время в секундах). Найдите скорость изменения силы тока в момент времени $t = 10$ с.

1.65. Известно, что тело массой $m = 6$ кг движется прямолинейно по закону $s(t) = 3t^2 - 14$ (t — время в секундах, s — путь в метрах). Найдите кинетическую энергию тела через 4 с после начала движения.

1.66. Тело массой m кг движется прямолинейно по закону $s(t)$, где s — путь в метрах, t — время в секундах. Найдите скорость тела и его кинетическую энергию через n с после начала движения. Какая сила действует на тело в этот момент времени, если:

1) $m = 4$, $s(t) = 4t^2 - 5t - 1$, $n = 4$;
2) $m = 1$, $s(t) = 2t^2 - 6t - 2$, $n = 3$?

1.67*. Точка движется по параболе $y = f(x)$ так, что ее абсцисса изменяется по закону $x = g(t)$, где x — путь в метрах, t — время в секундах. Укажите скорость изменения ординаты точки через n с после начала движения, если:

1) $f(x) = 16x - x^2$, $g(t) = 2\sqrt{t}$, $n = 8$;

2) $f(x) = 4x^2 + 2$, $g(t) = 0{,}5\sqrt{t}$, $n = 2$.

1.6. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции

Мы знаем, что касательная к окружности — это прямая, имеющая с ней единственную общую точку. Но такое определение касательной годится далеко не для всякой прямой. Например, и ось Oy, и ось Ox имеют одну общую точку (начало координат) с параболой $y = x^2$ (рис. 33, *а*), но ось Ox является касательной к параболе, а ось Oy не является касательной к ней. А прямая AB касается кривой в точке M (рис. 33, *б*), но имеет с этой кривой не одну, а две общие точки.

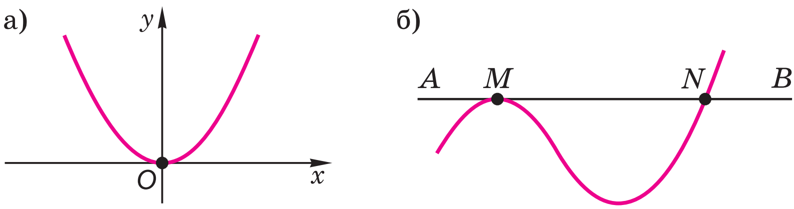


Рис. 33

Чтобы дать определение касательной к данной кривой в точке P_0 (рис. 34), возьмем на этой кривой еще одну точку P и проведем секущую P_0P. Будем перемещать точку P

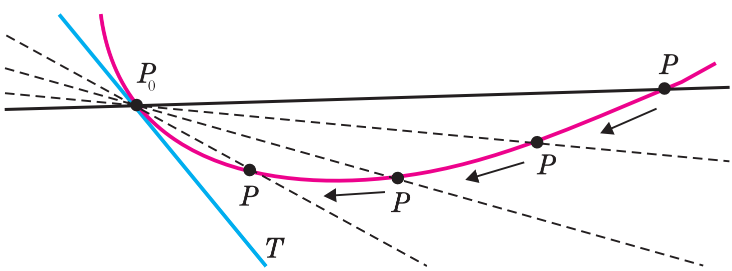


Рис. 34

по кривой, приближая ее неограниченно к точке P_0. Тогда секущая P_0P будет поворачиваться вокруг точки P_0. При этом секущая будет стремиться к некоторому предельному положению — прямой P_0T. Эта прямая P_0T и называется ***касательной к данной кривой в точке P_0***.

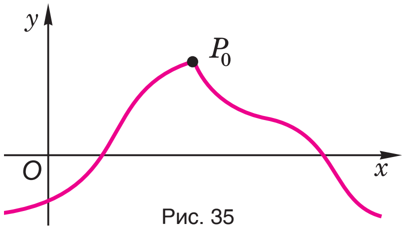


Рис. 35

Заметим, что в точке P_0 кривая может и не иметь касательной, как, например, на рисунке 35.

Пусть теперь рассматриваемая кривая (рис. 36) является графиком некоторой функции $y = f(x)$. Решим задачу: *найти угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке $P_0(x_0; y_0)$.*

Угол наклона касательной P_0T к оси Ox обозначим φ. Возьмем на кривой еще одну точку $P(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ и проведем секущую P_0P. Угол наклона секущей к оси Ox обозначим α (см. рис. 36). Из треугольника P_0PK ($\angle K = 90°$) получаем, что угловой коэффициент секущей (см. п. 1.2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{PK}{P_0K}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Когда Δx стремится к нулю, точка P, двигаясь по кривой, неограниченно приближается к точке P_0. При этом секу-

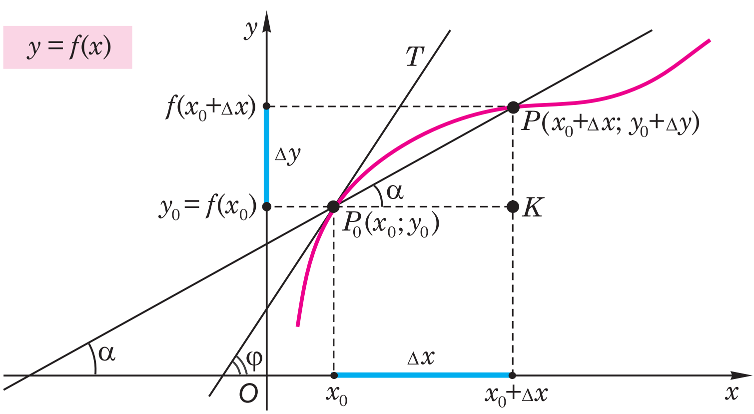


Рис. 36

щая P_0P, поворачиваясь вокруг точки P_0, стремится занять положение касательной P_0T. Но тогда величина угла α стремится к величине угла φ. Следовательно, и $\operatorname{tg}\alpha$ стремится к $\operatorname{tg}\varphi$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi \text{ при } \Delta x \to 0.$$

А по определению производной функции $f(x)$ в точке x_0 имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Таким образом, при Δx, стремящемся к нулю, левая часть равенства (1) стремится к $\operatorname{tg}\varphi$, а правая — к $f'(x_0)$. Значит,

$$\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0). \qquad (2)$$

Итак, $\operatorname{tg}\varphi$ — это угловой коэффициент касательной.

В равенстве (2) и заключается ***геометрический смысл производной***. Его формулируют так:
угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равен производной этой функции в точке x_0.
Иными словами:
производная функции в точке x_0 есть тангенс угла наклона к оси Ox касательной, проведенной к графику этой функции в точке $(x_0; f(x_0))$.

Пример 1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$?

Решение. Обозначим угловой коэффициент касательной буквой k. Тогда, использовав геометрический смысл производной и формулу производной квадратичной функции, получим:

$$k = f'(x_0) = 2 \cdot \frac{1}{4}x_0 = \frac{1}{2}x_0.$$

Так как $x_0 = 2$, то $k = 1$.

Ответ: 1.

Найдем теперь ***уравнение касательной к графику функции*** $y = f(x_0)$ в точке $(x_0; f(x_0))$. Для этого воспользуемся формулой (2) из п. 1.2. Здесь $y_0 = f(x_0)$, а согласно геометрическому смыслу производной $k = f'(x_0)$. Подставляя эти значения y_0 и k в формулу $y - y_0 = k(x - x_0)$, получаем $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Это и есть искомое уравнение. Обычно его записывают так:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).} \qquad (3)$$

Пример 2. Записать уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. В примере 1 угловой коэффициент касательной к графику этой функции уже нашли: $k = f'(x_0) = 1$.

Найдем ординату $f(x_0)$ точки касания:

$$f(x_0) = \frac{1}{4}x_0^2 + 2 = 3.$$

Подставляя в формулу (3) значения $f'(x_0)$, x_0 и $f(x_0)$, получаем

$$y = 1(x - 2) + 3, \text{ т. е. } y = x + 1.$$

Ответ: $y = x + 1$.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) — великий немецкий ученый. Его творчество было чрезвычайно многогранным: он был дипломатом, занимался философией, юриспруденцией, математикой.

В своих работах «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных...» и «О скрытой геометрии и анализе неделимых и бесконечных» Лейбниц ввел в математику термины и обозначения, которыми пользуются до сих пор: абсцисса, ордината, координата, функция, производная, алгоритм, дифференциал, дифференциальное исчисление и т. д.

1. Что такое касательная к кривой в точке P_0?
2. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0?
3. В чем заключается геометрический смысл производной?
4. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0.

Упражнения

1.68. Изобразите график функции $y = f(x)$, проведите к нему касательную в точке с абсциссой x_0 и укажите знак углового коэффициента касательной, если:

1) $f(x) = (x + 3)^2 - 5$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = (x - 2)^2 + 4$, $x_0 = 1$.

1.69*. Изобразите график функции $y = f(x)$, проведите к нему касательную (если она существует) в точке с абсциссой x_0 и укажите знак углового коэффициента касательной, если:

1) $f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \frac{4}{x+2} - 2$, $x_0 = 0$.

1.70. По рисунку 37 определите знак углового коэффициента каждой из касательных, проведенных к графику функции в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3.

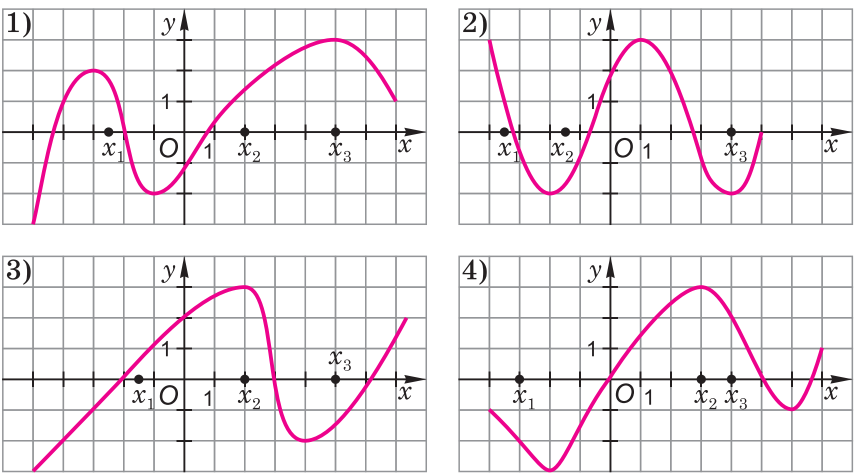


Рис. 37

1.71. 1) Найдите значение производной функции $y = x^2 + 2$ в точке $x = -1$.
2) Чему равен $\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона к оси Ox касательной, проведенной к графику функции $y = x^2 + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$?

3) Известно, что угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равен 0,42. Найдите значение производной функции в этой точке.

4) Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 образует с осью Ox угол наклона 45°. Найдите $f'(x_0)$.

1.72. Найдите тангенс угла наклона к оси Ox касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = 4x^2 - 6x$, $x_0 = 2$;
2) $f(x) = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$;
3) $f(x) = 3x^2 - 8x + 7$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = 3x - 4x^2 + 20$, $x_0 = -2$.

1.73. Какой угол наклона (острый или тупой) к оси Ox образует касательная, проведенная к графику функции:

1) $y = (x - 4)^2$ в каждой из точек с абсциссами 0; 8; –5;
2) $y = -(x - 1)^2$ в каждой из точек с абсциссами 0; 1; 2?

1.74. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 2$;
2) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = 3$;
3) $f(x) = \frac{2}{x}$, $x_0 = -2$;
4) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x_0 = -1$.

1.75. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке P. Изобразите график этой функции и касательную к нему в точке P, если:

1) $f(x) = x^2 + 3x + 4$, $P(1; 8)$;
2) $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $P(2; 5)$;
3) $f(x) = 4x - 2x^2$, $P(1; 2)$;
4) $f(x) = 3x - x^2$, $P(0; 0)$.

1.76. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M. Изобразите график функции f и касательную к нему в точке M, если:

1) $f(x) = x^2 + 5$, $M(-1; 6)$;
2) $f(x) = x^2 - 3$, $M(-2; 1)$;
3) $f(x) = (x - 3)^2$, $M(2; 1)$;

4) $f(x) = (5 - x)^2$, $M(6; 1)$;
5) $f(x) = (x + 4)^2 - 7$, $M(-4; -7)$;
6) $f(x) = (x + 1)^2 + 2$, $M(-3; 6)$.

1.77. Угол наклона к оси Ox касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, равен α. Найдите координаты точки касания, если:

1) $f(x) = x^2 + 4x + 3$, $\alpha = 45°$;
2) $f(x) = -4x^2 + 3x + 2$, $\alpha = 45°$;
3) $f(x) = 1 + 2x^2 + \sqrt{3}x$, $\alpha = 60°$;
4) $f(x) = -3x^2 + 2\sqrt{3}x + 6$, $\alpha = 60°$;
5)* $f(x) = \sqrt{x}$, $\alpha = 60°$;
6)* $f(x) = \sqrt{x}$, $\alpha = 30°$.

1.78. 1) Составьте уравнение касательной, параллельной оси абсцисс, к графику функции $f(x) = 3x - x^2$.
2) Составьте уравнение касательной, перпендикулярной оси ординат, к графику функции $f(x) = x^2 + 4x$.

1.79. Касательная к кривой $y = f(x)$ параллельна прямой $y = g(x)$. Найдите координаты точки касания, если:

1) $f(x) = 5x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 6x + 13$;
2) $f(x) = 2x^2 + x - 1\frac{7}{8}$, $g(x) = -4x + 5$.

1.80. 1) К графику функции $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$ проведена касательная, параллельная оси абсцисс. Найдите координаты точки касания.
2) В какой точке графика функции $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ касательная к нему параллельна оси абсцисс?

1.81*. 1) Составьте уравнения касательных к графику функции $y = -x^2$, проходящих через точку $M(1; 0)$.
2) Составьте уравнения касательных к графику функции $y = x^2 - 3x + 1$, проходящих через точку $K(2; -2)$.

1.82. Найдите точку пересечения касательных к графику функции $y = f(x)$, одна из которых касается графика в точке с абсциссой x_1, а другая — в точке с абсциссой x_2, если:

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$;
2) $f(x) = 8 - x^2 - 2x$, $x_1 = 2$, $x_2 = -4$.

1.83. Найдите точку пересечения касательных, проведенных к графику функции $y = f(x)$ в его точках с абсциссами x_1 и x_2, если:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 9$, $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

2) $f(x) = x^2 + 7 - 4x$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

1.84*. 1) При каких значениях a прямая $y = 3x - 2$ является касательной к графику функции $y = x^2 + ax + 2$?

2) При каком значении a прямая $y = 3x + a$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 - 5x + 1$?

1.7. Теоремы о вычислении производных

Функции u и v, которые рассматриваются в этом пункте, имеют производные на некотором промежутке, x_0 — точка из этого промежутка. Мы выведем правила вычисления производной суммы, произведения, частного функций u и v.

Теорема 1 (*о производной суммы*).

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Эта теорема кратко формулируется так: *производная суммы равна сумме производных слагаемых*.

▲ **Доказательство.** 1) Пусть $y = u + v$. Найдем Δy — приращение функции $y(x) = u(x) + v(x)$ в точке x_0:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) =$$
$$= u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x) - (u(x_0) + v(x_0)) =$$
$$= (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) + (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) =$$

заметим, что $u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) = \Delta u$,
$v(x_0 + \Delta x) - v(x_0) = \Delta v$

$$= \Delta u + \Delta v, \text{ т. е. } \Delta y = \Delta u + \Delta v.$$

2) Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

3) Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'; \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'; \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'; \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \to u' + v'.$$

Левая часть равенства $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$ стремится к y', а правая — к $u' + v'$.

Значит, $y' = u' + v'$. ☒ ▲

Теорема 2 (*о производной произведения*).

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

▲ Доказательство. 1) Пусть $y = uv$. Найдем Δy — приращение функции $y(x) = u(x)v(x)$ в точке x_0:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) =$$
$$= (u(x_0) + \Delta u)(v(x_0) + \Delta v) - u(x_0)v(x_0) =$$
$$= u(x_0)v(x_0) + \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v - u(x_0)v(x_0) =$$
$$= \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

Таким образом,

$$\Delta y = \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

2) Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0) + u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v. \qquad (1)$$

3) Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'; \ \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'; \ \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'; \ \Delta v \to 0.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0) + u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v \to$$
$$\to u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0) + u'(x_0) \cdot 0.$$

Левая часть равенства (1) стремится к y', а правая — к $u'v + uv'$. Значит,

$$y' = u'v + uv'.$$

А так как $y = uv$, то

$$(uv)' = u'v + uv'. \ ☒ ▲$$

Теорема 3 (*о вынесении постоянной за знак производной*).

$$(cu)' = cu'.$$

На основании этой теоремы принято говорить, что *постоянный множитель можно выносить за знак производной*.

▲ Доказательство проведите самостоятельно, воспользовавшись теоремой 2 и тем, что $c' = 0$ (см. п. 1.4). ▲

Теорема 4 (*о производной частного*).

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

▲ Доказательство. Обозначим $y = \frac{u}{v}$. Тогда $u = yv$, и по теореме 2 имеем $u' = y'v + yv'$.

Выразим из этой формулы y', а затем вместо y подставим $\frac{u}{v}$:

$$y' = \frac{u' - yv'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v} \cdot v'}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

А так как $y = \frac{u}{v}$, то

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \boxtimes \blacktriangle$$

Пример 1. Найти производную функции

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Решение. Воспользуемся теоремами 1 и 3:

$$f'(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)' = \left(ax^2\right)' + (bx)' + c' = a\left(x^2\right)' + bx' + c' =$$

$$\downarrow \text{ зная, что } \left(x^2\right)' = 2x,\ x' = 1,\ c' = 0, \text{ получим } \downarrow$$

$$= a \cdot 2x + b \cdot 1 + 0 = 2ax + b.$$

Ответ: $f'(x) = 2ax + b$.

Пример 2. Найти производную функции:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = x^4$.

Решение. а) Зная, что $x' = 1$, $\left(x^2\right)' = 2x$, и используя теорему 2, получаем:

$$f'(x) = \left(x^3\right)' = \left(x \cdot x^2\right)' = x' \cdot x^2 + x \cdot \left(x^2\right)' =$$
$$= 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = x^2 + 2x^2 = 3x^2.$$

б) $f'(x) = \left(x^4\right)' = \left(x \cdot x^3\right)' = x' \cdot x^3 + x \cdot \left(x^3\right)' = 1 \cdot x^3 + x \cdot 3x^2 = x^3 + 3x^3 = 4x^3$ $\left(\text{можно действовать иначе: } f'(x) = \left(x^2 \cdot x^2\right)'\right)$.

Ответ: а) $f'(x) = 3x^2$; б) $f'(x) = 4x^3$.

Пример 3. Найти производную функции:

а) $f(x) = \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Решение. Используя теорему 4 и уже известные нам формулы для вычисления производных, получаем:

а) $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$;

б) $f'(x) = \left(\frac{1}{x^3}\right)' = \frac{1' \cdot x^3 - 1 \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{-3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$.

Ответ: а) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; б) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$.

▲ Рассматривая результаты, полученные при решении примеров 2 и 3, можно заметить, что для любого натурального n верны формулы:

$$(x^n)' = nx^{n-1}; \qquad (x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

Эту закономерность можно сформулировать и по-иному.

Теорема 5 (*о производной степени*). Для любого целого k верна формула

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Эту теорему примем без доказательства.

Пример 4. Найти производную функции:

а) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x - 3$; б) $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$.

Решение. а) $f'(x) = (2x^4 - x^3 + 5x - 3)' =$

$$= (2x^4)' + (-x^3)' + (5x)' + (-3)' = 2(x^4)' - (x^3)' + 5x' + 0 =$$

воспользуемся теоремой 5

$$= 2 \cdot 4x^3 - 3x^2 + 5 = 8x^3 - 3x^2 + 5.$$

б) $f'(x) = \left(\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}\right)' = \frac{(x^3 - 3x)'(x^2 - 1) - (x^3 - 3x)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} =$

$$= \frac{(3x^2 - 3)(x^2 - 1) - (x^3 - 3x)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 3x^2 + 3 - 2x^4 + 6x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 + 3}{(x^2 - 1)^2}.$$

Ответ: а) $8x^3 - 3x^2 + 5$; б) $\frac{x^4 + 3}{(x^2 - 1)^2}$. ▲

?

1. Сформулируйте теорему о производной суммы.
2. Сформулируйте теорему о производной произведения.
3. Сформулируйте теорему о вынесении постоянной за знак производной.
4. Сформулируйте теорему о производной частного.
5*. Сформулируйте теорему о производной степени.

Упражнения

Найдите производную функции f **(1.85—1.92).**

1.85. 1) $f(x) = 4x + 5$; 2) $f(x) = 2 - 8x$;
3) $f(x) = 2\frac{7}{13} + 1\frac{3}{11}x$; 4) $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$;
5) $f(x) = 4 - 3x^2 - 8x$; 6) $f(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{1}{3}$.

1.86. 1) $f(x) = 9\left(4x + \frac{1}{3}\right)$; 2) $f(x) = 4\left(7 - \frac{3}{8}x\right)$;
3) $f(x) = (x + 3)(x - 6)$; 4) $f(x) = (x + 8)(9 - x)$.

1.87. 1) $f(x) = \frac{1}{x} + x$; 2) $f(x) = \frac{4}{x} + x$;
3) $f(x) = -\frac{1}{x} + 4x$; 4) $f(x) = -9x - \frac{1}{x}$.

1.88. 1) $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$; 2) $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$;
3) $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x}$; 4) $f(x) = \frac{2x^2-3x-1}{x+2}$.

1.89. 1) $f(x) = \frac{x-1}{2+x^2}$; 2) $f(x) = \frac{4x-7}{4+x^2}$;
3) $f(x) = \frac{x^2+4}{2-x}$; 4) $f(x) = \frac{1+x}{4-x^2}$;
5) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{5+x^2-2x}$; 6) $f(x) = \frac{x^2-8x+4}{1-x^2+x}$.

1.90. 1) $f(x) = (x^2 + 2x)(x + 3)$;
2) $f(x) = (x^2 - 5x)(x - 4)$;
3) $f(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)$;
4) $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}x^2\right)(x^2 - 4x)$.

1.91. 1) $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)(5 - 3x)$;

2) $f(x) = -2(x + 7)(9 - x)$;

3) $f(x) = (x + 6)(3 - x)(7 + x)$;

4) $f(x) = (13 - x)(4 - x)(5 + x)$;

5)* $f(x) = \frac{\pi}{2}(5x + 2)(x - 4)^3$;

6)* $f(x) = \frac{\pi}{4}(2x - 7)(x + 5)^3$.

1.92. 1) $f(x) = \frac{5(4x - 1)(2 - 3x)}{3 - x^2}$;

2) $f(x) = \frac{8(2 - 9x)(x + 6)}{5 - x^2}$;

3)* $f(x) = \frac{(5 - x)(7x - 2)}{(x + 6)(x - 3)(2 - 4x)}$;

4)* $f(x) = \frac{(3 - 4x)(x + 5)(x - 7)}{(x - 6)(3 - x)}$;

5)* $f(x) = \frac{(2x - 1)^2(6 - x)}{(x + 2)^3}$;

6)* $f(x) = \frac{(x - 3)^3}{(7 - x)(2x + 1)^2}$.

1.93. Верно ли, что:

1) $f'(0) < g'(0)$, если $f(x) = x^2 - 6x$ и $g(x) = x^2\left(\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}\right)$;

2) $f'(0) > g'(0)$, если $f(x) = x^2 + 3x$ и $g(x) = x^2\left(\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}\right)$?

1.94. Сравните значения производных функций f и g в точке $x = a$, если:

1) $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$, $g(x) = \frac{x^2 - 3x}{6 - x}$, $a = 2$;

2) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$, $g(x) = \frac{x + 5}{3x - x^2}$, $a = -1$;

3)* $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 15x$, $g(x) = \frac{3 - x}{2 + x}$, $a = 0$;

4)* $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$, $g(x) = \frac{3 + x}{2 - x}$, $a = 0$.

1.95. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

1) $f(x) = 2x^3 - 6x + 14$;

2) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$; 4) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x-1}$;

5)* $f(x) = x^2(x-2)^3$; 6)* $f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{x^2}$.

1.96. Решите уравнение:

1) $f'(x) - f(x) = 0$, если $f(x) = x^3$;
2) $g'(x) + g(x) = 0$, если $g(x) = -x^3$;
3) $f'(x) = g'(x)$, если $f(x) = x^2 + 4$ и $g(x) = (x+1)(4x-3)$;
4) $f'(x) - g'(x) = 0$, если $f(x) = x^2 - 3$ и $g(x) = (x-2)(3x+2)$.

1.97. Решите неравенство:

1) $f'(x) < g'(x)$, если $f(x) = 5x + 3$ и $g(x) = 2x\left(x+\frac{1}{2}\right)$;
2) $f'(x) > g'(x)$, если $g(x) = 4x - 5$ и $f(x) = \frac{x}{2}(2-6x)$.

1.98. 1) При каких значениях x производная функции $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2-x}$ принимает положительные значения?

2) При каких значениях x производная функции $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+x}$ принимает отрицательные значения?

1.99. Угол наклона к оси Ox касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, равен α. Найдите координаты точек касания, если:

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x^3 - 3\sqrt{3}x + \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$;
2) $f(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^3 + \dfrac{4}{\sqrt{3}}x + 1$, $\alpha = 30°$.

1.100*. Точка движется прямолинейно по закону $s(t)$ (s — путь в метрах, t — время в секундах). Докажите, что скорость движения этой точки не превосходит n $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, если:

1) $s(t) = \dfrac{2t+1}{t+1}$, $n = 1$; 2) $s(t) = \dfrac{3t+1}{t+2}$, $n = 2$.

1.8. Возрастание и убывание функции

С помощью производной изучаются различные свойства функций. Покажем, как она используется для нахождения промежутков возрастания и убывания. Сначала сформулируем ***признаки возрастания*** и ***убывания функции***.

1. **Если в каждой точке x некоторого промежутка $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на этом промежутке.**

2. **Если в каждой точке x некоторого промежутка $f'(x) < 0$, то функция f убывает на этом промежутке.**

▲ Дадим наглядное геометрическое истолкование признака возрастания функции.

Пусть a и b ($a < b$) — две точки из промежутка, на котором $f'(x) > 0$. Через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ проведем прямую (рис. 38). Ее угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

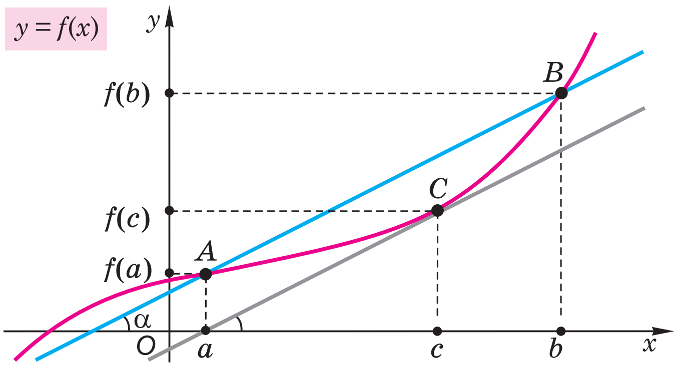


Рис. 38

На дуге AB найдется такая точка $C(c; f(c))$, что касательная к графику функции в этой точке параллельна прямой AB. Угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha = f'(c)$ (см. п. 1.6). Следовательно,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Так как $f'(c) > 0$ и $b - a > 0$, то $f(b) - f(a) > 0$.

Таким образом, когда a и b — такие точки из промежутка, что $b > a$, то $f(b) > f(a)$. А это означает, что функция f возрастает на промежутке.

Наглядное геометрическое истолкование признака убывания функции дайте самостоятельно. ▲

Пример 1. Доказать, что функция $f(x) = 5x^3 - x^2 + 6x - 7$ возрастающая.

Доказательство. Область определения функции f — множество всех действительных чисел, т. е. $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Найдем производную функции f:

$$f'(x) = \left(5x^3 - x^2 + 6x - 7\right)' = 15x^2 - 2x + 6.$$

Дискриминант полученного квадратного трехчлена отрицателен, т. е. $D = 4 - 4 \cdot 15 \cdot 6 < 0$, значит, при любых значениях x значения $f'(x) > 0$ (поясните почему).

Таким образом, функция f — возрастающая на всей области определения. ☒

Пример 2. Доказать, что функция $f(x) = \frac{9}{x} - 6x - x^3$ убывающая на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Доказательство. Заметим, что $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Найдем производную функции f:

$$f'(x) = \left(\frac{9}{x} - 6x - x^3\right)' = -\frac{9}{x^2} - 6 - 3x^2 = -\frac{3(x^4 + 2x^2 + 3)}{x^2}.$$

Очевидно, что $f'(x) < 0$ для любого $x \neq 0$, т. е. значения производной отрицательны на всей области определения функции f. Согласно признаку убывания функция f убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. ☒

! Поскольку $f(-1) = -9 + 6 + 1 < 0$ и $f(1) = 9 - 6 - 1 > 0$, то $f(-1) < f(1)$. Следовательно, функцию f нельзя назвать убывающей на всей области определения.

Пример 3. Найти промежутки возрастания и промежутки убывания функции $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

Решение. Найдем производную функции f:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1).$$

Производная равна нулю в точках $x = -1$ и $x = 1$.

На рисунке 39 отмечены промежутки знакопостоянства функции $f'(x)$ (эти промежутки отмечены знаками «плюс» и «минус» над координатной прямой; поясните, как они получены).

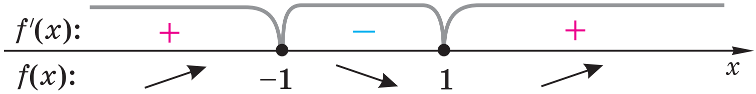


Рис. 39

Поскольку $f'(x) > 0$ на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, то на каждом из этих интервалов функция f возрастает; поскольку $f'(x) < 0$ на интервале $(-1; 1)$, то на этом интервале функция f убывает (возрастание и убывание функции $f(x)$ условно показано стрелками под координатной прямой на рисунке 39).

В точках -1 и 1 функция f определена, поэтому их включают в промежутки и возрастания, и убывания.

Ответ: $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ — промежутки возрастания функции f; $[-1; 1]$ — промежуток убывания функции f.

!

Таким образом, чтобы найти промежутки возрастания и убывания функции f, надо:

1) ***найти производную $f'(x)$;***
2) ***найти, в каких точках производная равна нулю (решить уравнение $f'(x) = 0$);***
3) ***отметить нули производной на координатной прямой;***
4) ***определить знаки значений $f'(x)$ в полученных (между нулями) промежутках, т. е. найти промежутки знакопостоянства функции $f'(x)$*** (каждый из них совпадает с промежутком возрастания или убывания функции f).

?

1. Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции на промежутке.
2. Как установить с помощью производной промежутки возрастания (убывания) функции f?

Упражнения

1.101°. Функция f задана графиком на промежутке $[a; b]$ (рис. 40). Назовите по рисунку промежутки, на которых функция:

а) возрастает;
б) убывает;
в) имеет положительные значения производной;
г) имеет отрицательные значения производной.

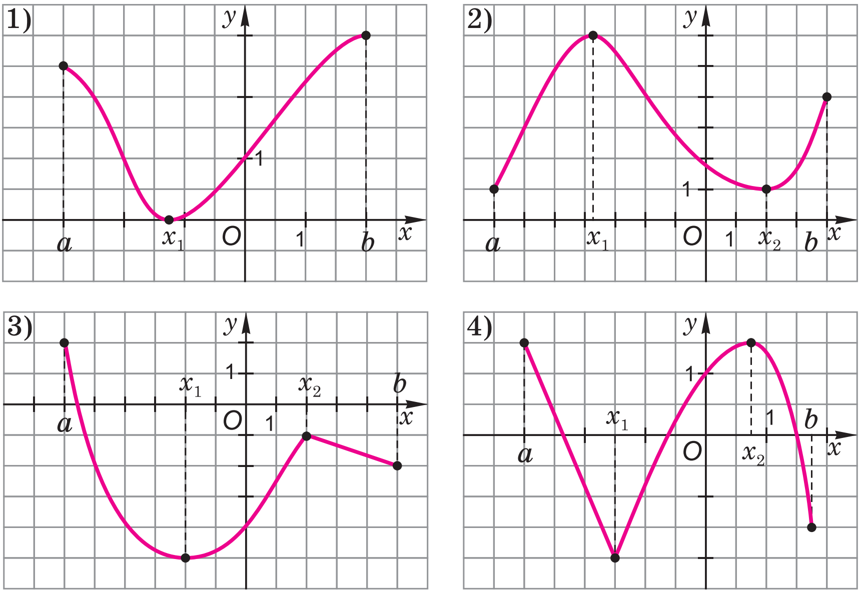


Рис. 40

1.102°. Знаки значений производной $f'(x)$ меняются по схеме (рис. 41). На каких промежутках функция f возрастает, а на каких — убывает, если известно, что она определена на всей числовой прямой?

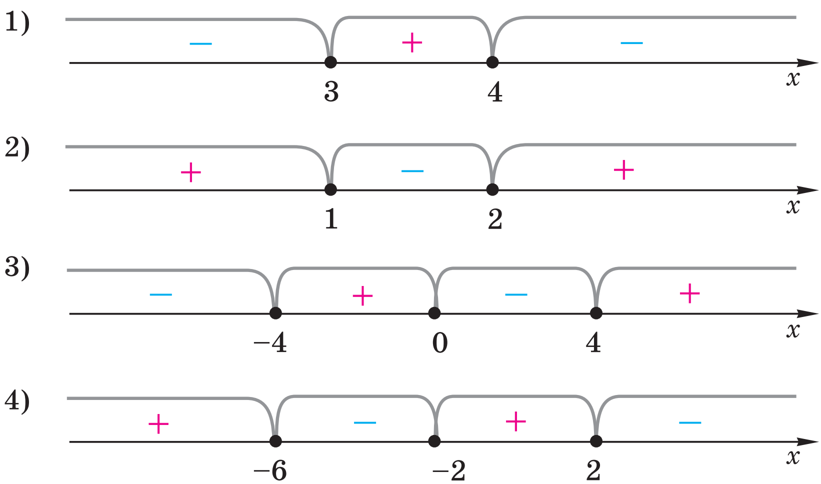


Рис. 41

1.103°. Функция f задана графиком (рис. 42). На каких промежутках значения производной этой функции положительны, а на каких — отрицательны?

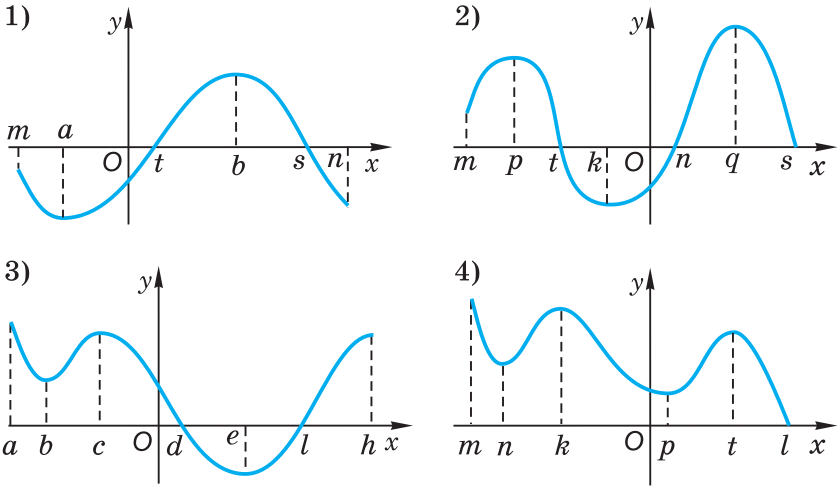


Рис. 42

1.104. Найдите промежутки убывания и промежутки возрастания функции f, если ее производная:

1) $f'(x) = (x + 5)(x - 6)$; 2) $f'(x) = (x - 3)(x + 4)$;

3) $f'(x) = (x + 1)(x - 4)(x - 7)$;

4) $f'(x) = (x + 6)(x - 7)(x + 41)$;

5) $f'(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)(x^2 - 16)$;

6) $f'(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 25)(x^2 - 36)$.

1.105. Найдите промежутки убывания и промежутки возрастания функции f, если ее производная:

1) $f'(x) = x^2 - 6x + 9$; 2) $f'(x) = -x^2 - 10x - 25$;

3) $f'(x) = -x^2 + 5x - 16$; 4) $f'(x) = x^2 - 4x + 12$;

5) $f'(x) = -x^3 - 2x^2 + 35x$; 6) $f'(x) = -x^3 + x^2 + 30x$.

1.106. 1) Докажите, что функция $f(x) = \frac{2x^3 - 3}{3}$ является возрастающей на всей области определения.

2) Докажите, что функция $f(x) = \frac{1 - 3x^3}{6}$ является убывающей на всей области определения.

Найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции f **(1.107—1.110).**

1.107. 1) $f(x) = 2x^2 - x + 12$; 2) $f(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{4}$.

1.108. 1) $f(x) = x^3 - 12x + 7$;
2) $f(x) = 6x - 2x^3 - 5$;
3) $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x + 6$;
4) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$;
5) $f(x) = x^4 - 4x - 3$;
6) $f(x) = x^4 + 32x + 1$;
7)* $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 1$;
8)* $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2$.

1.109. 1) $f(x) = 1 - \frac{1}{4x+1}$; 2) $f(x) = \frac{1}{1-4x} + 2$;
3) $f(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$; 4) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$.

1.110. 1) $f(x) = \frac{2x+3}{5x+1}$; 2) $f(x) = \frac{4x+1}{3x+1}$;
3) $f(x) = \frac{2x^2+15x-8}{x}$; 4) $f(x) = \frac{3x^2+8x-15}{x}$;
5) $f(x) = \frac{1-x}{4x^2+8x+13}$; 6) $f(x) = \frac{x-4}{4x^2+12x+9}$.

1.111*. При каких значениях a функция f возрастает на множестве всех действительных чисел, если:
1) $f(x) = ax^3 + ax$;
2) $f(x) = ax^5 + ax$;
3) $f(x) = 2x^3 - 3(a+2)x^2 + 48ax + 6x - 5$;
4) $f(x) = 4x^3 + (a-1)x^2 + \frac{1}{9}ax + 7$?

1.112. Является ли возрастающей (убывающей) на множестве всех действительных чисел функция:
1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 14$;
2) $f(x) = 2x^5 - x^3 + 8x - 1$;
3)* $f(x) = -0{,}8x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 14$;
4)* $f(x) = -0{,}2x^5 + 0{,}5x^4 - x^3 + x^2 - x + 14$?

1.113*. Найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции f и укажите число ее нулей, если:

1) $f(x) = 4x^3 + 6x + 4\sqrt{5}$; 2) $f(x) = 6x^3 + 9x + 3\sqrt{3}$.

1.9. Максимумы и минимумы функции

Точка x_0 называется *внутренней точкой множества D*, если существует такая окрестность точки x_0, которая содержится во множестве D.

Например, точка 5 (рис. 43) является внутренней точкой промежутка (2; 7], ее окрестность (3; 6) содержится в этом промежутке. А точка 7 не является внутренней точкой промежутка (2; 7], поскольку никакая ее окрестность в этом промежутке не содержится.

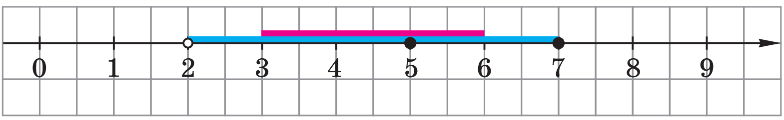


Рис. 43

Рассмотрим функцию f, график которой изображен на рисунке 44. Промежутки возрастания этой функции — $[a; x_1]$, $[x_2; x_3]$, $[x_4; b]$. Промежутки убывания — $[x_1; x_2]$, $[x_3; x_4]$.

Рассмотрим окрестность U точки x_1 (на рисунке эта окрестность отмечена синим цветом). Мы видим, что для любого x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_1)$,

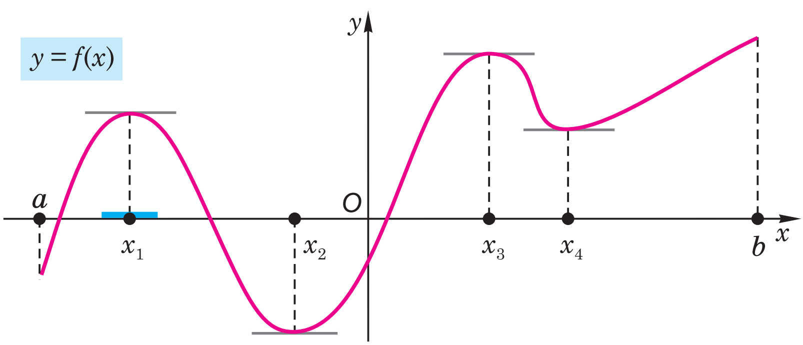


Рис. 44

т. е. в окрестности U функция f принимает наибольшее значение в точке x_1. Точка x_1 называется ***точкой максимума функции*** f.

Определение. **Точка x_0 называется *точкой максимума функции* f, если существует такая окрестность точки x_0, что для любого x из этой окрестности верно неравенство**

$$f(x_0) \geqslant f(x).$$

При этом говорят, что функция f имеет в точке x_0 *максимум*. Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции*.

Функция f (см. рис. 44) имеет еще одну точку максимума — x_3. Вообще говоря, функция может иметь несколько точек максимума, а может не иметь ни одной. Например, функция $f(x) = x^2$ не имеет точек максимума.

Наряду с точками максимума функции рассматривают ***точки минимума функции***. На рисунке 44 это точки x_2 и x_4.

Определение. **Точка x_0 называется *точкой минимума функции* f, если существует такая окрестность точки x_0, что для любого x из этой окрестности верно неравенство**

$$f(x_0) \leqslant f(x).$$

При этом говорят, что функция f имеет в точке x_0 *минимум*. Значение функции в точке минимума называется *минимумом функции*.

Функция может иметь одну, несколько, а может вообще не иметь точек минимума (приведите примеры).

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума функции*. Значение функции в точке экстремума называется *экстремумом функции*.

В каждой точке x из $(a;\ x_1)$ — интервала возрастания функции f (см. рис. 44) ее производная принимает положительные значения, т. е. $f'(x) > 0$. В каждой точке x из $(x_1;\ x_2)$ — интервала убывания функции f ее производная принимает отрицательные значения, т. е. $f'(x) < 0$. Поэтому говорят: «*при переходе через точку x_1 производная меняет знак с «+» на «−»*.

Естественно ожидать, что в точке максимума x_1, разделяющей интервалы возрастания и убывания функции f, производная равна нулю, т. е. $f'(x_1) = 0$. Аналогично и в точке минимума x_2 естественно ожидать, что $f'(x_2) = 0$.

Эти соображения позволяют наглядно представить себе и сформулировать *условия экстремума функции для внутренних точек ее области определения*.

Необходимое условие экстремума

Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в точке x_0 существует производная, то $f'(x_0) = 0$.

Достаточное условие экстремума

Если $f'(x_0) = 0$ и при переходе через точку x_0 значения производной меняют знак с «+» на «−», то x_0 является точкой максимума функции f.

Если $f'(x_0) = 0$ и при переходе через точку x_0 значения производной меняют знак с «−» на «+», то x_0 является точкой минимума функции f.

! Заметим еще, что *если $f'(x_0) = 0$ и при переходе через точку x_0 значения производной не меняют знак, то x_0 не является точкой экстремума*.

Рассмотрим, например, функцию $f(x) = x^3$. Ее производная $f'(x) = 3x^2$, но при переходе через точку $x_0 = 0$ значения производной не меняют знак, поэтому точка $x_0 = 0$ не является точкой экстремума функции $f(x) = x^3$. Действительно, нам известно, что эта функция возрастает во всей области определения.

Пример 1. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = 4x^3 + 7.$$

Решение. Найдем производную функции f:

$$f'(x) = (4x^3 + 7)' = 12x^2.$$

Производная $f'(x)$ обращается в нуль в точке $x = 0$.

На рисунке 45 отмечены промежутки знакопостоянства производной $f'(x) = 12x^2$.

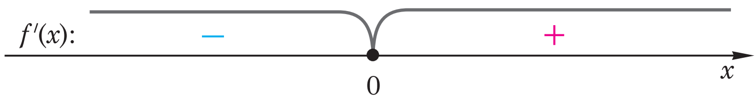


Рис. 45

Таким образом, на основании достаточного условия экстремума точка 0 является точкой минимума функции f. Будем писать: $x_{\min} = 0$.

Ответ: $x_{\min} = 0$.

Пример 2. Найти промежутки возрастания и промежутки убывания функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, ее точки экстремума, а также минимумы и максимумы.

Решение. Производная функции f:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3).$$

Нули производной $f'(x)$ — это числа 1 и 3. На координатной прямой (рис. 46) отмечены нули и промежутки знакопостоянства производной $f'(x)$. Ниже координатной прямой стрелками показано, возрастает или убывает на каждом из этих промежутков функция $f(x)$.

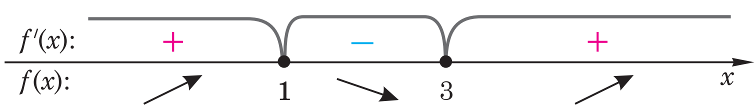


Рис. 46

При переходе через 1 значения производной меняют знак с «+» на «–»; точка 1 является точкой максимума. Аналогично устанавливается, что точка 3 является точкой минимума.

Максимум функции f:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 2 = 1 - 6 + 9 - 2 = 2.$$

Минимум функции f:

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 2 = 27 - 54 + 27 - 2 = -2.$$

Ответ: функция f возрастает на промежутках $(-\infty; 1]$ и $[3; +\infty)$; функция f убывает на промежутке $[1; 3]$. Точка максимума и максимум функции f: $x_{max} = 1$; $f(1) = 2$. Точка минимума и минимум функции f: $x_{min} = 3$; $f(3) = -2$.

▲ **Пример 3.** Найти точки экстремума функции

$$f(x) = 2x^6 - 4x^3 + 7.$$

Решение. $f'(x) = (2x^3 \cdot x^3 - 4x^3 + 7)' = 6x^2 \cdot x^3 + 2x^3 \cdot 3x^2 - 12x^2 + 0 = 12x^5 - 12x^2 = 12x^2(x^3 - 1)$;

$f'(x) = 0$, т. е. $12x^2(x^3 - 1) = 0$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

На рисунке 47 отмечены промежутки знакопостоянства производной $f'(x)$. На основании достаточного условия экстремума делаем вывод, что точка 1 является точкой экстремума функции $f(x)$ (точкой минимума), а точка 0 не является ее точкой экстремума (поясните почему).

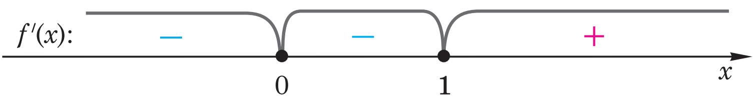


Рис. 47

Ответ: $x_{min} = 1$.

Заметим, что найти производную функции f можно быстрее, если использовать формулу производной степени $(x^k)' = kx^{k-1}$:

$$f'(x) = (2x^6 - 4x^3 + 7)' = 12x^5 - 12x^2.$$

Пример 4. Найти промежутки возрастания и промежутки убывания функции $f(x) = x^6 - 12x^2 + 15$, ее точки экстремума, а также минимумы и максимумы.

Решение. $f'(x) = (x^6 - 12x^2 + 15)' = 6x^5 - 24x = 6x(x^4 - 4) = 6x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$.

На координатной прямой (рис. 48) отмечены нули и промежутки знакопостоянства производной $f'(x)$.

Ниже координатной прямой стрелками показано, возрастает или убывает на каждом из этих промежутков функция $f(x)$.

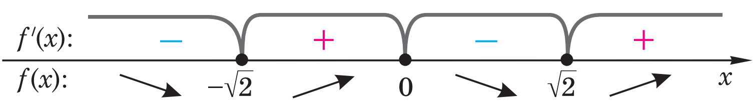


Рис. 48

Точка 0 является точкой максимума, а точки $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ — точками минимума. Минимумы функции f:

$$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^6 - 12(-\sqrt{2})^2 + 15 = 8 - 24 + 15 = -1;$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^6 - 12(\sqrt{2})^2 + 15 = -1.$$

Максимум функции f: $f(0) = 15$.

Ответ: функция f убывает на промежутках $(-\infty; -\sqrt{2}]$ и $[0; \sqrt{2}]$; функция f возрастает на промежутках $[-\sqrt{2}; 0]$ и $[\sqrt{2}; +\infty)$. Точки минимума и минимумы функции f: $x_{\min} = -\sqrt{2}$, $f(-\sqrt{2}) = -1$; $x_{\min} = \sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}) = -1$. Точка максимума и максимум функции f: $x_{\max} = 0$, $f(0) = 15$. ▲

?

1. Дайте определение:
   а) точки максимума (минимума) функции;
   б) максимума (минимума) функции.
2. Дайте определение точек экстремума функции.
3. Сформулируйте необходимое (достаточное) условие экстремума функции.

Упражнения

1.114°. Функция $f(x)$ задана графиком на рисунке 40. Укажите точки максимума и точки минимума функции, а также значения функции в этих точках.

1.115°. Функция f задана графиком на рисунке 42. Укажите точки экстремума функции.

1.116. Найдите точки экстремума функции f и ее значения в этих точках:

1) $f(x) = 3x^2 - 5x - 1$;
2) $f(x) = 5 - 4x - 4x^2$;
3) $f(x) = -4x^3 - 15x^2 + 18x + 2$;
4) $f(x) = -10x^3 + 51x^2 - 36x + 3$;
5) $f(x) = x^4 - 32x + 7$;
6) $f(x) = -x^4 + 4x - 9$.

Найдите точки максимума и точки минимума функции $f(x)$, а также значения функции в этих точках **(1.117—1.120)**.

1.117. 1) $f(x) = x(x - 5)$; 2) $f(x) = x(x + 1)$;
3) $f(x) = x^3(x - 5)$; 4) $f(x) = x^3(x + 1)$.

1.118. 1) $f(x) = \frac{3}{x} - 12x^2$; 2) $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$;
3) $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{x}{7}$; 4) $f(x) = \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$;
5) $f(x) = \frac{2x^2 + 6}{x - 1}$; 6) $f(x) = \frac{8 - x^2}{3 + x}$.

1.119. 1) $f(x) = \frac{1}{x} + 2x^3 - 5x$; 2) $f(x) = \frac{6}{x} + \frac{1}{3}x^3 + 5x$;
3) $f(x) = \frac{2}{x}(x^2 + 9)$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 4)$.

1.120. 1) $f(x) = \frac{(x - 2)(6 + x)}{(x - 1)^2}$; 2) $f(x) = \frac{(x - 5)(3 + x)}{(x + 2)^2}$;
3) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 2}$; 4) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4x + 4}$.

1.121. Для функции f укажите:

а) область определения;

б) промежутки возрастания (убывания);

в) точки экстремума функции и ее значения в этих точках, если:

1) $f(x) = -x^3 + 12x - 15$; 2) $f(x) = -x^3 - x - 2$;
3) $f(x) = 6x^5 - 10x^3$; 4) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

1.122*. Дана функция $f(x) = 2{,}5x^4 + 4x^3 + 1{,}8$.

1) Укажите точки экстремума функции и ее значения в этих точках.

2) Решите уравнение $f(x) = f(-1{,}2)$.

1.123*. Дана функция $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 69$.

1) Укажите точки экстремума функции и ее значения в этих точках.

2) Решите уравнение $f(x) = f(4{,}5)$.

1.124*. Дана функция $f(x) = -0{,}5x^4 - 16x + \sqrt{21}$.

1) Укажите точки экстремума функции и ее значения в этих точках.

2) Решите неравенство $f(x) \geqslant f(-2)$.

1.125*. Дана функция $f(x) = -x^4 + 32x - \sqrt{5}$.

1) Укажите точки экстремума функции и ее значения в этих точках.

2) Решите неравенство $f(x) < f(2)$.

1.10. Применение производной к исследованию функций

В предыдущих пунктах уже приводились примеры использования производной для исследования функции на возрастание (убывание) и нахождения ее точек экстремума. Покажем, как на основе такого исследования можно получить изображение графика функции.

Пример 1. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ и изобразить ее график.

Решение. Область определения функции $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Из решения примера 2 п. 1.9 уже известны промежутки возрастания (убывания) функции f, ее точки максимума и минимума, а также значения функции f в этих точках.

Для построения графика функции f на координатной плоскости отметим сначала точки $(1;\ f(1))$ и $(3;\ f(3))$, т. е. точки $(1;\ 2)$ и $(3;\ -2)$ (рис. 49, *а*).

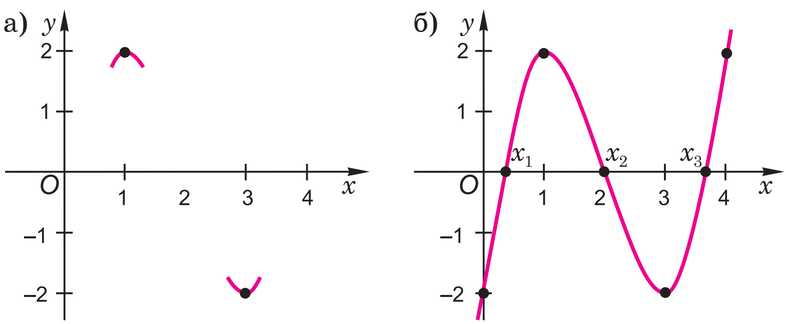


Рис. 49

Затем найдем координаты точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат. Точка пересечения графика функции f с осью ординат $(0; f(0))$, т. е. $(0; -2)$.

Абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox найдем, решив уравнение $f(x) = 0$, т. е. $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$; откуда получим $(x - 2)(x^2 - 4x + 1) = 0$ и соответственно: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2 + \sqrt{3}$.

(Далеко не всегда удается решить уравнение $f(x) = 0$, а значит, и найти точки пересечения графика с осью абсцисс.)

Все точки пересечения графика с осями тоже отметим на координатной плоскости. Полезно отметить на координатной плоскости и дополнительные точки, координаты которых удобно вычислить. Отметим, например, точку $(4; 2)$. Соединив все имеющиеся точки плавной линией, получим изображение графика функции f (рис. 49, *б*).

Таким образом, ***исследуя свойства функции с применением производной***, обычно находят:

1) *область определения функции*;

2) *производную функции, нули и промежутки знакопостоянства производной*;

3) *промежутки возрастания (убывания) функции, точки экстремума и значения функции в этих точках*.

Используя результаты исследования, изображают график функции. При этом находят (если это возможно) координаты *точек пересечения графика с осями координат*, а иногда и координаты *дополнительных точек графика*.

Пример 2. Исследовать функцию $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ и изобразить ее график.

Решение. Область определения функции $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Производная функции f: $f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$.

Нули производной $f'(x)$: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.

На координатной прямой отмечены нули производной $f'(x)$ и ее промежутки знакопостоянства (рис. 50).

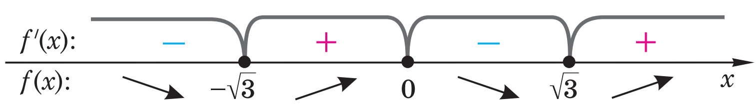


Рис. 50

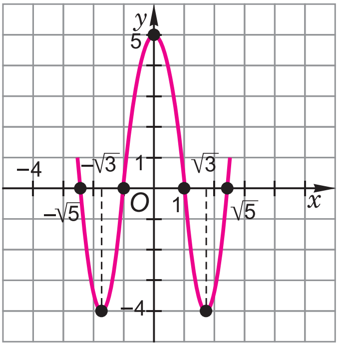


Рис. 51

Ниже координатной прямой стрелками показаны промежутки возрастания (убывания) функции f.

Точки $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$ — точки минимума функции; $f(-\sqrt{3}) = -4$, $f(\sqrt{3}) = -4$. Точка 0 является точкой максимума функции; $f(0) = 5$.

Отметим на координатной плоскости точки: $(-\sqrt{3};\ -4)$, $(\sqrt{3};\ -4)$, $(0;\ 5)$. Затем найдем точки пересечения графика с осями координат (сделайте это самостоятельно) и отметим их на координатной плоскости (рис. 51). Соединив отмеченные точки плавной линией, получим изображение графика функции f.

▲ Заметим, что функция f — четная. Поэтому сначала ее можно было исследовать на промежутке $[0;\ +\infty)$, изобразить на нем ее график, а затем отобразить этот график симметрично относительно оси ординат. ▲

?

1. Как исследовать функцию с помощью производной?
2. Как результаты исследования функции используют для изображения ее графика?
3. Какие точки обычно используют при изображении графика функции?

Упражнение

Изобразите график каждой функции f из упражнений **1.116, 1.121—1.125.**

1.11. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Напомним, что числовой промежуток вида $[a;\ b]$ называется ***отрезком***. Точки a и b называются концами этого отрезка.

Пусть на отрезке $[a;\ b]$ определена функция f, которая имеет производную в каждой внутренней точке этого отрезка. Решим задачу: *найти наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке* $[a;\ b]$.

Пусть функция принимает наибольшее значение в некоторой точке $x_0 \in [a; b]$. Возможно, что $x_0 = a$ либо $x_0 = b$. Если же это не так, то x_0 — внутренняя точка отрезка $[a; b]$ и, разумеется, она является точкой максимума функции f (поясните почему). Тогда $f'(x_0) = 0$.

Таким образом, точку, в которой функция принимает наибольшее значение, надо искать среди точек a, b и тех точек интервала $(a; b)$, в которых производная равна нулю. Аналогично и для точки, в которой функция принимает наименьшее значение.

Итак, ***чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке*** $[a; b]$***, поступают следующим образом:***

1) *находят значения функции в тех точках интервала* $(a; b)$*, в которых ее производная обращается в нуль*;

2) *находят значения функции на концах отрезка* $[a; b]$;

3) *выбирают из найденных значений функции наибольшее и наименьшее*.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 4{,}5x^2 - 9$ на отрезке $[-4; -2]$.

