Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Bis Anhin haben Sie folgende Begriffe kennen gelernt:
gemischt quadratische Gleichung, ihre **Normalform** sowie die einzelnen Glieder **quadratisches, lineares und konstantes Glied**, ferner die spezielle **rein quadratische Gleichung**.
Ferner kennen Sie drei Techniken um quadratische Gleichungen zu lösen:
Lösen von rein quadratischen Gleichungen, Lösen durch **Faktorisieren der einen Seite, während die andere Null ist** und Lösen mittels **quadratischem Ergänzen**.
Eine vierte Technik leitet sich aus dem quadratischen Ergänzen her bzw. ist die **Verallgemeinerung** dessen und liefert eine **Formel** mit der jeder quadratische Gleichung gelöst werden kann.
Es ist jedoch wichtig zu bemerken, dass in der Praxis das Lösen von rein quadratischen Gleichungen und das Lösen durch Faktorisieren der einen Seite, während die andere Null ist, weiterhin sehr effektive und schnelle Methoden sind, um gewisse quadratische Gleichungen zu lösen, ja, man bevorzugt insbesondere die Technik Lösen durch Faktorisieren der einen Seite, während die andere Null ist, gegenüber dem Lösen mit der Lösungsformel, wenn immer dies möglich ist und benützt die Lösungsformel nur, wenn es wirklich nicht anders geht.

Herleitung der Lösungsformel durch quadratisches Ergänzen

Wir gehen von der Normalform einer gemischt quadratischen Gleichung aus

$a\,x^2 + b\,x + c = 0$ mit reellen Zahlen a, b, c und der Lösungsvariable x

Man führt nun jeden Schritt des quadratischen Ergänzens aus und arbeitet dabei mit den allgemein gehaltenen Zahlen a, b und c.

Als Erstes dividiert man die ganze Gleichung durch a, damit das quadratische Glied nur noch aus x^2 besteht:

$$\iff \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Als Nächstes bringt man das neue konstante Glied $\frac{c}{a}$ auf die andere Seite der Gleichung:

$$\iff \qquad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Die Zahl beim neuen linearen Glied teilt man dann durch 2 und erhält $\frac{b}{2a}$. Die quadratische Ergänzung führt man mit dem Quadrat dieser Zahl, also $(\frac{b}{2a})^2$ durch:

$$\Longleftrightarrow \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Die linke Seite lässt sich nun noch etwas anders schreiben, sodass sich die 1. binomische Formel erkennen lässt. Die rechte Seite macht man noch gleichnamig ordnet um:

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c \cdot 4a}{a \cdot 4a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Das Anwenden der 1. binomischen Formel rückwärts auf den linken Term ergibt:

$$\Longleftrightarrow \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Wurzelziehen auf beiden Seiten (keine Äquivalenzumformung!) und die rechte Seite weiter Vereinfachen liefert:

$$\Longrightarrow \qquad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Zum Schluss noch $\frac{b}{2a}$ auf beiden Seiten der Gleichung subtrahieren und die rechte Seite zu einem Bruch umschreiben und umordnen:

$$\Longleftrightarrow \qquad x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kompakt geschrieben mit der Anfangsgleichung ist das dann die **Lösungsformel für quadratische Gleichungen**:

$$\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Das sind zwei Lösungen, einmal wird die Wurzel im Zähler addiert und einmal subtrahiert.

Anzahl Lösungen einer quadratischen Gleichung, Diskriminante $\mathbf{D = b^2 - 4ac}$

Der Radikand $b^2 - 4ac$ im Zähler der Lösung nennt man **Diskriminante** und gibt ihr das Symbol **D**.
Nun kann es sein, dass die Zahlen a, b und c so beschaffen sind, dass diese Diskriminante gerade Null oder dass sie negativ wird. Da die Wurzel von Null auch Null ergibt, heisst das im ersten Fall, dass die quadratische Gleichung nur eine Lösung hat, nämlich $x = \frac{-b}{2a}$. Im zweiten Fall aber hat die quadratische Gleichung gar keine Lösung, da die Wurzel aus einer negativen Zahl nicht definiert ist. Zwei Lösungen hat die quadratische Gleichung also nur, wenn die Diskriminante positiv ist.

Vorgehen beim Lösen von quadratischen Gleichungen

Wie am Anfang bereit erwähnt, ist es nicht sinnvoll jede quadratische Gleichung mit der Lösungsformel zu lösen. Ferner ist es immer ratsam die Gleichung **auf Normalform zu bringen** und zudem **bruchfrei zu machen**. Zweiteres erreicht man durch Multiplizieren der Gleichung mit dem Hauptnenner.
Ist die Gleichung einmal in Normalform und bruchfrei, sieht man der Gleichung sofort an, ob sie rein oder gemischt quadratisch ist. Im rein quadratischen Fall löst man sie entsprechend. Im gemischt quadratischen Fall probiert man die Seite, welche nicht Null ist, zu faktorisieren (Ausklammern, binomische Formel rückwärts, Klammeransatz). In den Fällen, wo das nicht geht, greift man dann zur Lösungsformel, identifiziert also die drei Zahlen a, b und c und setzt diese in die Formel ein und vereinfacht den Wurzelterm, respektive bringt diesen auf Normalform.
Die Technik *quadratisch Ergänzen* wird in der Praxis wenig gebraucht, sie ist aber die Grundlage, um die Lösungsformel überhaupt zu finden bzw. herzuleiten.