Analytische Geometrie

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**

2 Lineare Gleichungssysteme **3**
- 2.1 Vorbetrachtungen . . . 4
- 2.2 Einsetzungsverfahren . . . 4
- 2.3 Gleichsetzungsverfahren . . . 5
- 2.4 Additionsverfahren . . . 6
- 2.5 Gauss-Algorithmus . . . 7

3 Vektorarithmetik **11**
- 3.1 Vektoren . . . 11
  - 3.1.1 Ortsvektoren . . . 12
- 3.2 Addition - Subtraktion . . . 12
  - 3.2.1 Konstruktion von Vektoren aus Punkten . . . 13
- 3.3 Multiplikation . . . 14
  - 3.3.1 Mittelpunkt der Strecke zwischen zwei Punkten . . . 16
- 3.4 Betrag . . . 17
- 3.5 Skalarmultiplikation . . . 19
- 3.6 Lineare Abhängigkeit . . . 20
- 3.7 Kreuzprodukt . . . 23
- 3.8 Geometrische Eigenschaften . . . 24

4 Geraden **26**
- 4.1 Konstruktion von Geraden . . . 27
  - 4.1.1 Gegeben Punkt und Richtung . . . 27
  - 4.1.2 Gegeben zwei Punkte . . . 27
- 4.2 Gegeben $f(x) = mx + n$ für $\mathbb{R}^2$ . . . 27
- 4.3 Lagebeziehung Punkt und Gerade . . . 28
  - 4.3.1 Liegt der Punkt P auf der Gerade? . . . 28
  - 4.3.2 Nächste Punkt auf der Geraden . . . 28
- 4.4 Lagebeziehungen zwischen Geraden und Geraden . . . 29
  - 4.4.1 Auf Schnittpunkt Prüfen . . . 29
  - 4.4.2 Auf Lineare Abhängigkeit prüfen . . . 30
  - 4.4.3 Schnittwinkel zwischen Geraden . . . 30
- 4.5 Aufgaben . . . 31

5 Ebenen **34**
- 5.1 Von Gerade zur Ebene . . . 34
- 5.2 Weitere Darstellungsformen . . . 37
  - 5.2.1 Koordinatenform . . . 38
  - 5.2.2 Hessische Normalform . . . 42
- 5.3 Umformen der Ebenendarstellungen . . . 43

5.3.1 Parameterform → Koordinatenform 43
5.3.2 Parameterform → Hessesche Normalform 44
5.3.3 Koordinatenform → Parameterform 45
5.3.4 Koordinatenform → Hessesche Normalform 45
5.3.5 Hessesche Normalform → Parameterform 46
5.3.6 Hessesche Normalform → Koordinatenform 46
5.4 Arbeiten mit Ebenen 48
5.4.1 Lagebeziehung Punkt - Ebene 48
5.4.2 Lagebeziehung Gerade - Ebene 50
5.4.3 Lagebeziehung Ebene - Ebene 55

1 Einführung

Viele Anwendungsfälle der Mathematik in der heutigen Welt sind geometrische Rechnungen im Mehrdimensionalen Raum. So werde diese in verschiedener Planungssoftware zur Konstruktion von so gut wie allen Dingen heutzutage eingesetzt. Für die Brückenplanung nutzt der Bauingeneur Auto-CAD, zum Planen der neuen Küche manche den IKEA-Küchenplaner und Vectary zum Planen von Drucken für den 3D-Drucker.
Die bisher gelernten Beschreibungsarten für Geometrie sind leider bisher noch nicht so mächtig wie wir sie gerne hätten. So versuche zum Beispiel Eine Gerade im 2 dimensionalen Raum, welche parallel zur y-Achse ist, zu beschreiben. Dies ist mit dem herkömmlichen $y = mx + n$ unmöglich. Gleichzeitig wollen wir nicht nur im 2-Dimensionalen, sondern auch n-Dimensionalen Raum arbeiten und dort zum Beispiel den Abstand von 2 diskreten Punken oder Objekten berechnen.

2 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme sind eines der meißtgenutzten Konzepte der Mathematik. Diese sind Teil der Lösungen verschiedener Probleme in der Mathematik und auch echten Welt. So zum Beispiel in Viedospielen, Computertomographie elektrische Spannungen in vermaschten Stromkreisen und das erstellen von CPU-Architekturen. Est ist eine einfache mathematische Version dessen was man im Allgemeinen als Deduktion bezeichnet. Dabei wird aus einer Grundmenge von Information neue Information hergeleite, welche mit der gegebenen konsistent ist, d.h. sich nicht gegenseitig ausschließt.

Lineare Gleichungssysteme bestehen dabei aus N Zeilen. Wir nennen diese meist $I, II, III, IV, \ldots$. Jede Zeile ist dabei eine Gleichung mit n linearen Variablen. Linear heißt dabei: keine Variable hat einen Exponenten ungleich 1.

$$\begin{aligned}
k_{1;1} \cdot x_1 + k_{1;2} \cdot x_2 + \ldots + k_{1;n} \cdot x_n &= d_1 && \text{(I)}\\
k_{2;1} \cdot x_1 + k_{2;2} \cdot x_2 + \ldots + k_{2;n} \cdot x_n &= d_2 && \text{(II)}\\
k_{3;1} \cdot x_1 + k_{3;2} \cdot x_2 + \ldots + k_{3;n} \cdot x_n &= d_3 && \text{(III)}\\
\vdots \qquad\qquad &\quad \vdots && \vdots\\
k_{N;1} \cdot x_1 + k_{N;2} \cdot x_2 + \ldots + k_{N;n} \cdot x_n &= d_N && \text{(N)}
\end{aligned}$$

mit $d_j,\ k_{j;i} \in \mathbb{R},$ für $i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, N$ und $x_1, \ldots, x_n$ Variablen

Dabei steht j für die Zeilennummer und i für die Nummer der zugehörigen Variable.

Ein kleines Beispiel zeigt dies etwas übersichtlicher:

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \qquad &\text{(I)}\\
2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -2 \qquad &\text{(II)}\\
-x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - x_3 &= 0 \qquad &\text{(III)}
\end{aligned}$$

Für bessere Übersichtlichkeit werden in den Aufgaben Variablen w, x, y, z verwendet werden, statt x_1, x_2, x_3, x_4.
Natürlich können solche Gleichungssysteme auch ander aussehen, lassen sich aber immer in diese Form transformieren.

2.1 Vorbetrachtungen

Wie bei allem in Mathe sollte man bevor man sich in die Rechenarbeit stürzt ein paar Vorüberlegungen zur Aufgabe machen um potentiell Rechenarbeit zu sparen und schon eine "Idee" vom Ergebnis zu haben.
Das Wichtigste dabei ist der Vergleich zwischen Anzahl der Variablen n und Anzahl der Gleichungen N. Dabei gilt:

- für $N < n$ gibt es definitiv keine eindeutige Lösung. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist unendlich groß und, das sei hier nur am Rande erwähnt, größer gleich $N - n$ dimensional.
- für $N \geq n$ kann es eine eindeutige Lösung geben, muss es aber nicht. Dies hängt davon ab, ob die Gleichungen linear unabhängig voneinander sind. Was das genau heißt ist hier nicht so wichtig, interessierte können dafür jedoch gerne mal im Internet stöbern oder darüber meditieren.
  Im Fall $N > n$ kann es auch eine leere Lösungsmenge geben $\mathbb{L} = \varnothing$, dann gibt es keine "richtige" Wahl der Variablen, also eine Wahl mit welcher alle Gleichungen wahr werden.

Nach dieser kleinen Vorbetrachtung schauen wir uns 4 verschiedene Arten an solche Gleichungssysteme zu lösen, dabei sollten die ersten Beiden bereits bekannt sein. Jedes Verfahren hat natürlich seine Vor- und Nachteile, aus meinser Sicht ist das Gauss-Jordan Verfahren der beste Allrounder, gerade für große Gleichungssysteme.

2.2 Einsetzungsverfahren

Das Einsetzungsverfahren ist relativ simpel. Es eignet sich hierbei gerade wenn das, am besten kleine, Gleichungssystem noch nicht richtig umgestellt wurde.
Dabei wird eine der Gleichungen nach einer Variable umgestellt. In eine andere Gleichung des Gleichungssystems kann man nun diese Variable ersetzen.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
9x - y \phantom{{}- 11} &= 41 \qquad &\text{(I)}\\
3x \phantom{{}-y} - 11 &= y \qquad &\text{(II)}
\end{aligned}$$

Einsetzen von (II) in (I):

$$\begin{aligned} 9x-(3x-11)&=41 && \\ 9x-3x+11&=41 && \mid -11 \\ 6x&=30 && \mid :6 \\ x&=5 && \text{Lösung in (II) einsetzen} \\ y&=3\cdot 5-11=4 && \end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{L}=\{(5\,|\,4)\}$$

Ich empfehle dieses Verfahren nur bei Gleichungssystem mit 2 Gleichungen zu nutzen, oder es mit einem der anderen zu paaren.

Aufgabe 2.2.1: (Finde die Lösungsmenge mittels Einsetzungsverfahren):

(a)
$$\begin{aligned} 3x \quad +4&=y && \text{(I)} \\ -3x+4y&=9 && \text{(II)} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x+4y-z&=13 && \text{(I)} \\ 3y+2z&=21 && \text{(II)} \\ 3z&=9 && \text{(III)} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x-3y+5z&=-2 && \text{(I)} \\ y+2z&=8 && \text{(II)} \\ y+z&=6 && \text{(III)} \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 3x-2y+2z&=6 && \text{(I)} \\ 2x\quad-z&=2 && \text{(II)} \\ -3x&=-6 && \text{(III)} \end{aligned}$$

2.3 Gleichsetzungsverfahren

Eine zum Einsetzungsverfahren ähnliche Methode. Hierbei wählt man 2 Gleichungen des Gleichungssystems aus, wobei diese eine Seite des "=" gemeinsam haben müssen, also dort steht das Gleiche. Dadurch können wir diese Gleichungen gleichsetzen. Oft muss man mindestens eine Gleichung umstellen um diese Ausgangssituation zu bekommen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x+6y&=9 && \text{(I)} \\ 3y+5&=\color{red}{x} && \text{(II)} \end{aligned}$$

Umstellen von (I) nach x

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad & x = 3 - 2y \\ \text{Gleichsetzen } (x): & \\ 5 + 3y &= 3 - 2y && |+2y, -5 \\ 5y &= -2 && |:5 \\ y &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Ergebnis in (II) einsetzen

$$x = 5 + 3y = 5 + 3 \cdot (-\frac{2}{5}) = \frac{25}{5} - \frac{6}{5} = \frac{19}{5}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{19}{5} \middle| -\frac{2}{5} \right) \right\}$$

Wie auch das vorherige Verfahren empfehle ich dieses eher bei kleinen Gleichungssystemen und wo sich das Gleichsetzen auch anbietet, also nicht zu viel umzustellen ist.

Aufgabe 2.3.1: (Finde die Lösungsmenge mittels Gleichsetzungsverfahren):

(a) $\begin{aligned} y &= 4x + 6 && \text{(I)} \\ y &= -2x + 3 && \text{(II)} \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} 3y &= 2x - 7 && \text{(I)} \\ 3y &= x - 3 && \text{(II)} \end{aligned}$

2.4 Additionsverfahren

Ein Verfahren auch für größere Gleichungssysteme geeignet ist das Additionsverfahren. Dabei werden ganze Gleichungen (Zeilen) miteinander addiert und subtrahiert, um eine bestimmte Variable zu eliminieren. Dabei können die Zeilen vor diesem schritt mit einem Koeffizienten multipliziert werden damit sicher eine Variable eliminiert werden kann. Eine solche Addition oder Subtraktion läuft dabei Komponentweise ab, d.h. werden die Koeffizienten, zugehörig zur gleichen Variable, miteinander addiert oder subtrahiert.

$$\begin{aligned} k_{i;1} \cdot x_1 + k_{i;2} \cdot x_2 + \ldots + k_{i;n} \cdot x_n &= d_i && \text{(i)} \\ k_{j;1} \cdot x_1 + k_{j;2} \cdot x_2 + \ldots + k_{j;n} \cdot x_n &= d_j && \text{(j)} \\ &\downarrow \\ (rk_{j;1} + tk_{i;1}) \cdot x_1 + \ldots + (rk_{j;n} + tk_{i;n}) \cdot x_n &= rd_j + td_i && r\text{(j)} + t\text{(i)} \end{aligned}$$

Um Variable x_1 zu eliminieren wählen wir r, t so :

$$r = \frac{kgV(k_{i;1}, k_{j;1})}{k_{j;1}} \qquad t = -\frac{kgV(k_{i;1}, k_{j;1})}{k_{i;1}}$$

Dadurch werden r, t so gewählt das der Koeffizient von x_1 0 ergibt. Und kgV steht hierbei für das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Zahlen.

Beispiel:

$$2x + 3y = 14 \quad \text{(I)}$$
$$1x + 2y = 8 \quad \text{(II)}$$

Wir wollen x eliminieren und da $2 \cdot 1 = 2$ müssen wir rechnen (I) $-2\cdot$(II)

$$\rightarrow \qquad -2x - 4y = -16 \qquad | -2 \cdot \text{(II)}$$

$$\text{(I)} - 2 \cdot \text{(II)} : \qquad (2-2)x + (3-4)y = (14-16)$$
$$0x - 1y = -2$$
$$-y = -2 \quad \Longrightarrow \quad y = 2$$

Ergebnis in (II) einsetzen

$$x + 2 \cdot (-2) = 8 \qquad | +4$$
$$x = 12$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{L} = \{(12 \,|\, -2)\}$$

Dieses Verfahren ist gut geeignet zum Lösen von großen Gleichungssystemen, da es übersichtlich bleibt. Da man sich aussuchen kann welche Variable eliminiert wird kann, bei cleverer herangehensweise selbst große systeme sehr schnell gelöst werden. Eine Veralgemeinerung des Verfahrens genannt Gauss Algorithmus nutzt eben dieses verfahren um mit einer festen Handlungsabfolge solche Gleichungssysteme $N = m$ zu lösen.

2.5 Gauss-Algorithmus

Der Gauß Algorithmus nutzt das Additionsverfahren und setzt dies ein um strukturiert die Variablen nacheinander zu eliminieren. Im ersten Schritt werden die x-Variablen mit Hilfe der ersten Gleichung aus den anderen Gleichungen eliminiert. Anschließend wird die y-Variable mit Hilfe der zweiten Gleichung aus den darunterliegenden Gleichungen eliminiert usw..