Решение. $f'(x) = 3x^2 + 9x = 3x(x + 3)$. Производная обращается в нуль в точках $x_1 = -3$, $x_2 = 0$; точка $x_2 = 0$ не принадлежит отрезку $[-4; -2]$.

Найдем значения функции f в точке -3 и на концах данного отрезка (в точках -4 и -2):

$$f(-3) = 4{,}5; \quad f(-4) = -1; \quad f(-2) = 1.$$

Мы видим, что наибольшее значение функции f на отрезке $[-4; -2]$ равно 4,5, а наименьшее равно -1. Это для функции f можно записать так:

$$\underset{x \in [-4; -2]}{f_{\text{наиб}}}(x) = f(-3) = 4{,}5; \qquad \underset{x \in [-4; -2]}{f_{\text{наим}}}(x) = f(-4) = -1.$$

Ответ: $\underset{x \in [-4; -2]}{f_{\text{наиб}}}(x) = 4{,}5$; $\underset{x \in [-4; -2]}{f_{\text{наим}}}(x) = -1$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{x} - 5x + 1$ на отрезке:

а) $[-3; 0]$; б) $[1{,}5; 3]$; в) $[3; 4]$.

Решение. Найдем производную функции f для внутренних точек ее области определения $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{x} - 5x + 1\right)' = x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в четырех точках: ±1, ±2 (поясните, как находят эти точки).

а) Отрезку $[-3;\ 0]$ принадлежат две точки, в которых производная обращается в нуль: -2 и -1. Найдем значения функции f в этих точках, а также на концах отрезка (в точках -3 и 0):

$$f(-2) = 10\frac{1}{3};\qquad f(-1) = 9\frac{2}{3};\qquad f(-3) = 8\frac{1}{3};\qquad f(0) = 1.$$

Сравним их и выберем наибольшее и наименьшее значения.

б) Отрезку $[1{,}5;\ 3]$ принадлежит только точка $x = 2$. Найдем значения функции f в точке 2 и на концах отрезка; из них выберем наибольшее и наименьшее:

$$f(2) = -8\frac{1}{3};\qquad f(1{,}5) = -8\frac{1}{24};\qquad f(3) = -6\frac{1}{3}.$$

в) Отрезок $[3;\ 4]$ не содержит нулей производной, поэтому найдем значения функции f на его концах и сравним их:

$$f(3) = -6\frac{1}{3};\qquad f(4) = 1\frac{1}{3}.$$

Ответ: а) $\underset{x\in[-3;\ 0]}{f_{\text{наиб}}}(x) = 10\frac{1}{3}$; $\underset{x\in[-3;\ 0]}{f_{\text{наим}}}(x) = 1$;

б) $\underset{x\in[1{,}5;\ 3]}{f_{\text{наиб}}}(x) = -6\frac{1}{3}$; $\underset{x\in[1{,}5;\ 3]}{f_{\text{наим}}}(x) = -8\frac{1}{3}$;

в) $\underset{x\in[3;\ 4]}{f_{\text{наиб}}}(x) = 1\frac{1}{3}$; $\underset{x\in[3;\ 4]}{f_{\text{наим}}}(x) = -6\frac{1}{3}$.

Пример 3. Даны прямоугольные треугольники с гипотенузой 8 см и катетом x см. Найти среди них треугольники с наибольшей и наименьшей площадями. Указать площади этих треугольников, если:

а) $x \in [2;\ 4]$; б) $x \in [2;\ 6]$.

Решение. По теореме Пифагора длина второго катета равна $\sqrt{64 - x^2}$. Площадь прямоугольного треугольника $S(x)$ можно найти по формуле

$$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{64-x^2},$$

т. е. $S(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x^2(64-x^2)}$. Функция $S(x)$ принимает наибольшее и наименьшее значения в тех же точках, что и функция $f(x) = \frac{1}{4}x^2(64-x^2)$, т. е. $f(x) = 16x^2 - \frac{1}{4}x^4$.

Найдем производную функции f:

$$f'(x) = \left(16x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)' = 32x - x^3 = x(32 - x^2).$$

Найдем значения x, при которых производная равна нулю. Это числа: $x_1 = 0$; $x_2 = -4\sqrt{2}$; $x_3 = 4\sqrt{2}$.

а) Отрезку [2; 4] числа x_1, x_2, x_3 не принадлежат, поэтому наибольшее (наименьшее) значение функции f, а значит и функции S, может быть только на его концах:

$$S(2) = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{64-4} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15};$$

$$S(4) = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{64-16} = 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}.$$

Очевидно, что $S(4) > S(2)$.

б) Отрезку [2; 6] принадлежит $x_3 = 4\sqrt{2}$. Сравним $S(2)$, $S\left(4\sqrt{2}\right)$ и $S(6)$:

$$S(2) = 2\sqrt{15};$$

$$S\left(4\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\sqrt{64-32} = 2\sqrt{2}\sqrt{32} = 2\sqrt{64} = 16;$$

$$S(6) = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{64-36} = 3\sqrt{28} = 6\sqrt{7} = 2\sqrt{63}.$$

Очевидно, что $S(2) < S(6) < S\left(4\sqrt{2}\right)$.

Ответ: а) $\underset{x\in[2;\,4]}{S_{\text{наиб}}}(x) = 8\sqrt{3}$; $\underset{x\in[2;\,4]}{S_{\text{наим}}}(x) = 2\sqrt{15}$;

б) $\underset{x\in[2;\,6]}{S_{\text{наиб}}}(x) = 16$; $\underset{x\in[2;\,6]}{S_{\text{наим}}}(x) = 2\sqrt{15}$.

?

1. Как находят наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке?
2. Изобразите график функции, определенной на отрезке $[a; b]$, у которой:
   а) наибольшее значение функции не совпадает (совпадает) с ее максимумом;
   б) наименьшее значение функции не совпадает (совпадает) с ее минимумом.

Упражнения

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке I **(1.126—1.130)**.

1.126. 1) $f(x)=1-4x$, $I=[-3;\ 2]$;
2) $f(x)=5x-1$, $I=[-1;\ 2]$;
3) $f(x)=-2x^2$, $I=[-2;\ 1]$;
4) $f(x)=-x^2$, $I=[-1;\ 2]$;
5) $f(x)=x^2$, $I=[-3;\ 2]$;
6) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $I=[-2;\ 4]$.

1.127. 1) $f(x)=4x-x^2$, $I=[-1;\ 0]$;
2) $f(x)=2x-x^2$, $I=[-2;\ 0]$;
3) $f(x)=2x^3-6x$, $I=[-4;\ 0]$;
4) $f(x)=3x^3+9x$, $I=[0;\ 2]$.

1.128. 1) $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+1$, $I=[-1;\ 1]$;
2) $f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+9$, $I=[-3;\ -1]$;
3) $f(x)=x^3-2x^2+8x-3$, $I=[-1;\ 1]$;
4) $f(x)=x^3-2x^2-4x+6$, $I=[-1;\ 1]$.

1.129. 1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $I=[-2;\ 0{,}5]$;
2) $f(x)=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$, $I=[1;\ 4]$;
3) $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$, $I=[1;\ 2]$;
4) $f(x)=x+\frac{2}{x^2}$, $I=[-4;\ -1]$.

1.130. 1) $f(x)=\frac{-4x^2+16x-4}{5x^2}$, $I=[0{,}375;\ 0{,}75]$;
2) $f(x)=\frac{-2x^2+18x-3}{5x^2}$, $I=\left[\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right]$;
3) $f(x)=\frac{7x}{x^2+1}$, $I=[-2;\ 0{,}5]$;
4) $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$, $I=[-5;\ 0{,}2]$.

1.131. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = -\frac{2}{3}t^3 + 12t^2 + 70t$ (t — время в секундах, $s(t)$ — путь в метрах). В какой момент времени скорость движения точки будет наибольшей и каково значение этой скорости, если:

1) $t \in [1; 7]$; 2) $t \in [5; 9]$;

3) $t \in [9; 13]$; 4) $t \in [8; 14]$?

1.132. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 0{,}25t^4 + t^3 + 1$ (t — время в секундах, $s(t)$ — путь в метрах). В какой момент времени скорость движения точки будет наибольшей и каково значение этой скорости, если:

1) $t \in [3; 5]$; 2) $t \in [5; 7]$;

3) $t \in [7; 9]$; 4) $t \in [6; 10]$?

1.133. Среди всех прямоугольников с периметром P м и длиной стороны x м, где $x \in D$, найдите прямоугольники с наибольшей и наименьшей площадями. Укажите площади этих прямоугольников, если:

1) $P = 20$; $D = [2; 8]$; 2) $P = 36$; $D = [5; 12]$.

1.12. Наибольшее и наименьшее значения функции на произвольном промежутке

Можно находить наибольшее (наименьшее) значение функции не только на отрезке, но и на промежутках другого вида, например на интервалах.

Пример 1. Проволочной сеткой длиной 240 м надо огородить прямоугольный участок земли. Какие размеры должен иметь участок, чтобы его площадь была наибольшей?

Решение. Пусть x — длина одной из сторон участка (в метрах), тогда длина смежной стороны равна $(120 - x)$, а площадь участка можно найти по формуле

$$S(x) = x(120 - x).$$

По смыслу задачи число x удовлетворяет неравенству $0 < x < 120$, т. е. принадлежит интервалу $(0; 120)$.

Таким образом, нам нужно установить, при каком значении x из интервала (0; 120) функция $S(x)$ принимает на нем наибольшее значение.

Подобную задачу для отрезка мы решать умеем.

Рассмотрим функцию $S(x) = x(120 - x)$ на отрезке [0; 120]. Найдем ее наибольшее значение на этом отрезке (см. п. 1.11):

$$S'(x) = 120 - 2x;$$

$$S'(x) = 0 \text{ при } 120 - 2x = 0,$$
$$\text{т. е. при } x = 60;$$

$$S(0) = 0(120 - 0) = 0;$$

$$S(60) = 60(120 - 60) = 60^2 = 3600;$$

$$S(120) = 120(120 - 120) = 0.$$

Таким образом, функция $S(x)$ принимает свое наибольшее значение в точке $x = 60$. Эта точка лежит внутри интервала (0; 120).

Итак, $\underset{x \in (0;\,120)}{S_{\text{наиб}}}(x) = S(60) = 3600.$

Ответ: 60 × 60 м.

Замечание. Конечно, эту задачу мы могли бы решить и не используя производной, поскольку $S(x)$ — хорошо известная нам квадратичная функция. Схематическое изображение графика функции $y = S(x)$ приведено на рисунке 52.

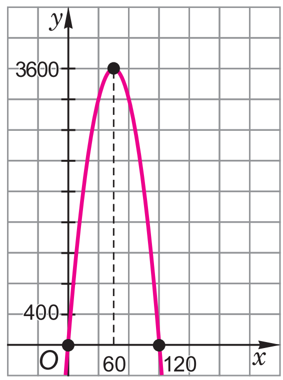


Рис. 52

Пример 2. Прямоугольный участок земли площадью 3600 м^2 надо огородить проволочной сеткой. Какие размеры должен иметь участок, чтобы длина сетки была наименьшей?

Решение. Пусть x — длина одной из сторон участка (в метрах), тогда длина смежной стороны равна $\frac{3600}{x}$, а периметр участка можно найти по формуле $P(x) = 2\left(x + \frac{3600}{x}\right)$.

По смыслу задачи число x удовлетворяет неравенству $x > 0$, т. е. принадлежит интервалу $(0; +\infty)$.

Таким образом, нам надо найти значение x, при котором функция $P(x)$ принимает наименьшее значение на интервале $(0; +\infty)$. Здесь мы уже не можем использовать действия для отыскания наименьшего значения функции на отрезке. Поступим следующим образом. Найдем производную функции P:

$$P'(x) = \left(2\left(x + \frac{3600}{x}\right)\right)' = 2\left((x)' + \left(\frac{3600}{x}\right)'\right) = 2\left(1 - \frac{3600}{x^2}\right) =$$

$$= 2\,\frac{x^2 - 3600}{x^2} = \frac{2(x-60)(x+60)}{x^2}.$$

Производная $P'(x)$ обращается в нуль в точках $x = -60$ и $x = 60$, из них только точка $x = 60$ принадлежит интервалу $(0; +\infty)$. Исследуем знаки значений производной на этом интервале.

При $0 < x < 60$ значения производной отрицательны и функция $P(x)$ убывает; при $x > 60$ значения производной положительны и функция $P(x)$ возрастает (рис. 53).

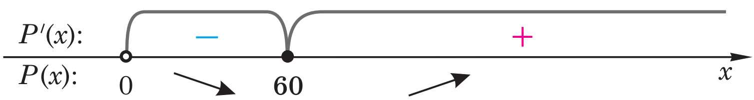


Рис. 53

Следовательно, своего наименьшего значения эта функция достигает в точке $x = 60$, в которой ее производная обращается в нуль. Итак, $\underset{x \in (0; +\infty)}{P_{\text{наим}}}(x) = P(60) = 2\left(60 + \frac{3600}{60}\right) = 240.$

Схематическое изображение графика функции $y = P(x)$, иллюстрирующее решение этой задачи, показано красной линией (рис. 54).

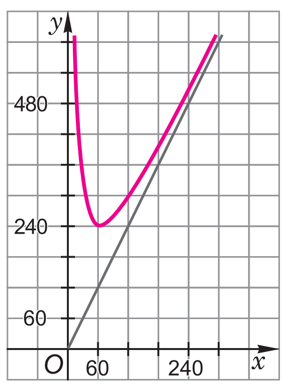


Рис. 54

Заметим, что точка $x = 60$ является точкой минимума функции $P(x)$ (поясните почему).

О т в е т: 60×60 м.

При решении текстовых задач на нахождение наименьшего (или наибольшего) значения различных величин поступают следующим образом:

1) *вводят переменную*;

2) *выражают через эту переменную и известные данные ту величину, наименьшее (или наибольшее) значение которой надо найти, т. е. вводят соответствующую функцию*;

3) *определяют наименьшее (или наибольшее) значение введенной функции*.

?

1. Как находят наибольшее (наименьшее) значение функции на интервале?
2. Как поступают при необходимости найти наибольшее (наименьшее) значение некоторой величины при решении текстовых задач?

Упражнения

1.134. 1) Каковы должны быть стороны прямоугольного участка с периметром 120 м, чтобы площадь этого участка была наибольшей?

2) Прямоугольный участок земли площадью 4 га огораживается забором. Каковы должны быть размеры участка, чтобы длина забора была наименьшей?

1.135. 1) Число 48 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

2) Число 16 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

1.136. 1) Число 18 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма удвоенного одного слагаемого и квадрата другого слагаемого была наименьшей.

2) Число 10 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

1.137. 1) Из всех прямоугольников, вписанных в окружность радиусом 1 дм, укажите прямоугольник, который имеет наибольшую площадь. Найдите эту площадь.

2) Требуется сделать коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратным дном наибольшего объема без крышки при заданной площади поверхности 12 дм^2. Определите размеры коробки.

1.138. 1) Среди равнобедренных треугольников с основанием a найдите треугольник наибольшей площади.

2) Длины боковых сторон и меньшего основания равнобедренной трапеции равны по 24 см. Какой должна быть длина большего основания, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

1.139. В прямоугольный треугольник вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей, если в треугольнике:

1) гипотенуза равна 16 см, а угол $60°$;

2) катет равен 12 см, а противолежащий ему угол $30°$?

1.140. В треугольник со стороной a и высотой h, проведенной к этой стороне, вписан прямоугольник, одна из сторон которого лежит на данной стороне треугольника. Определите наибольшую площадь такого прямоугольника, если:

1) $a = 4$ см, $h = 3$ см; 2) $a = 6$ м, $h = 8$ м.

Глава 2
Тригонометрические выражения

2.1. Градусная мера углов и дуг. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

Вы знакомы с понятиями острого, прямого, тупого, развернутого углов, центрального угла, дуги окружности, соответствующей этому центральному углу. Вам известно, что величины углов и дуг окружности измеряются в градусах.

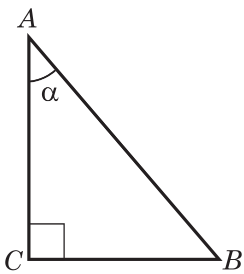


Рис. 55

Напомним, что ***градусом*** называется величина центрального угла, которому соответствует $\frac{1}{360}$ часть окружности.

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла. Градусная мера всей окружности равна 360°, а полуокружности — 180°.

В геометрии были даны определения *синуса, косинуса, тангенса* и *котангенса* для острых углов прямоугольного треугольника. Напомним, что в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$) (рис. 55):

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}, \qquad \cos\alpha = \frac{AC}{AB},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC}.$$

Заметим, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

При решении различных примеров часто используют значения синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов углов 30°, 45°, 60° (см. таблицу).

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Пример. Доказать для острого угла α тождество:

а) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$; б) $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$;
в) $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.

Доказательство. а) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$ (см. рис. 55). Соответственно, имеем $\angle B = 90° - \alpha$. Используя определения синуса и косинуса острого угла, получим:

$$\sin\angle B = \sin(90° - \alpha) = \frac{AC}{AB} = \cos\angle A = \cos\alpha,$$

т. е. $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$. ☒

Доказательства тождеств б), в), г) аналогичны доказательству тождества а), выполните их самостоятельно.

Названия «косинус» и «котангенс» представляют собой сокращение терминов complementi sinus, complementi tangens («синус дополнения», «тангенс дополнения»), выражающих тот факт, что $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ равны соответственно синусу и тангенсу угла, дополняющего α до 90°, т. е. $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$. Слово «тригонометрия» происходит от греческих слов trigonon — треугольник и metron — мера (metreo — измеряю).

1. Какой угол называется: а) острым; б) тупым; в) прямым; г) развернутым; д) полным; е) центральным?
2. В каких единицах измеряются величины углов?
3. Что называется градусом?
4. Что называется синусом (косинусом) острого угла?
5. Что называется тангенсом (котангенсом) острого угла?

Упражнения

2.1°. AB — сторона правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром O. Найдите градусную меру угла AOB, если:

1) $n = 3$; 2) $n = 5$; 3) $n = 6$; 4) $n = 12$.

2.2°. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен половине гипотенузы. Для острых углов этого треугольника укажите:

1) их градусную меру;
2) значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

2.3°. В прямоугольном треугольнике катеты равны. Для острых углов этого треугольника укажите:

1) их градусную меру;
2) значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

2.4°. Постройте угол α и найдите приближенно его величину (в градусах), зная, что:

1) $\sin\alpha = 0{,}8$; 2) $\sin\alpha = 0{,}6$; 3) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$;
4) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; 5) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$; 6) $\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{3}{5}$;
7) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$; 8) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{4}$.

2.5°. Сравните острые углы α и β, если:

1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ и $\sin\beta = \frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$ и $\cos\beta = \frac{2}{5}$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{5}$ и $\operatorname{ctg}\beta = \frac{2}{3}$.

2.6°. Какова величина (в градусах) острого угла α, если:

1) $\sin\alpha = \cos\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$?

Найдите значение выражения **(2.7—2.9)**.

2.7. 1) $2\sin 60° + 3\sin 45° + 10\cos 60° - 4\cos 45° - \operatorname{tg} 60°$;
2) $4\operatorname{tg} 30° - 5\cos 30° + 6\sin 60° - 3\operatorname{tg} 60° + \operatorname{tg} 45°$;
3) $6\operatorname{ctg} 60° - 2\sin 60° + 12\sin 60°\cos 60°$;
4) $2\sin 30° + 6\cos 60° - 4\operatorname{tg} 45° + 7\operatorname{tg} 30°\operatorname{ctg} 30°$.

2.8. 1) $\cos 60° - \operatorname{tg}^2 45° + \frac{3}{4}\operatorname{tg}^2 30° + 4\cos^2 30° - \sin 30°$;
2) $\cos^2 30° + 2\sin 30° - \operatorname{ctg}^2 45° + \operatorname{ctg}^2 30° + \cos 60°$;
3) $\operatorname{ctg}^2 45° + \cos 60° - \sin^2 60° + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2 60°$;
4) $\operatorname{tg}^2 30° - \operatorname{tg} 45° - \cos^2 30° + 2\sin 60°$.

2.9. 1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ при α, равном 30°; 45°; 60°;
2) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2$ при α, равном 30°; 45°; 60°;

3) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha$ при α, равном $15°$; $22{,}5°$; $30°$;

4) $\sin^2 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha + \cos^2 2\alpha$ при α, равном $15°$; $22{,}5°$; $30°$.

2.10. Упростите выражение:

1) $\cos(90° - \alpha) - \sin\alpha + \dfrac{\sin(90° - \alpha)}{\cos\alpha}$;

2) $\sin(90° - \alpha) - \cos\alpha + \dfrac{\cos(90° - \alpha)}{\sin\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin(90° - \alpha)\cos(90° - \alpha)}{\operatorname{ctg}(90° - \alpha)}$;

4) $\dfrac{\cos(90° - \alpha)\operatorname{ctg}(90° - \alpha)}{\operatorname{tg}(90° - \alpha)}$.

2.11. Представьте, используя значения только синусов (или только косинусов) острых углов, данное выражение в виде тригонометрического:

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$;

2) $\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{1}{8}$;

3) $\dfrac{3}{8} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$;

4) $\dfrac{1}{8} - \dfrac{3\sqrt{3}}{8} + \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

2.12. Представьте, используя значения только тангенсов (или только котангенсов) острых углов, данное выражение в виде тригонометрического:

1) $\dfrac{1}{3} - \sqrt{3} + 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\dfrac{1}{3} - \sqrt{3} + 3 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $3\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{9}$;

4) $\dfrac{1}{9} - 3 + \sqrt{3} + \dfrac{1}{(\sqrt{3})^3}$.

2.13*. Найдите значение выражения A, если:

1) $A = 1 - \sin 30° + \sin^2 30° - \sin^3 30° + \ldots + \sin^{100} 30°$;

2) $A = 1 - \operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg}^2 30° - \operatorname{tg}^3 30° + \ldots + \operatorname{tg}^{200} 30°$.

2.2. Понятие угла

Пусть дана плоскость и на ней луч с началом в точке O, который вращается вокруг этой точки от начального положения — луча OA — до конечного положения — луча OB. Тогда величину поворота, совершенного этим лучом, естественно измерять величиной угла, который образуют лучи OA и OB в конце вращения. Поясним это на нескольких примерах.

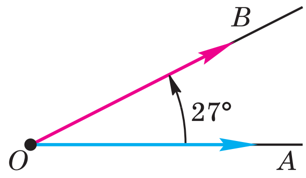


Рис. 56

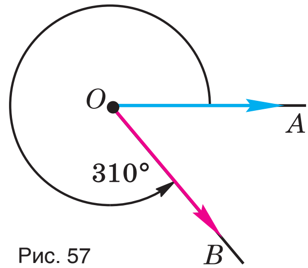


Рис. 57

На рисунке 56 изображен поворот луча против хода часовой стрелки на угол 27° (начальное положение вращающегося луча на рисунках показано стрелкой синего цвета, а конечное — красного).

На рисунке 57 изображен поворот луча против хода часовой стрелки на угол 310°.

На рисунке 58 изображен такой поворот луча против хода часовой стрелки, что его конечное положение — луч OB — впервые совпадает с начальным положением — лучом OA. Этот поворот называют ***полным оборотом*** (поворотом на угол 360°).

На рисунке 59 изображен поворот луча против хода часовой стрелки на угол $1097° = 360° \cdot 3 + 17°$. В этом случае луч, вращаясь от начального положения — луча OA — до конечного положения — луча OB, совершает 3 полных оборота и еще поворот на 17°.

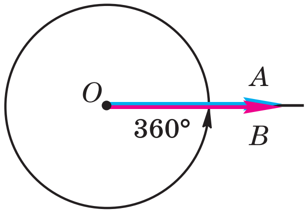


Рис. 58

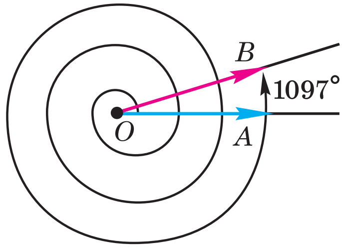


Рис. 59

! Любой поворот луча состоит из целого числа полных оборотов и поворота, являющегося некоторой частью полного оборота. Таким образом, *любой поворот луча задает некоторый* ***угол***, ***соответствующий этому повороту***.

Если поворот луча совершен *против хода часовой стрелки*, то угол поворота принято считать *положительным* (как во всех предыдущих примерах).
Если поворот луча совершен *по ходу часовой стрелки*, то угол поворота принято считать *отрицательным*.

Например, на рисунке 60 изображен поворот луча на угол $-148°$, а на рисунке 61 — поворот на угол $-748°$.

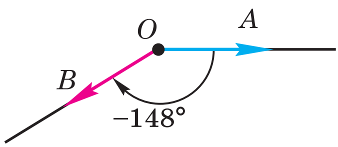


Рис.60

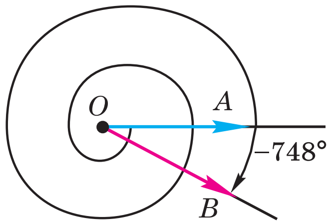


Рис. 61

При повороте луча вокруг точки O его начальное положение — луч OA — будем называть ***началом отсчета***, а о луче OB будем говорить, что он ***определяет угол поворота***.

Любой угол поворота α можно представить в виде

$$\alpha = 360° \cdot n + \varphi, \text{ где } n \in \boldsymbol{Z} \text{ и } 0 \leqslant \varphi < 360°. \qquad (1)$$

Чтобы представить угол α в виде (1), нужно разделить α на $360°$ с остатком. Например, для угла α, равного $5378°$, получим:

$$5378° = 360° \cdot 14 + 338° \text{ (рис. 62).}$$

$$\begin{array}{r|l} -5378 & 360 \\ \underline{360} & \overline{14} \\ -1778 & \\ \underline{1440} & \\ 338 & \end{array}$$

Рис. 62

Здесь $n = 14$, $\varphi = 338°$.

Для угла α, равного $-5378°$, получим:

$$\alpha = -5378° = 360°(-14) - 338° =$$

прибавим к полученному
выражению $360°$, а затем отнимем $360°$:

$$= 360°(-14) - 338° + 360° - 360° =$$

$$= 360°(-15) + 22°, \text{ здесь } n = -15, \ \varphi = 22°.$$

Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат Oxy. Рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице. Такую окружность называ-

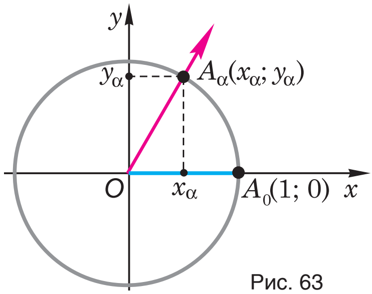


Рис. 63

ют ***единичной*** или ***тригонометрической окружностью***, а круг, который она ограничивает, — ***тригонометрическим кругом***.

В дальнейшем мы будем рассматривать только углы с вершинами в начале координат. Положительную полуось абсцисс принимают за ***начало отсчета для любого угла*** α. Точку ее пересечения с единичной окружностью принято обозначать A_0 (рис. 63). Точку пересечения с единичной окружностью луча, определяющего угол α, называют ***соответствующей углу*** α и обозначают A_α (читается *«А со значком* α*»*), а ее координаты — x_α и y_α (см. рис. 63).

Точка окружности A_α может оказаться в одной из четырех координатных четвертей. Чтобы определить положение точки A_α на окружности, угол α представляют в виде (1).

Если $0° < \varphi < 90°$, то говорят, что угол φ *принадлежит* I четверти, а угол α *оканчивается в* I *четверти* (рис. 64).

Аналогично для II, III и IV четвертей (рис. 65, 66, 67).

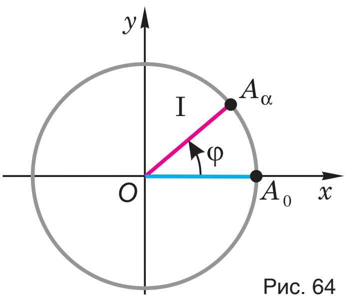


Рис. 64

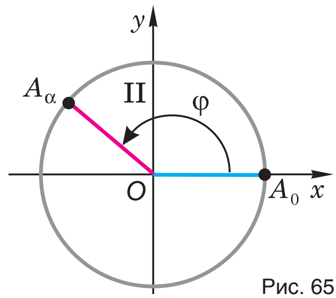


Рис. 65

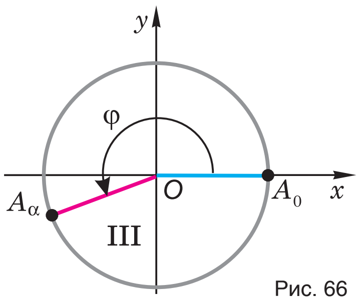


Рис. 66

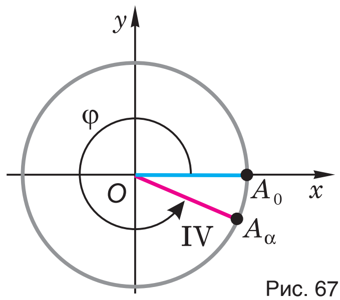


Рис. 67

Если угол $\varphi = 90° \cdot n$, где $n \in \{1; 2; 3; 4\}$, то угол α оканчивается на одной из полуосей системы координат Oxy, т. е. *на границе двух четвертей*.

Например, когда $\varphi = 180°$, то говорят, что угол α *оканчивается на границе* II *и* III *четвертей*.

Пример 1. Отметить на единичной окружности точку A_α, соответствующую углу α, если:

а) $\alpha = 1935°$;

б) $\alpha = -3630°$.

Решение. а) $\alpha = 1935° = 360° \cdot 5 + 135°$, здесь $n = 5$, $\varphi = 135°$. Отмечаем точку A_φ на единичной окружности (рис. 68). Она совпадает с точкой A_α.

б) $\alpha = -3630° = 360°(-10) - 30° + 360° - 360° = 360°(-11) + 330°$, здесь $n = -11$, $\varphi = 330°$. Отмечаем точку A_φ на единичной окружности (рис. 69). Она совпадает с точкой A_α.

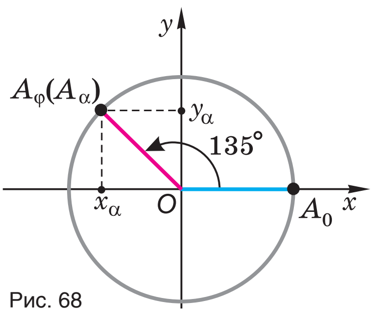


Рис. 68

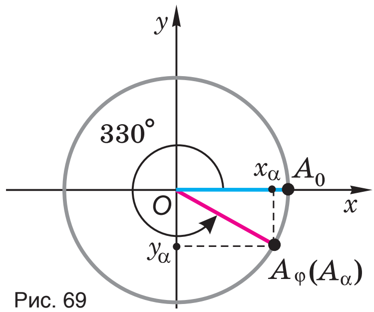


Рис. 69

Пример 2. Записать по четыре значения величины угла поворота α, если соответствующая ему точка A_α совпадает с точкой:

а) B; б) C; в) M (рис. 70).

Решение.

а) $\alpha_1 = 90°$; $\alpha_2 = 450°$;
$\alpha_3 = -270°$; $\alpha_4 = -630°$;

б) $\alpha_1 = -90°$; $\alpha_2 = 270°$;
$\alpha_3 = -450°$; $\alpha_4 = -810°$;

в) $\alpha_1 = -45°$; $\alpha_2 = 315°$;
$\alpha_3 = -405°$; $\alpha_4 = 675°$.

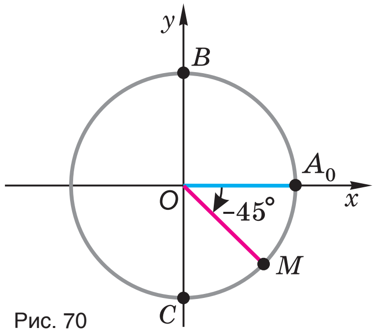


Рис. 70

?

1. Какой поворот луча называется полным?
2. Какой угол поворота луча принято считать:
а) положительным; б) отрицательным?
3. В каком виде следует представить α — угол поворота луча, чтобы определить положение соответствующей ему точки A_α на единичной окружности?
4. В каком случае говорят, что:
а) угол φ принадлежит I (II, III, IV) четверти;
б) угол α оканчивается в I (II, III, IV) четверти;
в) угол α оканчивается на границе III и IV четвертей?

Упражнения

2.14°. На единичной окружности отметьте точку A_α и запишите все углы, которые могут оканчиваться в этой точке для каждого из следующих значений α:

1) 90°, 180°, 270°, 360°; 2) –180°, –90°, –360°, –270°.

2.15°. На единичной окружности отметьте три точки A_α, соответствующие различным значениям угла α, полученным по формуле:

1) $\alpha = 30° + 90° \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\alpha = 45° + 90° \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;
3) $\alpha = 60° + 180° \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\alpha = 15° + 180° \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

На единичной окружности отметьте точки A_α, соответствующие указанным значениям угла α **(2.16—2.17)**.

2.16°. 1) –210°, –240°, –225°, –255°, –300°, –330°;
2) –60°, –120°, –150°, –315°, –210°, –165°.

2.17°. 1) 930°, 1320°, 1485°, 840°, 3720°, 945°;
2) 2460°, 4350°, 855°, 1290°, 1500°, 2640°.

2.18°. В какой четверти оканчивается угол α, равный:

1) 292°, 186°, 306°, 2184°, 1748°;
2) –172°, –206°, –291°, –341°, –268°;
3) –1201°, –2189°, –2617°, –1854°;
4) 3521°, 2849°, 1853°, 1792°, 2171°?

2.19°. Представьте угол β в виде $360° \cdot n + \varphi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$ и φ — угол, удовлетворяющий условию $0° \leqslant \varphi < 360°$, если угол β равен:

1) 426°; 2) 693°; 3) –849°; 4) –784°;

5) $3524°$; 6) $2461°$; 7) $-1341°$; 8) $-2889°$.

2.20°. Укажите множество значений угла α, если известно, что $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$:

1) $\alpha = 360° \cdot n + 50°$; 2) $\alpha = 360° \cdot n + 190°$;
3) $\alpha = 360° \cdot n + 270°$; 4) $\alpha = 360° \cdot n + 180°$.

2.21. Известно, что $\beta = 360° \cdot n + 60°$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Укажите такое значение n (если оно существует), при котором угол β равен:

1) $60°$; 2) $3660°$; 3) $-1020°$;
4) $-3900°$; 5) $-300°$; 6) $-780°$.

2.22. Дана единичная окружность. Укажите четверть, в которой оканчивается угол $\frac{\beta}{2}$, если известно, что угол β измеряется целым числом градусов и это наименьший из всех выраженных натуральными числами углов, которые оканчиваются:

1) во II четверти; 2) в III четверти; 3) в IV четверти.

2.23. Дана единичная окружность. Известно, что $\angle A_0OA_\alpha = \varphi$. Какому углу поворота α может соответствовать точка единичной окружности A_α (укажите три значения α), если угол φ (см. формулу (1)) равен:

1) $280°$; 2) $75°$; 3) $345°$; 4) $136°$?

2.24°. Запишите по три значения угла α, при которых соответствующая ему точка A_α единичной окружности (рис. 71) совпадает с точкой:

а) B; б) P; в) K; г) T.

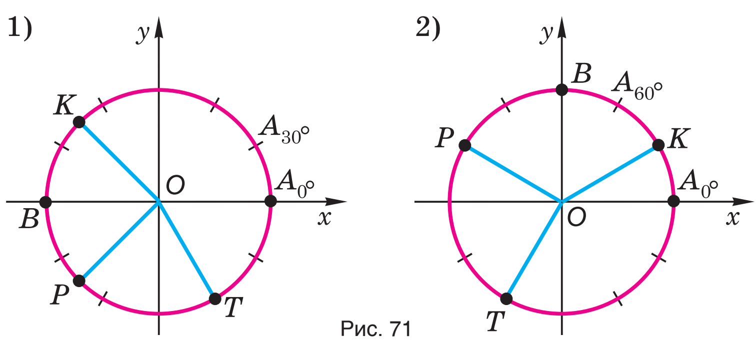


Рис. 71

2.25. Запишите по три возможных значения угла α, при которых соответствующая ему точка A_α совпадает с точкой:

1) $A_{215°}$; 2) $A_{735°}$; 3) $A_{1625°}$; 4) $A_{2095°}$.

2.26. Сравните с нулем абсциссу и ординату точки A_α, соответствующей углу α, если он равен:

1) 172°; 2) 247°; 3) –1241°; 4) –2819°.

2.27. Сравните с нулем абсциссу и ординату точки A_α, если угол α, которому она соответствует, оканчивается на:

1) оси Ox; 2) оси Oy.

2.28. Укажите три значения градусной меры угла α, при которых ордината соответствующей ему точки A_α равна:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) 1.

2.29. Укажите три значения градусной меры угла α, при которых абсцисса соответствующей ему точки A_α равна:

1) $-\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) –1; 6) 1.

2.3. Радианная мера углов и дуг

Углы и дуги окружности можно измерять не только в градусах. Рассмотрим еще одну единицу измерения углов и дуг — *радиан* (обозначается 1 рад).

Определение. ***Радианом*** **называется величина центрального угла, соответствующего дуге окружности длиной в один радиус.**

Соответственно, дуга величиной один радиан — это дуга, длина которой равна радиусу.

На рисунке 72 построена окружность с центром O и радиусом 17 мм. На ней красной линией отмечена дуга MK, длина которой равна радиусу, т. е. 17 мм. Величина угла MOK равна одному радиану, т. е. $\angle MOK = 1$ рад; соответственно и величина дуги MK равна одному радиану, т. е. $\cup MK = 1$ рад.

Этот угол (дугу), как и любой другой, можно измерять в градусах.

Будем рассуждать так: дуге длиной R соответствует центральный угол 1 рад. Следовательно, дуге длиной πR соответствует центральный угол π рад. Дуга длиной πR — это полуокружность, а на полуокружность опирается центральный угол 180°. Значит,

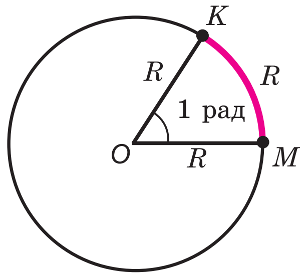


Рис. 72

$$\boxed{\pi \text{ рад} = 180°,}$$

откуда и получаем соотношения между единицами измерения углов:

$$\boxed{1 \text{ рад} = \frac{180°}{\pi};} \qquad \boxed{1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад.}} \qquad (1)$$

Если в формулы (1) вместо числа π подставить его приближенное значение 3,14, то получится:

$$1 \text{ рад} \approx 57°19'; \qquad 1° \approx 0{,}02 \text{ рад.}$$

Пример 1. Выразить в радианах углы: 35°; –135°.

Решение. Используя формулу (1), получим:

$$35° = 1° \cdot 35 = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \cdot 35 = \frac{7\pi}{36} \text{ рад};$$

$$-135° = -1° \cdot 135 = -\frac{\pi}{180} \text{ рад} \cdot 135 = -\frac{3\pi}{4} \text{ рад}.$$

Ответ: $35° = \frac{7\pi}{36}$ рад; $-135° = -\frac{3\pi}{4}$ рад.

Пример 2. Используя приближенное значение $\pi \approx 3{,}14$, выразить (приближенно) в градусах углы: -2 рад; $\frac{\pi}{12}$ рад.

Решение. По формуле (1) имеем:

$$-2 \text{ рад} = -2 \cdot 1 \text{ рад} = -2 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx \frac{-360°}{3{,}14} \approx -115°;$$

$$\frac{\pi}{12} \text{ рад} = \frac{180°}{12} = 15°.$$

Ответ: -2 рад $\approx -115°$; $\frac{\pi}{12}$ рад $= 15°$.

! Заметим, что *в обозначении меры угла в радианах слово «радиан», как правило, опускают* (*не пишут*).

Например, под углом π понимается угол, равный π рад; под углом $\frac{4}{15}$ понимается угол, равный $\frac{4}{15}$ рад.

Обратите внимание, что *обозначение градуса в записи меры угла пропускать нельзя.*

Воспользовавшись равенством (1) из п. 2.2, любой угол поворота α, выраженный в радианах, можно представить в виде

$$\alpha = 2\pi n + \varphi, \text{ где } n \in \boldsymbol{Z} \text{ и } 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \quad (2)$$

Пример 3. Используя формулу (2), найти n и φ для угла поворота α, равного:

а) $3{,}5\pi$; б) $-0{,}4\pi$.

Решение. а) $\alpha = 3{,}5\pi = 2\pi + 1{,}5\pi = 2\pi \cdot 1 + 1{,}5\pi$;
здесь $n = 1$, $\varphi = 1{,}5\pi$;
б) $\alpha = -0{,}4\pi = -0{,}4\pi + 2\pi - 2\pi = 2\pi(-1) + 1{,}6\pi$;
здесь $n = -1$, $\varphi = 1{,}6\pi$.
Ответ: а) $n = 1$, $\varphi = 1{,}5\pi$; б) $n = -1$, $\varphi = 1{,}6\pi$.

?

1. Какой центральный угол имеет величину 1 рад?
2. Сколько радиан содержит:
   а) полный угол; б) развернутый угол; в) прямой угол?
3. Запишите формулу для выражения:
   а) градуса в радианах;
   б) радиана в градусах.
4. В каком виде следует представить угол поворота α, выраженный в радианах, чтобы узнать, в какой четверти он оканчивается?

Упражнения

Выразите в градусах угол **(2.30—2.31)**.

2.30°. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $-\frac{5\pi}{6}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{5\pi}{9}$;
5) $\frac{7\pi}{12}$; 6) $-\frac{21\pi}{20}$; 7) $1{,}2\pi$; 8) $-2{,}4\pi$.

2.31°. 1) 0,2; 2) 3,1; 3) 5;
4) 2,7; 5) 9,2; 6) 10.

2.32. Выразите в радианах угол:

1) $2°$; 2) $10°$; 3) $40°$; 4) $50°$;
5) $-135°$; 6) $-270°$; 7) $1021°$; 8) $905°$.

2.33. Выразите в градусах и радианах величины углов:

1) равностороннего треугольника;
2) прямоугольного равнобедренного треугольника;
3) правильного шестиугольника;
4) правильного двенадцатиугольника;
5) правильного десятиугольника;
6) правильного пятиугольника.

2.34. Выразите в градусах и радианах величину угла, под которым видна сторона правильного n-угольника из его центра, если:

1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 5$;
4) $n = 8$; 5) $n = 12$; 6) $n = 6$.

2.35°. Укажите координаты x_α и y_α точки A_α, соответствующей углу α, и запишите множество всех углов, которые оканчиваются в этой точке, если угол α равен:

1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) π; 4) $\frac{3\pi}{2}$; 5) 2π.

2.36°. Для каждого из указанных значений угла α отметьте на единичной окружности соответствующую ему точку A_α и сравните с нулем ее координаты x_α и y_α:

1) $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$; 2) $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}$;

3) $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$; 4) $-\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{9\pi}{8}$, $-\frac{5\pi}{8}$.

2.37°. Отметьте на единичной окружности точку A_α, соответствующую углу α, и сравните ее координаты x_α и y_α, если радианная мера угла α равна:

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{6}$;

5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{3\pi}{4}$; 7) $\frac{\pi}{8}$; 8) $\frac{3\pi}{8}$.

2.38. По указанной радианной мере угла α отметьте на единичной окружности соответствующую ему точку A_α, сравните ее координаты x_α и y_α с нулем и запишите формулой все углы, которые оканчиваются в этой точке:

1) 2; 2) 3; 3) –4; 4) –5;
5) 10; 6) 11; 7) –8; 8) –7.

2.39. Представьте угол β в виде разности (суммы) угла $\frac{\pi}{2}$ и некоторого острого угла α, если радианная мера угла β равна:

1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{8}$; 3) $\frac{\pi}{12}$;

4) $\frac{4\pi}{5}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{7\pi}{12}$.

2.40. Используя формулу (2), найдите значения n и φ и определите, в какой четверти оканчивается угол α, если его радианная мера равна:

1) $10{,}6\pi$; 2) $-7{,}9\pi$; 3) $-\frac{19\pi}{3}$;

4) $\frac{46\pi}{3}$; 5) $-\frac{24\pi}{5}$; 6) $-\frac{51\pi}{7}$;

7) $\frac{5\pi}{6}$; 8) $\frac{7\pi}{8}$.

2.41. Известно, что $\beta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Укажите такое значение k (если оно существует), при котором угол β равен:

1) $\frac{\pi}{12}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $-\frac{\pi}{4}$;

4) $-\frac{\pi}{2}$; 5) $-\frac{5\pi}{4}$; 6) $\frac{19\pi}{4}$.

2.4. Синус и косинус произвольного угла

В курсе геометрии вы познакомились с понятиями *синуса*, *косинуса*, *тангенса* и *котангенса* углов от 0° до 180°. В тригонометрии эти понятия определяются для произвольных углов.

Рассмотрим единичную окружность. Возьмем на ней две точки: точку $A_0(1;\ 0)$ и точку $A_\alpha(x_\alpha;\ y_\alpha)$, соответствующую углу α, которую получают при пересечении этой окружности и луча, определяющего угол α (рис. 73).

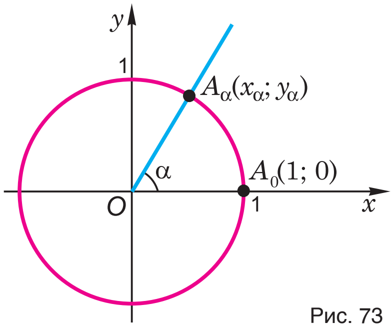


Рис. 73

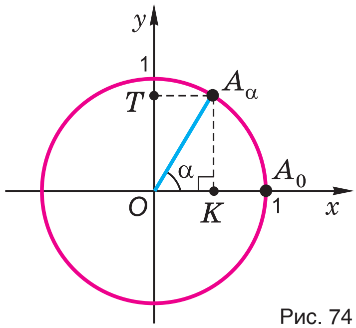


Рис. 74

Пусть α — острый угол. Из точки A_α опустим перпендикуляры $A_\alpha K$ и $A_\alpha T$ соответственно на оси Ox и Oy (рис. 74). Из прямоугольного треугольника $OA_\alpha K$ ($\angle K = 90°$) имеем:

$$\sin\alpha = \frac{A_\alpha K}{OA_\alpha}$$

и

$$\cos\alpha = \frac{OK}{OA_\alpha}.$$

Поскольку $A_\alpha K = OT = y_\alpha$, $OK = x_\alpha$ и $OA_\alpha = 1$, то получаем:

$$\sin\alpha = y_\alpha$$

и

$$\cos\alpha = x_\alpha,$$

т. е. синус угла α равен ординате точки A_α, а косинус угла α — абсциссе точки A_α.

Пусть теперь α — произвольный угол.

Определение. ***Синусом угла*** α **называется ордината точки** A_α **единичной окружности, соответствующей углу** α**, т. е.**

$$\sin\alpha = y_\alpha.$$

Определение. ***Косинусом угла*** α **называется абсцисса точки** A_α **единичной окружности, соответствующей углу** α**, т. е.**

$$\cos\alpha = x_\alpha.$$

Пример 1. Найти приближенные значения (с точностью до 0,1) синуса и косинуса угла α, если α равен:

а) 30°; б) 155°.

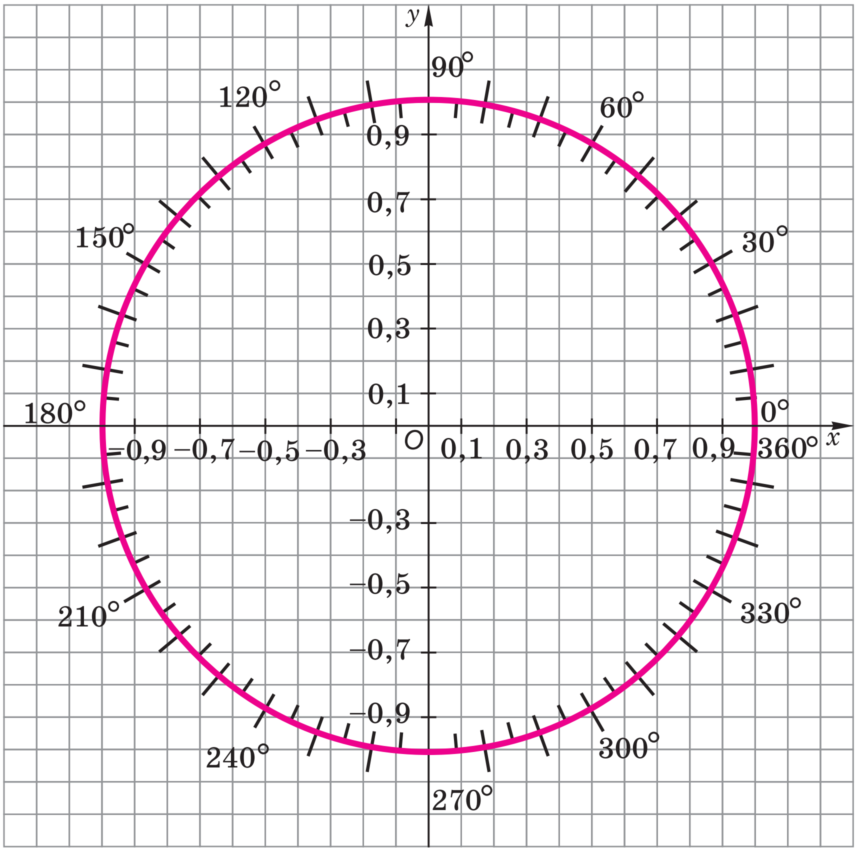


Рис. 75

Р е ш е н и е. а) $\alpha = 30°$; для точки единичной окружности, соответствующей этому углу (рис. 75), найдем приближенные значения ее координат:

$$\sin 30° = y_\alpha = 0,5 \text{ и } \cos 30° = x_\alpha \approx 0,9;$$

б) $\sin 155° = y_\alpha \approx 0,4$ и $\cos 155° = x_\alpha \approx -0,9$.

О т в е т: а) $\sin 30° = 0,5$; $\cos 30° \approx 0,9$;

б) $\sin 155° \approx 0,4$; $\cos 155° \approx -0,9$.

П р и м е р 2. Найти приближенные значения (с точностью до 0,1) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ при α, равном:

а) $\frac{3\pi}{4}$; б) 3,8.

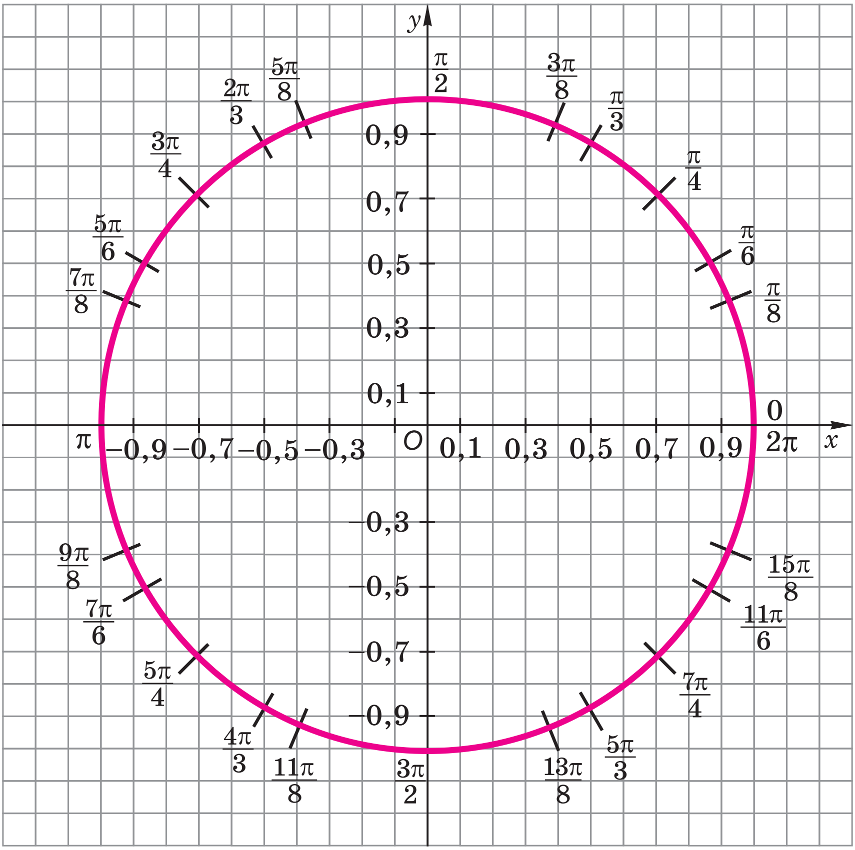


Рис. 76

Р е ш е н и е. а) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ принадлежит II четверти; для точки единичной окружности, соответствующей этому углу (рис. 76), найдем приближенные значения ее координат:

$$\sin\frac{3\pi}{4} = y_\alpha \approx 0{,}7; \qquad \cos\frac{3\pi}{4} = x_\alpha \approx -0{,}7;$$

б) $\alpha = 3{,}8$ принадлежит III четверти; для точки единичной окружности, соответствующей этому углу (рис. 77), найдем приближенные значения ее координат:

$$\sin 3{,}8 = y_\alpha \approx -0{,}6; \ \cos 3{,}8 = x_\alpha \approx -0{,}8.$$

О т в е т: а) $\sin\frac{3\pi}{4} \approx 0{,}7$; $\cos\frac{3\pi}{4} \approx -0{,}7$;

б) $\sin 3{,}8 \approx -0{,}6$; $\cos 3{,}8 \approx -0{,}8$.

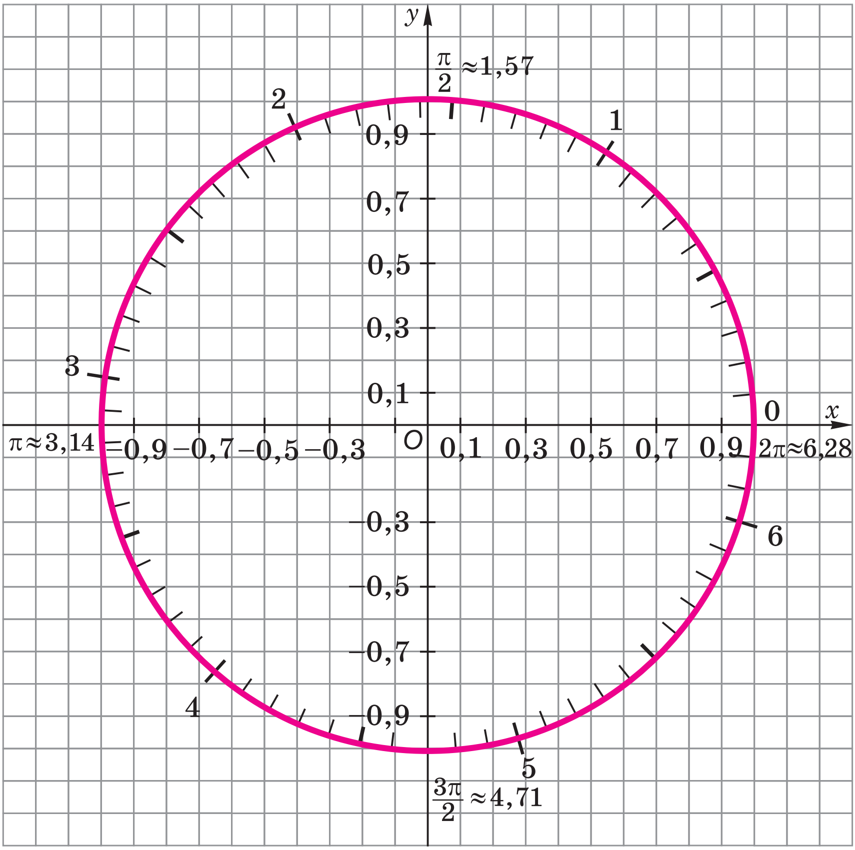


Рис. 77

Для нахождения значений синусов и косинусов углов можно использовать не только единичную окружность, но и таблицы, калькуляторы и т. д.

Каждый угол α можно представить в виде

$$\alpha = 2\pi n + \varphi, \text{ где } n \in \boldsymbol{Z},\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi \text{ (см. п. 2.3).}$$

Так как углы α и φ отличаются на целое число полных оборотов, то точки A_α и A_φ на единичной окружности совпадают. Поэтому верны равенства:

$$\sin\alpha = \sin\varphi, \qquad \cos\alpha = \cos\varphi.$$

Таким образом,

$$\sin(2\pi n + \varphi) = \sin\varphi, \qquad \cos(2\pi n + \varphi) = \cos\varphi, \text{ где } n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 3. Найти приближенные значения (с точностью до 0,1) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ при α, равном:

а) $3{,}25\pi$; б) $-17\frac{5}{6}\pi$; в) $-10{,}1$.

Решение. а) Используя формулу $\alpha = 2\pi n + \varphi$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, имеем:

$$\alpha = 3{,}25\pi = 2\pi \cdot 1 + 1{,}25\pi \ \left(\text{здесь } n = 1;\ \varphi = \frac{5\pi}{4}\right).$$

Поскольку точки A_α и A_φ совпадают, то, используя рисунок 76, находим:

$$\sin\alpha = \sin\varphi = \sin\frac{5\pi}{4} = y_\varphi \approx -0{,}7;$$

$$\cos\alpha = \cos\varphi = \cos\frac{5\pi}{4} = x_\varphi \approx -0{,}7;$$

б) $\alpha = -17\frac{5}{6}\pi = 2\pi\cdot(-9) + \frac{\pi}{6}$ $\left(\text{здесь } n = -9;\ \varphi = \frac{\pi}{6}\right)$, используя рисунок 76, находим:

$$\sin\alpha = \sin\varphi = \sin\frac{\pi}{6} = y_\varphi = 0{,}5;$$

$$\cos\alpha = \cos\varphi = \cos\frac{\pi}{6} = x_\varphi \approx 0{,}9;$$

в) $\alpha = -10{,}1 = 2\pi\cdot(-2) + \varphi \approx 6{,}28\cdot(-2) + \varphi = -12{,}56 + 2{,}46$ (здесь $n = -2$; $\varphi \approx 2{,}5$), используя рисунок 77, находим:

$$\sin\alpha = \sin\varphi = y_\varphi \approx \sin 2{,}5 \approx 0{,}6;$$
$$\cos\alpha = \cos\varphi = x_\varphi \approx \cos 2{,}5 \approx -0{,}8.$$

Ответ: а) $\sin 3{,}25\pi \approx -0{,}7$; $\cos 3{,}25\pi \approx -0{,}7$;

б) $\sin\left(-17\frac{5}{6}\pi\right) = 0{,}5$; $\cos\left(-17\frac{5}{6}\pi\right) \approx 0{,}9$;

в) $\sin(-10{,}1) \approx 0{,}6$; $\cos(-10{,}1) \approx -0{,}8$.

