Bruchgleichungen mit Parametern

209 b) $\quad \dfrac{3x+p}{3x-1} = \dfrac{x+1}{x-p}$ * $\quad HN = (3x-1)(x-p)$

1. wenn x die Lösungsvariable ist und p der Parameter:

Definitionsbereich $\mathbb{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}, p\}$

weil $3x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}$

weil $x-p \neq 0 \Leftrightarrow x \neq p$

$$\overset{\cdot HN}{\Longleftrightarrow} \quad (3x+p)\cdot(x-p) = (x+1)(3x-1) \quad *$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 \underbrace{- 3xp + px}_{} - p^2 = 3x^2 \underbrace{- x + 3x}_{} - 1$$

zusammenfassen

$$\overset{-3x^2}{\Longleftrightarrow} \quad -2xp - p^2 = 2x - 1$$

$$\overset{+p^2}{\underset{-2x}{\Longleftrightarrow}} \quad 2x - 2xp = p^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot x\cdot(1-p) = p^2 - 1$$

Terme mit x auf eine Seite

Bruchgleichungen

$$\overset{:2}{\underset{:(1-p)}{\Longleftrightarrow}} \quad x = \frac{p^2-1}{2(1-p)} = \frac{(p+1)(p-1)}{2\cdot(1-p)} = \frac{(p+1)(p-1)}{2\cdot(-1)(p-1)}$$

$$= \frac{p+1}{2\cdot(-1)} = -\frac{p+1}{2}$$

2. Wenn p die Lösungsvariable ist und x der Parameter:

Definitionsbereich $D_p = \mathbb{R} \setminus \{x\}$

weil $x - p \neq 0 \Rightarrow p \neq x$

Die ersten Schritte beim Umformen der ursprünglichen Gleichung sind gleich bis zu

$$-2xp - p^2 = 2x - 1$$

dann könnte man links p ausklammern

✡ $p(-2x-p) = 2x-1$

✡ und durch $(-2x-p)$ dividieren

✡ $p = \dfrac{2x-1}{-2x-p} = -\dfrac{2x-1}{2x+p} = \dfrac{1-2x}{2x+p}$

allerdings hat dann die Lösung

$$\frac{1-2x}{2x+p}$$ die Lösungsvariable p in sich!

Das darf natürlich nicht sein, deshalb sind die Schritte ✡ nicht geeignet!

Die Gleichung $-2xp - p^2 = 2x - 1$ ist also schwierig zu lösen, weil die Lösungsvariable p auch im Quadrat p^2 vorkommt.

Es ist eine sogenannte quadratische Gleichung, die später behandelt wird.