

FUNDAMENTOS DE HIDROLOGÍA DE SUPERFICIE

Francisco J. Aparicio Mijares

Aparicio

FUNDAMENTOS DE HIDROLOGÍA DE SUPERFICIE

NORIEGA
LIMUSA

551.48

A642

e.3

LIMUSA

GRUPO NORIEGA EDITORES

Esta excelente obra responde a la necesidad existente de contar con un texto a nivel básico sobre hidrología de superficie, adaptado a las particulares condiciones de México e Hispanoamérica. Es un texto accesible tanto a estudiantes como profesionales interesados en la hidrología. Por esta razón, se ha evitado deliberadamente el planteamiento teórico y complejo, pero sin perder de vista los aspectos globales de los problemas hidrológicos prácticos. El contenido de la obra se basa en el programa del curso semestral a nivel profesional en carreras como Ingeniero Civil, Ingeniero Agrónomo o Ingeniero Hidrólogo. Asimismo, es útil como introducción a cursos de posgrado y como obra de consulta para profesionales del área de geografía.

No obstante su carácter fundamental, se han incluido temas que usualmente no se imparten a nivel profesional, como el de nociones de hidrometeorología y elementos de una teoría de la infiltración, que es necesario impulsar en nuestro medio. El libro supone un conocimiento previo en matemáticas elementales y fundamentos de estadística. En este último aspecto, sin embargo, es común que los cursos básicos de estadística en ingeniería tengan un enfoque ligeramente diferente al de la hidrología; por ello, la obra tiene como objetivo orientar al lector respecto de los conceptos fundamentales de probabilidad y estadística y sobre regresión y correlación.

ÁREA: ING. CIVIL

ISBN: 968-18-3014-8



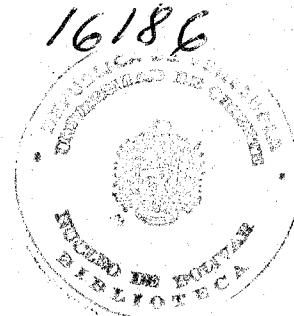
9789681830144

FUNDAMENTOS DE HIDROLOGÍA DE SUPERFICIE

CONTENIDO:

- Introducción
- La cuenca hidrológica
- Escurrimiento
- Evaporación y transpiración
- Almacenamiento y tránsito en vasos y cauces
- Precipitación
- Infiltración
- Relaciones lluvia-escurrimiento
- Probabilidad y estadística en hidrología
- Apéndices

Francisco Javier Aparicio Mijares



GRUPO NORIEGA EDITORES

México • España • Venezuela • Argentina
Colombia • Puerto Rico



Rcp. T
Compañía
Fuerza Venezolana

Precio BS 865⁰⁰
Fecha 15-07-93

551.618
A642
e.3

A CARMEN,
ANDREA
Y JULIO

La presentación y disposición en conjunto de
FUNDAMENTOS DE HIDROLOGÍA DE SUPERFICIE

son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor.

Derechos reservados:

© 1992, EDITORIAL LIMUSA, S.A. de C.V.
GRUPO NORIEGA EDITORES
Balderas 95, C.P. 06040, México, D.F.
Teléfono 521-50-98
Fax 512-29-03

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria
Editorial Mexicana. Registro número 121

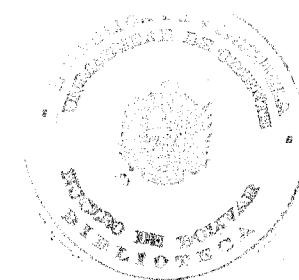
Primera edición: 1989

Primera reimpresión: 1992

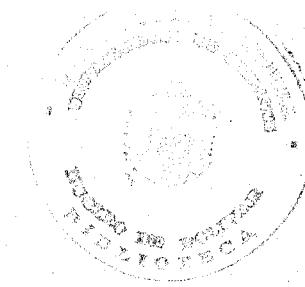
Impreso en México
(10692)

ISBN 968-18-3014-8

Pat



Prólogo



El presente texto es resultado de la impartición, durante cinco años, del curso de hidrología en la Universidad Nacional Autónoma de México. Responde a la necesidad existente de un texto a nivel básico sobre hidrología de superficie escrito en español y adaptado a las particulares condiciones de México e Hispanoamérica.

