Fisica

Giacomo Fantoni
Telegram: @GiacomoFantoni
Github: https://github.com/giacThePhantom/Fisica

1 aprile 2021

Indice

Capitolo 1

Cinematica del punto

1.1 Introduzione

La meccanica riguarda lo studio del moto di un corpo: spiega la relazione tra le cause che lo generano e le sue caratteristiche, esprimendola con leggi quantitative.

1.1.1 Punto materiale

Un punto materiale o particella è un corpo privo di dimensioni: le sue dimensioni sono trascurabili rispetto a quelle dello spazio in cui può muoversi o degli altri corpi con cui può interagire.

1.1.2 Movimenti di un corpo esteso

- Traslazione: il corpo esteso si muove come un punto materiale.
- Rotazioni.
- Vibrazioni.

1.1.3 Cinematica

Si intende per cinematica una parte della meccanica che studia il moto senza considerare le forze che entrano in gioco.

1.1.4 Determinare il moto

Il moto di un punto materiale è determinato se è nota la sua posizione in funzione del tempo in un determinato sistema di riferimento.

1.1.4.1 Sistema di riferimento cartesiano

In un sistema di riferimento cartesiano il la posizione di un corpo è data dalle sue coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, espresse in funzione del tempo. Altri sistemi di riferimento fanno uso delle coordinate polari.

1.1.5 Traiettoria

La traiettoria è il luogo dei punti occupati successivamente dal punto in movimento. Costituisce una curva continua nello spazio.

1.1.6 Grandezze fondamentali

Nella cinematica le grandezze fondamentali sono:

- Spazio.
- Velocità.
- Accelerazione.
- Tempo o la variabile indipendente.

1.1.7 Quiete

La quiete è un tipo di moto in cui le coordinate rimangono costanti, pertanto velocità ed accelerazione sono nulle.

1.2 Moto rettilineo

1.2.1 Descrizione

Il moto rettilineo si svolge lungo una retta su cui vengono fissati arbitrariamente un'origine e un verso. Il moto del punto può essere descrivibile tramite una coordintata $x(t)$.

1.2.2 Rappresentazione

Le misure ottenute da un'osservazione di un moto rettilineo per tempo e spazio possono essere rappresentate in un sistema a due assi cartesiani: sulle ordinate i valori di x e su quello delle ascisse il tempo t corrispondente. Questo viene detto diagramma orario.

1.2.3 Velocità

1.2.3.1 Velocità media

Se al tempo $t = t_1$ il punto si trova nella posizione $x = x_1$ e al tempo $t = t_2$ nella posizione $x = x_2$, $\Delta x = x_2 - x_1$ rappresenta lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. La rapidità con cui avviene lo spostamento viene caratterizzata dalla velocità media:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

1.2.3.2 Velocità istantanea

Per ricavare informazioni riguardo le caratteristiche del moto si può suddividere Δx in numerosi piccoli intervalli $(\Delta x)_i$ percorsi in altrettanti piccoli intervalli di Δt $(\Delta t)_i$. Si nota come le corrispondenti velocità medie sono $v_i = \frac{(\Delta x)_i}{(\Delta t)_i}$, diverse tra di loro e da v_m. Questo avviene in quanto in un generico moto rettilineo la velocità non è costante nel tempo. Suddividendo Δx in un numero elevatissimo di intervallini dx percorsi nel tempo dt si può definire la velocità istantanea ad un istante t del punto in movimento come:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

La velocità istantanea rappresenta pertanto la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerato. Il segno indica il verso del moto sull'asse. Può inoltre essere espressa come funzione del tempo $v(t)$.

1.2.3.2.1 Moto rettilineo uniforme Si intende per moto rettilineo uniforme un tipo di moto rettilineo in cui la velocità è costante.

1.2.3.2.2 Ottenere la velocità Nota la legge oraria $x(t)$ si può otenere la velocità istantanea con l'operazione di derivazione.

1.2.3.2.3 Ottenere la legge oraria Nota la dipendenza del tempo della velocità istantanea $v(t)$ si può ottenere la legge oraria $x(t)$. Supponendo che il punto si trovi in x al tempo t e nella posizione $x+dx$ in $t+dt$ da $v = \frac{dx}{dt}$ si nota come lo spostamento infinitesimo dx è uguale al prodotto del tempo dt impiegato a percorrerlo per il valore della velocità al tempo $t : dx = v(t)dt$, qualunque sia la dipendenza della velocità dal tempo. Lo spostamento complessivo sulla retta su cui si muove il punto in un intervallo finito $\Delta t = t - t_0$ è dato dalla somma di tutti i successivi valori dx. Si utilizza l'operazione di integrazione:

$$\Delta x = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Si ottiene pertanto la relazione generale che permette il calcolo dello spazio percorso nel moto rettilineo:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Dove x_0 rappresenta la posizione iniziale del punto occupata nell'istante t_0 Si noti come Δx rappresenta la somma algebrica degli spostamenti.

