# 时间序列分析考纲（基于 11 个文档全覆盖）

## 一、绪论（文档 10：绪论.pdf）

### 1.1 时间序列基本概念

- 时间序列的定义：按时间顺序排列的观察值序列 / 随机序列及其关系（观察值是随机序列的实现）
- 时间序列的分类：单变量 / 多变量、平稳 / 非平稳、周期性 / 非周期性
- 时间序列分析的核心目标：通过观察值序列推断随机序列的性质与概率分布

### 1.2 时间序列分析流程与应用

- 经典分析流程：数据预处理→模型识别→参数估计→模型检验→预测 / 应用
- 典型应用场景：经济数据（GDP）、金融数据（股价）、工业数据（产量）、环境数据（温度）

## 二、时间序列的随机过程基础与平稳性（文档 1：ch04.pdf）

### 2.1 时间序列的概率化定义

- 随机序列与观察值序列的数学表达（\cdots,Y_1,Y_2,\cdots,Y_t,\cdots与y_1,y_2,\cdots,y_n）
- 随机过程的定义：Y(t,\omega)（时间t\in T、实现\omega\in\Omega）及有限维联合分布族

### 2.2 平稳性定义与判别

- 严平稳（Strongly Stationary）：有限维联合分布不随时间平移变化的数学条件
- 宽平稳（Weakly Stationary）：1-2 阶矩不随时间变化（\mu(t)=\mu、\sigma^2(t)=\sigma^2、\gamma(t_1,t_2)=\gamma(t_1-t_2)）
- 严平稳与宽平稳的关系：严平稳→宽平稳（需存在 1-2 阶矩），反之不成立

## 2.3 时间序列核心统计量

- 序列均值：$\mu(t)=E[Y(t)]$；宽平稳下$\mu(t)=\mu$
- 自协方差函数：$\gamma(t_1,t_2)=Cov[Y(t_1),Y(t_2)]$；宽平稳下$\gamma(k)=Cov[Y_t,Y_{t+k}]$
- 自相关系数（ACF）：$\rho(k)=\frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$，性质（对称性、规范性$|\rho(k)|\leq 1$、非负定性）

## 2.4 特殊随机过程与分解定理

- 纯随机序列（白噪声）：$WN(0,\sigma^2)$的定义、均值 / 方差 / 自协方差 / 自相关系数性质
- Wold 分解定理：平稳序列分解为确定性序列$V_t$与随机性序列$\xi_t$（白噪声线性组合）
- Cramer 分解定理：序列波动的确定性（多项式趋势）与随机性分解，差分提取确定性信息
- 延迟算子（B）：定义（$BY_t=Y_{t-1}$）、性质（线性、幂次）与差分表示（$\nabla=(1-B)$）

# 三、线性过程与 AR/MA/ARMA/ARIMA 模型（文档 2：ch05.pdf）

## 3.1 线性过程

- 定义：$Y_t=\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\varepsilon_{t-i}$（$\varepsilon_t$为白噪声，$\psi_0=1$）
- 平稳性条件：$\sum_{i=0}^{\infty}|\psi_i|<\infty$（或生成函数$\psi(z)$在$|z|>1$收敛）
- 可逆性条件：$\pi(B)Y_t=\varepsilon_t$中$\pi(z)$在$|z|>1$收敛

## 3.2 AR 模型（自回归模型）

- 定义：$AR(p)$模型$Y_t=\phi_0+\sum_{i=1}^p\phi_iY_{t-i}+\varepsilon_t$（中心化$\phi_0=0$），延迟算子表示$\Phi(B)Y_t=\varepsilon_t$
- 平稳性判别：
  - 特征根判别：特征方程$\lambda^p-\phi_1\lambda^{p-1}-\cdots-\phi_p=0$的根全在单位圆内
  - 平稳域：$AR(1)$（$|\phi_1|<1$）、$AR(2)$（$|\phi_2|<1,\phi_2\pm\phi_1<1$）
- 统计性质：均值$\mu=\frac{\phi_0}{1-\sum_{i=1}^p\phi_i}$、方差$\sigma_Y^2=\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{1-\sum_{i=1}^p\phi_i^2}$（AR (1)）、自相关函数拖尾、偏自相关函数 p 阶截尾

### 3.3 MA 模型（移动平均模型）

- 定义：MA(q)模型$Y_t=\mu+\varepsilon_t-\sum_{i=1}^q\theta_i\varepsilon_{t-i}$，延迟算子表示$Y_t=\Theta(B)\varepsilon_t$
- 可逆性条件：特征方程$\lambda^q-\theta_1\lambda^{q-1}-\cdots-\theta_q=0$的根全在单位圆内（或$\Theta(z)=0$根在单位圆外）
- 统计性质：均值$\mu$、方差$\sigma_Y^2=(1+\sum_{i=1}^q\theta_i^2)\sigma_{\varepsilon}^2$、自相关函数 q 阶截尾、偏自相关函数拖尾

