

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ З ВІДОМИМИ ЗАКОНАМИ РОЗПОДІЛУ

1. Моделювання дискретних випадкових величин.

1.1. Моделювання випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона.

Цілочислова випадкова величина X має **біноміальний закон** розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Біноміальний розподіл є дискретним розподілом імовірностей із параметрами n і p для кількості успішних результатів у послідовності із n незалежних експериментів, для кожного з яких ставиться питання "так-ні". Імовірність виникнення успішного результату для кожного випробування задається параметром p , а імовірність виникнення не успішного результату відповідно дорівнює $q=1-p$. Випадкова величина, що має біноміальний розподіл коротко записується так: $X \in B(n, p)$

Числові характеристики біноміального розподілу: математичне сподівання $M(X) = np$, дисперсія $D(X) = npq$.

Розподілом Пуассона називається закон розподілу дискретної випадкової величини X , яка може приймати будь-які цілі невід'ємні значення k в замкнутому проміжку $[0, n]$, що описується формулою Пуассона:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (2)$$

при цьому $\lambda = \text{const}$ – параметр розподілу Пуассона. Дана формула визначає ймовірності подій в схемі повторних незалежних випробувань Бернуллі (1) коли $p \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\lambda = np$. Закон Пуассона описує число подій, що відбуваються за однакові проміжки часу, за умови, що ці події відбуваються незалежно одна від одної. Розподілом Пуассона добре описуються число викликів на телефонну станцію за певний час доби, число самородків при розробці родовищ золота й ін. Розподіл Пуассона відіграє ключову роль в теорії масового обслуговування. Випадкова величина, що має розподіл Пуассона коротко записується так: $X \in P(\lambda)$.

Числові характеристики розподілу Пуассона: математичне сподівання $M(X) = \lambda$, дисперсія $D(X) = \lambda$.

Як зазначалося вище, закон Пуассона є граничним для біноміального розподілу. Це гранична властивість біноміального розподілу часто знаходить застосування на практиці. Допустимо, що проводиться велика кількість n незалежних дослідів, в кожному з яких подія A має дуже малу ймовірність p . Тоді для обчислення ймовірності того, що подія A відбудеться рівно k разів, замість (1) можна скористатися формулою (2), як наближеною, де $\lambda = np$. На підставі цього, процедура моделювання випадкової величини X , розподіленої за законом Пуассона із заданим параметром λ , полягає у проведенні $n = \frac{\lambda}{p}$ випробувань, де ймовірність появи кожної події є малою величиною: $p \leq 0,1$ (рідкісна подія).

Алгоритм моделювання такий:

1. Визначають число випробувань $n = \frac{\lambda}{p}$, де $p \leq 0,1$. Лічильнику числа подій k присвоюється значення 0 ($k:=0$).
2. За допомогою датчика випадкових чисел $\{r_i\}$ з рівномірним розподілом в інтервалі $[0,1]$ вибирають число r_i і перевіряють умову $r_i \leq p$. Якщо ця умова виконується, то k збільшується на одиницю ($k:=k+1$), якщо умова не виконується – k не змінюється.
3. Після проведення n таких випробувань вміст лічильника числа подій k використовується як випадкове число із законом розподілу Пуассона з параметром λ .
4. Пункти 2 і 3 повторюють, поки не буде досягнуто потрібного об'єму вибірки.

2. Моделювання неперервних випадкових величин

2.1. Моделювання випадкової величини, розподіленої за показниковим законом.

Показниковим (експоненціальним) називається закон розподілу неперервної випадкової величини X , функція густини розподілу ймовірності якої має вигляд:

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} \quad (3)$$

де постійна величина $\lambda > 0$ є параметром показникового закону розподілу ймовірності. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини $F_X(x)$ буде:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

З показниковим законом розподілу доводиться часто стикатися при визначенні надійності систем, дослідженні систем масового обслуговування та ін. Випадкова величина, що має показниковий розподіл коротко записується так: $X \in E(\lambda)$.

Числові характеристики показникового розподілу: математичне сподівання

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \text{ дисперсія } D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Згідно з визначенням функції розподілу $F_X(x)$ вона приймає значення на відрізку $[0,1]$. Тому для отримання реалізації x_i неперервної випадкової величини X можна спочатку згенерувати за допомогою датчика випадкових чисел $\{r_i\}$ з рівномірним розподілом в інтервалі $[0,1]$ деяке число r_i , а потім знайти x_i , при якому $r_i = F_X(x_i)$ тобто $x_i = F_X^{-1}(r_i)$, де функція F_X^{-1} обернена відносно функції розподілу F_X . Розглянутий метод моделювання неперервної випадкової величини носить назву методу оберненої функції. Недоліком методу є аналітичні труднощі при знаходженні оберненої функції F_X^{-1} .

Розглянемо застосування методу оберненої функції для моделювання випадкової величини X з показниковим розподілом. Нехай параметр λ показникового закону заданий. За допомогою датчика випадкових чисел $\{r_i\}$ з рівномірним розподілом в інтервалі $[0,1]$ генерують випадкове число r_i . Знаходять x_i , при якому $r_i = F_X(x_i) = 1 - e^{-\lambda x_i}$. Розв'язуючи це рівняння відносно x_i , маємо:

$$x_i = \frac{-\ln(1-r_i)}{\lambda}. \quad (6)$$

Оскільки $r_i \in [0,1]$, то випадкові величини r_i і $(1-r_i)$ мають той самий рівномірний розподіл в інтервалі $[0,1]$. Тому остаточно:

$$x_i = \frac{-\ln r_i}{\lambda}. \quad (7)$$

2.2. Моделювання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом. Нормальний розподіл (розподіл Гаусса) є видом розподілу, що найчастіше зустрічається. З ним доводиться стикатися при аналізі виробничих похибок, контролі технологічних процесів і режимів, при аналізі і прогнозуванні різних явищ. Цей закон є граничним, до якого наближаються інші закони розподілу.