1.2.3.3 Relazione tra velocità media e istantanea

Ricordando che $v_m = \frac{x-x_0}{t-t_0}$, la relazione tra velocità media e istantanea:

$$v_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

1.2.3.4 Legge oraria del moto rettilineo uniforme

Considerando il moto rettilineo uniforme in cui v è costante si ha:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v \int_{t_0}^{t} dt \\ &= x_0 + v(t - t_0) \\ &= x_0 + vt \qquad\qquad se\ t_0 = 0 \end{aligned}$$

Si nota pertanto come nel moto rettilineo uniforme lo spazio è una funzione lineare del tempo e la velocità istantanea coincide con la velocità media.

1.2.4 Accelerazione

La velocità $v(t)$ varia in un determinato Δt di una quantità δv.

1.2.4.1 Accelerazione media

Analogamente alla velocità media si definisce l'accelerazione media come

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

1.2.4.2 Accelerazione istantanea

Si definisce accelerazione istantanea come la rapidità di variazione temporale della celocità come:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

1.2.4.3 Significato fisico dell'accelerazione

- $a = 0$: velocità costante, moto rettilineo uniforme.
- $a > 0$: la velocità cresce nel tempo.
- $a < 0$: la velocità decresce nel tempo.

1.2.4.4 Ottenere la velocità

Data una $a(t)$ si ricava $v(t)$:

$$\begin{aligned} dv &= a(t)dt \\ \Delta v &= \int_{v_0}^{v} dv \\ &= \int_{t_0}^{t} a(t)dt \end{aligned}$$

Pertanto:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

1.2.4.5 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Si intende per moto rettilineo uniformemente accelerato un moto in cui l'accelerazione è costante durante il moto.

1.2.4.5.1 Dipendenza della velocità dal tempo La dipendenza della velocità dal tempo è lineare:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a(t - t_0) \\ v(t) &= v_0 + at \qquad\qquad se\ t_0 = 0 \end{aligned}$$

1.2.4.5.2 Dipendenza della posizione dal tempo Lo spazio è una funzione quadratica del tempo:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]dt \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a(t - t_0)dt \\ x(t) &= x_0 + v(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \\ &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad\qquad se\ t_0 = 0 \end{aligned}$$

1.2.4.5.3 Dipendenza dell'accelerazione dalla posizione Nota la dipendenza dell'accelerazione dalla posizione, ovvero $a(x)$ si può ricavare il valore della velocità in ogni posizione x o $v(x)$. Questo avviene considerando le funzioni di funzione. Se ad un istante t il punto occupa una posizione x con velocità v e accelerazione a si possono pensare come funzioni della posizione e

$$\begin{aligned} v(t) &= v[x(t)] \\ a(t) &= a[x(t)] \end{aligned}$$

Derivando la prima rispetto al tempo e sfruttando la regola di derivazione delle funzioni di funzioni:

$$\begin{aligned} a[x(t)] &= \frac{d}{dt}v[x(t)] \\ &= \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \\ &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \\ a &= \frac{dv}{dx}adx \qquad\qquad\qquad\qquad = vdv \end{aligned}$$

Ovvero se dalla posizione x dove un punto possiede una velocità v e un'accelerazione a si ha uno spostamento dx, allora il punto subisce una variazione di velocità dv. Integrando:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} a(x)dx &= \int_{v_0}^{v} vdv \\ &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \end{aligned}$$

Dove v_0 è la velocità in x_0. Questo permette il calcolo della variazione di velocità nel passaggio dalla posizione x_0 a x.

1.2.4.5.3.1 Moto uniformemente accelerato Nel moto uniformemente accelerato:

$$v_2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

1.2.5 Moto verticale di un corpo

Trascurando l'attrito con l'aria un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si move verso il basso con una accelerazione costante $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$. Il moto è pertanto rettilineo uniformemente accelerato.

1.2.5.1 Sistema di riferimento

Il sistema di riferimento ha origine al suolo e l'asse delle x rivolto verso l'alto. In questo sistema pertanto $a = -g = -9.8 \frac{m}{s^2}$.

1.2.5.2 Caduta da un'altezza con velocità iniziale nulla

Nel caso della caduta da un'altezza h con velocità iniziale nulla si nota come inizialmente:

- $x_0 = h$.
- $v_0 = 0$.
- $t = t_0 = 0$.

1.2.5.2.1 Velocità Dalla dipendenza della velocità dal tempo nel moto uniformemente accelerato si ottiene:

$$v(t) = -gt$$

E si nota come la velocità aumenta in modulo durante la caduta.

1.2.5.2.2 Posizione Osservando la dipendenza della posizione dal tempo nel moto uniformemente accelerato si ottiene:

$$x = h - \frac{1}{2}gt^2$$

1.2.5.2.3 Tempo di arrivo al suolo Il tempo di arrivo al suolo, dove $x = 0$ è:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

1.2.5.2.4 Velocità in funzione della posizione Notando la velocità in funzione della posizione nel moto uniformemente accelerato si ottiene:

$$v^2 = 2g(h - x)$$

1.2.5.2.5 Velocità di arrivo al suolo Il corpo arriva al suolo con una velocità:

$$v = \sqrt{2gh}$$

1.2.5.3 Caduta da un'altezza con velocità iniziale non nulla

Nel caso della caduta da un'altezza h con velocità iniziale non nulla si nota come inizialmente:

- $x_0 = h$.
- $v_0 = v_i$.
- $t = t_0 = 0$.

