Fisica

Giacomo Fantoni
Telegram: @GiacomoFantoni
Github: https://github.com/giacThePhantom/Genetica

16 marzo 2021

Indice

Capitolo 1

Cinematica del punto

1.1 Introduzione

La meccanica riguarda lo studio del moto di un corpo: spiega la relazione tra le cause che lo generano e le sue caratteristiche, esprimendola con leggi quantitative.

1.1.1 Punto materiale

Un punto materiale o particella è un corpo privo di dimensioni: le sue dimensioni sono trascurabili rispetto a quelle dello spazio in cui può muoversi o degli altri corpi con cui può interagire.

1.1.2 Movimenti di un corpo esteso

- Traslazione: il corpo esteso si muove come un punto materiale.
- Rotazioni.
- Vibrazioni.

1.1.3 Cinematica

Si intende per cinematica una parte della meccanica che studia il moto senza considerare le forze che entrano in gioco.

1.1.4 Determinare il moto

Il moto di un punto materiale è determinato se è nota la sua posizione in funzione del tempo in un determinato sistema di riferimento.

1.1.4.1 Sistema di riferimento cartesiano

In un sistema di riferimento cartesiano il la posizione di un corpo è data dalle sue coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, espresse in funzione del tempo. Altri sistemi di riferimento fanno uso delle coordinate polari.

1.1.5 Traiettoria

La traiettoria è il luogo dei punti occupati successivamente dal punto in movimento. Costituisce una curva continua nello spazio.

1.1.6 Grandezze fondamentali

Nella cinematica le grandezze fondamentali sono:

- Spazio.
- Velocità.
- Accelerazione.
- Tempo o la variabile indipendente.

1.1.7 Quiete

La quiete è un tipo di moto in cui le coordinate rimangono costanti, pertanto velocità ed accelerazione sono nulle.

1.2 Moto rettilineo

1.2.1 Descrizione

Il moto rettilineo si svolge lungo una retta su cui vengono fissati arbitrariamente un'origine e un verso. Il moto del punto può essere descrivibile tramite una coordintata $x(t)$.

1.2.2 Rappresentazione

Le misure ottenute da un'osservazione di un moto rettilineo per tempo e spazio possono essere rappresentate in un sistema a due assi cartesiani: sulle ordinate i valori di x e su quello delle ascisse il tempo t corrispondente. Questo viene detto diagramma orario.

1.2.3 Velocità

1.2.3.1 Velocità media

Se al tempo $t = t_1$ il punto si trova nella posizione $x = x_1$ e al tempo $t = t_2$ nella posizione $x = x_2$, $\Delta x = x_2 - x_1$ rappresenta lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. La rapidità con cui avviene lo spostamento viene caratterizzata dalla velocità media:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

1.2.3.2 Velocità istantanea

Per ricavare informazioni riguardo le caratteristiche del moto si può suddividere Δx in numerosi piccoli intervalli $(\Delta x)_i$ percorsi in altrettanti piccoli intervalli di Δt $(\Delta t)_i$. Si nota come le corrispondenti velocità medie sono $v_i = \frac{(\Delta x)_i}{(\Delta t)_i}$, diverse tra di loro e da v_m. Questo avviene in quanto in un generico moto rettilineo la velocità non è costante nel tempo. Suddividendo Δx in un numero elevatissimo di intervallini dx percorsi nel tempo dt si può definire la velocità istantanea ad un istante t del punto in movimento come:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

La velocità istantanea rappresenta pertanto la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerato. Il segno indica il verso del moto sull'asse. Può inoltre essere espressa come funzione del tempo $v(t)$.

1.2.3.2.1 Moto rettilineo uniforme Si intende per moto rettilineo uniforme un tipo di moto rettilineo in cui la velocità è costante.

1.2.3.2.2 Ottenere la velocità Nota la legge oraria $x(t)$ si può otenere la velocità istantanea con l'operazione di derivazione.

1.2.3.2.3 Ottenere la legge oraria Nota la dipendenza del tempo della velocità istantanea $v(t)$ si può ottenere la legge oraria $x(t)$. Supponendo che il punto si trovi in x al tempo t e nella posizione $x+dx$ in $t+dt$ da $v = \frac{dx}{dt}$ si nota come lo spostamento infinitesimo dx è uguale al prodotto del tempo dt impiegato a percorrerlo per il valore della velocità al tempo $t : dx = v(t)dt$, qualunque sia la dipendenza della velocità dal tempo. Lo spostamento complessivo sulla retta su cui si muove il punto in un intervallo finito $\Delta t = t - t_0$ è dato dalla somma di tutti i successivi valori dx. Si utilizza l'operazione di integrazione:

$$\Delta x = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$
$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$
$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Si ottiene pertanto la relazione generale che permette il calcolo dello spazio percorso nel moto rettilineo:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Dove x_0 rappresenta la posizione iniziale del punto occupata nell'istante t_0 Si noti come Δx rappresenta la somma algebrica degli spostamenti.