### 3.4 ARMA 模型（自回归移动平均模型）

- 定义：ARMA(p,q)模型$\Phi(B)Y_t=\Theta(B)\varepsilon_t$，平稳性由 AR 部分决定，可逆性由 MA 部分决定
- 统计性质：均值$\mu=\frac{\phi_0}{1-\sum_{i=1}^p\phi_i}$、自相关 / 偏自相关函数均拖尾

### 3.5 ARIMA 模型（差分自回归移动平均模型）

- 定义：ARIMA(p,d,q)模型：$\Phi(B)\nabla^dY_t=\Theta(B)\varepsilon_t$（$\nabla^d$为 d 阶差分）
- 差分阶数 d 的意义：将非平稳序列转化为平稳序列（如随机游走ARIMA(0,1,0)）

### 3.6 模型预测

- 最优预测准则：最小化均方误差，最优预测为条件期望$\hat{Y}_{t+k|t}=E[Y_{t+k}|Y_t,Y_{t-1},\cdots]$
- 预测误差：$e_{t+k|t}=Y_{t+k}-\hat{Y}_{t+k|t}$，方差$\sigma_k^2=(1+\sum_{i=1}^{k-1}\psi_i^2)\sigma_{\varepsilon}^2$
- 递推预测：基于差分方程的递归公式（ARMA/ARIMA 模型）

## 四、时间序列模型的检验、拟合与拓展（文档 3：ch06.pdf）

### 4.1 模型定阶（确定 p,d,q）

差分阶数 d 的识别：ACF 衰减速度（慢则需差分）、过差分判断（引入不必要相关性）、单位根检验（KPSS）

- ARMA (p,q) 的 p,q 确定：ACF（MA (q) 截尾）、PACF（AR (p) 截尾）、样本 ACF/PACF 图分析

## 4.2 模型参数估计

- 矩估计：基于样本均值、自协方差估计参数（如 AR (p) 的 Yule-Walker 方程组）
- 最小二乘估计（LS）：AR(p)模型最小化残差平方和$S(\theta)=(Y-X\theta)^T(Y-X\theta)$，求解$\hat{\theta}=(X^TX)^{-1}X^TY$
- 极大似然估计（ML）：假设高斯过程，构造条件似然函数，优化参数使似然最大

## 4.3 模型选择准则

- AIC：$AIC_{p,q}=\frac{-2\ln L+2r}{n}\approx\ln(\hat{\sigma}_a^2)+\frac{2r}{n}$（r=p+q+1）
- AICc（修正 AIC）：$AICc=AIC+\frac{2r(r+2)}{n-(r+1)}$（小样本修正）
- BIC：$BIC=\ln(\hat{\sigma}_a^2)+\frac{r\ln n}{n}$（更惩罚多参数）

## 4.4 假设检验

- 纯随机检验（模型显著性）：
  - Box-Pierce 检验：$Q=n\sum_{k=1}^{\ell}r_k^2$
  - Ljung-Box 检验：$Q^*=n(n+2)\sum_{k=1}^{\ell}\frac{r_k^2}{n-k}$（更适小样本）
- 平稳性检验：
  - DF/ADF 检验：原假设存在单位根（非平稳）
  - KPSS 检验：原假设序列平稳

## 4.5 模型拓展

- 动态回归模型：结合线性回归与 ARIMA，$y_t=\beta_0+\sum_{i=1}^k\beta_ix_{i,t}+\eta_t$（$\eta_t$为 ARIMA 过程）
- 传递函数模型：$Y_t=\frac{\omega(B)}{\delta(B)}B^bX_t+\frac{\theta(B)}{\varphi(B)}\varepsilon_t$
- ARMAX 模型（带外生输入的 ARMA）：$\varphi(B)Y_t=\omega(B)X_{t-b}+\theta(B)\varepsilon_t$
-

干预模型：处理外部事件影响，$Y_t=\frac{\omega(B)}{\delta(B)}I_t+\frac{\theta(B)}{\phi(B)}\varepsilon_t$（$I_t$为干预变量）

- ARCH 模型：条件异方差，$\sigma_t^2=\alpha_0+\sum_{i=1}^s\alpha_i\eta_{t-i}^2$（$\eta_t=\sigma_t\varepsilon_t$）

# 五、季节性时间序列分析（文档 4：ch07.pdf）

## 5.1 时间序列因素分解

- 四大因素：长期趋势（T）、循环波动（C）、季节变化（S）、随机波动（I）
- 分解模型：
  - 加法模型：$Y_t=T_t+C_t+S_t+I_t$（趋势与季节振幅无关）
  - 乘法模型：$Y_t=T_t\times C_t\times S_t\times I_t$（趋势与季节振幅相关）

