

5.6 Gleichungen mit Bruchtermen

Multiplikation (beider Seiten) einer Gleichung mit einem Term kann eine Gewinnumformung sein. Vergleiche Abschnitt 4.3. Beispiele:

$$\frac{4x+5}{2x-8} = \frac{17}{2x-8} \Leftrightarrow 4x = 12, \quad \frac{4x+5}{2x-6} = \frac{17}{2x-6} \Rightarrow 4x = 12$$

Zu 171–200: Bestimme die (reellen) Lösungen.

- 171 a) $\frac{1}{x} + 2 = \frac{9}{x}$ ☒ b) $\frac{5}{6x} + \frac{13}{4} = \frac{5}{3} - \frac{2}{9x}$ c) $\frac{x+10}{3x} - \frac{x+8}{5x} = 1$
- 172 a) $\frac{3}{x} - \frac{1}{2x} = 4$ b) $\frac{1}{2x} - \frac{3}{4x} + \frac{5}{6} = 0$ ☒ c) $\frac{11}{5} - \frac{x-20}{2x} = \frac{2x-1}{3x}$
- 173 a) $\frac{5-x}{10} = \frac{x}{10}$ b) $\frac{2x-4}{x} = \frac{8x-7}{x}$ c) $\frac{3(x+2)}{x+8} = \frac{2(x+3)}{x+8}$
- 174 a) $\frac{4x+1}{6x} = \frac{7x+8}{6x}$ b) $\frac{4-x}{3x-1} = \frac{2x+3}{3x-1}$ c) $\frac{2(x-2)}{x-5} = \frac{2x-4}{x-5}$
- 175 Löse die Gleichung $\frac{3x-7}{N} = \frac{x+1}{N}$ mit dem Nenner N :
 a) $N = 10$ b) $N = x$ c) $N = x-4$ d) $N = x+4$ e) $N = x^2 + x - 20$
- 176 Löse die Gleichung $\frac{Z}{4x-25} = \frac{Z}{10-x}$ mit dem Zähler Z :
 a) $Z = 9$ b) $Z = 2x-4$ c) $Z = 7-x$ d) $Z = (x+4)(2x-1)$ e) $Z = x^2 + 1$
- 177 a) $\frac{1}{x} = \frac{9}{x-5}$ b) $\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x+5}$ c) $\frac{x-6}{x} = \frac{x}{x+10}$
- 178 a) $\frac{4}{2x+1} = \frac{3}{2x}$ b) $\frac{7}{x-8} = \frac{11}{x-1}$ ☒ c) $\frac{14}{x-14} = \frac{x-14}{14}$
- 179 a) $\frac{2x+19}{x+2} = \frac{47}{3x+6}$ b) $\frac{2x}{x-5} = \frac{x-24}{5-x}$ ☒ c) $\frac{x-7}{6x+6} = \frac{x+7}{8x+8}$
- 180 a) $\frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{9-3x}$ b) $\frac{10}{4x+3} = \frac{x+3}{4x^2+3x}$ ☒ c) $\frac{x-2}{x^2-x} = \frac{x}{x^2-1}$
- 181 a) $\frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{5x-8}{2(x-1)} = \frac{3(x-4)}{2(x-1)}$ b) $\frac{2}{x+9} + \frac{3}{4(x+9)} = \frac{1}{4}$

