Musterlösungen und Hilfe zum Lösen von Bruchgleichungen

in Dossier "3 Gleichungen"

Anfg. 62 d)

$$x + \frac{2}{5} - \frac{3x - \frac{1}{2}}{10} = \frac{3x}{4} - \frac{5}{2} \quad \Big| \quad HN = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

Erweitern

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{20x}{20} + \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 5} - \frac{2\left(3x - \frac{1}{2}\right)}{2 \cdot 10} = \frac{5 \cdot 3x}{5 \cdot 4} - \frac{10 \cdot 5}{10 \cdot 2}$$

$\cdot HN$

$$\Longleftrightarrow \quad 20x + 8 - 2\left(3x - \tfrac{1}{2}\right) = 15x - 50$$

$$\Longleftrightarrow \quad 20x + 8 - 6x + 1 = 15x - 50$$

!

$$\Longleftrightarrow \quad 14x + 9 = 15x - 50 \quad \overset{-14x}{\underset{+50}{\Longleftrightarrow}} \quad \underline{\underline{59 = x}}$$

schnelle Version: man überlegt sich im Kopf wie erweitert werden muss.

$$x + \frac{2}{5} - \frac{3x - \frac{1}{2}}{10} = \frac{3x}{4} - \frac{5}{2} \quad \Big| \quad HN = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

$\cdot HN$

$$\Longleftrightarrow \quad 20x + 8 - 2\left(3x - \tfrac{1}{2}\right) = 15x - 50$$

$$\overset{-15x}{\underset{+50}{\Longleftrightarrow}} \quad 5x + 58 - 6x + 1 = 0 \quad \overset{+x}{\Longleftrightarrow} \quad \underline{\underline{59 = x}}$$

!

im Aufgabendossier "5.6 Gleichungen mit Bruchtermen"

171 a) ausführlich: $\frac{1}{x} + 2 = \frac{9}{x} \quad | \; HN = x$

$\overset{\cdot x}{\Longleftrightarrow} \quad x \cdot \left(\frac{1}{x} + 2\right) = x \cdot \frac{9}{x}$ ganzen linken Term multiplizieren

$\Longleftrightarrow \quad x \cdot \frac{1}{x} + x \cdot 2 = \frac{x}{1} \cdot \frac{9}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + 2x = 9$

$\overset{-1}{\Longleftrightarrow} \quad 2x = 8 \quad \overset{:2}{\Longleftrightarrow} \quad \underline{\underline{x = 4}}$

anspruchsvollere Bestimmungen der HN:

180 a) $\frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{9-3x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{3(3-x)}$

Nenner faktorisieren

falsch und mit unnötig viel Rechenaufwand verbunden wäre der $HN = (x-3) \cdot 3 \cdot (3-x)$

Dieser HN ist relativ gross und ensprechend auch die nachfolgenden Erweiterungen.

Da die Faktoren $x-3$ und $3-x$ sehr ähnlich sind, vertauscht man einen durch Ausklammern von (-1), z.B. $3-x = (-1)(x-3)$.

③

Dadurch erhält man

$$\frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{3\cdot(3-x)} \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{3\cdot(-1)(x-3)}$$

Jetzt könnte man den HN $= 3\cdot(-1)\cdot(x-3)$ bilden, aber auch das ist noch nicht das Optimale!

Man bringt nämlich den Faktor (-1) noch aus dem Nenner:

$$\text{rechter Term} = \frac{x+1}{3\cdot(-1)\cdot(x-3)} = \frac{x+1}{(-1)\cdot 3\cdot(x-3)} = -\frac{x+1}{3\cdot(x-3)} = \frac{-(x+1)}{3\cdot(x-3)}$$

Erinnere Sie sich an: $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} = \frac{3}{-4}$

(Umgang mit dem Minuszeichen bei Brüchen)

Schlussendlich erhält man die Gleichung

$$\frac{x}{x-3} = \frac{-(x+1)}{3(x-3)} \quad \Big| \text{ HN} = 3(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\cdot x}{3(x-3)} = \frac{-x-1}{3(x-3)} \overset{\cdot \text{HN}}{\Leftrightarrow} 3x = -x-1$$

$$\Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

In den Aufgaben 179 b), 187 a) b), 188 a) b) und 189 d) geht es um genau diese Technik.

anspruchsvolle Aufgaben 194 :

Es kommen alle Techniken zum Faktorisieren der Nenner vor, repetieren Sie diese unbedingt, wir werden sie noch öfter brauchen.

1 Beispiel 194 c) :

$$\frac{6}{4s^2-9} + \frac{5}{2s^2-s-3} = \frac{4}{s^2-1}$$

Faktorisieren der Nenner:

- $4s^2-9$: 3. binomische Formel, $4s^2 = (2s)^2$
- $2s^2-s-3$: Trinom! binomische Formel geht nicht, deshalb Klammeransatz:
  $(2s \,\ldots)\cdot(s \,\ldots) = 2s^2 \,\ldots\ldots$ & "hinten" -3
- s^2-1: 3. binomische Formel

$$\Longleftrightarrow \frac{6}{(2s+3)(2s-3)} + \frac{5}{\underbrace{(2s-3)(s+1)}} = \frac{4}{(s+1)(s-1)}$$

es müssen die Zahlen 3 und 1 sein und multipliziert -3 ergeben, also einmal ein + und einmal ein − !

5

Wo die 3 und wo die 1 und wo das +
und wo das − muss man noch heraustüffteln.
Dazu ist der mittlere Term des Trinoms
entscheidend, also $-s$.

Man erhält so den HN $= (2s+3)(2s-3)(s+1)(s-1)$.

Erweitert wird die Bruchgleichung zu:

$$\frac{6\cdot(s+1)(s-1)}{(2s+3)(2s-3)(s+1)(s-1)} + \frac{5\cdot(2s+3)(s-1)}{(2s-3)(s+1)(2s+3)(s-1)} = \frac{4\cdot(2s+3)(2s-3)}{(s+1)(s-1)(2s+3)(2s-3)}$$

Sie sehen das gibt sehr viel zu schreiben, insbesondere muss man den HN dreimal aufschreiben. Um das zu vermeiden lässt man diesen Schritt gerne aus und überlegt sich bei jedem Bruch wie man erweitern muss, also

$$\overset{\cdot HN}{\Longleftrightarrow} \quad 6\cdot\underbrace{(s+1)\cdot(s-1)} + 5\underbrace{(2s+3)(s-1)} = 4\underbrace{(2s+3)(2s-3)}$$

Erweiterungen

und der Schluss noch: (binomische Formeln und "alles mit allem")

$$\Leftrightarrow \quad 6 \cdot (s^2 - 1^2) + 5(2s^2 - 2s + 3s - 3) = 4((2s)^2 - 3^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 6s^2 - 6 + 10s^2 + 5s - 15 = 4(4s^2 - 9) = 16s^2 - 36$$

$$\Leftrightarrow \quad 16s^2 + 5s - 21 = 16s^2 - 36$$

$$\overset{-16s^2}{\underset{+21}{\Leftrightarrow}} \quad 5s = 21 - 36 = -15 \overset{:5}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{s = -3}}$$