## 5.2 季节效应提取

- 加法模型季节指数：$S_j=\bar{y}_j-\bar{y}$（$\bar{y}_j$为季度均值，$\bar{y}$为总均值）
- 乘法模型季节指数：$S_j=\frac{\bar{y}_j}{\bar{y}}$

## 5.3 经典季节调整模型

- X11 模型：Henderson 加权移动平均（提取趋势）、Musgrave 非对称移动平均（补充边界）、多轮迭代分解
- SEATS：基于 ARIMA 的季节提取
- STL 分解（LOESS-based）：
  - 内循环：去趋势→周期子序列平滑→低通滤波→去趋势（季节成分）→去季节→趋势平滑
  - 外循环：计算鲁棒权重，修正异常值

## 5.4 季节性 ARIMA 模型（SARIMA）

- 定义：$SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_S$，包含非季节性（p,d,q）与季节性（P,D,Q,S）部分
- 模型形式：$\Phi(B^S)\phi(B)\nabla_S^D\nabla^dY_t=\Theta(B^S)\theta(B)\varepsilon_t$（$\nabla_S=1-B^S$为季节差分）

## 5.5 Prophet 方法

- 序列分解：$y(t)=g(t)+s(t)+h(t)+\epsilon_t$（g (t) 趋势、s (t) 周期、h (t) 假日效应）
- 趋势建模：逻辑增长模型$g(t)=\frac{C(t)}{1+\exp(-k(t-m))}$（含变化点）
- 周期建模：傅里叶级数$s(t)=\sum_{n=1}^N(a_n\cos(\frac{2\pi nt}{P})+b_n\sin(\frac{2\pi nt}{P}))$
- 假日建模：基于节假日列表构造虚拟变量$Z(t)$，$h(t)=Z(t)\kappa$

# 六、状态空间模型与机器学习预测（文档 5：ch08.pdf）

## 6.1 状态空间模型

- 定义：
  - 系统方程：$X_t=AX_{t-1}+Bu_{t-1}+e_{1,t}$（状态转移）
  - 观测方程：$Y_t=CX_t+e_{2,t}$（观测生成）
- 可观测性：$rank[C^T:(CA)^T:\cdots:(CA^{m-1})^T]=m$（m 为状态维度）

## 6.2 卡尔曼滤波

- 核心思想：基于观测更新状态估计，最小化均方误差
- 递推公式：
  - 预测：$\hat{X}_{t+1|t}=A\hat{X}_{t|t}+Bu_t$，$\sum_{t+1|t}^{xx}=A\sum_{t|t}^{xx}A^T+\sum_1$
  - 重构：$K_t=\sum_{t|t-1}^{xx}C^T(\sum_{t|t-1}^{yy})^{-1}$，$\hat{X}_{t|t}=\hat{X}_{t|t-1}+K_t(Y_t-C\hat{X}_{t|t-1})$

## 6.3 机器学习预测方法

- 回归模型：MLP、BNN、RBF、GRNN、KNN、CART、SVR、GP（性能对比：MLP 通常最优）
- 降维方法：PCA（多元时序降维为少数无关序列）、张量拓展（TensorCast）
- 集成学习：
  - Residual 集成：用二次网络学习一次模型残差
  - MOE（混合专家）：多模型加权集成

    - GBRT（XGBoost/LightGBM/CatBoost）：窗口化回归任务
- 多步预测策略：
    - 递归预测（Recursive）：用前一步预测值作为下一步输入
    - 直接预测（Direct）：为每个步长训练独立模型
    - 混合策略（DirREC）：结合递归与直接

## 6.4 竞赛实践（M5 竞赛）

- 数据特点：42840 个零售销售时序（分层结构）
- 核心方法：LightGBM 集成（按商店 / 品类 / 部门分组训练）、Tweedie 损失（处理零膨胀数据）

# 七、时间序列深度学习模型（文档 6：ch09.pdf）

## 7.1 序列模型（RNN/LSTM）

- RNN：定义$h_t=\tanh(W_{hh}h_{t-1}+W_{xh}x_t)$，缺点（梯度消失 / 爆炸）
- LSTM：通过输入门、遗忘门、输出门解决长程依赖，$c_t=f\odot c_{t-1}+i\odot g$，$h_t=o\odot\tanh(c_t)$
- DeepAR：基于 LSTM 的概率预测，假设高斯 / 负二项似然
- MQ-RNN：多 horizon 分位数预测，最小化分位数损失$L_q(y,\hat{y})=q(y-\hat{y})_++(1-q)(\hat{y}-y)_+$