Напомним, вид уравнения единичной окружности:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Поскольку координаты любой точки $A_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha)$ единичной окружности удовлетворяют ее уравнению, то при любом значении α будет верным равенство

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.}$$

Доказанное равенство называется ***основным тригонометрическим тождеством***.

(Напомним определение тождества. Равенство двух выражений $A = B$ называется ***тождеством***, если оно обращается в верное числовое равенство при любых значениях переменных, для которых оба выражения A и B имеют смысл.)

Замечание. Если $a^2 + b^2 = 1$, то существует угол α такой, что $\sin\alpha = a$, $\cos\alpha = b$.

Пример 4. Доказать тождество:

а) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; б) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;
в) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; г) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

Доказательство. а), б) При любом значении α точки A_α и $A_{-\alpha}$ единичной окружности симметричны относительно оси Ox, значит, их ординаты — противоположные числа, а абсциссы — равные числа (рис. 78):

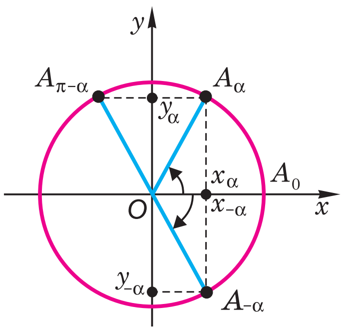


Рис. 78

$$y_{-\alpha} = -y_\alpha \text{ и } x_{-\alpha} = x_\alpha.$$

По определениям синуса и косинуса получаются тождества а) и б).

в), г) При любом значении α точки $A_{-\alpha}$ и $A_{\pi-\alpha}$ симметричны относительно начала координат (см. рис. 78), значит,

$$y_{\pi-\alpha} = -y_{-\alpha} \text{ и } x_{\pi-\alpha} = -x_{-\alpha}.$$

По определениям синуса и косинуса имеем:

$$\sin(\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) \text{ и } \cos(\pi - \alpha) = -\cos(-\alpha).$$

Используя тождества а) и б), получаем тождества в) и г). ☒

Название «синус» происходит от латинского слова sinus — «перегиб», «пазуха», представляет собой перевод арабского слова «джива» («тетива лука»), которым обозначали синус индийские математики.
К идее рассмотрения тригонометрического круга с радиусом, равным единице, пришли в XI в.

1. Какую окружность называют единичной?
2. Что называется тригонометрическим кругом?
3. Запишите уравнение единичной окружности.
4. Докажите основное тригонометрическое тождество.

5. Что называется синусом (косинусом) угла α?
6. Могут ли синус и косинус одного и того же угла α быть равными нулю?
7. Верно ли, что $\sin(-\alpha)\cos(-\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$?

Упражнения

2.42°. Верно ли для всех значений α равенство:

1) $\sin\alpha + \sin(-\alpha) = 0$; 2) $\cos(-\alpha) + \cos\alpha = 0$;
3) $\sin(\pi - \alpha) + \sin\alpha = 0$; 4) $\cos(\pi - \alpha) + \cos\alpha = 0$?

2.43°. Упростите выражение:

1) $\sin\alpha - \sin(-\alpha) - 2\sin(\pi - \alpha)$;
2) $\cos\alpha - \cos(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha)$;
3) $(\sin(\pi - \alpha) + \cos(-\alpha))^2 - 2\cos(\pi - \alpha)\sin\alpha$;
4) $(\cos(\pi - \alpha) + \sin(-\alpha))^2 - 2\sin(\pi - \alpha)\cos(-\alpha)$.

2.44°. Используя рисунок 75, найдите приближенные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ при α, равном:

1) 65°, 160°, 335°; 2) –40°, –125°, –340°;
3) 410°, 1705°, 3360°; 4) –775°, –470°, –1988°.

2.45°. Используя рисунок 76, найдите приближенные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ при α, равном:

1) $\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{4}$;
2) $-\frac{\pi}{10}$, $-\frac{3\pi}{5}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{14\pi}{3}$, $-\frac{22\pi}{5}$, $-\frac{13\pi}{6}$;
3) $\frac{44\pi}{3}$, $\frac{51\pi}{5}$, $\frac{17\pi}{4}$, $-\frac{62\pi}{3}$, $-\frac{74\pi}{3}$, $-\frac{87\pi}{4}$.

2.46°. Используя рисунок 77, найдите приближенные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ при α, равном:

1) 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 2) 4; 4,5; 5; 5,5; 6;
3) –4; –4,5; –5; –5,5; –6; 4) –1; –1,5; –2; –2,5; –3.

Найдите значение выражения **(2.47—2.48)**.

2.47. 1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;
3) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

5) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

6) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

2.48. 1) $\sin\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}$;

3) $\sin\frac{2\pi}{3}-1$; 4) $\cos\frac{2\pi}{3}+1$;

5) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)-\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$;

6) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

2.49. Укажите три значения радианной меры угла α, при которых $\sin\alpha$ равен:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $-\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) –1.

2.50. Укажите три значения радианной меры угла α, при которых $\cos\alpha$ равен:

1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\frac{1}{2}$; 5) –1; 6) 1.

2.51°. Укажите такой угол α (если он существует), для которого верны равенства:

1) $\sin\alpha=0$ и $\cos\alpha=1$; 2) $\sin\alpha=1$ и $\cos\alpha=0$;

3) $\sin\alpha=-1$ и $\cos\alpha=1$; 4) $\sin\alpha=0$ и $\cos\alpha=0$;

5) $\sin\alpha=0$ и $\cos\alpha=-1$; 6) $\sin\alpha=-1$ и $\cos\alpha=0$.

2.52°. Укажите такой угол α (если он существует), для которого верны равенства:

1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\cos\alpha=\frac{4}{5}$;

2) $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$ и $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ и $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$;

4) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\sin\alpha=-0,6$ и $\cos\alpha=0,8$;

6) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.53. Какие значения угла α удовлетворяют равенству:

1) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

если:

а) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{5\pi}{2}$;

в) $-\frac{7\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; г) $-\pi \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$?

2.54. Какие значения угла α удовлетворяют равенству:

1) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$,

если:

а) $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$; б) $0 \leqslant \alpha \leqslant 4\pi$;

в) $-7\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{7\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$?

2.55*. 1) Зная, что верно равенство $\sin(\pi - \alpha) + \cos(-\alpha) = 0{,}2$, найдите значение выражения $2\sin\alpha\cos\alpha$.

2) Зная, что верно равенство $2\sin(-\alpha)\cos(\pi - \alpha) = 0{,}44$, найдите значение выражения $\sin\alpha + \cos\alpha$.

2.5. Свойства выражений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$

1. Множества значений синуса и косинуса

Из определения синуса и косинуса следует, что для любого угла α существует, и притом единственное, значение $\sin\alpha$ (ордината точки A_α) и существует, и притом единственное, значение $\cos\alpha$ (абсцисса точки A_α).

Точка A_α лежит на единичной окружности, поэтому она может иметь любую ординату в пределах от -1 до $+1$ и никакой другой ординаты иметь не может. А ее ордината — это $\sin\alpha$. Значит, $\sin\alpha$ *может принимать любое значение от* -1 *до* $+1$ *и никаких других значений принимать не может* (рис. 79).

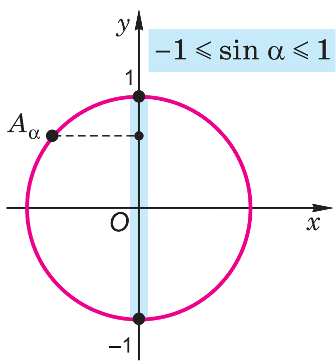


Рис. 79

В частности, отсюда следует

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1.$$

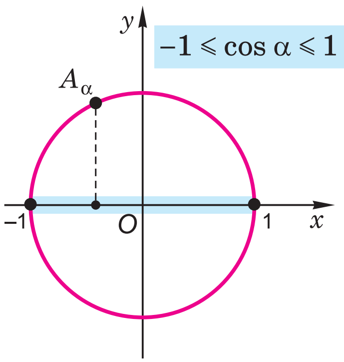


Рис. 80

Аналогично доказывается, что $\cos\alpha$ *может принимать любое значение от* -1 *до* $+1$ *и никаких других значений принимать не может* (рис. 80).

В частности, отсюда следует

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Таким образом, ***множеством значений как синуса, так и косинуса является отрезок*** **[–1; 1].**

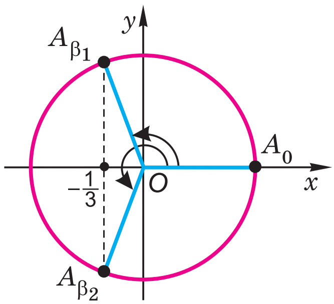


Рис. 81

Пример 1. Можно ли построить углы, оканчивающиеся в разных четвертях, косинус которых равен:

а) $-\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{2}$?

Решение. а) Можно. Построение углов β_1 и β_2, для которых $\cos\beta_1 = -\frac{1}{3}$ и $\cos\beta_2 = -\frac{1}{3}$, показано на рисунке 81.

б) Построить угол по этому условию невозможно (поясните почему).

Пример 2. Существует ли угол, синус которого равен:

а) $-0,7$; б) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$?

Решение. а), б) Да, поскольку указанные значения принадлежат отрезку [–1; 1] — множеству значений синуса.

в) Нет, поскольку $\frac{\pi}{2} \approx 1,57 \notin [-1; 1]$.

2. Наименьшее и наибольшее значения синуса и косинуса

Из точек, лежащих на единичной окружности (рис. 82), наименьшую ординату, равную –1, имеет точка $A_{-\frac{\pi}{2}}(0; -1)$. Значит, $\sin\alpha$ ***принимает наименьшее значение при***

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

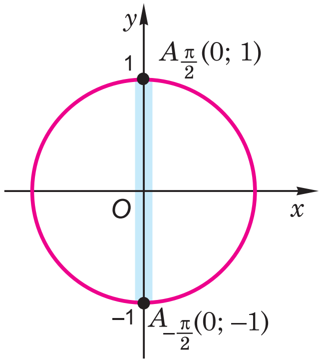


Рис. 82

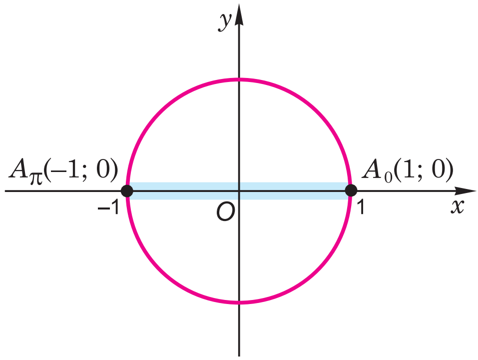


Рис. 83

Наибольшую ординату, равную 1, имеет точка $A_{\frac{\pi}{2}}(0;\,1)$. Значит, **sin** α ***принимает наибольшее значение при***

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Из точек, лежащих на единичной окружности (рис. 83), наименьшую абсциссу, равную –1, имеет точка $A_{\pi}(-1;\,0)$. Значит, **cos** α ***принимает наименьшее значение при***

$$\alpha = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Наибольшую абсциссу, равную 1, имеет точка $A_0(1;\,0)$. Значит, **cos** α ***принимает наибольшее значение при***

$$\alpha = 0 + 2\pi n = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Замечание. Разумеется, свойства синуса и косинуса, сформулированные в этом пункте, можно записать, используя не только радианную, но и градусную меру угла.

Например, $\cos\alpha = -1$ при $\alpha = 180° + 360° n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Найти наименьшее и наибольшее значения выражения:

а) $\cos x + 5$; б) $\sin^2 x + 5$.

Решение. а) Поскольку наименьшим значением выражения $\cos x$ является число –1, то наименьшим значением выражения $\cos x + 5$ является число $-1 + 5 = 4$; аналогично наибольшим значением выражения является число $1 + 5 = 6$.

б) Наименьшим значением выражения $\sin^2 x$ является число 0, а наибольшим значением — число 1, соответственно, для выражения $\sin^2 x + 5$ наименьшее значение равно 5, а наибольшее равно 6.

Ответ: а) 4 и 6; б) 5 и 6.

3. Нули синуса и косинуса

Ординаты, равные нулю, имеют те точки единичной окружности, которые лежат на оси Ox, т. е. точки $A_0(1; 0)$ и $A_\pi(-1; 0)$ (рис. 84). Итак, $\sin\alpha = 0$ при

$$\alpha = 0 + 2\pi k = \pi \cdot 2k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

и при

$$\alpha = \pi + 2\pi k = \pi(1 + 2k),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Обе группы значений α можно записать одной формулой:

$$\alpha = \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Эти значения α называют ***нулями синуса***.

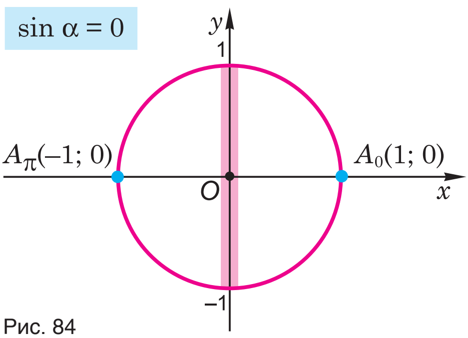


Рис. 84

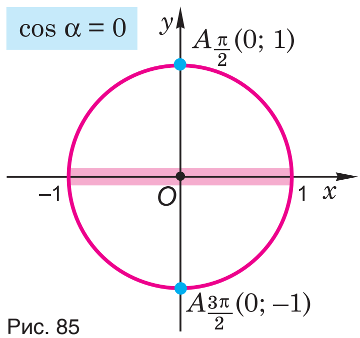


Рис. 85

Абсциссы, равные нулю, имеют те точки единичной окружности, которые лежат на оси Oy, т. е. точки $A_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$ и $A_{\frac{3\pi}{2}}(0; -1)$ (рис. 85). Итак, $\cos\alpha = 0$ при

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot 2k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

и при

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + \pi(1 + 2k),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Обе группы значений α можно записать одной формулой:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Эти значения α называют ***нулями косинуса***.

Пример 4. Решить уравнение:

а) $\sin x = 0$; б) $\sin(x + 3) = 0$; в) $\cos 7x = 0$.

Решение. а) Решить уравнение $\sin x = 0$ — то же самое, что найти нули синуса. Следовательно, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

б) Поскольку $\sin(x + 3) = 0$, то:

$$x + 3 = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

откуда

$$x = \pi n - 3,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

в) Поскольку $\cos 7x = 0$, то

$$7x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: а) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\pi n - 3$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. Промежутки знакопостоянства синуса и косинуса

Знаки, которые могут иметь значения $\sin\alpha$, т. е. знаки ординат точек A_α, в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол α, показаны на рисунке 86.

Именно:

> если угол α оканчивается в I или во II четверти, т. е. $0 + 2\pi n < \alpha < \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $\sin\alpha > 0$;
> если угол α оканчивается в III или в IV четверти, т. е. $\pi + 2\pi n < \alpha < 2\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $\sin\alpha < 0$.

Таким образом, мы установили ***промежутки знакопостоянства синуса***.

Знаки, которые могут иметь значения $\cos\alpha$, т. е. знаки абсцисс точек A_α, в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол α, показаны на рисунке 87.

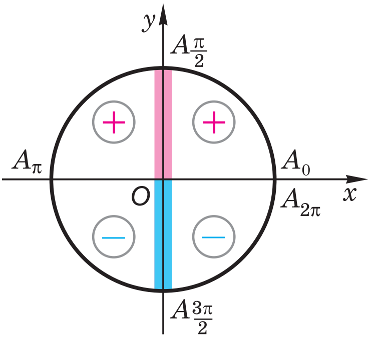


Рис. 86

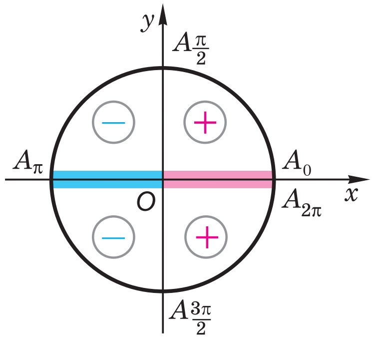


Рис. 87

Именно:

если угол α оканчивается в I или в IV четверти, т. е. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<\alpha<\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$, то $\cos\alpha > 0$;
если угол α оканчивается во II или в III четверти, т. е. $\frac{\pi}{2}+2\pi n<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$, то $\cos\alpha < 0$.

Таким образом, мы установили ***промежутки знакопостоянства косинуса***.

Пример 5. Для каких значений α, удовлетворяющих условию $\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{4\pi}{3}$, верно, что:

а) $\sin\alpha > 0$; б) $\sin\alpha < 0$; в) $\cos\alpha > 0$; г) $\cos\alpha < 0$?

Решение. а), б) Поскольку $\sin\alpha > 0$ при $0 < \alpha < \pi$ и $\sin\alpha < 0$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то с учетом условия имеем $\sin\alpha > 0$ при $\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha < \pi$ и $\sin\alpha < 0$ при $\pi < \alpha \leqslant \frac{4\pi}{3}$.

в), г) Поясните решение самостоятельно (см. ответы).

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha < \pi$; б) $\pi < \alpha \leqslant \frac{4\pi}{3}$;
в) $\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \frac{4\pi}{3}$.

1. При каких значениях α выражение $\sin\alpha$ (выражение $\cos\alpha$) принимает наименьшее значение?
2. При каких значениях α выражение $\sin\alpha$ (выражение $\cos\alpha$) принимает наибольшее значение?
3. Назовите нули синуса (косинуса).
4. Назовите промежутки знакопостоянства для синуса (косинуса).

Упражнения

2.56°. В какой четверти оканчивается угол α, если:

1) $\sin\alpha > 0,\ \cos\alpha > 0$;
2) $\sin\alpha < 0,\ \cos\alpha < 0$;
3) $\sin\alpha > 0,\ \cos\alpha < 0$;
4) $\sin\alpha < 0,\ \cos\alpha > 0$;
5) $\sin\alpha\cos\alpha > 0$;
6) $\sin\alpha\cos\alpha < 0$;
7) $\sin\alpha = |\sin\alpha|$;
8) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$?

2.57°. Сравните с нулем значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ для каждого из указанных значений угла α:

1) $49°, -250°, 333°, -1324°$;

2) $-38°, 189°, -297°, 1585°$;

3) $-\frac{\pi}{12}, \frac{19\pi}{18}, -\frac{17\pi}{9}, \frac{279\pi}{20}$;

4) $\frac{\pi}{14}, -\frac{23\pi}{17}, \frac{38\pi}{21}, -\frac{371\pi}{40}$;

5) 3,5; –4; 5,5; –8;

6) –2,5; 4,5; –6; 9.

2.58°. Может ли при некотором значении α быть верным равенство:

1) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; 2) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$;

3) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$; 4) $\sin\alpha = -\frac{\pi}{2}$;

5) $\sin\alpha = \sqrt{3} - 2$; 6) $\cos\alpha = 1 - \sqrt{2}$;

7) $\sin\alpha = \sqrt{11} - \sqrt{29}$; 8) $\cos\alpha = \sqrt{15} - \sqrt{12}$?

2.59°. При каких значениях t верно равенство:

1) $\sin t = 1$; 2) $\sin t = 0$; 3) $\sin t = -1$;

4) $\sin t = \pi$; 5) $\cos t = 1$; 6) $\cos t = 0$;

7) $\cos t = -1$; 8) $\cos t = -\frac{\pi}{2}$?

2.60°. Решите уравнение:

1) $\cos 2t = 0$; 2) $\sin 3t = 0$;

3) $\sin\frac{t}{4} = -1$; 4) $\cos\frac{t}{3} = -1$;

5) $\sin(6t - 5) = 0$; 6) $\cos(4 - 2t) = 0$;

7) $\cos(10t + 88\pi) = 1$; 8) $\sin(6\pi - 3t) = 1$.

2.61. Сравните с нулем:

1) $\sin 1276°, \sin(-3461°), \cos 2078°, \cos(-3065°)$;

2) $\sin(-1288°), \sin 2039°, \cos 4742°, \cos(-2105°)$;

3) $\sin\frac{18\pi}{13}, \sin\left(-\frac{31\pi}{16}\right), \cos\left(-\frac{25\pi}{13}\right), \cos\frac{133\pi}{8}$;

4) $\sin\frac{37\pi}{9}, \sin\left(-\frac{17\pi}{13}\right), \cos\frac{14\pi}{11}, \cos\left(-\frac{12\pi}{5}\right)$;

5) $\sin 3{,}14$, $\sin(-25)$, $\cos(-6{,}1)$, $\cos 99$;

6) $\sin(-2{,}5)$, $\sin 41$, $\cos 4{,}7$, $\cos(-81)$.

Определите знак значения выражения **(2.62—2.63)**.

2.62. 1) $\cos(\pi+2)$; 2) $\sin(\pi+1)$; 3) $\sin(\pi-2)$;

4) $\cos(\pi-1)$; 5) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)$; 6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\right)$;

7) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\right)$; 8) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$.

2.63. 1) $\cos(-1250°)\sin(-3390°)$;

2) $\cos(-5431°)\sin(-679°)$;

3) $\sin 10\cos 16\cos 21$; 4) $\sin 11\cos 22\sin 33$;

5) $\frac{\sin 4\cos 5}{\sin(-2)}$; 6) $\frac{\cos 4{,}1\sin(-5{,}9)}{\cos 3{,}5}$.

2.64. Расположите в порядке убывания:

1) $\cos 3\pi$, $\cos 4\pi$, $\sin 3\pi$;

2) $\sin\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2}$, $\cos\pi$;

3) $\cos\frac{33\pi}{2}$, $\cos 29\pi$, $\sin\frac{73\pi}{2}$;

4) $\sin 101\pi$, $\cos 223\pi$, $\sin\frac{33\pi}{2}$.

2.65. Постройте углы α и β, оканчивающиеся в разных четвертях, для каждого из которых:

1) косинус равен $-\frac{2}{5}$; 2) косинус равен $\frac{2}{3}$;

3) синус равен $\frac{3}{5}$; 4) синус равен $-\frac{3}{4}$.

2.66. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $5\sin\alpha$; 2) $-7\cos\alpha$;

3) $-\cos\alpha+2$; 4) $3+\sin\alpha$;

5) $-\cos^2\alpha-8$; 6) $\sin^2\alpha-1$;

7) $-|-\cos\alpha|$; 8) $|\sin\alpha|$;

9) $\frac{1}{4+\sin\alpha}$; 10) $\frac{1}{5-\cos\alpha}$.

2.67. Для каких значений α, удовлетворяющих условию $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$, верно неравенство:

1) $\sin\alpha > 0$; 2) $\sin\alpha < 0$; 3) $\cos\alpha > 0$; 4) $\cos\alpha < 0$?

2.68. Для каких значений α, удовлетворяющих условию $-\frac{13\pi}{6} < \alpha < -\frac{\pi}{6}$, верно неравенство:

1) $\sin\alpha > 0$; 2) $\sin\alpha < 0$; 3) $\cos\alpha > 0$; 4) $\cos\alpha < 0$?

2.69. Зная, что угол α оканчивается в IV четверти, упростите выражение:

1) $|\cos\alpha| - \cos\alpha$; 2) $|\sin\alpha| + \sin\alpha$;

3) $|\cos\alpha| + |\sin\alpha|$; 4) $|\cos\alpha| - |\sin\alpha|$;

5) $\left(\sqrt{\cos^2\alpha} - \sqrt{\sin^2\alpha}\right)(\cos\alpha + \sin\alpha)$;

6) $\left(\sqrt{\cos^2\alpha} + \sqrt{\sin^2\alpha}\right)(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

2.6. Понятие арксинуса и арккосинуса

Пример 1. Пусть

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Верно ли, что:

а) если $\sin\alpha = \sin\beta$, то $\alpha = \beta$;

б) если $\cos\alpha = \cos\beta$, то $\alpha = \beta$?

Решение. а) Рассмотрим углы α и β, удовлетворяющие условию (1). Тогда, если $\alpha \neq \beta$, то $y_\alpha \neq y_\beta$ (рис. 88), т. е. если $\alpha \neq \beta$, то $\sin\alpha \neq \sin\beta$. Значит, если $\sin\alpha = \sin\beta$, то $\alpha = \beta$.

б) Углы $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$ удовлетворяют условию (1). При этом

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}, \text{ а } -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: а) да; б) нет.

Рассмотрим выражение $\sin\alpha$. Мы знаем, что оно может принимать каждое значение b из отрезка $[-1; 1]$, причем таких углов α, что $\sin\alpha = b$, бес-

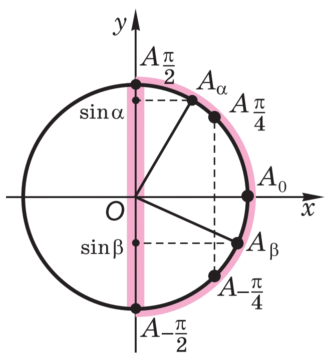


Рис. 88

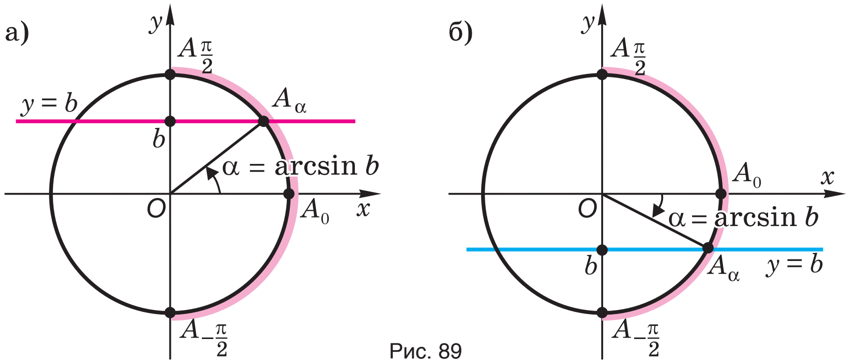


Рис. 89

конечно много. Однако существует единственный угол α такой, что $\sin\alpha = b$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ (рис. 89; см. также пример 1). Этот угол называется ***арксинусом числа b***.

Определение. **Пусть $b \in [-1; 1]$. *Арксинусом числа b* называется угол α такой, что**

$$\sin\alpha = b \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Арксинус числа b обозначается $\arcsin b$.

Итак, $\arcsin b$ — это угол, удовлетворяющий двум условиям:

$$\sin(\arcsin b) = b \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin b \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Арк — это часть латинского слова «arcus», которое в переводе означает «дуга», т. е. $\arcsin 0{,}8$ — сокращенная запись фразы «дуга, синус которой равен 0,8». Обозначение арксинуса — $\arcsin\alpha$, которое используется и сегодня, ввел в 1772 г. французский астроном, математик и механик Жозеф Луи Лагранж (1736—1813).

Пример 2. Верно ли, что $\arcsin\frac{1}{2}$ равен:

а) $-\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{6}$?

Решение. Согласно определению арксинус числа b — это угол, удовлетворяющий условиям (2). А этим условиям удовлетворяет только вариант г), т. е. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: а), б), в) нет; г) да.

Пример 3. Пусть

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi \text{ и } 0 \leqslant \beta \leqslant \pi. \qquad (3)$$

Верно ли, что:

а) если $\cos\alpha = \cos\beta$, то $\alpha = \beta$;

б) если $\sin\alpha = \sin\beta$, то $\alpha = \beta$?

Решение. Рассуждая, как в примере 1, и используя рисунок 90, получаем ответ: а) да; б) нет.

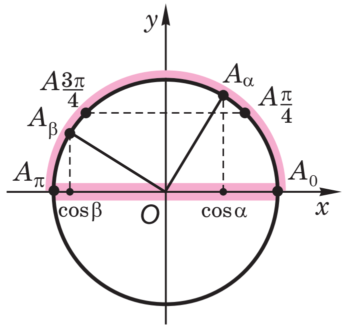


Рис. 90

Рассмотрим выражение $\cos\alpha$. Мы знаем, что оно может принимать каждое значение b из отрезка $[-1; 1]$, причем таких углов α, что $\cos\alpha = b$, бесконечно много. Однако существует единственный угол α такой, что $\cos\alpha = b$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ (рис. 91; см. также пример 3). Этот угол называется ***арккосинусом числа b***.

Определение. **Пусть $b \in [-1; 1]$. *Арккосинусом числа b* называется угол α такой, что**

$$\cos\alpha = b \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

Арккосинус числа b обозначается $\arccos b$.

Итак, $\arccos b$ — это угол, удовлетворяющий двум условиям:

$$\cos(\arccos b) = b \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \arccos b \leqslant \pi. \qquad (4)$$

Замечание. Для записи значений арксинуса и арккосинуса, как правило, используется радианная мера угла. Но

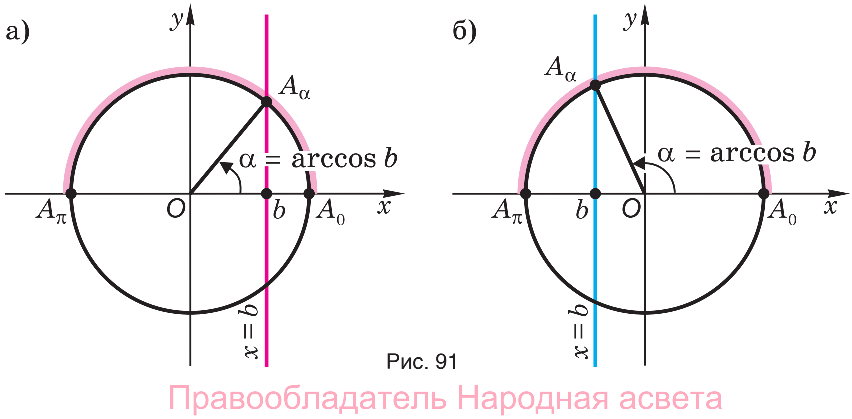


Рис. 91

можно, конечно, условия $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin b \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $0 \leqslant \arccos b \leqslant \pi$ записать и так: $-90° \leqslant \arcsin b \leqslant 90°$ и $0° \leqslant \arccos b \leqslant 180°$.

Пример 4. Верно ли, что $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ равен:

а) $-\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{\pi}{3}$?

Решение. Согласно определению арккосинус числа b — это угол, удовлетворяющий условиям (4). Этим условиям удовлетворяет только вариант в), т. е. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: а), б), г) нет; в) да.

Пример 5. Доказать тождество:

! а) $\arccos(-b) = \pi - \arccos b$;
б) $\arcsin(-b) = -\arcsin b$.

Доказательство. а) Рассмотрим углы в левой и в правой частях данного равенства. Во-первых, эти углы удовлетворяют условию (3):

$$0 \leqslant \arccos(-b) \leqslant \pi; \quad 0 \leqslant \pi - \arccos b \leqslant \pi$$

(объясните почему). Во-вторых, косинусы этих углов равны:

$$\cos(\arccos(-b)) = -b;$$
$$\cos(\pi - \arccos b) = -\cos(\arccos b) = -b.$$

Значит, эти углы равны (см. пример 3, а) ☒.

б) Доказывается аналогично.

Пример 6. Найти значение выражения A, если

$$A = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Решение. Используя тождества из примера 5, получим:

$$A = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $A = \frac{\pi}{2}$.

Пример 7. Найти значение выражения A, если

$$A = \sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right).$$

Решение. Пусть $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha$, тогда $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Найдем $A = \sin\alpha$.

Из основного тригонометрического тождества имеем: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$. Откуда получаем:

$$\left|\sin\alpha\right| = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Так как $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$, то $\sin\alpha \geqslant 0$, значит, $\left|\sin\alpha\right| = \sin\alpha$, т. е. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Пример 8. Найти значение выражения:

а) $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)$; б) $\arcsin(\sin 4)$.

Решение. а) $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right) =$
$= \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$, так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{2}$;

б) $\arcsin(\sin 4) = \arcsin(\sin(\pi - 4)) = \pi - 4$, так как $\pi - 4 \approx$ $\approx 3{,}14 - 4 = -0{,}86$, т. е. $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - 4 \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin(\pi - 4) = \sin 4$.

Ответ: а) $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$; б) $\arcsin(\sin 4) = \pi - 4$.

?

1. Сформулируйте определение:
а) арксинуса числа b; б) арккосинуса числа b.

2. Укажите область определения выражения:
а) $\arcsin x$; б) $\arccos x$.

3. Почему:
а) $\arcsin(\sin 4) \neq 4$; б) $\arcsin(\sin(-1{,}3)) = -1{,}3$;
в) $\arccos(\cos 3) = 3$; г) $\arccos(\cos(-1{,}2)) \neq -1{,}2$?

Упражнения

2.70°. Запишите равенство, равносильное данному, по образцу:

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \textit{равносильно} \quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.}$$

1) $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; 2) $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos\frac{\pi}{2}=0;$ 4) $\sin\frac{\pi}{2}=1;$

5) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2};$ 6) $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$

7) $\cos\pi=-1;$ 8) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}.$

2.71°. Запишите равенство, равносильное данному, по образцу:

$$\boxed{\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}\ \textit{равносильно}\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6};$ 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4};$

3) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6};$ 4) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3};$

5) $\arccos 0=\frac{\pi}{2};$ 6) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4};$

7) $\arcsin 1=\frac{\pi}{2};$ 8) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}.$

2.72°. При каких значениях t имеет смысл выражение:

1) $\arcsin(t+1);$ 2) $\arccos(t+3);$

3) $\arccos t^2;$ 4) $\arcsin t^4;$

5) $\arcsin\sqrt{t+1};$ 6) $\arccos\sqrt{t-3}$?

Найдите значение выражения **(2.73—2.74)**.

2.73°. 1) $\arccos 0+\frac{\pi}{4};$ 2) $\arcsin(-1)+\frac{5\pi}{2};$

3) $\arcsin 1+\frac{7\pi}{2};$ 4) $\arccos(-1)+\frac{3\pi}{4}.$

2.74°. 1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin(-1);$

2) $\arccos(-1)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2};$

3) $\arccos 0-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right);$

4) $4\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1;$

5) $3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+4\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\arccos 1;$

6) $\arcsin(-1)+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\arccos(-1).$

2.75°. Верно ли, что:

1) $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) = -\arcsin\frac{1}{4}$; 2) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{2}{3}$;

3) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \arccos\frac{4}{5}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{4}{7}\right) = \arcsin\frac{4}{7}$?

2.76. Пусть $|b| \leqslant 1$. Упростите выражение:

1) $\arcsin(-b) + \arcsin b$; 2) $\arcsin(-b) - \arcsin b$;
3) $\arccos(-b) - \arccos b$; 4) $\arccos b - \arccos(-b)$.

2.77. Сравните:

1) $\arcsin 1$ и $\arccos 1$;
2) $\arcsin(-1)$ и $\arccos(-1)$;
3) $\arccos 0$ и $\arcsin 1$;
4) $\arccos(-1)$ и $\arcsin 0$;
5) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.78. Найдите значение выражения $\arccos t + 2\pi - 3\arcsin t$ при t, равном:

1) -1; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$;

5) $\frac{1}{2}$; 6) 0; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдите значение выражения A **(2.79—2.82).**

2.79. 1) $A = \sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 2) $A = \cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $A = \cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; 4) $A = \sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

5) $A = \sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $A = \cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

2.80*. 1) $A = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $A = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $A = \arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; 4) $A = \arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{5}\right)$;

5) $A = \arccos(\cos 8\pi)$; 6) $A = \arccos(\cos 9\pi)$;

7) $A = \arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$; 8) $A = \arccos\left(\cos\frac{11\pi}{9}\right)$.

2.81*. 1) $A = \arccos\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right)$; 2) $A = \arccos\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{5}\right)\right)$;
3) $A = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{25\pi}{4}\right)\right)$; 4) $A = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right)$;
5) $A = \arccos\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right)$; 6) $A = \arccos\left(\cos\left(-\frac{19\pi}{5}\right)\right)$.

2.82*. 1) $A = \arcsin(\sin(-3))$; 2) $A = \arcsin(\sin 2)$;
3) $A = \arcsin(\sin 12)$; 4) $A = \arcsin(\sin 11)$;
5) $A = \arccos(\cos(-4{,}5))$; 6) $A = \arccos(\cos(-7{,}6))$.

2.7. Тангенс и котангенс произвольного угла

Определение. **Пусть $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к косинусу того же угла α:**

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

(Запись $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, означает, что радианная мера угла α не равна $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ни при каком целом n.)

Определение. **Пусть $\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Котангенсом угла α называется отношение косинуса угла α к синусу того же угла α:**

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Для нахождения значений тангенсов и котангенсов углов можно использовать единичную окружность, таблицы, калькуляторы и т. д.

Каждый угол α можно представить в виде

$$\alpha = 2\pi n + \varphi, \text{ где } n \in \boldsymbol{Z},\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi \text{ (см. п. 2.3).}$$

Так как точки A_α и A_φ на единичной окружности совпадают (поясните почему), то верны равенства:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\varphi.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}(2\pi n + \varphi) = \operatorname{tg}\varphi, \qquad \operatorname{ctg}(2\pi n + \varphi) = \operatorname{ctg}\varphi,$$

где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Для всех значений α, для которых определены выражения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, т. е. для $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, верно равенство

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Таким образом, это равенство является тождеством.

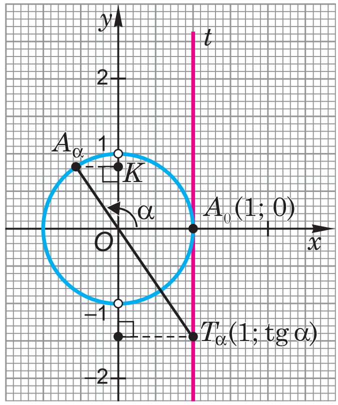


Рис. 92

Проведем через точку $A_0(1;\ 0)$ прямую t перпендикулярно оси Ox (рис. 92). Она будет касательной к единичной окружности. Эта прямая t называется ***линией тангенсов***. Если $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то прямая OA_α пересекает линию тангенсов t в точке T_α. Ордината точки T_α равна $\operatorname{tg}\alpha$.

▲ Докажите, что ордината точки T_α равна $\operatorname{tg}\alpha$ (воспользуйтесь рисунком 92). ▲

Построим теперь ***линию котангенсов***. Через точку $A_{\frac{\pi}{2}}(0;\ 1)$ проведем прямую c перпендикулярно оси Oy. Она будет касательной к единичной окружности (рис. 93). Эта прямая c и называется линией котангенсов. Если $\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то прямая OA_α пересекает линию котангенсов c в точке C_α. Абсцисса точки C_α равна $\operatorname{ctg}\alpha$ (см. рис. 93).

▲ Докажите, что абсцисса точки C_α равна $\operatorname{ctg}\alpha$ (воспользуйтесь рисунком 93). ▲

Рассмотрим теперь ***свойства тангенса и котангенса***.

1. Множества значений тангенса и котангенса

Выражение $\operatorname{tg}\alpha$ может принимать любые значения из множества $\boldsymbol{R}$. В самом деле, для любого действительного чис-

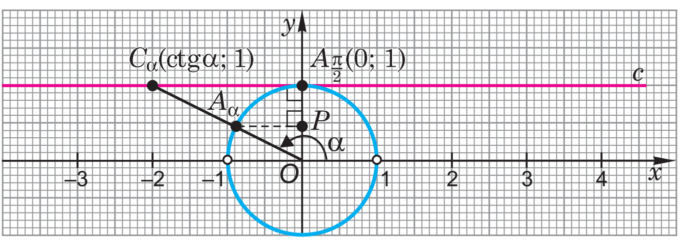


Рис. 93

ла p существует такой угол α, что $\operatorname{tg}\alpha = p$. Это можно показать, используя линию тангенсов (убедитесь в этом самостоятельно).

Таким образом, мы установили, что ***множеством значений выражения*** $\operatorname{tg}\alpha$ ***является множество всех действительных чисел*** $\boldsymbol{R}$.

Следовательно, ***выражение*** $\operatorname{tg}\alpha$ ***не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.***

Аналогичные утверждения верны для выражения $\operatorname{ctg}\alpha$ (проведите рассуждения самостоятельно).

2. Нули тангенса и котангенса

Очевидно, что $\operatorname{tg}\alpha = 0$, если $\sin\alpha = 0$, т. е. при $\alpha = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Значения $\alpha = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, ***являются нулями тангенса.***

Аналогично устанавливается, что ***значения*** $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, — ***нули котангенса*** (поясните почему).

3. Промежутки знакопостоянства тангенса и котангенса

Используя определение тангенса и знаки значений выражений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, можно установить знаки значений выражения $\operatorname{tg}\alpha$. Например, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$, значит, $\operatorname{tg}\alpha < 0$. Можно установить знаки значений выражения $\operatorname{tg}\alpha$ и с помощью линии тангенса (убедитесь в этом).

Аналогичными способами определяют и знаки значений выражения $\operatorname{ctg}\alpha$. На рисунке 94 указаны знаки значений тангенса и котангенса α в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол α.

Итак,

> **!** если угол α оканчивается в I или в III четверти, т. е. $\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$;
> если угол α оканчивается во II или в IV четверти, т. е. $\frac{\pi}{2} + \pi n < \alpha < \pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $\operatorname{tg}\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha < 0$.

Таким образом, мы установили ***промежутки знакопостоянства тангенса и котангенса.***

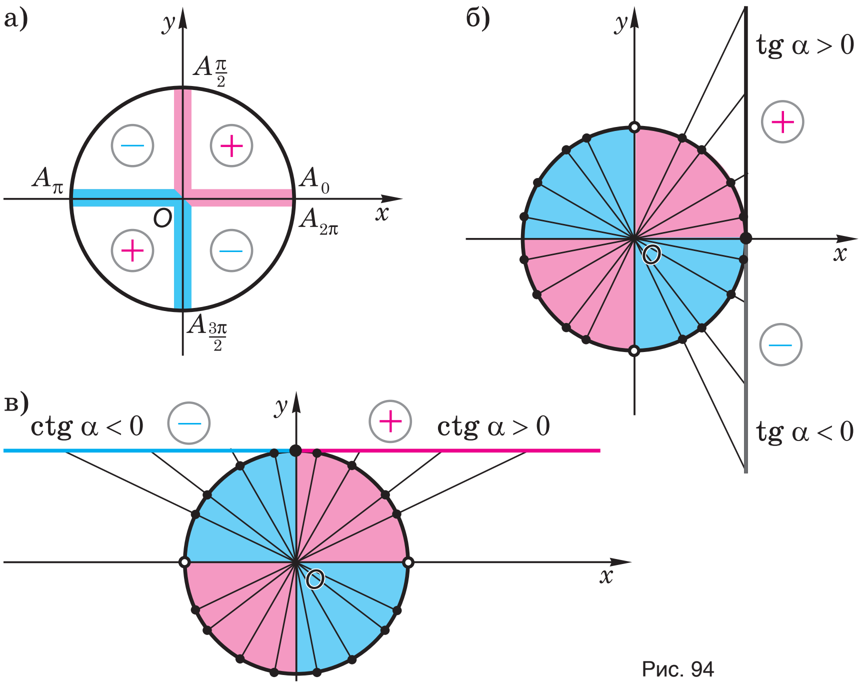


Рис. 94

Пример 1. Доказать тождество:

а) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$;
в) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$;
д) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$; е) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$.

Доказательство. а) По определению тангенса

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha. \boxtimes$$

б)—е) Доказательства аналогичны доказательству для случая а), выполните их самостоятельно.

Пример 2. Сравнить с нулем значение выражения:

а) $\operatorname{tg}(-3986°)$; б) $\operatorname{ctg}10$.

Решение. а) $\operatorname{tg}(-3986°) = \operatorname{tg}(360° \cdot (-12) + 334°) = \operatorname{tg}334° < 0$.

б) Поскольку $10 = 2\pi + \varphi$, откуда $\varphi = 10 - 2\pi \approx 10 - 6{,}28 = 3{,}72$, то угол φ принадлежит III четверти. Таким образом, $\operatorname{ctg}10 = \operatorname{ctg}(2\pi + \varphi) = \operatorname{ctg}\varphi \approx \operatorname{ctg}3{,}72 > 0$.

Ответ: а) $\operatorname{tg}(-3986°) < 0$; б) $\operatorname{ctg}10 > 0$.

Пример 3. Доказать, что значения выражений $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ не могут быть одновременно больше единицы.

Доказательство. Если $\operatorname{tg}\alpha > 1$, то $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} < 1$. ☒

В IX в. арабский астроном и математик аль-Баттани ввел новую тригонометрическую величину, которую назвал «тенью». Он рассматривал величину отношения высоты предмета к длине тени от этого предмета при различной высоте солнца (рис. 95). Таким образом, аль-Баттани, по сути, ввел в тригонометрию понятие «тангенс».

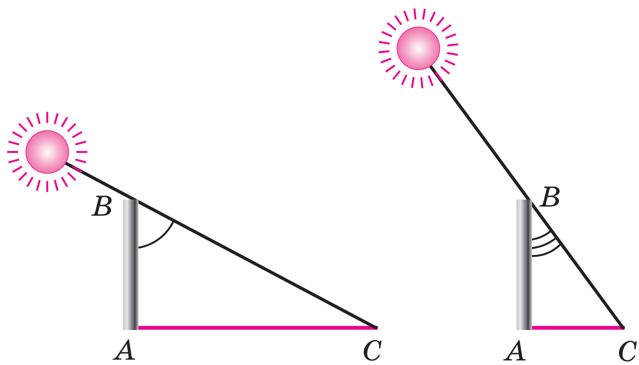


Рис. 95

Современное определение тангенса и его обозначение $\operatorname{tg}\alpha$ в 1753 г. ввел Леонард Эйлер.
Латинское слово tangens означает «касательная».

1. Докажите тождество $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$.
2. Укажите промежутки знакопостоянства тангенса (котангенса). Ответ обоснуйте.
3. Почему при любом значении $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, знаки $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ одинаковы?
4. Укажите нули тангенса (котангенса).
5. Верно ли, что $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha) = -1$?
6. Запишите тождества в)—е) из примера 1, используя градусную меру угла.
7*. Докажите, что значение тангенса (котангенса) может быть любым действительным числом.

Упражнения

2.83°. Могут ли синус, косинус и тангенс одного и того же угла α иметь следующие значения:

1) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$;

2) $\sin\alpha = \frac{7}{11}$, $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{11}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{5\sqrt{3}}$;

3) $\sin\alpha = \frac{8}{9}$, $\cos\alpha = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{4\sqrt{5}}$;

4) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$?

2.84°. Верно ли, что:

1) $\operatorname{ctg}(-\alpha) : (-\operatorname{ctg}\alpha) = 1$; 2) $\operatorname{ctg}(-\alpha) + \operatorname{ctg}\alpha = 0$;
3) $\operatorname{tg}(-\alpha) - \operatorname{tg}\alpha = 0$; 4) $\operatorname{tg}(-\alpha) : (-\operatorname{tg}\alpha) = -1$?

2.85°. Используя тождества вида $\operatorname{tg}(2\pi n + \varphi) = \operatorname{tg}\varphi$, где $n \in \mathbf{Z}$, $\varphi \in [0; 2\pi)$, $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ и рисунки 92, 93, найдите приближенные значения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ при α, равном:

1) $230°$, $-220°$, $-1040°$; 2) $210°$, $-295°$, $-1030°$;
3) $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{74\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{44\pi}{3}$, $-\frac{19\pi}{8}$.

2.86°. В какой четверти оканчивается угол α, если:

1) $\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha < 0$; 2) $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha > 0$;
3) $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha < 0$; 4) $\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha > 0$;
5) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha > 0$; 6) $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha < 0$?

2.87°. Определите знак значения выражения, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 5) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

2.88°. Верно ли, что:

1) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$?

Определите знак значения выражения **(2.89—2.90)**.

2.89. 1) $\operatorname{tg}(-340°)\operatorname{ctg}156°$; 2) $\operatorname{ctg}103°\operatorname{ctg}(-304°)$;

3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{11}\right)\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{15\pi}{7}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}$;

5) $\operatorname{ctg}(-1)\operatorname{tg}(-2)\operatorname{ctg}3$; 6) $\operatorname{tg}(-4)\operatorname{ctg}2\operatorname{tg}(-5)$.

2.90. 1) $-\operatorname{tg}189°-\operatorname{tg}269°$; 2) $-\operatorname{ctg}85°-\operatorname{ctg}295°$;

3) $\operatorname{tg}5-\operatorname{ctg}5$; 4) $\operatorname{tg}1-\operatorname{tg}3$;

5) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{9}-\operatorname{tg}\frac{25\pi}{18}$; 6) $-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{15}-\operatorname{tg}\frac{49\pi}{45}$.

2.91°. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$;

2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$;

3) $\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg}^2\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$;

4) $\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

2.92. Зная, что $\operatorname{tg}\beta = m$ и $m \neq 0$, найдите значение выражения:

1) $1-\operatorname{ctg}(-\beta)$; 2) $1-\operatorname{tg}(-\beta)$;

3) $1-\operatorname{tg}(2\pi-\beta)$; 4) $1-\operatorname{ctg}(\beta-2\pi)$.

2.93. Известно, что $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Упростите выражение:

1) $|\operatorname{tg}\alpha|+\operatorname{tg}\alpha$; 2) $|\operatorname{ctg}\alpha|+\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $|\operatorname{ctg}(-\alpha)|+\operatorname{ctg}(-\alpha)$; 4) $|\operatorname{tg}(-\alpha)|+\operatorname{tg}(-\alpha)$;

5) $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha-1$; 6) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha}-1$.

2.94. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}t=0$; 2) $\operatorname{ctg}t=0$;

3) $\operatorname{tg}(4t-2)=0$; 4) $\operatorname{tg}(3t+4)=0$;

5) $\operatorname{ctg}(0{,}1t+6)=0$; 6) $\operatorname{ctg}(2t-5)=0$.

2.95. При каких значениях t не имеет смысла выражение:

1) $\operatorname{tg}\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{t}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}5t}$;

4) $\frac{\sqrt{6}}{\operatorname{ctg}(-t)}$; 5) $\frac{\pi}{\operatorname{tg}\left(\frac{3t}{4}+3\right)}$; 6) $\frac{2\pi+6}{\operatorname{ctg}\left(6t-\frac{5\pi}{6}\right)}$?

2.96. Упростите выражение:

1) $\sin\alpha\,\mathrm{ctg}(-\alpha)-\cos(-\alpha)$;
2) $\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha-\sin(-\alpha)$;
3) $\cos^2(-\alpha)\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+\sin^2\alpha\,\mathrm{ctg}^2(-\alpha)$;
4) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\mathrm{tg}(-\alpha)\,\mathrm{ctg}(-\alpha)$;
5) $(\mathrm{tg}(-\alpha)+\mathrm{tg}(-\beta)):(\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta)$;
6) $(1+\mathrm{tg}^4(-\alpha)):(\mathrm{tg}^2(-\alpha)+\mathrm{ctg}^2(-\alpha))$.

2.97. Пусть $b\in \boldsymbol{R}$. Постройте угол α такой, что $\mathrm{tg}\,\alpha = b$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, если b равно:

1) 0,2; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $-2\frac{1}{2}$; 4) 5,5.

2.98. Пусть $b\in \boldsymbol{R}$. Постройте угол α такой, что $\mathrm{ctg}\,\alpha = b$, $0<\alpha<\pi$, если b равно:

1) 0,4; 2) $-\frac{5}{6}$; 3) $-2\frac{1}{4}$; 4) 4,3.

2.99*. Докажите, что значение выражения $\mathrm{tg}\,\alpha$ может быть:

1) больше 7; 2) меньше –4;
3) меньше –10; 4) больше 11.

2.8. Понятие арктангенса и арккотангенса

Рассмотрим выражение $\mathrm{tg}\,\alpha$. Мы знаем, что оно может принимать любое действительное значение b, причем таких углов α, что $\mathrm{tg}\,\alpha = b$, бесконечно много. Однако существует единственный угол α такой, что $\mathrm{tg}\,\alpha = b$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ($b>0$ на рисунке 96, *а*; $b<0$ на рисунке 96, *б*). Этот угол называется ***арктангенсом числа b***.

Определение. **Пусть $b\in \boldsymbol{R}$. *Арктангенсом числа b* называется угол α такой, что**

$$\mathrm{tg}\,\alpha=b \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

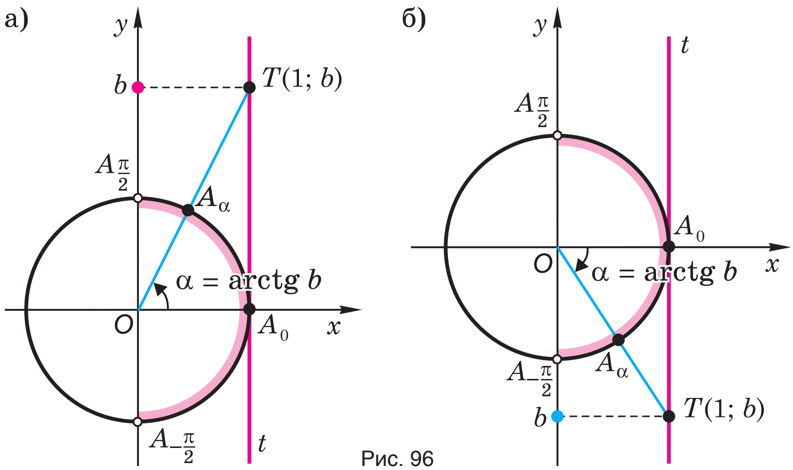


Рис. 96

Арктангенс числа b обозначается $\operatorname{arctg} b$. Таким образом, $\operatorname{arctg} b$ — это угол, удовлетворяющий двум условиям:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} b) = b \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} b < \frac{\pi}{2}.$$

Пример 1. Найти значение выражения A, если:

а) $A = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; б) $A = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

Решение. а) $A = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, так как $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) $A = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{-2\pi + 3\pi + 4\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$ (поясните почему).

Ответ: а) $A = -\frac{\pi}{6}$; б) $A = \frac{5\pi}{12}$.

Рассмотрим выражение $\operatorname{ctg}\alpha$. Мы знаем, что оно может принимать любое действительное значение b, причем таких углов α, что $\operatorname{ctg}\alpha = b$, бесконечно много. Однако существует единственный угол α такой, что $\operatorname{ctg}\alpha = b$ и $0 < \alpha < \pi$ ($b > 0$ на рисунке 97, *а*; $b < 0$ на рисунке 97, *б*). Этот угол называется ***арккотангенсом числа b***.

Определение. **Пусть $b \in R$. *Арккотангенсом числа b* называется угол α такой, что**

$$\operatorname{ctg}\alpha = b \quad \text{и} \quad 0 < \alpha < \pi.$$

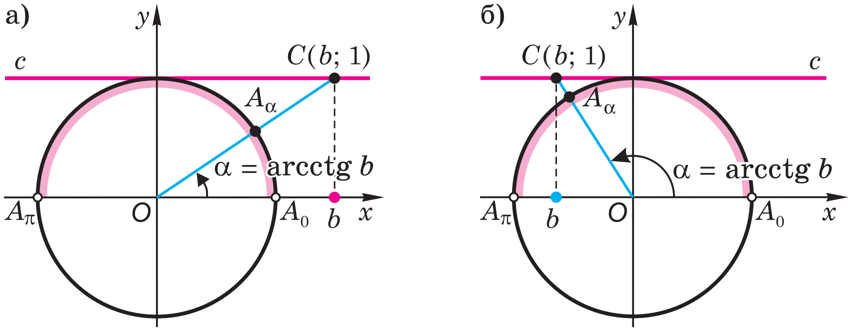


Рис. 97

Арккотангенс числа b обозначается $\operatorname{arcctg} b$. Таким образом, $\operatorname{arcctg} b$ — это угол, удовлетворяющий двум условиям:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} b) = b \quad \text{и} \quad 0 < \operatorname{arcctg} b < \pi.$$

Пример 2. Найти значение выражения A, если:

а) $A = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; б) $A = \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

Решение. а) $A = \frac{2\pi}{3}$, так как $0 < \frac{2\pi}{3} < \pi$ и $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) $A = \frac{5\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi - 2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ (поясните почему).

Ответ: а) $A = \frac{2\pi}{3}$; б) $A = \frac{\pi}{2}$.

Пример 3. Найти значение выражения A, если:

а) $A = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 3)$; б) $A = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 7) + \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{6}{7}\right)$.

Решение. а) Пусть $\operatorname{arctg} 3 = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдем значение A:

$$A = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{3}.$$

б) Пусть $\operatorname{arcctg} 7 = \alpha$, $\operatorname{arcctg}\frac{6}{7} = \beta$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha = 7$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{6}{7}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ (поясните эти неравенства). Найдем значение A:

$$A = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} + \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1.$$

Ответ: а) $A = \frac{1}{3}$; б) $A = 1$.

Пример 4. Доказать тождество:

а) $\operatorname{arctg}(-b) = -\operatorname{arctg} b$;
б) $\operatorname{arcctg}(-b) = \pi - \operatorname{arcctg} b$.

Доказательство. а) Рассмотрим углы, стоящие в левой и в правой частях данного равенства. Во-первых, эти углы удовлетворяют условию:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(-b) < \frac{\pi}{2}; \qquad -\frac{\pi}{2} < -\operatorname{arctg} b < \frac{\pi}{2}$$

(объясните почему). Во-вторых, тангенсы этих углов равны:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-b)) = -b;$$
$$\operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} b) = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} b) = -b.$$

Значит, эти углы равны (см. рис. 96). ☒

б) Доказательство аналогично доказательству случая а).