1.2.3.3 Relazione tra velocità media e istantanea

Ricordando che $v_m = \frac{x-x_0}{t-t_0}$, la relazione tra velocità media e istantanea:

$$v_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

1.2.3.4 Legge oraria del moto rettilineo uniforme

Considerando il moto rettilineo uniforme in cui v è costante si ha:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt \\ &= x_0 + v(t - t_0) \\ &= x_0 + vt \qquad\qquad se\ t_0 = 0 \end{aligned}$$

Si nota pertanto come nel moto rettilineo uniforme lo spazio è una funzione lineare del tempo e la velocità istantanea coincide con la velocità media.

1.2.4 Accelerazione

La velocità $v(t)$ varia in un determinato Δt di una quantità δv.

1.2.4.1 Accelerazione media

Analogamente alla velocità media si definisce l'accelerazione media come

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

1.2.4.2 Accelerazione istantanea

Si definisce accelerazione istantanea come la rapidità di variazione temporale della celocità come:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

1.2.4.3 Significato fisico dell'accelerazione

- $a = 0$: velocità costante, moto rettilineo uniforme.
- $a > 0$: la velocità cresce nel tempo.
- $a < 0$: la velocità decresce nel tempo.

1.2.4.4 Ottenere la velocità

Data una $a(t)$ si ricava $v(t)$:

$$\begin{aligned} dv &= a(t)dt \\ \Delta v &= \int_{v_0}^{v} dv \\ &= \int_{t_0}^{t} a(t)dt \end{aligned}$$

Pertanto:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

1.2.4.5 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Si intende per moto rettilineo uniformemente accelerato un moto in cui l'accelerazione è costante durante il moto.

1.2.4.5.1 Dipendenza della velocità dal tempo La dipendenza della velocità dal tempo è lineare:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= v_0 + a(t - t_0) \\
v(t) &= v_0 + at \qquad\qquad se\ t_0 = 0
\end{aligned}
$$

1.2.4.5.2 Dipendenza della posizione dal tempo Lo spazio è una funzione quadratica del tempo:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]dt \\
&= x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a(t - t_0)dt \\
x(t) &= x_0 + v(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \\
&= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad\qquad se\ t_0 = 0
\end{aligned}
$$

1.2.4.5.3 Dipendenza dell'accelerazione dalla posizione Nota la dipendenza dell'accelerazione dalla posizione, ovvero $a(x)$ si può ricavare il valore della velocità in ogni posizione x o $v(x)$. Questo avviene considerando le funzioni di funzione. Se ad un istante t il punto occupa una posizione x con velocità v e accelerazione a si possono pensare come funzioni della posizione e

$$
\begin{aligned}
v(t) &= v[x(t)] \\
a(t) &= a[x(t)]
\end{aligned}
$$

Derivando la prima rispetto al tempo e sfruttando la regola di derivazione delle funzioni di funzioni:

$$
\begin{aligned}
a[x(t)] &= \frac{d}{dt}v[x(t)] \\
&= \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \\
&= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \\
a &= \frac{dv}{dx} adx \qquad\qquad\qquad\qquad = vdv
\end{aligned}
$$

Ovvero se dalla posizione x dove un punto possiede una velocità v e un'accelerazione a si ha uno spostamento dx, allora il punto subisce una variazione di velocità dv. Integrando:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} a(x)dx &= \int_{v_0}^{v} vdv \\
&= \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2
\end{aligned}
$$

Dove v_0 è la velocità in x_0. Questo permette il calcolo della variazione di velocità nel passaggio dalla posizione x_0 a x.

1.2.4.5.3.1 Moto uniformemente accelerato Nel moto uniformemente accelerato:

$$v_2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

1.2.5 Moto verticale di un corpo

Trascurando l'attrito con l'aria un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si move verso il basso con una accelerazione costante $g = 9.8\frac{m}{s^2}$. Il moto è pertanto rettilineo uniformemente accelerato.

1.2.5.1 Sistema di riferimento

Il sistema di riferimento ha origine al suolo e l'asse delle x rivolto verso l'alto. In questo sistema pertanto $a = -g = -9.8\frac{m}{s^2}$.

1.2.5.2 Caduta da un'altezza con velocità iniziale nulla

Nel caso della caduta da un'altezza h con velocità iniziale nulla si nota come inizialmente:

- $x_0 = h$.
- $v_0 = 0$.
- $t = t_0 = 0$.

1.2.5.2.1 Velocità Dalla dipendenza della velocità dal tempo nel moto uniformemente accelerato si ottiene:

$$v(t) = -gt$$

E si nota come la velocità aumenta in modulo durante la caduta.

