Лекція. Випадкові величини.

Випадковою *називають величину, пов'язану з деяким випадковим експериментом, яка в результаті його проведення набуває певного значення, причому наперед невідомо якого.*

Дискретною випадковою величиною (ДВВ) *називають таку величину, множина значень якої є скінченою або зліченною.ДВВ може набувати дискретних (ізольованих) значень з відповідними ймовірностями.*

Дискретну випадкову величину можна задати її законом розподілу.

Нехай випадкова величина X має скінчену множину значень.

Законом (рядом) розподілу *дискретної випадкової величини X називають відповідність між можливими значеннями x_i цієї величини та їх ймовірностями* $p_i = P(X = x_i), i = \overline{1,\ n}$.

X	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

причому для ймовірностей p_i завжди виконується умова

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \qquad (1)$$

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

X	-2	0	1	3	5
p_i	0,15	a	0,3	$2a$	0,25

Знайти значення параметра a і записати закон розподілу даної величини.

Розв'язання. Згідно з умовою (1) маємо: $0,15 + a + 0,3 + 2a + 0,25 = 1$, звідки дістаємо: $3a = 1 – 0,7 = 0,3$. Отже, $a = 0,1$. Тоді закон розподілу даної величини має вигляд:

X	-2	0	1	3	5
p_i	0,15	0,1	0,3	0,2	0,25

Ламана з вершинами в точках (x_i ; p_i) називається ***многокутником розподілу ймовірностей випадкової величини X .***

Дискретну випадкову величину можна задавати не тільки законом розподілу, а й іншим способом - за допомогою функції розподілу.

Функцією розподілу *випадкової величини називають функцію F(x) , яка визначає ймовірність того, що величина X набуває значень, менших за x , тобто:*

$$F(x) = P(X < x), \qquad x \epsilon X$$

Функція розподілу F (x) має такі ***властивості:***

1) *$0 \leq F(x) \leq 1$, причому* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
2) *F (x) – не спадна функція на $(-\infty , +\infty)$;*
3) *F (x) є неперервною зліва на $(-\infty , +\infty)$.*

Для ДВВ функція розподілу визначається так:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i \qquad (2)$$

тобто F(x) дорівнює сумі ймовірностей тих значень x_i , для яких виконується умова $x_i < x$.

Приклад 2. Для випадкової величини, заданої в **прикладі 1**, записати функцію розподілу.

Розв'язання. Нагадаємо, що закон розподілу даної дискретної випадкової величини має вигляд:

X	-2	0	1	3	5
p_i	0,15	0,1	0,3	0,2	0,25

Розглянемо всі можливі проміжки значень для даної величини.

Нехай $x \leq -2$, тоді $F(\ ) = p(X < -2) = 0$, так як немає жодного значення x_i , для якого виконується умова $x_i < x$;

якщо $-2 < x \leq 0$, то $F(x) = p(X = -2) = 0{,}15$;

якщо $0 < x \leq 1$, то $F(x) = p(X = -2) + p(X = 0) = 0{,}15 + 0{,}1 = 0{,}25$;

якщо $1 < x \leq 3$, то $F(x) = p(X = -2) + p(X = 0) + p(X = 1) = 0{,}25 + 0{,}3 = 0{,}55$;

якщо $3 < x \leq 5$, то $F(x) = p(X = -2) + p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 3) = 0{,}55 + 0{,}2 = 0{,}75$;

якщо $x > 5$, то $F(x) = p(X = -2) + p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 3) + p(X = 5) = 0{,}75 + 0{,}25 = 1$.

Отже, функція розподілу для даної величини має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x & \leq -2; \\ 0.15, & -2 < x \leq 0; \\ 0.25, & 0 < x \leq 1; \\ 0.55, & 1 < x \leq 3 \\ 0.75, & 3 < x \leq 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Зауважимо, що функція розподілу дискретної випадкової величини є стрибковою функцією, точками розриву якої є значення цієї величини, тобто точки x_i .

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Математичним сподіванням *дискретної випадкової величини X, яка набуває значень* x_i *з ймовірностями* p_i *, називається число*

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (3)$$

Зауваження. *Формула (3) має місце для випадкової величини, множина значень якої скінчена. Якщо ж множина значень величини X зліченна, то* $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, *за умови існування скінченої суми* $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i p_i|$.