## 7.2 卷积模型（TCN）

- 核心组件：因果卷积（无未来信息泄露）、膨胀卷积（扩大感受野）、残差连接
- 优势：并行计算、可变感受野、低内存

## 7.3 注意力模型（Transformer）

- 自注意力：$Attention(Q,K,V)=\text{softmax}(\frac{QK^T}{\sqrt{d_k}})V$，位置编码（正弦 / 余弦或可学习）
- 变体：
    - LogSparse：缓解内存瓶颈（$O(L\log L)$复杂度）

  - Informer：ProbSparse 自注意力，生成式解码
  - AutoFormer：基于自相关的分解 Transformer

## 7.4 其他深度学习模型

- N-BEATS：基于残差块的可解释模型，分解趋势（多项式）与季节（傅里叶）成分
- NHITS：分层插值，多尺度采样降低计算量
- LSTNet：结合 CNN（提取短期模式）与 RNN（长期依赖），AR 组件修正

## 7.5 混合与集成模型

- 混合模型（ES-RNN）：指数平滑（去季节趋势）+LSTM（预测）
- 模型集成（FFORMA）：元学习选择模型权重，基于时序特征（趋势强度、季节性等）
- 数据增强：时间域（裁剪、抖动）、频率域（傅里叶变换）、生成模型（GAN）

# 八、进阶线性模型与归一化（文档 7：ch10.pdf）

## 8.1 进阶线性模型

- DLinear：分解序列为趋势与残差，分别线性建模
- RLinear：RevIN+MLP + 通道独立（CI）策略
- TSMixer：全 MLP 架构，含时间混合与特征混合模块

## 8.2 归一化方法

- RevIN（可逆实例归一化）：$\hat{x}_{kt}^{(i)}=\gamma_k(\frac{x_{kt}^{(i)}-\mu_{kt}^{(i)}}{\sqrt{\sigma_{kt}^{(i)^2}+\epsilon}})+\beta_k$，预测后反归一化
- SAN（切片自适应归一化）：按切片统计量归一化，预测切片统计量
- SIN（选择性可解释归一化）：最大化局部不变性与全局变异性，基于 SVD 学习归一化参数

## 8.3 通道策略（CI vs CD）

- 通道依赖（CD）：多元预测多元，依赖通道间关联

- 通道独立（CI）：视为多个一元任务，缓解分布漂移，提升鲁棒性

### 8.4 Transformer 变体

- PathTST： patch 嵌入 + 通道独立 + Transformer，减少输入 token 数
- CrossFormer：维度分段嵌入（DSW），两阶段注意力（跨时间、跨维度）
- iTransformer：反转时序与通道维度，注意力作用于通道
- SOFTS：系列核心融合，线性复杂度（O(CL+CH)）

## 九、时序表示学习与通用模型（文档 8：ch11.pdf）

### 9.1 自监督时序表示学习

- Unsupervised Scalable：对比学习，拉近参考子序列与正子序列表示，拉远负子序列
- TS2Vec：时间对比损失（同时间戳不同视图为正）+ 实例对比损失（其他序列为负），支持分类 / 预测 / 异常检测
- CoST：解纠缠趋势与季节表示，时间域 + 频率域（振幅、相位）对比损失
- SimMTM：掩码时序建模，通过邻域聚合恢复掩码点，结合重构与对比损失

### 9.2 通用任务模型

- TimesNet：建模时序 2D 变化（ intra-period/inter-period），支持长短期预测、分类、异常检测
- Meta-Transformer：统一多模态输入（文本、图像、时序），映射到共享 token 空间，冻结编码器提取特征

### 9.3 通用预测模型

- 零样本预测：基于元学习，无需特定任务训练
- 少样本预测：利用相似序列信息，迁移学习

## 十、时间序列评价与预处理（文档 11：时间序列评价和预处理.pdf）

## 10.1 数据预处理

- 缺失值处理：插值（线性、样条）、模型预测（ARIMA）、删除（样本量充足）
- 异常值检测与处理：
  - 检测：$3\sigma$ 准则、IQR、LOF（局部离群因子）
  - 处理：替换（均值 / 中位数）、删除、修正（基于邻域）
- 数据转换：
  - Box-Cox 变换：$y^{(\lambda)}=\begin{cases}\frac{y^\lambda-1}{\lambda}&\lambda\neq0\\\ln y&\lambda=0\end{cases}$（稳定方差）
  - 归一化 / 标准化：Min-Max（$x'=\frac{x-x_{min}}{x_{max}-x_{min}}$）、Z-Score（$x'=\frac{x-\mu}{\sigma}$）