1.2.5.3.1 Dipendenza della velocità dal tempo

$$v(t) = -v_i - gt$$

1.2.5.3.2 Legge oraria

$$x = h - v_i t - \frac{1}{2} g t^2$$

1.2.5.3.3 Dipendenza della velocità dalla posizione

$$t(x) = \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2 + 2g(h-x)}}{g}$$

1.2.5.3.4 Tempo di caduta

$$t_c = \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2 + 2gh}}{g}$$

1.2.5.3.5 Velocità di caduta

$$v_c^2 = v)i^2 + 2gh$$

1.2.5.4 Lancio del punto verso l'alto partendo dal suolo

Nel caso di un lancio del punto verso l'alto si nota come inizialmente:

- $x_0 = 0$.
- $v_0 = v_2 > 0$.
- $t = t_0 = 0$.

1.2.5.4.1 Velocità

$$v = v_2 - gt$$

1.2.5.4.2 Legge oraria

$$x = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2$$

1.2.5.4.3 Punto più alto Il punto raggiunge la posizione più alta al tempo:

$$t_M = \frac{v_2}{g}$$

E nella posizione:

$$x_M = x(t_M) = \frac{v_2^2}{2g}$$

1.2.5.4.4 Discesa Per $t \geq t_M$ si è nella situazione del primo esempio: punto che cade da un'altezza x_M con velocità iniziale nulla. Pertanto:

$$t_s = \sqrt{2x_M g} = t_M$$

E la durata complessiva del moto è pertanto:

$$2t_M = \frac{2v_2}{g}$$

Ricavando $t(x)$ dalla legge oraria e da $v(x)$ si ha:

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{v_2 \pm \sqrt{v_2^2 - 2gx}}{g} \\ &= t_M \pm \sqrt{t_M^2 - \frac{2x}{g}} \\ v(x) &= \pm\sqrt{v_2^2 - 2gx} \end{aligned}$$

1.2.6 Moto armonico semplice

IL moto armonico semplice lungo un asse rettilineo è un moto vario la cui legge oraria è data dalla relazione:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

Dove:

- A ampiezza del moto.
- $\omega t + \phi$ fase del moto.
- ω pulsazione.
- ϕ fase iniziale.

1.2.6.1 Caratteristiche

Essendo i valori estremi della funzione seno $+1$ e -1 il punto percorre un segmento di ampiezza $2A$ con centro nell'origine, con uno spostamento massimo da essa A. Al tempo $t = 0$ occupa $x(0) = A\sin\phi$. Date le costanti A e ϕ si determina la posizione iniziale del punto, che si trova a $t = 0$ nell'origine solo se $\phi = \{0, \pi\}$.

1.2.6.2 Periodicità

Essendo la funzione seno periodica con periodo 2π il moto risulta periodico e descrive oscillazioni di ampiezza A rispetto al centro O uguali tra loro e caratterizzate da una durata T periodo del moto armonico. Si dice pertanto periodico un moto in cui intervalli di tempo uguali il punto ripassa nella stessa posizione con la stessa velocità.

1.2.6.3 Determinare il periodo

Per determinare il periodo T si considerino due tempi t e t' tali che $t' - t = T$. Per definizione $x(t') = x(t)$, pertanto dalla legge oraria le fasi nei due istanti devono differire 2π. Si ha pertanto

$\omega t' + \phi = \omega t + \phi + 2\pi$, ne segue che:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

1.2.6.3.1 Significato di ω SI nota pertanco come il moto si ripete velocemente quando la pulsazione è grande mentre il moto è lento per vassi valori della pulsazione.

1.2.6.3.2 Frequenza del moto Si definisce frequenza v del moto il numero di oscillazioni in un secondo:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{T} \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \\ \omega &= 2\pi v \end{aligned}$$

Si noti come il periodo e la frequenza di un moto armonico sono indipendenti dall'ampiezza del moto.

1.2.6.3.3 Classi di moti armonici Fissato il valore della pulsazione si ottiene una classe di moti armonici caratterizzata dallo stesso periodo che differiscono tra loro per i diversi valori dell'ampiezza e della fase iniziale, ovvero per le condizioni iniziali.

1.2.6.4 Velocità

La velocità del punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando $x(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{x} = v(t) &= \frac{dx}{dt} \\ &= \omega A \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

La velocità assume il valore massimo nel centro di oscillazione dove vale ωA e si annulla agli estremi dove si inverte il senso del moto.