Властивості математичного сподівання:

1. *M (C)= C , де C = const ;*
2. *M (CX) = CM (X), де C = const ;*
3. *M (X +Y) = M (X) + M (Y);*
4. *M (XY) = M (X)M (Y), якщо X і Y незалежні величини.*

Приклад 3. Обчислити математичне сподівання випадкової величини, заданої законом розподілу:

а)

$X = x_i$	-5	-2	1	4	7
p_i	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

б)

$Y = y_i$	-5	-2	1	4	7
p_i	0,1	0,5	0,2	0,1	0,1

Розв'язання. а) Для даної величини обчислимо математичне сподівання за формулою (3),тобто $M(X) = -5 \cdot 0{,}2 + (-2) \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}2 = 1$

б) Аналогічно знаходимо: $M(Y) = -5 \cdot 0{,}1 + (-2) \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}1 = -0{,}2$.

На цьому прикладі ми проілюстрували, що випадкові величини, які набувають однакових значень (але з різними ймовірностями) можуть мати різні математичні сподівання. Розглянемо тепер дві різні випадкові величини, які мають однакові математичні сподівання.

Приклад 4. Для величин X і Y обчислити математичне сподівання, якщо:

$Y = y_i$	-100	-50	0	50	100
p_i	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

$X = x_i$	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2

Дисперсією *випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання, тобто*

$$D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right) \tag{4}$$

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 \tag{5}$$

Зауваження. *Дисперсія D (X) випадкової величини характеризує* **міру розсіювання** *цієї величини відносно її центра розсіювання M (X).*

Для ДВВ дисперсію визначають за формулами:
для випадкової величини зі скінченою множиною значень

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}\big(x_i - M(X)\big)^2 p_i \quad (6)$$

або $$D(X) = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \big(M(X)\big)^2 \quad (7)$$

для випадкової величини із зліченною множиною значень

$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty}\big(x_i - M(X)\big)^2 p_i$, *за умови існування скінченої суми* $\sum_{i=1}^{\infty}\big(x_i - M(X)\big)^2 p_i$.

Властивості дисперсії *випадкової величини:*

1. *D(X) ≥ 0 - для будь-якої випадкової величини X ;*
2. *D(C) = 0 , де C = const ;*
3. *D(CX) = C^2 D(X), де C = const ;*
4. *D(X+Y)=D(X)+D(Y), якщо X і Y – незалежні величини;*
5. *D(X-Y)=D(X)+D(Y), якщо X і Y – незалежні величини.*

Дисперсія D (X) характеризує квадрат відхилення величини *від її середнього значення, то одиниця її вимірювання дорівнює квадрату одиниці вимірювання випадкової величини X .*

Середнім квадратичним відхиленням *величини X називають число*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \tag{8}$$

$\sigma(X)$ характеризує відхилення випадкової величини X від її середнього значення і вимірюється в одиницях цієї величини.

Приклад 5. Обчислити дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, заданої законом розподілу

x_i	-4	-2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

<u>Розв'язання.</u> Щоб визначити дисперсію величини, спочатку обчислимо

її математичне сподівання:

$$M(X) = -4 \cdot 0{,}1 + (-2) \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}1 = 0{,}9.$$

Дисперсію можна обчислити за формулою (6) або (7).

I спосіб. Для зручності обчислень можна скласти таку таблицю:

x_i	-4	-2	1	2	4	6
$x_i - M(X)$	-4,9	-2,9	0,1	1,1	3,1	5,1
$\left(x_i - M(X)\right)^2$	24,01	8,41	0,01	1,21	9,61	26,01
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Тоді за формулою (6) маємо:

$$\mathrm{D(X)} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i$$
$$= 24{,}01 \cdot 0{,}1 + 8{,}41 \cdot 0{,}2 + 0{,}01 \cdot 0{,}3 + 1{,}21 \cdot 0{,}2 + 9{,}61 \cdot 0{,}1 + 26{,}01 \cdot 0{,}1 == 2{,}401 + 1{,}682 + 0{,}003 + 0{,}242 + 0{,}961 + 2{,}601 = 7{,}89, \text{тоді } \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}89} = 2{,}8$$