## 10.2 评价指标

- 误差指标：
  - MAE（平均绝对误差）：$MAE=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|y_i-\hat{y}_i|$
  - MSE（均方误差）：$MSE=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(y_i-\hat{y}_i)^2$
  - RMSE（均方根误差）：$RMSE=\sqrt{MSE}$
- 相对误差指标：
  - SMAPE（对称平均绝对百分比误差）：$SMAPE=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n\frac{|y_i-\hat{y}_i|}{|y_i|+|\hat{y}_i|}\times100\%$
  - MAPE（平均绝对百分比误差）：$MAPE=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{|y_i-\hat{y}_i|}{|y_i|}\times100\%$（避免 $y_i=0$）
- 综合指标：
  - OWA（总体权重误差）：综合多个指标的加权得分
  - MASE（平均绝对标度误差）：$MASE=\frac{MAE}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^n|y_i-y_{i-1}|}$（基准为朴素预测）

# 十一、时间序列基础预测方法（文档 12：时间序列的基础预测方法.pdf）

## 11.1 朴素预测方法

- 朴素预测：$\hat{y}_{t+k}=y_t$（无趋势无季节）
- 带漂移的朴素预测：$\hat{y}_{t+k}=y_t+k\times\frac{y_t-y_1}{t-1}$（线性趋势）
- 季节朴素预测：$\hat{y}_{t+k}=y_{t+k-S}$（S 为周期）

## 11.2 滑动平均预测

- 简单滑动平均（SMA）：$\hat{y}_{t+1}=\frac{y_t+y_{t-1}+\cdots+y_{t-m+1}}{m}$（m 为窗口）
- 加权滑动平均（WMA）：$\hat{y}_{t+1}=\frac{w_my_t+w_{m-1}y_{t-1}+\cdots+w_1y_{t-m+1}}{\sum_{i=1}^mw_i}$（近期权重高）

## 11.3 指数平滑预测

- 简单指数平滑（SES）：$S_t=\alpha y_t+(1-\alpha)S_{t-1}$，$\hat{y}_{t+k}=S_t$（无趋势无季节，$\alpha\in(0,1)$）
- Holt 线性趋势平滑：$S_t=\alpha y_t+(1-\alpha)(S_{t-1}+T_{t-1})$，$T_t=\beta(S_t-S_{t-1})+(1-\beta)T_{t-1}$，$\hat{y}_{t+k}=S_t+kT_t$（线性趋势）
- Holt-Winters 季节平滑：
  - 加法：$S_t=\alpha\frac{y_t}{I_{t-S}}+(1-\alpha)(S_{t-1}+T_{t-1})$，$T_t=\beta(S_t-S_{t-1})+(1-\beta)T_{t-1}$，$I_t=\gamma\frac{y_t}{S_t}+(1-\gamma)I_{t-S}$
  - 乘法：$S_t=\alpha(y_t-I_{t-S})+(1-\alpha)(S_{t-1}+T_{t-1})$，其余同加法

## 11.4 趋势外推预测

- 线性趋势：$\hat{y}_t=a+bt$（最小二乘估计 a,b）
- 指数趋势：$\hat{y}_t=ab^t$（对数转换为线性）
- 多项式趋势：$\hat{y}_t=a+bt+ct^2+\cdots+dt^p$（p 次多项式）

# 时间序列知识点分类（记忆 / 推导 / 实操）

# 一、绪论（文档 10）

## 记忆类

1. 时间序列的定义（观察值序列 / 随机序列）及关系
2. 时间序列的分类（单变量 / 多变量、平稳 / 非平稳、周期性 / 非周期性）
3. 时间序列分析的经典流程（数据预处理→模型识别→参数估计→模型检验→预测）
4. 典型应用场景（经济、金融、工业、环境）

## 推导类

无（绪论以概念为主）

## 实操类

1. 识别给定数据的时间序列类型（如判断是否含季节趋势）
2. 梳理具体问题的时间序列分析流程（如 GDP 数据的分析步骤）

# 二、时间序列的随机过程基础与平稳性（文档 1）

## 记忆类

1. 严平稳、宽平稳的定义及数学条件
2. 时间序列统计量（均值、自协方差、自相关系数）的定义及宽平稳下的性质
3. 白噪声序列（WN）的定义、均值 / 方差 / 自协方差 / 自相关系数性质
4. Wold 分解、Cramer 分解的核心结论（平稳序列的分解形式）
5. 延迟算子（B）的定义及性质（B^kY_t=Y_{t-k}、线性性）
6. 差分算子的定义（一阶\nabla=1-B、p 阶\nabla^p=(1-B)^p、季节差分\nabla_S=1-B^S）

## 推导类

1.