Beispiel:

$$x + y + 2z = 12 \quad \text{(I)}$$
$$3x - 2y - 5z = 7 \quad \text{(II)}$$
$$x + 2y - z = -3 \quad \text{(III)}$$

mit (II) $-3\cdot$(I) und (III) $-$ (I)

$$\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ 2z &= 12 && \text{(I)} \\ -5y-11z &= -29 && \text{(II)} \\ y-\ \ 3z &= -15 && \text{(III)} \end{aligned}$$

vertauschen der Zeile (II) und (III)

$$\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ 2z &= 12 && \text{(I)} \\ y-\ \ 3z &= -15 && \text{(II)} \\ -5y-11z &= -29 && \text{(III)} \end{aligned}$$

(III) $+5\cdot$(II)

$$\begin{aligned} x+y+\ \ 2z &= 12 && \text{(I)} \\ y-\ \ 3z &= -15 && \text{(II)} \\ -26z &= -104 && \text{(III)} \end{aligned}$$

$$\implies \quad z = \frac{-104}{-26} = \frac{104}{26} = 4$$

$$\begin{aligned} y-3z &= -15 && \mid \textit{Einsetzen} \\ y-3\cdot 4 &= -15 && \mid +12 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 12 && \mid \textit{Einsetzen} \\ x-3+2\cdot 4 &= 12 && \mid -5 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{L} = \{(7 \mid -3 \mid 4)\}$$

Ein kleiner Hinweis zur Notation: Um sich Schreibarbeit zu sparen kann man die Variablen weglassen und lediglich die Zahlen schreiben. Es folgt das selbe Beispiel in anderer Notation.

Beispiel:

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 3 & -2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right| \quad \begin{array}{ll} -3\cdot & -1\cdot \\ + & \\ & + \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -15 \\ 0 & -5 & -11 & -29 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \\ 5\cdot \\ + \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & -26 & -104 \end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow \qquad z = \frac{-104}{-26} = \frac{104}{26} = 4$$

$$\begin{aligned} y - 3z &= -15 && \mid \textit{Einsetzen} \\ y - 3 \cdot 4 &= -15 && \mid +12 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 12 && \mid \textit{Einsetzen} \\ x - 3 + 2 \cdot 4 &= 12 && \mid -5 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \{(7 \mid -3 \mid 4)\}$$

Aufgabe 2.6.2 (Finde die Lösungsmenge mittels Gauss-Verfahren):

(a)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 0 && \text{(I)} \\ y + z &= -1 && \text{(II)} \\ -x + 2y + 3z &= -5 && \text{(III)} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 && \text{(I)} \\ -2x + y - 6z &= 0 && \text{(II)} \\ x - 2z &= 3 && \text{(III)} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 4x + 9y + 5z &= 13 && \text{(I)} \\ -5x + 6y + 3z &= 17 && \text{(II)} \\ 6x + 3y - 10z &= 23 && \text{(III)} \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 2a + 3b - c + 5d &= 11 && \text{(I)} \\ b + 3c - d &= 1 && \text{(II)} \\ 4a - 2b - 2d &= 0 && \text{(III)} \\ a + b + c + d &= 4 && \text{(IV)} \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{3}{4}z &= 4 && \text{(I)} \\ \tfrac{3}{2}x - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{2}z &= -2 && \text{(II)} \\ y - \tfrac{1}{2}z &= 2 && \text{(III)} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.6.3 (Untersuche auf Lösbarkeit und gib die Lösungsmenge an):

(a)
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 6 \quad &(I)\\ 2x + y - z &= 2 \quad &(II)\\ 4x + 3y + z &= 8 \quad &(III) \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x + 5y - 2z &= 10 \quad &(I)\\ 2x + 8y - 5z &= 6 \quad &(II)\\ 4x + 2y + z &= 8 \quad &(III) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.6.4 (Löse die Textaufgaben mittels Gleichungssystem):

(a) Fünf Ochsen und zwei Schafe kosten acht Goldstücke, zwei Ochsen und acht Schafe kosten acht Goldstücke. Wie hoch ist der Preis für jedes einzelne Tier?

(b) In einem Käfig sind Hasen und Fasane. Sie haben zusammen 35 Köpfe und 94 Füße. Wie viele Hasen und Fasane sind im Käfig?

(c) In einem Jugendheim gibt es 18 Zimmer (Vierbett- und Sechsbettzimmer). Insgesamt können 84 Jugendliche untergebracht werden. Wie viele Vierbett- bzw. Sechsbettzimmer sind es?

(d) Zwei Tassen Kaffee und ein Stück Kuchen kosten 8,00 \$, drei Tassen Kaffee und vier Stück Kuchen kosten 20,00 \$. Berechnen Sie den Preis für eine Tasse Kaffee bzw. ein Stück Kuchen.

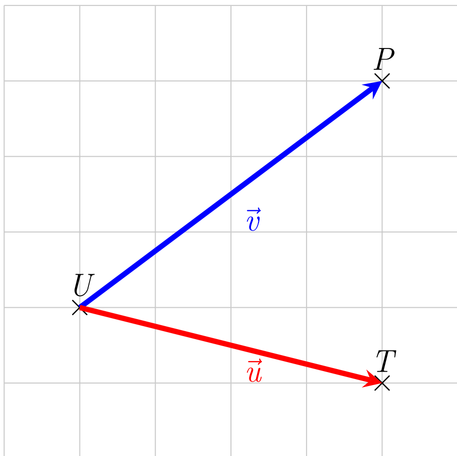
3 Vektorarithmetik

Bevor wir wieder zu Gleichungssystemen kommen müssen wir über ein neu einzuführendes Konzept reden. Dies ist ähnlich gegenüber dem ist was wir als Punkt kennen. Nach Pythagoras: "*Ein Punkt ist als Einheit (monas), die eine Position hat, zu verstehen.*" Die Einheit besitzt dabei keine Ausdehnung (Volumen).
Wenn wir nun von einem fest gewähltem Punkt U aus einen anderen Punkt P betrachten, können wir P auch beschreiben durch die Richtung und Entfernung die wir von U aus gehen müssen um zu P zu kommen.

3.1 Vektoren

Definition (Vektor):

Ein Vektor, geschrieben $\vec{v}$, wird beschrieben durch eine Richtung in die er zeigt und einer Länge. Man kann sich Vektoren bildlich wie Pfeile vorstellen. Die eigentliche Interpretation ist eine Verschiebung im Raum.



Je nachdem in wie vielen Dimensionen wir uns bewegen, oben 2 Dimensionen, werden Vektoren anders angegeben.
Ein Vektor im n-Dimensionalen Raum wird folgendermaßen angegeben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$$

Die Menge aller Vektoren einer Dimension n bezeichnen wir als Vektorraum: $\mathbb{R}^n$. Dabei beschreibt jede Koordinate x_i wie viele Längeneinheiten man für diesen Vektor in Richtung der Dimension i gehen muss. Für die Beispiele oben, wie viel wir in Richtung x-Achse und Richtung y-Achse gehen müssen.

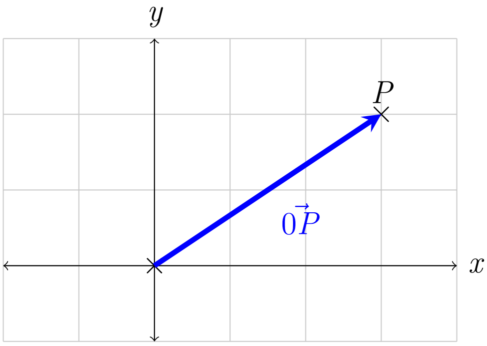
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.1.1 Ortsvektoren

Wie bereits angeschnitten hängen Punkte und Vektoren in gewisser Weise zusammen. Genauer gesagt hat jeder Punkt exakt einen assoziierten Vektor, genannt **Ortsvektor**.

Dieser ist gerade der Pfeil vom Koordinatenursprung zum gegebenem Punkt P. Wir schreiben $\vec{0P}$.

Explizit konstruiert wird dieser indem man die Koordinaten des Punktes einfach in den Vektor schreibt. Für $P(x_1 \,|\, x_2 \,|\, \ldots \,|\, x_n)$ ist der Ortsvektor



$$\vec{0P} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dieser Zusammenhang wird uns das Untersuchen von geometrischen Figuren, gegeben durch Punkte, ermöglichen. Jedoch müssen wir uns zu erst das Rechnen mit Vektoren und die damit zusammenhängende geometrische Bedeutung anschauen.

Beispiel:

Gegeben Punkt $P = (3, -1, 6)$. Ortsvektor : $\vec{0P} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

3.2 Addition - Subtraktion

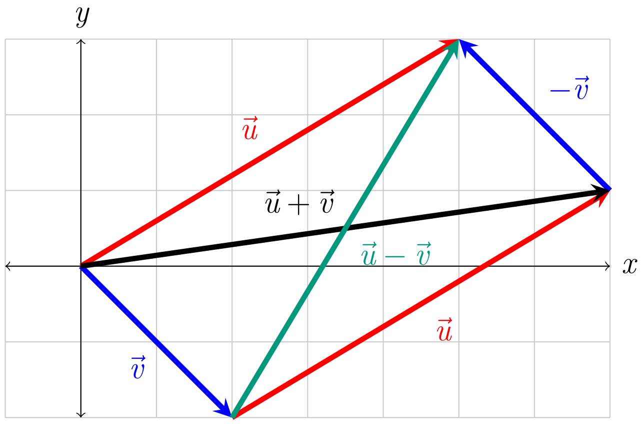
Um mit Vektoren zu rechnen müssen diese die gleiche Dimension aufweisen. Dabei hat diese Addition die gleichen Eigenschaften wie herkömmliche Addition (Distributivität, Kommutativität, Assoziativität, 0-Element). Die Addition und Subtraktion läuft dabei komponentweise ab. Das bedeutet:

Addition und Subtraktion:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \qquad \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ \vdots \\ u_n - v_n \end{pmatrix}$$

Geometrische Bedeutung:



Beispiel:

Gegeben Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2.0 (Addition und Subtraktion von Vektoren):

Berechne $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$. Was fällt dir dabei auf?

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

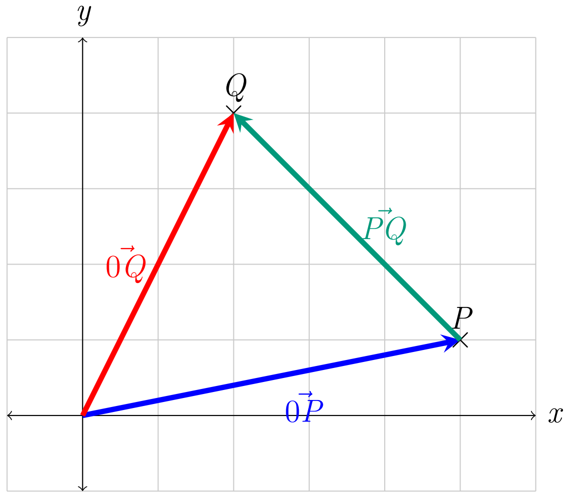
(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

3.2.1 Konstruktion von Vektoren aus Punkten

Mit diesem Werkzeug können wir nun auch die Anfängliche Motivation für Vektoren berechnen: Den Vektor zwischen 2 Punkten. Eine Betrachtung der Abbildung oben und der folgenden Abbildung sehen wir das:

$$\vec{PQ} = \vec{0Q} - \vec{0P}$$



Eine kleine Hilfe um sich die Formel oben zu merken ist es sie sich als Palindrom zu merken: "$PQQP$".
Einen Vektor zwischen Punkten zu bilden ermöglicht uns nun Geometrische Strukturen gegeben durch Punkte zu analysieren, indem wir die Vektoren zwischen ihnen analysieren. Dazu jedoch erst später mehr.

Aufgabe (Konstruktion von Vektoren aus gegebenen Punkten):

(a) Berechne den Vektor $\vec{QP}$
$P(5\,|-2\,|\,1),\ Q(-4\,|\,2\,|-2)$

(b) Berechne den Vektor $\vec{BC}$
$B(7\,|-1\,|\,0),\ C(0\,|-10\,|\,1)$

(c) Berechne den Vektor $\vec{CP}$
$P(0\,|\,0\,|\,0),\ C(1\,|\,0\,|\,0)$

(d) Berechne den Vektor $\vec{AQ}$
$Q(1\,|\,2\,|-1),\ A(-1\,|\,2\,|-1)$

(e) Berechne den Vektor $\vec{QA}$
$Q(3\,|-2),\ A(-1\,|-5)$

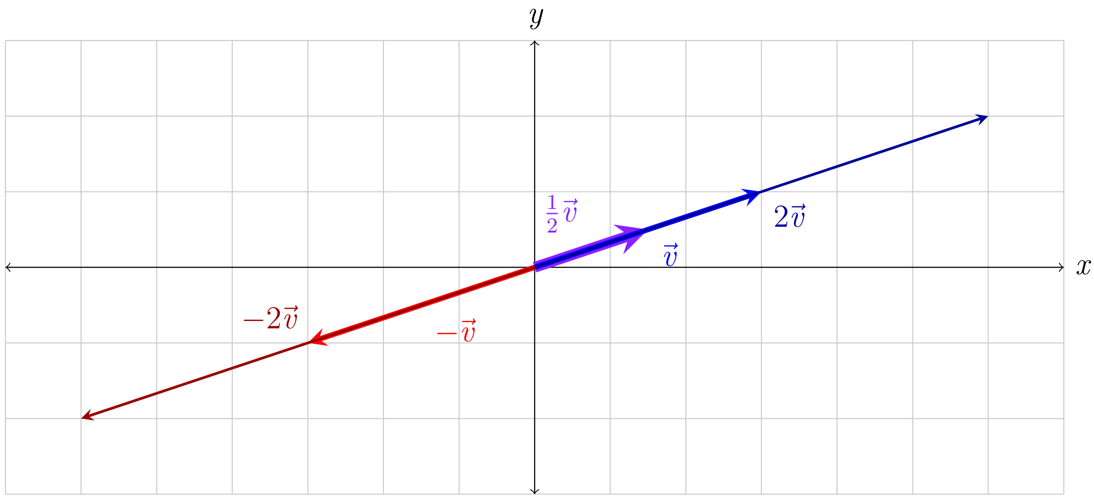
(f) Berechne den Vektor $\vec{RP}$
$P(4\,|\,2\,|-8),\ R(0\,|-4\,|-4)$

3.3 Multiplikation

Eine weitere Rechenoperation mit Vektoren ist die *Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar*. Skalar steht hierbei einfach für eine reelle Zahl. Die multiplikation läuft auch wieder komponentweise ab, so wird jeder Eintrag des Vektors mit diesem Skalar multipliziert.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R} \qquad c \cdot \vec{v} = c \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot v_1 \\ c \cdot v_2 \\ \vdots \\ c \cdot v_n \end{pmatrix}$$

Geometrisch bedeutet die Multiplikation mit einem Skalar gerade die Streckung ($c > 1$) oder Stauchung ($0 < c < 1$), oder Invertierung der Richtung ($c < 0$).