1.2.6.5 Accelerazione

L'accelerazione del punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando $v(t)$.

$$\begin{aligned} \ddot{x} = a(t) &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ &= -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) \\ &= -\omega^2 x \end{aligned}$$

L'accelerazione si annulla nel centro di oscillazione e assume il valore in modulo massimo $\omega^2 A$ agli estremi, dove si inverte la velocità. Si nota inoltre come sia proposizionale e d opposta allo spostamento dal centro di oscillazione. A parte il valore dell'ampiezza le tre funzioni mostrano lo stesso andamento temporale, si nota unicamente uno spostamento di una rispetto all'altra lungo l'asse dei tempi. Si nota pertanto come la velocità sia sfasata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto allo spostamento o si trova in quadratura di fase, mentre l'accelerazoine è sfasata di π rispetto allo spostamento o si trova in opposizione di fase.

1.2.6.6 Condizioni iniziali

Le costanti A e ϕ identificano le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 = A \sin \phi$$

$$v(0) = v_0 = \omega A \cos \phi$$

Note le condizioni iniziali x_0 e v_0 si calcolano A e ϕ come:

$$\tan \phi = \frac{\omega x_0}{v_0}$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2 +}{\omega^2}$$

1.2.6.7 Dipendenza della velocità dalla posizione

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{x_o}^{x} a(x) dx \\ &= -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x dx \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 (x_x^2 - x^2) \\ &= \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 \end{aligned}$$

Pertanto

$$v^2 = v_0^2 + \omega^2 (x_0^2 (x_0^2 - x^2)$$

Con riferimento al centro dove $x_0 = 0$ e $v_0 = \omega A$

$$v^2(x) = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

Il segno di v dipende dal verso di passaggio. Si nota pertanto come l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con segno negativo $a = -\omega^2 x$.

1.2.6.8 Condizione sufficiente per un moto armonico semplice

Se si trova che in un moto l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con costante di proporzionalità negativa si dimostra che quel moto è armonico semplice. La condizione necessaria e sufficiente affinchè un moto sia armonico è:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

O equazione differenziale del moto armonico. Le funzioni seno e coseno e le loro combinazioni lineari sono tutte e sole le funzioni che soddisfano la condizione nel campo reale.

1.2.6.8.1 Moto con funzione coseno Queste considerazioni portano a considerare una legge del moto che utilizzi la funzione coseno. Si noti come le due funzioni differiscono per un termine di sfasamento $\frac{\pi}{2}$. Ovvero $x = A\sin(\omega t + \phi)$ e $x = A\cos(\omega t + \phi)$ rappresentano lo stesso moto, solo che il primo è visto a partire dall'istante t_0, mentre il secondo dall'istante $t_0 + \dfrac{T}{4}$.

1.2.6.9 Oscillazione

Se in un diverso fenomeno fisico si trova una grandezza f che obbedisce a

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + k^2 f = 0$$

La soluzione è sempre:

$$f(z) = A\sin(kz + \phi)$$

Ovvero f descrive un'oscillazione rispetto a z il cui periodo dipende da k.

1.2.7 Moto rettilineo smorzato esponenzialmente

Si consideri ora un altro moto vario in cui l'accelerazione soddisfa la condizione $a = -kv$, con k costante positiva. L'accelerazione è sempre contraria alla velocità che deve necessariamente diminuire e varia ocn la stessa legge con cui varia la velocità, ovvero:

$$\frac{dv}{dt} = -kv$$

Integrando con il metodo della separazione delle variabili:

$$\begin{aligned}
&\frac{dv}{v} = -kdt \\
&\Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_0^t \\
&\Rightarrow \log\frac{v}{v_0} = -kt
\end{aligned}$$

Dove v_0 è la velocità in $t = 0$ e $v_0 \neq 0$. Passando alle esponenziali:

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

La velocità decresce esponenzialmente nel tempo e il punto alla fine si ferma.

1.2.7.1 Cambio della velocità con la posizione

$$\begin{aligned}
&a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = -kv \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -k \Rightarrow \\
&\Rightarrow dv = -kdx \Rightarrow \\
&\Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = -k\int_0^x dx
\end{aligned}$$

Risulta pertanto un andamento lineare decrescente

$$v(x) = v_0 - kx$$

La velocità si annulla in:

$$x = \frac{v_0}{k}$$

Dove il punto si ferma.

1.2.7.2 Legge oraria

La legge oraria si ricava per integrazione da $v(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt = \\ = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt = \\ = -\frac{v_0}{k}[e^{-kt}]_0^t = \\ = \frac{v_0}{k}(1 - e^k t) \end{aligned}$$

1.2.7.3 Costante di tempo

Si definisce costante di tempo:

$$\tau = \frac{1}{k}$$

In un intervallo di tempo pari a τ la funzione si riduce di un fattore di e. Minore il valore di τ più rapida la decrescita.

1.3 Moto nel piano

Nel caso in cui il moto sia vincolato a svolgersi su un piano la traiettoria del punto P è in generale una linea curva. Occorre pertanto specificare oltre al valore numerico dello spostamento la sua direzione e il verso. Queste grandezze con caratteristiche direzionali e numeriche si dicono vettori. Anche la velocità e l'accelerazione del moto piano sono grandezze vettoriale, caratteristica vera per qualsiasi moto in n dimensioni.

