Musterlösungen quadratische Gleichungen

Buch Seite 93 bis 98 :

1 c) $$x^2 = 2.25 = \frac{225}{100} = \frac{15^2}{10^2} = \left(\frac{15}{10}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Dezimalzahl in einen Bruch umschreiben

Zahlen als Potenz schreiben

Potenzgesetz

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3}{2} \text{ und } x_2 = -\frac{3}{2}$$

Wurzelziehen ist keine Äquivalenzumformung, deshalb Folgerungspfeil

Die Gleichung hat also 2 Lösungen:

$$\mathbb{L}_x = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$$

4 c) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \overset{\cdot HN = 9 \cdot 4}{\Longleftrightarrow} 9x^2 + 8 = 12$

$\overset{-8}{\Longleftrightarrow} 9x^2 = 4 \overset{:9}{\Longleftrightarrow} x^2 = \frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}$ und $x_2 = -\frac{2}{3}$

Zahlen als Potenz schreiben

also $\underline{\underline{\mathbb{L}_x = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}}}$

5 c) $x^2 - (x-4)^2 = (x+4)^2 - 8 \cdot 4$

$\Longleftrightarrow x^2 - (x^2 - 8x + 16) = x^2 + 8x + 16 - 32$

binomische Formeln

$\Longleftrightarrow x^2 - x^2 + 8x - 16 = x^2 + 8x - 16$

$\underset{+16}{\overset{-8x}{\Longleftrightarrow}} 0 = x^2 \Longleftrightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{\mathbb{L}_x = \{0\}}$

6 c) $A = \frac{1}{4}\pi d^2 \underset{:\pi}{\overset{\cdot 4}{\Longleftrightarrow}} \frac{4A}{\pi} = d^2$

$\Longrightarrow \underline{\underline{d}} = \pm\sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \pm\frac{\sqrt{4}\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}} = \underline{\pm 2\sqrt{\frac{A}{\pi}}}$

Wurzelziehen ist keine Äquivalenzumformung!

③

11 d) $x\,(2x-3) = x^2 + 11x$

$\Leftrightarrow\; 2x^2 - 3x = x^2 + 11x$

$\overset{-x^2}{\underset{-11x}{\Leftrightarrow}}\; x^2 - 14x = 0 \;\Leftrightarrow\; x\cdot(x-14) = 0$

Lösungsprinzip

linke Seite faktorisieren

eine Seite "zu Null" machen

$\Rightarrow$ entweder $x_1 = 0$ oder $x - 14 = 0$

$\Leftrightarrow x_2 = 14$

$\Rightarrow \mathbb{L}_x = \{0, 14\}$

15 e) $z^2 - \underbrace{13}_{p} z = z^2 - 2\cdot \underbrace{\frac{13}{2}}_{\frac{p}{2}}\cdot z$

$\Rightarrow \underbrace{z^2 - 2\cdot\frac{13}{2} z + \left(\frac{13}{2}\right)^2}_{\text{quadratische Ergänzung mit } \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \underline{z^2 - 13z + \frac{169}{4}} =$

④

$$= \left(z - \frac{13}{2} \right)^2$$

2. binomische Formel rückwärts !

16 i) $\underbrace{x^2 + \frac{4}{3}}_{p} x + \frac{4}{9} = 36$

quadratischen Term erkennen!

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{\frac{p}{2}} x + \Big(\underbrace{\frac{2}{3}}_{\frac{p}{2}}\Big)^2 = 6^2$$

als Potenz schreiben

Mischterm auseinander nehmen so, dass die Basis des quadratischen Termes erkannt bzw. identifiziert wird. !

1. binomische Formel rückwärts !

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 = 6^2$$

$$\Rightarrow x + \frac{2}{3} = \pm 6 \qquad \Rightarrow$$

Wurzelziehen ist keine Äquivalenzumformung

$$\Rightarrow \text{entweder } x + \frac{2}{3} = 6 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} 3x + 2 = 18$$

$$\overset{-2}{\Leftrightarrow} 3x = 16$$

$$\overset{:3}{\Leftrightarrow} x_1 = \frac{16}{3} \quad \text{1. Lösung}$$

⑤

oder $x + \frac{2}{3} = -6 \overset{\cdot 3}{\iff} 3x + 2 = -18$

$\overset{-2}{\iff} 3x = -21$

$\overset{:3}{\iff} \underline{\underline{x_2 = -7}}$ 2. Lösung

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L}_x = \left\{-7, \frac{16}{3}\right\}}}$