1. Сформулируйте определение:
   а) арктангенса числа b; б) арккотангенса числа b.
2. Укажите область определения выражения:
   а) $\operatorname{arctg} x$; б) $\operatorname{arcctg} x$.
3. Почему:
   а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 10) \neq 10$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-0{,}7)) = -0{,}7$;
   в) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 2) = 2$; г) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-4)) \neq -4$?

Упражнения

2.100°. Запишите равенство, равносильное данному, по образцу:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \ \textit{равносильно} \ \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.}$$

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$;

4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$; 5) $\operatorname{tg} 0 = 0$; 6) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

7) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$; 8) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.101°. Запишите равенство, равносильное данному, по образцу:

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4} \ \textit{равносильно} \ \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1.}$$

1) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi}{3}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$;

3) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$;

5) $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$; 6) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

2.102°. Верно ли, что:

1) $\operatorname{arctg}(-2)=-\operatorname{arctg}2$; 2) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{2}\right)=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{5}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}(-7)=\operatorname{arctg}7$; 4) $\operatorname{arcctg}(-10)=\operatorname{arcctg}10$?

2.103°. Найдите значение выражения A, если:

1) $A=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}0+3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $A=\operatorname{arcctg}\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

3) $A=\operatorname{arctg}(-1)+2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arcctg}(-1)$;

4) $A=\operatorname{arctg}0+\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arcctg}0$;

5) $A=\operatorname{tg}\left(\arccos 1-2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$;

6) $A=\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arcctg}1+3\operatorname{arctg}0+\arcsin(-1)\right)$.

2.104. Сравните значения выражений:

1) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg}1$; 2) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

3) $\operatorname{arctg}(-1)$ и $\operatorname{arcctg}(-1)$;

4) $\operatorname{arctg}0$ и $\operatorname{arcctg}(-1)$;

5) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ и $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

6) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

2.105. Найдите значение выражения A, если:

1) $A=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3{,}7)$; 2) $A=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}9{,}2)$;

3) $A=\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{5}\right)\right)$; 4) $A=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{9}{8}\right)\right)$;

5) $A=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-4))$; 6) $A=\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-5))$.

2.106. Найдите значение выражения A, если:

1) $A=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-2))+\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-3))$;

2) $A=\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-5))-\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-4))$.

2.107*. Найдите значение выражения A, если:

1) $A = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{13\pi}{8}\right)$; 2) $A = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{15\pi}{7}\right)$;

3) $A = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{5}\right)\right)$; 4) $A = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{5}\right)\right)$;

5) $A = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{8}\right)$; 6) $A = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{12\pi}{5}\right)$.

2.9. Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла

Рассмотрим основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \tag{1}$$

Зная, в какой четверти оканчивается угол α, и зная значение $\sin\alpha$, из этого тождества можно найти значение $\cos\alpha$, поскольку $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$. И наоборот, зная значение $\cos\alpha$, можно найти значение $\sin\alpha$, так как $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$. Например, если угол α оканчивается в IV четверти, то получим:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}; \quad \sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

(поясните почему).

Если $\cos\alpha \neq 0$, то, разделив обе части тождества (1) на $\cos^2\alpha$, получим $\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, т. е. новое тождество

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

которое устанавливает связь между косинусом и тангенсом одного и того же угла. Если известно, в какой четверти оканчивается угол α, то это тождество позволяет по значению $\operatorname{tg}\alpha$ найти значение $\cos\alpha$ и наоборот.

Если $\sin\alpha \neq 0$, то, разделив обе части тождества (1) на $\sin^2\alpha$, получим $\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, т. е. тождество

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},$$

которое устанавливает связь между синусом и котангенсом одного и того же угла.

Зная значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, можно найти значения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Из тождества $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$ имеем:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Таким образом, если известно, в какой четверти оканчивается угол α, то, используя указанные тождества, можно по значению одного из выражений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\alpha$ найти значения трех остальных.

Пример 1. Найти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества имеем $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Отсюда получим $|\cos\alpha| = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (угол α принадлежит II четверти), то $\cos\alpha < 0$, значит, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

По определениям тангенса и котангенса имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3} : \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -2\sqrt{2}.$$

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -2\sqrt{2}$.

Пример 2. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Имеем: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 7$;

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{1}{49} = \frac{50}{49}.$$

Следовательно, $\cos^2\alpha = \frac{49}{50}$, откуда $|\cos\alpha| = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

Поскольку угол α принадлежит III четверти, то $\cos\alpha < 0$, значит, $\cos\alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

Находим $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{49}{50} = \frac{1}{50}$, откуда получаем $|\sin\alpha| = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

Поскольку угол α принадлежит III четверти, то $\sin\alpha < 0$, значит, $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{10}$; $\cos\alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 7$.

▲ **Пример 3.** Найти значение выражения A, если:

а) $A = \cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; б) $A = \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; в) $A = \operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

Решение. Пусть $\arcsin\frac{1}{3} = \alpha$, тогда $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$. Итак:

а) $A = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

б) $A = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3} : \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

в) $A = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 2\sqrt{2}$.

Ответ: а) $A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$; в) $A = 2\sqrt{2}$.

Пример 4. Найти значение выражения A, если:

а) $A = \sin(\operatorname{arcctg} 7)$; б) $A = \cos(\operatorname{arcctg} 7)$; в) $A = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 7)$.

Решение. Пусть $\operatorname{arcctg} 7 = \alpha$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha = 7$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$. Таким образом, получим:

а) $A = \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+49}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$;

б) $A = \cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \sin\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$;

в) $A = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{7}$.

Ответ: а) $A = \frac{\sqrt{2}}{10}$; б) $A = \frac{7\sqrt{2}}{10}$; в) $A = \frac{1}{7}$. ▲

?

1. Докажите тождество:

   а) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$; б) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

   в) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

2. Как выразить $|\sin\alpha|$ через: а) $\cos\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$?

3. Как выразить $|\cos\alpha|$ через: а) $\sin\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$?

4. Что нужно знать, чтобы из основного тригонометрического тождества выразить $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$?

Упражнения

2.108°. По заданному значению одного из выражений $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$ найдите значения трех остальных, если $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$:

1) $\sin\beta = 0{,}8$; 2) $\sin\beta = \frac{1}{3}$; 3) $\cos\beta = -\frac{1}{4}$;

4) $\cos\beta = -\frac{40}{41}$; 5) $\operatorname{tg}\beta = -3$; 6) $\operatorname{tg}\beta = -2$;

7) $\operatorname{ctg}\beta = -2{,}4$; 8) $\operatorname{ctg}\beta = -0{,}5$.

2.109°. По заданному значению одного из выражений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ найдите значения трех остальных:

1) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 4) $\cos\alpha = -\frac{84}{85}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

5) $\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}4$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

6) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{15}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Упростите выражение **(2.110—2.111)**.

2.110°. 1) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha - \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \cos\alpha$; 4) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha$;

5) $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - \cos\alpha$; 6) $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} + \sin\alpha$;

7) $\cos^2\alpha - (\operatorname{ctg}^2\alpha + 1)\sin^2\alpha$;

8) $(\operatorname{tg}^2\alpha + 1)\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

2.111°. 1) $\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$; 2) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha - 1}$;

3) $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$; 4) $\frac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

5) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}$; 6) $\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha}$;

7) $\frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha}$; 8) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

2.112. Найдите значение выражения:

1) $\frac{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

2) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha+1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ при $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$;

3) $\mathrm{tg}^2\,\alpha-\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^2\,\alpha\sin^2\alpha$ при $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$;

4) $\mathrm{ctg}^2\,\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\,\alpha$ при $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$;

5) $\mathrm{ctg}\,\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ при $\alpha=-\dfrac{\pi}{3}$;

6) $\mathrm{tg}\,\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ при $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$.

Упростите выражение **(2.113—2.114).**

2.113. 1) $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$; 2) $\sin^2\alpha-\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$;

3) $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$;

4) $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha$;

5)* $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\mathrm{tg}^2\,\alpha\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha$;

6)* $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+\sin\alpha+1$.

2.114. 1) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, если $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, если $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

3) $\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$, если $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

4) $\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha}$, если $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

2.115. Докажите тождество:

1) $\mathrm{ctg}^2\,\alpha-\cos^2\alpha=\mathrm{ctg}^2\,\alpha\cos^2\alpha$;

2) $\mathrm{tg}^2\,\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\,\alpha\sin^2\alpha$;

3) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}\cdot\dfrac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}=1$;

4) $\mathrm{tg}^2\,\alpha-\mathrm{ctg}^2\,\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

5) $\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}:\dfrac{1+\dfrac{1}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{1}{\sin\alpha}}=\mathrm{ctg}^3\,\alpha$;

6) $\mathrm{tg}^2\,\alpha-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}=-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

2.116. Найдите (если возможно) наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\cos^2\alpha$;
2) $\sin^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;
3) $1-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$;
4) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-1$;
5) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}+3\cos\alpha\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;
6) $\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}-5\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

Решите уравнение **(2.117—2.118).**

2.117. 1) $\cos 3x\cos(-2x)=0$;
2) $\sin 4x\sin(-5x)=0$;
3) $\sin(-3x)\cos(-6x)=0$;
4) $\sin(-2x)\cos(-5x)=0$;
5) $\sin^2 x-\sin x=0$;
6) $\cos^2 x+\cos x=0$;
7) $\operatorname{tg}(-3x)\operatorname{ctg}2x=0$;
8) $\operatorname{tg}4x\operatorname{ctg}(-8x)=0$.

2.118. 1) $\sin^2 x+\cos^2 x-\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x+\cos 2x=0$;
2) $\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x-\sin^2 x-\cos^2 x+\sin 4x=0$;
3) $\frac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x-\sin\frac{x}{2}=1$;
4) $\cos\frac{3x}{4}+\frac{1}{\sin^2 x}-\operatorname{ctg}^2 x=1$.

2.10. Формулы приведения

Теорема. Имеют место тождества:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\qquad (1)$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\qquad (2)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\qquad (3)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\qquad (4)$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,\qquad (5)$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,\qquad (6)$$
$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha,\qquad \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha.\qquad (7)$$

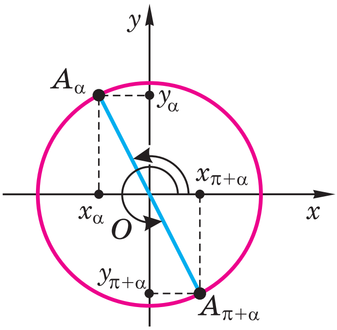


Рис. 98

Тождества (1)—(7) называют ***формулами приведения.***

Доказательство. Надо доказать, что каждое из равенств (1)—(7) является тождеством.

Для равенств (1) и (7) это было доказано в примере 4 пункта 2.4, поскольку $\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha)$ и $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha)$. То, что равенства (2) являются тождествами, доказывается аналогично.

В самом деле, точки единичной окружности A_α и $A_{\pi+\alpha}$ (рис. 98) при любом α симметричны относительно начала координат. Значит,

$$y_{\pi+\alpha} = -y_\alpha \qquad \text{и} \qquad x_{\pi+\alpha} = -x_\alpha.$$

По определению синуса и косинуса имеем:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \text{и} \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Формулы (3) были доказаны в п. 2.1 для острого угла α. Полагая их верными для любых значений α (это будет доказано в п. 2.11) и используя формулы (1), (2) и (7), можно обосновать и формулы (4)—(6).

Например,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\left(2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) =$$

$\downarrow$ по формуле приведения (7) для синуса имеем $\downarrow$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) =$$

$\downarrow$ по формуле приведения (3) для синуса получим $\downarrow$

$$= -\cos\alpha. \ \boxtimes$$

Проведите доказательство оставшихся формул самостоятельно.

В п. 2.4 было показано, что вычисление значения тригонометрического выражения для любого угла можно свести (*привести*) к вычислению его значения для угла в пределах от 0 до 2π. *Формулы приведения* (1)—(7) позволяют ограничиться при вычислениях даже углами α из I четверти.

З а м е ч а н и е. Любая из формул приведения может быть записана и для градусной меры угла. Например, формулы (5) можно записать в виде

$$\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha \quad \text{и} \quad \cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha.$$

П р и м е р 1. Найти значение выражения $A = \cos\frac{183\pi}{4}$.

Р е ш е н и е.

$$A = \cos\frac{183\pi}{4} = \cos\left(45\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi\cdot 22 + \pi + \frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right) =$$

по формуле приведения (2) для косинуса получим

$$= -\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

по формуле приведения (4) для косинуса имеем

$$= -\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

О т в е т: $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Формулы приведения для тангенса и котангенса являются следствиями формул приведения (1)—(7). Например,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Если записать все формулы приведения для четырех тригонометрических выражений (синуса, косинуса, тангенса и котангенса), то получится 28 формул (см. форзац II).

Обратите внимание, что в одной формуле приведения присутствуют либо *одинаковые тригонометрические выражения*, либо *сходные по звучанию выражения*: синус и косинус, тангенс и котангенс.

Чтобы использовать формулы приведения, не заучивая их, полезно знать два *мнемонических правила*[1] (в дальнейшем будем называть их ***правилами формул приведения***).

1) ***Правило знака:*** *в правой части формулы ставится тот знак, который имеет значение выражения в левой части при условии, что угол* α *принадлежит* I *четверти.*

[1] Правила, облегчающие запоминание, называются *мнемоническими*. Мнемозина — богиня памяти в греческой мифологии.

2) ***Правило названий:*** *когда в левой части формулы угол равен* $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ *или* $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, *то синус меняется на косинус, тангенс — на котангенс и наоборот;*

когда угол равен $\pi \pm \alpha$ *или* $2\pi - \alpha$, *то название выражения сохраняется.*

Например, записывая формулу приведения для выражения $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, поступают следующим образом:

1) в правой части формулы ставят знак «минус», поскольку значение выражения в левой части отрицательное $\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) < 0\right)$ при $\alpha \in \left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$;

2) название меняют на «косинус», так как угол в левой части формулы равен $\frac{3\pi}{2} + \alpha$.

Таким образом, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$.

Пример 2. Доказать тождество

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\left(\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos^2(\pi + \alpha)\right)}{\sin(2\pi - \alpha)} = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right).$$

Доказательство. Пусть A — левая часть равенства, а B — правая. Преобразуем их поочередно, применяя соответствующие формулы приведения:

$$A = \frac{\cos\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha; \quad B = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Поскольку A и B тождественно равны одному и тому же выражению, данное в условии равенство является тождеством. ☒

Пример 3. Найти значение выражения A, если

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right).$$

Решение. Пусть $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, т. е. α принадлежит II четверти. Значит,

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Ответ: $A = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

В XIII в. Насиреддин Туси — ученый-энциклопедист из иранского города Туси (территория нынешнего Азербайджана) — создал обсерваторию. В связи с астрономическими исследованиями он впервые рассмотрел тригонометрию как особый раздел математики. В работах Туси встречаются и алгебраические соотношения между тригонометрическими выражениями.

1. С помощью каких формул вычисление значений $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ для произвольного угла t можно заменить вычислением $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$, где $0 < \varphi < 2\pi$?

2. Запишите формулы приведения для синуса (косинуса, тангенса, котангенса) углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$.

3. Сформулируйте мнемонические правила для формул приведения.

Упражнения

Является ли равенство тождеством **(2.119—2.121)**?

2.119°. 1) $\sin(90° + \alpha) = -\cos\alpha$; 2) $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$;
3) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; 4) $\sin(270° - \alpha) = \cos\alpha$.

2.120°. 1) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$;
3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$; 4) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$.

2.121°. 1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$;
3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$.

2.122°. Замените выражение тождественно равным ему (с углом α), применив формулы приведения:

1) $\operatorname{ctg}(270° + \alpha)$; 2) $\operatorname{tg}(270° - \alpha)$;
3) $\sin(3\pi + \alpha)$; 4) $\cos(3\pi - \alpha)$;
5) $\sin\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$; 6) $\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$;
7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$; 8) $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$;
9) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; 10) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$.

Найдите значение выражения **(2.123—2.126)**.

2.123°. 1) $\sin 330°$; 2) $\cos 120°$; 3) $\mathrm{tg}\,135°$;
4) $\mathrm{ctg}\,225°$; 5) $\sin(-510°)$; 6) $\cos(-570°)$;
7) $\mathrm{tg}(-480°)$; 8) $\mathrm{ctg}(-585°)$; 9) $\sin 3915°$;
10) $\cos 4110°$; 11) $\mathrm{tg}\,3570°$; 12) $\mathrm{ctg}\,4560°$.

2.124°. 1) $\sin\frac{2\pi}{3}$; 2) $\cos\frac{5\pi}{6}$; 3) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4}$;
4) $\mathrm{ctg}\frac{11\pi}{6}$; 5) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$;
7) $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 8) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; 9) $\sin\frac{21\pi}{4}$;
10) $\cos\frac{23\pi}{6}$; 11) $\mathrm{tg}\frac{8\pi}{3}$; 12) $\mathrm{ctg}\frac{29\pi}{3}$.

2.125. 1) $6\sin\frac{5\pi}{6}+2\cos\frac{5\pi}{3}$; 2) $3\,\mathrm{tg}\frac{7\pi}{6}-\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{6}$;
3) $3\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos\frac{14\pi}{3}$; 4) $2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)-4\sin\frac{19\pi}{3}$;
5) $\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right)\mathrm{tg}\left(-\frac{17\pi}{3}\right)\mathrm{ctg}\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$;
6) $\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)\mathrm{tg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)\mathrm{ctg}\left(-\frac{29\pi}{3}\right)$.

2.126. 1) $\mathrm{tg}\,930°-\sin(-1110°)+\cos(-1470°)$;
2) $\sin(-1125°)+\cos(-945°)+\mathrm{tg}\,1755°$;
3) $\sin^2 930°-\cos^2(-675°)+\mathrm{tg}^2\,855°$;
4) $\cos^2(-690°)+\sin^2(-900°)+\mathrm{ctg}^2\,495°$.

2.127°. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{tg}(-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$; 2) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(3\pi-\alpha)+\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)\sin(3\pi+\alpha)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)-\sin(\alpha-5\pi)\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$;

5) $\left(\sin(\alpha+2\pi)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(\alpha-2\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2$;

6) $\left(\cos(\alpha-4\pi)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2-\left(\sin(\alpha+6\pi)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2$.

Докажите тождество **(2.128—2.129).**

2.128. 1) $\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos^2(-\alpha)=-1;$

2) $\cos(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin^2(-\alpha)=1;$

3) $\dfrac{\sin(\alpha-\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)}=\operatorname{tg}^2\alpha;$

4) $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}=-\operatorname{ctg}\alpha.$

2.129. 1) $\dfrac{2-2\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right);$

2) $\dfrac{2\cos^2(\pi-\alpha)-2}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right);$

3) $\dfrac{\cos^2(2\pi-\alpha)-\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right);$

4) $\dfrac{\sin^2(\pi-\alpha)-\cos^2(2\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right).$

2.130*. Найдите значение выражения:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}\right);$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right);$

3) $\cos\left(\pi+\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right);$

4) $\sin\left(\pi-\arcsin\frac{3}{7}\right);$

5) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\operatorname{arcctg}8\right);$

6) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg}(-6)\right).$

2.11. Формулы сложения

Теорема 1. Имеют место тождества:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \quad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \quad (2)$$

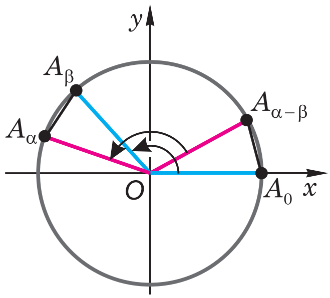


Рис. 99

Доказательство тождества (1). Отметим на единичной окружности точки A_α, A_β, $A_{\alpha-\beta}$, A_0 (рис. 99). Их координаты:

$$A_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha),\quad A_\beta(\cos\beta;\ \sin\beta),$$
$$A_{\alpha-\beta}(\cos(\alpha-\beta);\ \sin(\alpha-\beta)),\quad A_0(1;\ 0).$$

Если повернуть каждый из лучей OA_0 и $OA_{\alpha-\beta}$ на угол β, то луч OA_0 совместится с лучом OA_β, а луч $OA_{\alpha-\beta}$ совместится с лучом OA_α. При этом точка A_0 совместится с точкой A_β, а точка $A_{\alpha-\beta}$ — с точкой A_α. Значит, совместятся отрезки $A_0A_{\alpha-\beta}$ и $A_\beta A_\alpha$, т. е. $A_0A_{\alpha-\beta} = A_\beta A_\alpha$.

Применив формулу $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, выражающую расстояние между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, получим:

$$A_0A_{\alpha-\beta}^2 = (x_{\alpha-\beta} - x_0)^2 + (y_{\alpha-\beta} - y_0)^2 =$$
$$= (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha-\beta) - 0)^2 =$$
$$= \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta);$$

$$A_\beta A_\alpha^2 = (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 =$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta =$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$

Следовательно, имеет место равенство

$$2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$

Отсюда получаем

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \boxtimes$$

Эта формула читается так: *косинус разности двух углов равен сумме произведения косинусов этих углов и произведения синусов этих углов*.

Доказательство тождества (2). Подставляя в уже доказанную формулу (1) вместо угла β угол $-\beta$, получаем

$$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta).$$

Применив формулы $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, получим

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \boxtimes$$

Эта формула читается так: *косинус суммы двух углов равен разности между произведением косинусов этих углов и произведением синусов этих углов*.

Используя формулы (1) и (2), можно доказать известные нам формулы приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$ и $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ для произвольного угла (напомним, что в п. 2.1 эти формулы были обоснованы лишь для острого угла α, а их справедливость для любого угла в п. 2.10 принята без доказательства):

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 0 \cdot \cos\alpha + 1 \cdot \sin\alpha = \sin\alpha.$$

Значит, для любого угла α имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha.$$

Заменяя в этой формуле угол α на $\frac{\pi}{2}-\alpha$, получаем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Значит, для любого угла α имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha.$$

Теорема 2. Имеют место тождества:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta, \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta. \qquad (4)$$

Доказательство тождества (3).

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta =$$

$$= \sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta. \boxtimes$$

Формула (3) читается так: *синус разности двух углов равен разности между произведением синуса первого угла и косинуса второго угла и произведением косинуса первого угла и синуса второго угла.*

Формулу (4) легко получить, заменив в тождестве (3) угол β на $-\beta$ (выполните эти выкладки самостоятельно).

Тождества (1)—(4) называют еще ***формулами*** или ***теоремами сложения для синуса и косинуса***.

Докажем теперь теоремы сложения для тангенса.

Напомним, что в тождестве рассматриваются те значения переменных, при которых имеют смысл обе его части.

Теорема 3. Имеют место тождества:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (6)$$

Доказательство тождества (5). Преобразуем левую часть равенства (5):

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=$$

↓ по формулам (1) и (3) получим ↓

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=$$

↓ разделив числитель и знаменатель дроби на произведение $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$, получим ↓

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \boxtimes$$

Доказательство тождества (6) аналогично.

Тождества (5) и (6) называют ***формулами*** или ***теоремами сложения для тангенса***.

Пример 1. Вычислить $A=\sin17^\circ\cos13^\circ+\cos17^\circ\sin13^\circ$.

Решение. По формуле (4) $A=\sin(17^\circ+13^\circ)=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Доказать, что $\cos75^\circ=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$.

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства:

$$\cos75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ-\sin45^\circ\sin30^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}. \boxtimes$$

Пример 3*. Найти значение выражения A, если:

а) $A = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 7)$;

б) $A = \cos\left(\arccos(-0{,}8) - \operatorname{arctg}\left(-2\sqrt{2}\right)\right)$.

Решение. а) Пусть $\operatorname{arctg} 3 = \alpha$, $\operatorname{arctg} 7 = \beta$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{tg}\beta = 7$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Значит,

$$A = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{3+7}{1-3\cdot 7} = \frac{10}{-20} = -\frac{1}{2}.$$

б) Пусть $\arccos(-0{,}8) = \alpha$, $\operatorname{arctg}\left(-2\sqrt{2}\right) = \beta$, тогда $\cos\alpha = -0{,}8$, $\operatorname{tg}\beta = -2\sqrt{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$. Значит,

$$A = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta =$$

так как $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$, $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, то $\cos\beta > 0$, $\sin\alpha > 0$

$$= \cos\alpha \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}} + \sqrt{1-\cos^2\alpha}\ \operatorname{tg}\beta \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}} =$$

$$= -0{,}8\cdot\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{0{,}36}\left(-2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{-4}{15} + \frac{-2\sqrt{2}}{5} = -\frac{2}{15}\left(2+3\sqrt{2}\right).$$

Ответ: а) $A = -\frac{1}{2}$; б) $A = -\frac{2}{15}\left(2+3\sqrt{2}\right)$.

?

1. Докажите формулы сложения для синуса (косинуса).
2. Докажите формулы сложения для тангенса.
3. При каких значениях α и β имеют смысл обе части:
   а) равенства (5); б) равенства (6)?

4*. Выведите формулы сложения для котангенса.

Упражнения

Преобразуйте выражение с помощью формул сложения **(2.131—2.132).**

2.131°. 1) $\sin(60° + \alpha)$; 2) $\sin(30° - \alpha)$;
3) $\cos(\alpha - 45°)$; 4) $\cos(60° + \alpha)$;
5) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$; 6) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$;
7) $\operatorname{ctg}(60° - \alpha)$; 8) $\operatorname{ctg}(30° + \alpha)$;
9) $\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; 10) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

2.132°. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$; 2) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

2.133. Найдите значение выражения:

1) $\sin(\alpha+\beta)$; 2) $\sin(\alpha-\beta)$;
3) $\cos(\alpha-\beta)$; 4) $\cos(\alpha+\beta)$,

если известно, что:

а) $\sin\alpha=\frac{7}{25}$, $\sin\beta=\frac{11}{61}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos\alpha=\frac{20}{29}$, $\cos\beta=-\frac{8}{17}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

2.134. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$;
3) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$; 4) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$,

если известно, что:

а) $\operatorname{tg}\alpha=1\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\sin\beta=\frac{7}{25}$ и $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

2.135. Найдите значение выражения:

1) $\cos(\alpha+\beta)$; 2) $\cos(\alpha-\beta)$,

если известно, что:

а) $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$;

б) $\sin\alpha=\sin\beta=-\frac{1}{2}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

Упростите выражение **(2.136—2.137)**.

2.136. 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$; 2) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}$;

3) $\dfrac{\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\alpha}$;

5) $\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\sin^2\alpha$;

6) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)+\sin^2\alpha$.

2.137. 1) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta}$; 2) $\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$;

3) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\pi-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}$;

4) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}$;

5) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}$;

6) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}(\alpha-\beta)(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$.

2.138°. Найдите значения выражений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

1) $\alpha = 105°$; 2) $\alpha = 75°$; 3) $\alpha = -15°$;

4) $\alpha=\frac{\pi}{12}$; 5) $\alpha=\frac{11\pi}{12}$; 6) $\alpha=-\frac{7\pi}{12}$.

Упростите выражение **(2.139—2.141).**

2.139. 1) $\sin 69°\cos 39°-\cos 69°\sin 39°$;

2) $\cos 47°\cos 17°+\sin 47°\sin 17°$;

3) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}$;

4) $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$;

5) $\frac{\operatorname{tg}16°+\operatorname{tg}44°}{1-\operatorname{tg}16°\operatorname{tg}44°}$; 6) $\frac{\operatorname{tg}71°-\operatorname{tg}26°}{1+\operatorname{tg}71°\operatorname{tg}26°}$;

7) $\frac{\operatorname{tg}\frac{9\pi}{28}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{14}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{14}\operatorname{tg}\frac{9\pi}{28}}$; 8) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}}$.

2.140. 1) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

2) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

2.141. 1) $\sin 18^\circ \cos 12^\circ + \cos 18^\circ \sin 12^\circ + \sin 34^\circ \cos 4^\circ -$
$- \cos 34^\circ \sin 4^\circ$;

2) $\sin 39^\circ \cos 21^\circ + \cos 39^\circ \sin 21^\circ + \sin 78^\circ \cos 18^\circ -$
$- \cos 78^\circ \sin 18^\circ$;

3) $\cos 70^\circ \cos 25^\circ + \sin 70^\circ \sin 25^\circ + \cos 12^\circ \cos 33^\circ -$
$- \sin 33^\circ \sin 12^\circ$;

4) $\cos 26^\circ \cos 34^\circ - \sin 26^\circ \sin 34^\circ + \cos 83^\circ \cos 23^\circ +$
$+ \sin 83^\circ \sin 23^\circ$.

2.142. Докажите тождество:

1) $\cos\alpha \cos\beta(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = \sin(\alpha - \beta)$;

2) $\sin\alpha \sin\beta(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = \sin(\alpha + \beta)$;

3) $\sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha - \cos^2 2\alpha \sin^2 \alpha = \sin 3\alpha \sin\alpha$;

4) $\cos^2 3\alpha \cos^2 2\alpha - \sin^2 3\alpha \sin^2 2\alpha = \cos 5\alpha \cos\alpha$;

5) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$; 6) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$.

2.143*. Найдите значение выражения:

1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{4} + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

2) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5} - \arccos\frac{5}{13}\right)$;

3) $\sin\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin\frac{12}{13}\right)$;

4) $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$;

5) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} - \operatorname{arcctg}\left(-\frac{12}{5}\right)\right)$;

6) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) + \arcsin\frac{3}{5}\right)$.

2.144*. Решите уравнение:

1) $\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = 0$;

2) $\cos 8x \cos 3x + \sin 8x \sin 3x = 0$.

2.145*. Докажите, что:

1) $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos(\alpha - \beta) < \cos\alpha + \sin\beta$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

2.12. Формулы двойного и половинного углов

Теорема 1. Имеют место тождества:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (4)$$

Доказательство. Из формулы сложения для синуса $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ при $\beta = \alpha$ получим $\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$ и после приведения подобных слагаемых имеем тождество (1):

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha.$$

Тождество (2) доказывается аналогично.

Тождества (3) и (4) получаются при $\beta = \alpha$ соответственно из формул

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \text{ и } \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}. \ \boxtimes$$

Тождества (1)—(4) называют ***формулами двойного угла***.

Пример 1. Найти значение выражения $\operatorname{tg} 2p$, если $\operatorname{tg} p = 0{,}7$.

Решение. $\operatorname{tg} 2p = \dfrac{2\operatorname{tg} p}{1-\operatorname{tg}^2 p} = \dfrac{2\cdot 0{,}7}{1-0{,}49} = \dfrac{1{,}4}{0{,}51} = \dfrac{140}{51} = 2\dfrac{38}{51}$.

Ответ: $\operatorname{tg} 2p = 2\dfrac{38}{51}$.

Пример 2. Доказать тождество:

а) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$; (5)

б) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$. (6)

Доказательство. а) Рассмотрим два тождества:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (7)$$

и

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (8)$$

Сложив левые части равенств (7) и (8) и сложив их правые части, получим тождество (5):

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}. \ \boxtimes$$

(Из этого тождества следует: $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, что дает еще один способ вычисления косинуса двойного угла.)

б) Если из левой части тождества (7) вычесть левую часть тождества (8) и из правой части тождества (7) вычесть правую часть тождества (8), то получится тождество (6):

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \ \boxtimes$$

(Из этого тождества следует: $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, что дает еще один способ вычисления косинуса двойного угла.)

Теорема 2. Имеют место тождества:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}, \qquad (9)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}, \qquad (10)$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}, \qquad (11)$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}. \qquad (12)$$

Доказательство. Формулы (9), (10) следуют из тождеств (5) и (6). Формулы (11), (12) получают, используя определения тангенса (котангенса) и формулы (9), (10). ☒

Тождества (9)—(12) называют ***формулами половинного угла***.

Пример 3. Найти наименьшее и наибольшее значения выражения A, если:

а) $A = 16\cos^4 3\alpha + 16\sin^4 3\alpha$;

б)* $A = 16\cos^6 3\alpha - 16\sin^6 3\alpha$.

Решение. а) $A = 16((\cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha)^2 - 2\cos^2 3\alpha \sin^2 3\alpha) =$

применив основное тригонометрическое тождество и формулу (1), получим

$$= 16\left(1^2 - \frac{1}{2}\sin^2 6\alpha\right) = 16 - 8\sin^2 6\alpha.$$

Поскольку 0 является наименьшим значением выражения $\sin^2 6\alpha$, а 1 — наибольшим, то при $\sin^2 6\alpha = 0$ имеем наибольшее значение $A = 16$, а при $\sin^2 6\alpha = 1$ — наименьшее значение $A = 8$.

б) $A = 16(\cos^2 3\alpha)^3 - 16(\sin^2 3\alpha)^3 =$

$\downarrow$ применив формулы (9) и (10), получим $\downarrow$

$$= 16\left(\frac{1+\cos 6\alpha}{2}\right)^3 - 16\left(\frac{1-\cos 6\alpha}{2}\right)^3 = 2((1 + \cos 6\alpha)^3 - (1 - \cos 6\alpha)^3) =$$

$$= 2(1 + 3\cos 6\alpha + 3\cos^2 6\alpha + \cos^3 6\alpha - 1 + 3\cos 6\alpha - 3\cos^2 6\alpha +$$
$$+ \cos^3 6\alpha) = 2(6\cos 6\alpha + 2\cos^3 6\alpha) = 12\cos 6\alpha + 4\cos^3 6\alpha.$$

Пусть $\cos 6\alpha = t$, тогда $t \in [-1;\ 1]$. Рассмотрим функцию $f(t) = 12t + 4t^3$, где $t \in [-1;\ 1]$.

Найдем наименьшее и наибольшее значения этой функции на отрезке $[-1;\ 1]$. Поскольку значения ее производной $f'(t) = 12 + 12t^2$ положительны при всех $t \in [-1;\ 1]$, то функция $f(t)$ возрастает на этом отрезке.

Таким образом,

$f(-1) = -12 + 4(-1) = -16$ — наименьшее значение функции,

$f(1) = 12 + 4 = 16$ — наибольшее значение функции.

Ответ: а) 8 и 16; б) -16 и 16.

Пример 4*. Найти значение выражения

$$A = \sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos(-0{,}2)\right).$$

Решение. Пусть $\arccos(-0{,}2) = \alpha$, тогда $\cos\alpha = -0{,}2$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Значит, по формуле (10) имеем:

$$A = \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1+0{,}2}{2} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $A = \frac{3}{5}$.

Арабский астроном и математик из Хорасана Абу-ль-Вефа (940—998) составил таблицы синусов, вычисленных через каждые $10'$ с точностью до $\frac{1}{60^4}$, а также таблицы тангенсов. Ученый сформулировал теоремы, соответствующие формулам

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

?

1. Запишите и докажите формулу синуса (косинуса, тангенса, котангенса) двойного угла.
2. Запишите и докажите формулу синуса (косинуса, тангенса, котангенса) половинного угла.
3. При каких значениях α имеют смысл обе части:
   а) равенства (3); б) равенства (4);
   в) равенства (11); г) равенства (12)?

Упражнения

2.146°. Преобразуйте каждое из выражений, используя формулу двойного угла:

1) $\sin 3\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg} 5\alpha$; 2) $\sin\alpha$, $\cos 5\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$;
3) $\sin 6\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\operatorname{tg} 8\alpha$; 4) $\sin 4\alpha$, $\cos 8\alpha$, $\operatorname{ctg} 6\alpha$;
5) $\sin\frac{\alpha}{3}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{4}$; 6) $\sin\frac{3\alpha}{4}$, $\cos\frac{\alpha}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

2.147°. Преобразуйте выражение, используя формулу двойного угла:

1) $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\sin\left(3\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$; 3) $\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{8}\right)$;
4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{5\pi}{8}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{7}\right)$; 6) $\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\pi}{5}\right)$.

2.148°. Преобразуйте выражение, используя формулу половинного угла:

1) $\sin^2 4\alpha$; 2) $\cos^2 6\alpha$;
3) $\operatorname{tg}^2 5\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^2 8\alpha$;
5) $\sin^2\left(5\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$; 6) $\cos^2\left(7\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)$;
7) $\operatorname{tg}^2\left(6\alpha+\frac{5\pi}{4}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}^2\left(5\alpha+\frac{7\pi}{4}\right)$.

2.149°. Найдите значение выражения:

1) $1-2\sin^2 15°$; 2) $2\cos^2\frac{\pi}{12}-1$;
3) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; 4) $\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}$;
5) $6\sin 75°\cos 75°$; 6) $4\sin^2 75°$;
7) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}$; 8) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$.

Упростите выражение **(2.150—2.153).**

2.150°. 1) $\cos^4 20° - \sin^4 20°$; 2) $\cos^4 10° - \sin^4 10°$;

3) $2\sin 50° \sin 40°$; 4) $\cos^2 50° - \cos^2 40°$;

5) $\frac{6\,\mathrm{tg}\,40°}{1-\mathrm{ctg}^2 50°}$; 6) $\frac{10\,\mathrm{tg}\,65°}{1-\mathrm{tg}^2 115°}$.

2.151. 1) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$; 2) $\cos 4\alpha - \cos^2 2\alpha$;

3) $\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$; 4) $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$;

5) $8\cos 4\alpha \cos 2\alpha \cos\alpha \sin\alpha$;

6) $16\cos 8\alpha \cos 4\alpha \cos 2\alpha \sin 2\alpha$;

7) $(\cos^3\alpha + \sin^3\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$;

8) $(\cos^3\alpha - \sin^3\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)$;

9) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \frac{1}{4}\cos 4\alpha$;

10) $\sin^4 2\alpha + \cos^4 2\alpha - 0{,}25\cos 8\alpha$.

2.152*. 1) $1 - 8\sin^2\frac{17\pi}{16}\cos^2\frac{15\pi}{16}$; 2) $8\sin^2\frac{23\pi}{24}\cos^2\frac{25\pi}{24} - 1$;

3) $\sin^4\frac{23\pi}{24} + \cos^4\frac{25\pi}{24}$; 4) $\sin^4\frac{17\pi}{16} + \cos^4\frac{15\pi}{16}$;

5) $\sin^6\frac{13\pi}{12} + \cos^6\frac{23\pi}{12}$; 6) $\cos^6\frac{17\pi}{8} - \sin^6\frac{31\pi}{8}$.

2.153. 1) $\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}}$; 2) $\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{4}}{2}}$;

3) $\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$; 4) $\sqrt{\frac{1+\cos 6\alpha}{1-\cos 6\alpha}}$.

2.154°. Найдите значение выражения:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$;
3) $\mathrm{tg}\,2\alpha$; 4) $\mathrm{ctg}\,2\alpha$,

если известно, что:

а) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

в) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; г) $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2.155. Найдите значение выражения:

1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha$,

если известно, что:

а) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{12}{13}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

б) $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$ и $3\pi<\alpha<4\pi$.

2.156. Найдите значение выражения:

1) $\sin 4\alpha$; 2) $\cos 4\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 4\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 4\alpha$,

если известно, что:

а) $\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$ и $-\frac{\pi}{4}<\alpha<-\frac{\pi}{8}$;

б) $\cos 2\alpha=-\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{8}$.

2.157. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, найдите значение выражения:

1) $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)$; 2) $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)$.

2.158. Найдите значение выражения:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$,

если известно, что:

а) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{7}{24}$ и $\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi$;

б) $\cos 2\alpha=-\frac{1}{3}$ и $\pi<2\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

2.159. Найдите значение выражения:

1) $\sin^2 4\alpha$; 2) $\cos^2 4\alpha$; 3) $\operatorname{tg}^2 4\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^2 4\alpha$,

если известно, что:

а) $\cos 2\alpha=\frac{1}{5}$; б) $\cos 2\alpha=-\frac{1}{5}$.

2.160. Докажите тождество:

1) $4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha=\cos^2 2\alpha-1$;

2) $8\cos^4\alpha=3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha$;

3) $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\sin 2\alpha-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}=\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}{1+\cos 2\alpha-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}=\operatorname{tg}\alpha.$

2.161. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha$;
2) $\sin 2\alpha-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$;
3) $1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
4) $4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1$;
5) $1-2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)$;
6) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\alpha}{2}\right)-1$.

Найдите значение выражения **(2.162—2.163)**.

2.162*. 1) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{5}\right)$;
2) $\cos\left(2\arccos\frac{1}{3}\right)$;
3) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)$;
4) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$;
5) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$;
6) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{5}{4}\right)$.

2.163*. 1) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-2\arcsin\frac{1}{4}\right)$;
2) $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{3}+\arccos\frac{3}{4}\right)$.

2.13. Преобразование произведения в сумму (разность). Преобразование суммы (разности) в произведение

Теорема 1. Имеют место тождества:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)), \qquad (1)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)), \qquad (2)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)). \qquad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим формулы сложения для синуса:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \qquad (4)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (5)$$

Сложив левые части тождеств (4) и (5) и сложив их правые части, получим тождество $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$, откуда и следует тождество (1).

Аналогично из формул сложения для косинуса

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad (6)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (7)$$

получим:

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда и следуют тождества (3) и (2). ☒

Теорема 2. Имеют место тождества:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad (8)$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}, \qquad (9)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}, \qquad (10)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}. \qquad (11)$$

Доказательство. Из формул сложения для синуса и косинуса (4), (5), (6) и (7), складывая или вычитая соответственно их части, получаем тождества:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta, \qquad (12)$$
$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta, \qquad (13)$$
$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta, \qquad (14)$$
$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta. \qquad (15)$$

Обозначим теперь $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$. Объединим полученные уравнения в систему и решим ее относительно α и β:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x,\\ \alpha-\beta=y;\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha+\beta=x,\\ 2\alpha=x+y;\end{cases} \quad \begin{cases}\beta=x-\alpha,\\ \alpha=\dfrac{x+y}{2};\end{cases} \quad \begin{cases}\beta=\dfrac{x-y}{2},\\ \alpha=\dfrac{x+y}{2}.\end{cases}$$

Подставив эти значения в тождества (12), (13), (14) и (15), получим соответственно тождества (8), (9), (10) и (11) (убедитесь в этом). ☒

Теорема 3. Имеют место тождества:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \qquad (16)$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (17)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть формулы (16):

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Тождество (17) доказывается аналогично. ☒

Пример 1. Доказать тождество:

а) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Доказательство. а) Преобразуем левую часть равенства:

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$$

$\downarrow$ по формуле (8) получим $\downarrow$

$$= 2\sin\frac{x + \frac{\pi}{2} + x}{2}\cos\frac{x - \frac{\pi}{2} - x}{2} =$$

$$= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \ ☒$$

б) Доказывается аналогично.

Пример 2. Преобразовать сумму $1 + \sin x$ в произведение:

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$; б) $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2$;

в) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Решение. а) $1 + \sin x = \sin\frac{\pi}{2} + \sin x =$

$\downarrow$ по формуле (8) получим $\downarrow$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

б) $1 + \sin x = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2$.

в) $1 + \sin x = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Пример 3. Доказать, что $\sin 20^\circ + \cos 50^\circ = \cos 10^\circ$.

Доказательство. *Способ 1* (с применением формулы (8)).

$$\sin 20^\circ + \cos 50^\circ = \sin 20^\circ + \sin 40^\circ =$$
$$= 2\sin 30^\circ \cos(-10^\circ) = \cos 10^\circ. \boxtimes$$

Способ 2. Доказательство с применением формулы (10) проведите самостоятельно.

▲ **Пример 4.** Решить уравнение

$$2\sin 7x \cos 3x - \sin 10x = 0.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$2\sin 7x \cos 3x - \sin 10x = 2 \cdot \frac{1}{2}(\sin 10x + \sin 4x) - \sin 10x =$$
$$= \sin 10x + \sin 4x - \sin 10x = \sin 4x.$$

Итак, данное уравнение равносильно уравнению

$$\sin 4x = 0.$$

Значит, $4x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, откуда $x = \frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

?

1. Запишите формулы сложения для синусов (косинусов).
2. Запишите формулы преобразования произведений $\sin\alpha \cos\beta$, $\cos\alpha \cos\beta$, $\sin\alpha \sin\beta$ в сумму или разность.
3. Запишите формулы преобразования сумм и разностей $\sin x \pm \sin y$, $\cos x \pm \cos y$ в произведения.
4. Докажите тождества (1), (2), (3).
5. Докажите тождества (8), (9), (10), (11).
6. Докажите тождества (16), (17).

Упражнения

Представьте в виде суммы выражение **(2.164—2.166)**.

2.164°. 1) $\sin 5^\circ \cos 85^\circ$; 2) $\sin 50^\circ \cos 20^\circ$;
3) $\sin 35^\circ \sin(-25^\circ)$; 4) $\sin(-35^\circ) \sin 65^\circ$;
5) $2\cos(-10^\circ) \cos 80^\circ$; 6) $2\cos 22^\circ \cos(-23^\circ)$.

2.165°. 1) $\sin(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta)$; 2) $\cos(\alpha+3\beta)\sin(\alpha-3\beta)$;
3) $\cos(\alpha-2\beta)\cos(\alpha+2\beta)$;
4) $2\sin(2\alpha-3\beta)\sin(2\alpha+3\beta)$.

2.166°. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{12}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}+\alpha\right)$;

5) $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$; 6) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

2.167. Докажите тождество:

1) $4\sin\alpha\sin(60°-\alpha)\sin(60°+\alpha)=\sin3\alpha$;

2) $4\cos\alpha\cos(60°-\alpha)\cos(60°+\alpha)=\cos3\alpha$;

3) $\sin^2\alpha+\cos(60°+\alpha)\cos(60°-\alpha)=\frac{1}{4}$;

4) $\sin(60°+\alpha)\sin(60°-\alpha)+\sin^2\alpha=\frac{3}{4}$.

Представьте в виде произведения выражение **(2.168—2.170)**.

2.168°. 1) $\cos(-9°)-\cos51°$; 2) $\cos9°+\cos(-51°)$;

3) $\sin55°+\sin(-65°)$; 4) $\sin(-55°)-\sin65°$;

5) $\cos315°+\cos225°$; 6) $\cos348°-\cos288°$;

7) $\sin275°-\sin185°$; 8) $\sin395°+\sin455°$.

2.169°. 1) $\sin\frac{7\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{9}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{18}+\sin\frac{\pi}{9}$;

3) $\cos\frac{7\pi}{18}+\cos\frac{\pi}{9}$; 4) $\cos\frac{7\pi}{18}-\cos\frac{\pi}{9}$;

5) $\sin2\alpha+\sin8\alpha$; 6) $\sin5\alpha-\sin3\alpha$;

7) $\cos\alpha-\cos5\alpha$; 8) $\cos\alpha+\cos3\alpha$.

2.170. 1) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{16}\right)-\cos\left(\frac{9\pi}{16}-3\alpha\right)$;

3) $\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$;

4) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$;

5) $\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{9}\right)-\cos\left(\frac{11\pi}{18}-4\alpha\right)$;

6) $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{10}\right)-\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{5}\right)$.

2.171. Представьте в виде частного выражение:

1) $\operatorname{tg}7\alpha+\operatorname{tg}9\alpha$; 2) $\operatorname{tg}13\alpha-\operatorname{tg}9\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)$.

2.172. Найдите значение выражения:

1) $\frac{\sin 35° + \sin 85°}{\cos 25°}$; 2) $\frac{\cos 24° - \cos 84°}{\sin 54°}$;

3) $\frac{\cos 89° + \cos 1°}{\sin 89° + \sin 1°}$; 4) $\frac{\sin 15° - \sin 75°}{\cos 15° + \cos 75°}$;

5) $\frac{\sin 37° - \sin 53°}{1 - 2\cos^2 41°}$; 6) $\frac{\cos 50° - \cos 70°}{1 - 2\sin^2 40°}$.

Представьте в виде произведения или частного выражение **(2.173—2.179).**

2.173. 1) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$;
2) $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha$;
3) $\sin 4\alpha + \sin 10\alpha + \sin 22\alpha + \sin 16\alpha$;
4) $\cos 2\alpha + \cos 14\alpha + \cos 6\alpha + \cos 10\alpha$.

2.174. 1) $\sin 4\alpha - 1$; 2) $1 + \sin 4\alpha$; 3) $\sin 6\alpha + \frac{1}{2}$;
4) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2\alpha$; 5) $\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\cos\alpha + \frac{1}{2}$;
7) $\operatorname{tg} 3\alpha + 1$; 8) $1 - \operatorname{tg} 5\alpha$.

2.175. 1) $1 + 2\sin\alpha$; 2) $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$; 3) $\sqrt{2}\cos\alpha - 1$;
4) $2\cos\alpha - \sqrt{3}$; 5) $3\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{3}$; 6) $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha$.

2.176. 1) $\frac{3}{4} - \sin^2\alpha$; 2) $0,75 - \cos^2\alpha$;
3) $\sin^2\alpha - 0,25$; 4) $\cos^2\alpha - 0,25$;
5) $3 - \operatorname{tg}^2\alpha$; 6) $\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{3}$.

2.177. 1) $1 - 2\sin^2 22°$; 2) $1 - 2\cos^2 38°$; 3) $2\cos^2 18° - 1$;
4) $2\sin^2 48° - 1$; 5) $3\operatorname{tg}^2 12° - 1$; 6) $\operatorname{tg}^2 14° - 3$.

2.178. 1) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $1 - \sin\alpha + \cos\alpha$;
3) $\cos\alpha + \sin\alpha - 1$; 4) $1 - \sin\alpha - \cos\alpha$;
5) $1 + \cos\alpha + \sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha$; 6) $1 - \sin\alpha + \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$.

2.179*. 1) $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
2) $\sqrt{\operatorname{tg} 2\alpha + \sin 2\alpha} - \sqrt{\operatorname{tg} 2\alpha - \sin 2\alpha}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

2.180. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$;

2) $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$;

3) $\dfrac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cos7\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha$;

4) $\dfrac{\cos\alpha+\cos5\alpha+\cos9\alpha+\cos13\alpha}{\sin\alpha+\sin5\alpha+\sin9\alpha+\sin13\alpha}=\operatorname{ctg}7\alpha$.

2.181. Решите уравнение:

1) $2\sin4x\sin6x+\cos10x=0$;
2) $2\sin8x\sin3x-\cos5x=0$;
3) $2\cos4x\cos6x-\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=0$;
4) $2\sin5x\cos7x+\sin(\pi-2x)=0$;
5) $\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}4x=0$;
6) $\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}4x=0$.

▲ 2.14. Выражение синуса, косинуса и тангенса угла через тангенс половинного угла

В этом пункте, используя формулы двойного угла и основное тригонометрическое тождество, мы получим ряд формул, которые позволяют $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ выражать через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, т. е. через тангенс половинного угла.

Теорема. Имеют место тождества:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad (1)$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (3)$$

Эти тождества (формулы) принято называть ***универсальными подстановками***. Докажем их.

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства (1):

$$\sin\alpha = \frac{\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$\downarrow$ разделив числитель и знаменатель второй дроби на $\cos^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$, получим $\downarrow$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Тождество (2) доказывается аналогично.

Тождество (3) — это уже известная нам формула тангенса двойного угла (см. п. 2.12). ☒

Напомним, что в каждом из тождеств (1), (2), (3) рассматриваются те значения α, при которых имеют смысл обе их части. Например, в тождестве (3) это $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$ и $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример. Зная, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$, найти значение выражения

$$A = 25\sin 2\alpha - \cos 2\alpha.$$

Решение. Используя формулы (1) и (2), преобразуем выражение A:

$$A = 25\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{50\operatorname{tg}\alpha - 1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Выразим $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ по формуле (3) и найдем его значение:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{1-4} = -\frac{4}{3}.$$

Подставив $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$ в выражение A, получим:

$$A = \frac{50\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)-1+\frac{16}{9}}{1+\frac{16}{9}} = -23\frac{18}{25}.$$

Ответ: $A = -23\frac{18}{25}$.

?

1. Какие формулы принято называть универсальными подстановками?
2. Докажите тождества (1), (2) и (3).
3. При каких значениях x имеют смысл обе части:
   а) равенства (1); б) равенства (2); в) равенства (3)?
4. Как выразить $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$?

Упражнения

2.182. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-2$;

3) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=4$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=-5$.

2.183. Зная, что $\operatorname{ctg}\alpha = 3$, найдите значение выражения:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha+3}{2\sin 2\alpha-1}$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha-4}{3\cos 2\alpha+1}$.

2.184. Зная, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$, найдите значение выражения:

1) $\dfrac{5-4\cos\alpha}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}$; 2) $\dfrac{5-2\sin\alpha}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+4\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}$.

Преобразуйте выражение, используя универсальные подстановки **(2.185—2.186).**

2.185. 1) $\sin\alpha-2\cos\alpha$; 2) $5\sin\alpha-\cos\alpha$;
3) $5\sin\alpha+12\cos\alpha$; 4) $3\sin\alpha+5\cos\alpha$.

2.186. 1) $\dfrac{3-4\sin\alpha}{5-8\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{5-7\cos\alpha}{4-7\sin\alpha}$;

3) $\dfrac{1-4\sin^2\alpha}{1-4\cos^2\alpha}$; 4) $\dfrac{3-4\sin^2\alpha}{3-4\cos^2\alpha}$.

2.187. Выразите через $\operatorname{tg}2\alpha$ выражение A, если:

1) $A=\dfrac{\cos 4\alpha+\operatorname{ctg}4\alpha}{\operatorname{ctg}4\alpha}-1$; 2) $A=1-\dfrac{\sin 4\alpha+\operatorname{tg}4\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha}$;

3) $A=\dfrac{1+\operatorname{tg}4\alpha}{1+\operatorname{ctg}4\alpha}$; 4) $A=\dfrac{\operatorname{ctg}4\alpha+1}{\operatorname{tg}4\alpha+1}$.

2.188. Докажите тождество:

1) $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}^2(-\alpha)-1}{2\operatorname{tg}(-\alpha)}$.

2.189. Найдите значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=-1$.

2.190. Найдите значение выражения A, если:

1) $A = \sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$;

2)* $A = \sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-1$;

3) $A = a\sin 2\alpha+b\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$;

4) $A = m\sin\alpha-n\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{m}{n}$.

2.191*. Выразите через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ при $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$ выражение:

1) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$; 2) $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$;

3) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$; 4) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

▲ 2.15. Преобразование некоторых тригонометрических выражений

Рассмотрим на конкретных примерах еще несколько приемов преобразования тригонометрических выражений.

1. Преобразование выражения $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ с использованием вспомогательного угла

Пусть $a^2 + b^2 \neq 0$. Тогда

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha =$$

вынесем за скобки множитель $\sqrt{a^2+b^2}$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right) =$$

заметим, что при любых значениях a и b верно равенство $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$,
значит, существует такой угол φ, что $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и
$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (см. замечание п. 2.4)

$$= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi \sin\alpha + \sin\varphi \cos\alpha) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \sin(\alpha + \varphi).$$

Таким образом, имеем тождество

$$a \sin\alpha + b \cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2} \sin(\alpha + \varphi), \qquad (1)$$

где угол φ определяется из равенств

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ т. е. } \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $\sqrt{3} \sin\alpha - \cos\alpha$.

Решение. Используя тождество (1), вынесем в данном выражении за скобки число $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$:

$$\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha - \sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha\right) = 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

Поскольку наибольшим значением выражения $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ является число 1, а наименьшим — число –1, то наибольшим и наименьшим значениями выражения $2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$, а значит, и данного в условии выражения будут соответственно числа 2 и –2.

Ответ: 2; –2.

2. Преобразование выражения вида

$\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^n\alpha)$, *где* $n \in N$

Пример 2. Найти значение выражения

$$A = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}.$$

Решение. Умножив выражение A на $2^3\sin\frac{\pi}{7}$ (показатель степени числа 2 равен 3 — числу множителей в выражении A, а значение синуса взято при самом малом угле — $\frac{\pi}{7}$), получим:

$$2^3 \sin\frac{\pi}{7} \cdot A = 2^3 \sin\frac{\pi}{7} \cos\frac{\pi}{7} \cos\frac{2\pi}{7} \cos\frac{4\pi}{7} =$$

$$\Big\downarrow \text{ используя несколько раз формулу синуса двойного угла, получаем } \Big\downarrow$$

$$= 2^2 \sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = 2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{8\pi}{7} =$$

$$= \sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right) = -\sin\frac{\pi}{7}.$$

Таким образом, $2^3\sin\frac{\pi}{7}\cdot A = -\sin\frac{\pi}{7}$, откуда находим $A = -\frac{1}{8}$.

Ответ: $A = -\frac{1}{8}$.

Заметим, что для преобразования произведения трех множителей пришлось трижды применить формулу синуса двойного угла. Аналогичными рассуждениями можно в общем виде преобразовать произведение $n + 1$ множителей ($n \in N$):

$$\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos(2^n\alpha) =$$

$$\Big\downarrow \text{ умножив и разделив данное выражение на } 2^{n+1}\sin\alpha \neq 0\text{, получим тождественное ему выражение } \Big\downarrow$$

$$= \frac{2^{n+1}\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha\cdot\ldots\cdot\cos(2^n\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha} =$$

$$\Big\downarrow \text{ применив } n+1 \text{ раз формулу синуса двойного угла, получим } \Big\downarrow$$

$$= \frac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

Пример 3. Доказать, что верно равенство

$$\sin18^\circ\sin54^\circ = \frac{1}{4}.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства:

$$\sin18^\circ\sin54^\circ = \sin18^\circ\cos36^\circ =$$

$$= \frac{2^2\cos18^\circ\sin18^\circ\cos36^\circ}{2^2\cos18^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin36^\circ\cos36^\circ}{4\cos18^\circ} = \frac{\sin72^\circ}{4\cos18^\circ} = \frac{\cos18^\circ}{4\cos18^\circ} = \frac{1}{4}. \quad \boxtimes$$

3. Преобразование выражений с использованием формул двойного и половинного угла

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $A = \sin^4x + \cos^4x$.

Решение. *Способ 1.* $A = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 =$

применяя формулы половинного угла, получаем

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) =$$

$$= \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2}.$$

Так как наибольшим и наименьшим значениями выражения $\cos^2 2x$ являются числа 1 и 0, то соответственно наибольшим и наименьшим значениями выражения A являются числа $\frac{1+1}{2} = 1$ и $\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 1 и 0,5.

Способ 2. Покажем способ преобразования выражения A, основанный на использовании тождества $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$:

$$A = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Для этого выражения также легко найти наибольшее и наименьшее значения: $A = 1$, если $\sin^2 2x = 0$, и $A = 0{,}5$, если $\sin^2 2x = 1$.