1.3.1 Posizione

La posizione del punto viene identificata da due coordinate che possono essere con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $x(t)$ e $y(t)$, o in termini di coordinate polari $r(t)$ e $\theta(t)$.

1.3.1.1 Relazione tra coordinate cartesiane e polari

Le relazioni tra coordinate cartesiane e polari sono:

$$\begin{aligned} x = r\cos\theta, \quad & y = r\sin\theta \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad & \tan\theta = \frac{y}{x} \end{aligned}$$

1.3.1.2 Identificare la posizione attravreso il raggio vettore

Si intende per raggio vettore del punti P:

$$r(t) = OP = x(t)u_x + y(t)u_y$$

Dove u_x e u_y rappresentano i versori degli assi cartesiani fissi nel tempo. Nota la dipendenza dal tempo di r è individuato il moto di P.

1.3.1.3 Coordinata curvilinea

La posizione del punto lungo la traettoria può essere data da una coordinata curvilinea s misurata a partire da un'origine arbitraria. Il valore di s esprime la lunghezza della traiettoria e varia nel tempo dirante il moto: $\frac{ds}{dt}$ indica la variazione temporale della posizione lungo la traiettoria o la velocità istantanea del punto, come definita nel moto rettilineo.

1.3.2 Velocità vettoriale

Data la forma della traiettoria e la velocità in cui viene percorsa si fornisce una descrizione completa del moto che può essere riassunta nella velocità vettoriale. Considerando due posizioni occupate dal punto P al tempo t e al tempo $t+\Delta t$, queste sono individuate dai vettori $r(t)$ e $t(t+\Delta t) = r(t)+\Delta r$. Costruendo il rapporto incrementale:

$$\frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{\delta r}{\Delta t}$$

Si definisce la velocità vettoriale:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

Si nota pertanto come la velocità vettoriale è la derivata del raggio vettore rispetto al tempo. Si può inoltre descrivere:

$$dr = dsu_T$$

In quanto l'incremento dr risulta tangente alla traiettoria di P in modo eguale allo spostamento infinitesimo ds, dove u_T è il versore della tangente alla curva. Si pensa al moto come una successione di spostamenti rettilinei infinitesimi con direzione variabile. La direzione istantanea del moto coincide con quella della tangente alla traiettoria nel punto occupato all'istante considerato:

$$v = \frac{ds}{dt}u_T = vu_T$$

La velocità vettoriale v individua in ogni istante con la sua direzione e verso la direzione e il verso del moto e con il suo modulo $\frac{ds}{dt}$ la velocità istantanea con cui è percorsa la traiettoria.

1.3.2.1 Invarianza

Si nota come la traiettoria del moto e la velocità vu_T sono caratteristiche intrinseche che non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento. Spostando l'origine e ruotando gli assi la curva, la direzione, il verso e il modulo della velocità restano gli stessi. Si parla pertanto di invarianza delle relazioni vettoriali rispetto alla scelta del sistema di riferimento.

1.3.2.2 Calcolo delle componenti della velocità

1.3.2.2.1 Componenti cartesiane Essendo $r = xu_x + yu_y$,

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{dr}{dt} = \\
&= \frac{dx}{dt}u_x + \frac{dy}{dt}u_y = \\
&= v_x u_x + v_y + u_y
\end{aligned}
$$

La velocità del punto P ha componenti cartesiani v_x e v_y dei due moti rettilinei descritti dai punti proiezione di P sugli assi cartesiani. Pertanto

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Inoltre detto ϕ l'angolo tra il vettore v e l'asse x,

$$\tan\phi = \frac{v_y}{v_x}$$

1.3.2.2.2 Componenti polari Introducendo u_r e u_θ, il versore della direzione di r e il versore ortogonale alla stessa, si nota come questi cambiano direzione durante il moto. Il raggio vettore r può essere espresso come ru_r, pertanto:

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{dr}{dt} = \\
&= \frac{dr}{dt}u_r + r\frac{du_r}{dt} \Rightarrow \\
v &= \frac{dr}{dt}u_r + r\frac{d\theta}{dt}u_\theta = \\
&= v_r + v_\theta
\end{aligned}
$$

La velocità, sempre tangente alla traiettoria si scompone in due componenti: la velocità radiale v_r diretta lungo r e di modulo $\frac{dr}{dt}$ e la velocità trasversa v_θ ortogonale a r e di modulo $r\frac{d\theta}{dt}$. v_r dipende dalle variazioni del modulo del raggio vettore v_θ, collegata alle variazioni di direzione dello stesso. Il modulo della velocità è pertanto, per queste componenti:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

1.3.2.3 Determinare la posizione nota la velocità

Essento $v = \frac{dr}{dt}$, per ricavare la posizione da essa si integra:

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

L'integrazione esplicita può essere fatta ricorrendo alle componenti, applicando

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Ai moti rettilinei componenti.

1.3.3 Accelerazione nel moto piano

L'accelerazione del moto piano deve esprimere le variazioni della velocità come modulo che direzione.

1.3.3.1 Direzione

L'accelerazione non è parallela alla velocità ed è diretta verso la concavità della curva che rappresenta la traiettoria.