1.2.5.2.2 Posizione Osservando la dipendenza della posizione dal tempo nel moto uniformemente accelerato si ottiene:

$$x = h - \frac{1}{2}gt^2$$

1.2.5.2.3 Tempo di arrivo al suolo Il tempo di arrivo al suolo, dove $x = 0$ è:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

1.2.5.2.4 Velocità in funzione della posizione Notando la velocità in funzione della posizione nel moto uniformemente accelerato si ottiene:

$$v^2 = 2g(h - x)$$

1.2.5.2.5 Velocità di arrivo al suolo Il corpo arriva al suolo con una velocità:

$$v = \sqrt{2gh}$$

1.2.5.3 Caduta da un'altezza con velocità iniziale non nulla

Nel caso della caduta da un'altezza h con velocità iniziale non nulla si nota come inizialmente:

- $x_0 = h$.
- $v_0 = v_i$.
- $t = t_0 = 0$.

1.2.5.3.1 Dipendenza della velocità dal tempo

$$v(t) = -v_i - gt$$

1.2.5.3.2 Legge oraria

$$x = h - v_i t - \frac{1}{2}gt^2$$

1.2.5.3.3 Dipendenza della velocità dalla posizione

$$t(x) = \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2 + 2g(h-x)}}{g}$$

1.2.5.3.4 Tempo di caduta

$$t_c = \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2 + 2gh}}{g}$$

1.2.5.3.5 Velocità di caduta

$$v_c^2 = v)i^2 + 2gh$$

1.2.5.4 Lancio del punto verso l'alto partendo dal suolo

Nel caso di un lancio del punto verso l'alto si nota come inizialmente:

- $x_0 = 0$.
- $v_0 = v_2 > 0$.
- $t = t_0 = 0$.

1.2.5.4.1 Velocità

$$v = v_2 - gt$$

1.2.5.4.2 Legge oraria

$$x = v_2 t - \frac{1}{2}gt^2$$

1.2.5.4.3 Punto più alto Il punto raggiunge la posizione più alta al tempo:

$$t_M = \frac{v_2}{g}$$

E nella posizione:

$$x_M = x(t_M) = \frac{v_2^2}{2g}$$

1.2.5.4.4 Discesa Per $t \geq t_M$ si è nella situazione del primo esempio: punto che cade da un'altezza x_M con velocità iniziale nulla. Pertanto:

$$t_s = \sqrt{2x_M g} = t_M$$

E la durata complessiva del moto è pertanto:

$$2t_M = \frac{2v_2}{g}$$

Ricavando $t(x)$ dalla legge oraria e da $v(x)$ si ha:

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{v_2 \pm \sqrt{v_2^2 - 2gx}}{g} \\ &= t_M \pm \sqrt{t_M^2 - \frac{2x}{g}} \\ v(x) &= \pm\sqrt{v_2^2 - 2gx} \end{aligned}$$

1.2.6 Moto armonico semplice

IL moto armonico semplice lungo un asse rettilineo è un moto vario la cui legge oraria è data dalla relazione:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

Dove:

- A ampiezza del moto.
- $\omega t + \phi$ fase del moto.
- ω pulsazione.
- ϕ fase iniziale.

1.2.6.1 Caratteristiche

Essendo i valori estremi della funzione seno $+1$ e -1 il punto percorre un segmento di ampiezza $2A$ con centro nell'origine, con uno spostamento massimo da essa A. Al tempo $t = 0$ occupa $x(0) = A\sin\phi$. Date le costanti A e ϕ si determina la posizione iniziale del punto, che si trova a $t = 0$ nell'origine solo se $\phi = \{0, \pi\}$.

1.2.6.2 Periodicità

Essendo la funzione seno periodica con periodo 2π il moto risulta periodico e descrive oscillazioni di ampiezza A rispetto al centro O uguali tra loro e caratterizzate da una durata T periodo del moto armonico. Si dice pertanto periodico un moto in cui intervalli di tempo uguali il punto ripassa nella stessa posizione con la stessa velocità.

1.2.6.3 Determinare il periodo

Per determinare il periodo T si considerino due tempi t e t' tali che $t' - t = T$. Per definizione $x(t') = x(t)$, pertanto dalla legge oraria le fasi nei due istanti devono differire 2π. Si ha pertanto

$\omega t' + \phi = \omega t + \phi + 2\pi$, ne segue che:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi}{\omega} \\
\omega &= \frac{2\pi}{T}
\end{aligned}
$$

1.2.6.3.1 Significato di ω SI nota pertanco come il moto si ripete velocemente quando la pulsazione è grande mentre il moto è lento per vassi valori della pulsazione.

1.2.6.3.2 Frequenza del moto Si definisce frequenza v del moto il numero di oscillazioni in un secondo:

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{1}{T} \\
&= \frac{\omega}{2\pi} \\
\omega &= 2\pi v
\end{aligned}
$$

Si noti come il periodo e la frequenza di un moto armonico sono indipendenti dall'ampiezza del moto.