17e) $x^2 \underbrace{+20}_{p} x \underbrace{-96}_{q} = 0$ quadratische Gleichung in <u>Normalform</u>

$\overset{+96}{\iff} x^2 + 2 \cdot \underbrace{10}_{\frac{p}{2}} \cdot x = \underbrace{96}_{-q}$

$\overset{+10^2}{\iff} x^2 + 2 \cdot \underbrace{10}_{\frac{p}{2}} \cdot x + \underline{10^2} = 96 + \underline{10^2}$

<u>quadratisches Ergänzen</u> mit $\underline{\left(\frac{p}{2}\right)^2 = 10^2}$

$\iff (x + 10)^2 = 196 = 14^2$

<u>1. binomische Formel</u>
<u>rückwärts</u> !

Zahl als Potenz schreiben

⑥

$$\Longrightarrow \quad x + 10 = \pm 14$$

Wurzelziehen ist keine Äquivalenzumformung!

$\Rightarrow$ entweder $x + 10 = 14 \overset{-10}{\Longleftrightarrow} x_1 = 4$

oder $x + 10 = -14 \overset{-10}{\Longleftrightarrow} x_2 = -24$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L}_x = \{-24, 4\}}}$$

18 b) $x^2 = 7 - 8x \Longleftrightarrow x^2 + \underset{p}{\underline{8}}\,x = \underset{-q}{\underline{7}}$

um den quadratischen Term $\frac{p}{2}$ zu erkennen

$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{p}{2} = 4}}$

$\overset{+4^2}{\Longleftrightarrow} x^2 + 2 \cdot \underset{\frac{p}{2}}{\underline{4}} \cdot x + 4^2 = 7 + 4^2$ / quadratisches Ergänzen mit $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = 4^2$

$\Longleftrightarrow (x + 4)^2 = 7 + 16 = 23$

1. binomische Formel rückwärts!

(7)

$\Rightarrow \quad x + 4 = \pm\sqrt{23}$

Wurzelziehen ist keine Äquivalenzumformung!

$\Rightarrow$ entweder $x + 4 = \sqrt{23} \overset{-4}{\Leftrightarrow} x_1 = -4 + \sqrt{23}$

oder $x + 4 = -\sqrt{23} \overset{-4}{\Leftrightarrow} x_2 = -4 - \sqrt{23}$

$\Rightarrow \mathbb{L}_x = \{-4 - \sqrt{23}, -4 + \sqrt{23}\}$

18 c) $x^2 + \underbrace{\frac{1}{16}}_{q} = \frac{1}{2}x \quad \overset{-\frac{1}{2}x}{\underset{-\frac{1}{16}}{\Leftrightarrow}} \quad x^2 \underbrace{- \frac{1}{2}}_{p} x = \underbrace{-\frac{1}{16}}_{-q}$

um den quadratischen Term zu erkennen

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{\frac{p}{2}} \cdot x = -\frac{1}{16}$

$\overset{+\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{\frac{p}{2}} \cdot x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{1}{16} + \left(\frac{1}{4}\right)^2$

quadratisches Ergänzen mit $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = 0$$

2. binomische Formel rückwärts !

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \mathbb{L}_x = \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

also nur eine Lösung !

19 b) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - 11 = 0$

$\cdot 3$

$$\Leftrightarrow x^2 + \overbrace{\frac{1}{2}}^{p} x \overbrace{- 33}^{q} = 0$$

Normalform der quadratischen Gleichung

damit x^2 alleine da steht

$+ 33$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{\frac{p}{2}} \cdot x = 33$$

$+\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$$\Leftrightarrow x + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 33 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

quadratisches Ergänzen mit $\left(\frac{p}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 = 33+\frac{1}{16} = \frac{33\cdot 16+1}{16} \underset{TR}{=} \frac{528+1}{16}$$

1. binomische Formel rückwärts!

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{529}{16} = \frac{23^2}{4^2} = \left(\frac{23}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{4} = \pm\frac{23}{4}$$

Wurzelziehen ist keine Äquivalenzumformung!

$$\Rightarrow \text{entweder } x+\frac{1}{4} = \frac{23}{4} \overset{-\frac{1}{4}}{\Leftrightarrow} x_1 = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$$

$$\text{oder } x+\frac{1}{4} = -\frac{23}{4} \overset{-\frac{1}{4}}{\Leftrightarrow} x_2 = -\frac{24}{4} = -6$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_x = \left\{-6, \frac{11}{2}\right\}$$