1.3.3.2 Definizione

L'accelerazione si definisce come derivata della velocità rispetto al tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

Pertanto considerando $v = \frac{ds}{dt}u_T = vu_T$ e la derivata di un vettore:

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{dt}(vu_T) = \\ &= \frac{dv}{dt}u_T + v\frac{du_T}{dt} = \\ &= \frac{dv}{dt}u_T + v\frac{d\phi}{dt}u_N \end{aligned}$$

La prima componente parallela alla velocità esprime la variazione del modulo della velocità, mentre il secondo, dipendente dalla variazione di direzione della velocità è ortogonale ad essa: u_N è un vettore ortogonale a u_T diretto verso la concavità della traiettoria. $\frac{d\phi}{dt}$ determina quanto rapidamente cambia la direzione di u_T e di u_N.

1.3.3.2.1 Componente normale Per esprimere la componente normale, si nota come al limite per $\Delta t \to 0$ le rette normali alla traiettoria in due punti molto vicini si incontrano in C che coincide con il centro della circonferenza tangente alla traiettoria in P, o circonferenza osculatrice. Questo punto si chiama centro di curvatura della traiettoria nel punto P. L'arco di traiettoria ds è pari a $Rd\phi$ con $R = CP$ raggio di curvatura. Al variare di P lungo la traiettoria sia R che X variano. Si nota:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$$

Sostituendo nell'espressione dell'accelerazione trovata prima:

$$a = \frac{dv}{dt}u_T + \frac{v^2}{R}u_N = a_T + a_N$$

Il modulo pertanto vale:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

Le due componenti si chiamano accelerazione tangenziale e accelerazione normale o centripeta.

1.3.3.3 Moto curvilineo uniforme

In un moto curvilineo vario entrambe le comopnenti sono diverse da zero, me il moto è curvilineo uniforme a_T è nulla, mentre il moto è rettilineo vario è nulla a_N, nel moto rettilineo uniforme sono entrambe nulle. Ovvero:

- $a_T \neq 0$ moto vario.
- $a_N \neq 0$ moto curvilineo.

1.3.3.4 Componenti cartesiane

Le componenti cartesiane dell'accelerazione sono le accelerazioni dei due moti rettilinei proiezioni sugli assi del moto di P lungo la traiettoria curva:

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \\ &= \frac{dv_x}{dt}u_x + \frac{dv_y +_d t + u_y}{=} \\ &= \frac{d^2x}{dt^2}u_x + \frac{d^2y}{dt^2}u_y = \\ &= a_x u_x + a_y u_y \end{aligned}$$

Detto ϕ l'angolo che u_T forma con u_x, si deduce che:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv}{dt}\cos\phi - \frac{v^2}{R}\sin\phi \\ a_y &= \frac{dv}{dt}\sin\phi - \frac{v^2}{R}\cos\phi \end{aligned}$$

Dalle componenti tangenziale e centripeta si ricavano le cartesiano risolvendo il sistema lineare nelle incognite $\frac{dv}{dt}$ e $\frac{v^2}{R}$.

1.3.3.5 Componenti polari

Considerando che u_r e u_θ non sono fissi e $v = \frac{dr}{dt}u_r + \frac{d\theta}{t}u_\theta$

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \\ &= \frac{d}{t}\left(\frac{dr}{dr}u_r + r\frac{d\theta}{dt}u_\theta\right) = \\ &= \frac{d^2r}{dt^2}u_r + \frac{dr}{dt}\frac{du_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}u_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}u_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{dt_\theta}{dt} \end{aligned}$$

Considerando che $\frac{du_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}u_\theta$ e che $\frac{du_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}u_r$ si nota che per una variazione positiva di θ du_θ è opposto a u_r e si ha:

$$a = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]u_r + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]u_\theta$$

Da cui:

$$a = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]u_r + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]u_t heta$$

Il primo termine rappresenta l'accelerazione radiale e il secondo l'accelerazione trasversa. Anche a_r e a_θ si possono mettere in relazione con a_x e a_y o a_T e a_N

1.3.3.6 Valore della velocità

Nota l'accelerazione e il valore della velocità all'istante t_0 la velocità in un istante t è data da:

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

1.3.4 Moto circolare

Si dice moto circolare un moto piano la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza. L'accelerazione centripeta è sempre diversa da zero, pertanto agisce una forza centripeta diretta verso il centro della circonferenza. Nel moto circolare uniforme la velocità è costante in modulo e l'accelerazione tangente è nulla per cui $a = a_N$, se invece il modulo della velocità cambia nel tempo il moto circolare non è uniforme e a_T è diversa da zero: la direzione dell'accelerazione non passa per il centro della circonferenza. In quest'ultimo caso oltre alla forza centripeta agisce anche una forza tangenziale.