1.2.6.3.3 Classi di moti armonici Fissato il valore della pulsazione si ottiene una classe di moti armonici caratterizzata dallo stesso periodo che differiscono tra loro per i diversi valori dell'ampiezza e della fase iniziale, ovvero per le condizioni iniziali.

1.2.6.4 Velocità

La velocità del punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando $x(t)$.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} = v(t) &= \frac{dx}{dt} \\
&= \omega A \cos(\omega t + \phi)
\end{aligned}
$$

La velocità assume il valore massimo nel centro di oscillazione dove vale ωA e si annulla agli estremi dove si inverte il senso del moto.

1.2.6.5 Accelerazione

L'accelerazione del punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando $v(t)$.

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} = a(t) &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\
&= -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) \\
&= -\omega^2 x
\end{aligned}
$$

L'accelerazione si annulla nel centro di oscillazione e assume il valore in modulo massimo $\omega^2 A$ agli estremi, dove si inverte la velocità. Si nota inoltre come sia proposizionale e d opposta allo spostamento dal centro di oscillazione. A parte il valore dell'ampiezza le tre funzioni mostrano lo stesso andamento temporale, si nota unicamente uno spostamento di una rispetto all'altra lungo l'asse dei tempi. Si nota pertanto come la velocità sia sfasata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto allo spostamento o si trova in quadratura di fase, mentre l'accelerazoine è sfasata di π rispetto allo spostamento o si trova in opposizione di fase.

1.2.6.6 Condizioni iniziali

Le costanti A e ϕ identificano le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 = A \sin\phi$$

$$v(0) = v_0 = \omega A \cos\phi$$

Note le condizioni iniziali x_0 e v_0 si calcolano A e ϕ come:

$$\tan\phi = \frac{\omega x_0}{v_0}$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2 +}{\omega^2}$$

1.2.6.7 Dipendenza della velocità dalla posizione

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{x_o}^{x} a(x)dx \\ &= -\omega^2 \int_{x_0}^{x} xdx \\ &= \frac{1}{2}\omega^2(x_x^2 - x^2) \\ &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \end{aligned}$$

Pertanto

$$v^2 = v_0^2 + \omega^2(x_0^2(x_0^2 - x^2)$$

Con riferimento al centro dove $x_0 = 0$ e $v_0 = \omega A$

$$v^2(x) = \omega^2(A^2 - x^2)$$

Il segno di v dipende dal verso di passaggio. Si nota pertanto come l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con segno negativo $a = -\omega^2 x$.

1.2.6.8 Condizione sufficiente per un moto armonico semplice

Se si trova che in un moto l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con costante di proporzionalità negativa si dimostra che quel moto è armonico semplice. La condizione necessaria e sufficiente affinchè un moto sia armonico è:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

O equazione differenziale del moto armonico. Le funzioni seno e coseno e le loro combinazioni lineari sono tutte e sole le funzioni che soddisfano la condizione nel campo reale.

1.2.6.8.1 Moto con funzione coseno Queste considerazioni portano a considerare una legge del moto che utilizzi la funzione coseno. Si noti come le due funzioni differiscono per un termine di sfasamento $\frac{\pi}{2}$. Ovvero $x = A\sin(\omega t + \phi)$ e $x = A\cos(\omega t + \phi)$ rappresentano lo stesso moto, solo che il primo è visto a partire dall'istante t_0, mentre il secondo dall'istante $t_0 + \dfrac{T}{4}$.

1.2.6.9 Oscillazione

Se in un diverso fenomeno fisico si trova una grandezza f che obbedisce a

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + k^2 f = 0$$

La soluzione è sempre:

$$f(z) = A\sin(kz + \phi)$$

Ovvero f descrive un'oscillazione rispetto a z il cui periodo dipende da k.

1.2.7 Moto rettilineo smorzato esponenzialmente

Si consideri ora un altro moto vario in cui l'accelerazione soddisfa la condizione $a = -kv$, con k costante positiva. L'accelerazione è sempre contraria alla velocità che deve necessariamente diminuire e varia ocn la stessa legge con cui varia la velocità, ovvero:

$$\frac{dv}{dt} = -kv$$

Integrando con il metodo della separazione delle variabili:

$$\begin{aligned}
&\frac{dv}{v} = -kdt \\
\Rightarrow &\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_0^t \\
\Rightarrow &\log\frac{v}{v_0} = -kt
\end{aligned}$$

Dove v_0 è la velocità in $t = 0$ e $v_0 \neq 0$. Passando alle esponenziali:

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

La velocità decresce esponenzialmente nel tempo e il punto alla fine si ferma.

1.2.7.1 Cambio della velocità con la posizione