Лабораторна робота №1. Тема: Комбінаторика
(Розміщення, перестановки, комбінації, біном Ньютона)

Комбінаторика – це галузь математики, предметом якої є теорія скінченних множин. Значна кількість теорем і формул комбінаторики ґрунтується на двох елементарних правилах, які називаються правилами суми і добутку.

Правило суми - якщо деякий об'єкт ***a*** можна вибрати ***m*** способами, а об'єкт ***b*** – ***n*** способами, причому ніякий вибір ***a*** не збігається з жодним з виборів ***b***, то один з об'єктів ***a*** або ***b*** можна вибрати ***m+n*** способами.

Правило добутку – якщо деякий об'єкт ***a*** можна вибрати ***m*** способами і при кожному виборі об'єкта ***a*** об'єкт ***b*** можна вибрати ***n*** способами, то вибір пари (***a, b***) можна здійснити ***mn*** способами.

Правило суми та добутку можна узагальнити на будь-яку більшу кількість об'єктів.

У комбінаториці розглядають три типи сполук – розміщення, перестановки та комбінації.

Розміщення з ***n*** елементів по ***m*** називають сполуки, що складаються з ***m*** елементів, взятих з ***n***, і відрізняються або складом елементів, або їх порядком. Кількість всіх можливих розміщень розраховують за формулою:

– ***без повторень*** - ***з повтореннями***

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}; \qquad \overline{A}_n^m = n^m.$$

Перестановками n елементів називають сполуки, що відрізняються тільки порядком елементів. Кількість всіх можливих перестановок розраховують за формулою:

– ***без повторень*** - ***з повтореннями***

$$P_n = n!; \qquad P_n(n_1, n_2, \ldots) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots}.$$

Комбінаціями з ***n*** елементів по ***m*** називають сполуки, що складаються з ***m*** елементів, взятих з ***n***, і відрізняються тільки складом (порядок не має значеня). Кількість всіх можливих комбінацій розраховують за формулою:

– ***без повторень*** - ***з повтореннями***

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}; \qquad \overline{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Алгоритм генерування лексикографічно наступної перестановки

Нехай задана перестановка $a_1 a_2 ... a_j a_{j+1} ... a_n$ елементів множини $X = \{1, 2, ..., n\}$. Знаходимо цілі a_j та a_{j+1} такі, що $(a_j < a_{j+1}) \wedge (a_{j+1} > a_{j+2} > ... > a_n)$. Це означає ?????

Знаходимо в перестановці останню (зліва направо) пару сусідніх чисел, у яких перше число менше за друге. Ставимо на j - ту позицію таке найменше серед чисел $a_{j+1}, a_{j+2}, ..., a_n$, яке є більшим, ніж a_j і решту з чисел $a_{j+1}, a_{j+2}, ..., a_n$ у позиціях $j+1, j+2, ..., n$.

Приклад. Задана перестановка 3 6 2 <u>5 4 1</u>. З підкреслених чисел найменше ціле, що більше 2, є 4. Отже, на місце числа 2 ставимо 4, а числа 2 5 1 розташовуємо на останніх трьох позиціях у зростаючому порядку: 3 6 4 1 2 5.

*Алгоритм генерування лексикографічно наступної сполуки **n**-елементної множини **X**={**1,2,…,n**} по **r** елементів.*

Елементи сполуки записати у зростаючому порядку. Знайти останній елемент a_i у сполуці такий, що $a_i \neq n - r + i$. Для знайденого елемента виконати присвоювання $a_i := a_i + 1$. Для $j = i+1, i+2, ..., r$ виконати $a_j \neq a_i + j - i$.

Приклад. X= { 1,2,3.4,5,6 }. Знайти сполуку, яка є лексикографічно наступною за {1,2,5,6 }.

Маємо: $n = 6, r = 4.$

Далі, $6 = 6 - 4 + 4, \; 5 = 6 - 4 + 3, \; 2 \neq 6 - 4 + 2$

Отже, $a_2 := 2 + 1$, тобто $a_2 = 3$.

Далі, $a_3 := 3 + 1$; $a_4 := 3 + 2$.

Відповідь: $\{1, 3, 4, 5\}$.

Біном Ньютона (n - додатнє ціле):

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k a^{n-k} \quad .$$

<u>**Завдання**</u>

<u>Запрограмувати за варіантом</u> обчислення кількості комбінацій розміщення (*перестановок, комбінацій, алгоритму визначення наступної лексикографічної сполуки, перестановки*) та формулу бінома Ньютона і побудувати за допомогою неї розклад за варіантом.

Варіант 1.

Задане додатне ціле число n. Розташувати у лексикографічному порядку всі перестановки множини $\{1, 2, ..., n\}$.

Побудувати розклад $(x+y)^5$.

Варіант 2. Задане додатне ціле число n і невід’ємне ціле число r, $r \leq n$. Розташувати у лексикографічному порядку всі сполуки без повторень із r елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$.

Побудувати розклад $(x - y)^5$.

Варіант 3.
Задане додатне ціле число n і невід'ємне ціле число r, $r \le n$. Розташувати у лексикографічному порядку всі розміщення без повторень із r елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$.

Побудувати розклад $(x+y)^6$.

Варіант 4.
Задане додатне ціле число n. Побудувати всі сполуки без повторень елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$.

Побудувати розклад $(x-y)^6$.

Варіант 5.
Задане додатні цілі числа n та r. Побудувати у лексикографічному порядку всі розміщення з повтореннями із r елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$.

Побудувати розклад $(x+y)^7$.

Варіант 6.
Задане додатні цілі числа n та r. Побудувати у лексикографічному порядку всі розміщення з повтореннями із r елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$.

Побудувати розклад $(x-y)^7$.

Варіант 7.
Визначити лексикографічно наступну перестановку для кожної з перестановок: 1432, 54123, 12453, 45231, 6714235, 31528764.

Побудувати розклад $(x-y)^8$.

Варіант 8.
Розташувати наведені перестановки елементів множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ у лексикографічному порядку: 234561, 231456, 165432, 156423, 543216, 541236, 231465, 314562, 432561, 654321, 654312, 435612.

Побудувати розклад $(x+y)^8$.

Варіант 9.
Використовуючи алгоритм побудови лексикографічно наступної перестановки, записати перші 12 перестановок елементів множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Побудувати розклад $(x-y)^9$.

Варіант 10.
Використовуючи алгоритм побудови лексикографічно наступної сполуки, виписати всі сполуки по 4 елементи множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Побудувати розклад $(x+y)^9$.