1.3.4.1 Descrizione

Il moto circolaer può essere descritto facendo riferimento allo spazio percorso sulla circonferenza $s(t)$ o utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso all'arco $s(t)$ con $\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$. Assumere come variabile $\theta(t)$ vuol dire porsi in un sistema di coordinate polari di centro in O in cui il moto avviene con $r(t) = R$ costante. La rappresentazione in coordinate cartesiane è legata a $\theta(x)$:

$$x(t) = R\cos\theta(t)$$

$y(t) = R\sin\theta(t)$

1.3.4.2 Velocità angolare

Si è interessati alle variazioni dell'angolo nel tempo e si definisce la velocità angolare come la derivata dell'angolo rispetto al tempo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

Si nota come la velocità angolare è proporzionale alla velocità con cui è descritta la circonferenza. Nel moto circolare la velocità radiale è identicamente nulla in quanto il raggio vettore è costante in modulo e la velocità trasversale coincide con la velocità: da $v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$ si trova che $v = R\omega$.

1.3.4.3 Moto circolare uniforme

Nel moto circolare uniforme v e ω sono costanti e le leggi orarie con riferimento alle due variabili sono:

$$s(t) = s_0 + vt \qquad s = s_o \; per \; t = 0$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t \qquad \theta = \theta_0 \; per \; t = 0$$

Si ricordi come il termine uniforme significa esclusivamente costanza del modulo della velocità: il moto circolare uniforme è un moto accelerato con accelerazione costante ortogonale alla traiettoria:

$$a = a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

1.3.4.3.1 Periodicità Si nota come si tratta di un moto periodico con periodo

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Corrispondente al tempo necessario per compiere un giro completo.

1.3.4.3.2 Moti proiettati sugli assi cartesiani I moti proiettati sugli assi cartesiani sono:

$$x = R\cos\theta = R\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$y = R\sin\theta = R\sin(\omega t + \theta_0)$$

Ovvero due moti armonici di uguale ampiezza e fase iniziale sfasati di $\frac{\pi}{2}$ e con periodo coincidente con quello del moto circolari uniforme. La velocità angolare è uguale alla pulsazione numericamente.

1.3.4.4 Moto circolare non uniforme

Nel caso del moto circolare non uniforme si deve considerare l'accelerazione tangenziale $a_T = \frac{dv}{dt}$.

1.3.4.4.1 Accelerazione angolare Essendo anche ω variabile si definisce l'accelerazione angolare:

$$\begin{aligned} a &= \frac{d\omega}{dt} = \\ &= \frac{d^2\theta}{dt^2} = \\ &= \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \\ &= \frac{a_T}{R} \end{aligned}$$

1.3.4.4.2 Determinare la velocità angoalre dall'accelerazione Nota $a(t)$ si può integrare ottenendo:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt$$

1.3.4.4.3 Determinare l'incremento della velocità angolare in corrispondenza dell'incremento angolare Nota $a(\theta)$ si può calcolare l'incremento della velocità angolare in corrispondenza all'incremento angolare $\theta - \theta_0$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \\ &= \omega\frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \\ \Rightarrow & a d\theta = \omega d\omega \Rightarrow \\ \Rightarrow & \int_{\theta_0}^{\theta} a(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2 \end{aligned}$$

1.3.4.4.4 Moto circolare uniformemente accelerato Il moto circolare uniformemente accelerato è un moto in cui a è costante, o a_T costante. Ponendo $t_0 = 0$:

$$\omega = \omega_0 + at$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

L'accelerazione centripeta vale:

$$a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + at)^2 R$$

1.3.4.5 Notazione vettoriale

Si ampli il concetto di velocità angolare del moto circolare mostrando come si possono associare ad esso caratteristiche vettoriali. Si definisce velocità angolare il vettore ω con modulo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, direzione perpendicolare al piano in cui giace la circonferenza e verso tale che all'estremo del vettore ω il moto appaia antiorario. Risulta evidente che:

$$v = \omega \times r$$

Nel caso ω sia applicata al centro della circonferenza $r = R$, ma questa equazione risulta valida se ω è applicata in un qualsiasi altro punto dell'asse di rotazione, ovvero la retta ortigonale al piano del moto e passante per il centro della circonferenza. Dato ω si individua l'asse di rotazione e il piano del moto circolare, il verso di percorrenza della circonferenza e come varia l'angolo nel tempo. Da ω per derivazione rispetto al tempo si ottiene il vettore accelerazione angolare a, parallelo a ω e verso determinato dalla variazione del modulo di ω e modulo $a = \frac{d\omega}{dt}$.

1.3.4.5.1 Accelerazione del moto circolare Tramite A e ω si esprime l'accelerazione del moto circolare:

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt}(\omega \times r) = \\ &= \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times \frac{dr}{dt} \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= a \times r + \omega \times v \end{aligned}$$

Si nota come il pirmo termine $a \times r$ è l'accelerazione tangenziale a_T di modulo aR, mentre il secondo $\omega \times v$ è l'accelerazione centripeta a_N di modulo $\omega^2 R$. Nel moto circolare uniforme ω è un vettore costante anche un modulo, a è nulla e $a = a_N = \omega \times v$.