Aufgabe (Multiplikation mit einem Skalar) :

Berechne $\vec{a} \cdot c$

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \; c = 2$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \; c = 0,5$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; c = -\frac{1}{4}$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}, \; c = -3$

Aufgabe (Rückrechnung Multiplikation mit einem Skalar) :

Finde $\vec{b}$ so dass: $\vec{b} \cdot c = \vec{a}$

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; c = 0,5$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -27 \\ 9 \end{pmatrix}, \; c = -3$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}, \; c = \frac{1}{5}$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c = -1$

Aufgabe (Rückrechnung Multiplikation mit einem Skalar) :

Finde c so dass: $\vec{b} \cdot c = \vec{a}$

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -0,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 15 \\ 27 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,1 \\ -12 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -0,4 \\ 48 \end{pmatrix}$

3.3.1 Mittelpunkt der Strecke zwischen zwei Punkten

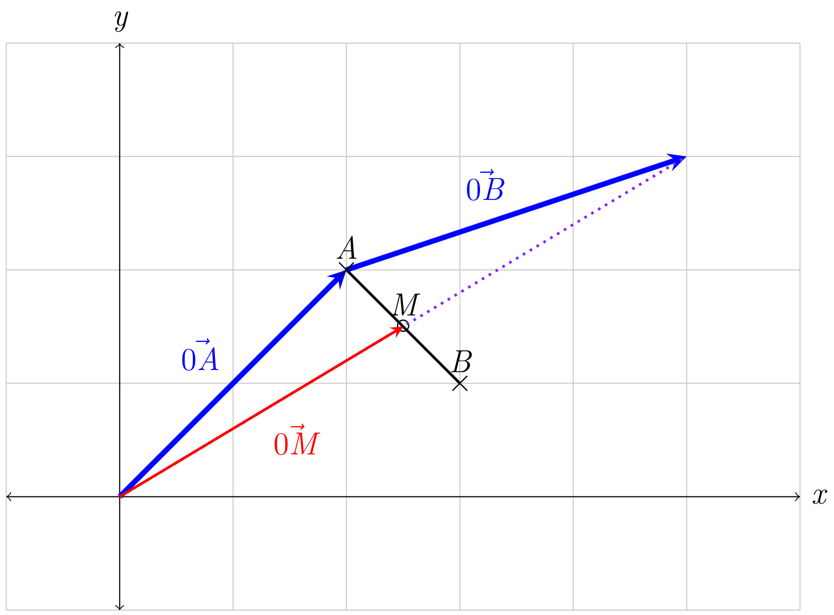
Auch die Frage nach dem Mittelpunkt einer Strecke zwischen 2 Punkten A und B können wir damit nun finden.

Definition (Mittelpunkt einer Strecke):

Seien A, B Punkte. Gesucht ist der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$.

Es gilt:

$$0\vec{M} = \frac{1}{2}\left(0\vec{A} + 0\vec{B}\right)$$



Wie in der Abbildung auch zu sehen ist, ist M eben der Mittelpunkt des von A und B aufgespannten Parallelogramms und damit auch der Mittelpunkt der beiden Diagonalstrecken.

Aufgabe (Finde den Mittelpunkt der Strecken):

(a) Berechne M
$P(3\,|-1\,|\,3)$, $Q(-3\,|\,3\,|-3)$

(b) Berechne M
$B(7\,|-2\,|\,0)$, $C(0\,|-1\,|\,10)$

(c) Berechne M
$P(0\,|\,0\,|\,0)$, $C(-2\,|\,|\,0)$

(d) Berechne M
$Q(1\,|\,1\,|-1)$, $A(-1\,|\,3\,|\,5)$

(e) Berechne M
$Q(5\,|-1)$, $A(-1\,|-5)$

(f) Berechne M
$P(4\,|\,2\,|-10)$, $R(0\,|\,4\,|-4)$

Aufgabe (Rückrechnung Mittelpunkt der Strecken):

Berechne den Punkt B sodass für $\overline{AB}$ der Mittelpunkt mit dem gegebenem übereinstimmt.

(a) $M(-2\,|\,1\,|\,4)$, $A(0\,|\,0\,|\,0)$

(b) $M(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(-8\,|\,4\,|\,1)$

(c) $M(-9\,|\,2\,|-2)$, $A(4\,|-4\,|\,6)$

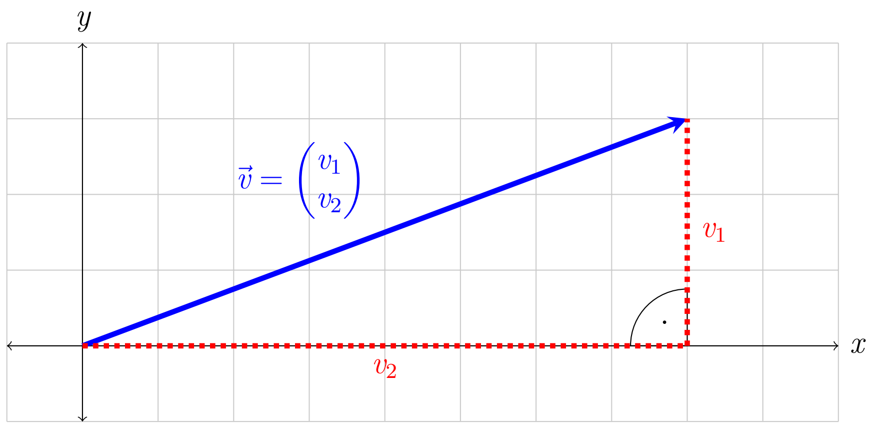
(d) $M(3\,|\,0\,|\,0)$, $A(-1\,|\,1\,|\,9)$

(e) $M(5\,|-4\,|\,2)$, $A(3\,|-2\,|\,8)$

(f) $M(-7\,|-1\,|\,7)$, $A(-4\,|-3\,|-5)$

3.4 Betrag

Jetzt, wo wir die Länge von Vektoren manipulieren können, wollen wir diese Länge nun auch berechnen. Man nennt die Länge dabei **Betrag**, geschrieben $|\vec{v}|$.
Für die Herleitung des Betrags ist es am einfachsten sich eine Skizze für einen Vektor in $\mathbb{R}^2$ anzuschauen.



Aus der Abbildung ist schnell zu entnehmen, dass die Länge aus dem Satz des Pythagoras berechnet werden kann, was ebenso auf n Dimensionen erweitert werden kann, indem man $n-1$ aufeinander aufbauende und rechtwinklige Dreiecke bildet.

Definition (Betrag):

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

Über den Betrag können wir jetzt viele geometrische Objekte validieren, indem wir die Vektoren zwischen ihren Punkten bilden. So müssen zu Beispiel 2 dieser Vektoren bei einem gleichschenkligen Dreieck gleich lang sein.
Es sollte auch klar sein, dass die Multiplikation mit einem Skalar folgendermaßen mit dem Betrag zusammen hängt.

Für $r \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$|r \cdot \vec{v}| = |r| \cdot |\vec{v}|$$

Denn wir verlängern, bzw verkürzen, den Vektor ja gerade um r.

Definition (Normalisierter Vektor):

Einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ nennen wir **normalisiert**, falls er genau die Länge 1 hat

$$|\vec{v}| = 1.$$

Wir können dabei jeden Vektor (außer den Nullvektor) **normalisieren** indem wir ihn durch seine eigene Länge Teilen

$$\vec{v_n} := \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Mit diesem Werkzeug kann man nun auch sehr einfach Längen berechnen, denn wenn ich zum Beispiel einen normalisierten Vektor $\vec{v_n}$ 5 mal aneinander setze erhalte ich gerade einen Vektor der Länge 5.

Aufgabe (Betrag berechnen):

Berechne den Abstand zwischen den 2 Punkten und normalisiere die Abstandsvektoren $\vec{AB}$:

(a) $A(4\,|-3\,|\,5)$, $B(2|\,8\,|\,6)$

(b) $A(1\,|-2\,|\,6)$, $B(3|\,1\,|-5)$

(c) $A(6\,|-3\,|-2)$, $B(4|\,8\,|-7)$

(d) $A(-7{,}5\,|\,12{,}3\,|\,9{,}6)$, $B(3{,}3|-4{,}8\,|\,6{,}2)$

Aufgabe (Betrag Rückrechnung) :

Berechne die Variable x so dass die Punkte den gegebenen Abstand (d) haben. (Tipp: p-q-Formel)

(a) $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(3|\,4\,|\,x)$, $d = 5$

(b) $A(-1\,|\,x\,|\,7)$, $B(0|\,8\,|\,-4)$, $d = 1$

(c) $A(-3\,|\,-1\,|\,6)$, $B(x|\,-3\,|\,2)$, $d = 2$

(d) $A(x|\,-3\,|\,1)$, $B(0|\,2\,|\,-3)$, $d = 4$

3.5 Skalarmultiplikation

Jetzt, da wir uns den Betrag von Vektoren anschauen können, wollen wir uns auch mit deren Richtung beschäftigen. Dafür sei das Skalarprodukt definiert als

Definition (Skalarprodukt):

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, dann ist das Skalarprodukt ($\circ$)

$$\vec{u} \circ \vec{v} = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + \ldots + v_n \cdot u_n$$

Dieses Skalarprodukt hat besondere Eigenschaften, denn es gilt:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}))$$

Daraus lässt sich nun eine Formel zur Berechnung des Winkels zwischen 2 Vektoren herleiten:

Definition (Winkel zwischen 2 Vektoren):

Sei $\vec{v}$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha = \sphericalangle(\vec{v}, \vec{u}) = cos^{-1}\left(\frac{\vec{v} \circ \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|}\right)$$

Aus der oberen Formel ist auch schnell zu sehen das für 2 rechtwinklige Vektoren gilt

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 0$$

Mit diesen Werkzeugen können wir nun auch Winkel an geometrischen Figuren untersuchen, schauen ob 2 Vektoren in die gleiche Richtung zeigen oder diese sehr schnell per Hand auf Rechtwinkligkeit prüfen.

Aufgabe (Winkel zwischen Vektoren):

Berechne den Winkel zwischen den gegebenen Vektoren.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe (Winkel zwischen Vektoren):

Welche Vektoren stehen senkrecht zueinander.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.6 Lineare Abhängigkeit

Eine weitere Methode um zu überprüfen ob 2 Vektoren in die gleiche Richtung zeigen ist zu überprüfen ob diese linear abhängig sind. Das heißt der eine Vektor kann als Vielfaches des anderen dargestellt werden.

Zwei Vektoren $\vec{v}$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig wenn es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt das folgende Gleichung erfüllt:

$$k \cdot \vec{v} = \vec{u}$$

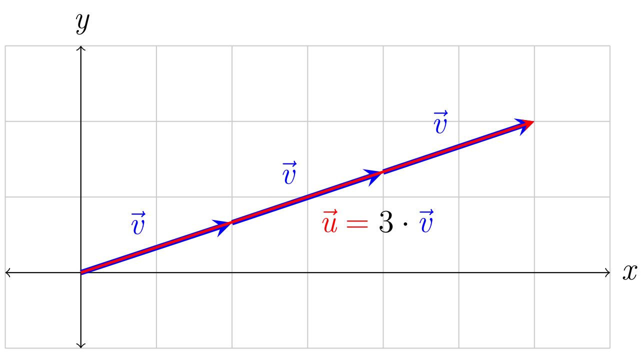
$$k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \\ \vdots \\ k \cdot v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot k &= u_1 && \text{(I)} \\ v_2 \cdot k &= u_2 && \text{(II)} \\ &\vdots && \vdots \\ v_n \cdot k &= u_n && \text{(n)} \end{aligned}$$

Falls die Lösungsmenge nicht leer ist gilt: $\vec{v}$, $\vec{u}$ sind linear abhängig



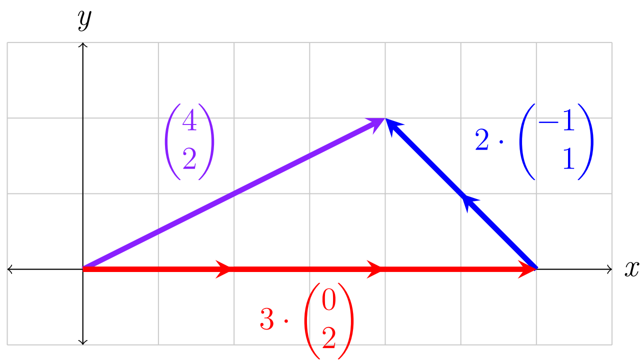
Natürlich ist es möglich die Frage der linearen Abhängigkeit auf beliebig viele Vektoren zu erweitern. Dabei beudeutet linear abhängig zu sein für mehr als 2 Vektoren, dass einer von ihnen als Linearekombination der anderen dargestellt werden kann.

Beispiel:

Seien $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Vektoren.

Wir können nun $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der anderen beiden darstellen:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Bevor wir definieren wie wir Lineare Abhängigkeit für mehr als 2 Vektoren nun genau ausrechnen sollte eine kleine Vorbemerkung gemacht werden.
Eine Menge von N Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist immer linear abhängig falls $N > n$. In solch einem Fall braucht man also nicht zu rechnen, sondern kann direkt die Antwort geben.

Definition (Lineare Abhängigkeit):

Eine Menge, oder auch System genannt, von N Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^n$: $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \ldots,\ \vec{v}_N \in \mathbb{R}^n$. Diese sind linear abhängig falls es $N-1$ Variablen gibt $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{N-1} \in \mathbb{R}$ sodass gilt:

$$k_1 \cdot \vec{v}_1 + k_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + k_{N-1} \cdot \vec{v}_{N-1} = \vec{v}_N$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \cdot v_{1_1} \\ k_1 \cdot v_{1_2} \\ \vdots \\ k_1 \cdot v_{1_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 \cdot v_{2_1} \\ k_2 \cdot v_{2_2} \\ \vdots \\ k_2 \cdot v_{2_n} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} k_{N-1} \cdot v_{(N-1)_1} \\ k_{N-1} \cdot v_{(N-1)_2} \\ \vdots \\ k_{N-1} \cdot v_{(N-1)_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{N_1} \\ v_{N_2} \\ \vdots \\ v_{N_n} \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} v_{1_1} \cdot k_1 + v_{2_1} \cdot k_2 + \ldots + v_{(N-1)_1} \cdot k_{N-1} &= v_{N_1} && \text{(I)} \\ v_{1_2} \cdot k_1 + v_{2_2} \cdot k_2 + \ldots + v_{(N-1)_2} \cdot k_{N-1} &= v_{N_2} && \text{(II)} \\ &\vdots && \vdots \\ v_{1_n} \cdot k_1 + v_{2_n} \cdot k_2 + \ldots + v_{(N-1)_n} \cdot k_{N-1} &= v_{N_n} && \text{(n)} \end{aligned}$$

Falls die Lösungsmenge nicht leer ist gilt:
$\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N$ sind linear abhängig

Gerade die Lineare Abhängigkeit wird erst wirklich wichtig wenn man zum Thema Geraden und Ebenen kommt, denn dort stützen sich die Lösungen vieler Aufgaben auf dieses Prinzip. Momentan wird uns dieses Prinzip nur helfen um Parallelität von

Vektoren zu überprüfen.

Aufgabe (Lineare Abhängigkeit zwischen 2 Vektoren) :

Überprüfe ob die beiden Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig sind.

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -30 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -18 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(f) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

Aufgabe (Lineare Abhängigkeit zwischen mehr als 2 Vektoren):

Überprüfe $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ auf lineare Unabhängigkeit.

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

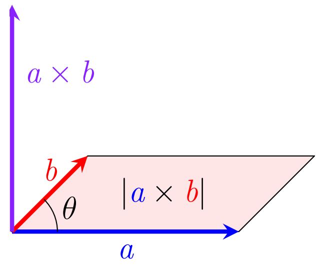
(b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3.7 Kreuzprodukt

Ein letzter Operator zwischen Vektoren ist das sogenannte Kreuzprodukt. Dieses ist hierbei nur für Vektoren in $\mathbb{R}^3$ definiert. Es ermöglicht eine einfache Berechnung eines Vektors, welcher rechtwinklig zu den beiden gegebenen Vektoren steht. Dabei entspricht die Länge jenes Vektors dem Flächeninhalt welches von den beiden Ausgangsvektoren aufgespannt wird.