<u>II спосіб</u>. Визначимо D (X) за формулою (7). Обчисливши M (X^{2}), дістанемо:

$$M(X^2) = (-4)^2 \cdot 0{,}1 + (-2)^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 6^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}6 + 0{,}8 + 0{,}3 + 0{,}8 + 1{,}6 + 3{,}6 = 8{,}7$$

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = 8{,}7 - (0{,}9)^2 = 7{,}89 \; \sigma(X) = \sqrt{7{,}89} = 2{,}8$$

НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ
ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Неперервною випадковою величиною (НВВ) *називають таку величину, яка має неперервну функцію розподілу F (x). Множиною значень неперервної випадкової величини є скінчений або нескінчений проміжок.*

Закон розподілу неперервної випадкової величини можна задавати або **функцією розподілу F(x)** *(інтегральною функцією розподілу) або* **щільністю розподілу** *(диференціальною функцією розподілу).*

Функцією розподілу *випадкової величини називають функцію* $F(x) = P(X < x)$ *, яка визначає ймовірність того, що величина* X *набуває значень, менших за* x.

Всі властивості функції розподілу ДВВ виконуються і для функції розподілу НВВ, зокрема

$$0 \le F(x) \le 1, \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Якщо всі можливі значення випадкової величини належать проміжку [a; b] *, то говорять, що величина X* ***розподілена на цьому проміжку****. Тоді,* $F(x) = 0$ *при* $x < a$ *і* $F(x) = 1$ *при* $x > b$.

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \leq X < b),$$

$$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a),$$

звідки $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Зазначимо, що ймовірність кожного конкретного значення НВВ дорівнює нулю, тобто P(X = a) = 0 . Тому, розглядаючи НВВ на деякому проміжку, не має значення, чи належать кінці цьому проміжку. Таким чином,

$$P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (2)$$

Щільністю або *диференціальною функцією розподілу* неперервної випадкової величини X називають таку функцію $f\ (x)$, для якої виконується рівність

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad (3)$$

де $F(x)$ - функція розподілу величини X . Отже, щільність розподілу дорівнює першій похідній від функції розподілу випадкової величини у кожній точці, в якій $f(x)$ є неперервною, тобто

$$f(x) = F'(x) \tag{4}$$

Очевидно, що щільність розподілу розглядають тільки для неперервних величин. Графік щільності $f(x)$ називають *кривою розподілу*.

Розглянемо *властивості щільності* розподілу величини X.

1) Щільність розподілу є невід'ємною функцією: $f(x) \geq 0$.

2) Якщо величина X розподілена на проміжку $[a; b]$, то $f(x) = 0$ при $x < a$ і $x > b$.

3) Для довільної неперервної випадкової величини виконується рівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \tag{5}$$

зокрема для розподіленої на проміжку $[a; b]$ величини X має місце рівність:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1 \tag{5'}$$

Якщо задано щільність розподілу випадкової величини, то ймовірність попадання її значень в проміжок $[a; b]$ визначається рівністю:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (6)$$

З геометричної точки зору ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $[a;\ b)$ дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$.

Приклад 1. Функція розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ cx^2, & 0 \leq x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Визначити невідомий параметр c та обчислити ймовірність $P(X \in [1;3))$. Записати щільність розподілу цієї величини.

<u>Розв'язання.</u> Оскільки для неперервної випадкової величини функція розподілу є неперервною, то параметр c визначаємо з умови $\lim\limits_{x \to 3-0} F(x) = F(3)$, тобто $c \cdot 3^2 = 9c = 1$, звідки дістаємо: $c = \frac{1}{9}$.

Отже, функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x^2}{9}, & 0\le x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Ймовірність P (X ∈[1;3)) обчислимо за формулою (1). Дістанемо:

$$P(X\epsilon[1;3))=P(1\le X<3)=F(3)-F(1)=1-\frac{1^2}{9}=\frac{8}{9}$$

Нагадаємо, що так само ми б визначали, наприклад, ймовірність P(X∈(1;3)). Щільність розподілу даної величини визначимо за формулою (4). Оскільки похідна $\left(\frac{x^2}{9}\right)'=\frac{2x}{9},\ 0'=1'=0$ (див. таблицю похідних та правила диференціювання), то

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{2x}{9}, & 0\le x\le 3;\\ 0, & x>3\end{cases}$$ або $$F(x)=\begin{cases}\frac{2x}{9}, & x\in[0;3];\\ 0, & x\notin[0;3].\end{cases}$$

Приклад 2. Неперервну випадкову величину задано щільністю:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{1}{2}sinx, & 0\le x<\pi;\\ 0, & x\ge\pi.\end{cases}$$

Обчислити ймовірність $P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{2}\right)$ та записати функцію розподілу $F(x)$.