宽平稳序列自协方差函数的对称性（\gamma(k)=\gamma(-k)）、规范性（|\gamma(k)|\leq\gamma(0)）推导

2. 自相关系数性质（\rho(0)=1、|\rho(k)|\leq1）推导
3. Cramer 分解下 d 阶差分提取多项式趋势的推导（如\nabla^d\sum_{j=0}^d\beta_jt^j=c）
4. 延迟算子展开差分表达式（如\nabla^2Y_t=(1-2B+B^2)Y_t）

## 实操类

1. 计算给定平稳序列的样本均值、样本自协方差、样本自相关系数
2. 绘制自相关函数（ACF）图，判断序列是否为白噪声
3. 对非平稳序列（如含线性趋势）进行差分操作，观察平稳性变化

# 三、线性过程与 AR/MA/ARMA/ARIMA 模型（文档 2）

## 记忆类

1. 线性过程的定义及平稳性、可逆性的直观理解
2. AR (p)、MA (q)、ARMA (p,q)、ARIMA (p,d,q) 的定义及延迟算子表示
3. AR 模型平稳性的特征根判别法、平稳域（AR (1)：|\phi_1|<1；AR(2)：|\phi_2|<1,\phi_2\pm\phi_1<1）
4. MA 模型可逆性的定义及判别条件（特征根在单位圆内）
5. 各模型自相关函数（ACF）、偏自相关函数（PACF）的特征（AR (p)：PACF p 阶截尾、ACF 拖尾；MA (q)：ACF q 阶截尾、PACF 拖尾；ARMA (p,q)：均拖尾）
6. ARIMA 模型中差分阶数 d 的意义（将非平稳转为平稳）

## 推导类

1. AR (1) 模型的平稳性推导（特征根\lambda=\phi_1，需|\lambda|<1）
2. AR (1) 模型的均值（\mu=0，中心化）、方差（\sigma_Y^2=\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{1-\phi_1^2}）、自协方差（\gamma(k)=\phi_1^{|k|}\gamma(0)）、自相关系数（\rho(k)=\phi_1^{|k|}）推导
3. MA (1) 模型的均值（\mu）、方差（\sigma_Y^2=(1+\theta_1^2)\sigma_{\varepsilon}^2）、自相关系数（\rho(1)=\frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}，k>1时\rho(k)=0）推导

4. ARMA (1,1) 模型的自协方差函数推导
5. ARIMA 模型预测的条件期望（$\hat{Y}_{t+k|t}=E[Y_{t+k}|Y_t,Y_{t-1},\cdots]$）及预测误差方差推导

### 实操类

1. 用特征根判别法判断给定 AR (1)/AR (2) 模型的平稳性
2. 用 ACF/PACF 图确定 ARMA 模型的 p 和 q（如 ACF1 阶截尾→MA (1)）
3. 对非平稳序列（如随机游走）确定差分阶数 d，构建 ARIMA 模型
4. 计算 AR (1) 模型的 k 步预测值及预测误差方差

## 四、时间序列模型的检验、拟合与拓展（文档 3）

### 记忆类

1. 模型定阶方法：d 的识别（ACF 衰减速度、KPSS 检验）、p/q 的确定（ACF/PACF 特征）
2. 参数估计方法：矩估计、最小二乘（LS）、极大似然（ML）的适用场景
3. 模型选择准则：AIC、AICc、BIC 的公式及特点（AICc 小样本修正，BIC 更惩罚多参数）
4. 纯随机检验：Box-Pierce（Q 统计量）、Ljung-Box（Q * 统计量）的原假设与拒绝条件
5. 平稳性检验：DF/ADF（原假设非平稳）、KPSS（原假设平稳）的核心思想
6. 拓展模型：动态回归、ARMAX、干预模型、ARCH 的定义及适用场景

### 推导类

1. AR (p) 模型矩估计的 Yule-Walker 方程组推导（如 AR (2) 的$\rho_1=\phi_1+\phi_2\rho_1$，$\rho_2=\phi_1\rho_1+\phi_2$）
2. AR (p) 模型最小二乘估计的残差平方和最小化推导（$\hat{\theta}=(X^TX)^{-1}X^TY$）
3. ARMA 模型条件似然函数的构建推导（基于高斯假设）
4. Box-Pierce 统计量的渐近分布（$\chi^2(\ell-p-q)$）推导思路
5. ARCH 模型条件方差（$\sigma_t^2=\alpha_0+\sum_{i=1}^s\alpha_i\eta_{t-i}^2$）的平稳性条件（$\sum_{i=1}^s\alpha_i<1$）推导

## 实操类

1. 对给定序列计算样本 ACF/PACF，确定 ARMA (p,q) 的 p 和 q
2. 用矩估计 / 最小二乘估计 AR (1)/AR (2) 模型的参数
3. 计算 Box-Pierce/Ljung-Box 统计量，检验模型残差是否为白噪声
4. 用 ADF/KPSS 检验序列平稳性
5. 对含外生变量的序列（如销量 + 促销活动）构建动态回归模型

# 五、季节性时间序列分析（文档 4）

## 记忆类

1. 时间序列四大因素（趋势 T、循环 C、季节 S、随机 I）的定义
2. 加法 / 乘法分解模型的适用场景（加法：趋势与季节振幅无关；乘法：相关）
3. X11 模型的核心步骤（Henderson 移动平均、Musgrave 修正、多轮迭代）
4. STL 分解的内循环、外循环步骤及 LOESS 的作用
5. SARIMA 模型的定义（SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_S）及延迟算子表示
6. Prophet 方法的序列分解形式（y(t)=g(t)+s(t)+h(t)+\epsilon_t）及各成分建模方式

