運動座標系における運動方程式のメモ

marusa

Feb, 2014

1　前提

ある観測者が、沖縄高専から宇宙上にある物体を観測したいとする。

観測者は、自身の位置を原点に地球の表面上に座標系を設定して、観測対象の位置

$$\boldsymbol{r}(t)=\sum_{n=1}^{3}x_n\boldsymbol{e}_n \tag{1.1}$$

を観測したという。これは、観測者の状態に依存して様々な値をとるから、**相対的な観測量**である

これに対して、絶対静止系に静止している神の観測は

$$\boldsymbol{R}(t)=\sum_{m=1}^{3}X_m\boldsymbol{i}_m \tag{1.2}$$

である。

地球の中心点の位置を、絶対座標からの位置ベクトルで $\boldsymbol{a}$ と表し、地球の中心点からの観測者の相対位置ベクトル（すなわち地球の中心を原点とした座標系があるということ）を $\boldsymbol{b}$ と表す。

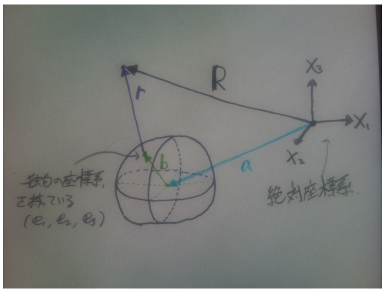

図 1: 空間の関係図

2　目標

宇宙上に存在している物体の絶対座標系においての運動方程式を定めることが目標である。

ニュートンは、$\boldsymbol{F}$=m$\boldsymbol{a}$ は絶対静止系（またはそれに同等な慣性座標系）において成り立つとした。すなわち、この場合においての**観測者は運動座標系を持っている**ので正しい運動方程式が得られない。そのため、相対座標 $\boldsymbol{r}$ を用いて観測対象の正しい運動方程式を定める。

そのため先ず我々は、宇宙に存在している物体の絶対座標系における速度を求める必要がある。

3　幾何学的考察

$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{r}$ の関係は次のように書くことができる。

$$\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{r}(t) \tag{3.1}$$

ここで、宇宙に存在する物体の速度は、$\boldsymbol{R}$ を微分することで得ることができる。とはいえ我々は $\boldsymbol{R}$ は知らない。しかし、$\boldsymbol{r}$ ならば知っている。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{R} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{r}(t)\}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}(t)+\sum_{n=1}^{3}x_n(t)\boldsymbol{e}_n\right\}\\ &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

ここで、地球の位置 $\boldsymbol{a}$ が絶対座標系において不変だとすると、式を整理して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{R}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b}+\sum_{n=1}^{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n\boldsymbol{e}_n \tag{3.2}$$

を得ることができる。(ただし、これが t の関数であることを忘れてはいけない。)

4　観測者の座標系の運動について考える

宇宙上の物体を観測している観測者は沖縄高専にいるので、**本人は静止しているつもりでも、絶対座標系においては地球の自転によって運動している。**だから、観測者の座標系が運動していることも検討しなければならない。

自転する地球上に存在する人間が作る座標系であるから、当然この座標系の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ も時間とともにその向きが変化する。

この基底ベクトルの時間微分は、係数を、基底 a に対する基底 b の貢献度：Ω_{ab} と書くことにしてまとめると、次のようになる。

$$\left\{\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1&=\Omega_{11}\boldsymbol{e}_1+\Omega_{12}\boldsymbol{e}_2+\Omega_{13}\boldsymbol{e}_3\\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2&=\Omega_{21}\boldsymbol{e}_1+\Omega_{22}\boldsymbol{e}_2+\Omega_{23}\boldsymbol{e}_3\\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_3&=\Omega_{31}\boldsymbol{e}_1+\Omega_{32}\boldsymbol{e}_2+\Omega_{33}\boldsymbol{e}_3\end{aligned}\right. \tag{4.1}$$

ところで、**円周上を運動する点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ と書くとき、$\boldsymbol{r}$ の速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ は $\boldsymbol{r}$ に垂直**である

から、

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t} = (\text{係数})\boldsymbol{e}_2 + (\text{係数})\boldsymbol{e}_3$$

と表すことができる。すなわち、あるベクトルの微分は自ベクトルに垂直であるので、自ベクトル方向の成分は持たない。このことから、不要な成分を削除した次の式を得る。

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1 = \Omega_{12}\boldsymbol{e}_2 + \Omega_{13}\boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2 = \Omega_{23}\boldsymbol{e}_3 + \Omega_{21}\boldsymbol{e}_1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_3 = \Omega_{31}\boldsymbol{e}_1 + \Omega_{32}\boldsymbol{e}_2 \end{cases} \tag{4.2}$$