Dabei berechnen wir das Kreuzprodukt folgender Maßen:

Definition (Kreuzprodukt):

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Auch das Kreuzprodukt ist jetzt noch nicht sehr interessant, wird aber auch beim Thema Ebenen wieder benutzt. Man kann es dabei auch für die Berechnung von Flächeninhalten von Dreiecken und Vierecken aufgespannt durch zwei Vektoren verwenden.

3.8 Geometrische Eigenschaften

Im folgenden zähle ich ein paar geometrische Eigenschaften auf, und Wege diese über analytische Geometrie zu verifizieren.

- **Länge** einer Strecke $\overline{AB} = l$:
$$l = \left| \vec{AB} \right|$$

- **Rechtwinkligkeit** von 2 Strecken $\overline{AB}, \overline{BC}$:
$$\overline{AB}, \overline{BC} \text{ sind rechtwinklig genau dann wenn } \vec{AB} \circ \vec{BC} = 0$$

- **Parallelität** von zwei Stecken $\overline{AB}, \overline{BC}$
  (i) $\overline{AB}, \overline{BC}$ sind parallel genau dann wenn
  $$\vec{AB}, \vec{BC} \text{ linear abhängig sind}$$
  (ii) $\overline{AB}, \overline{BC}$ sind parallel genau dann wenn
  $$\vec{AB} \circ \vec{BC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \quad \text{oder} \quad \vec{AB} \circ \vec{BC} = -|\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}|$$

Aufgabe (Vierecke):

Überprüfe ob das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm, eine Raute oder ein Trapez ist. Berechne den Flächeninhalt sollte es ein Parallelogramm sein.

(a) $A(2\,|\,5\,|-2)$, $B(5\,|\,2\,|\,1)$, $C(1\,|-2\,|-1)$, $D(-2\,|\,1\,|\,4)$

(b) $A(7\,|\,0\,|\,6)$, $B(3\,|-6\,|\,4)$, $C(7\,|\,5\,|-2)$, $D(5\,|\,2\,|-3)$

(c) $A(2\,|-3\,|-5)$, $B(0\,|-1\,|-2)$, $C(4\,|-2\,|-3)$, $D(-3\,|\,4\,|\,3)$

(d) $A(-3\,|\,2\,|\,7)$, $B(6\,|\,1\,|\,3)$, $C(2\,|\,4\,|-3)$, $D(-7\,|\,5\,|\,1)$

(e) $A(6\,|\,3\,|\,3)$, $B(5\,|\,5\,|-2)$, $C(3\,|\,6\,|\,3)$, $D(4\,|\,4\,|\,8)$

Aufgabe (Dreiecke):

Überprüfe ob das Dreieck ABC gleichseitig, gleichschenklig oder rechtwinklig ist. Gebe den Umfang und Flächeninhalt an.

(a) $A(3\,|\,7\,|\,2)$, $B(-1\,|\,5\,|\,1)$, $C(2\,|\,3\,|\,0)$

(b) $A(0\,|\,3\,|\,5)$, $B(0\,|\,9\,|\,5)$, $C(0\,|\,6\,|\,8)$

(c) $A(4\,|-1)$, $B(-2\,|-1)$, $C(1\,|\,1)$

(d) $A(-2\,|\,4\,|\,1)$, $B(1\,|\,7\,|\,4)$, $C(0\,|\,6\,|\,9)$

(e) $A(1\,|\,2)$, $B(-1\,|\,1)$, $C(2\,|-1)$

(f) $A(1\,|\,0\,|\,3)$, $B(3\,|-2\,|\,0)$, $C(2\,|-3\,|\,3)$

(g) $A(-5\,|\,2\,|-1)$, $B(0\,|\,5\,|-3)$, $C(-1\,|\,6\,|-3)$

(h) $A(3\,|\,2)$, $B(4\,|-1)$, $C(-1\,|\,1)$

4 Geraden

Mit unserem neu gewonnen Werkzeug, den Vektoren, können wir jetzt anfangen andere Geometrische Strukturen zu verallgemeinern und in dieser "Sprache" formulieren. Geraden wurden von uns, im 2 dimensionalen Fall, bereits in der 8. Klasse beschrieben. Dabei ist die Geradengleichung

$$y = mx + n$$

Daran können wir erkennen was eine Gerade ausmacht:

- Ein Punkt auf der Gerade (n), eben der Schnittpunkt mit der y-Achse
- Richtung in die sie verläuft (m), der Anstieg der Gerade

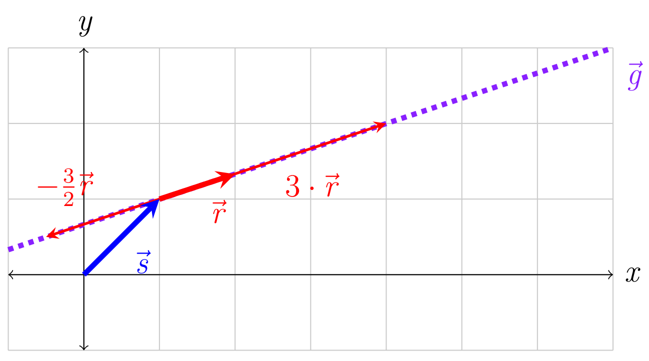
Diese beiden Eigenschaften können wir bereits mit Vektoren beschreiben. Wobei der Punk vom Stützvektor beschrieben wird, die Richtung von einer Variable als Skalar und einem Richtungsvektor.

Definition (Gerade):

Eine Gerade g im n-Dimensionalen Raum wird beschrieben durch den Stützvektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$ und dem Richtungsvektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ sowie einem Skalar als Variable t.

$$g: \quad \vec{x} = \vec{s} + t \cdot \vec{r}$$

$$g: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$



Wie auf dem Bild zu sehen kann je nach Wahl von t jeder Punkt auf der Gerade beschrieben werden. Es sollte nun auch klar sein woher die Namen "Stützvektor" und "Richtungsvektor" kommen.

Bemerkung:

Dabei steht unsere Gerade für ein Gleichungssystem mit n Zeilen:

$$\begin{aligned}x_1 &= s_1 + t \cdot r_1\\ x_2 &= s_2 + t \cdot r_2\\ &\vdots\\ x_n &= s_n + t \cdot r_n.\end{aligned}$$

4.1 Konstruktion von Geraden

Wie auch schon für $y = mx + n$ können wir solche Geraden anhand von gegebenen Eigenschaften Konstruieren. Solche Eigenschaften können zum Beispiel zwei gegebenen Punkte, welche auf der Gerade liegen sollen, sein. Seltener wird ein Punkt von der Gerade gegeben und ein Richtungsvektor in welche die Gerade verlaufen soll.

4.1.1 Gegeben Punkt und Richtung

Dies macht uns die Konstruktion besonders einfach. Sei P der gegebene Punkt, $\vec{r}$ der Richtungsvektor. Die Gerade g, welche durch P verläuft mit Richtung $\vec{r}$ wird so konstruiert:

$$g:\ \vec{x} = \overline{0P} + t \cdot \vec{r}$$

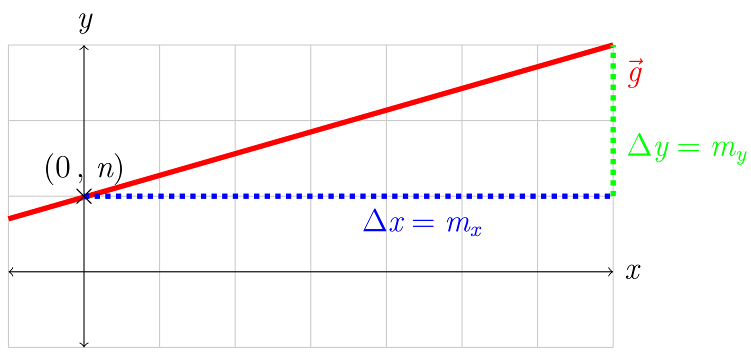
4.1.2 Gegeben zwei Punkte

Etwas schwieriger wird die Konstruktion mit lediglich 2 gegebenen Punkten.
Seien A, B gegebene Punkte, dann konstruieren wir g, indem wir einen der gegebenen Punkte als Stützvektor wählen und für den Richtungsvektor den Vektor, durch welchen wir von Punkt A zu Punkt B kommen, wählen.

$$g:\ \vec{x} = \overline{0A} + t \cdot \overline{AB}$$

4.2 Gegeben $f(x) = mx + n$ für $\mathbb{R}^2$

Sei $f(x) = mx + n$ (eine lineare Funktion) gegeben. Diese können wir nun in die neu gelernte Geradenform in $\mathbb{R}^2$ umwandeln. Wie immer brauchen wir einen Punkt durch welchen die Gerade verläuft und ihrer Richtung. Da n der Schnittpunkt der Gerade mit der y-Achse ist haben wir bereits den Stützvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix}$. Aus der Bruchdarstellung von $m = \frac{m_y}{m_x}$ können wir das Anstiegsdreieck entnehmen, welches dem Richtungsvektor entspricht $\vec{r} = \begin{pmatrix}m_x\\m_y\end{pmatrix}$



4.3 Lagebeziehung Punkt und Gerade

Für einen gegebenen Punkt P und Gerade g kann man entscheiden ob P auf g liegt. Sollte dies nicht der Fall sein ist es weiterhin möglich den Punkt Q auf g anzugeben, welcher am nächsten an P liegt.

4.3.1 Liegt der Punkt P auf der Gerade?

Gegeben sei Punkt $P(P_x, P_y, P_z)$ und Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$.

Um zu überprüfen ob P auf g liegt schaffen wir ein Gleichungssystem indem wir beides gleichsetzen.

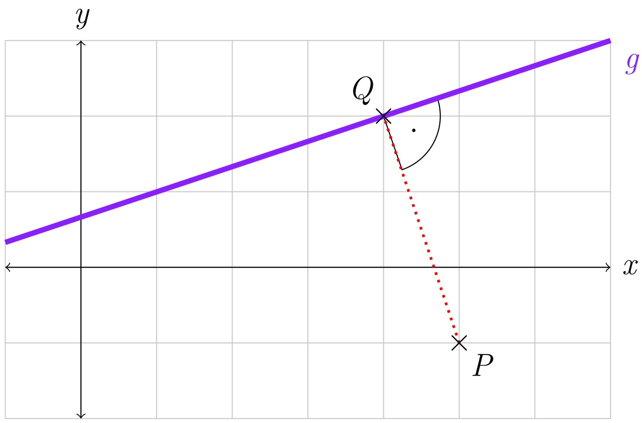
$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \qquad \Big| - \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - s_x \\ P_y - s_y \\ P_z - s_z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} t_x = \frac{P_x - s_x}{r_x} \\ t_y = \frac{P_y - s_y}{r_y} \\ t_z = \frac{P_z - s_z}{r_z} \end{bmatrix}$$

Falls nun $t_x = t_y = t_z$ gilt, mit anderen Worten die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht leer ist, dann liegt der Punkt auf der Geraden.
Gilt dies nicht, liegt der Punkt P auch nicht auf der Geraden g.

4.3.2 Nächste Punkt auf der Geraden

Wenn die Gerade den Punkt P nicht schneidet, gibt es auf ihr jedoch eine Stelle mit kleinsten Abstand zu dem Punkt.



Die Strecke zwischen diesem Punkt Q und P ist rechwinklig zur Geraden (dies folgt direkt aus der Dreiecksungleichung). Desshalb muss gelten für $g: \vec{x} = \vec{s} + k \cdot \vec{r}$:

$$(\vec{0P} - \vec{0Q}) \circ \vec{r} = 0$$
$$(\vec{0P} - (\vec{s} + k \cdot \vec{r})) \circ \vec{r} = 0$$

Diese Gleichung muss so lediglich nach k umgestellt werden und anschließend Q über die Geradengleichung berechnet werden. Der Abstand darauf folgend wie bereits bekannt aus dem Vektor zwischen P und Q.

4.4 Lagebeziehungen zwischen Geraden und Geraden

Auch kann die Lage zwischen zwei Geraden ermittelt werden, das heißt ob diese sich schneiden, parallel sind, windschief stehen oder aufeinander liegen.
Gegeben Geraden $g: \vec{x}_g = \vec{s}_g + t \cdot \vec{r}_g, \quad h: \vec{x}_h = \vec{s}_h + k \cdot \vec{r}_h$
Herangehensweise:

4.4.1 Auf Schnittpunkt Prüfen

Wie bei 2 Geraden der Form $y = mx + n$ müssen wir diese gleichsetzen, also:

$$\begin{aligned} \vec{s}_g + t \cdot \vec{r}_g &= \vec{s}_h + k \cdot \vec{r}_h && \Big| - \vec{s}_g,\ -k \cdot \vec{r}_h \\ t \cdot \vec{r}_g - k \cdot \vec{r}_h &= \vec{s}_h - \vec{s}_g \\ t \cdot \begin{pmatrix} r_{g_x} \\ r_{g_y} \\ r_{g_z} \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} r_{h_x} \\ r_{h_y} \\ r_{h_z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s_{h_x} - s_{g_x} \\ s_{h_y} - s_{g_y} \\ s_{h_z} - s_{g_z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} r_{g_x} \cdot t - r_{h_x} \cdot k &= s_{h_x} - s_{g_x} \\ r_{g_y} \cdot t - r_{h_y} \cdot k &= s_{h_y} - s_{g_y} \\ r_{g_z} \cdot t - r_{h_z} \cdot k &= s_{h_z} - s_{g_z} \end{aligned}$$

Dabei sind k, t die Variablen. Falls die Lösungsmenge des Gleichungssystems:

(I) $|L| = 0$ die Geraden schneiden sich nicht

(II) $|L| = 1$ die Geraden schneiden sich

(III) $|L| = \infty$ die Geraden liegen aufeinander

Für (I) ist nun noch zu prüfen ob die Geraden windschief oder parallel zueinander sind.

4.4.2 Auf Lineare Abhängigkeit prüfen

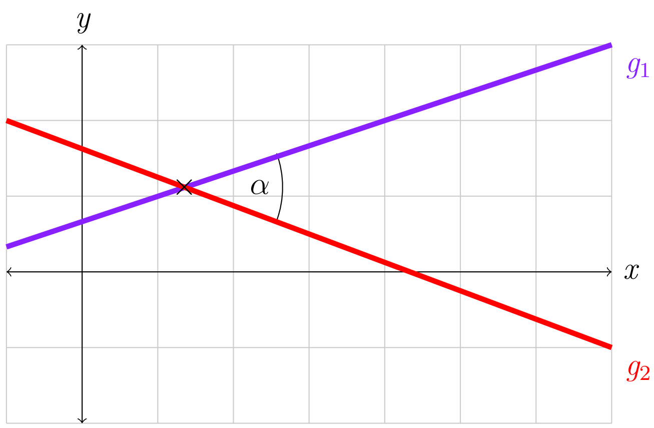
Gelte (I), nun ist lediglich die lineare Abhängigkeit zu prüfen, ein Synonym für Parallelität. Setzte die Richtungsvektoren der Geraden mit Hilfe einer Variable gleich:

$$\begin{pmatrix} r_{h_x} \\ r_{h_y} \\ r_{h_z} \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} r_{g_x} \\ r_{g_y} \\ r_{g_z} \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} t_x = r_{h_x} / r_{g_x} \\ t_y = r_{h_y} / r_{g_y} \\ t_z = r_{h_z} / r_{g_z} \end{bmatrix}$$

Falls $t_x = t_y = t_z$ sind die Richtungsvektoren linear abhängig und damit die beiden Geraden parallel.
Sonst sind die Geraden windschief.