Розв’язання. За формулою (6) обчислимо ймовірність $P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{2}\right)$.

Маємо:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\frac{1}{2}\cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Оскільки задана величина розподілена на проміжку $[0;\pi)$, то $F(x) = 0$ при $x < 0$ і $F(x) = 1$ при $x \geq \pi$. За допомогою рівності (3) визначимо вираз функції розподілу $F(x)$ на проміжку $[0;\pi)$, дістанемо:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{x} \sin t dt = \frac{1}{2}\left(-\cos t \Big|_{0}^{x}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$$

Отже, функція розподілу даної величини має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 \le x < \pi, \\ 1, & x \ge \pi. \end{cases}$$

Числові характеристики неперервної випадкової величини

Неперервна випадкова величина має ті самі числові характеристики, що й дискретна: *математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення*. Властивості цих характеристик ми розглядали на занятті 5.

Математичне сподівання неперервної величини X визначають за формулою:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

Зокрема, якщо випадкова величина X розподілена на проміжку $[a; b]$, то

$$M(X) = \int_{a}^{b} x \cdot f(x)dx. \qquad (7)$$

Дисперсія неперервної випадкової величини визначається так:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx \quad \text{або} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2.$$

Зокрема, якщо величина $X \in [a; b]$, то має місце формула:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \int_a^b x^2 f(x)\, dx - (M(X))^2 \qquad (8)$$

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини визначається так само, як і для дискретної. Отже,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Приклад 3. Закон розподілу НВВ задано щільністю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ c(x+1), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Обчислити невідомий параметр c і визначити числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ заданої величини.

Розв'язання. Параметр c можна знайти, користуючись властивістю щільності. Оскільки величина розподілена на відрізку $[-1;1]$, то c обчислимо за формулою (5’). Скориставшись таблицею інтегралів та правилами інтегрування, дістанемо:

$$1 = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} c(x+1)dx = c\left(\int_{-1}^{1} xdx + \int_{-1}^{1} dx\right)$$

$$= c\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = c\left(\frac{1^2}{2} + 1 - \frac{(-1)^2}{2} - (-1)\right) = 2c,$$

звідки $c = \frac{1}{2}$. Отже, щільність має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{2}(x+1), & -1\le x\le 1,\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$$

Користуючись формулами (7) - (9), знайдемо числові характеристики даної величини.

$$M(X)=\int_{-1}^{1} x\cdot\frac{1}{2}(x+1)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

Оскільки $D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2$, то спочатку визначимо $M(X^2)$:

$$M(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{2}(x+1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^3+x^2)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Тоді $D(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} = \frac{2}{9}$, звідки $\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Найпоширеніші закони розподілу

випадкових величин.

План

1. **Основні закони розподілу дискретної випадкової величини (ДВВ).**
   (a) *Рівномірний закон розподілу;*
   (b) *Біноміальний закон розподілу;*
   (c) *Закон розподілу Пуассона;*
   (d) *Геометричний розподіл;*
   (e) *Гіпергеометричний розподіл.*
2. **Основні закони розподілу неперервної випадкової величини**
   (a) *Рівномірний закон розподілу;*
   (b) *Показниковий закон розподілу;*
   (c) *Нормальний закон розподілу.*

1. Основні закони розподілу ДВВ.

а) Рівномірний закон розподілу. Якщо випадкова величина X набуває n різних значень з однаковими ймовірностями $p(X = x_i) = \frac{1}{n}$, то вона має *рівномірний закон розподілу*. Наприклад, при однократному підкиданні грального кубика ймовірність випадання будь-якої кількості очок від 1 до 6 однакова і дорівнює $\frac{1}{6}$. У цьому випадку величина X (кількість очок, що випали) має рівномірний розподіл.