Пример 5*. Найти значение выражения $A = \sin^6 x + \cos^6 x$, зная, что $\cos 4x = \frac{1}{3}$.

Решение. $A = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 =$

по формуле $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ получим

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) =$$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x =$$

так как $\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}$, то по условию имеем

$$= 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x)\Big|_{\cos 4x = \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $A = \frac{3}{4}$.

4. Преобразование выражений вида

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha \text{ и}$$

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha, \text{ где } n \in N$$

Пример 6. Доказать, что верно равенство

$$\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{14}. \qquad (2)$$

Решение. Обозначим левую часть равенства (2) буквой A. Умножив выражение A на $2\sin\frac{\pi}{14}$, получим:

$$2\sin\frac{\pi}{14} \cdot A = 2\sin\frac{\pi}{14}\left(\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{7} =$$

$\downarrow$ по формуле $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$ получим $\downarrow$

$$= \cos\frac{\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{3\pi}{14} - \cos\frac{5\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14} - \cos\frac{7\pi}{14} =$$

$$= \cos\frac{\pi}{14} - \cos\frac{7\pi}{14} = \cos\frac{\pi}{14} - \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{14} - 0 = \cos\frac{\pi}{14}.$$

Значит, $2\sin\frac{\pi}{14} \cdot A = \cos\frac{\pi}{14}$, откуда находим $A = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{14}$. Таким образом, с учетом обозначения равенство (2) верно. ☒

1. Преобразуйте выражение вида $a\sin x + b\cos x$ с помощью введения вспомогательного угла.
2. Каким приемом можно преобразовать выражения вида $\cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha$?
3. Преобразуйте, используя формулы половинного угла, выражения вида $\sin^{2n} x$, $\cos^{2n} x$, $\operatorname{tg}^{2n} x$ при:

   а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 3$; г) $n = -2$.
4. Преобразуйте выражение

   $$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha,$$

   умножив и разделив его на $2\sin\frac{\alpha}{2}$.
5. Преобразуйте выражение

   $$\sin 3\alpha + \sin 6\alpha + \sin 9\alpha + \sin 12\alpha + \sin 15\alpha,$$

   умножив и разделив его на $2\sin\frac{3\alpha}{2}$.

Упражнения

2.192°. Преобразуйте выражение A, используя введение вспомогательного угла:

1) $A = \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$;

2) $A = \sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha$;

3) $A = \sqrt{2}\cos 5\alpha + \sqrt{2}\sin 5\alpha$;

4) $A = 2\cos 4\alpha - \sqrt{2}\sin 4\alpha$;

5) $A = 3\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2} + 3\cos\frac{\alpha}{2}$;

6) $A = 2{,}5\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{3} - 2{,}5\cos\frac{\alpha}{3}$.

2.193. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения A из упражнения **2.192**.

2.194. Упростите выражение A:

1) $A = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}$;

2) $A = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$;

3) $A = \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$;

4) $A = 8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$;

5) $A = 8\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$;

6) $A = 8\sin 85^\circ \sin 80^\circ \sin 70^\circ \sin 30^\circ$;

7) $A = \sin^2 70^\circ \sin^2 50^\circ \sin^2 10^\circ$;

8) $A = \sin^2 18^\circ \sin^2 54^\circ \sin^2 72^\circ$.

2.195. Докажите тождество:

1) $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$;

2) $\cos^2\left(\frac{7\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{9\pi}{8} - 2\alpha\right) = -\frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}$;

3) $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = \frac{1}{8}(5 + 3\cos 4\alpha)$;

4) $\cos^8\alpha - \sin^8\alpha = \frac{1}{4}\cos 2\alpha(3 + \cos 4\alpha)$.

2.196. Упростите выражение A:

1) $A = \cos^2\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{11\pi}{8} + \frac{\alpha}{4}\right)$;

2) $A = \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17\pi}{8} - \alpha\right)$;

3) $A = \cos^4\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \sin^4\left(\frac{9\pi}{4} - 2\alpha\right)$;

4) $A = \cos^4\left(\frac{5\pi}{2} + 2\alpha\right) - \sin^4\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$.

2.197. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения A:

1) $A = 4\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha$;
2) $A = 2\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$;
3)* $A = 4\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;
4)* $A = \sin^4\alpha + 2\cos^4\alpha$.

Преобразуйте в произведение выражение A **(2.198—2.199)**.

2.198. 1) $A = \sin 10° + \sin 20° + \sin 30° + \sin 40° + \sin 50°$;

2) $A = \sin 12° + \sin 24° + \sin 36° + \sin 48° + \sin 60°$;

3) $A = \cos 20° + \cos 40° + \sin 10° + \cos 80° + \cos 100°$;

4) $A = \cos 6° + \cos 12° + \cos 18° + \cos 24° + \cos 30°$.

2.199. 1) $A = \sin\frac{\pi}{17} + \sin\frac{2\pi}{17} + \sin\frac{3\pi}{17}$;

2) $A = \sin\frac{\pi}{33} + \sin\frac{2\pi}{33} + \sin\frac{3\pi}{33}$;

3) $A = \cos\frac{2\pi}{31} + \cos\frac{4\pi}{31} + \cos\frac{6\pi}{31}$;

4) $A = \cos\frac{\pi}{25} + \cos\frac{2\pi}{25} + \cos\frac{3\pi}{25}$;

5) $A = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11}$;

6) $A = \cos\frac{3\pi}{19} + \cos\frac{5\pi}{19} + \cos\frac{7\pi}{19}$.

Глава 3
Тригонометрические функции

3.1. Тригонометрические функции. Периодичность

Пусть x — действительное число. Рассмотрим угол, радианной мерой которого является число x. Для этого угла определено число $\sin x$.

Таким образом, каждому действительному числу x ставится в соответствие одно определенное число $\sin x$, т. е. на множестве $\boldsymbol{R}$ действительных чисел определяется функция

$$y = \sin x.$$

Аналогично определяется функция $y = \cos x$.

Пусть теперь действительное число $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Рассмотрим угол, радианной мерой которого является число x. Для такого угла определено число $\operatorname{tg} x$.

Таким образом, каждому действительному числу, не равному $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, ставится в соответствие одно определенное число $\operatorname{tg} x$. Тем самым на множестве действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, определяется функция

$$y = \operatorname{tg} x.$$

Аналогично на множестве действительных чисел $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, определяется функция $y = \operatorname{ctg} x$.

Функции синус, косинус, тангенс и котангенс называются ***тригонометрическими***. Их характерным свойством является периодичность.

Определение. **Пусть $T \neq 0$. Функция f называется *периодической с периодом T*, если для любого значения x из области определения функции числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и при этом верно равенство**

$$f(x + T) = f(x).$$

Для периодической функции f верно и равенство
$$f(x - T) = f(x).$$

Действительно, если $x \in D(f)$, то $(x - T) \in D(f)$ и
$$f(x) = f((x - T) + T) = f(x - T).$$

Поскольку при $T = 2\pi$ тригонометрические функции синус, косинус, тангенс и котангенс удовлетворяют всем условиям этого определения (убедитесь в этом), то все они являются периодическими с периодом 2π.

Пример 1. Верно ли, что периодом функции $y = \sin x$ является число:

а) 10π; б) π; в) 2?

Решение. а) Функция $y = \sin x$ периодическая с периодом 2π. Прибавляя к аргументу x этот период несколько раз (в частности, 5 раз), мы не меняем значения функции.

Поэтому
$$\sin(x + 10\pi) = \sin(x + 2\pi \cdot 5) = \sin x,$$
значит, число 10π является периодом функции $y = \sin x$.

б) Если число π — период функции $y = \sin x$, то при любых $x \in \boldsymbol{R}$ должно быть верным равенство $\sin x = \sin(x + \pi)$. А оно не верно, например, при $x = -\frac{\pi}{2}$, так как $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right)$. Значит, число π не является периодом функции $y = \sin x$.

в) Если число 2 — период функции $y = \sin x$, то при любых $x \in \boldsymbol{R}$ должно быть верным равенство $\sin(x + 2) = \sin x$. Но, например, при $x = 0$ получим $\sin 2 = \sin 0$ — неверное числовое равенство, значит, число 2 не является периодом этой функции.

Ответ: а) да; б) нет; в) нет.

Для некоторых тригонометрических функций можно указать и меньший, чем 2π, положительный период.

Пример 2. Доказать, что число π является периодом функции:

а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

Доказательство. а) Для любого значения $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, числа $x + \pi$ и $x - \pi$ также не равны $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ни при каких $k \in \boldsymbol{Z}$, т. е. принадлежат области определения тангенса.

Остается сослаться на соответствующую формулу приведения: $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}x$. Таким образом, число π является периодом функции $y=\operatorname{tg}x$. ☒

б) Доказывается аналогично.

Пример 3. Функция задана формулой $y=\sin x$ на множестве D. Верно ли, что эта функция периодическая с периодом 2π, если:

а) $D=[-2\pi;\ 10\pi]$; б) $D=\boldsymbol{Z}$?

Решение. а) Так как число $10\pi\in D$, а $(10\pi+2\pi)\notin D$, то 2π не является периодом данной функции.

б) Неверно, так как число $0\in D$, а число $(0+2\pi)\notin D$ $(D=\boldsymbol{Z})$. (Вместо нуля можно было бы взять любое целое число.)

Ответ: а) нет; б) нет.

! Любая функция с областью определения D в виде отрезка не может быть периодической с периодом $T\neq0$. Действительно, всегда найдется такое $x\in D$, что либо $(x+T)\notin D$, либо $(x-T)\notin D$.

Пример 4. Доказать, что число $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции $y=\cos4x$.

Доказательство. Областью определения данной функции является множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Поскольку $\cos4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(4x+2\pi)=\cos4x$, то равенство $\cos4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos4x$ верно при любом $x\in\boldsymbol{R}$. Итак, число $\frac{\pi}{2}$ — период функции $y=\cos4x$. ☒

Теорема. Справедливы следующие утверждения:

а) 2π — наименьший положительный период функции $y=\sin x$ и функции $y=\cos x$;

б) π — наименьший положительный период функции $y=\operatorname{tg}x$ и функции $y=\operatorname{ctg}x$.

Доказательство. а) Напомним, что 2π — положительный период функции $y=\sin x$. Допустим, существует $0<T\leqslant2\pi$ — положительный период функции $y=\sin x$, тогда при любом x имеет место тождество $\sin(x+T)=\sin x$. Подставив в него, например, значение $x=0$, получим $\sin T=0$. Значит, $T=\pi$ или $T=2\pi$. Но $\sin(x+\pi)=-\sin x$, поэтому π не является периодом

функции $y = \sin x$. Следовательно, $T = 2\pi$. Итак, 2π — наименьший положительный период функции $y = \sin x$.

Доказательство для функции $y = \cos x$ аналогичное. ☒

б) Напомним, что π — положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$. Допустим, существует $0 < T \leqslant \pi$ — положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$, тогда при любом x из области определения тангенса имеет место тождество $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$. Подставив в него, например, значение $x = 0$, получим $\operatorname{tg} T = 0$. Следовательно, $T = \pi$. Итак, π — наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$.

Доказательство для функции $y = \operatorname{ctg} x$ аналогичное. ☒

▲ **Пример 5.** Указать наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

Решение. Найдем область определения D функции $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$:

$$\frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \text{ т. е. } x \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пусть T — наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$. Тогда $T > 0$ — наименьшее положительное число, удовлетворяющее условию $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = \operatorname{tg}\frac{x+T}{3}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{T}{3}\right).$$

Поскольку π — наименьший положительный период функции тангенс (см. теорему), то $\frac{T}{3} = \pi$, т. е. $T = 3\pi$.

Остается заметить, что если $x \in D$, т. е. $x \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $x + 3\pi \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi(k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а это означает, что $(x + 3\pi) \in D$. Аналогично получаем, что если $x \in D$, то и $(x - 3\pi) \in D$.

Ответ: 3π. ▲

?

1. Поясните, почему формулой $y = \sin x$ ($y = \cos x$) на множестве $\boldsymbol{R}$ задается функция.
2. Поясните, почему формулой $y = \operatorname{tg} x$ на множестве всех действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, задается функция.
3. Поясните, почему формулой $y = \operatorname{ctg} x$ на множестве всех действительных чисел $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, задается функция.

4. Сформулируйте определение периодической функции с периодом $T \neq 0$.
5. Докажите, что функция синус (косинус) является периодической с периодом 2π.
6. Докажите, что функция тангенс (котангенс) является периодической с периодом π.
7. Докажите, что наименьшим положительным периодом функции синус (косинус) является 2π.
8. Докажите, что наименьшим положительным периодом функции тангенс (котангенс) является π.

Упражнения

3.1°. Какие из чисел 4, 5, 9, 13, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, π, 2π, 3π, 4π, 5π, 6π, 7π, 10π, 11π, 12π, 16π, 21π являются периодами функции:

1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x$;
3) $y = \operatorname{tg} x$; 4) $y = \operatorname{ctg} x$;
5) $y = \sin \frac{x}{3}$; 6) $y = \cos 2x$;
7) $y = \operatorname{ctg} 2x$; 8) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$?

3.2. Для каждой из функций 5)—8) упражнения **3.1** назовите наименьший положительный период.

3.3. Докажите, что функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, если:

1) $f(x) = 3\sin x$, $T = 2\pi$;
2) $f(x) = 6\cos x$, $T = 2\pi$;
3) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, $T = -\pi$;
4) $f(x) = 2\cos 4x$, $T = -\frac{\pi}{2}$.

3.4. Функция задана формулой $y = f(x)$ на множестве D. Верно ли, что эта функция периодическая, если:

1) $f(x) = \cos x$; 2) $f(x) = \sin x$;
3) $f(x) = \operatorname{tg} x$; 4) $f(x) = \operatorname{ctg} x$,

а D — один из промежутков:

а) $[-2\pi; \pi]$; б) $(-\infty; 0]$; в) $[-4\pi; 20\pi]$; г) $[0; +\infty)$; д) $[-3\pi; 5\pi]$; е) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; ж) $[-\pi; 2\pi]$?

3.5. Для функции f укажите T — ее наименьший положительный период, если:

1) $f(x) = -4\,\mathrm{ctg}\,x + 2$; 2) $f(x) = 6\,\mathrm{tg}\,x - 1$;

3) $f(x)=\frac{1}{4}\cos 3x-6$; 4) $f(x)=-2\sin 2x+3$;

5) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$; 6) $f(x)=8\cos 4x$;

7) $f(x)=\frac{3}{4}\cos\frac{x}{2}$; 8) $f(x)=\frac{5}{2}\sin\frac{x}{3}$;

9) $f(x)=\frac{1}{5}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{3}$; 10) $f(x)=10\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{6}$.

3.6. Для каждой функции из упражнения **3.5** докажите, что:

а) число -12π является ее периодом;

б) число 24π является ее периодом;

в) число $\frac{\pi}{7}$ не является ее периодом;

г) число $-\frac{\pi}{5}$ не является ее периодом.

Укажите область определения функции f и ее наименьший положительный период **(3.7—3.8)**.

3.7. 1) $f(x)=-\sin(-x)$; 2) $f(x)=-\cos(-x)$;

3) $f(x)=(-1)^{13}\,\mathrm{tg}(-x)$; 4) $f(x)=(-1)^{46}\,\mathrm{ctg}(-x)$;

5) $f(x)=\mathrm{ctg}\,x\,\sin x+\cos x$; 6) $f(x)=\sin x+\mathrm{tg}\,x\,\cos x$;

7) $f(x)=\dfrac{1-(\sin x+\cos x)^2}{\mathrm{ctg}\,x\,\sin x}$; 8) $f(x)=\dfrac{1-(1-\sin x)(1+\sin x)}{\mathrm{tg}\,x\,\cos x}$;

9)* $f(x)=4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin x-1$;

10)* $f(x)=-1+\cos x+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

3.8. 1) $f(x)=\sqrt{\sin^2(-x)}$; 2) $f(x)=\sqrt{\cos^2(-x)}$;

3) $f(x)=\sqrt{\mathrm{tg}^2(-x)}$; 4) $f(x)=\sqrt{\mathrm{ctg}^2(-x)}$;

5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}$; 6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 x}-1}$;

7) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$; 8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$;

9) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$; 10) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$.

▲ 3.2. Периодические функции

Пример 1. На рисунке 100 изображена часть графика периодической функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f) = \boldsymbol{R}$ и наименьшим положительным периодом T, где $0 < T < 6$. Чему равно значение функции $f(x)$ при x, равном:

а) T; б) $3 + 4T$; в) 29?

Решение. На рисунке 100 видно, что $T = 5$.

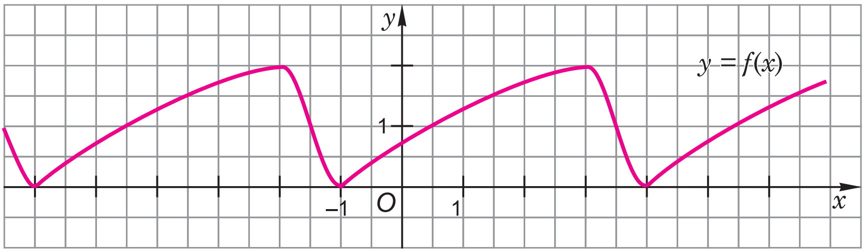


Рис. 100

По определению периодической функции для любого x из области определения функции верно равенство $f(x + T) = f(x)$. Используя это равенство и данные рисунка 100, найдем значения $f(x)$ для случаев а) — в).

а) $f(T) = f(0 + T) = f(0) = 0{,}75$ (см. рис. 100; здесь $x = 0$).

б) $f(3 + 4T) = f(3) = 2$ (см. рис. 100; здесь $x = 3$).

в) Поскольку $T = 5$, то, представляя 29 в виде $29 = -1 + 30 = -1 + 6T$, получаем $f(29) = f(-1 + 6T) = f(-1) = 0$ (см. рис. 100; здесь $x = -1$).

Ответ: а) 0,75; б) 2; в) 0.

Пример 2. На рисунке 101 изображена часть графика периодической функции f с областью определения $D(f) = \boldsymbol{R}$ и наименьшим положительным периодом $T = 4$. Изобразить график функции $y = f(x)$ на промежутке:

а) $[-1; 11]$; б) $[-9; 7]$.

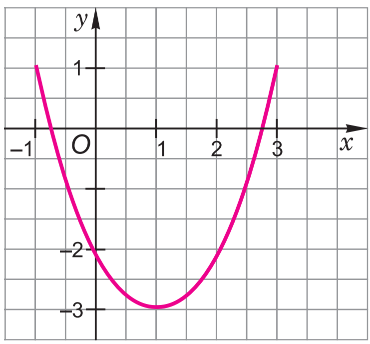


Рис. 101

Решение. а) Длина промежутка $[-1; 3]$ равна 4, т. е. наименьшему положительному перио-

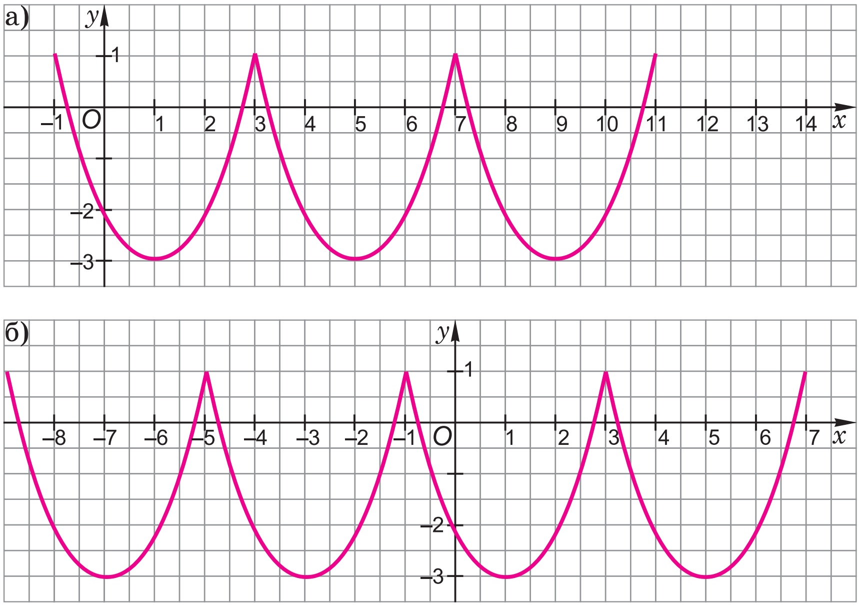


Рис. 102

ду T функции. Чтобы получить изображение графика функции f на промежутке $[-1; 11]$, продублируем (дважды) заданное на рисунке 101 изображение, сдвигая его на 4 единицы (т. е. на T единиц) вправо вдоль оси Ox. На рисунке 102, *а* изображен полученный график функции f на отрезке $[-1; 11]$.

б) На рисунке 102, *б* изображен график функции f на отрезке $[-9; 7]$. Чтобы его получить, линию, изображенную на рисунке 101, дважды сдвинули вдоль оси Ox на 4 единицы влево и один раз вправо.

! Изображение графика периодической функции f с наименьшим положительным периодом T можно получить так: изобразить часть этого графика на одном из промежутков области определения, длина которого равна T, а затем последовательно сдвигать эту линию влево и вправо вдоль оси Ox на T.

Пример 3. На рисунке 103 изображена часть графика периодической функции f с областью определения, состоящей из всех чисел $x \neq -2 + 3n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и наименьшим положительным периодом $T = 3$. Изобразить график функции $y = f(x)$.

Решение. Длина промежутка $[-4; -1]$ равна 3, т. е. наименьшему положительному периоду данной функции f. Получить изображение графика функции f можно, многократно сдвигая изображенную на рисунке 103 часть графика на 3 единицы влево и вправо вдоль оси Ox (рис. 104).

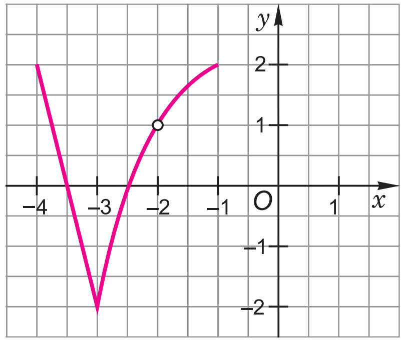


Рис. 103

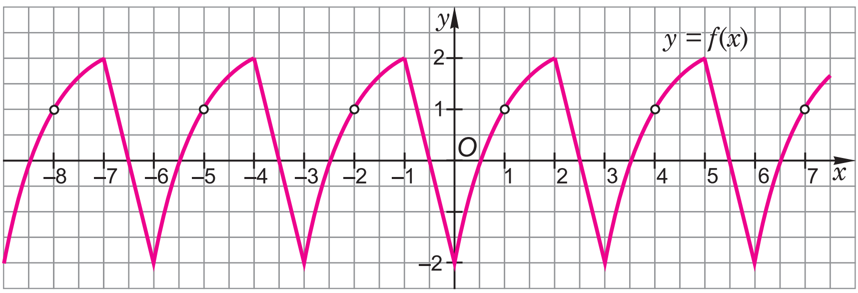


Рис. 104

Теорема 1. Если число T — период функции f, то при любом целом $n \neq 0$ число nT — также период этой функции.

Доказательство. Пусть $x \in D(f)$ и $n = -1$. Так как $T \neq 0$, то и $-T \neq 0$.

По определению периодической функции имеем:

$$x + (-T) = x - T \in D(f),\ x - (-T) = x + T \in D(f),$$

а также $f(x - T) = f((x - T) + T) = f(x)$. Это означает, что $-T$ — период функции f.

Пусть теперь $n = 2$. Так как $T \neq 0$, то и $2T \neq 0$.

По определению периодической функции $x + T \in D(f)$, следовательно, $(x + T) + T = x + 2T \in D(f)$, а также $x - T \in D(f)$, следовательно, $(x - T) - T = x - 2T \in D(f)$.

И наконец, $f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x)$. Это означает, что $2T$ — период функции f.

Аналогично доказывается, что если $2T$ — период функции f, то $3T = 2T + T$ — ее период, если $3T$ — период функции f, то $4T = 3T + T$ — ее период и т. д.

Значит, при $n \neq 0$, $n \in \boldsymbol{Z}$, число nT — период функции f. ☒

Теорема 2. Если $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом T, то $y = f(px)$ — периодическая функция с периодом $\frac{T}{p}$.

Доказательство. Область определения функции $y = f(px)$ состоит из тех чисел x, для которых $px \in D(f)$. Но если $px \in D(f)$, то области определения $D(f)$ принадлежит и число $px + T$, а это можно записать так: $p\left(x + \frac{T}{p}\right) \in D(f)$.

Таким образом, если число x принадлежит области определения функции $y = f(px)$, то и число $x + \frac{T}{p}$ принадлежит области определения этой функции.

Аналогично доказывается, что если число x принадлежит области определения функции $y = f(px)$, то и число $x - \frac{T}{p}$ принадлежит области определения этой функции. (Проведите доказательство самостоятельно.)

Остается заметить, что:

$$f\left(p\left(x + \frac{T}{p}\right)\right) = f(px + T) = f(px). \ ☒$$

! Поскольку область определения периодической функции неограниченна, то функции с ограниченной областью определения не могут быть периодическими. Кроме того, если хотя бы одно число не принадлежит области определения периодической функции, то ей не принадлежит бесконечно много чисел.

Пример 4. Известно, что функция f с областью определения D — периодическая с периодом $T \neq 0$. Может ли быть:

а) $D = \boldsymbol{N}$; б) $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$?

Решение. а) Нет, не может, так как по определению периодической функции, если, например, число 1 принадлежит множеству $D(f)$, то числа $1 + T$ и $1 - T$ принадлежат этому множеству. Но так как $T \neq 0$, то одно из этих чисел не будет натуральным и не будет принадлежать множеству $D(f) = \boldsymbol{N}$.

б) Нет, не может, так как число T принадлежит множеству $D(f)$, а число $T - T = 0$ не принадлежит ему.

?

1. При каких преобразованиях график периодической функции с периодом T совмещается сам с собой?
2. Назовите особенности области определения периодической функции.
3. Приведите пример числового множества, которое не может быть областью определения периодической функции.
4. Функция f — периодическая с периодом $T \neq 0$; какие еще числа могут быть периодом функции f?
5. Функция $y = f(x)$ — периодическая с периодом $T \neq 0$. Укажите период функции:

   а) $y = f(3x)$; б) $y = f\left(\frac{x}{5}\right)$; в) $y = f(px)$, $p > 0$.

Упражнения

3.9. Может ли быть периодической функция f, заданная на множестве $\boldsymbol{R}$, если она:

1) возрастающая на $\boldsymbol{R}$; 2) убывающая на $\boldsymbol{R}$?

3.10. На рисунке 105 изображена часть графика периодической функции f, определенной на множестве $\boldsymbol{R}$, с пе-

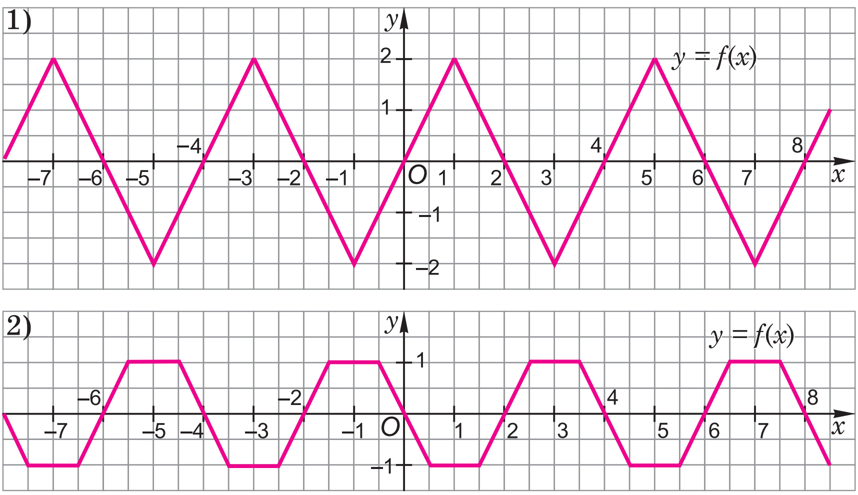


Рис. 105

риодом T, где $0 < T < 8$. Укажите наименьшее значение T. Чему равно значение функции $f(x)$ при x, равном:

а) $0 + T$; б) $2 + T$; в) $12 + 6T$;
г) $8 + 3T$; д) 18; е) 32?

3.11. На рисунке 106 изображена часть графика периодической функции f на промежутке, длина которого равна ее наименьшему положительному периоду T. Определите наименьший положительный период T функции f и изобразите ее график на любом промежутке, длина которого равна:

а) $2T$; б) $3T$; в) $5T$; г) $4T$.

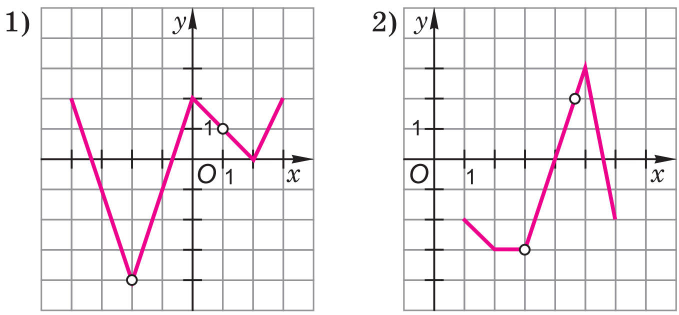


Рис. 106

3.12. Функция $y = f(x)$ с областью определения $\boldsymbol{R}$ — периодическая с периодом $T = 2$. На промежутке D значение функции f совпадает со значением функции $y = g(x)$. Найдите значение функции $f(a)$, если:

1) $D = [0;\ 2]$, $g(x) = 2x^2 - 4x$ и $a = 3$;
2) $D = [-1;\ 1]$, $g(x) = x^3 - x$ и $a = 2$;
3) $D = [-2;\ 0]$, $g(x) = x^4 + x^2$ и $a = 5$;
4) $D = [3;\ 5]$, $g(x) = 3x^3 + 3x^2$ и $a = -8$.

3.13. Докажите, что функция f не является периодической, если:

1) $f(x) = 2x - 5$; 2) $f(x) = 4x + 8$; 3) $f(x) = \frac{1}{x+5}$;
4) $f(x) = \frac{1}{1-x}$; 5) $f(x) = \sqrt{x}$; 6) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$;
7) $f(x) = x\sin x$; 8) $f(x) = x\cos x$;
9) $f(x) = 2x + \cos x$; 10) $f(x) = \sin x - 4x$.

3.14. Известно, что функция f периодическая с периодом $T \neq 0$. Может ли областью определения $D(f)$ этой функции быть множество:

1) $\boldsymbol{Z}$; 2) $\boldsymbol{N}$; 3) $[-1;\ 2]$;
4) $[-8;\ 8]$; 5) $(-\infty;\ 0)$; 6) $(0;\ +\infty)$;
7) $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$;
8) $(-\infty;\ -6) \cup (-6;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$?

3.15. Может ли областью определения периодической функции f с периодом $T \neq 0$ быть множество всех действительных чисел x таких, что:

1) $|x| \neq -5$; 2) $x \neq \pm 13$;
3) $x \neq \pm 9,\ x \neq \pm 2$; 4) $|x| \neq 4,\ |x| \neq 7$;
5) $x \neq 3p - 2,\ p \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x \neq 2p - 1,\ p \in \boldsymbol{Z}$;
7) $x \neq \frac{3\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 8) $x \neq \pi + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{N}$?

Укажите наименьший положительный период функции f **(3.16—3.17)**.

3.16. 1) $f(x) = 4\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $f(x) = \frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right)$;
3) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{12} - 0{,}2x\right)$; 4) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{24} - 1{,}5x\right)$;
5) $f(x) = \cos x + \cos 3x$; 6) $f(x) = \sin 2x - \sin 4x$;
7)* $f(x) = 3\sin 2x + 4\cos 2x$; 8)* $f(x) = 5\sin 7x - 12\cos 7x$.

3.17*. 1) $f(x) = \sin \pi x$; 2) $f(x) = \cos \pi x$;
3) $f(x) = \operatorname{tg}(\pi x + 1)$; 4) $f(x) = \operatorname{ctg}(2 - \pi x)$;
5) $f(x) = \sin^2 3x$; 6) $f(x) = \cos^2 \frac{2x}{3}$;
7) $f(x) = |\cos 1{,}5x|$; 8) $f(x) = |\sin 0{,}5x|$.

3.18. Укажите периодическую функцию f, у которой:

1) нет наименьшего положительного периода;
2) периодом является любое действительное число.

3.19. Задайте формулой периодическую функцию f с наименьшим положительным периодом T, равным:

1) 2; 2) 5; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$.

3.20*. Функция $y = f(x)$ с областью определения $\boldsymbol{R}$ периодическая с наименьшим положительным периодом $T = 3$. На промежутке $[-1; 2)$ ее значения совпадают со значениями функции $y = g(x)$. Изобразите график функции f, если:

1) $g(x) = x - 1$; 2) $g(x) = 1 - x$;
3) $g(x) = -x^2$; 4) $g(x) = x^2$;
5)* $g(x) = |x|$; 6)* $g(x) = -|x|$;
7) $g(x) = -x^3$; 8) $g(x) = x^3$.

3.3. Функция $y = \sin x$

Рассмотрим ***функцию синус***, заданную формулой $y = \sin x$, с областью определения — множеством $\boldsymbol{R}$.

Изобразим график функции $y = \sin x$. Сделаем это сначала на промежутке длиной, равной периоду синуса. Для этого заполним таблицу значений функции синус для значений аргумента на промежутке $[0; 2\pi]$, взятых через $\frac{\pi}{8}$, с точностью до 0,1 (приближенные значения синуса можно найти, используя тригонометрическую окружность (см. рис. 76), калькулятор или таблицы).

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\sin x$	0	0,4	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,4	0

x	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
$\sin x$	0	–0,4	–0,7	–0,9	–1	–0,9	–0,7	–0,4	0

Отметив эти точки на координатной плоскости (рис. 107) и соединив их плавной линией (рис. 108), получим изображение графика функции $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Поскольку, как было показано в п. 3.1, функция синус периодическая с наименьшим положительным периодом, равным 2π, то ее значения повторяются через 2π. Нами получено изображение графика на промежутке, длина которого равна

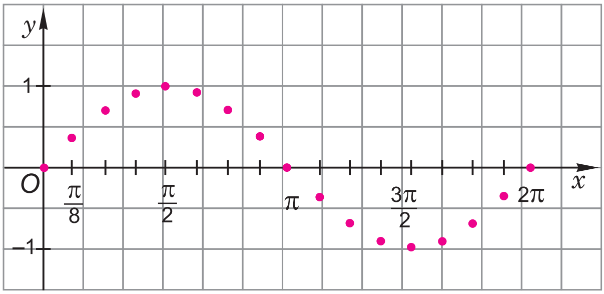


Рис. 107

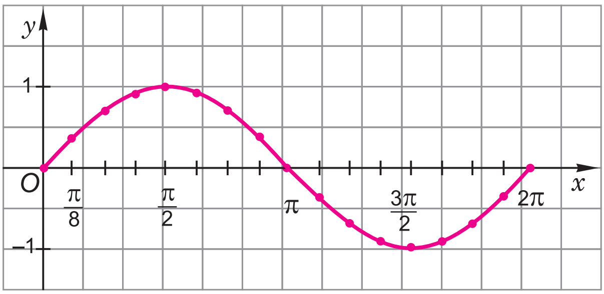


Рис. 108

2π. Сдвигая эту линию многократно вправо и влево вдоль оси Ox на 2π, получим изображение графика функции $y = \sin x$ (рис. 109).

График функции $y = \sin x$ называется ***синусоидой***.

Изображение синусоиды дает наглядное представление обо всех свойствах функции синус.

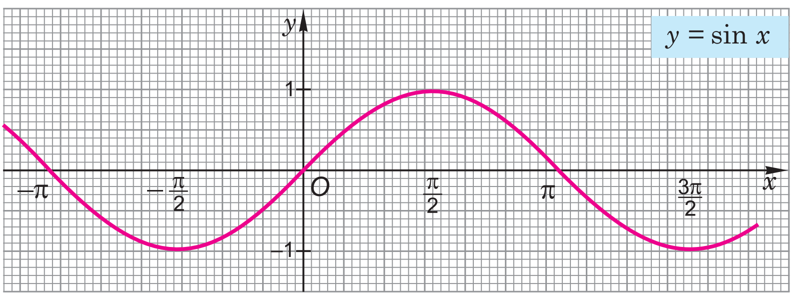


Рис. 109

Теорема (*о свойствах функции* $y = \sin x$).

1. Область определения функции $y = \sin x$ — множество $\boldsymbol{R}$.

2. Множество значений функции $y = \sin x$ — промежуток $[-1; 1]$.

3. Функция $y = \sin x$ периодическая с периодом 2π.

4. Наименьшее значение $y = -1$ функция $y = \sin x$ принимает в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Наибольшее значение $y = 1$ функция $y = \sin x$ принимает в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

5. График функции проходит через точку $(0; 0)$ — начало координат; с осью Oy он пересекается только в точке $(0; 0)$, а с осью Ox — в точках $(\pi k; 0)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6. Нулями функции $y = \sin x$ являются значения аргумента $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

7. Функция $y = \sin x$ принимает отрицательные значения на каждом из промежутков $(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и положительные значения на каждом из промежутков $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

8. Функция $y = \sin x$ нечетная.

9. Функция $y = \sin x$ возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Доказательство. Свойства 1 и 3 были установлены в п. 3.1.

Свойства 2, 4—8 можно увидеть на изображении графика функции $y = \sin x$ на рисунке 109 (еще говорят: «*прочитать свойства по графику*»). Они фактически были обоснованы в п. 2.4 и 2.5.

▲ Проведем доказательство свойства 9. Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Пусть $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $x_1 < x_2$. Тогда $\sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_2 + x_1}{2} > 0$.

Действительно, $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ (докажите это). Значит, $\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$. А так как $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2 + x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ (докажите это), то $\cos\frac{x_2 + x_1}{2} > 0$. Итак, $\sin x_2 > \sin x_1$.

Таким образом, на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ большему значению аргумента соответствует большее значение функции, а это по определению означает, что функция $y = \sin x$ на этом промежутке возрастает. В силу периодичности она возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Аналогично доказывается, что функция $y = \sin x$ убывает на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, а следовательно, и на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ☒ ▲

Напомним, что по определению на промежутке возрастания (убывания) функции f, если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$. Верно и обратное утверждение, которое мы часто будем использовать в дальнейшем:

! на промежутке возрастания функции f, если $f(x_2) > f(x_1)$, то $x_2 > x_1$, а на промежутке убывания функции f, если $f(x_2) < f(x_1)$, то $x_2 > x_1$.

Докажите это утверждение методом от противного.

▲ Изображение графика функции синус можно получить несколько иначе: принимая во внимание не только периодичность функции, но и ее нечетность. Для этого достаточно сначала получить изображение графика на промежутке $[0; \pi]$, а затем использовать симметрию графика нечетной функции относительно начала координат и периодичность функции синус (рис. 110, 111, 112). ▲

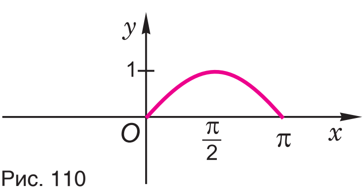


Рис. 110

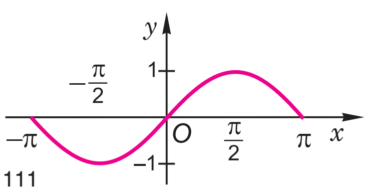


Рис. 111

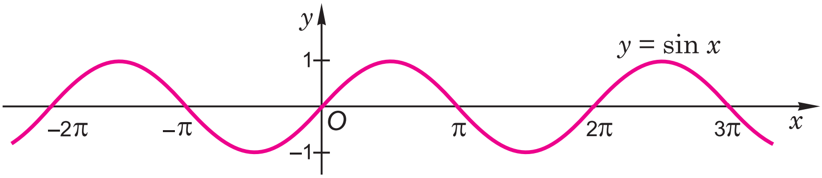


Рис. 112

Пример 1. Сравнить значения выражений

$$\sin 7,\ \sin 1,\ \sin 4.$$

Решение. Имеем $\sin 7 = \sin(7 - 2\pi) \approx \sin 0{,}72 < \sin 1$, так как $0{,}72$ и 1 принадлежат промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а на этом промежутке функция $y = \sin x$ возрастает и ее значения неотрицательны.

Так как угол, радианная мера которого равна 4, оканчивается в III четверти, то $\sin 4 < 0$.

Ответ: $\sin 4 < \sin 7 < \sin 1$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin(3x - 1) = -1$.

Решение. Решениями уравнения $\sin u = -1$ являются значения $u = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, при которых функция $y = \sin u$ принимает наименьшие значения, равные -1. При $u = 3x - 1$ имеем:

$$3x - 1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3*. Решить неравенство:

а) $\sin \frac{x}{4} > 0$; б) $\sin(5x + 8) < 1$.

Решение: а) Решение неравенства $\sin u > 0$ совпадает с промежутками, на которых функция $y = \sin u$ принимает положительные значения, т. е. $2\pi k < u < \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (свойство 7 функции $y = \sin x$).

При $u = \frac{x}{4}$ имеем:

$$2\pi k < \frac{x}{4} < \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$8\pi k < x < 4\pi + 8\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

б) Поскольку множеством значений функции $y = \sin u$ является промежуток $[-1; 1]$, то неравенство $\sin u < 1$ верно при всех значениях u, кроме тех, где $\sin u = 1$. Итак, $u \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. При $u = 5x + 8$ имеем:

$$5x + 8 \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$x \neq -\frac{8}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5},\ \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: а) $(8\pi k; 4\pi + 8\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $x \neq -\frac{8}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 4*. Решить неравенство $\sin x < \frac{1}{2}$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. На промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ убывает от 1 до -1 и принимает значение $\frac{1}{2}$ в точке $x = \frac{5\pi}{6}$.

Поскольку $\sin\frac{3\pi}{2} \leqslant \sin x < \sin\frac{5\pi}{6}$, то $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ (рис. 113).

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

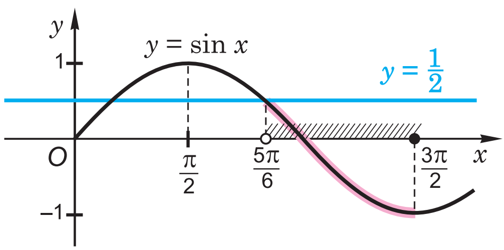


Рис. 113

1. Назовите основные свойства функции $y = \sin x$.
2. Изобразите график функции $y = \sin x$. Как его называют?
3. Как на изображении графика функции $y = \sin x$ отражаются ее свойства:

   а) периодичность; б) нечетность?
4. Используя изображение графика функции $y = \sin x$, укажите для нее:

   а) наименьшее (наибольшее) значение;

   б) промежутки знакопостоянства и нули;

   в) промежутки убывания (возрастания).

5. Чему равен наименьший положительный период функции $y = \sin x$?

6*. Докажите, что функция $y = \sin x$ возрастает на каждом из промежутков вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

7*. Докажите, что функция $y = \sin x$ убывает на каждом из промежутков вида $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

3.21°. Для функции f укажите $D(f)$ — ее область определения и $E(f)$ — ее множество значений:

1) $f(x) = \sin x + 1$;
2) $f(x) = \sin x - 2$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 3}$;
4) $f(x) = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + 3$;
5) $f(x) = |\sin x|$;
6) $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$.

3.22. Укажите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции $y = f(x)$, если:

1) $f(x) = \sin x - 2{,}5$;
2) $f(x) = \sin x + 1{,}5$;
3) $f(x) = \sin x - 1$;
4) $f(x) = \sin x + 1$.

3.23. Расположите в порядке убывания числа:

1) $\sin\frac{9\pi}{10}$; $\sin\frac{6\pi}{5}$; $\sin\frac{7\pi}{15}$; $\sin\frac{12\pi}{5}$;
2) $\sin\left(-\frac{25\pi}{9}\right)$; $\sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$; $\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)$; $\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$;
3) $\sin(-0{,}3)$; $\sin(-2)$; $\sin(-1{,}5)$; $\sin(-4{,}5)$;
4) $\sin 5{,}4$; $\sin 3{,}1$; $\sin 1{,}2$; $\sin 1{,}6$.

3.24°. Сравните:

1) $\sin\frac{3\pi}{7}$ и $\sin\frac{2\pi}{9}$;
2) $\sin\frac{5\pi}{12}$ и $\sin\frac{7\pi}{8}$;
3) $\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$ и $\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right)$;
4) $\sin\left(-\frac{7\pi}{16}\right)$ и $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$;
5) $\sin(-3{,}14)$ и $\sin(-3{,}2)$;
6) $\sin(-4{,}78)$ и $\sin(-5)$.

3.25°. Установите, четной или нечетной является функция f:

1) $f(x) = \sin^2 x$;
2) $f(x) = x^7 \sin x$;

3) $f(x)=x^5+\sin^3 x$; 4) $f(x)=x^3-\sin^9 x$;

5) $f(x)=\frac{4^3\sin^2 x}{x^2}$; 6) $f(x)=\frac{3^4\sin\frac{x}{2}}{x^5}$;

7) $f(x)=x\sin^2 x$; 8) $f(x)=x^4\sin x$.

3.26°. Используя график функции $y=\sin x$ (см. рис. 109), сравните с нулем значение выражения:

1) $\sin\frac{4\pi}{15}$; 2) $\sin\frac{13\pi}{8}$; 3) $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$;
4) $\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$; 5) $\sin 2{,}3$; 6) $\sin 5{,}1$;
7) $\sin(-1{,}7)$; 8) $\sin(-4{,}9)$.

3.27°. Функция f задана формулой $y=\sin x$ на множестве D. Укажите для функции f:

а) наименьшее значение; б) наибольшее значение;
в) промежутки возрастания; г) промежутки убывания;
д) промежутки, на которых $f(x)<0$; е) промежутки, на которых $f(x)>0$; ж) нули, если:

1) $D=[0;\ 3\pi]$; 2) $D=[-\pi;\ 2\pi]$;

3) $D=\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right]$; 4) $D=\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right]$;

5) $D=\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{6}\right]$; 6) $D=\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{7\pi}{6}\right]$;

7) $D=[-1;\ 0]$; 8) $D=[0;\ 1]$.

3.28. Используя изображение синусоиды (см. рис. 109), найдите приближенное значение выражения (с точностью до 0,1):

1) $\sin 2$; 2) $\sin 1$; 3) $\sin(-4)$;
4) $\sin(-2)$; 5) $\sin 5{,}5$; 6) $\sin 3{,}8$.

3.29. Решите уравнение:

1) $\sin 6x=0$; 2) $\sin\frac{x}{3}=0$;

3) $\sin(2x+3)=1$; 4) $\sin(0{,}1x-5)=1$;

5) $\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-1$; 6) $\sin\left(\frac{5x}{6}+\frac{7\pi}{12}\right)=-1$;

7) $\sin^2\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-1=0$; 8) $\left|\cos\left(\frac{3\pi}{2}-4x\right)\right|-1=0$.

3.30. Решите неравенство, используя свойства функции синус:

1) $\sin\frac{x}{6} \leqslant 0$; 2) $\sin 3x > 0$;

3) $\sin(2x-2) > -1$; 4) $\sin(3x+1) \leqslant -1$;

5) $\sin(\pi-4x) \leqslant 1$; 6) $\sin(2x-\pi) > -1$.

3.31. Укажите, в каких точках промежутка $[-2\pi; 2\pi]$ определена функция $y = f(x)$, и изобразите на нем график функции, если:

1) $f(x)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; 2) $f(x)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;

3) $f(x)=\operatorname{tg}x\cos x$; 4) $f(x)=1:\frac{1}{\sin x}$;

5) $f(x)=\left(\sqrt{\sin x}\right)^2$; 6) $f(x)=\left(\sqrt{\sin x+1}\right)^2-1$.

3.32. При каких значениях m существуют такие значения x, при которых будет верным равенство:

1) $2\sin x = m + 1$; 2) $3\sin x = m - 2$;

3) $\sin^2 x = m$; 4) $\sin^2 x - 1 = m$?

3.33. Решите уравнение $\sin x = a$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, если a равно:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 0,13;

6) $\frac{5}{7}$; 7) -1; 8) 1; 9) $\sqrt{3}$; 10) $-\sqrt{2}$.

3.34. При каких значениях x из промежутка D функция $y = \sin x$ принимает:

а) положительные значения;

б) отрицательные значения, если:

1) $D=\left[-2\frac{5}{6}\pi; -\frac{\pi}{10}\right]$; 2) $D=\left[8\frac{2}{3}\pi; 10\frac{3}{8}\pi\right]$;

3) $D=(-0{,}9\pi; 4{,}1\pi]$; 4) $D=[-1{,}3\pi; 1{,}6\pi)$?

3.35*. Решите на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ неравенство:

а) $\sin x < a$; б) $\sin x > a$;

в) $\sin x \leqslant a$; г) $\sin x \geqslant a$, если a равно:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) -1;

6) 1; 7) $\frac{5}{7}$; 8) 0,43; 9) $\frac{\pi}{3}$; 10) $-\sqrt{\pi}$.

3.36*. Найдите на промежутке $[-\pi; \pi]$ решения уравнения:

1) $\sin x = 0{,}3$;   2) $\sin x = 0{,}6$;
3) $\sin x = -0{,}7$;   4) $\sin x = -0{,}2$.

3.37*. Найдите на промежутке $[-\pi; \pi]$ решения неравенства:

1) $\sin x < 0{,}7$;   2) $\sin x > 0{,}4$;
3) $\sin x \leqslant -0{,}4$;   4) $\sin x \geqslant -0{,}3$.

3.4. Функция $y = \cos x$

Рассмотрим ***функцию косинус***, заданную формулой $y = \cos x$, с областью определения — множеством $\boldsymbol{R}$.

Изобразим график функции $y = \cos x$. Сделаем это сначала на промежутке длиной, равной периоду косинуса. Для этого заполним таблицу значений функции косинус для значений аргумента на промежутке $[0; 2\pi]$, взятых через $\frac{\pi}{8}$, с точностью до 0,1 (приближенные значения косинуса можно найти, используя тригонометрическую окружность (см. рис. 76), калькулятор или таблицы).

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\cos x$	1	0,9	0,7	0,4	0	–0,4	–0,7	–0,9	–1

x	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
$\cos x$	–1	–0,9	–0,7	–0,4	0	0,4	0,7	0,9	1

Отметив эти точки на координатной плоскости Oxy (рис. 114) и соединив их плавной линией (рис. 115), получим изображение графика функции $y = \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

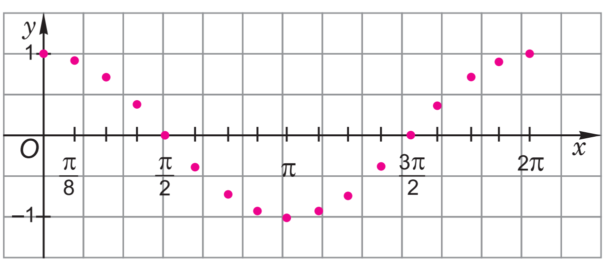


Рис. 114

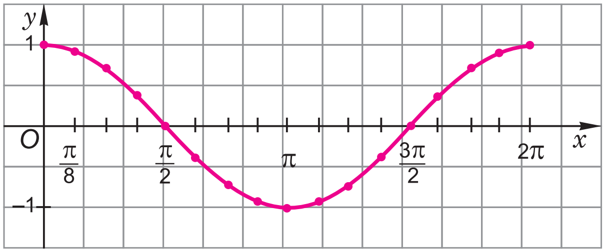


Рис. 115

Поскольку, как было показано в п. 3.1, функция косинус периодическая с наименьшим положительным периодом, равным 2π, то ее значения повторяются через 2π. Нами получено изображение графика на отрезке, длина которого равна периоду 2π. Сдвигая эту линию многократно вдоль оси Ox вправо и влево на 2π, получаем изображение графика функции $y = \cos x$ (рис. 116).

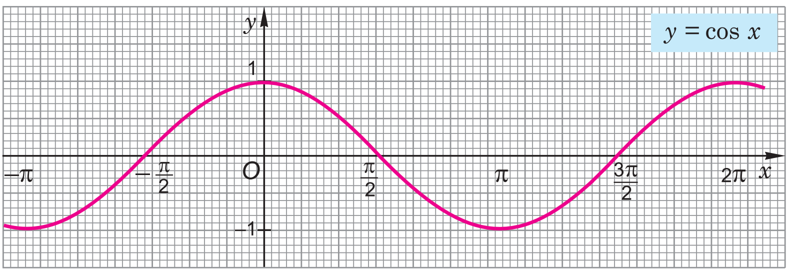


Рис. 116

График функции $y = \cos x$ называется ***косинусоидой.***

Изображение косинусоиды дает наглядное представление обо всех свойствах функции косинус.

Теорема (*о свойствах функции* $y = \cos x$).

1. Область определения функции $y = \cos x$ — множество $\boldsymbol{R}$.

2. Множество значений функции $y = \cos x$ — промежуток $[-1; 1]$.

3. Функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π.

4. Наименьшее значение $y = -1$ функция $y = \cos x$ принимает в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Наибольшее значение $y = 1$ функция $y = \cos x$ принимает в точках $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. График функции пересекает ось Oy в единственной точке $(0; 1)$, а с осью Ox пересекается в точках $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ 0\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Нулями функции $y = \cos x$ являются значения аргумента $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7. Функция $y = \cos x$ принимает отрицательные значения на каждом из промежутков $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и положительные значения на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

8. Функция $y = \cos x$ четная.

9. Функция $y = \cos x$ убывает на каждом из промежутков $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и возрастает на каждом из промежутков $[\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Доказательство. Свойства 1 и 3 были установлены в п. 3.1.

Свойства 2, 4—8 легко прочитать на изображении графика функции $y = \cos x$. Заметим, что они фактически были обоснованы в п. 2.4 и 2.5. Свойство 9 тоже можно прочитать по графику. Промежутки возрастания и убывания можно также указать, используя единичную окружность.

Доказажите свойство 9 самостоятельно (см. п. 3.3).

При изображении графика $y = \cos x$ можно использовать не только свойство периодичности, но и свойство четности косинуса (поясните как).

Пример 1. Функция задана формулой $f(x) = \cos x$ на множестве D. Является ли эта функция четной, если:

а) $D = (-2\pi;\ 2\pi]$; б) $D = \boldsymbol{Z}$?

Решение. а) Функция не является четной, так как промежуток D — ее область определения — не симметричен относительно начала координат: $2\pi \in D$, $-2\pi \notin D$.

б) Функция четная, так как ее область определения $D = \boldsymbol{Z}$ — множество, симметричное относительно нуля, и для любого $x \in \boldsymbol{Z}$ имеем $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$.

Ответ: а) нет; б) является.

Пример 2. Изобразить график функции f, заданной формулой $y = \cos x$ на множестве $D = (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$, и назвать по графику свойства этой функции.

Решение. График данной функции изображен на рисунке 117 (поясните, как он получен).

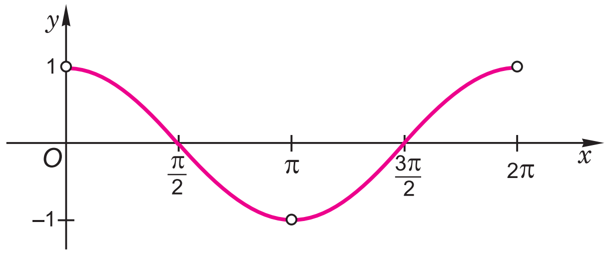


Рис. 117

Свойства этой функции следующие:

1. $D(f) = (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$.
2. $E(f) = (-1; 1)$ (поясните почему).
3. Функция f непериодическая (поясните почему).
4. Функция f не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений (поясните почему).
5. График функции точек пересечения с осью Oy не имеет, а с осью Ox пересекается в двух точках: $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$.
6. Нулями функции f являются $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.
7. Функция f принимает отрицательные значения на промежутках $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Функция f принимает положительные значения на промежутках $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.
8. Функция f не является четной (поясните почему).
9. Функция f убывает на промежутке $(0; \pi)$ и возрастает на промежутке $(\pi; 2\pi)$.

Пример 3. Решить уравнение $\cos\left(\frac{x}{3} - 1\right) = -1$.

Решение. Функция $y = \cos u$ принимает наименьшее значение $y = -1$ в точках $u = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $u = \frac{x}{3} - 1$ имеем:

$$\frac{x}{3} - 1 = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \text{ откуда } x = 3 + 3\pi + 6\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $3(1 + \pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 4*. Решить неравенство:

а) $\cos\left(\frac{x}{2}-3\right)<0$; б) $\cos 3x < 2$.

Решение. а) Функция $y = \cos u$ принимает отрицательные значения при $\frac{\pi}{2}+2\pi n<u<\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$ (свойство 7 функции $y = \cos x$). Когда $u=\frac{x}{2}-3$, имеем:

$$\frac{\pi}{2}+2\pi n<\frac{x}{2}-3<\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},$$

$$\pi + 6 + 4\pi n < x < 3\pi + 6 + 4\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

б) Неравенство $\cos 3x < 2$ верно при любых значениях x (поясните почему).

Ответ: а) $(\pi + 6 + 4\pi n;\ 3\pi + 6 + 4\pi n),\ n\in \boldsymbol{Z}$;
б) x — любое число.

Пример 5*. Решить неравенство $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ на промежутке $[0; \pi]$.

Решение. На промежутке $[0;\ \pi]$ функция $y = \cos x$ убывает и по условию $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $\cos x > \cos\frac{\pi}{6}$. Значит, $0 \leqslant x < \frac{\pi}{6}$ (рис. 118).

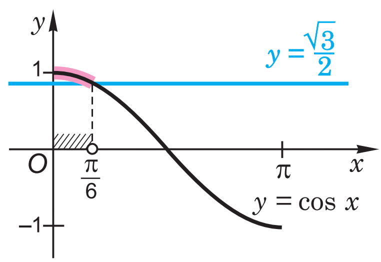


Рис. 118

Ответ: $\left[0;\ \frac{\pi}{6}\right)$.

