

Definitionen rund um das Thema Gleichungen

Variable: eine Variable steht **stellvertretend** für eine Zahl oder einen Term.

Variablen werden in der Mathematik durch **Kleinbuchstaben**, in der Physik und anderen Naturwissenschaften auch mit Grossbuchstaben symbolisiert.

Operation: eine Operation **verknüpft** zwei Zahlen bzw. Variablen.

Es gibt Operationen 1., 2. und 3. Stufe, nummeriert nach ihrer **Bindungsstärke**.

1. Stufe: Addition und Subtraktion, 2. Stufe: Multiplikation und Division, 3. Stufe: Potenz und Wurzel.

Durch **Klammern** kann die **Reihenfolge der Bindungen** verändert werden.

Term: ein Term ist ein mathematisches Objekt, bestehend aus **Zahlen, Variablen** und **Operationen**. Dabei müssen die Zahlen und Variablen durch Operationen **sinnvoll verknüpft** sein. Es gelten die Gesetze der Bindungsstärke von Operationen.

Gleichheit: eine Gleichheit wird symbolisch durch ein **Gleichheitszeichen** ausgedrückt.

Gleichung: eine Gleichung ist eine **Gleichheit von Termen**.

Lösungsvariable einer Gleichung: die Lösungsvariable ist diejenige Variable, **nach der die Gleichung aufgelöst** werden soll.

Beinhaltet eine Gleichung mehrere Variablen, so ist die Angabe der Lösungsvariable für das Lösen der Gleichung entscheidend, erst dadurch wird nämlich klar, wonach aufgelöst werden soll. **Alle anderen vorkommenden Variablen** nennt man dann **Parameter**.

Grundmenge der Lösungsvariablen: die Grundmenge der Lösungsvariablen gibt an, welche Zahlen als **Lösung** zugelassen sind.

Grundmenge der Parameter: die Grundmenge der Parameter gibt an, welche Zahlen **für die Parameter** zugelassen sind.

Die Grundmengen für alle in der Gleichung vorkommenden Variablen **müssen immer angegeben werden**. Wenn sie nicht angegeben sind, nimmt man an, dass alle reellen Zahlen zugelassen sind.

Definitionsmenge der Lösungsvariable: die Definitionsmenge der Lösungsvariable beinhaltet diejenigen Zahlen aus der Grundmenge, welche **keine undefinierte Operationen**, wie z.B. Division durch Null oder Wurzelziehen aus einer negativen Zahl, in der ursprünglichen Gleichung ergeben. Die Definitionsmenge ist somit eine **Teilmenge der Grundmenge**.

Definitionsmenge eines Parameters: für jede zulässige Zahl eines Parameters dürfen in der ursprünglichen Gleichung keine undefinierte Operationen entstehen.

Lösung einer Gleichung: eine Lösung einer Gleichung ist eine **Zahl aus dem Definitionsbereich der Lösungsvariablen**, welche, **eingesetzt in die Gleichung**, eine **korrekte Gleichheit** ergibt.

Eine Gleichung kann eine, keine oder mehrere Lösungen haben.

Lösungsmenge einer Gleichung: die Lösungsmenge einer Gleichung ist die **Menge aller Lösungen** der Gleichung.

Lösen einer Gleichung: beim Lösen einer Gleichung führt man **am linken und rechten Term der Gleichung dieselben Operationen** aus. Diesen Prozess wiederholt man solange mit geeigneten Operationen bis die **Lösungsvariable isoliert auf einer Seite der Gleichung** steht. Diesen Vorgang nennt man **Umformen einer Gleichung**.

Vergleichen und unterscheiden Sie in diesem Zusammenhang das **Umformen einer Gleichung** und das **Umformen eines Termes**.

Äquivalenzumformung an einer Gleichung: Verändert eine Umformung an einer Gleichung die Lösungsmenge nicht, so handelt es sich um eine Äquivalenzumformung.

Operationen der 1. Stufe erfüllen dies, Operationen der 2. Stufe in der Regel auch, aber nicht immer. Operationen der 3. Stufe an einer Gleichungen sind keine Äquivalenzumformungen.

Äquivalenzumformungen haben den Vorteil, dass die Lösungen der umgeformten Gleichung auch die Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind. Das ist keine Selbstverständlichkeit, gibt es doch auch Umformungen an Gleichungen, bei denen Lösungen verloren gehen oder die „neue“ Lösungen generieren. Solche **nicht äquivalente Umformungen an Gleichungen verändern die Gleichung**, lassen **Lösungen verschwinden** oder produzieren **Scheinlösungen**.

äquivalent: zwei Gleichungen sind äquivalent, wenn sie durch eine Äquivalenzumformung ineinander übergeführt werden. Dies wird symbolisiert durch den **Äquivalenzpfeil \Leftrightarrow** **zwischen den äquivalenten Gleichungen**.

Vergleichen und unterscheiden Sie dazu: sind zwei Terme **gleich**, so wird dies durch das **Gleichheitszeichen $=$** **zwischen den Termen** symbolisiert.

Gleichungstypen:

- lineare Gleichungen
- Bruchgleichungen
- quadrierte Gleichungen und quadratische Gleichungen
- Wurzelgleichungen
- Exponentialgleichungen
- Logarithmusgleichungen