Якщо випадкова величина X набуває значень 1, 2, ..., n з ймовірностями $p(X = m) = \frac{1}{n}, m = \overline{1, n}$, то її числові характеристики можна обчислити так:

$$M(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad D(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

b) Біноміальний закон розподілу. Нехай проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p (схема Бернуллі). Розглянемо випадкову величину X, яка визначає *число появ події A* (число успіхів) у цій серії випробувань. Отже, величина X

може набувати значень 0,1,2,...,n з ймовірностями, які обчислюють *за формулою Бернуллі*:

$$P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m},\ q=1-p,\ m=0,1,2,\dots,n \qquad (9)$$

У цьому випадку величина X має *біноміальний закон розподілу,* який характеризується двома параметрами n і p .

Для випадкової величини, яка має біноміальний закон розподілу, числові характеристики визначають за формулами:

$$M(X)=np,\ D(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq} \qquad (10)$$

c) ***Закон розподілу Пуассона*** (***закон рідкісних подій***). Розглянемо схему Бернуллі, в якій кількість випробувань n є великим числом, а ймовірність p події A є малим числом ($p<0{,}1$). Тоді випадкова величина (*число появ події A)* набуває значень 0,1,2,...,n з ймовірностями, які обчислюють *за формулою Пуассона*:

$$P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ \lambda=\mathrm{np},\ \mathrm{m}=0,1,2,\dots,\mathrm{n} \qquad (11)$$

У цьому випадку величина X має *розподіл Пуассона* (з параметром $\lambda=np$), для якого числові характеристики визначаються так:

$$M(X) = D(X) = \lambda, \ \sigma(X) = \sqrt{\lambda} \qquad (12)$$

Цей розподіл використовується у задачах статистичного контролю якості виробів, у теорії надійності, у теорії масового обслуговування, у страховій справі.

Зокрема, ймовірність того, що подія A відбудеться m разів за час t, визначають за формулою$P(X = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda}$, де $\lambda = np$ - середнє число появи події A за одиницю часу. За цією формулою можна обчислювати ймовірність кількості телефонних дзвінків за час t, ймовірність числа лампочок, що перегорять за час t .

d) ***Геометричний розподіл.*** Нехай проводиться серія незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p, при цьому$q = p(\bar{A}) = 1 - p$. Розглянемо випадкову величину X, яка дорівнює кількості випробувань до першої появи події A . Отже, величина X може набувати значень 1,2,... з ймовірностями:

$$P(X = m) = pq^{m-1}, \ m = 1,2, \dots \qquad (13)$$

У цьому випадку випадкова величина має *геометричний закон* *розподілу,* а числові характеристики обчислюють за фор-мулами:

$$M(X) = \frac{1}{p}, \qquad D(X) = \frac{q}{p^2}, \qquad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p} \tag{14}$$

Зауважимо, що в цьому розподілі множина значень випадкової величини може бути як скінченою, так і нескінченою. Якщо є певні обмеження для величини X, то вона має скінчену множину значень 1,2,..., n . Тоді при обчисленні ймовірності P (X = n) враховується можливість того, що подія A так і не відбудеться.

е) ***Гіпергеометричний розподіл.*** Розглянемо множину, яка містить N елементів, серед яких M елементів володіють певною властивістю. Із цієї множини навмання вибирають n елементів. Тоді випадкова величина X (кількість вибраних елементів із вказаною властивістю) може набувати значень 0,1,2,...,n з ймовірностями

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\ m = 0,1,\dots,n. \tag{15}$$

Така випадкова величина має *гіпергеометричний розподіл*, причому числові характеристики обчислюють за формулами:

$$M(X) = \frac{Mn}{N}, \; D(X) = \frac{Mn(N-M)}{N^2} \cdot \frac{N-n}{N-1} \tag{16}$$

1.Основні закони розподілу НВВ.