?

1. Назовите основные свойства функции $y = \cos x$.
2. Изобразите график функции $y = \cos x$. Как его называют?
3. Как на изображении графика функции $y = \cos x$ отражаются ее свойства:
   а) периодичность; б) четность?
4. Используя изображение графика функции $y = \cos x$, укажите для нее:
   а) наименьшее (наибольшее) значение;
   б) промежутки знакопостоянства и нули;
   в) промежутки убывания (возрастания).
5. Чему равен наименьший положительный период функции $y = \cos x$?

6*. Докажите, что функция $y = \cos x$ возрастает на каждом из промежутков вида $[\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7*. Докажите, что функция $y = \cos x$ убывает на каждом из промежутков вида $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

3.38°. Для функции f укажите $E(f)$ — ее множество значений:

1) $f(x) = \cos x + 2$;
2) $f(x) = \cos x - 1$;
3) $f(x) = 1 - 4\cos(3\pi + x)$;
4) $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 4{,}5$;
5) $f(x) = |\cos x|$;
6) $f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

3.39. Укажите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции $y = f(x)$ если:

1) $f(x) = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$;
2) $f(x) = \cos(10\pi - x)$;
3) $f(x) = \cos x - 4{,}7$;
4) $f(x) = \cos x + 1{,}2$.

3.40. Расположите в порядке возрастания числа:

1) $\cos\frac{\pi}{18}$; $\cos\frac{7\pi}{36}$; $\cos\frac{2\pi}{9}$; $\cos\frac{\pi}{36}$;
2) $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$; $\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$; $\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$; $\cos\left(-\frac{12\pi}{5}\right)$;
3) $\cos(-0{,}4)$; $\cos(-1{,}5)$; $\cos(-0{,}8)$; $\cos 4{,}9$;
4) $\cos 0{,}6$; $\cos 1{,}4$; $\cos(-1{,}7)$; $\cos 0{,}2$.

3.41. Сравните:

1) $\cos\frac{5\pi}{7}$ и $\cos\frac{7\pi}{9}$;
2) $\cos\frac{3\pi}{14}$ и $\cos\frac{2\pi}{5}$;
3) $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$;
4) $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{6\pi}{5}\right)$;
5) $\cos(-1{,}7)$ и $\cos(-3{,}14)$;
6) $\cos(-1{,}57)$ и $\cos(-6)$;
7) $\sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right)$ и $\cos\left(-\frac{7\pi}{18}\right)$;
8) $\cos\left(-\frac{11\pi}{16}\right)$ и $\sin\left(-\frac{15\pi}{14}\right)$;
9) $\sin(-18{,}1)$ и $\cos(-6{,}28)$;
10) $\cos(-4{,}58)$ и $\sin(-8)$.

3.42°. Установите, четной или нечетной является функция f:

1) $f(x) = x^3\cos x$;
2) $f(x) = \cos x \sin x$;
3) $f(x) = \frac{\cos 8x}{\sin x^3}$;
4) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x\cos x}$;

5) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$; 6) $f(x)=\frac{\cos x^3}{4x^2-25}$;

7) $f(x)=x\sin x\cos x$; 8) $f(x)=2|\sin x|\cos x$.

3.43. Используя график функции $y = \cos x$ (см. рис. 116), сравните с нулем значение выражения:

1) $\cos\frac{6\pi}{5}$; 2) $\cos\frac{5\pi}{3}$; 3) $\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$;

4) $\cos\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 5) $\cos 2$; 6) $\cos 5{,}2$;

7) $\cos(-4)$; 8) $\cos(-2{,}1)$.

3.44°. Функция f задана формулой $y = \cos x$ на множестве D. Укажите для функции f:

а) наименьшее значение; б) наибольшее значение; в) промежутки возрастания; г) промежутки убывания; д) промежутки, на которых $f(x) < 0$; е) промежутки, на которых $f(x) > 0$; ж) нули, если:

1) $D = [-2\pi;\ \pi]$; 2) $D = [0;\ 3\pi]$; 3) $D=\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$;

4) $D=\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$; 5) $D=\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\right]$; 6) $D=\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{7\pi}{6}\right]$;

7) $D = [0;\ 1]$; 8) $D = [-1;\ 0]$.

3.45. Используя изображение графика функции $y = \cos x$ (см. рис. 116), найдите приближенное значение выражения (с точностью до 0,1):

1) $\cos 2$; 2) $\cos(-1)$; 3) $\cos 1$;

4) $\cos 4$; 5) $\cos(-3{,}5)$; 6) $\cos 5{,}5$.

3.46. Решите уравнение:

1) $\cos 4x = 0$; 2) $\cos\frac{x}{5}=0$;

3) $\cos(3x - 1) = 1$; 4) $\cos\left(\frac{x}{6}+3\right)=1$;

5) $\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{\pi}{10}\right)=-1$; 6) $\cos\left(\frac{4x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=-1$;

7) $\cos^2\left(\frac{x}{6}-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$; 8) $\left|\sin\left(\frac{5\pi}{2}-6x\right)\right|-1=0$.

3.47. Решите неравенство, используя свойства функции косинус:

1) $\cos\frac{5x}{4}\geqslant 0$; 2) $\cos\frac{x}{6}>0$;

3) $\cos(3x+1) > -1$; 4) $\cos(4x-3) \leqslant -1$;
5) $\cos(2\pi-2x) < 1$; 6) $\cos(5x-\pi) \geqslant 1$.

3.48. Укажите, в каких точках промежутка $[-2\pi; 2\pi]$ определена функция $y = f(x)$, и изобразите на нем график функции, если:

1) $f(x)=\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$; 2) $f(x)=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$;

3) $f(x)=\mathrm{ctg}\, x\sin x$; 4) $f(x)=1:\dfrac{1}{\cos x}$;

5) $f(x)=\left(\sqrt{\cos x}\right)^2$; 6) $f(x)=\left(\sqrt{\cos x-1}\right)^2+1$.

3.49. При каких значениях n существуют такие значения x, при которых будет верным равенство:

1) $5\cos x = n + 1$; 2) $4\cos x = 2 - n$;
3) $\cos^2 x = n$; 4) $1 - \cos^2 x = n$?

3.50. Решите уравнение $\cos x = a$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, если a равно:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $-0,23$;

6) $-\frac{7}{9}$; 7) -1; 8) 1; 9) $\frac{\pi}{3}$; 10) $-\sqrt{2}$.

3.51. При каких значениях x из промежутка D функция $y = \cos x$ принимает:

а) положительные значения;
б) отрицательные значения, если:

1) $D=\left[-4\frac{2}{9}\pi; -1\frac{5}{8}\pi\right]$; 2) $D=\left[5\frac{3}{7}\pi; 7\frac{9}{11}\pi\right]$;

3) $D = (-1,2\pi; 2,9\pi]$; 4) $D = [-2,3\pi; 1,4\pi)$?

3.52*. Решите на промежутке $[0; \pi]$ неравенство:
а) $\cos x < a$; б) $\cos x > a$;
в) $\cos x \leqslant a$; г) $\cos x \geqslant a$, если a равно:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $-\frac{3}{7}$;

6) $-0,58$; 7) 1; 8) -1; 9) $-\sqrt{3}$; 10) $\sqrt{\pi}$.

3.53*. Найдите на промежутке $[0;\ 2\pi]$ решения уравнения:

1) $\cos x = 0{,}4$; 2) $\cos x = 0{,}2$;
3) $\cos x = -0{,}1$; 4) $\cos x = -0{,}9$.

3.54*. Найдите на промежутке $[0;\ 2\pi]$ решения неравенства:

1) $\cos x > 0{,}2$; 2) $\cos x < 0{,}3$;
3) $\cos x \leqslant -0{,}6$; 4) $\cos x \geqslant -0{,}8$.

3.5. Функция $y = \operatorname{tg} x$

Рассмотрим ***функцию тангенс***, заданную формулой $y = \operatorname{tg} x$, с областью определения — множеством действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Изобразим сначала график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке длиной, равной периоду тангенса. Для этого заполним таблицу значений функции тангенс для значений аргумента на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, взятых через $\frac{\pi}{8}$ с точностью до 0,1 (приближенные значения тангенса можно найти, используя тригонометрическую окружность и линию тангенсов (рис. 119), калькулятор или таблицы).

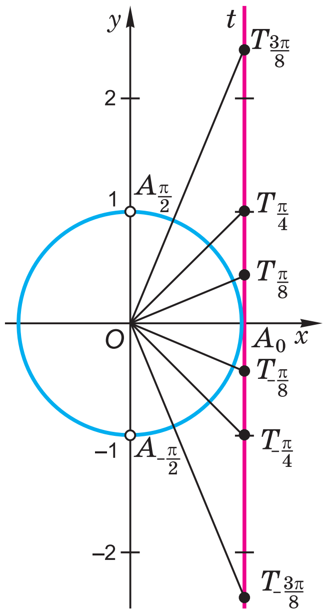


Рис. 119

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	—	–2,4	–1	–0,4	0	0,4	1	2,4	—

Отметив эти точки на координатной плоскости Oxy (рис. 120) и соединив их плавной линией (рис. 121), получим изображение графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Через точки $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ проведем вертикальные прямые $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$

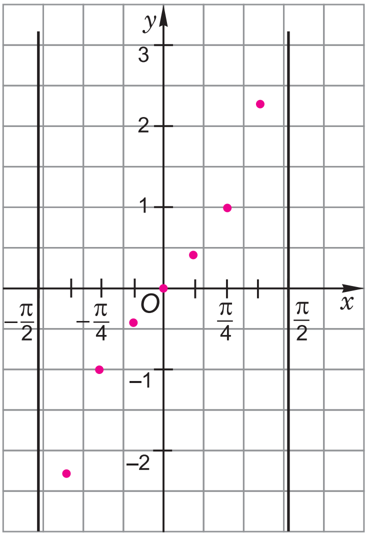


Рис. 120

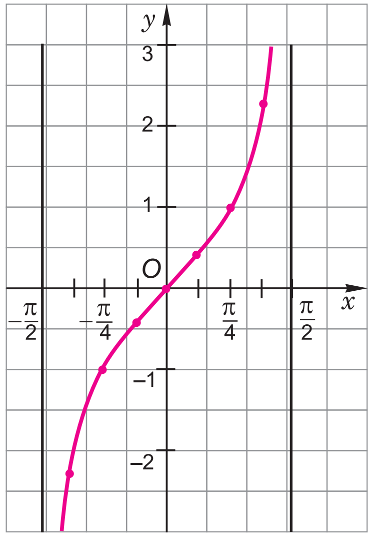


Рис. 121

(они не имеют общих точек с графиком функции тангенс, так как эта функция в точках $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ не определена) (см. рис. 121). Нами получено изображение графика на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, длина которого равна π — периоду тангенса. Сдвигая эту линию многократно вдоль оси Ox вправо и влево на π, получаем изображение графика функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 122).

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называется ***тангенсоидой***.

Часть тангенсоиды на каждом из промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, называют ***ветвью тангенсоиды***. Тангенсоида состоит из бесконечного множества одинаковых ветвей.

Изображение графика функции тангенс (см. рис. 122) подсказывает свойства этой функции.

Теорема (*о свойствах функции* $y = \operatorname{tg} x$).

1. Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ — множество действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. Множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$ — все действительные числа, т. е. множество $\boldsymbol{R}$.

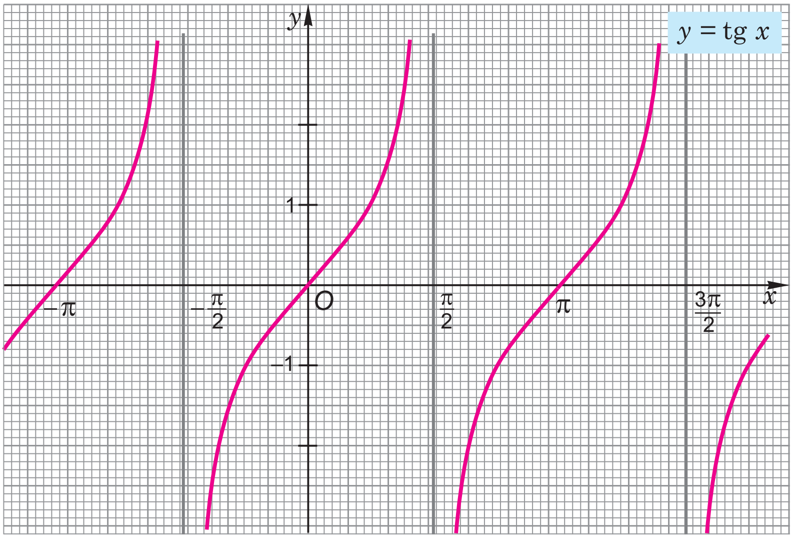


Рис. 122

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π.

4. Наибольшего и наименьшего значений функция $y = \operatorname{tg} x$ не имеет.

5. График функции проходит через точку (0; 0) — начало координат; с осью Oy он пересекается только в точке (0; 0), а с осью Ox — в точках $(\pi n; 0)$ $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Нулями функции $y = \operatorname{tg} x$ являются значения аргумента $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7. Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает отрицательные значения на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и положительные значения на каждом из промежутков $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

8. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная.

9. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Доказательство. Свойства 1 и 3 были установлены в п. 3.1. Свойства 2, 4—8 можно прочитать на изображении графика функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 122). Они фактически были обоснованы в п. 2.7. Свойство 9 тоже можно увидеть на изображении графика.

▲ Приведем доказательство свойства 9. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Пусть $x_1,\ x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $x_1 < x_2$. Тогда:

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} =$$

$$= \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1}{\cos x_2 \cos x_1} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cos x_1} > 0$$

(поясните последнее неравенство).

Значит, $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$, т. е. функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а ее возрастание на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, следует из периодичности. ☒ ▲

! З а м е ч а н и е. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ имеет только промежутки возрастания, но она не является возрастающей на всей области определения $D(f)$ (поясните почему).

Изображение графика функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить несколько иначе, чем было показано, учитывая нечетность функции тангенс (поясните как).

П р и м е р 1. Решить неравенство:

а) $\operatorname{tg}(5x - 2) < 0$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} + 3\right) \geqslant 0$.

Р е ш е н и е. а) Отрицательные значения функция $y = \operatorname{tg} u$ принимает при $-\frac{\pi}{2} + \pi k < u < \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ (свойство 7 функции $y = \operatorname{tg} x$). Для $u = 5x - 2$ получаем:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi k < 5x - 2 < \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

$$\frac{2}{5} - \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} < x < \frac{2}{5} + \frac{\pi k}{5},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

б) Имеем: $\pi k \leqslant \frac{x}{4} + 3 < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ (поясните, почему справа знак строгого неравенства). Отсюда получим:

$$-12 + 4\pi k \leqslant x < -12 + 2\pi + 4\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: а) $\left(\frac{2}{5} - \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5};\ \frac{2}{5} + \frac{\pi k}{5}\right),\ k \in \boldsymbol{Z};$

б) $[-12 + 4\pi k;\ -12 + 2\pi + 4\pi k),\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Пример 2. Решить неравенство $\operatorname{tg} x \leqslant 1$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right).$

Решение. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, и по условию $\operatorname{tg} x \leqslant 1$, т. е. $\operatorname{tg} x \leqslant \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, значит, $x \leqslant \frac{\pi}{4}$, но $x > -\frac{\pi}{2}$. Таким образом, $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{4}$ (рис. 123).

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right].$

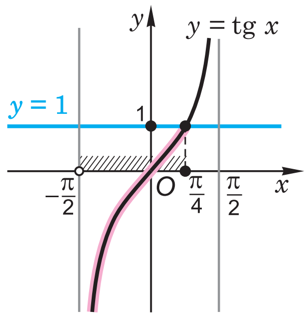


Рис. 123

1. Назовите основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.
2. Изобразите график функции $y = \operatorname{tg} x$; как его называют?
3. Можно ли функцию тангенс назвать возрастающей на всей области определения? Почему?
4. Как на графике функции $y = \operatorname{tg} x$ отражены ее свойства:
   а) нечетность; б) периодичность?
5. Чему равен наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$?
6*. Докажите, что функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастающая на каждом из промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Упражнения

3.55°. Для функции f укажите $D(f)$ — ее область определения и $E(f)$ — ее множество значений:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x + 1;$
2) $f(x) = 4\operatorname{tg} x - 3;$
3) $f(x) = (\operatorname{tg} x - 4)^2;$
4) $f(x) = (\operatorname{tg} x + 2)^4;$
5) $f(x) = |\operatorname{tg} x|;$
6) $f(x) = \sqrt{16\operatorname{tg}^2 x};$
7) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x};$
8) $f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$

3.56. Укажите координаты точек пересечения с осями координат графика функции $y = f(x)$, если:

1) $f(x)=\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$; 2) $f(x)=\dfrac{2\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}-1}$;

3) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}4x-\operatorname{tg}(-3x)}{1+\operatorname{tg}4x\operatorname{tg}(-3x)}$; 4) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}5x+\operatorname{tg}(-4x)}{1-\operatorname{tg}5x\operatorname{tg}(-4x)}$.

3.57. Расположите в порядке убывания числа:

1) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{18}$; $\operatorname{tg}\dfrac{17\pi}{36}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9}$;

2) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{7\pi}{8}\right)$; $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{11\pi}{16}\right)$; $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

3) $\operatorname{tg}(-5)$; $\operatorname{tg}(-3)$; $\operatorname{tg}3$; $\operatorname{tg}(-1)$;

4) $\operatorname{tg}6{,}4$; $\operatorname{tg}4{,}1$; $\operatorname{tg}2{,}2$; $\operatorname{tg}3{,}6$.

3.58. Сравните:

1) $\operatorname{tg}(-2{,}6\pi)$ и $\operatorname{tg}(-2{,}61\pi)$; 2) $\operatorname{tg}(-4{,}75\pi)$ и $\operatorname{tg}(-5{,}6\pi)$;
3) $\operatorname{tg}2$ и $\operatorname{tg}3$; 4) $\operatorname{tg}4$ и $\operatorname{tg}6$;
5) $\operatorname{tg}(-3{,}14)$ и $\operatorname{tg}(-3{,}2)$; 6) $\operatorname{tg}(-4{,}78)$ и $\operatorname{tg}(-7)$.

3.59°. Четной или нечетной является функция f, если:

1) $f(x)=x\operatorname{tg}^2 x$; 2) $f(x)=x^7\operatorname{tg}x$;

3) $f(x)=2\sin x^5+\operatorname{tg}^3 x$; 4) $f(x)=\operatorname{tg}x^3-\sin x^{11}$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^3 x^3}$; 6) $f(x)=(2\sin x)^3+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^5 x^5}$;

7) $f(x)=x^3\operatorname{tg}x^3$; 8) $f(x)=\operatorname{tg}x^5\sin x$?

3.60. Используя график функции $y = \operatorname{tg}x$ (см. рис. 122), сравните с нулем значение выражения:

1) $\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{15}$; 2) $\operatorname{tg}\dfrac{13\pi}{8}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{7\pi}{16}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{3\pi}{7}\right)$;

5) $\operatorname{tg}2{,}3$; 6) $\operatorname{tg}5{,}1$; 7) $\operatorname{tg}(-1{,}8)$; 8) $\operatorname{tg}(-4{,}3)$.

3.61°. Функция f задана формулой $y = \operatorname{tg}x$ на множестве D. Укажите для функции f:

а) наименьшее значение; б) наибольшее значение; в) промежутки возрастания; г) промежутки убывания; д) промежутки, на которых $f(x) < 0$; е) промежутки, на которых $f(x) > 0$; ж) нули, если:

1) $D=\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$; 2) $D=\left[-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $D=\left[-\frac{4\pi}{9};\ -\frac{\pi}{6}\right]$; 4) $D=\left[\frac{\pi}{12};\ \frac{7\pi}{15}\right]$;

5) $D=[0;\ 1]$; 6) $D=[-1;\ 0]$.

3.62°. Используя изображение графика функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 122), найдите приближенное значение выражения (с точностью до 0,1):

1) $\operatorname{tg} 1$; 2) $\operatorname{tg} 4$; 3) $\operatorname{tg}(-2)$;
4) $\operatorname{tg}(-4)$; 5) $\operatorname{tg} 5{,}2$; 6) $\operatorname{tg}(-4{,}3)$.

3.63°. Функция f задана формулой $y = \operatorname{tg} x$ на множестве D. Имеет ли функция f наибольшее значение, если:

1) $D=\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right]$; 2) $D=\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $D=\left[6\pi;\ \frac{13\pi}{2}\right)$; 4) $D=\left[-4\pi;\ -\frac{15\pi}{4}\right]$;

5) $D=(14;\ 15)$; 6) $D=[5;\ 7]$?

3.64°. Функция f задана формулой $y = \operatorname{tg} x$ на множестве D. Укажите промежутки, на которых функция f принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения, если:

1) $D=\left(-\frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{4}\right]$; 2) $D=\left(-\frac{3\pi}{2};\ \frac{11\pi}{6}\right)$;

3) $D=\left[4\pi;\ \frac{9\pi}{2}\right)$; 4) $D=\left[-\frac{9\pi}{4};\ -2\pi\right]$;

5) $D=(5;\ 7)$; 6)* $D=[14;\ 17]$.

3.65. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}(2x+3)=0$; 2) $\operatorname{tg}(4x-5)=0$;

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{6}+\frac{7\pi}{12}\right)=0$.

3.66. Решите на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ уравнение $\operatorname{tg} x = a$, если a равно:

1) 1; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

5) -7; 6) -5; 7) 15; 8) 21.

3.67. Решите неравенство:

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{6} \leqslant 0$; 2) $\operatorname{tg} 3x \leqslant 0$;

3) $\operatorname{tg}(2x-2) \geqslant 0$; 4) $\operatorname{tg}(3x+1) \leqslant 0$.

3.68*. Решите на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ неравенство:

а) $\operatorname{tg} x < a$; б) $\operatorname{tg} x > a$;
в) $\operatorname{tg} x \leqslant a$; г) $\operatorname{tg} x \geqslant a$, если a равно:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) -1;

5) 6; 6) π; 7) $-\frac{3}{7}$; 8) $-\frac{2}{9}$.

Является ли функция периодической? Если является, то укажите ее наименьший положительный период **(3.69—3.71)**:

3.69. 1) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 2) $y=\operatorname{tg} 3x$;

3) $y=\operatorname{tg} 4x-2$; 4) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3$;

5) $y=\operatorname{tg}(x+1)$; 6) $y=\operatorname{tg}(x-2)$;

7) $y=2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-1\right)$; 8) $y=3\operatorname{tg}(2x+4)$;

9) $y=2\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+3$; 10) $y=3\operatorname{tg}(2x+4)-1$.

3.70*. 1) $y=\operatorname{tg}|x|$; 2) $y=-|\operatorname{tg} x|$.

3.71*. 1) $y=\frac{|x|}{x}\operatorname{tg} x$; 2) $y=\frac{x}{|x|}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$;

3) $y=\left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^2$; 4) $y=\sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$;

5) $y = \operatorname{tg}(-2x)\operatorname{ctg} 2x$; 6) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

3.6. Функция $y = \operatorname{ctg} x$

Рассмотрим ***функцию котангенс***, заданную формулой $y = \operatorname{ctg} x$, с областью определения — множеством действительных чисел $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Изобразим график функции $y = \operatorname{ctg} x$. Сделаем это сначала на промежутке длиной, равной периоду котангенса. Для этого заполним таблицу значений функции котангенс для значе-

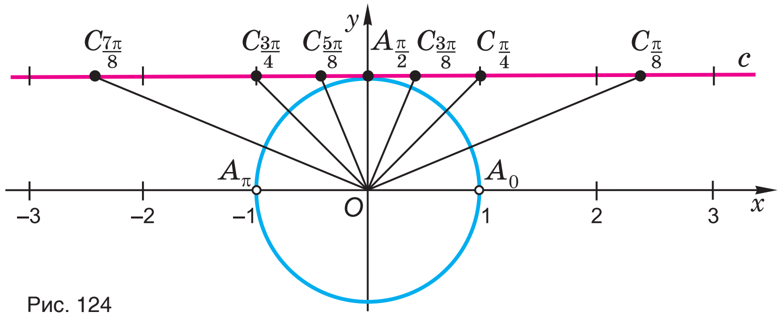


Рис. 124

ний аргумента на промежутке $(0; \pi)$, взятых через $\frac{\pi}{8}$ с точностью до 0,1. Приближенные значения котангенса можно найти, используя тригонометрическую окружность и линию котангенсов (рис. 124).

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\operatorname{ctg} x$	—	2,4	1	0,4	0	–0,4	–1	–2,4	—

Отметив эти точки на координатной плоскости Oxy (рис. 125) и соединив их плавной линией (рис. 126), получим изображе-

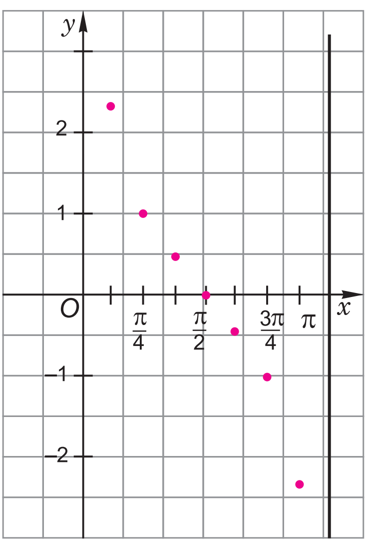


Рис. 125

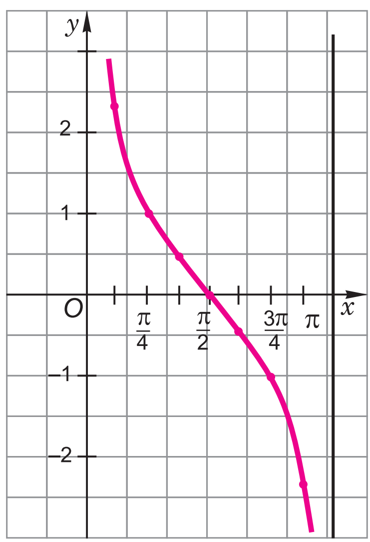


Рис. 126

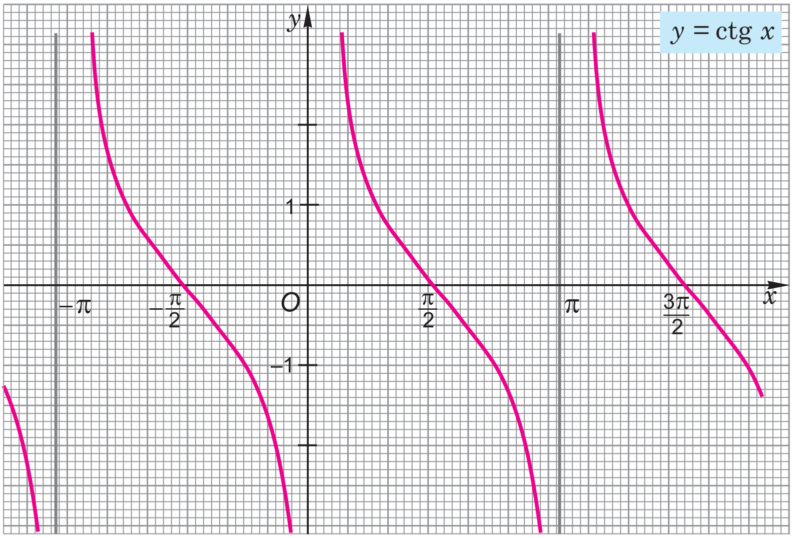


Рис. 127

ние графика функции $y = \mathrm{ctg}\, x$ на промежутке $(0; \pi)$. Через точки 0 и π проведем вертикальные прямые $x = 0$ и $x = \pi$ (они не имеют общих точек с графиком функции котангенс, так как эта функция не определена в точках 0 и π) (см. рис. 126).

Нами получено изображение графика на промежутке $(0; \pi)$, длина которого равна π — периоду котангенса. Сдвигая эту линию многократно вдоль оси Ox вправо и влево на π, получаем изображение графика функции $y = \mathrm{ctg}\, x$ (рис. 127).

График функции $y = \mathrm{ctg}\, x$ называют ***котангенсоидой***.

Часть котангенсоиды на каждом из промежутков $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, называют ***ветвью котангенсоиды*** — таких ветвей бесконечно много. Котангенсоида состоит из бесконечного множества одинаковых ветвей.

Изображение графика функции котангенс подсказывает все свойства этой функции (см. рис. 127).

Теорема (*о свойствах функции* $y = \mathrm{ctg}\, x$).

1. Область определения функции $y = \mathrm{ctg}\, x$ — множество действительных чисел $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. Множество значений функции $y = \mathrm{ctg}\, x$ — все действительные числа, т. е. множество $\boldsymbol{R}$.

3. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая с периодом π.

4. Наибольшего и наименьшего значений функция $y = \operatorname{ctg} x$ не имеет.

5. График функции не имеет общих точек с осью Oy, а с осью Ox пересекается в точках $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6. Нулями функции $y = \operatorname{ctg} x$ являются значения аргумента $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

7. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает отрицательные значения на каждом из промежутков $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и положительные значения на каждом из промежутков $\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

8. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ нечетная.

9. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на каждом из промежутков $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы о свойствах функции $y = \operatorname{tg} x$.

! Замечание. Функцию котангенс нельзя назвать убывающей на всей области определения, хотя у этой функции есть только промежутки убывания (поясните почему).

Пример 1. Решить неравенство

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5} + 1\right) \leqslant 0.$$

Решение. Неположительные значения функция $y = \operatorname{ctg} u$ принимает при $\frac{\pi}{2} + \pi k \leqslant u < \pi + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (свойство 7 функции $y = \operatorname{ctg} x$). Для $u = \frac{x}{5} + 1$ получаем:

$$\frac{\pi}{2} + \pi k \leqslant \frac{x}{5} + 1 < \pi + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

(поясните, почему справа знак строгого неравенства);

$$-5 + \frac{5}{2}\pi + 5\pi k \leqslant x < -5 + 5\pi + 5\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\left[-5 + \frac{5}{2}\pi + 5\pi k; -5 + 5\pi + 5\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решить неравенство $\operatorname{ctg} x < 1$ при $x \in (0; \pi)$.

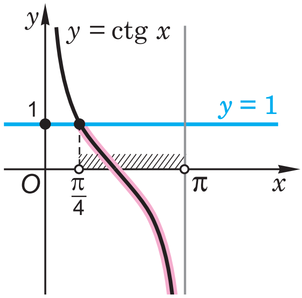


Рис. 128

Решение. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на промежутке $(0; \pi)$.

По условию $\operatorname{ctg} x < 1$, т. е.

$$\operatorname{ctg} x < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4},$$

значит, $x > \frac{\pi}{4}$, но $x < \pi$.

Таким образом, $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ (рис. 128).

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

?

1. Назовите основные свойства функции котангенс.
2. Изобразите график функции $y = \operatorname{ctg} x$. Как его называют?
3. Можно ли функцию $y = \operatorname{ctg} x$ назвать убывающей на всей области определения? Почему?
4. Как на графике функции $y = \operatorname{ctg} x$ отражены ее свойства: а) нечетность; б) периодичность?
5. Докажите свойства 2—9 функции котангенс.
6. Чему равен наименьший положительный период функции котангенс?

Упражнения

3.72°. Для функции f укажите $D(f)$ — ее область определения и $E(f)$ — ее множество значений:

1) $f(x) = \operatorname{ctg} x + 4$; 2) $f(x) = 9 - \operatorname{ctg} x$;

3) $f(x) = (\operatorname{ctg} x - 4)^2$; 4) $f(x) = (\operatorname{ctg} x + 9)^2$;

5) $f(x) = |\operatorname{ctg} x| - 2$; 6) $f(x) = 5 - \sqrt{3\operatorname{ctg}^2 x}$;

7) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}$; 8) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} - 4$.

3.73. Укажите координаты точек пересечения с осями координат графика функции $y = f(x)$, если:

1) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 1}{2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$; 2) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$;

3) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} 8x \operatorname{ctg}(-7x) + 1}{\operatorname{ctg} 8x - \operatorname{ctg}(-7x)}$; 4)* $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{ctg} 6x \operatorname{ctg}(-5x)}{\operatorname{ctg} 6x + \operatorname{ctg}(-5x)}$.

3.74. Расположите в порядке возрастания числа:

1) $\operatorname{ctg}\frac{12\pi}{5}$; $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$; $\operatorname{ctg}\frac{6\pi}{7}$; $\operatorname{ctg}\frac{37\pi}{35}$;

2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{11}\right)$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{37\pi}{14}\right)$;

3) $\operatorname{ctg}(-6)$; $\operatorname{ctg}(-3)$; $\operatorname{ctg}4$; $\operatorname{ctg}(-4)$;

4) $\operatorname{ctg}4$; $\operatorname{ctg}8{,}1$; $\operatorname{ctg}3{,}1$; $\operatorname{ctg}5{,}9$.

3.75. Сравните:

1) $\operatorname{ctg}(-1{,}5\pi)$ и $\operatorname{ctg}(-1{,}6\pi)$;
2) $\operatorname{ctg}(-5{,}2\pi)$ и $\operatorname{ctg}(-4{,}9\pi)$;
3) $\operatorname{ctg}2$ и $\operatorname{ctg}3$;
4) $\operatorname{ctg}6$ и $\operatorname{ctg}5$;
5) $\operatorname{ctg}(-5{,}1)$ и $\operatorname{ctg}(-4{,}2)$;
6) $\operatorname{ctg}(-7{,}6)$ и $\operatorname{ctg}(-6{,}2)$.

3.76°. Установите, четной или нечетной является функция f:

1) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x + 4$;
2) $f(x) = x\sin x \operatorname{ctg} x$;
3) $f(x) = 2\sin^4 x \operatorname{ctg}^5 x^3$;
4) $f(x) = \operatorname{ctg} x^3 - \operatorname{tg}^{11} x^5$;
5) $f(x) = \frac{3x^7}{\operatorname{ctg} x^3}$;
6) $f(x) = (\operatorname{ctg} x)^3 + \frac{1}{\sin x^3}$;
7) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 + \sin^2 x} + \cos x$;
8) $f(x) = \frac{\sin^2 x \sin\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}$.

3.77. Используя изображение графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ (см. рис. 127), сравните с нулем значение выражения:

1) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$;
2) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{7}$;
3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{9\pi}{11}\right)$;
4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$;
5) $\operatorname{ctg}5{,}1$;
6) $\operatorname{ctg}4{,}9$;
7) $\operatorname{ctg}(-2{,}5)$;
8) $\operatorname{ctg}(-4{,}3)$.

3.78°. Функция f задана формулой $y = \operatorname{ctg} x$ на множестве D. Укажите для функции f:

а) наименьшее значение; б) наибольшее значение; в) промежутки возрастания; г) промежутки убывания; д) промежутки, на которых $f(x) < 0$; е) промежутки, на которых $f(x) > 0$; ж) нули, если:

1) $D = \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$;
2) $D = \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$;
3) $D = \left[-\frac{7\pi}{9}; -\frac{\pi}{6}\right]$;
4) $D = \left[\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{2}\right]$;
5) $D = [1; 2]$;
6) $D = [4; 6]$.

3.79. Используя изображение графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ (см. рис. 127), найдите приближенное значение выражения (с точностью до 0,1):

1) $\operatorname{ctg} 4$; 2) $\operatorname{ctg} 5$; 3) $\operatorname{ctg}(-1)$; 4) $\operatorname{ctg}(-0,5)$.

3.80°. Функция f задана формулой $y = \operatorname{ctg} x$ на множестве D. Имеет ли функция f наибольшее значение, если:

1) $D = \left(0;\ \frac{\pi}{4}\right]$; 2) $D = \left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $D = \left[\frac{13\pi}{2};\ \frac{41\pi}{6}\right)$; 4) $D = \left[-4,5\pi;\ -\frac{17\pi}{4}\right]$;

5) $D = (7;\ 8)$; 6) $D = [20;\ 22]$?

3.81°. Функция f задана формулой $y = \operatorname{ctg} x$ на множестве D. Укажите промежутки, на которых функция f принимает:
а) положительные значения;
б) отрицательные значения, если:

1) $D = \left(-2\pi;\ \frac{5\pi}{4}\right]$; 2) $D = \left(-2\pi;\ \frac{11\pi}{6}\right]$;

3) $D = \left[\frac{5\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2}\right)$; 4) $D = \left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\right]$;

5) $D = (1;\ 5)$; 6) $D = [4;\ 12]$.

3.82. Решите уравнение:

1) $\operatorname{ctg}(3x - 2) = 0$; 2) $\operatorname{ctg}(0,5x + 3) = 0$;

3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5x}{2} + \frac{5\pi}{6}\right) = 0$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3x}{8} - \frac{\pi}{12}\right) = 0$.

3.83. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ на промежутке $(0;\ \pi)$, если a равно:

1) 1; 2) –1; 3) $-\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

5) –9; 6) –8; 7) 37; 8) 43.

3.84. Решите неравенство:

1) $\operatorname{ctg}\frac{x}{6} \leqslant 0$; 2) $\operatorname{ctg} 3x < 0$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{4x}{3} > 0$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{4} \geqslant 0$; 5) $\operatorname{ctg}(2x - 2) > 0$; 6) $\operatorname{ctg}(3x + 1) \leqslant 0$.

3.85*. Решите на промежутке $(0;\ \pi)$ неравенство:

а) $\operatorname{ctg} x < a$; б) $\operatorname{ctg} x > a$;
в) $\operatorname{ctg} x \leqslant a$; г) $\operatorname{ctg} x \geqslant a$, если a равно:

1) $-\sqrt{3}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) 1;
5) $-\sqrt{17}$; 6) $-\pi$; 7) $\frac{2}{9}$; 8) $\frac{3}{7}$.

Является ли функция периодической? Если является, то укажите ее наименьший положительный период **(3.86—3.88):**

3.86*. 1) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; 2) $y = \operatorname{ctg} 3x$;
3) $y = \operatorname{ctg} 2x - 1$; 4) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 2$;
5) $y = \operatorname{ctg}(x+1) - 2$; 6) $y = \operatorname{ctg}(x-2) + 3$;
7) $y = 2\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 4$; 8) $y = 3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right) - 2$.

3.87*. 1) $y = -\left|\operatorname{ctg} x\right|$; 2) $y = \operatorname{ctg}|x|$.

3.88*. 1) $y = \left(\sqrt{\operatorname{ctg} x}\right)^2$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}$;
3) $y = \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 2x$; 4) $y = \operatorname{tg}(-0{,}5x) \operatorname{ctg} 0{,}5x$.

3.7. Решение уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$

При решении простейших тригонометрических уравнений $\sin x = a$ и $\cos x = a$ рассматривают три случая.

Случай 1. $|a| > 1$, т. е. $a < -1$ или $a > 1$.

При таких значениях a уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ не имеют решений (поясните почему).

Случай 2. $a = 0$; $|a| = 1$.

При таких значениях a получим уравнения, решения которых легко находить, зная свойства синуса и косинуса, — они указаны в таблице.

Уравнение \ Значение a	$a = 0$	$a = -1$	$a = 1$
$\sin x = a$	$x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Случай 3. $0 < |a| < 1$, т. е. $-1 < a < 0$ или $0 < a < 1$.

Пусть для определенности $0 < a < 1$. Решения уравнения $\sin x = a$ можно находить двумя способами.

Способ 1 (с использованием единичной окружности).

На единичной окружности (рис. 129) есть две точки A_{α_1} и A_{α_2}, ординаты которых равны a — значению $\sin x$. Эти точки симметричны относительно оси Oy. Все решения уравнения $\sin x = a$ можно записать в виде:

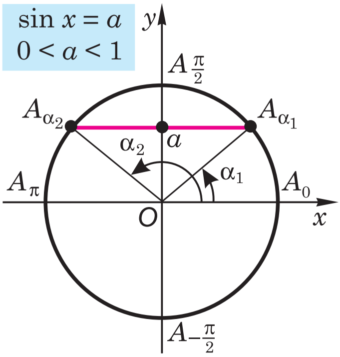


Рис. 129

$$x = \alpha_1 + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

или

$$x = \alpha_2 + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Пусть $\alpha_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha_2 \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Поскольку $\alpha_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin \alpha_1 = a$, то (по определению арксинуса) $\alpha_1 = \arcsin a$.

Поскольку точка A_{α_2} симметрична точке A_{α_1} относительно оси Oy, то $\alpha_2 = \pi - \alpha_1 = \pi - \arcsin a$.

Таким образом, решениями уравнения $\sin x = a$ являются две группы чисел:

$$x = \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \qquad (1)$$

или

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

Можно было бы на этом и остановиться, но чаще всего эти две группы решений уравнения $\sin x = a$ записывают с помощью одной общей формулы

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.} \qquad (3)$$

По формуле (3) при $n = 2k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, получим

$$x = (-1)^{2k} \arcsin a + \pi \cdot 2k,$$

т. е. решения уравнения $\sin x = a$ из группы (1). При $n = 2m + 1$, $m \in \boldsymbol{Z}$, получим

$$x = (-1)^{2m+1} \arcsin a + \pi(2m + 1),$$

т. е. решения уравнения $\sin x = a$ из группы (2).

Способ 2 (с использованием графиков функций).

В одной системе координат изобразим графики функций $y = \sin x$ и $y = a$ (рис. 130). Решениями уравнения

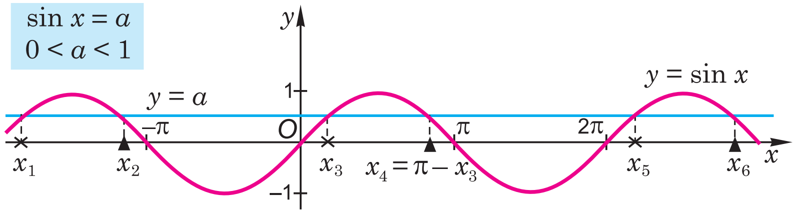


Рис. 130

$\sin x = a$ $(0 < a < 1)$ будут абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sin x$ и $y = a$. Некоторые из них отмечены на рисунке 130 (это точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6).

Решения, отмеченные на рисунке крестиками, можно записать формулой (1) (поясните почему):

$$x = x_3 + 2\pi k = \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Решения, отмеченные на рисунке треугольниками, можно записать формулой (2) (поясните почему):

$$x = x_4 + 2\pi m = \pi - \arcsin a + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Решения уравнения $\sin x = a$, записанные этими двумя формулами, объединяют в одну формулу (3) (см. способ 1).

Запись формулы решений уравнения $\sin x = a$ для случая $-1 < a < 0$ остается такой же — формулами (1) и (2) или формулой (3).

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. По формуле (3) получаем:

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. По формуле (3) получаем:

$$2x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Здесь запись ответа будет выглядеть проще, если решение записать двумя формулами:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \text{ при } n = 2k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

и

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ при } n = 2k + 1,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Уравнение $\cos x = a$ при $0 < a < 1$ также можно решать двумя способами.

Способ 1 (с использованием единичной окружности).

На единичной окружности (рис. 131) есть две точки A_{α_1} и A_{α_2}, абсциссы которых равны a — значению $\cos x$. Эти точки симметричны относительно оси Ox. Все решения уравнения $\cos x = a$ можно записать в виде:

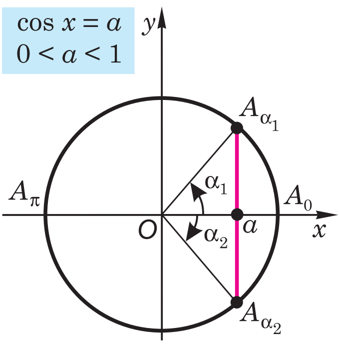


Рис. 131

$$x = \alpha_1 + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

или

$$x = \alpha_2 + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Пусть $\alpha_1 \in [0;\ \pi]$, $\alpha_2 \in [-\pi;\ 0]$.

Поскольку $\alpha_1 \in [0;\ \pi]$ и $\cos \alpha_1 = a$, то (по определению арккосинуса) $\alpha_1 = \arccos a$.

Поскольку точка A_{α_2} симметрична точке A_{α_1} относительно оси Ox, то $\alpha_2 = -\alpha_1 = -\arccos a$.

Таким образом, решениями уравнения $\cos x = a$ являются две группы чисел:

$$x = \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \tag{4}$$

или

$$x = -\arccos a + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}. \tag{5}$$

Эти две группы решений обычно записывают одной формулой:

$$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.} \tag{6}$$

Способ 2 (с использованием графиков функций).

В одной системе координат изобразим графики функций $y = \cos x$ и $y = a$ (рис. 132). Решениями уравнения

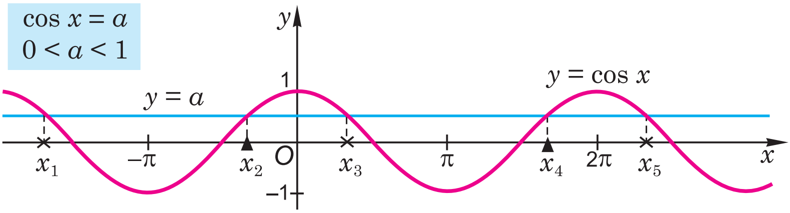


Рис. 132

$\cos x = a$ $(0 < a < 1)$ будут абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \cos x$ и $y = a$. Некоторые из них отмечены на рисунке 132 (это точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).

Решения, отмеченные на рисунке крестиками, можно записать формулой (4) (поясните почему):

$$x = x_3 + 2\pi k = \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Решения, отмеченные на рисунке треугольниками, можно записать формулой (5) (поясните почему):

$$x = x_2 + 2\pi m = -\arccos a + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Решения уравнения $\cos x = a$, записанные этими двумя формулами, объединяют в одну формулу (6) (см. способ 1).

Запись формулы решений уравнения $\cos x = a$ для случая $-1 < a < 0$ остается такой же — формулами (4) и (5) или формулой (6).

Пример 3. Решить уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на промежутке $[-3\pi;\ 2\pi]$.

Решение. По формуле (6) получим:

$$x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

При $n \in \{-1;\ 0;\ 1\}$ получим решения, принадлежащие промежутку $[-3\pi;\ 2\pi]$:

$$\pm\frac{\pi}{6} - 2\pi; \qquad \pm\frac{\pi}{6}; \qquad -\frac{\pi}{6} + 2\pi.$$

Ответ: $-\frac{13\pi}{6}$; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.

Пример 4. Решить уравнение $\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$.

Решение. По формуле (6) получим:

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$5x-\frac{\pi}{4}=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z};$$

$$5x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z};$$

$$x=\frac{\pi}{20}\pm\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5},\ \ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{20}\pm\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5},\ \ n\in \boldsymbol{Z}.$

?

1. При каких значениях a уравнение $\sin x = a$ ($\cos x = a$) не имеет решений? Почему?
2. Решите уравнение $\sin x = a$ ($\cos x = a$) при:
   а) $a = -1$; б) $a = 0$; в) $a = 1$.
3. Проиллюстрируйте решение уравнения вида $\sin x = a$ ($\cos x = a$) на единичной окружности, если:
   а) $-1 < a < 0$; б) $0 < a < 1$; в) $a = -0{,}7$;
   г) $a = 1{,}3$; д) $a=-\frac{\pi}{2}$.
4. Проиллюстрируйте решение уравнения вида $\sin x = a$ ($\cos x = a$) с использованием графика функции, если:
   а) $-1 < a < 0$; б) $0 < a < 1$; в) $a = -0{,}3$;
   г) $a = 1{,}7$; д) $a=-\frac{\pi}{3}$.

Упражнения

3.89. Укажите на единичной окружности точки, соответствующие числам:

1) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \ k\in \boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi k,\ \ n\in \boldsymbol{Z}$;
3) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \ k\in \boldsymbol{Z}$.

Решите уравнение **(3.90—3.92)**.

3.90°. 1) $\sin x(\sin x-1)(\cos x+1)=0$; 2) $(\sin^2 x-1)\cos^2 x=0$;
3) $\cos x(\sin x+1)(\cos x-1)=0$; 4) $(\cos^2 x-1)\sin^2 x=0$.

3.91°. 1) $\sin x=\frac{1}{2}$; 2) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\sin 3x=-\frac{1}{2}$; 4) $\sin\frac{x}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
5) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.92. 1) $\sin 5x = -\frac{1}{7}$; 2) $\sin \frac{x}{5} = \frac{5}{8}$;

3) $5\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 9$; 4) $3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -7$.

3.93. Решите уравнение из упражнения **3.92** на промежутке:

а) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) $[-\pi;\ 0]$.

3.94°. Решите уравнение:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$; 4) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.95. Решите уравнение из упражнения **3.94** на промежутке:

а) $\left[-\frac{5\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$; б) $[-2\pi;\ 3\pi]$.

3.96. Решите уравнение:

1) $\cos 7x = -\frac{1}{9}$; 2) $\cos \frac{2x}{7} = \frac{1}{8}$;

3) $5\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 13$; 4) $3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\pi$.

3.97. Найдите наибольший отрицательный и наименьший положительный корни уравнения:

1) $2\sin(5x - 2) = 1$; 2) $2\cos(4x + 1) = -1$;

3) $2\cos(3x - 2) = \sqrt{2}$; 4) $2\sin(3x - 1) = -1$;

5) $\sqrt{2}\sin(4x + 1) = -1$; 6) $2\cos(3x - 2) = \sqrt{3}$;

7) $\sqrt{2}\cos(2x - 1) = -1$; 8) $2\sin(2x + 3) = -\sqrt{3}$.

3.98. Найдите корни уравнения, удовлетворяющие условию $a < x < b$:

1) $2\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$, если $a = 1$, $b = 4$;

2) $2\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$, если $a = -3$, $b = 1$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$, если $a = 2$, $b = 4$;

4) $2\cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$, если $a = -1$, $b = 2$.

3.99. Решите на промежутке I уравнение:

1) $4\sin x\cos x + \sqrt{3} = 0$, если $I = \left[-\frac{5\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $\sin^2\frac{2x}{3}-\cos^2\frac{2x}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, если $I=\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$;

3) $\cos 6x\cos 4x+\sin 6x\sin 4x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, если $I=\left(-\frac{\pi}{4};\ \pi\right]$;

4) $\sin 5x\cos 2x-\cos 5x\sin 2x=-\frac{1}{2}$, если $I=\left(-\frac{\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}\right)$;

5) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, если $I=\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right]$;

6) $\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=1$, если $I=\left[-\frac{9\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right)$.

3.100. Укажите два промежутка значений переменной x, на которых каждое из уравнений $\sin x=\frac{1}{7}$ и $\cos x=\frac{2}{7}$ имеет ровно по t корней, если:

1) $t = 3$; 2) $t = 2$; 3) $t = 1$; 4) $t = 4$.

3.101. На каждом из промежутков:

а) $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$; в) $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$;

г) $[-\pi;\ 2\pi]$; д) $[-2;\ 3]$; е) $[1;\ 5]$

укажите число корней уравнения:

1) $\sin x = -0{,}76$; 2) $\cos x = -0{,}23$.

Решите уравнение **(3.102—3.104).**

3.102. 1) $2\sin^2 x+5\sin x+2=0$;

2) $3\cos^2 x+10\cos x+3=0$;

3) $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1=0$;

4) $2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0$;

5) $4\sin^2\left(2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)-2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cos(2x-\pi)=4-\sqrt{15}$;

6) $2\cos^2\left(\frac{x}{2}-3\pi\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}(6\pi+x)\right)=2-0{,}5\sqrt{10}$.

3.103*. 1) $\frac{\sin x}{\sqrt{\pi^2-x^2}}=0$; 2) $\frac{\sin x}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}=0$;

3) $\sin 2x\sqrt{4-x^2}=0$; 4) $(1-\sin 3x)\sqrt{9-x^2}=0$;

5) $\left(\sin\frac{x}{2}+0{,}5\right)\sqrt{6+5x-x^2}=0;$

6) $\left(2\sin\frac{x}{3}+\sqrt{3}\right)\sqrt{8+7x-x^2}=0.$

3.104*. 1) $\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\sqrt{-\cos x}=0;$

2) $(2\sin x+1)\sqrt{-\cos x}=0;$

3) $\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)\sqrt{-\sin x}=0;$

4) $\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\sqrt{-\sin x}=0.$

3.105*. 1) При каких значениях a уравнение $\sin x = a$ имеет наибольшее количество корней на промежутке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}\right]$?

2) При каких значениях a уравнение $\cos x = a$ имеет наибольшее количество корней на промежутке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right]$?

3.106*. Решите уравнение относительно x:

1) $\sin x=\frac{1}{a};$

2) $\cos x=\frac{1}{a}-1;$

3) $\cos x=a^2-1;$

4) $\sin x=a^2+1;$

5) $a\sin^2 x-\cos x=0;$

6) $a\cos^2 x+\sin x=0;$

7) $\sin(\arcsin x)=a^2-1;$

8) $\cos(\arccos x)=a^2+1.$

3.8. Решение уравнений вида $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$

Рассмотрим решение простейших тригонометрических уравнений $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$.

Эти уравнения имеют решения при любом значении a, поскольку множеством значений функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ является $\boldsymbol{R}$.

Множества решений указанных уравнений при $a = 0$ совпадают со множеством нулей соответствующих функций (см. п. 3.5, 3.6). Решениями уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ являются $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а уравнения $\operatorname{ctg} x = 0$ — $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Рассмотрим теперь решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ при $a \neq 0$ с использованием графиков функций.

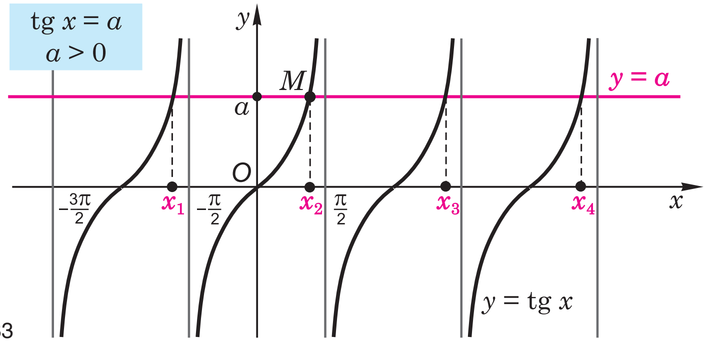


Рис. 133

Пусть для определенности $a > 0$. Изобразив в одной системе координат тангенсоиду $y = \operatorname{tg} x$ и прямую $y = a$, отметим на оси Ox решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$, они являются абсциссами точек пересечения тангенсоиды и прямой $y = a$ (рис. 133). На рисунке отмечены некоторые из них — x_1, x_2, x_3, x_4.

Расстояния между соседними точками, абсциссы которых являются решениями уравнения $\operatorname{tg} x = a$, одинаковы и равны π — наименьшему положительному периоду функции тангенс. Абсцисса точки M — число x_2 — равна $\operatorname{arctg} a$ (объясните почему, используя рисунок 133). С учетом периодичности функции тангенс запишем все решения рассматриваемого уравнения в виде

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ при $a < 0$ этим же способом проиллюстрировано на рисунке 134. Формула (1) имеет место при любом значении a.

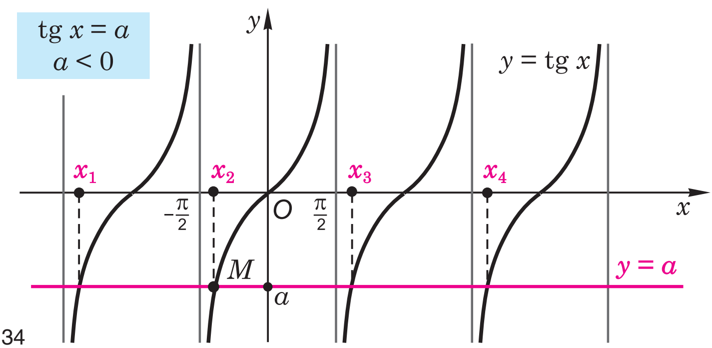


Рис. 134

Пример 1. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Решение. По формуле (1) получаем:

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Рассмотрим решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ при $a \neq 0$.

Способ 1. При $a \neq 0$ уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ равносильно уравнению $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = a$, которое можно представить в виде $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$.

По формуле (1) имеем

$$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{a} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Способ 2. Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ с использованием графиков функций приводит к формуле

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \quad (2)$$

(Проведите необходимые рассуждения самостоятельно.)

Пример 2. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение. *Способ 1*. Данное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

По формуле (1) получаем

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Способ 2. По формуле (2) получаем:

$$x = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Поясните, почему формулы $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и $x=\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, определяют одно и то же множество решений уравнения $\operatorname{ctg} x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{7\pi}{2}\right)=-\sqrt{3}$.

Решение. Учитывая периодичность функции котангенс, получаем:

$$\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{3};$$

$\downarrow$ поскольку $\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}\alpha$, то имеем: $\downarrow$

$$-\operatorname{tg} 3x=-\sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg} 3x=\sqrt{3};$$

$$3x=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$x=\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

?

1. При каких значениях a уравнение $\operatorname{tg} x = a$ ($\operatorname{ctg} x = a$) не имеет решений?
2. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = a$ ($\operatorname{ctg} x = a$) и проиллюстрируйте его решение, используя график функции, при:

   а) $a > 0$; б) $a < 0$; в) $a = 0$;
   г) $a = 7$; д) $a = -5$.

3*. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = a$ ($\operatorname{ctg} x = a$) и проиллюстрируйте его решение с использованием единичной окружности и линии тангенсов (котангенсов) при разных значениях a (см. задание 2).

4. Как можно решать уравнение $\operatorname{ctg} x = a$?

Упражнения

3.107°. Укажите на единичной окружности точки, соответствующие числам:

1) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi k$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

3) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Решите уравнение **(3.108—3.109).**

3.108°. 1) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(5x-1)\operatorname{tg}(x+1)=0$;

2) $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}(x-1)\operatorname{tg}(2+x)=0$;

3) $\operatorname{ctg}^2(4-8x)\operatorname{tg}^2(3-x)=0$;

4) $\operatorname{ctg}^2(6x-1)\operatorname{ctg}^2 x=0$;

5) $\operatorname{ctg} 2x(2+\sin 3x)=0$; 6) $\operatorname{ctg} 3x(3+\cos 5x)=0$;

7) $\operatorname{tg} 4x(-2-\cos 3x)=0$; 8) $\operatorname{tg}\frac{x}{3}(-4-\sin 2x)=0$.