## 推导类

1. 加法模型季节指数（S_j=\bar{y}_j-\bar{y}）的计算推导
2. 乘法模型季节指数（S_j=\frac{\bar{y}_j}{\bar{y}}）的计算推导
3. STL 分解中 LOESS 局部回归的损失函数（加权最小二乘）推导思路
4. SARIMA 模型中季节差分（\nabla_S^D）提取季节趋势的推导

## 实操类

1. 对含季节趋势的序列（如月度销量）选择加法 / 乘法模型，提取季节指数
2. 用 X11/STL 分解工具（如 R 的`seasonal`包、Python 的`statsmodels`）分解序列

3. 构建 SARIMA 模型对季节性序列进行预测
4. 用 Prophet 工具（Python 的`prophet`库）预测含趋势、季节、假日效应的序列（如电商销量）

# 六、状态空间模型与机器学习预测（文档 5）

## 记忆类

1. 状态空间模型的系统方程、观测方程定义及各变量含义
2. 可观测性的定义及判别条件（秩条件）
3. 卡尔曼滤波的核心功能：状态重构、一步预测、多步预测
4. 常用机器学习预测模型（MLP、KNN、SVR、GP）的适用场景及特点
5. 集成学习方法（Residual、MOE、GBRT）的核心思想
6. 多步预测策略（递归、直接、DirREC）的优缺点

## 推导类

1. 卡尔曼滤波的预测递推公式（\hat{X}_{t+1|t}=A\hat{X}_{t|t}+Bu_t，\sum_{t+1|t}^{xx}=A\sum_{t|t}^{xx}A^T+\sum_1）推导
2. 卡尔曼滤波的状态重构公式（\hat{X}_{t|t}=\hat{X}_{t|t-1}+K_t(Y_t-C\hat{X}_{t|t-1})）及卡尔曼增益K_t推导
3. 线性回归模型（如 KNN）的距离度量（欧氏距离）及权重计算推导
4. GBRT 的梯度提升步骤（残差计算、弱学习器训练、权重更新）推导思路

## 实操类

1. 对简单系统（如自由落体）构建状态空间模型，写出系统 / 观测方程
2. 用卡尔曼滤波递推公式计算状态的预测值与重构值（如温度监测数据）
3. 用 Python 的`scikit-learn`实现 MLP/KNN/SVR 模型，对时序数据进行预测
4. 对比不同多步预测策略的预测误差（如对股价数据用递归 vs 直接预测）
5. 用 LightGBM 构建集成模型，处理多变量时序数据（如电力负荷预测）

# 七、时间序列深度学习模型（文档 6）

## 记忆类

1. RNN 的结构（隐藏状态更新公式）及梯度消失 / 爆炸问题
2. LSTM 的门结构（输入门、遗忘门、输出门）及状态更新公式
3. TCN 的核心组件（因果卷积、膨胀卷积、残差连接）及优势
4. Transformer 自注意力机制的公式及位置编码的作用
5. N-BEATS 的残差块结构及趋势 / 季节成分的建模方式
6. 混合模型（ES-RNN）、集成模型（FFORMA）的核心思想

## 推导类

1. RNN 隐藏状态的反向传播梯度计算（解释梯度消失原因）
2. LSTM 细胞状态$c_t=f\odot c_{t-1}+i\odot g$的推导（基于门控机制）
3. Transformer 自注意力权重（$\text{softmax}(\frac{QK^T}{\sqrt{d_k}})$）的推导
4. N-BEATS 趋势成分（多项式）、季节成分（傅里叶级数）的拟合推导
5. FFORMA 元学习权重的损失函数（$\min_w\sum_n\sum_mw(f_n)_mL_{nm}$）推导

## 实操类

1. 用 PyTorch/TensorFlow 实现简单 RNN/LSTM 模型，对时序数据（如气温）预测
2. 构建 TCN 模型，调整膨胀系数观察感受野变化
3. 用`transformers`库实现 Transformer 模型，处理长序列（如股票数据）
4. 用 N-BEATS 模型分解时序数据的趋势与季节成分
5. 实现 ES-RNN 混合模型，对比纯 ES、纯 LSTM 的预测效果

# 八、进阶线性模型与归一化（文档 7）

## 记忆类

1. DLinear、RLinear 的模型结构（分解趋势 / 残差、RevIN+MLP）
2. 归一化方法（RevIN、SAN、SIN）的核心思想及适用场景
3. 通道独立（CI）与通道依赖（CD）的定义及优缺点（CI 缓解分布漂移）
4. Transformer 变体（PathTST、CrossFormer、iTransformer）的核心改进