1.3.4.5.2 Proprietà di r Il vettore r applicato in O ha modulo costante e descrive un moto rotatorio attorno all'asse di rotazione, ovvero alla direzione di ω formando un angolo ϕ costante con l'asse stesso. La sua derivata $\frac{dr}{dt}$ si può scrivere $\omega \times r$. Anche il vettroe v descrive una rotazione intorno a ω con cui forma l'angolo $\phi = \frac{\pi}{2}$ e la sua derivata $\frac{dv}{dt}$ si può scrivere $\omega \times v$. Al moto di rotazione di un asse rispetto ad un altro asse fisso con cui forma un angolo costante e ha un punto in comune si dà il nome di moto di precessione. Dato un vettore di modulo costante A che descrive un moto di precessione con velocità angolare ω, la sua derivata temporale può essere sempre scritta:

$$\frac{dA}{dt} = \omega \times A$$

Che risulta ortogonale a A. Inoltre in modulo

$$dA = A \sin \phi d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = A \sin \phi \frac{d\theta}{dt} = \omega A \sin \phi = |\omega \times A|$$

1.3.5 Moto parabolico dei corpi

Si analizza il moto nel vuoto di un punto P lanciato dall'origine O con velocità iniziale v_0 formante un angolo α con l'asse delle ascisse. Si vuole calcolare la traiettoria, la massima altezza raggiunta e la posizione G in cui il punto ricade su x o la gittata OG.

1.3.5.1 Caratterizzazione

Il moto è caratterizzato da un'accelerazione costante $a = g = -gu_x$ e le condizioni inziali sono $r = 0$ e $v = v_0$ al tempo $t = 0$. Si nota come

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt = v_0 - gtu_x$$

1.3.5.2 Velocità

La velocità si trova nel piano individuato dai vettori costanti v_θ e g, il piano x, y. Essendo $v_\theta = v_0 \cos tau_x + v_\theta \sin au_y$:

$$v(t) = v_\theta \cos au_y + (v_\theta \sin a - gt)u_x$$

1.3.5.3 Leggi orarie dei moti proiettati

La velocità dei moti proiettati sugli assi sono $v_y = v_o \cos \alpha$ e $v_x = v_0 \sin \alpha - gt$. Pertanto le leggi orarie dei moti proiettati sugli assi sono:

$$x = v_0 \cos t\alpha t$$

$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

Se sull'asse x il moto è uniforme sull'asse y è uniformemente accelerato.

1.3.5.4 Traiettoria

La traiettoria viene ricavata eliminando il tempo tra $x(t)$ e $y(t)$ e ottenendo la funzione:

$$y(t) : t = \frac{x}{v_0} \cos \alpha$$

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

Ovvero l'equazione di una parabola.

1.3.5.5 Direzione del moto

La direzione del moto in funzione del tempo o della coordinata x può essere caratterizzata dall'angolo ϕ che il vettore velocità forma con l'asse orizzontale:

$$\begin{aligned}\tan\phi &= \frac{v_y}{v_x} = \\ &= \tan\alpha - \frac{g}{v_0\cos\alpha}t = \\ &= \tan\alpha - \frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x\end{aligned}$$

Per calcolare la gittata OG si impne $y(x) = 0$ e si ottengono due soluzione $x = 0$ e:

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{2v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g} = \\ &= \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \\ &= 2X_M\end{aligned}$$

Dove $X_M = v_0^2\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{g}$ è la coordinata dal punto di mezzo del segmento OG e ascissa del punto di massima altezza.

1.3.5.6 Altezza massima

L'altezza massima raggiunta è pertanto:

$$y(X_M) = Y_M = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$

L'altezza massima si può ottenere annullando $\frac{dy}{dx}$, ovvero imponendo

$$\tan\alpha - (\frac{g}{v_0^2}\cos^2\alpha)x = 0$$

Si ricava da questo l'ascissa del massimo X_M e si calcola $y(X_M)$. Un altro modo è sfruttare il fatto che nel punto di massima altezza la velocità è orizzontale, pertanto $u_y = 0<$ ovvero $t = t_M = v_0\sin\frac{\alpha}{g}$, sostituendo $x(t)$ e $y(t)$ si trovano X_M e Y_M.

1.3.5.7 Angolo di lancio per la gittata massima

L'angolo di lancio per cui si ha la gittata massima si ottiene con la condizione $\frac{dx_G}{d\alpha} = 0<$ ovvero $\frac{2v_0^2}{g}(-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0$ e risulta $\alpha = 45°$

1.3.5.8 Tempo totale di volo

Il tempo totale di volo t_G è pari al tempo impiegato a percorere OG con velocità costante $v_x = v_0\cos\alpha$:

$$t_G = 2\frac{X_M}{v_0}\cos\alpha = 2v_0\sin\frac{\alpha}{g} = 2t_M$$

Si nota come t_G coincide con il tempo necessario per salire a Y_M e tornare al suolo. Si nota come nella posizione G la velocità è la stessa in modulo che alla partenza ma simmetricamente rispetto a x.

$$u_x(t_G) = v_0 \cos\alpha$$

$$u_y(t_G) = -v_o \sin\alpha$$

$$\tan\phi = -\tan\alpha$$