4.4.3 Schnittwinkel zwischen Geraden

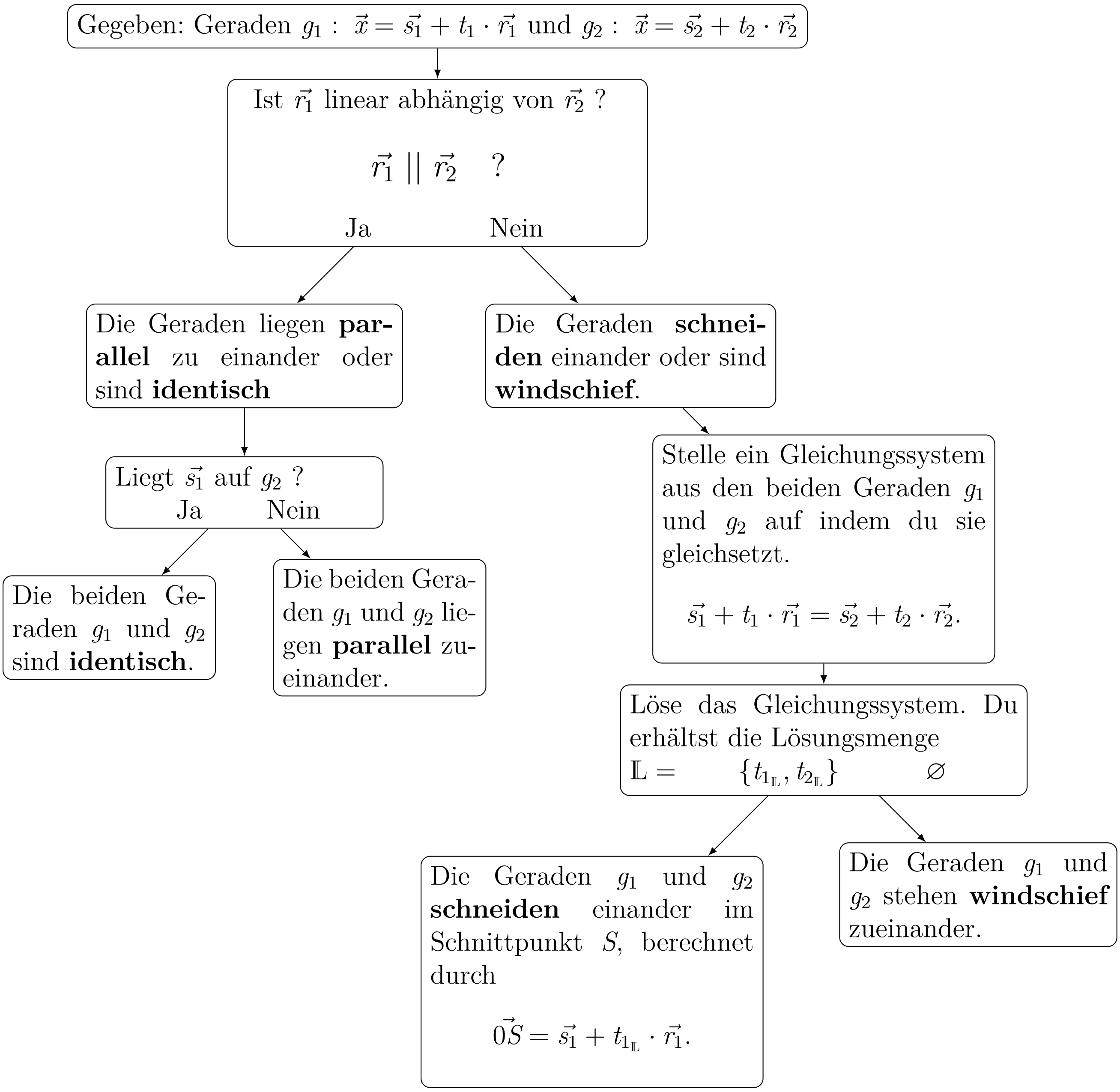
Sollten sich zwei Geraden g_1 und g_2 schneiden kann es sinnvoll sein ihren Schnittwinkel zu bestimmen. Dabei gehen wir sehr ähnlich zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren vor. Der Schnittwinkel zwischen zwei Geraden ist dabei der kleinste Winkel zwischen ihnen.



Definition (Schnittwinkel zwischen Geraden):

Seien g_1 und g_2 zwei sich schneidende Geraden mit den jeweiligen Richtungsvektoren r_1 und r_2. Für ihren **Schnittwinkel** α gilt dann

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{r_1} \circ \vec{r_2}|}{|\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_2}|} \quad .$$



4.5 Aufgaben

Aufgabe (Konstruktion gegeben 2 Punkte):

(a) $A = (2\,|\,5\,|\,8)$, $B = (1\,|\,2\,|\,9)$

(b) $A = (2\,|\,-5)$, $B = (2\,|\,10)$

(c) $A = (-12\,|\,2{,}5\,|\,3)$, $B = (5\,|\,-4{,}5\,|\,7)$

(d) $A = (0\,|\,0\,|\,-10)$, $B = (10\,|\,-6\,|\,4)$

(e) $A = (4\,|\,4\,|\,3)$, $B = (4\,|\,4\,|\,3)$

(f) $A = (2\,|\,-5\,|\,2)$, $B = (8\,|\,7\,|\,-4)$

Aufgabe (Lagebeziehung Punkt - Gerade):

(a) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = (3\,|\,4\,|\,-1)$

(b) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = (6\,|\,2\,|\,0)$

(c) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = (-5\,|\,2\,|\,-10)$

(d) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$P = (2\,|\,-1\,|\,9)$

(e) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$P = (0\,|\,2\,|\,-3)$

(f) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$P = (2\,|\,-1\,|\,3)$

Aufgabe (Lagebeziehung Gerade - Gerade):

Untersuche die Lagebeziehungen der gegebenen Geraden untereinander:

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

(c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

(e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = 3x_1 - x_2 = 2$

$i: \vec{x} = x_1 - x_2 = 0$

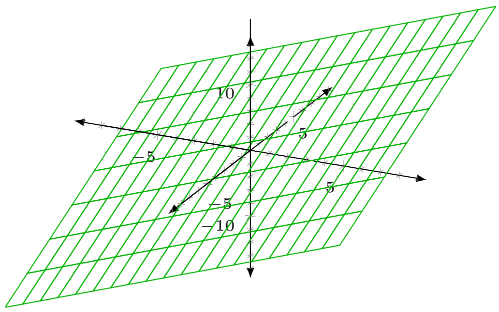
5 Ebenen

Wir haben bisher gesehen wie wir über Vektoren Geometrische Strukturen im n-dimensionalen Raum untersuchen können. Eine dieser Strukturen ist die Gerade, eine Einbettung der Zahlengerade in den Raum.

Bemerkung:

Man spricht hierbei auch von einem eindimensionalen (affinen) Unterraum. Affin bedeutet hierbei vom Ursprung verschoben, also mit einem Stützvektor $\neq \vec{0}$. Sollte unsere Gerade nämlich durch den Ursprung verlaufen (Stützvektor $= \vec{0}$) können wir zwei Punkte der Geraden Addiern und erhalten wiederum einen Punkt auf dieser Geraden. Die Punkte sind desshalb eindeutig durch ihren zugehörigen Koeffizienten des Richtungsvektors bestimmt.

Dieses Prinzip der Geraden können wir nun verallgemeinern. Statt eine eindimensionale Struktur wollen wir eine zweidimensionale Struktur schaffen: Eine Ebene. Diese können wir uns wie eine Fläche vorstellen die sich in alle Richtungen unendlich weit ausbreitet. Wir legen also unser bekanntes 2-Dimensionales Koordinatensystem einfach in einer beliebigen Ausrichtung und Verschiebung in den Raum.



Wir werden nun mehrere Darstellungsformen für Ebenen kennen lernen. Jede davon hat bestimmte Vor- und Nachteile, welche von ihrer Handhabung und Einfachheit für bestimmte Berechnungen kommen. Eine Zusammenfassung dieser erhaltet ihr nach der Einführung der verschiedenen Formen.

5.1 Von Gerade zur Ebene

Um von der Definition einer Geraden zu der der Ebene zu kommen müssen wir lediglich einen Schritt vollziehen: eine weitere Dimension bzw. Richtung hinzuzufügen. Also brauchen wir einen weiteren Richtungsvektor sowie eine zugehörigen Koeffizienten-Variable.

Definition Ebene (Parameterform):

Eine Ebene E im n-Dimensionalen Raum wird beschrieben durch den Stützvektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$ und die beiden voneinander linear unabhängigen Richtungsvektoren $\vec{r_1} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{r_2} \in \mathbb{R}^n$ sowie zwei Skalare als Variablen t_1 und t_2.

$$E: \quad \vec{x} = \vec{s} + t_1 \cdot \vec{r_1} + t_2 \cdot \vec{r_2}$$

$$E: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} r_{1_1} \\ r_{1_2} \\ \vdots \\ r_{1_n} \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} r_{2_1} \\ r_{2_2} \\ \vdots \\ r_{2_n} \end{pmatrix}$$

Wie stellen wir nun so eine Ebene auf, beziehungsweise welche Informationen brauchen wir um eine Ebene aufzustellen?
Diese Frage können wir uns selbst einfach durch die obige Darstellung beantworten. Nötig ist also wie für die Aufstellung der Gerade ein Punkt welcher auf der Ebene liegt, gerade der Stützvekor $\vec{s}$. Im Unterschied zur Gerade brauchen wir zusätzlich nun jedoch zwei Richtungen in welche sich die Ebene ausbreitet (statt einer bei der Geraden). Weshalb fordern wir jedoch die lineare Unabhängigkeit der Vektoren ? (Denke über diese Frage kurz nach).
Antwort: Da sich beide Richtungsvektoren also in gleiche Reichtung ausbreiten, kann sich unsere Ebene nicht in zwei Richtungen ausbreiten. Die verbleibende Richtung spannt damit also lediglich eine Gerade auf.

Genauer: Sollten die Richtungsvektoren linear abhängig sein gilt folgendes

$$r_1 = k \cdot r_2 \qquad \text{für ein festes } k \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Daraus folgt nun das unsere Ebenengleichung eine Gerade repräsentiert, denn

$$\begin{aligned} E: \qquad \vec{x} &= \vec{s} + t_1 \cdot \vec{r_1} + t_2 \cdot \vec{r_2} \\ &\overset{(*)}{=} \vec{s} + t_1 \cdot (k \cdot r_2) + t_2 \cdot \vec{r_2} \\ &= \vec{s} + (t_1 \cdot k + t_2) \cdot \vec{r_2}. \end{aligned}$$

Wir sehen also wir brauchen wirklich diese drei Eigenschaften

- Punkt auf der Geraden
- Erste Ausbreitungsrichtung
- Zweite Ausbreitungrichtung (linear unabhängig zur Ersten)

Damit können wir also aus verschiedenen gegebenen Komponenten eine Ebene konstruieren. Beispielhaft

- Gegeben: Zwei (lin. unabh.) Richtungsvektoren r_1 und r_2 und einen Startpunkt P.

  Damit ist uns die Ebene direkt gegeben. Wir müssen sie lediglich in unsere Gleichung packen

  $$E: \quad \vec{x} = \vec{0P} + t_1 \cdot r_1 + t_2 \cdot r_2.$$

- Gegeben: Drei verschiedene Punkte P_1, P_2, P_3 welche nicht auf eine Linie liegen (warum?).

  Hier gehen wir wie bei der Gerade vor. Wir wählen einen Punkt als Stützvektor und benutzen die anderen beiden Punkte zum Aufstellen der Richtungsvektoren.

$$E: \qquad \vec{x} = 0\vec{P}_1 + t_1 \cdot (P_1 \vec{-} P_2) + t_2 \cdot (P_1 \vec{-} P_3).$$

- Gegeben: Zwei Geraden g_1 und g_2 welche sich im Punkt S schneiden.

  Wir können hier die beiden Geraden ganz einfach kombinieren. Sei dafür r_1 und r_2 die Richtungsvektoren der jeweiligen g_1 und g_2. Wir erhalten die Ebene

$$E: \qquad \vec{x} = 0\vec{S} + t_1 \cdot r_1 + t_2 \cdot r_2.$$

- Gegeben: Eine Gerade g und ein Richtungsvektor r_2, welcher linear unabhängig zu g ist.

  Auch hier ist das Aufstellen relativ simpel: Wir fügen unserer Geradengleichung einfach den zusätzlichen Richtungsvektor hinzu.

$$E: \qquad \underbrace{\vec{x} = \vec{s} + t_1 \cdot \vec{r_1}}_{=g} + t_2 \cdot \vec{r_2}.$$

Aufgabe (Aufstellen von Ebenen):

Stelle die Ebene (Parameterform) aus den gegebenen Parametern auf

(a) Gegeben seien $P_1\,(-1; 2; 0)\,, P_2\,(3; -5; 3)\,, P_3\,(4; 0; -1)$

(b) Gegeben seien die Geraden g_1 und g_2 mit

$$g_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Gegeben seien $P_1\,(0; 0; 0)\,, P_2\,(-1; -1; 1)\,, P_3\,(1; 1; 1)$

(d) Gegeben seien die Geraden g_1 und g_2 mit

$$g_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$g_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(e) Gegeben seien $P_1\,(1;0;0)\,, P_2\,(1;0;0)\,, P_3\,(0;0;1)$

(f) Gegeben seien $P_1\,(8;-4;2)\,, P_2\,(-2;1;5)\,, P_3\,(2;-1;10)$

(g) Gegeben seien die Gerade g und der Richtungsvektor $\vec{r_2}$ mit

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$\vec{r_2} \quad = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

5.2 Weitere Darstellungsformen

Wir kennen bereits für Geraden verschiedene Darstellungsformen, so zum Beispiel unsere Parameterform und die klassische Geradengleichung aus der 10. Klasse $y = mx + n$. Auch für Ebenen gibt es solche Darstellungsformen. Eine bereits uns bekannte Eigenschaft können wir uns hierbei zu nutze machen:
Wir erhalten für ein Gleichungssystem mit n Variablen und m Zeilen/Gleichungen (linear unabhängig voneinander)

$$\text{Ein Objekt der Dimension} \qquad n - m.$$

Also für eine Ebene brauchen wir 2 Variablen mehr als die Anzahl der Zeilen und für eine Gerade brauchen wir 1 Variable mehr als die Anzahl der Zeilen. Vergleich dies mit der klassischen Geradengleichung der 10. Klasse. Ihr könnt so immer überprüfen mit welcher Struktur ihr es in einer Aufgabe zu tun habt indem ihr dies überprüft. Versucht es anhand der bisherigen Gleichungen für Ebenen und Geraden. Als Hinweis ist zu sagen, dass Gleichungen mit Vektoren der Dimension d als ein Gleichungssystem mit d Gleichungen betrachtet werden sollten (Siehe Bemerkung Kapitel 4).

Wie viel Variablen müssen also in einer einzeiligen Gleichung sein damit wir eine Ebene beschreiben?