- 182 a) $\frac{x}{2(x-6)} + \frac{1}{2} = \frac{3}{x-6}$ b) $\frac{y}{y+3} - \frac{y+1}{2(y+3)} = \frac{1}{3}$
- 183 a) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{2x-1}{2x+2} = \frac{4x-1}{4x+4}$ b) $\frac{z-3}{z-2} + \frac{z}{5z-10} = \frac{4}{5}$
- 184 a) $\frac{r-7}{r+5} - \frac{3-r}{2r+10} = 2$ b) $\frac{x}{2x-8} + \frac{x-6}{x-4} = \frac{3}{2}$
- 185 a) $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+8}{x^2-4}$ b) $\frac{5}{n-4} - \frac{1}{n-5} = \frac{9n-1}{n^2-9n+20}$
- c) $\frac{x+3}{x-2} - \frac{x+2}{x-3} = \frac{x-5}{x^2-5x+6}$ d) $\frac{2k+17}{7k-3} + \frac{5k^2}{7k^2-3k} = \frac{k+2}{k}$
- 186 a) $\frac{5}{2t^2+3t} + \frac{6}{2t+3} - \frac{7}{t} = 0$ b) $\frac{7x-51}{x^2-9} - \frac{5}{x-3} + \frac{4}{x+3} = 0$
- c) $\frac{v+1}{v-1} - \frac{v-1}{v+1} - \frac{1}{v^2-1} = 0$ d) $\frac{x-1}{x+3} - \frac{x-4}{x+5} = \frac{7x+13}{x^2+8x+15}$
- 187 a) $\frac{2}{x+2} - \frac{2}{x-2} = \frac{x+3}{4-x^2}$ b) $\frac{x}{3x-4} + \frac{1}{8-6x} - 2 = 0$
- 188 a) $\frac{8x+1}{x-8} - \frac{8x-1}{8-x} = 8$ b) $\frac{5+x}{5-x} - \frac{5-x}{5+x} = \frac{5x-5}{x^2-25}$
- 189 a) $\frac{x}{x-3} - \frac{x}{x-4} = \frac{5}{x-3}$ b) $\frac{1}{p} + \frac{2p+5}{p+6} = 2$
- c) $\frac{1}{w-5} + \frac{2w-3}{w+2} = 2$ d) $\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-8} = \frac{11}{8-x}$
- 190 Kopfrechnungen!
- a) $\frac{x}{x+7} + \frac{7}{x+7} = \frac{100}{x+2}$ b) $\frac{2x}{2x-11} - \frac{11}{2x-11} = \frac{x-8}{3}$
- c) $\frac{3x}{x+2} + \frac{6}{x+2} = \frac{1}{x}$ d) $\frac{6}{x-6} - \frac{x}{x-6} = \frac{9}{9-x}$
- 191 a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$ b) $\frac{x}{2x-3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{x-3}$
- 192 a) $\frac{1}{q} - \frac{q}{4q-15} + \frac{1}{4} = 0$ b) $\frac{1}{1-m} + \frac{2}{m} = \frac{1}{2+m}$
- 193 a) $\frac{2x-1}{2x} - \frac{3x-1}{3x} + \frac{4}{4x+1} = 0$ b) $\frac{x-4}{x-2} + \frac{x-8}{2x-4} + \frac{x-9}{3x-6} = 0$
- c) $\frac{x+4}{6x^2+x-2} - \frac{3}{8x-4} = 0$ d) $\frac{3r+7}{r^2+4r} - \frac{5}{r+4} = \frac{1}{4r}$

- 194 a) $\frac{x}{x-3} - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2x-2}$ • b) $\frac{1}{n^2-n} + \frac{1}{n^2-1} = \frac{5}{n^2+n}$
 c) $\frac{6}{4s^2-9} + \frac{5}{2s^2-s-3} = \frac{4}{s^2-1}$ • d) $\frac{1}{4x-4} + \frac{1}{6x-6} = \frac{5}{9x^2-x-8}$
 e) $\frac{x+10}{x^2-10x} + \frac{x+5}{x^2-5x} = \frac{x}{x^2-15x+50}$
 • f) $\frac{x}{4x^2-20x+25} - \frac{1}{4x-10} + \frac{10}{4x^2-25} = 0$
- 195 a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$ b) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-5}{x-6} = \frac{x-3}{x-4} - \frac{x-7}{x-8}$
- 196 a) $\frac{1}{x-9} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+9}$ b) $\frac{6}{2x-5} - \frac{3}{x+3} = \frac{22}{2x-7} - \frac{11}{x-2}$
- 197 a) $\frac{0.5x-1}{x+0.1} - \frac{0.2}{2x+0.2} = 1$ b) $\frac{1-\frac{r}{3}}{1+\frac{r}{3}} = \frac{1+r}{2.6-r}$ c) $\frac{1-\frac{2}{x}}{2+\frac{2}{x}} - \frac{1-\frac{3}{x}}{3+\frac{3}{x}} = \frac{1-\frac{4}{x}}{4+\frac{4}{x}}$
- 198 a) $\frac{\frac{1}{4}x+1}{1-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{3}{2}}{2-x} = \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{1+\frac{1}{w}} = \frac{1+\frac{1}{w}}{1-\frac{1}{w}}$ c) $\frac{0.75}{1.5+0.5x} + \frac{0.2x}{x+3} = 0.3$

Zu 199, 200: Kopfrechnungen!