3.109°. 1) $\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg} 3x=-1$;

4) $\operatorname{tg}\frac{x}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) $\operatorname{tg} 4x=-1$; 6) $\operatorname{ctg}\frac{x}{3}=-\sqrt{3}$;

7) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$; 8) $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$.

3.110. Решите уравнение из упражнения **3.109** на промежутке:

а) $\left(-\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right)$; б) $(-\pi;\ 4\pi)$.

3.111. Найдите наибольший отрицательный и наименьший положительный корни уравнения:

1) $\sqrt{3}\operatorname{tg}(5x-2)=3$; 2) $3\operatorname{ctg}(3x-1)=-\sqrt{3}$;

3) $\operatorname{ctg}(4x+1)=-1$; 4) $\sqrt{3}\operatorname{tg}(2x+3)=-1$.

3.112. Найдите корни уравнения, удовлетворяющие условию $a < x < b$:

1) $3\operatorname{tg}\left(2\pi x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$, если $a=1$, $b=4$;

2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(2\pi x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$, если $a=-2$, $b=1$;

3) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)+1=0$, если $a=-2$, $b=3$;

4) $3\operatorname{ctg}\left(3\pi x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$, если $a=-1$, $b=1$.

3.113. Решите уравнение на промежутке I:

1) $\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+\sqrt{3}=0$, если $I=\left(-\frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2 x}{2\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0,$ если $I=\left(-\dfrac{3\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right);$

3) $\dfrac{\operatorname{ctg}5x\operatorname{ctg}8x+1}{\operatorname{ctg}5x-\operatorname{ctg}8x}+1=0,$ если $I=\left(-\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{11\pi}{6}\right);$

4) $\dfrac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}5x}{1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}5x}=1,$ если $I=\left(-\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{11\pi}{6}\right);$

5) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-4x\right)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-4x\right)}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},$ если $I=\left(-\dfrac{7\pi}{6};\ \dfrac{7\pi}{6}\right];$

6) $\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+2x\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+2x\right)}=-\sqrt{3},$ если $I=\left[-\dfrac{17\pi}{12};\ \dfrac{19\pi}{12}\right).$

3.114. Укажите по два промежутка значений переменной x, на которых каждое из уравнений $\operatorname{tg} x=-\dfrac{4}{5}$ и $\operatorname{ctg} x=-4$ имеет ровно m корней, если:

1) $m = 4;$ 2) $m = 1;$ 3) $m = 2;$ 4) $m = 3.$

3.115. На каждом из промежутков

а) $\left[\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right];$ б) $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right];$ в) $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right];$

г) $[\pi;\ 2\pi];$ д) $[-2;\ 3];$ е) $[1;\ 5]$

укажите число корней уравнения:

1) $\operatorname{tg} x = 13{,}2;$ 2) $\operatorname{ctg} x = 8{,}3.$

Решите уравнение **(3.116—3.117).**

3.116. 1) $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{10\,000}=10\,000;$

2) $\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{1\,000\,000}=1\,000\,000;$

3) $\operatorname{ctg}^3\dfrac{x}{1\,000\,000}=1\,000\,000;$ 4) $\operatorname{tg}^3\dfrac{x}{1000}=1000;$

5) $3\operatorname{tg}^2 x-1=0;$ 6) $1-3\operatorname{ctg}^2 x=0;$

7) $2\operatorname{ctg}^2 x+3\operatorname{ctg} x-2=0;$ 8) $2\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-6=0.$

3.117. 1) $\dfrac{\operatorname{ctg} x+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg} x+1}=0;$ 2) $\dfrac{\operatorname{ctg} x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg} x-1}=0;$

3) $\dfrac{2\operatorname{ctg} x-2}{4\operatorname{ctg}^2 x-3\operatorname{ctg} x}-\operatorname{tg} x=1+\dfrac{2}{4-3\operatorname{tg} x}$;

4) $\dfrac{12\operatorname{tg} x-2}{6\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x}-\operatorname{ctg} x=1+\dfrac{6}{6-\operatorname{ctg} x}$.

3.118*. 1) При каких значениях a имеет решение уравнение $\operatorname{ctg}^4 x-(a+2)\operatorname{ctg}^2 x-(a+3)=0$?

2) При каких значениях a имеет решение уравнение $\operatorname{tg}^4 x-(a+1)\operatorname{tg}^2 x-(a+2)=0$?

3.119*. Решите относительно x уравнение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} x-a}{a}=\dfrac{2a}{\operatorname{tg} x-a}$;　　2) $\dfrac{a}{\operatorname{tg} x}+\dfrac{a-1}{\operatorname{tg} x-1}=2$;

3) $\left|\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}-3\right|=a-3$;　　4) $\left|\operatorname{tg} x+\dfrac{3}{\operatorname{tg} x}-2\right|=a-1$.

3.9. Тригонометрические уравнения

Тригонометрические уравнения различными способами в конечном счете сводятся к простейшим тригонометрическим уравнениям.

Рассмотрим несколько способов решения тригонометрических уравнений.

1. Разложение на множители

Пример 1. Решить уравнение:

а) $(3\cos x+6)(2\sin 3x-2)=0$;　　б) $\sin 6x=\sin 3x$.

Решение. а) Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, а остальные при этом имеют смысл. Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$3\cos x+6=0 \qquad (1)$$

или

$$2\sin 3x-2=0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) решений не имеет (поясните почему).

Из уравнения (2) получим:

$$\sin 3x=1;$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

б) Уравнение $\sin 6x - \sin 3x = 0$, используя формулу синуса двойного аргумента[1], приведем к виду

$$2\sin 3x\cos 3x - \sin 3x = 0.$$

Решая его, получаем:

$$\sin 3x\,(2\cos 3x - 1) = 0;$$
$$\sin 3x = 0 \text{ или } \cos 3x = \frac{1}{2};$$
$$x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}, \text{ или } x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

2. Сведение к квадратному уравнению

Пример 2. Решить уравнение

$$\cos 6x - 4\cos 7x\cos 4x = 3 - 2\cos 11x.$$

Решение. Используя формулы

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \quad \text{и} \quad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

получаем:

$$2\cos^2 3x - 2(\cos 11x + \cos 3x) = 4 - 2\cos 11x;$$
$$\cos^2 3x - \cos 3x - 2 = 0.$$

Пусть $\cos 3x = y$, тогда $y^2 - y - 2 = 0$, откуда $y_1 = -1$, $y_2 = 2$. Итак,

$$\cos 3x = -1 \text{ или } \cos 3x = 2.$$

Второе уравнение решений не имеет, а из первого уравнения получим $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}(1 + 2k),\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение $2 - \cos x = 3\sin\frac{x}{2}$.

Решение. Решим уравнение, равносильное данному:

$$1 - \cos x - 3\sin\frac{x}{2} + 1 = 0;$$
$$\Big\downarrow \text{ применим формулу } 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \Big\downarrow$$
$$2\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2} + 1 = 0.$$

[1] В главе 2 нами были введены различные тригонометрические формулы (двойного угла, половинного угла). В главе 3, где рассматриваются тригонометрические функции числового аргумента, для названия уже знакомых формул естественно употреблять вместо слова «угол» слово «аргумент».

Пусть $\sin\frac{x}{2}=y$, тогда $2y^2-3y+1=0$, откуда $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=1$.

Итак, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \qquad (3)$$

или

$$\sin\frac{x}{2}=1. \qquad (4)$$

Решая уравнение (3), получаем

$$\frac{x}{2}=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z},\ \text{откуда}\ x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Решая уравнение (4), получаем

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\ \text{откуда}\ x=\pi+4\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\ \pi+4\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Пример 4. Решить уравнение $2\,\mathrm{tg}\,x-2\,\mathrm{ctg}\,x=3$.

Решение. Из условия следует, что $x\neq\frac{\pi m}{2}$, $m\in\boldsymbol{Z}$ (поясните почему). Поэтому, умножив данное уравнение на $\mathrm{tg}\,x$, получим $\left(\text{при } x\neq\frac{\pi m}{2},\ m\in\boldsymbol{Z}\right)$ равносильное ему уравнение

$$2\,\mathrm{tg}^2\,x-2=3\,\mathrm{tg}\,x.$$

Решив последнее уравнение, получим:

$$\mathrm{tg}\,x=-\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \mathrm{tg}\,x=2;$$

$$x=-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}, \quad \text{или} \quad x=\mathrm{arctg}\,2+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\ \mathrm{arctg}\,2+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

3. Сведение к однородному уравнению

Пример 5. Решить уравнение

$$7\sin x-5\cos x=0. \qquad (5)$$

Решение. Если x — решение этого уравнения, то $\sin x\neq 0$ и $\cos x\neq 0$ (поясните почему). Поэтому, разделив обе части уравнения на $\cos x$, получим равносильное ему уравнение $7\,\mathrm{tg}\,x-5=0$, откуда $\mathrm{tg}\,x=\frac{5}{7}$, т. е. $x=\mathrm{arctg}\,\frac{5}{7}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\mathrm{arctg}\frac{5}{7}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sin^2 x-5\sin x\cos x+6\cos^2 x=0. \qquad (6)$$

Решение. Если x — решение этого уравнения, то $\cos x \neq 0$ (объясните почему).

Разделив обе части уравнения (6) на $\cos^2 x$, получим равносильное ему уравнение $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5\sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{6\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$, т. е.

$$\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 6 = 0.$$

Откуда находим:

$$\operatorname{tg} x = 2 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = 3;$$

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \quad \text{или} \quad x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 7. Решить уравнение $7\sin^2 x - 5\sin x \cos x = 6$.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$7\sin^2 x - 5\sin x \cos x = 6(\sin^2 x + \cos^2 x);$$
$$\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 6\cos^2 x = 0.$$

Полученное уравнение решается аналогично уравнению из примера 6 (убедитесь в этом самостоятельно).

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg} 6 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

▲ Уравнения вида (5) и (6) называются *однородными уравнениями первой и второй степени* соответственно относительно выражений $\sin x$ и $\cos x$.

Приведем примеры однородных тригонометрических уравнений других степеней. Так, уравнение

$$\sin^4 x - 3\sin^3 x \cos x + 5\sin^2 x \cos^2 x + 13\cos^4 x = 0$$

является однородным уравнением четвертой степени относительно $\sin x$ и $\cos x$, а уравнение

$$\sin^5 5x \cos^2 5x + 9\sin 5x \cos^6 5x - \sin^7 5x + 3\cos^7 5x = 0$$

является однородным уравнением седьмой степени относительно $\sin 5x$ и $\cos 5x$.

Однородные уравнения бывают не только тригонометрическими. Например, уравнение $2x^3 - 4x^2y + 3xy^2 - 5y^3 = 0$ — однородное уравнение третьей степени относительно переменных x и y. ▲

?

1. Поясните, как решать уравнение:

а) $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\cos 2x + 1)\operatorname{tg} x = 0$; б) $\sin 7x + \sin 3x = 0$.

2. Поясните, как решать уравнение:
а) $a\cos^2 5x + b\cos 5x + c = 0$;
б) $a\sin x + b\cos x = 0$;
в) $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$.

Упражнения

Решите уравнение **(3.120—3.125).**

3.120°. 1) $\sin 2x - \cos x = 0$; 2) $\cos 4x + \sin 8x = 0$;

3) $2\sin\frac{x}{2} = 3\sin^2\frac{x}{2}$; 4) $5\sin\frac{7x}{2} = 8\sin^2\frac{7x}{2}$;

5) $\cos^2 3x - \cos 3x\cos 5x = 0$;

6) $\cos^2\frac{5x}{5} - \cos\frac{5x}{3}\cos\frac{4x}{3} = 0$;

7) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 2x$;

8) $\sqrt{3}\cos^2 4x - \sqrt{3}\sin^2 4x = 2\cos^2 8x$.

3.121. 1) $6\cos(2x+6) + 16\sqrt{3}\sin(x+3) - 21 = 0$;

2) $\cos(6x-8) - 3\sqrt{2}\cos(3x-4) + 3 = 0$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2x}{3}\right) = 3 + 7\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{3}\right)$;

4) $\cos\left(\frac{4\pi}{5} - x\right) = 11\sin\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{x}{2}\right) - 5$.

3.122. 1) $3\cos\frac{x}{2} + 20\cos\frac{x}{4} + 9 = 0$; 2) $\cos\frac{x}{3} - 10\sin\frac{x}{6} = 9$;

3) $\cos\frac{4x}{3} - 5\sin\frac{2x}{3} - 3 = 0$; 4) $\cos\frac{8x}{5} - 3\cos\frac{4x}{5} + 2 = 0$.

3.123. 1) $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$; 2) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}$;

3) $\operatorname{tg} 2(x+\pi) + 4 = 5\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi - x}{2} + 2\operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = 1$.

3.124. 1) $3 + 2\operatorname{tg}^2 5x - \frac{3}{\cos 5x} = 0$; 2) $\operatorname{tg}^2 2x - \frac{1}{\cos 2x} = 5$;

3) $2 - 4\operatorname{tg} 0{,}1x + \frac{1}{\cos^2 0{,}1x} = 0$;

4) $4 - 6\operatorname{tg} 0{,}5x + \frac{1}{\cos^2 0{,}5x} = 0$.

3.125. 1) $\sin 2x = \operatorname{tg} 2x$; 2) $\operatorname{ctg} 1{,}5x = \cos 1{,}5x$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{7\pi}{3}+x\right)}{\cos\frac{\pi}{3}\cos x}$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{\cos\left(\frac{9\pi}{4}-x\right)}{\sin\frac{\pi}{6}\sin x}$.

3.126. Сколько корней на промежутке $[-4; -2]$ имеет уравнение:

1) $\sin x = 2\sin^3 x - \cos 2x$; 2) $2\cos^3 2x = \cos 2x + \cos 4x$;
3) $\sin 2x + 2\sin x = 1 + \cos x$;
4) $\sin x - 2\cos\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2} - 1$?

3.127. Найдите наименьший положительный корень уравнения:

1) $2\cos 2x + 8\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 3$;

2) $6\cos 2x - 8\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3 = 0$.

Решите уравнение **(3.128—3.131)**.

3.128°. 1) $\sin x + \cos x = 0$; 2) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;
3) $2\sin x - 3\cos x = 0$; 4) $\frac{1}{2}\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;
5) $3\sin x + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$; 6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 5\cos x = 0$.

3.129. 1) $\sin^2 x + 14\sin x\cos x - 15\cos^2 x = 0$;
2) $\cos^2 x - 12\sin x\cos x - 13\sin^2 x = 0$;
3) $2\cos^2 x - \sin 2x + 4\sin^2 x = 2$;
4) $6 - 10\cos^2 x + 4\cos 2x = \sin 2x$;
5) $4\sin 2x = 3\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 4\sin^2\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$;
6) $1{,}5\sin 2x = 2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 9\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

3.130*. 1) $\sqrt{1 + 2\sin 4x\cos x} - \sqrt{\sin 3x} = 0$;
2) $\sqrt{1 - 2\sin 3x\sin 7x} - \sqrt{\cos 10x} = 0$;
3) $3\sqrt{\cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)} - \sqrt{1 + \cos\frac{x}{2}} = \sqrt{2}$;
4) $\sqrt{1 - \cos\frac{x}{2}} + \sqrt{\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}$.

3.131*. 1) $|\cos x - \sin x| = 1 + 2\sin 2x$;

2) $|\cos x + \sin x| = 1 + 2\sin 2x$;

3) $1 + 2|\sin x| = 2\cos 2x$;

4) $1 - 2|\cos x| = 2\cos 2x - \sqrt{3}$;

5) $\left|\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{2}{5}\right| = 5\cos x + 1$;

6) $\left|1 - 5\sin \frac{x}{4}\right| = 3 - \cos \frac{x}{2}$.

3.132*. Решите уравнение относительно x:

1) $a\sin^2 x - \sin x = 0$; 2) $a\cos^2 x + \cos x = 0$;
3) $a\sin^2 x - \cos x = 0$; 4) $a\cos^2 x + \sin x = 0$.

Решите уравнение **(3.133—3.137).**

3.133. 1) $\sin 7x - \sin 3x = \cos 5x$; 2) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$;
3) $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x - \sin 7x = 0$;
4) $\cos 6x - \cos 4x + \cos 7x - \cos 3x = 0$.

3.134. 1) $\dfrac{\sin 4x + \sin 8x}{2x^2 - 5\pi x + 2\pi^2} = \dfrac{\sin 6x + \sin 10x}{2x^2 - 5\pi x + 2\pi^2}$;
2) $\dfrac{\cos 5x + \cos 7x}{12x^2 - 73\pi x + 6\pi^2} = \dfrac{\cos 10x + \cos 2x}{12x^2 - 73\pi x + 6\pi^2}$.

3.135. 1) $\sin^3 4x - \sin^2 4x = \sin^2 4x \cos^2 4x$;
2) $6\sin^2 5x \cos^2 5x - 5\sin^3 5x + 5\sin^2 5x = 0$;
3) $\sin 2x \cos 2x - \sin x \cos x = 0$;
4) $\sin 4x \cos 8x - \sqrt{2}\sin 2x \cos 2x = 0$.

3.136. 1) $\sin x \cos 3x - 1 = \sin x - \cos 3x$;
2) $\sin 4x \cos 2x + 1 + \cos 2x + \sin 4x = 0$;
3) $\cos 8x \cos 4x + \frac{1}{2}\cos 4x + \cos 8x + \frac{1}{2} = 0$;
4) $\sin 6x \sin 3x - \frac{1}{2}\sin 3x - \sin 6x = -\frac{1}{2}$;
5) $10\sin 9x \sin 5x - 3\cos 8x + 5\cos 14x = 4$;
6) $8\sin 2x \sin 5x - 5\cos 6x + 4\cos 7x = -1$.

3.137. 1) $(\cos 2x + 2)(\sin 2x + 1)\sqrt{\sin x} = 0$;
2) $(\cos 3x - 2)(\sin 3x - 1)\sqrt{\cos x} = 0$;

3) $\sqrt{\sin x}(\sin 4x-2)(\cos 4x+1)=0;$

4) $\sqrt{\cos x}(\sin 2x+2)(\cos 2x-1)=0;$

5) $\sqrt{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} 4x+1)(\operatorname{ctg} 4x+1)=0;$

6) $(\operatorname{tg} 2x-1)(\operatorname{ctg} 2x+1)\sqrt{\operatorname{ctg} 2x}=0.$

▲ 3.10. Тригонометрические уравнения (продолжение)

Существует много приемов решения тригонометрических уравнений. Покажем некоторые из них.

1. Разложение на множители

Пример 1. Решить уравнение:

а) $\cos 15x = -2\cos 5x;$ б) $\sqrt{\cos x}(\sin x-2)(\cos x+1)=0.$

Решение. а) Данное уравнение равносильно уравнению $\cos 15x + \cos 5x + \cos 5x = 0$, решая которое получаем:

$$2\cos 10x \cos 5x + \cos 5x = 0, \text{ т. е. } 2\cos 5x\left(\cos 10x + \frac{1}{2}\right)=0;$$

$$\cos 5x = 0 \text{ или } \cos 10x = -\frac{1}{2}, \text{ откуда имеем:}$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \text{ или } 10x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5},\ k \in \boldsymbol{Z}, \text{ или } x = \pm\frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

б) Данное уравнение равносильно тому, что:

$$\sqrt{\cos x} = 0 \qquad (1)$$

или

$$\sin x - 2 = 0 \text{ и } \cos x \geqslant 0 \qquad (2)$$

или

$$\cos x + 1 = 0 \text{ и } \cos x \geqslant 0. \qquad (3)$$

В случаях (2) и (3) решений нет (поясните почему), а из уравнения (1) получим:

$$\cos x = 0, \text{ откуда находим } x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi(1+2k)}{10},\ k \in \boldsymbol{Z};\ \pm\frac{\pi(1+3n)}{15},\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

Решение. Из формулы $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ следует, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta)$. Используя это следствие для данного уравнения, получаем равносильное ему:

$$\operatorname{tg}(x+2x)(1-\operatorname{tg}x\,\operatorname{tg}2x)=\operatorname{tg}3x;$$
$$\operatorname{tg}3x\,\operatorname{tg}x\,\operatorname{tg}2x=0.$$

Функция $f(x)=\operatorname{tg}x\,\operatorname{tg}2x\,\operatorname{tg}3x$ периодическая с периодом π (убедитесь в этом). Ее нули на промежутке $[0;\ \pi]$ — это те значения x, при которых один из множителей равен нулю, а остальные имеют смысл. Значения x, при которых один из множителей равен нулю, это: $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ (поясните почему). При всех этих значениях x, кроме $\frac{\pi}{2}$, все множители имеют смысл (поясните почему). Следовательно, 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ — нули функции f на промежутке $[0;\ \pi]$. Учитывая периодичность, получаем $x=\frac{\pi}{3}\cdot n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi n}{3},\ n\in \boldsymbol{Z}$.

2. Использование формул двойного и половинного аргумента

Пример 3. Решить уравнение $2\sin x - 3\cos x = 3$.

Решение. Используя формулы двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$2\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-3\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=3\sin^2\frac{x}{2}+3\cos^2\frac{x}{2};$$

$$3\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0;$$
$$\cos\frac{x}{2}\left(3\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\right)=0.$$

Откуда имеем

$$\cos\frac{x}{2}=0 \qquad (4)$$

или

$$3\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}=0. \qquad (5)$$

Решениями уравнения (4) являются числа $x=\pi+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. Решениями уравнения (5) — однородного уравнения первой степени относительно $\sin x$ и $\cos x$, которое равносильно уравнению $3-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0,$ — являются числа $x=2\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2\pi k,$ $k\in \boldsymbol{Z}$ (убедитесь в этом).

Ответ: $\pi+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};\ 2\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$

Пример 4. Решить уравнение $\cos^2 x+3\cos^2\frac{x}{2}=\frac{5}{2}.$

Решение. Используем формулу половинного аргумента (еще говорят «*формулу понижения степени*»):

$$\cos^2 x+3\frac{1+\cos x}{2}=\frac{5}{2},\text{ т. е. } 2\cos^2 x+3\cos x-2=0,\text{ откуда}$$

$$\cos x=-2 \text{ или } \cos x=\frac{1}{2}.$$

Первое уравнение не имеет решений, а решениями второго являются значения $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

Пример 5. Решить уравнение $\sin^2 x-\cos 2x=1{,}5-\sin 2x.$

Решение. Используя формулы двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество, получаем уравнение, равносильное данному:

$$\sin^2 x-(\cos^2 x-\sin^2 x)=1{,}5(\sin^2 x+\cos^2 x)-2\sin x\cos x.$$

Это однородное уравнение второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Решив его, получим:

$$x=-\operatorname{arctg}5+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z},\quad\text{или}\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\operatorname{arctg}5+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z};\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

3. Использование универсальной подстановки

Пример 6. Решить уравнение

$$\cos 4x+\operatorname{tg}2x=1. \qquad (6)$$

Решение. По условию $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}$ (область определения функции $y=\operatorname{tg}2x$). Использовав формулу $\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$ получим уравнение, равносильное уравнению (6) (поясните почему):

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x}+\operatorname{tg}2x=1.$$

Пусть $\operatorname{tg}2x=u$, тогда имеем:

$\frac{1-u^2}{1+u^2}+u-1=0$, т. е. $(1-u)\frac{u(1-u)}{1+u^2}=0$, откуда $u_1 = 1$, $u_2 = 0$.

Учитывая обозначение, получаем:

$$\operatorname{tg} 2x = 1 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} 2x = 0,$$

откуда находим: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, или $x=\frac{\pi m}{2}$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi m}{2}$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

4. Введение вспомогательного аргумента

Пример 7. Решить уравнение:

а) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2$; б) $2\sin x - 3\cos x = 3$.

Решение. а) Преобразуем левую часть уравнения, используя введение вспомогательного аргумента (см. п. 2.15):

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

Исходное уравнение равносильно уравнению $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2$. Решив его, получим $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

б) *Способ 1*. Преобразуем левую часть данного уравнения, используя введение вспомогательного аргумента. Получим:

$$2\sin x - 3\cos x = \sqrt{2^2+3^2}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x-\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x\right)=$$

$$=\sqrt{13}\,(\cos\varphi\,\sin x - \sin\varphi\,\cos x)=\sqrt{13}\sin(x-\varphi), \text{ где } \varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{13}\sin(x-\varphi) = 3$, где $\varphi = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$.

Решая его, получаем уравнение, равносильное данному:

$$\sin(x-\varphi)=\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Решив его, находим

$$x=(1+(-1)^k)\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $(1+(-1)^k)\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Способ 2. Если решать уравнение б) с использованием универсальных подстановок, то заменив в данном уравнении выражения $\sin x$ и $\cos x$ универсальными подстановками при $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, получим уравнение

$$2\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 3\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 3.$$

Решая его, получаем уравнение, равносильное данному:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{3}{2}, \text{ откуда } x = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Подставим в исходное уравнение исключенные при использовании универсальных подстановок значения $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$:

$$2\sin(\pi + 2\pi k) - 3\cos(\pi + 2\pi k) = 3.$$

Получаем $2 \cdot 0 - 3\,(-1) = 3$, т. е. $3 = 3$ — верное числовое равенство.

Итак, значения $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, также являются решениями уравнения б).

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

5. Использование свойств функций

Пример 8. Решить уравнение

$$1 + 2\operatorname{ctg}^2 x = \cos 8x. \qquad (7)$$

Решение. Поскольку при любых значениях x из области определения уравнения (7) верны неравенства $1 + 2\operatorname{ctg}^2 x \geqslant 1$ и $\cos 8x \leqslant 1$, то равенство (7) возможно, лишь когда

$$\begin{cases} 1 + 2\operatorname{ctg}^2 x = 1, \\ \cos 8x = 1. \end{cases}$$

Решив первое уравнение этой системы, получим $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Подставив полученное решение во второе уравнение системы, имеем $\cos\left(8\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)\right) = 1$ — верное числовое равенство.

Значит, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, — решение системы и, следовательно, исходного уравнения.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 9. Решить уравнение $7\sin^4 x + 3\cos^{12} 2x = 10$.

Решение. Уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sin^4 x = 1, \\ \cos^{12} 2x = 1. \end{cases}$$

Решив первое уравнение этой системы, получим:

$$\sin x = -1 \text{ или } \sin x = 1,$$

откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ (поясните почему).

Подставив эти значения x во второе уравнение системы, получим $\cos^{12} 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 1,\ n \in \boldsymbol{Z}$, т. е. $\cos^{12}(\pi + 2\pi) = 1$ — верное числовое равенство.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 10. Решить уравнение $\operatorname{tg}^8 x + \sin^8 x - \frac{17}{16} = 0$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Пусть $f(x) = \operatorname{tg}^8 x + \sin^8 x - \frac{17}{16}$ — функция с областью определения $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Надо найти ее нули.

Функция $f(x)$ является четной, поскольку

$$f(-x) = \operatorname{tg}^8(-x) + \sin^8(-x) - \frac{17}{16} = \operatorname{tg}^8 x + \sin^8 x - \frac{17}{16} = f(x).$$

На промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ функции $y = \operatorname{tg}^8 x$ и $y = \sin^8 x$ являются возрастающими (объясните почему). Значит, является возрастающей и функция $y = f(x)$.

Значение $x = \frac{\pi}{4}$ является нулем функции f:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}^8\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^8\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{17}{16} = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 - \frac{17}{16} = \frac{2^4}{2^8} - \frac{1}{16} = 0,$$

и других нулей на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ функция f не имеет. А поскольку f — четная функция, то $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}$.

Пример 11. Решить уравнение $7\operatorname{ctg}^{47} x - 3 = 4\operatorname{tg}^{13} x$ на промежутке $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Легко убедиться, что $x=\frac{\pi}{4}$ является решением данного уравнения на промежутке $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. На этом промежутке функция $f(x) = 7\operatorname{ctg}^{47} x - 3$ убывающая (это следует из убывания на промежутке $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = \operatorname{ctg}^{47} x$), а функция $g(x) = 4\operatorname{tg}^{13} x$ — возрастающая (это следует из возрастания на промежутке $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{tg}^{13} x$).

Таким образом, на промежутке $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ $x=\frac{\pi}{4}$ — единственное решение.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Упражнения

Решите уравнение (3.138—3.151).

3.138. 1) $\sin 18x - 2\sin 6x = 0$; 2) $\sin 21x + 2\sin 7x = 0$;
3) $2\cos 3x + \cos 9x = 0$; 4) $2\cos 4x - \cos 12x = 0$.

3.139. 1) $\sin\frac{3x}{2} + 2\cos x = 2$; 2) $\cos\frac{9x}{2} + 2\cos 3x = -2$;
3) $0{,}5(\sin 3x - \sin x) = \sin 2x\cos x - 4\sin^3 x$;
4) $0{,}5(\cos 3x - \cos x) = 2\sin^2 x\cos x + 4\cos^3 x$;
5) $\cos^3 x\cos 3x + \sin^3 x\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$;
6) $\sin^3 x\cos 3x + \cos^3 x\sin 3x = -\frac{3}{8}$;
7)* $\sin^3 x\sin 3x + \cos^3 x\cos 3x = \cos^3 4x$;
8)* $4\sin^3 x\cos 3x + 4\cos^3 x\sin 3x = 3\sin 2x$.

3.140. 1) $5\sin x - 12\cos x = 13$; 2) $8\sin x - 15\cos x = 17$;
3) $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos 2x = 1$; 4) $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = -1$;
5) $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = \sqrt{2}$; 6) $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = \sqrt{2}$;
7) $2\sin\frac{x}{4} + \sqrt{2}\cos\frac{x}{4} = \sqrt{6}$; 8) $\sin\frac{x}{4} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{4} = -\sqrt{3}$.

3.141. 1) $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$;
2) $\cos 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$;
3) $\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$;

4) $4\sin 5x\cos 5x(\cos^4 x-\sin^4 x)=\sin 4x$;

5) $\sin 10x+\cos 10x=\sqrt{2}\cos 15x$;

6) $\sqrt{2}\sin 18x-\sin 12x+\cos 12x=0$;

7) $2\sin^4 2x-3+3\sin 4x=2\cos^4 2x$;

8) $2\cos^4\frac{x}{2}+\sqrt{15}-4\sin x=2\sin^4\frac{x}{2}$.

3.142. 1) $\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}5x=0$; 2) $\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}5x=0$;

3) $\operatorname{ctg}3x-\operatorname{ctg}x=0$; 4) $\operatorname{ctg}7x+\operatorname{ctg}x=0$;

5) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-2\operatorname{tg}3x=0$;

6) $\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}3x-2\operatorname{tg}2x=0$;

7) $\operatorname{tg}1-\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}(1-x)=0$;

8) $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-2\sin 2x=0$.

3.143. 1) $\frac{1+\cos x}{1-\sin x}=3$; 2) $\frac{1-\cos x}{1+\sin x}=\frac{1}{3}$.

3.144. 1) $\cos 2x\operatorname{ctg}3x-\sin 2x-\sqrt{2}\cos 5x=0$;

2) $\cos 3x\operatorname{tg}2x+\sin 3x+\sqrt{2}\sin 5x=0$;

3) $\cos 2x\operatorname{tg}6x-\sin 2x-2\sin 4x=0$;

4) $\cos 3x\operatorname{ctg}6x-\sin 3x+2\cos 9x=0$.

3.145. 1) $\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}$; 2) $4\sin 4x\sin 12x=\frac{5}{4}$;

3) $\cos 2x\cos 6x=-\frac{1}{2}$; 4) $\cos 3x\cos 9x=-\frac{5}{16}$.

3.146. 1) $4\sin^2 x+\sin^2 2x=3$; 2) $6\sin^2 x+2\sin^2 2x=5$;

3) $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=1{,}5$;

4) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$;

5) $\sin^2 3x+\sin^2 4x-\sin^2 5x-\sin^2 6x=0$;

6) $\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2$.

3.147. 1) $2\sin^2\frac{x}{2}+\cos 2x=0$;

2) $3\cos^2 x-3\sin^2 x+\cos 2x=0$;

3) $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0{,}25$;

4) $\sin^4\frac{x}{6}+\cos^4\frac{x}{6}=\frac{5}{8}$; 5) $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 4x$;

6) $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x$;

7)* $\cos^6 x-\sin^6 x=\frac{13}{8}\cos^2 2x$;

8)* $\cos^6\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin^6\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

3.148. 1) $3\cos 4x-2\sin^2 2x-\sin 4x=0$;

2) $5\sin^2 2x+0{,}5\sin 4x-\cos 4x=0$;

3) $\sin 4x+3\cos 4x=2\sin^2 2x$;

4) $4\sin^2 2x+\sin 4x=3$;

5) $5\sin^2 2x+3\cos 4x=2{,}5\sin 4x$;

6) $4\cos 4x+0{,}5\sin 4x=\sin^2 2x$;

7) $2\cos 6x+3\sin^2 3x=1{,}5\sin 6x$;

8) $5\sin^2\frac{x}{3}+2\cos\frac{2x}{3}-3{,}5\sin\frac{2x}{3}=0$.

3.149. 1) $\sin x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$; 2) $1+\cos x=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;

3) $2\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x=2$; 4) $3\operatorname{ctg}^2 x+2\cos^2 x=6$;

5) $\dfrac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$; 6) $\sin 4x+3\sin 2x=\operatorname{tg} x$.

3.150*. 1) $\sin 5x+\cos 4x=2$; 2) $\cos 4x-\sin 5x=2$;

3) $5\sin 3x+3\cos 4x=8$; 4) $3\cos 4x-5\sin 3x=8$;

5) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)$;

6) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

7) $\dfrac{5}{\sin\left(x+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}=3\sin x+4\cos x$;

8) $\dfrac{13}{\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg}2{,}4\right)}=5\sin x+12\cos x$.

3.151*. 1) $5\sin^2 x+8\cos x+1=|\cos x|+\cos^2 x$;

2) $3\cos 2x+2\sin^2 x+4\sin|x|=0$;

3) $2\cos x-3\sin x-|\sin x|=0$;

4) $2\cos x-3\sin x-|\cos x|=0$;

5) $3\cos|x|+4\sin x-\sin|x|=0$;

6) $4\cos|x|-3\sin x-\sin|x|=0$;

7) $3\sin^2 2x - 2 - 0{,}5|\sin 4x| = 0$;

8) $5\cos^2 2x - 2{,}5|\sin 4x| - 3 = 0$;

9) $\cos 2x + \cos 6x = |\cos 4x|$;

10) $\left|\sqrt{3}\cos 8x\right| = \sin 12x - \sin 4x$.

3.152*. При каких значениях a имеет решение уравнение:

1) $5\sin 2x - 6\cos 2x = a$; 2) $7\cos 4x - 3\sin 4x = a$;

3) $5\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) + a\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 6$;

4) $3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - a\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = 4$?

3.153*. Решите относительно x уравнение:

1) $\sin^4 \frac{4x}{5} + \cos^4 \frac{4x}{5} = a$;

2) $\sin^4 x + \cos^4 x - a\sin(4x + \pi) = 0$;

3) $a - \cos(\pi - x) + \sin\frac{\pi + x}{2} = 0$;

4) $\sin^4 2x + \cos^4 2x + \sin 4x = a$.

▲ 3.11. Системы тригонометрических уравнений

Рассмотрим несколько систем, содержащих тригонометрические уравнения.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -\frac{10}{3}. \end{cases}$

Решение. *Способ 1.* Выразим y через x из первого уравнения данной системы и подставим во второе уравнение. Получим:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x, & (1) \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{10}{3}. & (2) \end{cases}$$

Преобразуем уравнение (2), используя формулу тангенса разности, и решим равносильное ему уравнение относительно $\operatorname{tg} x$:

$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} = -\frac{10}{3}$, откуда $3\operatorname{tg}^2 x - 13\operatorname{tg} x - 10 = 0$, значит,

$$\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} \text{ или } \operatorname{tg} x = 5.$$

Учитывая уравнение (1), получаем равносильную исходной системе совокупность:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x, \\ \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x, \\ \operatorname{tg} x = 5. \end{cases}$$

Решив каждую из этих систем, находим решения исходной системы уравнений.

О т в е т: $x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n,\ \ y = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z};$

$$x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k,\ y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 5 - \pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

З а м е ч а н и е. Ответ к системе уравнений может быть записан и в виде множества пар:

$$\left(-\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi n\right),\ \ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\left(\operatorname{arctg} 5 + \pi k,\ \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 5 - \pi k\right),\ \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Способ 2. Напомним формулу $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$. С ее помощью, учитывая условие, получим еще одно соотношение между переменными x и y (поясните как): $1 = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 + \frac{10}{3}}$,

откуда имеем $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{13}{3}$, т. е. $\operatorname{tg} y = \frac{13}{3} - \operatorname{tg} x$.

Поскольку по условию $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -\frac{10}{3}$, то $\operatorname{tg} x\left(\frac{13}{3} - \operatorname{tg} x\right) = -\frac{10}{3}$.

Откуда получаем уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - 13\operatorname{tg} x - 10 = 0$.

Дальнейшее решение совпадает с решением способом 1.

П р и м е р 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Складывая и вычитая почленно уравнения этой системы, приходим к равносильной ей системе уравнений

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда получим

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x + y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x + y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x + y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Решив их, получим:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi(k+n),\ n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{Z}, \qquad y = -\frac{\pi}{3} + \pi(k-n),\ n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{Z},$$

или

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi(k+n),\ n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{Z}, \qquad y = \frac{\pi}{3} + \pi(k-n),\ n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

О т в е т: $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi(k+n);\ -\frac{\pi}{3} + \pi(k-n)\right)$;

$\left(\frac{\pi}{3} + \pi(k+n);\ \frac{\pi}{3} + \pi(k-n)\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

?

1. Что называется решением системы уравнений с двумя переменными (неизвестными)?
2. Приведите примеры систем тригонометрических уравнений.

Упражнения

Решите систему уравнений **(3.154—3.164)**.

3.154. 1) $\begin{cases} y + \sin x = 5, \\ 4y + 2\sin x = 19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y + 2\operatorname{tg} x = 4, \\ 2y + 3\operatorname{tg} x = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{2}y + \sqrt{12}\operatorname{ctg} x = 2, \\ 2\sqrt{2}y + \sqrt{27}\operatorname{ctg} x = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4y + \sqrt{3}\cos x = -0{,}5, \\ 28y + 4\sqrt{3}\cos x = 1. \end{cases}$

3.155. 1) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x + \sin y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x - \cos y = -0{,}5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\sqrt{3}. \end{cases}$

3.156. 1) $\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \sin(x-y)=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin(x+y)=0{,}5,\\ \cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2};\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sin(x+y)=\frac{1}{2},\\ \operatorname{tg}(x-y)=1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\cos(x-y)=1,\\ \cos(x+y)=0{,}5.\end{cases}$

3.157. 1) $\begin{cases}x+y=\frac{7\pi}{3},\\ \sin^2 x+\sin^2 y=1{,}5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=\frac{5\pi}{2},\\ \cos^2 x+\sin^2 y=1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+y=\frac{9\pi}{2},\\ \sin^2 x-\cos^2 y=1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-y=\frac{13\pi}{2},\\ 3\cos^2 x-12\cos y=15.\end{cases}$

3.158. 1) $\begin{cases}x+y=0{,}75\pi,\\ \sin x\sin y=\frac{\sqrt{2}}{2};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{3},\\ \cos x\cos y=0{,}5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{4},\\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\frac{1}{6};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{3},\\ \operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y=-\frac{1}{3}.\end{cases}$

3.159. 1) $\begin{cases}x-y=195^\circ,\\ \frac{\sin x}{\sin y}=-\frac{\sqrt{6}}{3};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=15^\circ,\\ \frac{\sin x}{\cos y}=\sqrt{\frac{3}{2}};\end{cases}$

3) $\begin{cases}x-y=-30^\circ,\\ \frac{\cos x}{\cos y}=\frac{\sqrt{3}}{3};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-y=30^\circ,\\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=3.\end{cases}$

3.160. 1) $\begin{cases}\sin x-\cos y=1,\\ \sin x+\cos y=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x+\sin y=\frac{1}{2},\\ \cos x-\sin y=\frac{1}{2};\end{cases}$

3) $\begin{cases}6\cos x+8\cos y=3\sqrt{2}-4,\\ 10\cos x-14\cos y=5\sqrt{2}+7;\end{cases}$

4) $\begin{cases}4\sin x+10\cos 2y=5\sqrt{3}-2,\\ 6\sin x+4\cos 2y=2\sqrt{3}-3.\end{cases}$

3.161. 1) $\begin{cases}\sin x\sin y=0{,}25,\\ \cos x\cos y=0{,}75;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{\sqrt{3}}{4},\\ \cos x\cos y=\frac{\sqrt{3}}{4};\end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$

3.162. 1) $\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ 4 \sin y - 6\sqrt{2} \cos x = 5 + 4\cos^2 y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1 + 2\cos 2x = 0, \\ \sqrt{6} \cos y - 4 \sin x = 2\sqrt{3}(1 + \sin^2 y); \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4\sqrt{3} \cos x + 2 \sin y = 7, \\ 2\sqrt{3} \cos x + 6 \sin y = 3 + 12 \sin^2 x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2\left(5 + 2\sqrt{6}\right) \sin x + 2 \cos y = 2\sqrt{2} \cos 2x - 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}, \\ 2\left(3 + \sqrt{6}\right) \sin x - 2 \cos y + 4\sqrt{2} + 3\sqrt{3} = 0. \end{cases}$

3.163*. 1) $\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y - 1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} = 0, \\ \cos^2 x + 0{,}25 \operatorname{tg} y - 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y + 0{,}25}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}} = 0, \\ 4\cos^2 x = 1 - \operatorname{tg} y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3\cos 2x - \operatorname{ctg} y + 2{,}25}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} = 0, \\ 18 \sin^2 x - 2 \operatorname{ctg} y - 12 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{\frac{11}{9} - \cos^2 x + \operatorname{ctg} y}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}} = 0, \\ 4 \sin^2 x = 2 \operatorname{tg} y + 9. \end{cases}$

3.164*. 1) $\begin{cases} \sin^2(-2x) - \left(3 - \sqrt{2}\right) \operatorname{tg} 5y = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + \left(3 - \sqrt{2}\right) \sin(-2x) = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos^2(-4x) + \dfrac{\sqrt{26} - 2}{2} \operatorname{tg}(-2y) = \dfrac{\sqrt{26} - 1}{4}, \\ \operatorname{tg}^2(-2y) - \dfrac{\sqrt{26} - 2}{2} \cos(-4x) = \dfrac{\sqrt{26} - 1}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin^2 3x + \left(4 - \sqrt{3}\right) \operatorname{ctg}(-7y) = 2\sqrt{3} - 0{,}75, \\ \operatorname{ctg}^2(-7y) + \left(4 - \sqrt{3}\right) \sin 3x = 2\sqrt{3} - 0{,}75; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \cos^2(-6x) + \left(\sqrt{5} - 1\right) \operatorname{ctg}(-9y) = \dfrac{2\sqrt{5} - 1}{4}, \\ \operatorname{ctg}^2(-9y) + \left(\sqrt{5} - 1\right) \cos(-6x) = \dfrac{2\sqrt{5} - 1}{4}. \end{cases}$

ОТВЕТЫ

Глава 1. Производная и ее применение

1.1. б), в), д).
1.2. Рис. 10. а) $D(f) = [-4; 3]$; б) $E(f) = [-4; 4]$; в) -2; г) $(0; -3)$; рис. 12. а) $D(f) = [-3; 3]$; б) $E(f) = [0; 3]$; в) 0; г) $(0; 0)$.
1.3. Рис. 13. а) $[-2; 0]$; б) $[0; 2]$; в) $\approx 1,5$; г) 0; д) -2; 2; е) $(-2; 2)$; ж) $(0; \approx 1,5)$; з) $(-2; 0)$, $(2; 0)$; рис. 15. а) $[0; 2]$; б) $[-2; 0]$; в) 4; г) -2; д) -1; 1; е) $[-2; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; 2]$; ж) $(0; -2)$; з) $(-1; 0)$, $(1; 0)$.
1.4. 2) $(-\infty; 0,25]$; 4) $(-8; 5)$; 6) $[-7; -2) \cup (-2; 0) \cup [7; 13) \cup (13; +\infty)$.
1.5. 1) 4; 6; 3) -4; 1; 5) 1; 3; 6.
1.6. 2) Убывает на всей числовой прямой; 4) возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; 6) возрастает на всей числовой прямой.
1.7. 1) $(-\infty; 0)$, $\left(0; \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$, $(-2; +\infty)$; 5) $(-\infty; 1,64)$, $(1,64; 2]$.
1.8. 2) б), е). **1.10.** 2) $f(5) = -2$, $f(-16) = -1$, $f(1) = -2,5$, $f(3) = 4$.
1.13. 1) $f(5) > f(-2)$; $f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{1}{4}\right)$; 5) $f\left(2\sqrt{2}\right) < f\left(\sqrt{11}\right)$.
1.14. 2) $f(-100) > f(200)$; 4) $f\left(\frac{5}{7}\right) > f\left(\frac{17}{21}\right)$.
1.15. 1) 3; 3) $-1,5$; 5) $\frac{1}{6}$. **1.16.** 2) -1; 4) 2; 6) $-0,5$.
1.17. 1) $y = 4x - 2$; 3) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{20}{3}$.
1.18. 2) $y = \frac{2}{3}x - \frac{17}{3}$; 4) $y = -10x - 39$. **1.19.** 1) $y = -x - 1$; 3) $y = x - 1$.
1.20. $y=4x-9$ и $y=3+4x$; $y=5x-1$ и $y = \sqrt{25}x + 1$; $y=4-x$ и $y= (-1)^{15}x + 3$.
1.21. 1) $y = -x - 1$; 3) $y = -x + 3$. **1.22.** 2) $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$; 4) $y = 0,1x + 2,5$.
1.23. 1) $y = \frac{1}{8}x + 5\frac{5}{8}$; 3) $y = \frac{1}{8}x + 13\frac{7}{8}$.
1.24. 2) $y = \sqrt{3}x + 1 - 3\sqrt{3}$; 4) $y = -\sqrt{3}x + 1 + 3\sqrt{3}$.
1.25. 1) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$; 3) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
1.26. 2) -7. **1.27.** 1) $45°$. **1.28.** 2) $(0; 1)$; 4) $(-10; +\infty)$.
1.29. Например: 1) $(-1; 3)$, $(0; 4)$, $(1; 5)$; 3) $(-15; 0)$, $(-14; 0)$, $(-13; 0)$.
1.30. Например: 2) $-12,1$; $-12,2$; $-12,3$; 4) 40; 50; 60.
1.31. 1) $\Delta x = 8$; $\Delta f = -2$.
1.32. 2) $-3\Delta x$; 4) $-2x_0\Delta x - (\Delta x)^2$; 6) $-\frac{3\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$.
1.33. 1) $-1,2$; 3) 0,48; 5) 2,25.
1.34. 2) $\Delta x = 3,6$; $\Delta y = -1,8$; 4) $\Delta x = 2,2$; $\Delta y = -2\frac{107}{150}$.
1.35. 1) $\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$; 3) $\sqrt{4x_0 + 4 \cdot \Delta x - 1} - \sqrt{4x_0 - 1}$.
1.36. 2) $\Delta f > \Delta g$. **1.37.** 1) $y = -3x + 1$. **1.38.** 2) -3; 4) 14,4.
1.39. 1) 3; 3) 4. **1.40.** 2) 0; 4) 0. **1.41.** 1) 4; 3) $-2,5$; 5) $-0,5$.
1.42. 2) -7; 4) -1. **1.43.** 1) 3,5; 3) 0,8; 5) -9.
1.44. 2) -11; 4) -2; 6) -2. **1.45.** 1) -500; 3) 1; 5) 9,88.
1.46. 2) 5; 4) 1,5. **1.47.** 1) $y = 1$; 3) $y = 2x$; 5) $y = -2x$.

1.48. 2) $-\frac{2}{3}$; 4) 2. **1.49.** 1) $x \leqslant -0,1$; 3) $x \neq -1$; 5) нет решений.

1.50. 2) 6; 4) –1.

1.51. Например: 1) $y = 2x + 5$; 3) $y = x^2 - 3$; 5) $y = \frac{x^2}{2} + x - 9$;
7) $y = \sqrt{x} + 2x + 8$.

1.52. 2) $v_{ср} \approx 40\ \frac{км}{ч}$; 4) $v_{ср} \approx 110\ \frac{км}{ч}$. **1.53.** 1) 12; 3) $2t_0 + \Delta t$.

1.54. 2) $40\ \frac{м}{с}$. **1.55.** 1) 1 с; 3) 4 с. **1.56.** 2) $5\ \frac{м}{с}$.

1.57. 1) $2t\ \frac{рад}{с}$; 3) $16\ \frac{рад}{с}$. **1.58.** $8\ \frac{м}{с}$. **1.59.** 1) 3,5 с.

1.60. 2) 10 с. **1.61.** 1) $3\ \frac{град}{с}$; 3) $0,6\ \frac{град}{с}$. **1.62.** 2) $13\ \frac{м}{с}$.

1.63. 1) 5 с. **1.64.** $71\ \frac{А}{с}$. **1.65.** 1728 Дж.

1.66. 2) $6\ \frac{м}{с}$; 18 Дж; 4 Н. **1.67.** 1) $\left(4\sqrt{2} - 4\right)\ \frac{м}{с}$.

1.68. 2) «Минус». **1.69.** 1) «Минус».

1.70. 2) $k(x_1) < 0$, $k(x_2) > 0$, $k(x_3) = 0$; 4) $k(x_1) < 0$, $k(x_2) = 0$, $k(x_3) < 0$.

1.71. 1) –2; 3) 0,42. **1.72.** 2) 4; 4) 19.

1.73. 1) В точке $x = 0$ — тупой угол, в точке $x = 8$ — острый угол, в точке $x = -5$ — тупой угол.

1.74. 2) $y = 6x - 10$; 4) $y = x + 2$. **1.75.** 1) $y = 5x + 3$; 3) $y = 2$.

1.76. 2) $y = -4x - 7$; 4) $y = 2x - 11$; 6) $y = -4x - 6$.

1.77. 1) (–1,5; –0,75); 3) (0; 1); 5) $\left(\frac{1}{12}; \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

1.78. 2) $y = -4$. **1.79.** 1) (1; 4). **1.80.** 2) (2; 1).

1.81. 1) $y = 0$, $y = -4x + 4$. **1.82.** 2) (–1; 18). **1.83.** 1) (0; –7).

1.84. 2) –7. **1.85.** 1) $f'(x) = 4$; 3) $f'(x) = 1\frac{3}{11}$; 5) $f'(x) = -6x - 8$.

1.86. 2) $f'(x) = -1,5$; 4) $f'(x) = -2x + 1$.

1.87. 1) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$; 3) $f'(x) = 4 + \frac{1}{x^2}$.

1.88. 2) $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$; 4) $f'(x) = \frac{2x^2 + 8x - 5}{(x+2)^2}$.

1.89. 1) $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{(x^2+2)^2}$; 3) $f'(x) = \frac{-x^2 + 4x + 4}{(x-2)^2}$; 5) $f'(x) = \frac{x^2 + 8x - 13}{(x^2 - 2x + 5)^2}$.

1.90. 2) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 20$; 4) $f'(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 7x^2 - 8x$.

1.91. 1) $f'(x) = -24x + 26$; 3) $f'(x) = -3x^2 - 20x - 3$;
5) $f'(x) = \pi(10x^3 - 87x^2 + 216x - 112)$.

1.92. 2) $f'(x) = \frac{-16(26x^2 + 33x + 130)}{(x^2 - 5)^2}$;

4) $f'(x) = \frac{4x^4 - 72x^3 + 449x^2 - 606x - 1467}{(x-6)^2(x-3)^2}$;

6) $f'(x) = \dfrac{-6(2x^4 - 45x^3 + 199x^2 - 195x - 153)}{(x-7)^2(2x+1)^4}$.

1.93. 1) Верно. **1.94.** 2) $f'(-1) < g'(-1)$; 4) $f'(0) < g'(0)$.

1.95. 1) ±1; 3) ±2; 5) 0; 0,8; 2. **1.96.** 2) -3; 0; 4) 1. **1.97.** 1) $x > 1$.

1.98. 2) $x > -0,5$; $x \neq 0$. **1.99.** 1) $\left(-2;\ \frac{13\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(2;\ -\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)$.

1.101. 1) а) $[x_1;\ b]$; б) $[a;\ x_1]$; в) $(x_1;\ b]$; г) $[a;\ x_1)$; 3) а) $[x_1;\ x_2]$; б) $[a;\ x_1]$, $[x_2;\ b]$; в) $(x_1;\ x_2)$; г) $[a;\ x_1)$, $(x_2;\ b]$.

1.102. 2) Возрастает на промежутках $(-\infty;\ 1]$, $[2;\ +\infty)$, убывает на промежутке $[1;\ 2]$; 4) возрастает на промежутках $(-\infty;\ -6]$, $[-2;\ 2]$, убывает на промежутках $[-6;\ -2]$, $[2;\ +\infty)$.

1.103. 1) Положительны на промежутке $(a;\ b)$, отрицательны на промежутках $[m;\ a)$, $(b;\ n]$; 3) положительны на промежутках $(b;\ c)$, $(e;\ h]$, отрицательны на промежутках $[a;\ b)$, $(c;\ e)$.

1.104. 2) Промежуток убывания $[-4;\ 3]$, промежутки возрастания $(-\infty;\ -4]$, $[3;\ +\infty)$; 4) промежутки убывания $(-\infty;\ -41]$, $[-6;\ 7]$, промежутки возрастания $[-41;\ -6]$, $[7;\ +\infty)$; 6) промежутки убывания $[-6;\ -5]$, $[-2;\ 2]$, $[5;\ 6]$, промежутки возрастания $(-\infty;\ -6]$, $[-5;\ -2]$, $[2;\ 5]$, $[6;\ +\infty)$.

1.105. 1) Промежутков убывания нет, возрастает на $\boldsymbol{R}$; 3) $\boldsymbol{R}$ — промежуток убывания, промежутков возрастания нет; 5) промежутки убывания $[-7;\ 0]$, $[5;\ +\infty)$, промежутки возрастания $(-\infty;\ -7]$, $[0;\ 5]$.

1.107. 1) Промежуток возрастания $[0,25;\ +\infty)$, промежуток убывания $(-\infty;\ 0,25]$.

1.108. 2) Промежуток возрастания $[-1;\ 1]$, промежутки убывания $(-\infty;\ -1]$, $[1;\ +\infty)$; 4) промежутки возрастания $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right]$, $[1;\ +\infty)$, промежуток убывания $\left[-\frac{1}{3};\ 1\right]$; 6) промежуток возрастания $[-2;\ +\infty)$, промежуток убывания $(-\infty;\ -2]$; 8) промежутки возрастания $(-\infty;\ -1]$, $[0;\ 1]$, $[2;\ +\infty)$, промежутки убывания $[-1;\ 0]$, $[1;\ 2]$.

1.109. 1) Промежутки возрастания $(-\infty;\ -0,25)$, $(-0,25;\ +\infty)$, промежутков убывания нет; 3) промежуток возрастания $(-\infty;\ 3)$, промежуток убывания $(3;\ +\infty)$.

1.110. 2) Промежутки возрастания $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$, промежутков убывания нет; 4) промежутки возрастания $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$, промежутков убывания нет; 6) промежуток возрастания $(-1,5;\ 9,5]$, промежутки убывания $(-\infty;\ -1,5)$, $[9,5;\ +\infty)$.

1.111. 1) $a > 0$; 3) $0 \leqslant a \leqslant 28$. **1.112.** 2) Да, возрастающая; 4) да, убывающая.

1.113. 1) Промежуток возрастания $\boldsymbol{R}$; промежутков убывания нет; число нулей функции равно 1.

1.114. 2) x_1 — точка максимума, $f(x_1) = 6$; x_2 — точка минимума, $f(x_2) = 1$; 4) x_1 — точка минимума, $f(x_1) = -2$, x_2 — точка максимума, $f(x_2) = 1,5$.

1.115. 1) a, b; 3) b, c, e.

1.116. 2) $-\frac{1}{2}$ — точка экстремума; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$; 4) $\frac{2}{5}$ и 3 — точки экстремума; $f\left(\frac{2}{5}\right) = -3,88$; $f(3) = 84$; 6) 1 — точка экстремума; $f(1) = -6$.

1.117. 1) 2,5 — точка минимума; $f(2,5) = -6,25$; 3) 3,75 — точка максимума, $f(3,75) = -65\frac{235}{256}$.

1.118. 2) –1 — точка минимума, $f(-1) = 3$; 4) –4 — точка максимума, 4 — точка минимума, $f(-4) = -4$; $f(4) = 4$; 6) –4 — точка минимума, –2 — точка максимума, $f(-4) = 8$, $f(-2) = 4$.

1.119. 1) –1 — точка максимума; $f(-1) = 2$; 1 — точка минимума, $f(1) = -2$; 3) 3 — точка минимума; $f(3) = 12$; –3 — точка максимума; $f(-3) = -12$.

1.120. 2) $-4\frac{1}{3}$ — точка минимума, $f\left(-4\frac{1}{3}\right) = 2\frac{2}{7}$; 4) 2 — точка максимума, $f(2) = \frac{3}{8}$.

1.121. 1) а) $\boldsymbol{R}$; б) $[-2; 2]$ — промежуток возрастания; $(-\infty; -2]$, $[2; +\infty)$ — промежутки убывания; в) –2 и 2 — точки экстремума, $f(-2) = -31$, $f(2) = 1$; 3) а) $\boldsymbol{R}$; б) $(-\infty; -1]$, $[1; +\infty)$ — промежутки возрастания; $[-1; 1]$ — промежуток убывания; в) –1 и 1 — точки экстремума, $f(-1) = 4$, $f(1) = -4$.

1.122. 1) –1,2 — точка экстремума, $f(-1,2) = 0,072$; 2) –1,2.

1.123. 1) 4,5 — точка экстремума, $f(4,5) = \frac{21}{32}$; 2) 4,5.

1.124. 1) –2 — точка экстремума, $f(-2) = 24 + \sqrt{21}$; 2) –2.