а) Рівномірний закон розподілу

Неперервна випадкова величина, розподілена на проміжку $[a, b]$, має *рівномірний розподіл,* якщо її щільність є сталою на цьому проміжку, тобто:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \epsilon [a; b], \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases} \tag{17}$$

У цьому випадку функція розподілу величини *X* має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{18}$$

Для рівномірно розподіленої неперервної випадкової величини ймовірність попадання її значень у проміжок $(\alpha, \beta) \subset [a; b]$ визначається за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}. \qquad (19)$$

У цьому випадку числові характеристики величини X обчислюють так:

$$M(X) = \frac{a + b}{2}, \qquad D(X) = \frac{(b - a)^2}{12}, \qquad \sigma(X) = \frac{b - a}{\sqrt{12}}. \qquad (20)$$

Прикладом рівномірно розподіленої випадкової величини може бути час очікування транспорту на зупинці, час очікування телефонного дзвінка, похибка при зважуванні предметів.

2. ***Показниковий (експоненціальний) закон розподілу***

Неперервна випадкова величина має *показниковий розподіл* з параметром $\lambda > 0$, якщо її щільність має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda\, x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad (21)$$

Функцію розподілу величини X з показниковим розподілом визначають так:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{22}$$

У цьому випадку ймовірність попадання випадкової величини у проміжок (α, β) , де α >0, β>0 , обчислюють за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \beta} \tag{23}$$

Числові характеристики величини з показниковим розподілом визначають так:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Показниковий розподіл НВВ розглядають в теорії масового обслуговування, зокрема для визначення кількості дзвінків на телефонну станцію, заявок в системі обслуговування, часу неперервної роботи приладів.

3. Нормальний закон розподілу

Неперервна випадкова величина має *нормальний розподіл (розподіл Гауса)* з параметрами a і σ (σ >0), якщо її щільність має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (24)$$

Зауважимо, що параметри нормального розподілу визначають *числові характеристики* випадкової величини, а саме:

$$M(X) = a, \qquad D(X) = \sigma^2, \qquad \sigma(X) = \sigma . \qquad (25)$$

Графік щільності нормально розподіленої випадкової величини називають *кривою нормального розподілу*, причому параметри a і σ визначають положення і форму цієї кривої. У точці $x = a$ функція $f(x)$ має максимум $f(a) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}$. Графік цієї функції симетричний відносно прямої $x=a$, причому на проміжку $(-\infty; a)$ функція зростає, а на проміжку $(a; +\infty)$ спадає. Форма кривої залежить від параметра σ, а саме: при збільшенні σ графік щільності стає більш розтягнутим вздовж осі Ox (горизонтальної асимптоти кривої). Зауважимо, що з властивості щільності (5) випливає: площа фігури, обмеженої кривою розподілу і віссю Ox , дорівнює 1.

При $a = 0$, $\sigma = 1$ нормальний розподіл називають *нормованим* або *стандартним.* У цьому випадку щільність $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$ є функцією

Гауса (див. заняття 4).

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \qquad (26)$$

Оскільки ця функція не є елементарною, то для зручності розглядають функцію Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$ (див. заняття 4), для якої має місце співвідношення $F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

Нагадаємо, що значення функції Лапласа наведено в таблиці (додаток 1), крім того для $\Phi(x)$ мають місце такі властивості:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x), \qquad \Phi(0) = 0, \qquad \Phi(x) = 0{,}5 \quad \text{для всіх } x \geq 5\ .$$

Для нормально розподіленої випадкової величини ймовірність попадання її значень у проміжок (α, β) визначається за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (27)$$

З формули (19) випливає, що для $X \in (a-\delta,\ a+\delta)$ має місце рівність:

$$P(|X-a|<\delta) = P(a-\delta<X<a+\delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (28)$$

Звідси випливає, що ймовірність попадання в проміжок $(a-3\sigma,\ a+3\sigma)$:

$$P(|X-a|<3\sigma) = P\big(X \epsilon (a-3\sigma, a+3\sigma)\big) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973.$$

Отже, нормально розподілена випадкова величина попадає у проміжок $(a-3\sigma,\ a+3\sigma)$ з ймовірністю, близькою до одиниці, тобто подія $X \in (a-3\sigma,\ a+3\sigma)$ є практично достовірною (*правило трьох сигм*). Нормальний розподіл розглядають при систематичних відхиленнях випадкової величини від свого середнього значення, тобто у тих випадках, коли на величину впливає багато випадкових факторів. Наприклад, нормальний розподіл має випадкова похибка вимірювання або відхилення під час стрільби по мішені.