- 199 a) $\frac{1}{x} = \frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{x} = 6$ c) $\frac{1}{x} = -\frac{5}{3}$ d) $\frac{1}{x} = 2.7$ e) $\frac{1}{x} = -0.01$
 f) $\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{x} + 7\right) = 0$
 g) $\left(3 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(0 - \frac{1}{n}\right) = 0$
 h) $\frac{1}{f}\left(\frac{1}{f} - \frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{f} + \frac{5}{7}\right)\left(3 - \frac{1}{f}\right)\left(\frac{1}{f} - 1.6\right)\left(0.04 - \frac{1}{f}\right) = 0$
- 200 a) $\frac{8}{x+2} = \frac{8}{9}$ b) $\frac{7}{2x-3} = \frac{7}{5}$ c) $\frac{25}{x-1} = 1$ d) $\frac{12}{x+5} = 4$ e) $\frac{6}{x-3} = \frac{1}{9}$
 f) $\left(\frac{24}{x-3} - 1\right)\left(\frac{24}{x-1} - 3\right) = 0$
 g) $\left(\frac{1}{x-1} - 1\right)\left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{x-3} - \frac{1}{3}\right) = 0$

Gleichungen mit Parametern

Wenn aus dem Aufgabentext nichts anderes hervorgeht, ist die angegebene Gleichung ohne Berücksichtigung von Sonderfällen nach x aufzulösen.

- 201 a) $x + 1 = \frac{a}{a+b}$ b) $\frac{r}{r-1} = \frac{r}{r+1} + x$ c) $5x = 3x + \frac{4}{u} - \frac{2}{v}$
- 202 a) $x + \frac{1}{m} = \frac{1}{m-1}$ b) $2x - \frac{3a+b}{2a+2b} = \frac{b-2a}{2a+2b}$ c) $6x - \frac{1}{2h} = \frac{1}{3h} - 4x$
- 203 a) $x + \frac{x}{p} = 1$ b) $\frac{x}{e} + \frac{x}{f} = \frac{1}{f}$ c) $\frac{n+1}{x} + \frac{n}{x+1} = 0$
- 204 a) $2x - \frac{dx}{2} = c$ b) $\frac{1}{x-t} = 1 - \frac{1}{t}$ c) $\frac{a}{w} - \frac{w}{a} = \frac{a^2}{x+aw}$

Zu 205–208: Löse die Gleichung nach jeder Variablen auf.

- 205 a) $A = \frac{abc}{4r}$ b) $s = \frac{1}{1-q}$ c) $\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$
- 206 a) $\frac{x}{y} = \frac{x+a}{y+b}$ b) $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (r > 0)$ c) $\alpha = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$
- 207 a) $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x \cdot y}$ b) $\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$ c) $t = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$
- 208 a) $\frac{y}{x} - \frac{y}{x+1} = \frac{y+1}{x}$ b) $\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$ c) $u' = \frac{u-v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (c > 0)$
- 209 a) $\frac{1+x}{1-x} = a$ b) $\frac{3x+p}{3x-1} = \frac{x+1}{x-p}$ c) $\frac{m}{x-2} + \frac{2x}{2x-m} = 1$

210 Diskutiere in Nr. 209 die Sonderfälle.

- 211 a) $\frac{x-1}{x-c} = c$ b) $\frac{s-5}{x-s} + \frac{1}{x} = 0$ c) $\frac{a}{x} + 1 = \frac{x}{x-b}$

212 Diskutiere in Nr. 211 die Sonderfälle.

- 213 a) $\frac{a^2x - bx + c}{ax + bx - c} = a - 1$ b) $\frac{g - hx}{gx - g} - \frac{x + 1}{x - 1} = 1$
- c) $\frac{x + r}{x - r} - \frac{x - r}{x + r} = \frac{4r^2 + 2r}{x^2 - r^2}$
- 214 a) $\frac{(mx - n)(m + n)}{mx - nx + n} + n = m$ b) $\frac{x}{c - d} - \frac{x + c + d}{c^2 - d^2} = 0$
- c) $\frac{x^2}{sx - 2s} - \frac{x - s}{s} = \frac{1}{x - 2}$
- 215 a) $\frac{2a - x}{4a^2 - 4ab + b^2} = \frac{x - b + 2}{4a - 2b}$ b) $\frac{x^2 + n^2}{x^2 - nx} - \frac{n^2 + 1}{nx - n^2} = 1$
- c) $\frac{r^2 - 4}{24r} - \frac{5r - 6}{8x} = \frac{8r + 2}{3rx} - r$ d) $\frac{4}{x + y} + \frac{1}{x} + \frac{4}{x - y} = 0$
- e) $\frac{2(x - c)}{a^2 + ab - ac - bc} - \frac{x + c}{a^2 + ab + ac + bc} = \frac{1}{a + b}$
- 216 a) $\frac{c - dx}{c^2 - 9d^2} - \frac{c + dx}{c^2 + 6cd + 9d^2} = 0$ b) $\frac{7}{t^2 + tx} - \frac{t + 4}{tx} + \frac{3t - 2}{tx + x^2} = 0$
- c) $\frac{ex - f}{ex + e} + \frac{3e + fx}{fx + f} = \frac{e^2 + f^2}{ef}$ d) $\frac{1}{(x - k)^2} + \frac{2}{(x + k)^2} = \frac{3}{x^2 - k^2}$
- e) $\frac{a - x}{2a^2 - 2ab} - \frac{2(a + x)}{a^2 - b^2} + \frac{x}{ab + b^2} + \frac{a^2 + 6ab + b^2}{2a^3 - 2ab^2} = 0$
- 217 a) $\frac{x + g}{x + \frac{g}{x}} = 1$ b) $\frac{1}{\frac{x}{u} - \frac{x}{v}} = uv$ c) $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{d}} = \frac{1}{c}$
- 218 a) $\frac{1 - \frac{x + a}{x - b}}{1 - \frac{x - a}{x + b}} = 1$ b) $\frac{r - \frac{1}{x}}{r + \frac{1}{x}} = \frac{x - \frac{1}{r}}{x + \frac{1}{r}}$ c) $\frac{x - \frac{1}{n}}{\frac{1}{x} - n} = n + x + 1$

