1 Bruchgleichungen

1.1 Bruchgleichungen mit Zahlen in den Nennern (Repetition)

Wir betrachten die Aufgabe 61b) aus dem Dossier *Gleichungen*:

Lösen Sie die folgende Bruchgleichung.

$$\frac{3x-19}{15} - \frac{x}{18} = \frac{x-12}{10} \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}$$

Bekanntlich macht man in einem 1. Schritt immer die Nenner gleichnamig bzw. bildet das kgV der Nenner.
Dazu muss man zunächst alle Nenner faktorisieren (Primfaktorzerlegung), also $15 = 3 \cdot 5$, $18 = 2 \cdot 3^2$ und $10 = 2 \cdot 5$. Somit ergibt sich der gemeinsame Nenner, welcher auch Hauptnenner (HN) genannt wird: $HN = kgV(15, 18, 10) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.
Es empfiehlt sich diesen HN gar nicht erst auszumultiplizieren, weil sich die vorzunehmenden Erweiterungen an den einzelnen Brüchen aus der faktorisierten Form des HN sehr gut ablesen lassen!
Ausführlich aufgeschrieben sieht das dann so aus:

$$\frac{3x-19}{15} - \frac{x}{18} = \frac{x-12}{10} \iff \frac{3x-19}{3 \cdot 5} - \frac{x}{2 \cdot 3^2} = \frac{x-12}{2 \cdot 5}$$

$$\iff \frac{\mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot (3x-19)}{\mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot 3 \cdot 5} - \frac{\mathbf{5} \cdot x}{\mathbf{5} \cdot 2 \cdot 3^2} = \frac{\mathbf{3^2} \cdot (x-12)}{\mathbf{3^2} \cdot 2 \cdot 5}$$

Jetzt sind die Nenner alle gleich und die Faktoren können noch in die gleiche Reihenfolge gebracht werden.

Multiplikation der Gleichung mit dem HN ist eine Äquivalenzumformung, verändert also die Lösungsmenge der Gleichung nicht! Man erhält so eine bruchfreie Gleichung, die dann wie gewohnt gelöst wird: ausmultiplizieren, zusammenfassen und alle Terme mit der Lösungsvariable auf eine Seite bringen:

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot (3x-19)}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} - \frac{5 \cdot x}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{3^2 \cdot (x-12)}{2 \cdot 3^2 \cdot 5}$$

$$\iff 6 \cdot (3x-19) - 5 \cdot x = 9 \cdot (x-12) \iff 18x - 114 - 5x = 9x - 108$$

$$\iff 18x - 5x - 9x = -108 + 114 \iff 4x = 6 \iff x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$x = \frac{3}{2}$ ist tatsächlich auch eine Lösung, da alle Umformungen Äquivalenzumformungen waren (kontrollieren Sie das), die Lösungsmenge sich also nirgends verändert bzw. für alle Gleichungen dieselbe bleibt! (siehe Definition

Äquivalenzumformung). $x = \frac{3}{2}$ ist also weder eine Scheinlösung, noch gibt es weitere Lösungen, die irgendwo 'verloren' gegangen sind.
Bemerken Sie auch, dass bei Bruchgleichungen mit Zahlen in den Nennern die Definitionsmenge der Lösungsvariable immer gleich der angegebenen Grundmenge ist, d.h. hier $\mathbb{D}_x = \mathbb{G}_x = \mathbb{R}$. Damit liegen die erhaltenen Lösungen sicher in der Definitionsmenge der Lösungsvariable.

Zusammenfassung des methodischen Vorgehens bei Bruchgleichungen mit Zahlen im Nenner:

1. Haupnenner bestimmen:
   a) alle Nenner faktorisieren (Primfaktorzerlegung)
   b) kgV der Nenner bilden = Hauptnenner (HN)

2. Einzelne Brüche so erweitern, dass alle den HN haben. Dann die Gleichung mit dem HN multiplizieren.
   Resultat: bruchfreie Gleichung.

3. Lösen der bruchfreien Gleichung mithilfe der üblichen Methoden: ausmultiplizieren, zusammenfassen, Terme mit der Lösungsvariable auf eine Seite bringen, etc..

1.2 Bruchgleichungen mit der Lösungsvariable in den Nennern

Das Vorgehen bei Bruchgleichungen, in deren Nenner auch die Lösungsvariable vorkommt ist im Wesentlichen gleich. Das Bilden des Hauptnenners gestaltet sich allerdings ein wenig anspruchsvoller, da die Vorbereitungen dazu dem Faktorisieren von Termen gleichkommt, d.h. sämtliche Faktorisierungstechniken werden gebraucht, müssen also gut beherrscht werden. Schlagen Sie deshalb diese Techniken im Theorieheft immer wieder nach und verschaffen Sie sich nochmals einen Überblick, inklusive Fachbegriffen (z.B. *Ausklammern*, *binomische Formeln rückwärts*, *Ausklammern in Teilsummen*, etc.).