## 推导类

1. RevIN 的归一化与反归一化公式推导（保证可逆性）
2. SIN 的目标函数（最大化局部不变性$L_{loc}$与全局变异性$L_{glo}$）推导
3. CI 策略下线性模型的损失函数（$\mathcal{L}_{ci}=\|A_{ci}W_{ci}-B_{ci}\|_F^2$）推导
4. PathTST 的 patch 嵌入维度计算推导

## 实操类

1. 对给定序列用 DLinear 分解趋势与残差，分别建模预测
2. 实现 RevIN 归一化，对比归一化前后模型（如 MLP）的预测精度
3. 对比 CI 与 CD 策略在多变量时序预测（如电力数据）中的效果
4. 用 PathTST/iTransformer 模型处理长序列时序数据，计算预测误差

# 九、时序表示学习与通用模型（文档 8）

## 记忆类

1. 自监督时序表示学习方法（TS2Vec、CoST、SimMTM）的核心思想
2. TS2Vec 的时间对比损失、实例对比损失定义
3. CoST 的趋势 / 季节解纠缠表示及对比损失类型（时间域、频率域）
4. 通用模型（TimesNet、Meta-Transformer）的适用任务范围

## 推导类

1. TS2Vec 对比损失函数（$-\log\frac{\exp(r_{i,t}\cdot r_{i,t}')}{\sum_j(\exp(r_{i,t}\cdot r_{j,t}')+\mathbb{I}_{i\neq j}\exp(r_{i,t}\cdot r_{j,t}))}$）推导

2. CoST 频率域对比损失（振幅、相位）的计算推导
3. SimMTM 的重构损失与对比损失联合优化推导

## 实操类

1. 用 TS2Vec 预训练时序表示，用于下游任务（如分类、异常检测）
2. 用 CoST 解纠缠时序数据的趋势与季节成分，可视化表示空间
3. 用 TimesNet 模型处理多任务（预测 + 分类），评估通用性能
4. 用 Meta-Transformer 处理多模态数据（如时序 + 文本），提取共享特征

# 十、时间序列评价与预处理（文档 11）

## 记忆类

1. 缺失值处理方法（插值、模型预测、删除）的适用场景
2. 异常值检测方法（$3\sigma$、IQR、LOF）及处理方式（替换、删除、修正）
3. 数据转换方法（Box-Cox、归一化 / 标准化）的公式及作用
4. 评价指标（MAE、MSE、SMAPE、MAPE、OWA）的公式及特点

## 推导类

1. Box-Cox 变换的导数计算（验证 $\lambda=0$ 时为对数变换）
2. SMAPE 的对称性推导（\frac{2|y-\hat{y}|}{|y|+|\hat{y}|}对 y 和\hat{y}对称）
3. MASE 的基准误差（朴素预测误差）计算推导

## 实操类

1. 对含缺失值的时序数据（如气象数据）用线性插值 / ARIMA 预测填充
2. 用 $3\sigma$/IQR 方法检测时序数据中的异常值，并进行修正
3. 对异方差序列（如销量数据）进行 Box-Cox 变换，验证方差稳定性
4. 计算不同预测模型的 MAE、MSE、SMAPE，对比模型性能

# 十一、时间序列基础预测方法（文档 12）

## 记忆类

1. 朴素预测、带漂移的朴素预测、季节朴素预测的公式及适用场景
2. 简单滑动平均（SMA）、加权滑动平均（WMA）的计算方法
3. 指数平滑方法（SES、Holt、Holt-Winters）的递推公式
4. 趋势外推方法（线性、指数、多项式）的模型形式

## 推导类

1. 简单指数平滑（SES）的递推公式（$S_t=\alpha y_t+(1-\alpha)S_{t-1}$）推导（展开为历史数据加权和）
2. Holt 线性趋势平滑的趋势更新公式（$T_t=\beta(S_t-S_{t-1})+(1-\beta)T_{t-1}$）推导
3. 线性趋势外推的最小二乘估计（a、b 的计算）推导
4. 指数趋势外推的对数转换推导（将指数模型转为线性模型）

## 实操类

1. 对无趋势无季节序列用 SES 预测，调整 α 观察预测效果
2. 对含线性趋势的序列用 Holt 方法预测，计算预测误差
3. 对含季节趋势的序列用 Holt-Winters 方法（加法 / 乘法）预测
4. 对长期趋势序列（如人口数据）用线性 / 多项式趋势外推预测以上考纲及知识点分类完全覆盖 11 个文档的核心内容，兼顾概念理解、数学推导与实践应用，符合优秀高校课程要求；分类部分明确 “记忆 - 推导 - 实操” 层次，便于学生针对性学习。

> （注：文档部分内容可能由 AI 生成）