1.125. 1) 2 — точка экстремума, $f(2) = 48 - \sqrt{5}$; 2) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

1.126. 2) $\underset{x\in[-1;2]}{f_{\text{наиб}}}(x) = 9$; $\underset{x\in[-1;2]}{f_{\text{наим}}}(x) = -6$; 4) $\underset{x\in[-1;2]}{f_{\text{наиб}}}(x) = 0$; $\underset{x\in[-1;2]}{f_{\text{наим}}}(x) = -4$;
6) $\underset{x\in[-2;4]}{f_{\text{наиб}}}(x) = 8$; $\underset{x\in[-2;4]}{f_{\text{наим}}}(x) = 0$.

1.127. 1) $\underset{x\in[-1;0]}{f_{\text{наиб}}}(x) = 0$; $\underset{x\in[-1;0]}{f_{\text{наим}}}(x) = -5$; 3) $\underset{x\in[-4;0]}{f_{\text{наиб}}}(x) = 4$; $\underset{x\in[-4;0]}{f_{\text{наим}}}(x) = -104$.

1.128. 2) $\underset{x\in[-3;-1]}{f_{\text{наиб}}}(x) = 10\frac{1}{3}$; $\underset{x\in[-3;-1]}{f_{\text{наим}}}(x) = 9$; 4) $\underset{x\in[-1;1]}{f_{\text{наиб}}}(x) = 7\frac{13}{27}$; $\underset{x\in[-1;1]}{f_{\text{наим}}}(x) = 1$.

1.129. 1) $\underset{x\in[-2;0,5]}{f_{\text{наиб}}}(x) = 2,5$; $\underset{x\in[-2;0,5]}{f_{\text{наим}}}(x) = -2,5$; 3) $\underset{x\in[1;2]}{f_{\text{наиб}}}(x) = 4,25$; $\underset{x\in[1;2]}{f_{\text{наим}}}(x) = 2$.

1.130. 2) $\underset{x\in\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]}{f_{\text{наиб}}}(x) = 5$; $\underset{x\in\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]}{f_{\text{наим}}}(x) = 3,65$; 4) $\underset{x\in[-2;0,5]}{f_{\text{наиб}}}(x) = \frac{10}{13}$; $\underset{x\in[-2;0,5]}{f_{\text{наим}}}(x) = -2$.

1.131. 1) 6 с, 142 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 3) 9 с, 124 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.132. 2) 7 с, 196 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 4) 10 с, 700 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.133. 1) Стороны прямоугольника с наибольшей площадью равны 5 м, его площадь 25 м^2; стороны прямоугольника с наименьшей площадью 2 м и 8 м, его площадь 16 м^2.

1.134. 2) 200 м × 200 м. **1.135.** 1) 48 = 24 + 24. **1.136.** 2) 10 = 5 + 5.

1.137. 1) Стороны $\sqrt{2}$ дм и $\sqrt{2}$ дм, площадь 2 дм^2. **1.138.** 2) 48 см.

1.139. 1) $2\sqrt{3}$ см × 8 см. **1.140.** 2) 12 м^2.

Глава 2. Тригонометрические выражения

2.1. 1) 120°; 3) 60°.

2.2. 2) $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.3. 1) 45°; 45°. **2.4.** 2) ≈ 37°; 4) ≈ 71°; 6) ≈ 69°; 8) ≈ 76°.

2.5. 1) $\alpha < \beta$; 3) $\alpha < \beta$. **2.6.** 2) 45°. **2.7.** 1) $5 - \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $4\sqrt{3}$.

2.8. 2) $4\frac{1}{4}$; 4) $\frac{12\sqrt{3} - 17}{12}$. **2.9.** 1) 1; 1; 1; 3) $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$; 2; $1 + \sqrt{3}$.

2.10. 2) 1; 4) $\sin\alpha \operatorname{tg}^2\alpha$.

2.11. Например: 1) $\sin^3 60° - \sin^2 60° + \sin 30° \sin 45° + \sin 60°$; 3) $\cos 60° \cos^2 30° - \cos 45° + \cos^3 30°$.

2.12. Например: 2) $\operatorname{tg}^2 30° + \operatorname{tg}^2 60° - \operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 30°$; 4) $\operatorname{ctg}^4 60° - \operatorname{ctg}^2 30° + \operatorname{ctg} 30° + \operatorname{ctg}^3 60°$.

2.13. 1) $\frac{1 + 2^{101}}{3 \cdot 2^{100}}$.

2.14. 2) $-180° + 360°n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-90° + 360°n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $360°n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-270° + 360°n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2.15. 1) $A_{30°}$, $A_{120°}$, $A_{210°}$; 3) $A_{-120°}$, $A_{60°}$, $A_{240°}$.

2.18. 2) III, II, I, I, II; 4) IV, IV, I, IV, I.

2.19. 1) 360° · 1 + 66°; 3) 360° · (–3) + 231°; 5) 360° · 9 + 284°; 7) 360° · (–4) + 99°.

2.20. 2) –530°; –170°; 190°; 550°; 910°; 4) –540°; –180°; 180°; 540°; 900°.

2.21. 1) 0; 3) –3; 5) –1.

2.22. 2) II.

2.23. Например: 1) –440°, –80°, 640°; 3) –375°, –15°, 705°.

2.24. Например: 2) а) 90°; 450°; 810°; б) –210°; 150°; 510°; в) –330°; 30°; 390°; г) –120°; 240°; 600°.

2.25. Например: 1) –865°, –505°, –145°; 3) 185°, 545°, 905°.

2.26. 2) Значения абсциссы и ординаты меньше нуля; 4) значения абсциссы и ординаты больше нуля.

2.27. 1) Значение абсциссы меньше или больше нуля, значение ординаты равно нулю.

2.28. Например: 2) 45°; 135°; 495°; 4) –150°; –30°; 210°; 6) –270°; 90°; 450°.

2.29. Например: 1) –120°, 120°, 240°; 3) –135°, 135°, 225°; 5) –180°, 180°, 540°.

2.30. 2) –150°; 4) 100°; 6) –189°; 8) –432°.

2.31. 1) ≈ 11°; 3) ≈ 286°; 5) ≈ 527°. **2.32.** 2) $\frac{\pi}{18}$; 4) $\frac{5\pi}{18}$; 6) $-\frac{3\pi}{2}$; 8) $\frac{181\pi}{36}$.

2.33. 1) 60°, $\frac{\pi}{3}$; 3) 120°, $\frac{2\pi}{3}$; 5) 144°, $\frac{4\pi}{5}$.

2.34. 2) 90°, $\frac{\pi}{2}$; 4) 45°, $\frac{\pi}{4}$; 6) 60°, $\frac{\pi}{3}$.

2.35. 1) (1; 0), $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) (–1; 0), $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) (1; 0), $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2.36. 2) $x_{\frac{7\pi}{8}} < 0$, $y_{\frac{7\pi}{8}} > 0$; $x_{\frac{3\pi}{8}} > 0$, $y_{\frac{3\pi}{8}} > 0$; $x_{\frac{\pi}{8}} > 0$, $y_{\frac{\pi}{8}} > 0$; 4) $x_{-\frac{11\pi}{8}} < 0$, $y_{-\frac{11\pi}{8}} > 0$; $x_{-\frac{9\pi}{8}} < 0$, $y_{-\frac{9\pi}{8}} > 0$; $x_{-\frac{5\pi}{8}} < 0$, $y_{-\frac{5\pi}{8}} < 0$.

2.37. 1) $x_{\frac{\pi}{4}} = y_{\frac{\pi}{4}}$; 3) $x_{\frac{2\pi}{3}} < y_{\frac{2\pi}{3}}$; 5) $x_{\frac{5\pi}{6}} < y_{\frac{5\pi}{6}}$; 7) $x_{\frac{\pi}{8}} > y_{\frac{\pi}{8}}$.

2.38. 2) $x_3 < 0$, $y_3 > 0$; $3 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x_{-5} > 0$, $y_{-5} > 0$; $-5 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x_{11} > 0$, $y_{11} < 0$; $11 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $x_{-7} > 0$, $y_{-7} < 0$; $-7 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2.39. 1) $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$; 5) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$.

2.40. 2) $n = -4$; $\varphi = 0{,}1\pi$; I; 4) $n = 7$; $\varphi = \frac{4\pi}{3}$; III; 6) $n = -4$; $\varphi = \frac{5\pi}{7}$; II; 8) $n = 0$; $\varphi = \frac{7\pi}{8}$; II.

2.41. 1) Нет; 3) нет; 5) -1. **2.42.** 2) Нет; 4) да.

2.43. 1) 0; 3) $1 + 4\sin\alpha\cos\alpha$.

2.44. 2) $\sin(-40°) \approx -0{,}6$; $\cos(-40°) \approx 0{,}8$; $\sin(-125°) \approx -0{,}8$; $\cos(-125°) \approx -0{,}6$; $\sin(-340°) \approx 0{,}3$; $\cos(-340°) \approx 0{,}9$; 4) $\sin(-775°) \approx -0{,}8$; $\cos(-775°) \approx 0{,}6$; $\sin(-470°) \approx -0{,}9$; $\cos(-470°) \approx -0{,}3$; $\sin(-1988°) \approx 0{,}1$; $\cos(-1988°) \approx -1$.

2.45. 1) $\sin\frac{\pi}{12} \approx 0{,}3$; $\cos\frac{\pi}{12} \approx 1$; $\sin\frac{3\pi}{8} \approx 0{,}9$; $\cos\frac{3\pi}{8} \approx 0{,}4$; $\sin\frac{5\pi}{6} = 0{,}5$; $\cos\frac{5\pi}{6} \approx -0{,}9$; $\sin\frac{4\pi}{3} \approx -0{,}9$; $\cos\frac{4\pi}{3} = -0{,}5$; $\sin\frac{8\pi}{3} \approx 0{,}9$; $\cos\frac{8\pi}{3} = -0{,}5$; $\sin\frac{11\pi}{4} \approx 0{,}7$; $\cos\frac{11\pi}{4} \approx -0{,}7$; 3) $\sin\frac{44\pi}{3} \approx 0{,}9$; $\cos\frac{44\pi}{3} = -0{,}5$; $\sin\frac{51\pi}{5} \approx 0{,}6$; $\cos\frac{51\pi}{5} \approx 0{,}8$; $\sin\frac{17\pi}{4} \approx 0{,}7$; $\cos\frac{17\pi}{4} \approx 0{,}7$; $\sin\left(-\frac{62\pi}{3}\right) \approx -0{,}9$; $\cos\left(-\frac{62\pi}{3}\right) = -0{,}5$; $\sin\left(-\frac{74\pi}{3}\right) \approx -0{,}9$; $\cos\left(-\frac{74\pi}{3}\right) = -0{,}5$; $\sin\left(-\frac{87\pi}{4}\right) \approx 0{,}7$; $\cos\left(-\frac{87\pi}{4}\right) \approx 0{,}7$.

2.46. 2) $\sin 4 \approx -0{,}8$; $\cos 4 \approx -0{,}7$; $\sin 4{,}5 \approx -1$; $\cos 4{,}5 \approx -0{,}2$; $\sin 5 \approx -1$; $\cos 5 \approx 0{,}3$; $\sin 5{,}5 \approx -0{,}7$; $\cos 5{,}5 \approx 0{,}7$; $\sin 6 \approx -0{,}3$; $\cos 6 \approx 1$; 4) $\sin(-1) \approx -0{,}8$; $\cos(-1) \approx 0{,}5$; $\sin(-1{,}5) \approx 1$; $\cos(-1{,}5) \approx 0{,}1$; $\sin(-2) \approx -0{,}9$; $\cos(-2) \approx -0{,}4$; $\sin(-2{,}5) \approx -0{,}6$; $\cos(-2{,}5) \approx -0{,}8$; $\sin(-3) \approx -0{,}1$; $\cos(-3) \approx -1$.

2.47. 1) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $-3{,}5$.

2.48. 2) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; 4) 0,5; 6) $-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2}$.

2.49. Например: 1) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$; 5) $-\pi$; 0; π.

2.50. Например: 2) $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$; 6) -2π; 0; 2π.

2.51. Например: 1) 0; 3) нет; 5) π.

2.52. Например: 2) $\frac{7\pi}{6}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 6) нет.

2.53. 1) а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$; в) $-\frac{13\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$.

2.54. 2) а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{3}$; в) $-\frac{19\pi}{3}$, $-\frac{17\pi}{3}$, $-\frac{13\pi}{3}$, $-\frac{11\pi}{3}$, $-\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$; г) $-\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

2.55. 1) –0,96. **2.56.** 2) III; 4) IV; 6) II или IV; 8) I или IV.

2.57. 1) $\sin 49° > 0$; $\sin(-250°) > 0$; $\sin 333° < 0$; $\sin(-1324°) > 0$; $\cos 49° > 0$; $\cos(-250°) < 0$; $\cos 333° > 0$; $\cos(-1324°) < 0$; 3) $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) < 0$; $\sin\frac{19\pi}{18} < 0$; $\sin\left(-\frac{17\pi}{9}\right) > 0$; $\sin\frac{279\pi}{20} < 0$; $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) > 0$; $\cos\frac{19\pi}{18} < 0$; $\cos\left(-\frac{17\pi}{9}\right) > 0$; $\cos\frac{279\pi}{20} > 0$; 5) $\sin 3{,}5 < 0$; $\sin(-4) > 0$; $\sin 5{,}5 < 0$; $\sin(-8) < 0$; $\cos 3{,}5 < 0$; $\cos(-4) < 0$; $\cos 5{,}5 > 0$; $\cos(-8) < 0$.

2.58. 2) Да; 4) нет; 6) да; 8) да.

2.59. 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 7) $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2.60. 2) $\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $3\pi + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $2 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2.61. 1) $\sin 1276° < 0$, $\sin(-3461°) > 0$, $\cos 2078° > 0$, $\cos(-3065°) < 0$; 3) $\sin\frac{18\pi}{13} < 0$, $\sin\left(-\frac{31\pi}{16}\right) > 0$, $\cos\left(-\frac{25\pi}{13}\right) > 0$, $\cos\frac{133\pi}{8} < 0$; 5) $\sin 3{,}14 > 0$, $\sin(-25) > 0$, $\cos(-6{,}1) > 0$, $\cos 99 > 0$.

2.62. 2) «Минус»; 4) «минус»; 6) «плюс»; 8) «минус».

2.63. 1) «Плюс»; 3) «минус»; 5) «плюс».

2.64. 2) $\sin\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2}$, $\cos\pi$; 4) $\sin\frac{33\pi}{2}$, $\sin 101\pi$, $\cos 223\pi$.

2.66. 2) 7 и –7; 4) 4 и 2; 6) 0 и –1; 8) 1 и 0; 10) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$.

2.67. 1) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$, $2\pi < \alpha < \frac{11\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{5\pi}{2}$.

2.68. 2) $-2\pi < \alpha < -\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{2}$.

2.69. 1) 0; 3) $\cos\alpha - \sin\alpha$; 5) $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$.

2.72. 2) $-4 \leqslant t \leqslant -2$; 4) $-1 \leqslant t \leqslant 1$; 6) $3 \leqslant t \leqslant 4$. **2.73.** 1) $\frac{3\pi}{4}$; 4) 4π.

2.74. 2) $\frac{17\pi}{12}$; 4) 0; 6) $-\frac{5\pi}{6}$. **2.75.** 1) Да; 3) нет.

2.76. 2) $-2\arcsin b$; 4) $2\arccos b - \pi$.

2.77. 1) $\arcsin 1 > \arccos 1$; 3) $\arccos 0 = \arcsin 1$; 5) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) > \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.78. 2) $\frac{23\pi}{6}$; 4) $\frac{19\pi}{6}$; 6) $\frac{5\pi}{2}$; 8) $\frac{7\pi}{6}$.

2.79. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.80.** 2) $\frac{\pi}{4}$; 4) $-\frac{\pi}{5}$; 6) π; 8) $\frac{7\pi}{9}$.

2.81. 1) $\frac{7\pi}{12}$; 3) $-\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{2\pi}{3}$. **2.82.** 2) $\pi - 2$; 4) $11 - 4\pi$; 6) $7{,}6 - 2\pi$.
2.83. 1) Нет; 3) нет. **2.84.** 2) Да; 4) нет.
2.85. 1) $\operatorname{tg} 230° \approx 1{,}2$; $\operatorname{tg}(-220°) \approx -0{,}8$; $\operatorname{tg}(-1040°) \approx 0{,}8$; $\operatorname{ctg} 230° \approx 0{,}8$; $\operatorname{ctg}(-220°) \approx -1{,}2$; $\operatorname{ctg}(-1040°) \approx 1{,}2$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} \approx 0{,}4$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} \approx -1{,}7$; $\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{8}\right) \approx -2{,}4$; $\operatorname{tg}\left(-\frac{74\pi}{3}\right) \approx 1{,}7$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} \approx 2{,}4$; $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3} \approx -0{,}6$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{8}\right) \approx -0{,}4$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{74\pi}{3}\right) \approx 0{,}6$.
2.86. 2) I или IV; 4) I или II; 6) II или III.
2.87. 1) «Минус»; 3) «минус»; 5) «плюс». **2.88.** 2) Да; 4) нет.
2.89. 1) «Минус»; 3) «плюс»; 5) «плюс».
2.90. 2) «Плюс»; 4) «плюс»; 6) «минус». **2.91.** 1) -3; 3) $\frac{1}{3}$.
2.92. 2) $m + 1$; 4) $\frac{m-1}{m}$. **2.93.** 1) 0; 3) $-2\operatorname{ctg}\alpha$; 5) -2.
2.94. 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{4}{3} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{5}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$.
2.95. 1) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{10},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $-4 + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$.
2.96. 2) $2\sin\alpha$; 4) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 6) $\operatorname{tg}^2\alpha$.
2.100. 2) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$; 4) $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$; 6) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$; 8) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$;
2.101. 1) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$; 5) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.
2.102. 2) Да; 4) нет. **2.103.** 1) $\frac{5\pi}{12}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\sqrt{3}$.
2.104. 2) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arctg} 0 < \operatorname{arcctg}(-1)$; 6) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
2.105. 1) 3,7; 3) $-1{,}4$; 5) $-0{,}25$. **2.106.** 2) 0,05.
2.107. 1) $-\frac{3\pi}{8}$; 3) $\frac{\pi}{5}$; 5) $\frac{5\pi}{8}$.
2.108. 2) $\cos\beta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg}\beta = -2\sqrt{2}$; 4) $\sin\beta = \frac{9}{41}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{9}{40}$, $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{40}{9}$; 6) $\sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{1}{2}$; 8) $\sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = -2$.
2.109. 1) $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{15}{8}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{8}{15}$; 3) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; 5) $\sin\alpha = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{2}$.

2.110. 2) $-\cos^2\alpha$; 4) $2\sin\alpha$; 6) $2\sin\alpha$; 8) $\cos^2\alpha$.

2.111. 1) $1-\sin\alpha$; 3) $\sin\alpha+\cos\alpha$; 5) $\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 7) $\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$.

2.112. 2) $2+\sqrt{3}$; 4) 0; 6) $\sqrt{2}$. **2.113.** 1) $\sin^2\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$; 5) 0.

2.114. 2) $\cos\alpha$; 4) $-\dfrac{1}{\sin\alpha}$. **2.116.** 2) Нет; 4) 0 и -2; 6) нет.

2.117. 1) $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{6}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $\dfrac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 5) πk, $k\in\boldsymbol{Z}$; $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 7) $\dfrac{\pi k}{3}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

2.118. 2) $\dfrac{\pi(2n+1)}{4}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{4\pi n}{3}, n\neq\dfrac{3k-2}{4}$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

2.119. 1) Не является; 3) является. **2.120.** 2) Не является; 4) является.

2.121. 1) Является; 3) не является.

2.122. 2) $\operatorname{ctg}\alpha$; 4) $-\cos\alpha$; 6) $\sin\alpha$; 8) $-\operatorname{ctg}\alpha$; 10) $-\operatorname{tg}\alpha$.

2.123. 1) $-\dfrac{1}{2}$; 3) -1; 5) $-\dfrac{1}{2}$; 7) $\sqrt{3}$; 9) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 11) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2.124. 2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\sqrt{3}$; 6) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 8) 1; 10) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 12) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2.125. 1) 4; 3) $-\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}$; 5) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **2.126.** 2) $-\sqrt{2}-1$; 4) 1,75.

2.127. 1) $\operatorname{tg}^2\alpha$; 3) $2\sin\alpha\cos\alpha$; 5) 2. **2.130.** 2) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; 4) $\dfrac{3}{7}$; 6) 6.

2.131. 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\sin\alpha$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$; 5) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)$; 7) $\dfrac{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha}$; 9) $\dfrac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}$.

2.132. 2) $\sqrt{2}\sin\alpha$; 4) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\cos\alpha$; 6) $\dfrac{8\operatorname{tg}\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$; 8) $\dfrac{2+2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

2.133. 1) а) $\dfrac{156}{1525}$; б) $-\dfrac{468}{493}$; 3) а) $-\dfrac{1363}{1525}$; б) $-\dfrac{475}{493}$.

2.134. 2) а) 1; б) 5,5; 4) а) $\dfrac{7}{23}$; б) $\dfrac{38}{41}$. **2.135.** 1) а) $-0,5$; б) 0,5.

2.136. 2) $-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\alpha$; 6) 1,5. **2.137.** 1) $-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 5) 2.

2.138. 2) $\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg}75^\circ=2+\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}75^\circ=2-\sqrt{3}$; 4) $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12}=2+\sqrt{3}$; 6) $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)=-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$.

2.139. 1) 0,5; 3) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 5) $\sqrt{3}$; 7) 1. **2.140.** 2) $-\cos 2\alpha$.

2.141. 1) 1; 3) $\sqrt{2}$. **2.143.** 1) $-\dfrac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}$; 3) $-\dfrac{55\sqrt{26}}{338}$; 5) $-\dfrac{33}{65}$.

2.144. 2) $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi n}{5},\ n\in \boldsymbol{Z}$.

2.146. 2) $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\ \cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos 5\alpha = \cos^2\dfrac{5\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{5\alpha}{2}$,

$\operatorname{tg}3\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{3\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{3\alpha}{2}}$; 4) $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$, $\cos 8\alpha = \cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha$,

$\operatorname{ctg}6\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 3\alpha}{2\operatorname{tg}3\alpha}$; 6) $\sin\dfrac{3\alpha}{4} = 2\sin\dfrac{3\alpha}{8}\cos\dfrac{3\alpha}{8}$, $\cos\dfrac{\alpha}{5} = \cos^2\dfrac{\alpha}{10} - \sin^2\dfrac{\alpha}{10}$,

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{4}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{4}}$.

2.147. 1) $2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{8}\right)$; 3) $\cos^2\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{16}\right) - \sin^2\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{16}\right)$;

5) $\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{6}+\dfrac{\pi}{14}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\alpha}{6}+\dfrac{\pi}{14}\right)}$.

2.148. 2) $\dfrac{1+\cos 12\alpha}{2}$; 4) $\dfrac{1+\cos 16\alpha}{1-\cos 16\alpha}$; 6) $\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+14\alpha\right)}{2}$;

8) $\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{7\pi}{2}+10\alpha\right)}{1-\cos\left(\dfrac{7\pi}{2}+10\alpha\right)}$.

2.149. 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\dfrac{1}{4}$; 5) $\dfrac{3}{2}$; 7) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **2.150.** 2) $\cos 20°$; 4) $-\sin 10°$; 6) $-5\operatorname{tg}50°$.

2.151. 1) $\cos^2 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg}^2\alpha$; 5) $\sin 8\alpha$; 7) $\cos\ 2\alpha - \dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$; 9) 0,75.

2.152. 2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\dfrac{6+\sqrt{2}}{8}$; 6) $\dfrac{7\sqrt{2}}{16}$. **2.153.** 1) $\left|\sin\dfrac{\alpha}{4}\right|$; 3) $|\operatorname{ctg}\alpha|$.

2.154. 2) а) $-\dfrac{7}{25}$; б) $-\dfrac{119}{169}$; в) $-\dfrac{7}{25}$; г) $\dfrac{119}{169}$; 4) а) $-\dfrac{7}{24}$; б) $-\dfrac{119}{120}$; в) $\dfrac{7}{24}$; г) $-\dfrac{119}{120}$.

2.155. 1) а) $-\dfrac{120}{169}$; б) $-\dfrac{24}{25}$; 3) а) $\dfrac{120}{119}$; б) $\dfrac{24}{7}$.

2.156. 2) а) $-\dfrac{7}{25}$; б) $-\dfrac{119}{169}$; 4) а) $\dfrac{7}{24}$; б) $\dfrac{119}{120}$. **2.157.** 1) 3.

2.158. 2) а) $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$; б) $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}}$; 4) а) $\dfrac{1}{7}$; б) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

2.159. 1) а) $\dfrac{96}{625}$; б) $\dfrac{96}{625}$; 3) а) $\dfrac{96}{529}$; б) $\dfrac{96}{529}$.

2.161. 1) 2 и −2; 3) 1 и −1; 5) 1 и −1. **2.162.** 2) $-\dfrac{7}{9}$; 4) $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$; 6) $-\dfrac{9}{41}$.

2.163. 1) $\dfrac{7-3\sqrt{5}}{16}$.

2.164. 2) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sin 70°$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\cos 80°$; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos 1°$.

2.165. 1) $\frac{1}{2}\sin 4\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\beta$; 3) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 4\beta$.

2.166. 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha$; 4) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sin 2\alpha$; 6) $\cos 2\alpha-\cos\frac{\pi}{2}$.

2.168. 2) $\sqrt{3}\cos 21°$; 4) $-\sqrt{3}\cos 5°$; 6) $2\sin 30°\sin 42°$; 8) $\sqrt{3}\sin 65°$.

2.169. 1) $\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{36}$; 3) $\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{36}$; 5) $2\sin 5\alpha\cos 3\alpha$; 7) $2\sin 2\alpha\sin 3\alpha$.

2.170. 2) $-\sqrt{2}\sin\left(3\alpha-\frac{5\pi}{16}\right)$; 4) $\sqrt{3}\sin\alpha$; 6) $-2\sin\frac{7\pi}{20}\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

2.171. 1) $\frac{\sin 16\alpha}{\cos 7\alpha\cos 9\alpha}$; 3) $\frac{2}{\operatorname{ctg} 2\alpha}$. **2.172.** 2) 1; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\sqrt{3}$.

2.173. 1) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{5\alpha}{2}$; 3) $4\sin 13\alpha\cos 3\alpha\cos 6\alpha$.

2.174. 2) $2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

6) $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$; 8) $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-5\alpha\right)}{\cos 5\alpha}$.

2.175. 1) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$; 3) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$;

5) $\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha-30°)}{\cos\alpha}$.

2.176. 2) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

6) $\frac{3\sin(\alpha+30°)\sin(\alpha-30°)}{\cos^2\alpha}$.

2.177. 1) $2\sin 23°\cos 23°$; 3) $2\sin 27°\cos 27°$; 5) $-\frac{4\sin 18°\sin 42°}{\cos^2 12°}$.

2.178. 2) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$;

6) $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$.

2.179. 1) $2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

2.181. 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{10}$, $n\in\mathbf{Z}$; 5) πn, $n\in\mathbf{Z}$.

2.182. 2) $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$; 4) $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$; $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{12}{5}$.

2.183. 1) 19. **2.184.** 2) $\frac{33}{49}$.

2.185. 1) $\dfrac{2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; 3) $\dfrac{12+10\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-12\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

2.186. 2) $\dfrac{6\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-7\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+2}$; 4) $\dfrac{3-10\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+3\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}}{14\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1-\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}}$.

2.187. 1) $\dfrac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}$; 3) $\dfrac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}$. **2.189.** 1) $-\frac{1}{3}$ или 2.

2.190. 2) 1; 4) $\dfrac{3m^2n-n^3}{m^2+n^2}$. **2.191.** 1) $\dfrac{2+2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

2.192. 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\sqrt{6}\cos\left(4\alpha+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $5\sin\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$.

2.193. 1) 2; –2; 3) 2; –2; 5) 6; –6.

2.194. 2) $-\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{\sin 40^\circ}{2\sin 5^\circ}$; 8) $\frac{1}{16}\sin^2 72^\circ$.

2.196. 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$; 4) $-\cos 4\alpha$. **2.197.** 1) 5 и 4; 3) 4 и 0,8.

2.198. 2) $\frac{\sin 36^\circ}{2\sin 6^\circ}$; 4) $\frac{\sin 15^\circ\cos 18^\circ}{\sin 3^\circ}$.

2.199. 1) $4\sin\frac{2\pi}{17}\cos\frac{7\pi}{51}\cos\frac{10\pi}{51}$; 3) $4\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{25\pi}{186}\cos\frac{37\pi}{186}$;

5) $4\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{66}\cos\frac{17\pi}{66}$.

Глава 3. Тригонометрические функции

3.1. 1) 2π, 4π, 6π, 10π, 12π, 16π; 3) π, 2π, 3π, 4π, 5π, 6π, 7π, 10π, 11π, 12π, 16π, 21π; 5) 6π, 12π; 7) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, π, 2π, 3π, 4π, 5π, 6π, 7π, 10π, 11π, 12π, 16π, 21π.

3.2. 6) π; 8) 2π. **3.4.** 2) а) — ж) Нет; 4) а) — ж) нет.

3.5. 1) π; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 5) π; 7) 4π; 9) 3π.

3.7. 1) $\boldsymbol{R}$, 2π; 3) $x \ne \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, π; 5) $x \ne \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, 2π; 7) $x \ne \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, 2π; 9) $\boldsymbol{R}$, 2π.

3.8. 2) $\boldsymbol{R}$, π; 4) $x \ne \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, π; 6) $x \ne \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, π; 8) $\boldsymbol{R}$, π; 10) $x \ne \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, π.

3.9. 1) Нет.

3.10. 2) 4; а) 0; б) 0; в) 0; г) 0; д) 0; е) 0.

3.11. 1) 7.

3.12. 2) 0; 4) 240. **3.14.** 2) Нет; 4) нет; 6) нет; 8) нет.

3.15. 1) Нет; 3) нет; 5) да; 7) да. **3.16.** 2) $\frac{2\pi}{5}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 6) π; 8) $\frac{2\pi}{7}$.

3.17. 1) 2; 3) 1; 5) $\frac{\pi}{3}$; 7) $\frac{2\pi}{3}$. **3.18.** 2) Например, $y = 10$.

3.19. Например: 1) $y = \sin \pi x$; 3) $y = \cos 4\pi x$.

3.21. 1) $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = [0;\ 2]$; 3) $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = [-0{,}5;\ -0{,}25]$; 5) $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = [0;\ 1]$.

3.22. 2) $(0;\ 1{,}5)$; 4) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 0\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $(0;\ 1)$.

3.23. 1) $\sin\frac{7\pi}{15}$, $\sin\frac{12\pi}{15}$, $\sin\frac{9\pi}{10}$, $\sin\frac{6\pi}{5}$; 3) $\sin(-4{,}5)$, $\sin(-0{,}3)$, $\sin(-2)$, $\sin(-1{,}5)$.

3.24. 2) $\sin\frac{5\pi}{12} > \sin\frac{7\pi}{8}$; 4) $\sin\left(-\frac{7\pi}{16}\right) < \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$; 6) $\sin(-4{,}78) > \sin(-5)$.

3.25. 1) Четная; 3) нечетная; 5) четная; 7) нечетная.

3.26. 2) $\sin\frac{13\pi}{8} < 0$; 4) $\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right) < 0$; 6) $\sin 5{,}1 < 0$; 8) $\sin(-4{,}9) > 0$.

3.27. 1) а) -1; б) 1; в) $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{2};\ 3\pi\right]$; д) $(\pi;\ 2\pi)$; е) $(0;\ \pi)$, $(2\pi;\ 3\pi)$; ж) $0;\ \pi;\ 2\pi;\ 3\pi$; 3) а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right]$; г) нет; д) $\left[-\frac{\pi}{3};\ 0\right)$; е) $\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right]$; ж) 0; 5) а) -1; б) 1; в) $\left[-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{6}\right]$; г) $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right]$; д) $\left(-\pi;\ -\frac{\pi}{6}\right]$; е) $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\pi\right)$; ж) $-\pi$; 7) а) $\sin(-1) \approx -0{,}8$; б) 0; в) $[-1;\ 0]$; г) нет; д) $[-1;\ 0)$; е) нет; ж) 0.

3.28. 2) 0,8; 4) $-0{,}9$; 6) $-0{,}6$.

3.29. 1) $\frac{\pi n}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 7) $\pi + 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.30. 2) $\left(\frac{2\pi n}{3},\ \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x \ne \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.31. 1) $[-2\pi;\ 2\pi]$; 3) $[-2\pi;\ -1{,}5\pi) \cup (-1{,}5\pi;\ -0{,}5\pi) \cup (-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi) \cup (0{,}5\pi;\ 1{,}5\pi) \cup (1{,}5\pi;\ 2\pi]$; 5) $[-2\pi;\ -\pi] \cup [0;\ \pi]$.

3.32. 2) $-1 \leqslant m \leqslant 5$; 4) $-1 \leqslant m \leqslant 0$.

3.33. 1) $\frac{\pi}{4}$; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 5) $\arcsin 0{,}13 \approx 0{,}13$; 7) $-\frac{\pi}{2}$; 9) нет корней.

3.34. 2) а) $\left[8\frac{2}{3}\pi;\ 9\pi\right)$, $\left(10\pi;\ 10\frac{3}{8}\pi\right]$; б) $(9\pi;\ 10\pi)$; 4) а) $[-1{,}3\pi;\ -\pi)$, $(0;\ \pi)$; б) $(-\pi;\ 0)$, $(\pi;\ 1{,}6\pi)$.

3.35. 1) а) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right]$; 3) а) $\left[-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{3}\right]$; г) $\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right]$; 5) а) нет решений; б) $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; 7) а) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \arcsin\frac{5}{7}\right)$; б) $\left(\arcsin\frac{5}{7};\ \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $\left[-\frac{\pi}{2}; \arcsin\frac{5}{7}\right]$; г) $\left[\arcsin\frac{5}{7}; \frac{\pi}{2}\right]$; 9) а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) нет решений; в) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; г) нет решений.

3.36. 2) $\arcsin 0{,}6$; $\pi - \arcsin 0{,}6$; 4) $-\arcsin 0{,}2$; $-\pi + \arcsin 0{,}2$.

3.37. 1) $[-\pi; \arcsin 0{,}7) \cup (\pi - \arcsin 0{,}7; \pi]$; 3) $[-\pi + \arcsin 0{,}4; -\arcsin 0{,}4]$.

3.38. 2) $E(f) = [-2; 0]$; 4) $E(f) = [-6{,}5; -2{,}5]$; 6) $E(f) = [0; 1]$.

3.39. 1) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $(0; 1)$; 3) $(0; -3{,}7)$.

3.40. 2) $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$, $\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$, $\cos\left(-\frac{12\pi}{5}\right)$; 4) $\cos(-1{,}7)$, $\cos 1{,}4$, $\cos 0{,}6$, $\cos 0{,}2$.

3.41. 1) $\cos\frac{5\pi}{7} > \cos\frac{7\pi}{9}$; 3) $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) < \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 5) $\cos(-1{,}7) > \cos(-3{,}14)$; 7) $\sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right) < \cos\left(-\frac{7\pi}{18}\right)$; 9) $\sin(-18{,}1) < \cos(-6{,}28)$.

3.42. 2) Нечетная; 4) нечетная; 6) четная; 8) четная.

3.43. 1) $\cos\frac{6\pi}{5} < 0$; 3) $\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right) < 0$; 5) $\cos 2 < 0$; 7) $\cos(-4) < 0$.

3.44. 2) а) -1; б) 1; в) $[\pi; 2\pi]$; г) $[0; \pi]$, $[2\pi; 3\pi]$; д) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right]$; е) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$; ж) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$; 4) а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $\left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$; г) $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$; д) нет; е) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$; ж) нет; 6) а) -1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\left[\pi; \frac{7\pi}{6}\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$; д) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right]$; е) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$; ж) $\frac{\pi}{2}$; 8) а) $\cos(-1) \approx 0{,}54$; б) 1; в) $[-1; 0]$; г) нет; д) нет; е) $[-1; 0]$; ж) нет.

3.45. 1) $-0{,}4$; 3) $0{,}5$; 5) $-0{,}9$.

3.46. 2) $\frac{5\pi}{2} + 5\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-18 + 12\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{15\pi}{16} + \frac{3\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $\frac{\pi n}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.47. 1) $\left[-\frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5}; \frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5}\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x \neq \frac{\pi - 1}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.48. 2) $[-2\pi; -\pi) \cup (-\pi; \pi) \cup (\pi; 2\pi]$;
4) $[-2\pi; -1{,}5\pi) \cup (-1{,}5\pi; -0{,}5\pi) \cup (-0{,}5\pi; 0{,}5\pi) \cup (0{,}5\pi; 1{,}5\pi) \cup (1{,}5\pi; 2\pi]$;
6) $\{-2\pi; 0; 2\pi\}$.

3.49. 1) $-6 \leqslant n \leqslant 4$; 3) $0 \leqslant n \leqslant 1$.

3.50. 2) $\pm\frac{\pi}{4}$; 4) нет корней; 6) нет корней; 8) 0; 10) нет корней.

3.51. 1) а) $\left[-4\frac{2}{9}\pi; -3\frac{1}{2}\pi\right) \cup \left(-2\frac{1}{2}\pi; -1\frac{5}{8}\pi\right]$; б) $\left(-3\frac{1}{2}\pi; -2\frac{1}{2}\pi\right)$;

3) а) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(1\frac{1}{2}\pi; 2\frac{1}{2}\pi\right)$;

б) $(-1{,}2\pi; -0{,}5\pi) \cup (0{,}5\pi; 1{,}5\pi) \cup (2{,}5\pi; 2{,}9\pi]$.

3.52. 2) а) $\left(\frac{\pi}{3}; \pi\right]$; б) $\left[0; \frac{\pi}{3}\right)$; в) $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$; г) $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$; 4) а) $\left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$; б) $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right)$; в) $\left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$; г) $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$; 6) а) $(\pi - \arccos 0{,}58; \pi]$; б) $[0; \pi - \arccos 0{,}58)$; в) $[\pi - \arccos 0{,}58; \pi]$; г) $[0; \pi - \arccos 0{,}58]$; 8) а) нет решений; б) $x \neq \pi$; в) $x = \pi$; г) $[0; \pi]$; 10) а) $[0; \pi]$; б) нет решений; в) $[0; \pi]$; г) нет решений.

3.53. 1) $\arccos 0{,}4$; $2\pi - \arccos 0{,}4$; 3) $\pi - \arccos 0{,}1$; $\pi + \arccos 0{,}1$.

3.54. 2) $(\arccos 0{,}3; 2\pi - \arccos 0{,}3)$; 4) $[0; \pi - \arccos 0{,}8] \cup [\pi + \text{arcos}\, 0{,}8; 2\pi]$.

3.55. 1) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{R}$; 3) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $[0; +\infty)$; 5) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $[0; +\infty)$; 7) $x \neq \frac{\pi}{2} n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $(0; +\infty)$.

3.56. 2) $(\pi n; 0)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(\pi n; 0)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.57. 1) $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{36}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}$; 3) $\operatorname{tg}(-5)$, $\operatorname{tg}(-3)$, $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{tg}(-1)$.

3.58. 2) $\operatorname{tg}(-4{,}75\pi) < \operatorname{tg}(-5{,}6\pi)$; 4) $\operatorname{tg} 4 > \operatorname{tg} 6$; 6) $\operatorname{tg}(-4{,}78) > \operatorname{tg}(-7)$.

3.59. 1) Нечетная; 3) нечетная; 5) нечетная; 7) четная.

3.60. 2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{8} < 0$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right) < 0$; 6) $\operatorname{tg} 5{,}1 < 0$; 8) $\operatorname{tg}(-4{,}3) < 0$.

3.61. 1) а) Нет; б) 0; в) $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; г) нет; д) $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$; е) нет; ж) 2π; 3) а) $-\operatorname{tg}\frac{4\pi}{9} \approx -5{,}7$; б) $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \approx -0{,}6$; в) $\left[-\frac{4\pi}{9}; -\frac{\pi}{6}\right]$; г) нет; д) $\left[-\frac{4\pi}{9}; -\frac{\pi}{6}\right]$; е) нет; ж) нет; 5) а) 0; б) $\operatorname{tg} 1 \approx 1{,}6$; в) $[0; 1]$; г) нет; д) нет; е) $(0; 1]$; ж) 0.

3.62. 2) 1,2; 4) –1,2; 6) –2,3.

3.63. 1) Да; 3) нет; 5) нет.

3.64. 2) а) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right)$; 4) а) нет; б) $\left[-\frac{9\pi}{4}; 2\pi\right)$; 6) а) $[14; 4{,}5\pi)$, $(5\pi; 17]$; б) $(4{,}5\pi; 5\pi)$.

3.65. 1) $-1{,}5 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.66. 2) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{6}$; 6) $-\operatorname{arctg} 5$; 8) $-\operatorname{arctg} 21$.

3.67. 1) $(-3\pi + 6\pi n; 6\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left[1 + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi + 4}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.68. 2) а) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$; 4) а) $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$; г) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$; 6) а) $\left(-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg}\pi\right)$; б) $\left(\operatorname{arctg}\pi; \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg}\pi\right]$; г) $\left[\operatorname{arctg}\pi; \frac{\pi}{2}\right)$; 8) а) $\left(-\frac{\pi}{2}; -\operatorname{arctg}\frac{2}{9}\right)$; б) $\left(-\operatorname{arctg}\frac{2}{9}; \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}; -\operatorname{arctg}\frac{2}{9}\right]$; г) $\left[-\operatorname{arctg}\frac{2}{9}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3.69. 1) Является, 2π; 3) является, $\frac{\pi}{4}$; 5) является, π; 7) является, 2π; 9) является, 2π.

3.70. 2) Является, π. **3.71.** 1) Нет; 3) является, π; 5) является, $\frac{\pi}{2}$.

3.72. 2) $D(f) = x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $E(f) = \boldsymbol{R}$; 4) $D(f) = x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $E(f) = [0; +\infty)$; 6) $D(f) = x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $E(f) = (-\infty; 5]$; 8) $D(f) = x \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $E(f) = (-4; +\infty)$.

3.73. 1) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{15}; 0\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.74. 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{37\pi}{14}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{11}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}3{,}1$, $\operatorname{ctg}5{,}9$, $\operatorname{ctg}8{,}1$, $\operatorname{ctg}4$.

3.75. 1) $\operatorname{ctg}(-1{,}5\pi) < \operatorname{ctg}(-1{,}6\pi)$; 3) $\operatorname{ctg} 2 > \operatorname{ctg} 3$; 5) $\operatorname{ctg}(-5{,}1) > \operatorname{ctg}(-4{,}2)$.

3.76. 2) Нечетная; 4) нечетная; 6) нечетная; 8) четная.

3.77. 1) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12} > 0$; 3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{9\pi}{11}\right) > 0$; 5) $\operatorname{ctg} 5{,}1 < 0$; 7) $\operatorname{ctg}(-2{,}5) > 0$.

3.78. 2) а) Нет; б) 0; в) нет; г) $[1{,}5\pi; 2\pi)$; д) $(1{,}5\pi; 2\pi)$; е) нет; ж) $1{,}5\pi$; 4) а) 0; б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}$; в) нет; г) $\left[\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{2}\right]$; д) нет; е) $\left[\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{2}\right)$; ж) $\frac{\pi}{2}$; 6) а) $\operatorname{ctg}6$; б) $\operatorname{ctg}4$; в) нет; г) $[4; 6]$; д) $(1{,}5\pi; 6]$; е) $[4; 1{,}5\pi)$; ж) $1{,}5\pi$.

3.79. 1) 0,9; 3) –0,6. **3.80.** 2) Нет; 4) да; 6) да.

3.81. а) $(-2\pi; -1{,}5\pi)$, $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right]$; б) $(-1{,}5\pi; -\pi)$, $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) а) $(3\pi; 3{,}5\pi)$, $(4\pi; 4{,}5\pi)$; б) $(2{,}5\pi; 3\pi)$, $(3{,}5\pi; 4\pi)$; 5) а) $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$, $(\pi; 1{,}5\pi)$; б) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $(1{,}5\pi; 5)$.

3.82. 2) $\pi - 6 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{14\pi}{9} + \frac{8\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.83. 1) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\pi - \operatorname{arcctg} 9$; 7) $\operatorname{arcctg} 37$.

3.84. 2) $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(4\pi n; 2\pi + 4\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.85. 1) а) $\left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right)$; б) $\left(0; \frac{5\pi}{6}\right)$; в) $\left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right)$; г) $\left(0; \frac{5\pi}{6}\right]$; 3) а) $\left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$; б) $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$; в) $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right)$; г) $\left(0; \frac{\pi}{3}\right]$; 5) а) $(\pi - \operatorname{arcctg}17; \pi)$; б) $(0; \pi - \operatorname{arcctg}17)$;

в) $[\pi - \operatorname{arcctg} 17;\ \pi)$; г) $(0;\ \pi - \operatorname{arcctg} 17]$; 7) а) $\left(\operatorname{arcctg}\frac{2}{9};\ \pi\right)$; б) $\left(0;\ \operatorname{arcctg}\frac{2}{9}\right)$; в) $\left[\operatorname{arcctg}\frac{2}{9};\ \pi\right)$; г) $\left(0;\ \operatorname{arcctg}\frac{2}{9}\right]$.

3.86. 2) Является, $\frac{\pi}{3}$; 4) является, 2π; 6) является, π; 8) является, 3π.

3.87. 1) Является, π.

3.88. 2) Является, π; 4) является, 2π.

3.90. 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.91. 1) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$;

5) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.92. 2) $(-1)^n\, 5\arcsin\frac{5}{8} + 5\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) нет корней.

3.93. 1) а) $-\frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{7} - \frac{2\pi}{5}$, $\frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{7} - \frac{\pi}{5}$, $-\frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{7}$, $\frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{7} + \frac{\pi}{5}$, $-\frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{7} + \frac{2\pi}{5}$; б) $\frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{7} - \pi$, $-\frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{7} - \frac{4}{5}\pi$, $\frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{7} - \frac{3}{5}\pi$, $-\frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{7} - \frac{2}{5}\pi$, $\frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{7} - \frac{1}{5}\pi$, $-\frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{7}$; 3) а) нет корней; б) нет корней.

3.94. 2) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{9\pi}{4} + 6\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.95. 1) а) $-2\frac{1}{3}\pi$, $-1\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$; б) $-1\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $1\frac{2}{3}\pi$, $2\frac{1}{3}\pi$;

3) а) $-1\frac{1}{3}\pi$, $1\frac{1}{3}\pi$; б) $-1\frac{1}{3}\pi$, $1\frac{1}{3}\pi$, $2\frac{2}{3}\pi$; 5) а) $-2\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{5}{6}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $1\frac{1}{6}\pi$,

$1\frac{1}{2}\pi$; б) $-\frac{5}{6}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $1\frac{1}{6}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$.

3.96. 2) $\pm\frac{7}{2}\arccos\frac{1}{8} + 7\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) нет корней.

3.97. 1) $\frac{2}{5} - \frac{7\pi}{30}$, $\frac{2}{5} + \frac{\pi}{30}$; 3) $\frac{2}{3} - \frac{7\pi}{12}$, $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{12}$; 5) $-\frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}$, $-\frac{1}{4} + \frac{5\pi}{16}$;

7) $\frac{1}{2} - \frac{3\pi}{8}$, $\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{8}$.

3.98. 2) $-2\frac{3}{4}$, $-2\frac{5}{12}$, $-1\frac{3}{4}$, $-1\frac{5}{12}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{12}$; 4) $-\frac{5}{24}$, $-\frac{1}{24}$, $-\frac{19}{24}$, $\frac{23}{24}$, $1\frac{19}{24}$, $1\frac{23}{24}$.

3.99. 1) $-2\frac{1}{3}\pi$, $-2\frac{1}{6}\pi$, $-1\frac{1}{3}\pi$, $-1\frac{1}{6}\pi$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$; 5) $-\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $1\frac{1}{12}\pi$, $1\frac{1}{4}\pi$.

3.100. Например: 2) $[0;\ 2\pi]$; $(4\pi;\ 6\pi)$; 4) $(-2\pi;\ 2\pi)$; $[0;\ 4\pi]$.

3.101. 1) а) 1; б) 1; в) 4; г) 4; д) 1; е) 1.

3.102. 2) $\pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{3} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $(-1)^n\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.103. 1) 0; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 0; $\frac{\pi}{2}$; -2; 2; 5) $\frac{7\pi}{3}$; -1; 6.

3.104. 2) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.105. 1) $-1 < a \leqslant -\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant a < 1$.

3.106. 2) Если $a \geqslant \frac{1}{2}$, то $x = \pm\arccos\frac{1-a}{a} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; если $a < \frac{1}{2}$, то корней нет; 4) если $a = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; если $a \neq 0$, то корней нет; 6) если $a = 0$, то $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; если $a \neq 0$, то $x = (-1)^n \arcsin\frac{1-\sqrt{4a^2+1}}{2a} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 8) если $a = 0$, то $x = 1$; если $a \neq 0$, то корней нет.

3.108. 2) $\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $1 + \pi l,\ l \in \boldsymbol{Z}$; $-2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{1}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6},\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $3\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.109. 1) $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 7) $-\frac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.110. 2) а) $-\frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$; б) $-\frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{19\pi}{6}$; 4) а) $-\frac{2\pi}{3}$; б) $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{10\pi}{3}$; 6) а) $-\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$; 8) а) $-\frac{13\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{23\pi}{12}$; б) $-\frac{\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{23\pi}{12}$, $\frac{35\pi}{12}$, $\frac{47\pi}{12}$.

3.111. 1) $\frac{2}{5} - \frac{2\pi}{15}$; $\frac{2}{5} + \frac{\pi}{15}$; 3) $-\frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}$; $-\frac{1}{4} + \frac{3\pi}{16}$.

3.112. 2) $-1\frac{3}{4}$, $-1\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{7}{9}$, $-\frac{4}{9}$, $-\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{9}$.

3.113. 1) $-\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{19\pi}{12}$; 5) $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$.

3.114. Например: 2) $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$; 4) $(0;\ 3\pi)$; $\left(-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

3.115. 1) а) 1; б) 0; в) 1; г) 1; д) 2; е) 2.

3.116. 2) $\pm 1\,000\,000 \operatorname{arcctg} 1000 + 1\,000\,000\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $1000 \operatorname{arctg} 10 + 1000\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.117. 1) Нет корней; 3) $-\operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.118. 2) $a \geqslant -2$.

3.119. 1) $\operatorname{arctg}\left((1 \pm \sqrt{2})a\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\ a \neq 0$;

3) если $a = 3$, то $x = \operatorname{arctg}\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; если $3 < a \leqslant 4$, $a \geqslant 8$, то $x = \operatorname{arctg}\dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} + \pi l,\ l \in \boldsymbol{Z},\ x = \operatorname{arctg}\dfrac{6 - a \pm \sqrt{a^2 - 12a + 32}}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; если $4 < a < 8$, то $x = \operatorname{arctg}\dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$; если $a < 3$, то корней нет.

3.120. 2) $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi k}{4},\ k \in \boldsymbol{Z};\ \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^k \cdot \dfrac{2}{7}\arcsin\dfrac{5}{8} + \dfrac{2\pi k}{7}$, $k \in \boldsymbol{Z};\ \dfrac{2\pi n}{7},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\dfrac{2\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z};\ \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{3\pi n}{5},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi k}{8},\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\dfrac{\pi}{48} + \dfrac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.121. 1) $-3 + (-1)^n\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\dfrac{3\pi}{8} \pm \dfrac{5\pi}{2} + 6\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.122. 2) $-3\pi + 12\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\dfrac{5\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z};\ \pm\dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{5\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.123. 1) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 5 + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.124. 2) $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $2\operatorname{arctg} 5 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.125. 1) $\dfrac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.126. 2) 3; 4) 1.

3.127. 1) $\dfrac{\pi}{3}$.

3.128. 2) $\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\operatorname{arctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.129. 1) $-\operatorname{arctg} 15 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.130. 2) $\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^{n+1}\dfrac{2\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.131. 1) $\dfrac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pm\arcsin\dfrac{\sqrt{5} - 1}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\pm(\pi - \arccos 0{,}2) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.132. 2) Если $-1 < a < 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; если $a \leqslant -1$ или $a \geqslant 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{a}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) если $a = 0$, то $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; если $a \neq 0$, то $x = (-1)^n \arcsin\frac{1 - \sqrt{4a^2 + 1}}{2a} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.133. 1) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.134. 2) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 0$; $\frac{2\pi l}{5}$, $l \in \boldsymbol{Z}$, $l \neq 15$; $\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 9$.

3.135. 1) $\frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.136. 2) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{1}{3}\left(\pi - \arccos\frac{3}{5}\right) + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.137. 1) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{3\pi}{16} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{7\pi}{16} + \pi l$, $l \in \boldsymbol{Z}$.

3.138. 2) $\frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3.139. 1) $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 7) $\frac{\pi n}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3.140. 2) $\operatorname{arctg}\frac{15}{8} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{12} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $-\frac{4\pi}{3} + (-1)^{n+1}\frac{4\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.141. 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{100} + \frac{2\pi n}{25}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 7) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{4}\arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.142. 2) $\frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{8}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 8m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; 6) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.143. 1) $-\operatorname{arcctg} 3 + (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{10}}{5} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.144. 2) $\frac{\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{3\pi}{8} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{9}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.145. 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.146. 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

6) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.147. 1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{8} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

5) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 7) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.148. 2) $\frac{1}{4}\ \mathrm{arctg}\ 7 + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

4) $\frac{1}{4}\ \mathrm{arctg}\ 2 + \frac{(-1)^n}{4}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

6) $-\frac{1}{4}\ \mathrm{arctg}\ 9 + \frac{(-1)^n}{4}\ \arcsin\frac{\sqrt{82}}{82} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

8) $-\frac{3}{2}\ \mathrm{arcctg}\ 7 + (-1)^n\frac{3\pi n}{8} + \frac{3\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.149. 1) $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.150. 2) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

8) $-\mathrm{arctg}\,\frac{12}{5} \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.151. 1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\mathrm{arcctg}\ 2 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

5) $-\mathrm{arctg}\ 0{,}6 - \pi k$, $k \in \{0\} \cup \boldsymbol{N}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{N}$;

7) $\pm\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\ 2 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 9) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.152. 2) $-\sqrt{58} \leqslant a \leqslant \sqrt{58}$; 4) $a \leqslant -\sqrt{7}$; $a \geqslant \sqrt{7}$.

3.153. 1) Если $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$, то $x = \pm\frac{5}{16}\arccos(4a - 3) + \frac{5\pi n}{8}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; если $a < \frac{1}{2}$ или $a > 1$, то корней нет;

3) если $-2 \leqslant a < 0$, то $x = \pm 2\arccos\frac{-1 + \sqrt{9 - 8a}}{4} + 4\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, если $0 \leqslant a \leqslant \frac{9}{8}$, то $x = \pm 2\arccos\frac{-1 \pm \sqrt{9 - 8a}}{4} + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.154. 2) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ 2\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{1}{4}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.155. 1) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} - 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n;\ \frac{\pi}{3} - \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.156. 2) $\left(\frac{7\pi}{24} + \pi(k_1 + n_1);\ \frac{13\pi}{24} + \pi(k_1 - n_1)\right)$,

$\left(\frac{13\pi}{24} + \pi(k_2 + n_2);\ \frac{7\pi}{24} + \pi(k_2 - n_2)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{24} + \pi(k_3 + n_3);\ \frac{5\pi}{24} + \pi(k_3 - n_3)\right)$,

$\left(\frac{5\pi}{24}+\pi(k_4+n_4);\ -\frac{\pi}{24}+\pi(k_4-n_4)\right)$, $k_i \in \boldsymbol{Z}$, $n_i \in \boldsymbol{Z}$, $i = 1, 2, 3, 4$;

4) $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(l+k);\ -\frac{\pi}{6}+\pi(l-k)\right)$, $l \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\left(\frac{\pi}{6}+\pi(n+m);\ \frac{\pi}{6}+\pi(n-m)\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

3.157. 1) $\left(\frac{5\pi}{3}+\pi n;\ \frac{2\pi}{3}-\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) нет решений.

3.158. 2) $\left(\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ -\frac{2\pi}{3}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.159. 1) $(-45° + 180°n;\ -240° + 180°n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $(-60° + 180°n;\ -30° + 180°n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.160. 2) $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{12}+\pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.161. 1) $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+l);\ -\frac{\pi}{6}+\pi(k-l)\right)$, $l \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\left(\frac{\pi}{6}+\pi(m+n);\ \frac{\pi}{6}+\pi(m-n)\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

3) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi(k+l);\ -\frac{\pi}{3}+\pi(k-l)\right)$, $l \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\left(\frac{\pi}{3}+\pi(m+n);\ \frac{\pi}{3}+\pi(m-n)\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.162. 2) $\left(\pm\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

4) $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.163. 1) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \operatorname{arctg}2+\pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

3) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

$\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi l;\ \operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi m\right)$, $l \in \boldsymbol{Z}$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

3.164. 2) $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2};\ -\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}2+\frac{\pi n}{2}\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

4) $\left(\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3};\ -\frac{1}{9}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi n}{9}\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 3
Тригонометрические функции

(Название и номер учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Кузнецова Елена Павловна
Муравьева Галина Леонидовна
Шнеперман Лев Борисович
Ящин Борис Юрьевич

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 10 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

3-е издание, пересмотренное и исправленное

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Н. М. Алганова*. Оформление *Е. Э. Агунович*. Художественный редактор *А. А. Волотович*. Техническое редактирование и компьютерная верстка *Г. А. Дудко*. Корректоры *В. С. Бабеня, Д. Р. Лосик, Е. И. Даниленко, О. С. Козицкая, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 18.04.2013. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 17 + 0,25 форз. Уч.-изд. л. 10,87 + 0,13 форз. Тираж 105 000 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
ЛИ № 02330/0494083 от 03.02.2009.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
ЛИ № 02330/0150496 от 11.03.2009.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.