Густина розподілу випадкової величини X , що має нормальний розподіл, виражається формулою:

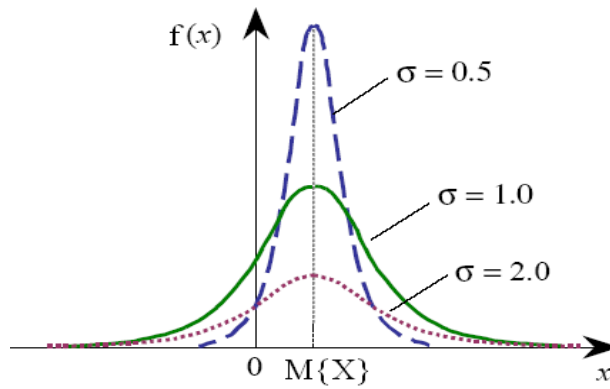
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (8)$$

Функція розподілу ймовірностей випадкової величини X :

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right) d\xi. \quad (9)$$

Числові характеристики нормального розподілу: математичне сподівання $M(X) = m$, дисперсія $D(X) = \sigma^2$. Випадкова величина X , що має нормальний розподіл з параметрами m, σ коротко записується так: $X \in N(m, \sigma)$.

Величина $M(X)$ характеризує центр ваги розподілу X і не впливає на форму кривої. Величина σ характеризує розкид випадкової величини X відносно її середнього значення $M(X)$ (див. рисунок).



Графік нормального розподілу

При моделюванні нормальної випадкової величини застосовують метод, заснований на центральній граничній теоремі теорії ймовірностей. Згідно з цією теоремою, при додаванні достатньо великого числа незалежних випадкових величин, порівнянних за своїми дисперсіями, отримується випадкова величина, розподілена приблизно за нормальним законом, причому цей закон тим ближче до нормального, чим більше випадкових величин додається. Як показали дослідження, при додаванні вже $n \geq 8$ випадкових величин з рівномірним розподілом в інтервалі $[0,1]$ отримується випадкова величина, яка з точністю, достатньою для більшості практичних задач, може вважатися нормальною.

Якщо випадкова величина $R\{r_i\}$ розподілена рівномірно в інтервалі $[0,1]$, то її математичне сподівання $M(R)=1/2$, а дисперсія $D(R)=1/12$. Тоді для практичного використання можна вважати, що випадкова величина $\xi = \sum_{i=1}^n r_i$ розподілена нормально при $n \geq 8$ з математичним сподіванням $M(\xi)=n/2$, дисперсією $D(\xi)=n/12$ і середньоквадратичним відхиленням $\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{n/12}$.

Моделювання будь-якого нормального розподілу $X \in N(m, \sigma)$ може бути здійснено за очевидною формулою:

$$X = m + \sigma Y, \quad (10)$$

де випадкова величина $Y \in N(0,1)$. Нормальний розподіл з параметрами $(0,1)$ називається стандартним нормальним розподілом.

Для отримання величини Y пронормуємо випадкову величину ξ :

$$Y = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)} = \frac{12}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n r_i - \frac{n}{2} \right)$$

Тепер $Y \in N(0,1)$. При $n = 12$ ця формула помітно спрощується:

$$Y = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6. \quad (11)$$

Отже стандартний нормальний розподіл з достатньою точністю можна змоделювати за допомогою (11).

Для моделювання довільного нормального розподілу $X \in N(m, \sigma)$ використаємо (10):

$$X = m + \sigma Y = m + \sigma \left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \right).$$

Описана процедура реалізується алгоритмом:

1. За допомогою датчика випадкових чисел з рівномірним розподілом в інтервалі $[0,1]$ генерують 12 чисел r_k .

2. Обчислюють x_i за формулою

$$x_i = m + \sigma \left(\sum_{k=1}^{12} r_k - 6 \right)_i, \quad i=1,2,3,\dots$$

3. Пункти 1 і 2 повторюють, поки не буде досягнуто потрібного об'єму вибірки.

3. Порядок виконання лабораторної роботи.

3.1. Змодельовати послідовність із $N=100$ значень випадкової величини X , розподіленою:

- а) за законом Пуассона;
- б) за показниковим законом;
- с) за нормальним законом.

3.2. Для кожної вибірки визначити вибіркове середнє і вибіркору дисперсію та порівняти їх з теоретичними значеннями.

3.3. Побудувати гістограми та оцінити за їх допомогою закон розподілу випадкової величини X .

3.4. Повторити виконання роботи для $N=1000$. Порівняти результати.

Вибір параметрів моделювання

Нехай n – порядковий номер студента у журналі.

Для моделювання розподілу Пуассона $\lambda=n, p=0,1$.

Для моделювання показникового розподілу $\lambda=n/10$.

Для моделювання нормального розподілу $m=n, \sigma = n(\bmod 5)$.