もう少しこの式を整理しよう。基底ベクトルは直交するので、その内積の値は 0 である。これを時間 t で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}t} = 0$$

を得る。

さらに、式 (4.2) のそれぞれの式において次のように左辺の項が 1 つ消えるように基底ベクトルの内積をとると、次のような結果が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{e}_2 &= \Omega_{12}\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 + \Omega_{13}\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2 \\ &= \Omega_{12} \end{aligned}$$

この内積は、$\boldsymbol{e}_1$ 方向の速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t}$ の $\boldsymbol{e}_2$ に対する射影の大きさが Ω_{12} であることを示している。

この 2 つの性質を用いると、それぞれの貢献度は次の関係を持つことがわかる。

$$\Omega_{12} + \Omega_{21} = 0$$
$$\Omega_{23} + \Omega_{32} = 0$$
$$\Omega_{31} + \Omega_{13} = 0$$

このことから、式 (4.2) の貢献度を 3 種類にまとめて次のように書き直すことができる。

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1 = \Omega_{12}\boldsymbol{e}_2 - \Omega_{31}\boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2 = \Omega_{23}\boldsymbol{e}_3 - \Omega_{12}\boldsymbol{e}_1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_3 = \Omega_{31}\boldsymbol{e}_1 - \Omega_{23}\boldsymbol{e}_2 \end{cases} \tag{4.3}$$

この式は次の章の最後に用いる。

5 r の一階微分を得る

式 (3.2) で現れた、$\boldsymbol{r}$ の変化率を表す式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \sum_{n=1}^{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n\boldsymbol{e}_n \tag{5.1}$$

について考えていこう。

先ずはこの式が幾何学的に何を意味しているのか考える。

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= \sum_{n=1}^{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n\boldsymbol{e}_n \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1\boldsymbol{e}_1) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_2\boldsymbol{e}_2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1\cdot\boldsymbol{e}_1 + x_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1 \\ &+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2\cdot\boldsymbol{e}_2 + x_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2 \\ &+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_3\cdot\boldsymbol{e}_3 + x_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

この式を、観測値に関する微分の項と基底ベクトルに関する微分の項に分けて整理すると、次式のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1\cdot\boldsymbol{e}_1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2\cdot\boldsymbol{e}_2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_3\cdot\boldsymbol{e}_3\right\} \\ &+ \left\{x_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1 + x_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2 + x_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_3\right\} \end{aligned} \tag{5.2}$$

式 (5.2) の初項は、観測した $\boldsymbol{r}$ の成分ごとの微分なので、**観測者の座標系からみた宇宙に存在する物体の速度ベクトル**である。また、第二項は座標系自身の変化率を表しているので、**観測者の座標系自身の速度ベクトル**である。

さて、この式 (5.2) の第二項に、4 章で求めた式 (4.3) を代入して、基底ベクトルごとに整理してみる。

$$\begin{aligned} & x_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1 + x_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2 + x_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_3 \\ =\ & x_1\left(\Omega_{12}\boldsymbol{e}_2 - \Omega_{31}\boldsymbol{e}_3\right) \\ +\ & x_2\left(\Omega_{23}\boldsymbol{e}_3 - \Omega_{12}\boldsymbol{e}_1\right) \\ +\ & x_3\left(\Omega_{31}\boldsymbol{e}_1 - \Omega_{23}\boldsymbol{e}_2\right) \\ =\ & \left(x_3\Omega_{31} - x_2\Omega_{12}\right)\boldsymbol{e}_1 \\ +\ & \left(x_1\Omega_{12} - x_3\Omega_{23}\right)\boldsymbol{e}_2 \\ +\ & \left(x_2\Omega_{23} - x_1\Omega_{31}\right)\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{5.3}$$

ここで、$\Omega_{12}, \Omega_{23}, \Omega_{31}$ を改めて $\Omega_3, \Omega_1, \Omega_2$ と書くことにして、行列形式表示にすると、見やすくまとまる。

$$\begin{aligned} & x_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1 + x_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2 + x_3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_3 \\ = & \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.4}$$

この貢献度 Ω_n のベクトルをベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ と名付ければ、次のように非常に美しい形にまとめることができる。

$$x_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1 + x_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2 + x_3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} \tag{5.5}$$