Wir betrachten die Aufgabe 194e) aus dem angehefteten Dossier *Bruchgleichungen*:

Lösen Sie die folgende Bruchgleichung.

$$\frac{x+10}{x^2-10x} + \frac{x+5}{x^2-5x} = \frac{x}{x^2-15x+50} \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}$$

Wiederum ist das erste Ziel die Nenner gleichnamig zu machen.
Dazu muss man zunächst alle Nenner faktorisieren, also $x^2-10 = x\cdot(x-10)$, $x^2-5 = x\cdot(x-5)$ und $x^2-15x+50 = (x-5)\cdot(x-10)$, dabei hat man in den ersten zwei Nennern ausgeklammert im dritten einen Klammeransatz für das vorliegende Trinom gemacht.
Der gemeinsame Nenner, der auch wieder Hauptnenner (HN) genannt wird, ist dann $HN = x\cdot(x-10)\cdot(x-5)$. Bemerken Sie, dass das Prinzip, um den Hauptnenner zu bilden, genau dasselbe ist wie bei der Bildung des kgV's von Zahlen: man nimmt alle vorkommenden Faktoren in ihrer höchsten Potenz und multipliziert sie. Dies ist der entscheidende und mitunter auch schwierigste Teil der Aufgabe (mehr dazu später, wenn Sie schon bisschen Training haben).
Wiederum soll dieser HN auf keinen Fall ausmultipliziert werden, weil sich die vorzunehmenden Erweiterungen an den einzelnen Brüchen nur aus der faktorisierten Form des HN ablesen lassen!
Ausführlich aufgeschrieben sieht das dann so aus:

$$\frac{x+10}{x^2-10x} + \frac{x+5}{x^2-5x} \quad = \quad \frac{x}{x^2-15x+50}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x+10}{x\,(x-10)} + \frac{x+5}{x\,(x-5)} \quad = \quad \frac{x}{(x-5)\,(x-10)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{(\mathbf{x-5})\cdot(x+10)}{(\mathbf{x-5})\cdot x\,(x-10)} + \frac{(\mathbf{x-10})\cdot(x+5)}{(\mathbf{x-10})\cdot x\,(x-5)} \quad = \quad \frac{\mathbf{x}\cdot x}{\mathbf{x}\cdot(x-5)\,(x-10)}$$

Jetzt sind die Nenner alle gleich und die Faktoren können noch in die gleiche Reihenfolge gebracht werden.

Multiplikation der Gleichung mit dem HN macht die Gleichung bruchrei und lässt sich dann mit den üblichen Operationen (ausmultiplizieren, zusammenfassen und alle Terme mit der Lösungsvariable auf eine Seite bringen) lösen. Allerdings ist dieses Multiplizieren der Bruchgleichung mit dem Hauptnenner keine Äquivalenzumformung (Schritt $\overset{\star}{\Longrightarrow}$), weil die Lösungsvariable darin vorkommt! D.h. die im weiteren Verlauf erhaltenen Resultate könnten auch Scheinlösungen sein, also Zahlen, welche die ursprüngliche Gleichung gar nicht lösen oder welche nicht im Definitionsbereich der Lösungsvariable liegen. (mehr dazu unten)
Sorgfältig aufgeschrieben sind die beschriebenen Schritte folgende:

$$\frac{(x-5)\cdot(x+10)}{x\cdot(x-5)\cdot(x-10)} + \frac{(x-10)\cdot(x+5)}{x\cdot(x-5)\cdot(x-10)} \quad = \quad \frac{x\cdot x}{x\cdot(x-5)\cdot(x-10)}$$

$$\overset{\star}{\Longrightarrow} \quad (x-5)\cdot(x+10) + (x-10)\cdot(x+5) \;=\; x\cdot x$$

$$\iff \quad x^2+5x-50+x^2-5x-50 \;=\; x^2 \quad \iff \quad x^2 \;=\; 100$$

Diese letzte Gleichung hat dann die Lösung $x = 10$, aber auch $x = -10$, weil $(-10)^2 = 100$.
Setzt man diese zwei Zahlen in die ursprüngliche Gleichung ein, so stellt man fest, dass $x = 10$ keine Lösung sein kann, weil die Nenner des 1. und des 3. Bruches Null ergeben und somit eine nicht definierte Division durch 0 entsteht. Es bleibt also lediglich $x = -10$ als Lösung, was der Test bestätigt (überprüfen Sie das).
Die Scheinlösung $x = 10$ kann auch ausgeschlossen werden, indem man die Definitionsmenge der Lösungsvariable dieser Bruchgleichung bestimmt. Das macht man am besten anhand der Gleichung mit den faktorisierten Nennern:

$$\frac{x+10}{x\,(x-10)} + \frac{x+5}{x\,(x-5)} \quad = \quad \frac{x}{(x-5)\,(x-10)}$$

Betrachtet man diese Nenner, ist nämlich klar, dass die Zahlen $x = 0$, $x = 5$ und $x = 10$ nicht zugelassen sind, weil sonst eine Division durch 0 entsteht. Aus der Grundmenge $\mathbb{G}_x = \mathbb{R}$ müssen deshalb diese Zahlen ausgeschlossen werden, um die Definitionsmenge der Lösungsvariable zu bestimmen: $\mathbb{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{0, 5, 10\}$. Kombiniert mit den Resultaten aller Umformungen an der Gleichung heisst das, dass die Lösungsmenge der Gleichung nur aus einer Lösung $\mathbb{L}_x = \{-10\}$ besteht.

Zusammenfassung des methodischen Vorgehens bei Bruchgleichungen mit der Lösungsvariablen im Nenner:

1. Haupnenner bestimmen:
   a) alle Nenner faktorisieren (Faktorisierung von Termen)
   b) kgV der Nenner bilden = Hauptnenner (HN)

2. Einzelne Brüche so erweitern, dass alle den HN haben. Dann die Gleichung mit dem HN multiplizieren.
   Resultat: bruchfreie Gleichung.

3. Lösen der bruchfreien Gleichung mithilfe der üblichen Methoden: ausmultiplizieren, zusammenfassen, Terme mit der Lösungsvariable auf eine Seite bringen, etc..

4. Definitionsbereich der Bruchgleichung anhand der Gleichung mit den faktorisierten Nennern bestimmen und allfällige Scheinlösungen ausschliessen.