Grenzwerte

Aufgabe 1 (Differentenquotient):

Beispiel:

$$f(x) = (x-1)^3 + 3 \qquad \text{im Intervall} \quad [1;4]$$

Anstieg:

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} \\ &= \frac{((4-1)^3+3)-((1-1)^3+3)}{3} = \frac{((3)^3+3)-((0)^3+3)}{3} \\ &= \frac{(27+3)-(3)}{3} = \frac{27}{3} = 9 \end{aligned}$$

Antwort: Der Anstieg der Funktion f im Intervall $[1;4]$ beträgt 9.

(a)
$$f(x) = x^2 - 3 \qquad \text{im Intervall} \quad [0;3]$$

(b)
$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 7,5 \qquad \text{im Intervall} \quad [-1;1]$$

(c)
$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{im Intervall} \quad [4;6,25]$$

(d)
$$f(x) = \frac{x+3}{x-2} \qquad \text{im Intervall} \quad [3;4]$$

Aufgabe 2 (Differentialquotient):

Beispiel:

$$f(x) = x^2 - 2 \qquad \text{An der Stelle:} \quad x_0 = -2$$

Anstieg:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2 - 2 - ((-2)^2 - 2)}{h}$$

$$\overset{2.Binom.Formel}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(-2)^2 - 4h + h^2 - 2 - ((-2)^2 - 2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 2 - (4-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 2 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot (-4+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h} \cdot (-4+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} -4 + h = -4$$

Antwort: Der Anstieg der Funktion f an der Stelle -2 beträgt -4.

(a)

$$f(x) = x^2 + 3 \qquad \text{An der Stelle:} \quad x_0 = -4$$

(b)

$$f(x) = 2x^3 \qquad \text{An der Stelle:} \quad x_0 = 2$$

(c)

$$f(x) = 6x + 1 \qquad \text{An der Stelle:} \quad x_0 = x$$

(d)

$$f(x) = -4x^4 - 1 \qquad \text{An der Stelle:} \quad x_0 = 3$$

Aufgabe 3 (Stetigkeit/Unstetigkeit):

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Unstetigkeitsstelle: $x_0 = 0$, da $\implies \frac{1}{0} = \textit{undefiniert}$
Betrachtung der Unstetigkeitsstelle x_0:

- Linksseitig:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} \qquad \implies \text{Werte nah an 0 aber kleiner als 0 einsetzen}$$

$$\begin{aligned} f(-0.01) &= \frac{1}{-0.01} = -\frac{100}{1} = -100 && \text{Nah an 0} \\ f(-0.0001) &= \frac{1}{-0.0001} = -\frac{10000}{1} = -10000 && \text{Noch näher an 0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\implies \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

- Rechtsseitig:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} \qquad \implies \text{Werte nah an 0 aber größer als 0 einsetzen}$$

$$\begin{aligned} f(0.01) &= \frac{1}{0.01} = \frac{100}{1} = 100 && \text{Nah an 0} \\ f(0.0001) &= \frac{1}{0.0001} = \frac{10000}{1} = 10000 && \text{Noch näher an 0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\implies \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

Da beide Grenzwerte gegen + bzw $-\infty$ streben und $f(x_0) = \textit{undef}$, ist an der Stelle $x_0 = 0$ eine Polstelle.

Untersuche von den folgenden Funktionen die Definitionslücken (Stelle x_0, Art der Definitionslücke und ggf. Grenzwert). Alles ohne GTR/CAS

(a)

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

(b)

$$f(x) = \frac{2}{2-x}$$

(c)

$$f(x) = \frac{x^2-9}{3+x}$$

(d)

$$f(x) = \frac{3x}{|x|}$$

(e)

$$f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x-3}$$

(f)

$$f(x) = \frac{\frac{1}{3}x^2+2x+3}{x+3}$$

(g)

$$f(x) = \begin{cases} 3x+6, & \text{für} \quad x > -1 \\ x^2+2, & \text{für} \quad x < -1 \end{cases}$$

(h)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+2, & \text{für} \quad x < 2 \\ -x^2+4, & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$