5.2.1 Koordinatenform

Dieser Gedankengang bringt uns zu zu einer weiteren Darstellungsform der Ebene

Definition Koordinatenform:

Die Koordinatenform eine Ebene ist gegeben durch 4 feste Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

und die Variablen $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$E: \quad ax + by + cz = d.$$

Beispiel:

$$E_1: \quad -2x + 3y - 4z = 10.$$
$$E_2: \quad x - 2y + 0 \cdot z = 0.$$
$$E_3: x - 2y = 0.$$

Wir sehen hier also eine Gleichung mit 3 Variablen. Also hat unser Objekt die Dimension $3 - 1 = 2: \quad$ Eine Ebene.

Bemerkung:

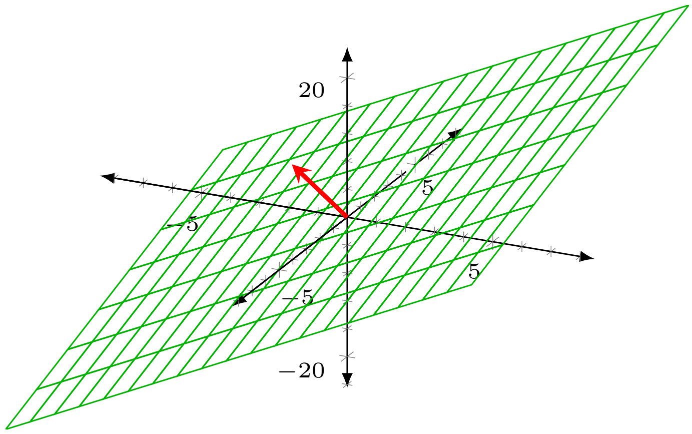
Der aufmerksame Leser erkennt, dass E_2 und E_3 identisch sind, auch wenn das Vorkommen vom z in E_3 nicht gleich ersichtlich ist. Die Variablen x, y, z stehen hier gerade für die Punktkoordinaten im 3-Dimensionalen Raum. Dies führt dazu, dass es für Geraden im 3-dimensionalen Raum keine solche Darstellung gibt (In 2-D funktioniert dies aber: Warum?)!

Diese Darstellungsform kommt nun mit einem großen Vorteil: Wir können sehr einfach überprüfen ob ein Punkt auf dieser Ebene liegt. Dies funktioniert genauso wie wenn wir wissen wollen ob ein Punkt auf einer Gerade der Form $y = mx + n$ liegt. Wir setzen hier lediglich die x-Koordinate und y-Koordinate des Punktes für jeweils x bzw. y in unserer Gleichung ein. Falls wir hierbei eine Wahre Aussage (z.B. $3 = 3$) erhalten liegt der Punkt auf unserer Geraden. Falls nicht, liegt dieser Punkt nicht auf der Geraden.
Für unsere neue Darstellungsform, der Koordinatenform, können wir nun ebenso vorgehen. Wir setzen die x, y, z-Koordinaten des Punktes P für x, y, z in unserer Gleichung ein. Auch hier liegt der Punkt auf der Ebene falls wir eine wahre Aussage erhalten.
Wie sollen wir jedoch diese Gleichung interpretieren? Zum Vergleich hierzu steht unsere Parameterform der Ebene gerade für die beiden Ausbreitungsrichtungen der Ebene und eine Verschiebung um den Stützvektor.
Um diese Frage zu beantworten betrachten wir für den Anfang Ebenen mit $d := 0$.

Ein schnelles Nachrechnen ergibt, dass der Punkt $\mathbf{0}\,(0;0;0)$ auf unserer Ebene liegt. Wir erhalten die Gleichung

$$0 = ax + by + cz = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Wobei $\circ$ für das Skalarprodukt steht. Wir erkennen, dass ein Punkt auf der Ebene liegt, falls er rechtwinklig zu diesem Vektor $\vec{n} := \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ steht. Wir nennen dies den **Normalenvektor** $\vec{n}$ der Ebene und dieser steht gerade senkrecht auf ihr. Wir können uns das wie einen Fahnenmast (entspricht $\vec{n}$) auf einem großen Platz (entspricht E) vorstellen: Egal von welcher Seite ich das Geodreieck zwischen Mast und Platz ansetze, wir erhalten immer 90°. Eine Skizze dazu:



Was gilt nun jedoch für $d \neq 0$? Hier wird die Ebene offensichtilich verschoben, denn das einsetzen des Koordinatenursprungs $\vec{0}$ ergibt eine falsche Aussage. Aber wohin wird die Ebene nun verschoben? Ein Hinweis auf die Verschiebung gibt sicherlich unserer geänderter Parameter d und unser neu entdeckter Normalenvektor. Wir werden sehen, dass diese Idee die Richtige ist und wir die Ebene in Richtung des Normalenvektors um den Faktor d verschieben. Genauer gilt

$$d \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}\,|^2} \in E.$$

Wir müssen den Normalenvektor um den Faktor $\frac{d}{|\vec{n}\,|^2}$ strecken um zur Ebene zu gelangen. Ein kurzes Nachrechnen durch einsetzen des Vektors $d \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}\,|^2}$ bestätigt dies

$$\begin{aligned} E: \quad ax + by + cz &= d \\ a \cdot \frac{d \cdot a}{|\vec{n}\,|^2} + b \cdot \frac{d \cdot b}{|\vec{n}\,|^2} + c \cdot \frac{d \cdot c}{|\vec{n}\,|^2} &= d \\ d\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{|\vec{n}\,|^2}\right) &= d \\ d\left(\frac{|\vec{n}\,|^2}{|\vec{n}\,|^2}\right) &= d \\ d &= d. \end{aligned}$$

Wenn nun noch zusätzlich $\vec{n}$ normalisiert (Siehe 3.4) ist vereinfacht sich unsere Formel erheblich. Nun wird die Ebene gerade um $d \cdot \vec{n}$ verschoben. Das können wir auch immer erreichen. Zur Errinnerung: Wir haben es hier mit einfachen Gleichung zu tun, können also Äquivalenzumformungen vornehmen um die Gleichung an sich zu ändern, ohne das sich die von ihr repräsentierte Ebene ändert. Wir teilen also die gesammte Gleichung einfach durch die Länge des Vektors $\vec{n}$.

$$ax + by + cz = d \qquad |: \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot z = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Diese Ebenengleichung nennen wir nun **normalisiert**.

Wie stellt man nun aber solch eine Ebene auf? Am einfachsten ist es dabei immer über eine Methode zu gehen: über **3 gegebene Punkte** P_1, P_2, P_3. Denn aus allen möglichen Informationen um eine Ebene aufzustellen können wir immer 3 solcher Punkte extrahieren.

Bemerkung:

Falls uns andere Informationen wie zum Beispiel zwei sich schneidende Geraden gegeben sind berechnen wir einfach 3 Punkte welche auf den Geraden liegen und spannen damit die Ebene auf. Dabei dürfen jedoch nicht alle drei Punkte gleichzeitig auf nur einer der Geraden liegen.

Zurück zur Berechnung: Wir bilden wie bei der Parameterform die beiden Richtungsvektoren $\vec{P_1P_2}$ und $\vec{P_1P_3}$ und berechnen mit diesen den Normalenvektor, also gerade a, b und c, über das Kreuzprodukt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}.$$

Nun fehlt lediglich die letzte Komponente, eben d. Dies erhalten wir indem wir einen der Punkte, zum Beispiel $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$, in unsere Gleichung einsetzen.

$$d := a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1.$$

Beispiel:

Seien $P_1\,(1; 2; 0)\,, P_2\,(-2; 1; 3)\,, P_3\,(0; 1; -1)$ gegeben.

Wir berechnen zuerst a, b, c mit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ -3-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von P_1 in unsere Gleichung ergibt

$$d := 4 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 4 - 12 = -8.$$

Wir erhalten also unsere Ebene

$$E: \qquad 4x - 6y + 2z = -8.$$

Aufgabe (Ebene in Koordinatenform Aufstellen):

Stelle die Ebenen (Koordinatenform) aus den gegebenen Parametern auf.

(a) Gegeben seien $P_1\,(0;-2;6)\,, P_2\,(-1;5;2)\,, P_3\,(1;3;-1)$

(b) Gegeben seien die Geraden g_1 und g_2 mit

$$\begin{aligned} g_1: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ g_2: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Gegeben seien $P_1\,(1;2;5)\,, P_2\,(4;0;0)\,, P_3\,(2;-5;-1)$

(d) Gegeben seien die Geraden g_1 und g_2 mit

$$\begin{aligned} g_1: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ g_2: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(e) Gegeben seien $P_1\,(-1;0;0)\,, P_2\,(-1;0;0)\,, P_3\,(0;0;-1)$

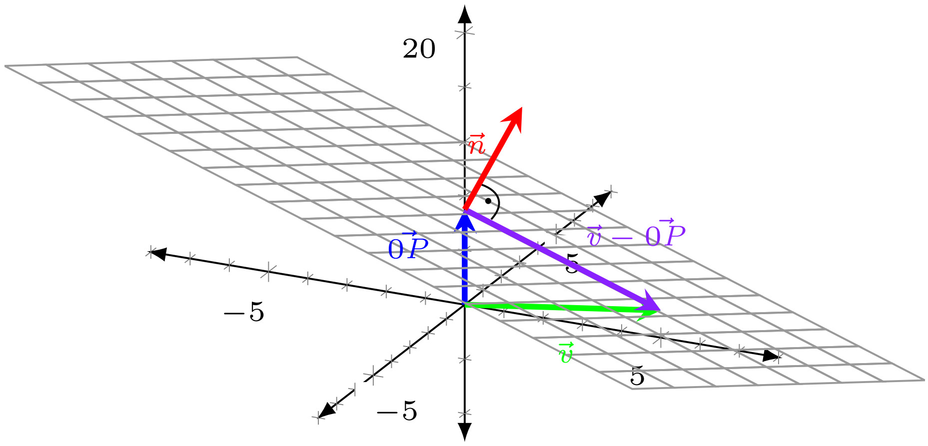
(f) Gegeben seien $P_1\,(0;0;2)\,, P_2\,(-5;2;-2)\,, P_3\,(-3;-7;1)$

(g) Gegeben seien die Gerade g und der Richtungsvektor $\vec{r_2}$ mit

$$\begin{aligned} g: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{r_2} \quad &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.2.2 Hessische Normalform

Wie wir bereits sehen konnten ist der Normalenvektor ein sehr eleganter Weg eine Ebene zu beschreiben. Neben der Parameterform gibt es hier also noch eine weitere Ebenenform die diesen Weg nutzt.
Die Idee dahinter wurde bereits in der Erklärung zur Koordinatenform angeschnitten für $d = 0$: Für Vektoren, welche wir in diese Ebene legen können (welche also parallel zu ihr sind) gilt, dass sie senkrecht zum Normalenvektor $\vec{n}$ stehen. Desshalb für einen solchen Vektor gilt $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$. Über diese Eigenschaft können wir nun die Ebene vollständig Charakterisieren. Einen Zwischenschritt müssen wir aber noch einlegen, denn wir wollen wissen ob ein Punkt/Vektor auf der Ebene liegt und nicht ob er parallel zu ihr ist. Wir können die beiden Probleme einfach ineinander umformulieren, indem wir einen Punkt P auf der Ebene fixieren.



Man erkennt schnell, dass ein Punkt R in der Ebene liegt genau dann wenn der Vektor $\vec{PR}$ parallel zur Ebene ist. Das ist genau dann der Fall, falls $\vec{PR}$ senkrecht zu $\vec{n}$ ist.

Definition (Normalform):

Sei P ein Punkt auf der Ebene und $\vec{n}$ ihr zugehöriger Normalenvektor. Wir setzen $\vec{s} := \vec{0P}$. Die **Normalform** ist dann

$$E: \quad \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{s}) = 0.$$

Wir nennen diese Form **Hessesche Normalform** falls $\vec{n}$ normalisiert ist. Also $|\vec{n}| = 1$ gilt.

Da diese Form so eng mit der Koordinatenform verwand ist können wir hier genauso vorgehen um unseren Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ zu berechnen. Im Anschluss wählen wir noch einen beliebigen Punkt auf der Ebene für P und sind damit fertig.

Aufgabe (Ebene in Hessescher Normalform aufstellen):

Stelle die Ebenen (Hessesche Normalform) aus den gegebenen Parametern auf.

(a) Gegeben seien $P_1\,(-2; 1; -1)$, $P_2\,(-2; -6; -1)$, $P_3\,(0; 0; 0)$

(b) Gegeben seien die Geraden g_1 und g_2 mit

$$\begin{aligned} g_1: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ g_2: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Gegeben seien $P_1\,(0;-1;2)\,, P_2\,(-1;-1;1)\,, P_3\,(1;1;1)$

(d) Gegeben seien die Geraden g_1 und g_2 mit

$$\begin{aligned} g_1: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ g_2: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(e) Gegeben seien $P_1\,(0;-1;-1)\,, P_2\,(-1;-1;0)\,, P_3\,(1;0;1)$

(f) Gegeben seien $P_1\,(-6;2;0)\,, P_2\,(2;-3;5)\,, P_3\,(2;1;5)$

(g) Gegeben seien die Gerade g und der Richtungsvektor $\vec{r_2}$ mit

$$\begin{aligned} g: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \vec{r_2} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.3 Umformen der Ebenendarstellungen

Wir haben bereits gesehen wie wir die verschiedenen Ebenenformen aus gegebenen Parametern aufstellen. Doch wie wandeln wir sie ineinander um?

5.3.1 Parameterform → Koordinatenform

Eine Methode die ich hier erwähnen möchte, jedoch nicht empfehlenswert für die Praxis ist ist jene das Gleichungssystem der Parameterform zu einer Gleichung zu vereinfachen. Das Gleichungssystem einer Parameterform besteht dabei aus 3 Zeilen

$$\begin{aligned} E: \quad & \vec{x} = \vec{s} + t_1 \cdot \vec{r_1} + t_2 \cdot \vec{r_2} \\ & \downarrow \\ I: \quad & x = s_1 + t_1 \cdot r_{1_1} + t_2 \cdot r_{2_1} \\ II: \quad & y = s_2 + t_1 \cdot r_{1_2} + t_2 \cdot r_{2_2} \\ III: \quad & z = s_3 + t_1 \cdot r_{1_3} + t_2 \cdot r_{2_3} \\ & . \end{aligned}$$

Wir können nun eine der Gleichungen nach t_1 umstellen und dann per Einsetzungsverfahren in eine der anderen Gleichungen einsetzen. Die resultierend können wir nun wiederum nach t_2 umstellen und in die letzte verbleibende Gleichung einsetzen. Damit haben wir t_1 und t_2 eliminiert und so sind lediglich x, y und z als Variablen in einer einzeiligen Gleichung übrig.
Da diese Methode jedoch relativ viel Zeit in Anspruch nimmt würde ich sie im Allgemeinen nicht empfehlen. Jedoch gibt es Spezialfälle wo diese Methode besser ist als die Folgende.

Eine einfachere Möglichkeit besteht darin einfach den Normalenvektor $\vec{n}$ über unsere beiden Richtungsvektoren $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ zu berechnen. Wir benutzen hierbei wieder das Kreuzprodukt und erhalten so

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{r_1} \times \vec{r_2}.$$

Durch Einsetzen des Stützvektors in unsere Gleichung können wir nun unsere letzte Komponente d berechnen.

$$d := a \cdot s_1 + b \cdot s_2 + c \cdot s_3.$$

Damit haben wir alle Komponenten berechnet und können gegebenenfalls die Gleichung noch normalisieren.