Textaufgaben

- 219 Der Zähler eines ungekürzten Bruches ist um 3 grösser als der Nenner. Der Wert des Bruches ist 0.8. Berechne Zähler und Nenner.
- 220 Der Nenner eines ungekürzten Bruches ist um 240 grösser als der Zähler. Addiert man 1200 zum Zähler, so erhält man einen Bruch, dessen Wert zum ursprünglichen reziprok ist. Berechne Zähler und Nenner des ursprünglichen Bruches.

- 221 Peter verwechselt das Subtrahieren mit dem Dividieren. Statt dass er x durch a dividiert, subtrahiert er a von x . Trotzdem erhält er das richtige Resultat. Bestimme x .
a) $a = 2$ b) $a = 3$ c) $a = 10$ d) $a = -10$ e) $a = \frac{4}{3}$ f) allgemein
- 222 Die Summe der Kehrwerte von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist das Siebenfache der Differenz dieser Kehrwerte. Welche Zahlen sind es?
- 223 Ein grosser Bagger benötigt für einen Aushub 12 Stunden. Würde noch ein kleinerer Bagger helfen, so könnte der Aushub in 9 Stunden gemacht werden. Wie lange würde der kleine Bagger allein brauchen?
- 224 Ein Wasserbecken wird durch eine Zuleitung in 10 Stunden gefüllt. Die Zuleitung wird um 9.00 Uhr geöffnet. Um 11.30 Uhr wird zusätzlich eine zweite Zuleitung geöffnet, so dass das Becken schon um 16.00 Uhr voll ist. Wie lange hätte die zweite Zuleitung allein, um das Becken zu füllen?
- 225 Zwei Metallstücke haben die Massen 6 kg und 7.2 kg. Das Volumen des zweiten Stückes beträgt 90 % des Volumens des ersten. Die beiden Dichten unterscheiden sich um 2.5 g/cm^3 . Berechne das Volumen des ersten Stückes.
- 226 Ein Schiff benötigt für eine 180 km lange Strecke einen Sechstel weniger an Zeit als ein langsames Schiff, dessen mittlere Geschwindigkeit um 5 km/h kleiner ist als die des schnelleren. Berechne die beiden Fahrzeiten.
- 227 Ein Autofahrer erreicht sein Ziel nach 120 km Fahrt um 15.00 Uhr. Wäre seine mittlere Geschwindigkeit um 4 km/h grösser gewesen, so hätte er 4 % Zeit gewonnen. Wann ist er gestartet?
- 228* Läufer A benötigt für eine 25 km lange Strecke 30 Minuten mehr, als Läufer B für 15 km braucht. Die Geschwindigkeit von A ist um 2.5 km/h grösser als die von B. Berechne die Laufzeit von A.
- 229 Ein kleiner Lastwagen benötigt 9 Fahrten mehr, um allein Schutt wegzuführen, als ein grosser. Beide gemeinsam können den Schutt in je 20 Fahrten wegzuführen. Wie viele Fahrten benötigt jeder allein?
- 230 Der Kilopreis der Kaffeesorte A ist um 2 Franken höher als derjenige der Sorte B. Von der Sorte B erhält man für 160 Franken 8 kg mehr, als man von der Sorte A für 120 Franken erhält. Berechne den Kilopreis der Sorte A.