Abi 2012/2013 GK Nachtermin: Aufgabe B2

Inhaltsverzeichnis

2 Aufgabe B2

2.1 Längen der Spannseile von Punkt B

$$\vec{BD} = D - B = \begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 65 \end{pmatrix}$$
$$\vec{BE} = D - E = \begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 116 \end{pmatrix}$$

$$\implies \left|\vec{BD}\right| = \sqrt{(-40)^2 + (-80)^2 + (65)^2} = 110.57$$
$$\implies \left|\vec{BD}\right| = \sqrt{(-40)^2 + (-80)^2 + (116)^2} = 146.48$$

2.2 A und C bestimmen

2.2.1 C bestimmen

$$H: x + 20z = 0, \qquad g: \vec{x} = \vec{E} + k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 114 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt g mit H ausrechnen: g in H einsetzten:

$$\begin{aligned} x + 20z &= 0 \\ 5k + 20(114 + k \cdot 14) &= 0 \\ 5k + 2280 + 280k &= 0 \\ 285k + 2280 &= 0 && \mid -2280 \\ 285k &= -2280 && \mid : 285 \\ k &= -8 \end{aligned}$$

k einsetzten und schnittpunkt ausrechnen:

$$\begin{aligned} \vec{OC} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 114 \end{pmatrix} - 8 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 114 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -40 \\ 80 \\ -112 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -40 \\ 80 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \implies C &= (-40| \, 80| \, 2) \end{aligned}$$

2.2.2 A bestimmen

$$A = (0, y, 0), \qquad \left| \vec{EA} \right| = 145, \qquad y \in \mathbb{R}^-$$

Gleichung:

$$\begin{aligned} \left| \vec{EA} \right| &= 145 \\ \sqrt{(0)^2 + (y)^2 + (-114)^2} &= 145 && \mid {}^2 \\ (y)^2 + (-114)^2 &= 145^2 && \mid -(-114)^2 \\ y^2 &= 145^2 - (-114)^2 = 8029 \\ \implies y &= -\sqrt{8029} = -89.6 \end{aligned}$$

$$\implies A = (0| -89.6| \, 0)$$

2.3 Landwirtschaftliche Nutzfläche

2.3.1 ΔOBD kein rechtwinkliges Dreieck

$$\vec{OB} = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 63 \end{pmatrix}, \quad \vec{BD} = \begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 65 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Winkels (über Skalarprodukt):

$$\begin{aligned} \vec{OB} \circ \vec{OD} &= 40 \cdot 0 + 80 \cdot 0 - 2 \cdot 63 \\ &= -126 \neq 0 \end{aligned}$$

$\implies$ Kein rechter Winkel bei O

$$\begin{aligned} \vec{OB} \circ \vec{BD} &= 40 \cdot (-40) + 80 \cdot (-80) - 2 \cdot 65 \\ &= -8130 \neq 0 \end{aligned}$$

$\implies$ Kein rechter Winkel bei B

$$\begin{aligned} \vec{OD} \circ \vec{BD} &= 0 \cdot (-40) + 0 \cdot (-80) + 63 \cdot 65 \\ &= 4095 \neq 0 \end{aligned}$$

$\implies$ Kein rechter Winkel bei D

$\implies$ kein rechtwinkliges Dreieck ΔOBD

2.3.2 Winkel β zwischen $\vec{BO}$ und $\vec{BD}$

$$\vec{BO} = \begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{BD} = \begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 65 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Winkels (über Skalarprodukt):

$$\begin{aligned} \frac{\vec{BO} \circ \vec{BD}}{|\vec{BO}| \cdot |\vec{BD}|} &= \frac{40^2 + 80^2 + 2 \cdot 65}{\sqrt{40^2 + 80^2 + 2^2} \cdot \sqrt{40^2 + 80^2 + 65^2}} \\ &= \frac{8130}{9891.86} = 0.8219 \end{aligned}$$

$$\beta = acos(0.8219) = cos^{-1}(0.8219) = 34.72°$$

Hinweis:

Dein Fehler war die beiden Vektoren in unterschiedliche Richtungen laufen zu lassen. Es wird immer der Winkel berechnet welcher in Richtung beider Vektoren anliegt. Wenn du von 180° deinen Winkel abziehst wirst du auf das gleiche β kommen wie ich.

2.3.3 Abstand von B und F

Pythagoras:

$$\begin{aligned} tan(\beta) &= \frac{4}{|\vec{BF}|} \\ \Leftrightarrow |\vec{BF}| &= \frac{4}{tan(\beta)} \\ &= 5.77m \end{aligned}$$

2.3.4 Koordinaten Punkt F

$$\vec{BO} = \begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad |\vec{BF}| = 5.77m$$

Über Gerade lösen:

$$\begin{aligned} \vec{OF} &= \vec{OB} + \frac{|\vec{BF}|}{|\vec{BO}|} \cdot \vec{BO} \\ &= \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{5.77}{\sqrt{40^2 + 80^2 + 2^2}} \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ -2 \end{pmatrix} + 0.06 \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.4 \\ -4.8 \\ 0.12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 37.6 \\ 77.6 \\ -1.88 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad F = (37.6|\,77.6|\,-1.88)$$

2.4 Sturm und Sendemast

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -100.10 \\ -10.20 \\ 154.00 \end{pmatrix}, \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 0.75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10.10 \\ -100.20 \\ 149.25 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt g_1 und g_2:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -100.10 \\ -10.20 \\ 154.00 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 0.75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10.10 \\ -100.20 \\ 149.25 \end{pmatrix} \qquad \Big| - \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} \\
k \cdot \begin{pmatrix} -100.10 \\ -10.20 \\ 154.00 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -90 \\ 90 \\ 4.75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10.10 \\ -100.20 \\ 149.25 \end{pmatrix} \qquad \Big| - t \cdot \begin{pmatrix} -10.10 \\ -100.20 \\ 149.25 \end{pmatrix} \\
k \cdot \begin{pmatrix} -100.10 \\ -10.20 \\ 154.00 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} -10.10 \\ -100.20 \\ 149.25 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -90 \\ 90 \\ 4.75 \end{pmatrix} \\
&\implies k = 1, \quad t = 1
\end{aligned}$$

Einsetzten ergibt:

$$E' = (-0,1| -0,2| 150)$$

Winkel zwischen Sendemast vor und Nach dem Sturm (φ):

$$\vec{OE'} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.2 \\ 150 \end{pmatrix}, \qquad \vec{OE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 114 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{OE'} \circ \vec{OE}}{|\vec{OE'}| \cdot |\vec{OE}|} &= \frac{-0.1 \cdot 0 + -0.2 \cdot 0 + 150 \cdot 114}{\sqrt{(-0.1)^2 + (-0.2)^2 + (150)^2} \cdot \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (114)^2}} \\
&= \frac{17100}{17100.02} = 0.99999883
\end{aligned}$$

Runden ist hier nicht sinnvoll, da $cos(1) = 0°$ ist.

$$\varphi = acos(0.99999883) = cos^{-1}(0.99999883) \approx 0.09°$$

Damit ist der Mast auch nichtmehr senkrecht.

Hinweis:

Theoretisch könnte man auch zeigen das der Mast nicht mehr senkrecht ist, indem du das Skalarprodukt mit den Einheitsvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bildest. (Theoretisch müsste das aber auch über Winkel (φ) argumentierbar sein, denn E war ja senkrecht, also ist E' nicht mehr senkrecht wenn der Winkel größer als 0 ist)