5.3.2 Parameterform → Hessesche Normalform

Hier können wir ebenso vorgehen wie bei der vorherigen Umwandlung. Für
$E: \ \vec{x} = \vec{s} + t_1 \cdot \vec{r_1} + t_2 \cdot \vec{r_2}$ rechnen wir

$$\vec{n} = \vec{r_1} \times \vec{r_2}.$$

Und normalisieren diesen im Anschluss

$$\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}.$$

Jetzt brauchen wir noch einen Punkt auf der Ebene, beziehungsweise einen entsprechenden Stützvektor. Wir machen uns hier wieder das Leben einfach und wählen dafür einfach $\vec{s}$. Wir erhalten die Hessesche Normalform

$$E: \quad \vec{n_0} \circ (\vec{x} - \vec{s}) = 0.$$

5.3.3 Koordinatenform → Parameterform

Auch hier gibt es wieder mehrere Möglichkeiten, wobei ich wieder eine davon lediglich anschneiden werde. Bei dieser Methode kann man versuchen zwei Vektoren $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ zu finden welche rechtwinklig zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ stehen. Also

$$\vec{n} \circ \vec{r_1} = \vec{n} \circ \vec{r_2} = 0.$$

Eine einfache Methode dafür ist es eine Komponente von $\vec{r_1}$ gleich 0 zu wählen was die Suche erheblich vereinfacht. $\vec{r_2}$ berechnen wir dann über das Kreuzprodukt zwischen $\vec{r_1}$ und $\vec{n}$. Schlussendlich suchen wir nun noch einen Stützvektor indem wir eine Lösung für x, y, z in unserer Gleichung finden. Diese lösung ist dann unser Stützvektor $\vec{s}$.

Die simplere Methode besteht daraus einfach 3 Punkte auf unserer Ebene zu wählen und im Anschluss unsere Standartkonstruktion anzuwenden (3 Punkte → Parameterform). Wie bereits erwähnt ist es sinnvoll hierbei einen Komponenten der Punkte gleich 0 zu wählen und den anderen gleich 1. Also seien $P_1\left(0, 0, p_z\right), P_2\left(p_x, 0, 0\right), P_3\left(0, p_y, 0\right)$. Wir lösen dann die drei **einzelnen** linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} d &= a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot p_z &&= c \cdot p_z \\ d &= a \cdot p_x + b \cdot 0 + c \cdot 0 &&= a \cdot p_x \\ d &= a \cdot 0 + b \cdot p_y + c \cdot 0 &&= b \cdot p_y. \end{aligned}$$

Es ist hierbei möglich, dass wir für maximal zwei dieser Gleichungen keine Lösung finden können. Wir setzen dann einfach ausgehend von dem/den Punkt(en) für welche(n) eine Lösung gefunden wurde Variablen in die eigentlich 0 gewählten Komponenten. Als Beispiel haben wir also eine Lösung für $P_1\left(0, 0, p_z\right)$ wir setzen nun $P_2\left(0, p_y, p_z\right)$ und $P_3\left(p_x, 0, p_z\right)$ und lösen im Anschluss die Gleichungssysteme für die beiden Punkte. Aus den daraus resultierenden Punkten können wir nun die Parameterform der Ebene konstruieren.

5.3.4 Koordinatenform → Hessesche Normalform

Diese Umwandlung ist relativ einfach, da uns bereits der Normalenvektor gegeben ist. Wir müssen diesen nun lediglich normalisieren

$$\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}.$$

Und einen Stützvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ finden welcher die Gleichung der Koordinatenform erfüllt. Hierbei ist es wieder sinnvoll zwei Komponenten bereits zu setzen und dann das entsprechende lineare Gleichungssystem zu lösen. Setze $x := y := 0$, dann

$$d = ax + by + cz = c \cdot z.$$

Auch hier sei erwähnt, dass es möglich ist das wir hierbei keine Lösung für die Gleichung finden können. Wir wählen dann entsprechend **andere** Komponenten von $\vec{s}$ gleich 0.
Damit erhalten wir also $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ und stellen die Hessesche Normalform auf

$$E: \quad \vec{n_0} \circ (\vec{x} - \vec{s}) = 0.$$

5.3.5 Hessesche Normalform → Parameterform

Hierbei gehen wir wieder ganz ähnlich vor wie bei der Umwandlung von Koordinatenform zur Parameterform. Dabei ist uns der Stützvektor $\vec{s}$ bereits gegeben und wir müssen lediglich die beiden Richtungsvektoren $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ berechnen. Wie wählen dabei, wie oben bereits angeschnitten, wählen wir eine Koordinate von $\vec{r_1}$ gleich 0 $r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Auch gilt, falls unsere Gleichung so keine Lösung hat müssen wir eine andere Koordinate gleich 0 wählen. Wir lösen also

$$0 = \vec{n_0} \circ \vec{r_1} = \vec{n_0} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir $\vec{r_1}$ rechtwinklig zu $\vec{n_0}$. Mittels des Kreuzprodukts rechnen wir nun $\vec{r_2}$ aus

$$\vec{r_2} := \vec{r_1} \times \vec{n_0}.$$

Dieser steht damit senkrecht zu $\vec{r_1}$ **und** $\vec{n_0}$.
Wir haben nun also alle Komponenten unserer Parameterform zusammen und stellen diese auf

$$E: \quad \vec{x} = \vec{s} + t_1 \cdot \vec{r_1} + t_2 + \vec{r_2}.$$

5.3.6 Hessesche Normalform → Koordinatenform

Diese letzte Umformung ist ist, aufgrund der Ähnlichkeit von Normalform und Koordinatenform, wieder relativ simpel. Durch den Normalenvektor $\vec{n_0}$ sind uns bereits die Parameter a, b und c der Koordinatenform gegeben. Es bleibt also den Parameter d zu finden mithilfe eines Punktes auf der Ebene. Wir wählen dafür den Stützvektor $\vec{s} = \vec{0P}$ der Hesseschen Normalform und setzen ein

$$d = a \cdot s_1 + b \cdot s_2 + c \cdot s_3.$$

Schlussendlich haben wir damit alle Parameter der Koordinatenform berechnet und stellen dies auf

$$E: \quad ax + by + cz = d.$$

Aufgabe (Umformen von Ebenen):

Forme die gegebene Ebenengleichung in die übrigen oben behandelten Darstellungsformen um.

(a)

$$E: \qquad -2x + y - z = 0.$$

(b)

$$E: \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(c)
$$E: \qquad 3x - 6y + 5z = 9.$$

(d)
$$E: \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

(e)
$$E: \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(f)
$$E: \qquad \vec{x} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(g)
$$E: \qquad 2y - 4z = 7.$$

(h)
$$E: \qquad \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \\ -0.6 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

(i)
$$E: \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.4 Arbeiten mit Ebenen

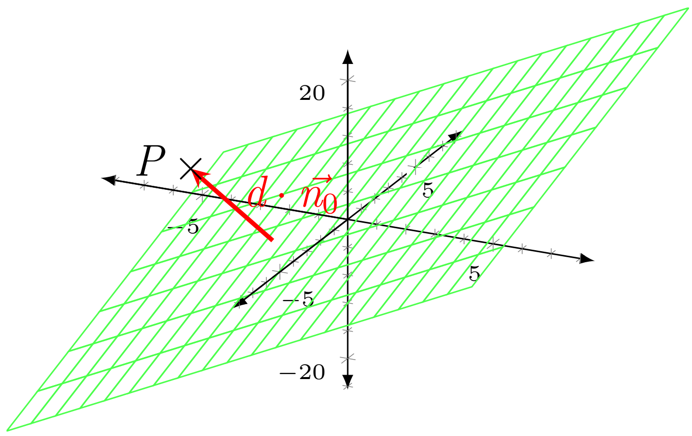
Selbstverständlich haben wir das Konzept der Ebene nicht einfach so eingeführt, sondern um damit geometrische Sachverhalte zu analysieren.

5.4.1 Lagebeziehung Punkt - Ebene

Für die Lagebeziehung zwischen einem Punkt $P(P_x, P_y, P_z)$ und einer Ebene E gibt es nur zwei mögliche Resultate. Entweder liegt der Punkt **auf** der Ebene, oder **nicht**. Wir können hierbei für die Verschiedenen Darstellungsformen der Ebene folgender Maßen vorgehen.

$E:$	**Parameterform** $\vec{x} = \vec{s} + t_1 \cdot \vec{r_1} + t_2 \cdot \vec{r_2}$	**Koordinatenform** $ax + by + cz = d$	**Hessesche NF** $\vec{n_0} \circ (\vec{x} - \vec{s}) = 0$
Vorgehen	Gleichungssystem lösen	Einsetzen	Einsetzen
	$\vec{0P} = \vec{s} + t_1 \cdot \vec{r_1} + t_2 \cdot \vec{r_2}$	$aP_x + bP_y + cP_z = d$	$\vec{n_0} \circ \left(\vec{0P} - \vec{s}\right) = 0$
P liegt auf E	**Lösung**	**Wahre Aussage**	**Wahre Aussage**
P nicht auf E	**keine Lösung**	**Falsche Aussage**	**falsche Aussage**

Falls ein Punkt nun nicht auf unserer Ebene liegt ist es manchmal notwendig seinen Abstand zu ihr zu bestimmen. Wie wir bereits bei dem Abstand zwischen Punkt und Gerade gesehen haben ist die kürzeste Gerade gerade die Linie zwischen dem Punkt und der Ebene welcher orthogonal (rechtwinklig) zur Ebene verläuft.



Unser bereits eingeführter Normalenvektor $\vec{n}$ besitzt gerade die gewünschte Eigenschaft rechtwinklig zur Ebene zu verlaufen. Falls wir nun diesen Normalenvektor normalisieren $\vec{n_0}$, deshalb auf eine Länge von 1 stauchen bzw. strecken, hat P geraden den Abstand zur Ebene um welchen Faktor wir $\vec{n_0}$ verlängern müssen um von E zu P zu kommen (oder umgekehrt). Wir stellen desshalb folgende Gerade auf

$$g_P: \quad \vec{x} = \vec{0P} + t \cdot \vec{n_0}.$$

Jetzt führen wir eine Lagebeziehung zwischen dieser Gerade und der Ebene durch und erhalten, da diese Gerade E sicher schneidet, die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{d\}$ für g_P. Dies ist dann der Abstand, da wir d weit von P aus rechtwinklig zur Ebene laufen müssen um selbige zu erreichen.

Aufgabe (Lagebeziehung Ebene - Punkt):

Analysiere die Lagebeziehung zwischen Punkt und Ebene. Gib gegebenenfalls den Abstand an.

(a) $P(3;-2;1.5)$

$$E: \qquad -x+2y-3z=0.$$

(b) $P(-2;-3;1)$

$$E: \qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+t_1\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+t_2\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\-5\end{pmatrix}.$$

(c) $P(2;3;-6)$

$$E: \qquad 3x-5y=-9.$$

(d) $P(-1;5;-2)$

$$E: \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix}\right)=0.$$

(e) $P(-3;-8;12)$

$$E: \qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\5\\1\end{pmatrix}+t_1\cdot\begin{pmatrix}8\\2\\-1\end{pmatrix}+t_2\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}.$$

(f) $P(0;0;8)$

$$E: \qquad \vec{x}=t_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t_2\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

(g) $P(2;-1;7)$

$$E: \qquad 2x+y-8z=7.$$

(h) $P(5;-6;-1)$

$$E: \qquad \begin{pmatrix}0\\0.6\\-0.8\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}\right)=0.$$

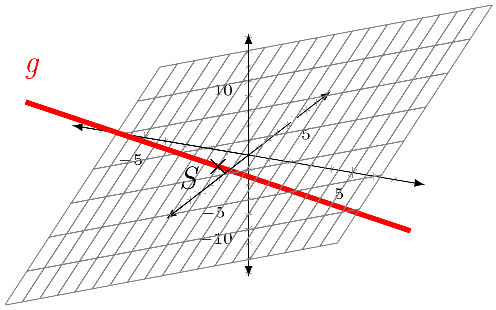
(i) $P(-24;1;2)$

$$E: \qquad -x+3y-12z=0.$$

5.4.2 Lagebeziehung Gerade - Ebene

Die Lagebeziehung zwischen einer Gerade $g: \ \vec{x} = \vec{z} + k \cdot \vec{w}$ und einer Ebene E hat nun 3 mögliche Fälle. Um diese Fälle aufzulösen betrachten wir den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und den Richtungsvektor $\vec{w}$ der Gerade. Je nach Lage dieser beiden Vektoren zueinander lösen wir im Anschluss wieder ein Gleichungssystem bestehend aus der Ebene und der Gerade. Die verschiedenen Resultate und der Zusammenhang zu den Lösungsmengen des oben beschriebenen Gleichungssystems und die Lage von $\vec{n}$ und $\vec{w}$ zueinander sind in folgender Übersicht dargestellt. Sei dafür $\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene.

- Die Gerade **durchstößt** die Ebene. Den Punkt S an welchem die Ebene durchstößt nennen wir Durchstoßpunkt.

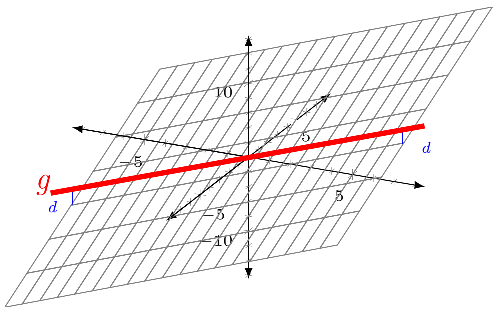


$\vec{w}$ steht nicht rechtwinklig zu $\vec{n}$, deshalb

$$\vec{w} \circ \vec{n} \neq 0.$$

Das Gliechungssytem hat dann **genau eine** Lösung.

- Die Gerade liegt **parallel** zur Ebene mit Abstand d von ihr.

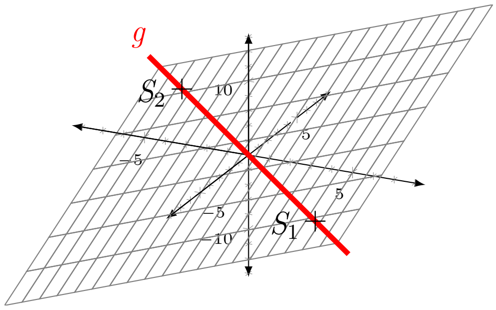


$\vec{w}$ steht rechtwinklig zu $\vec{n}$, deshalb

$$\vec{w} \circ \vec{n} = 0.$$

Außerdem liegt kein Punkt der Gerade auf der Ebene. Es gibt also **keine** Lösung des Gleichungssystems.

- Die Gerade liegt **auf** der Ebene. (Wie auch die beiden Punkte S_1 und S_2.)



$\vec{w}$ steht rechtwinklig zu $\vec{n}$, deshalb

$$\vec{w} \circ \vec{n} = 0.$$

Außerdem liegt jeder Punkt der Gerade auf der Ebene. Es gibt also **unendlich viele** Lösungen des Gleichungssystems.

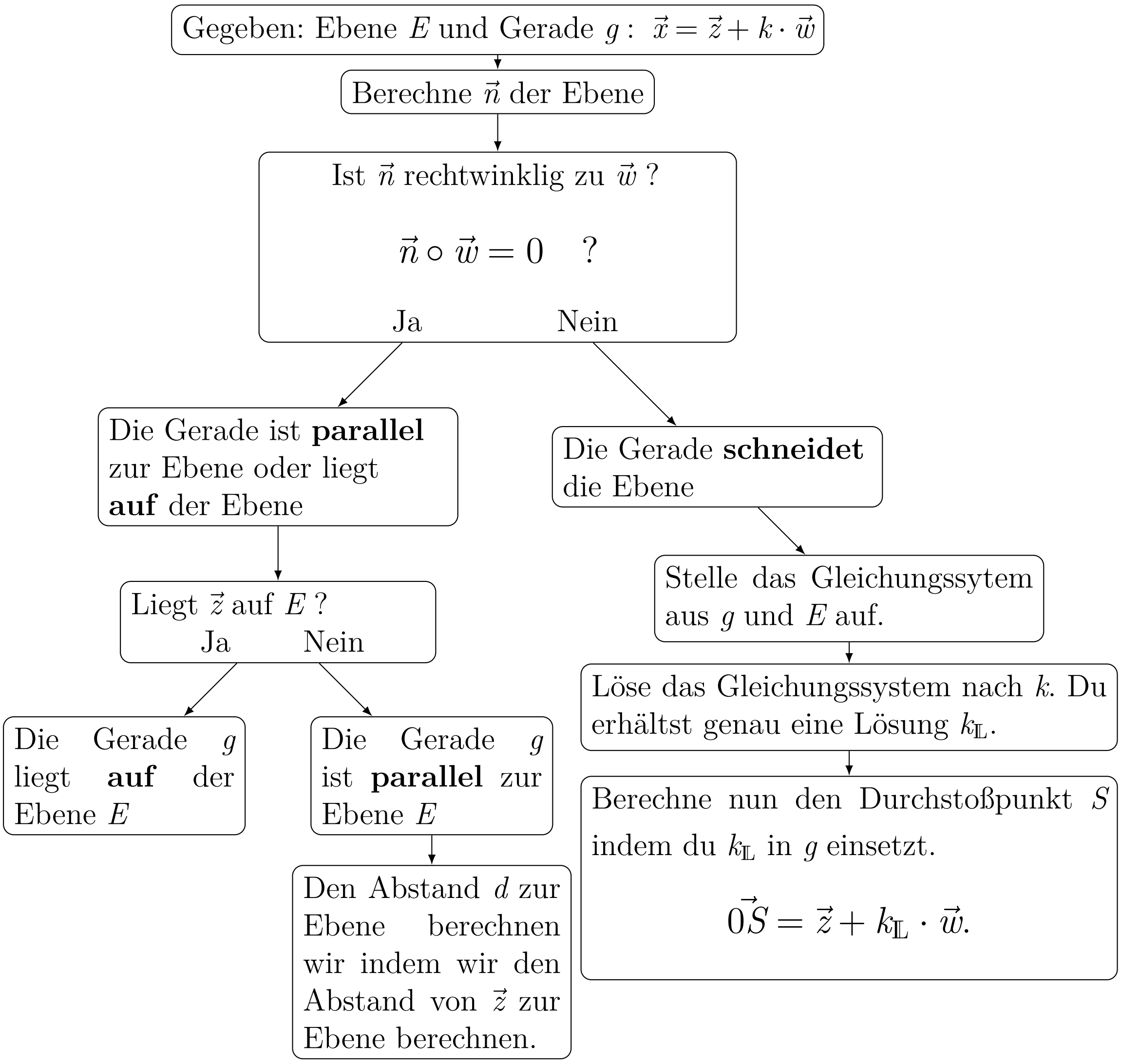
Die genaue Vorgehensweise werden wir wieder über ein Diagramm darstellen. Gegeben sei hierfür die Gerade $g: \ \vec{x_g} = \vec{z} + k \cdot \vec{w}$, genauer

$$g: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Das führt zu dem zugehörigen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + k \cdot w_1 \\ x_2 &= z_2 + k \cdot w_2 \\ x_3 &= z_3 + k \cdot w_3. \end{aligned}$$

Mit diesen Komponenten und der gegebenen Ebene können wir nun die Lagebeziehung folgender maßen betrachten.



$E:$	**Parameterform** $\vec{x} = \vec{s} + t_1 \cdot \vec{r_1} + t_2 \cdot \vec{r_2}$
$\vec{n}$	$\vec{n} := \vec{r_1} \times \vec{r_2}$
Gleichungssystem	$g = E$ $\vec{z} + k \cdot \vec{w} = \vec{s} + t_1 \cdot \vec{r_1} + t_2 \cdot \vec{r_2}$

$E:$	**Koordinatenform** $ax + by + cz = d$
$\vec{n}$	$\vec{n} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
Gleichungssystem	$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$ $a \cdot (z_1 + k \cdot w_1) + b \cdot (z_2 + k \cdot w_2) + c \cdot (z_3 + k \cdot w_3) = d$

$E:$	**Hessesche NF** $\vec{n_0} \circ (\vec{x} - \vec{s}) = 0$
$\vec{n}$	$\vec{n} := \vec{n_0}$
Gleichungssytem	$\vec{n_0} \circ (\vec{x_g} - \vec{s}) = 0$ $0 = \vec{n_0} \circ \left(\begin{pmatrix} z_1 + k \cdot w_1 \\ z_2 + k \cdot w_2 \\ z_3 + k \cdot w_3 \end{pmatrix} - \vec{s} \right)$

Aufgabe (Lagebeziehung Ebene - Gerade):

Analysiere die Lagebeziehungen zwischen den gegebenen Ebenen und Geraden.

(a)

$$E: \quad 3x - 4y + z = 5.$$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$E: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \\ -0.8 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(e)

$$E: \quad x - 2z = 2.$$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(f)

$$E: \quad x + y + z = 3.$$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(g)

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(h)

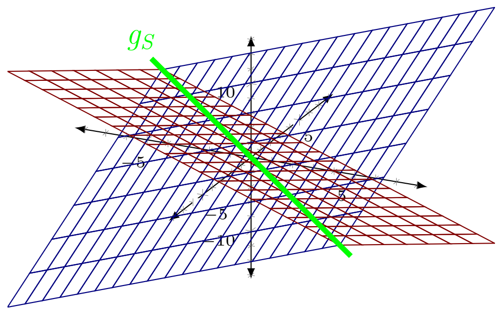
$$E: \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

5.4.3 Lagebeziehung Ebene - Ebene

Die letzten möglichen Lagebeziehungen können wir zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 führen. Auch hier gibt es 3 verschiedene mögliche Ausgänge. Seien $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ die Normalenvektoren der beiden Ebenen.

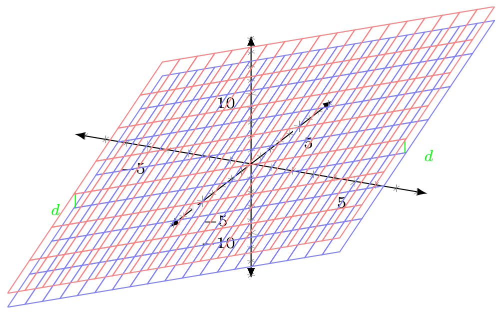
- Die beiden Ebenen E_1 und E_2 **schneiden** sich in der Schnittgerade g_S.



$\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ sind **linear unabhängig**.

$$\vec{n_1} \not\parallel \vec{n_2}.$$

- Die beiden Ebenen E_1 und E_2 liegen **parallel** zueinander mit Abstand d.

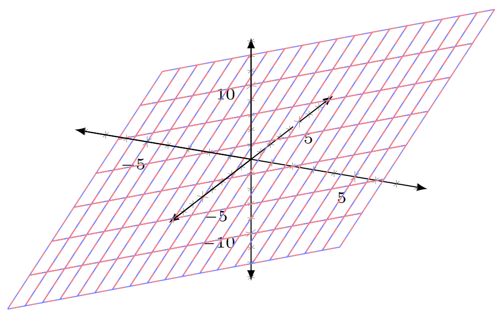


$\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ sind **linear abhängig**.

$$\vec{n_1} \parallel \vec{n_2}.$$

Außerdem gibt es **keinen** Punkt welcher auf beiden Ebenen liegt.

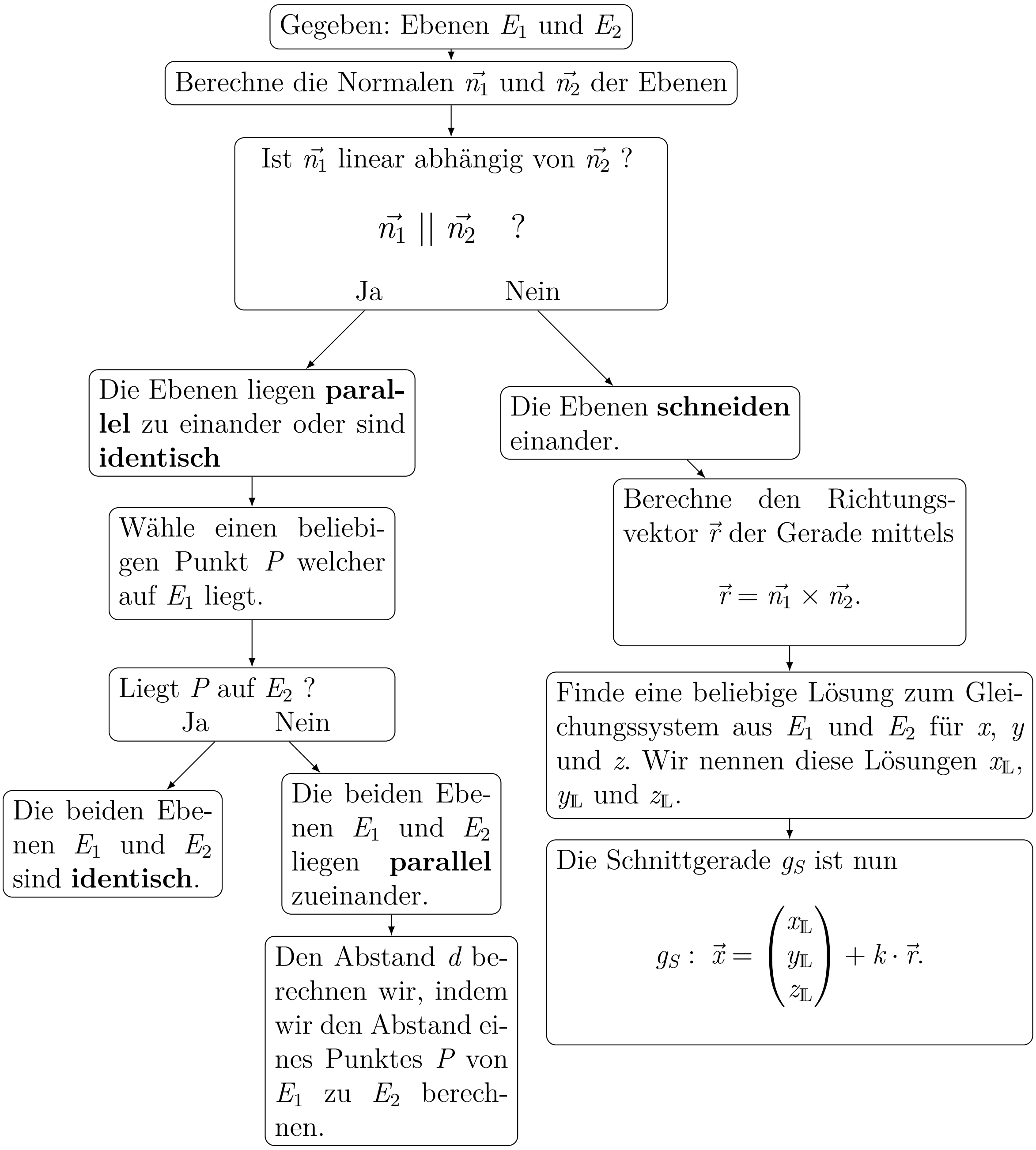
- Die beiden Ebenen E_1 und E_2 sind **identisch**, liegen also aufeinander.



$\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ sind **linear abhängig**.

$$\vec{n_1} \parallel \vec{n_2}.$$

Außerdem gibt es **einen** Punkt welcher auf beiden Ebenen liegt.



Das Gleichungssystem der beiden Ebenen E_1 und E_2 können wir dabei einfach erstellen indem wir die zu den jeweiligen Darstellungsformen passenden Gleichungssysteme gleichsetzen oder ineinander einsetzten. Da die Gleichungssysteme unendlich viele Lösungen haben, lohnt es sich zu probieren eine Variable einfach auf 0 zu setzen (dies muss mit mindestens einer funktionieren). Die übrigen Variablen können wir dann beliebig wählen, wobei uns eine vorherige Vereinfachung des Gleichungssystems viel Denkarbeit abnehmen wird.

E_2 / E_1	**Parameterform** $\vec{x} = \vec{s_2} + k_1 \cdot \vec{d_1} + k_2 \cdot \vec{d_2}$	**Koordinatenform** $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$	**Hessesche NF** $\vec{n_2} \circ (\vec{x} - \vec{s_2}) = 0$
Parameterform $\vec{x} = \vec{s_1} + t_1 \cdot \vec{r_1} + t_2 \cdot \vec{r_2}$	Gleichsetzen $\rightarrow$ Beliebige Lösung für t_1, t_2 wählen $\rightarrow$ Einsetzen in E_1	Einsetzen der Zeilen von E_1 in E_2 $\rightarrow$ Bel. Lösung für t_1 und t_2 $\rightarrow$ in E_1 einsetzen.	Einsetzen der Zeilen von E_1 in E_2 $\rightarrow$ Bel. Lösung für t_1 und t_2 $\rightarrow$ in E_1 einsetzen.
Koordinatenform $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$		d's auf die andere Seite bringen $\rightarrow$ Gleichsetzen $\rightarrow$ Beliebige Lösung wählen	d_1 in E_1 auf die andere Seite bringen $\rightarrow$ gleichsetzen $\rightarrow$ Bel. Lösung wählen
Hessesche NF $\vec{n_1} \circ (\vec{x} - \vec{s_1}) = 0$			Gleichsetzen $\rightarrow$ Beliebige Lösung wählen

Aufgabe :

Führe eine Lagebeziehungsanalyse zwischen den beiden gegebenen Ebenen durch. Gibt ggf. den Abstand oder die Schnittgerade an.

(a)

$$\begin{aligned} E_1 : &\quad x - 5y + 2z = 3 \\ E_2 : &\quad -2x + 10y - 4z = -6. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E_1 : &\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ E_2 : &\quad x - z = -2. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} E_1 : &\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ E_2 : &\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ . \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} E_1 : &\quad \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \\ -0.8 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ E_2 : &\quad -x - 7y + 2z = 0. \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} E_1 : &\quad -2x + 7y - 3z = 5 \\ E_2 : &\, 6x - 21y + 9z = -15. \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} E_1 : &\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ E_2 : &\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ . \end{aligned}$$

(g)

$$
\begin{aligned}
E_1 : &\quad -2 - y + 5z = 8 \\
E_2 : &\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

.