El texto está escrito a nivel básico, de manera que sea accesible tanto a estudiantes como a profesionales interesados en la hidrología. Por ello, se han evitado deliberadamente los planteamientos teóricos y complejos y se ha procurado no perder de vista los aspectos globales de los problemas hidrológicos prácticos. El contenido de la obra es igual al que se imparte en el curso semestral a nivel profesional en carreras tales como ingeniero civil, ingeniero agrónomo o ingeniero hidrólogo. Es útil como introducción a cursos de posgrado y como obra de consulta para profesionales de ingeniería y geografía.

A pesar del carácter fundamental del libro, se han incluido ciertos temas que usualmente no se imparten a nivel profesional, como el de nociones de hidrometeorología (apartado 6.1) y elementos de una teoría de la infiltración (apartado 7.3), que es necesario impulsar en nuestro medio.

El libro supone un conocimiento previo en matemáticas elementales y fundamentos de estadística. En este último aspecto, sin embargo, es común que los cursos básicos de estadística en ingeniería tengan un enfoque ligeramente diferente al de la hidrología; en este sentido, la obra incluye los conceptos fundamentales de probabilidad y estadística orientados a la hidrología, en el apartado 9.1, y los de regresión y correlación, en el apéndice B.

El orden de los temas acaso parezca extraño a los profesores de hidrología que acostumbran impartir su curso describiendo en primer lugar cada uno de los componentes del ciclo hidrológico por separado, y posteriormente sus relaciones y aplicaciones a problemas prácticos. Mi experiencia docente me indica que esa manera de impartir el curso resulta tediosa para los estudiantes

acostumbrados a imaginar obras y buscar aplicaciones casi inmediatas de los cursos teóricos. Por ello se ha elaborado la obra tomando el capítulo cinco (almacenamiento y tránsito en vasos y cauces), que es el de mayor interés práctico, como centro de atención y rodeándolo del resto de los temas. El orden adoptado, además, permite que los estudiantes desarrollen todo un proyecto hidrológico a lo largo del curso.

Elaborar un libro como el presente es, en mi opinión, una de las tareas más agradables a las que puede someterse cualquier profesor, no sólo por el valor intrínseco que pueda tener, sino también por la satisfacción de encontrar gente dispuesta a colaborar desinteresadamente. Como es común en estos casos, resulta imposible mencionar a cada una de las personas que de alguna manera participaron en la elaboración del trabajo; no obstante, merecen especial reconocimiento el maestro en ingeniería Ramón Domínguez Mora, quien hizo varias revisiones críticas de los manuscritos y valiosos comentarios que mejoraron el texto; el Ing. Pablo Hernández Delgadillo, que dibujó todas las figuras; el Ing. Abraham Bernal Ortiz, que colaboró en la mayor parte del capítulo uno; el Dr. Polioptro Martínez, que revisó parte del original; las Sras. Eugenia Aparicio y Ma. de Jesús Palafox así como la Sra. Consuelo Díaz C., por haber tenido la paciencia de interpretar mi caligrafía para mecanografiar las varias versiones del texto, y en general al personal de la sección editorial de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, donde se publicaron las primeras versiones del libro como notas de clase.

Finalmente, se agradecerán todos los comentarios respecto a la obra, ya que servirán para mejorarla en futuras ediciones.

Francisco Javier Aparicio Mijares
Cuernavaca, Mor., septiembre de 1987

Contenido

PRÓLOGO	7
1 INTRODUCCIÓN	13
1.1 Definición y objetivo de la hidrología	13
1.2 Breve reseña histórica	16
1.3 El ciclo hidrológico	17
Bibliografía	18
2 LA CUENCA HIDROLÓGICA	19
2.1 Concepto de cuenca	19
2.2 Características de la cuenca y los cauces	19
Bibliografía	26
3 ESCURRIMIENTO	27
3.1 Fuentes de los diferentes tipos de escurrimiento	27
3.2 Hidrogramas y su análisis	29
3.3 Aforo	34
3.3.1 Sección de control	35
3.3.2 Relación sección-pendiente	37
3.3.3 Relación sección-velocidad	39
3.3.4 Otros métodos	42

3.3.5 Curvas elevaciones-gastos	43
3.3.6 Condiciones que debe reunir una estación hidrométrica	45
Bibliografía	46

4 EVAPORACIÓN Y TRANSPIRACIÓN

4.1 Evaporación	47
4.1.1 Fórmulas empíricas	49
4.1.2 Balance de energía	49
4.1.3 Balance de agua	54
4.1.4 Medición de la evaporación	55
4.2 Evapotranspiración o uso consumutivo	56
4.2.1 Método de Thorntwaite	56
4.2.2 Método de Blaney-Criddle	57
4.2.3 Extracciones de un almacenamiento para riego	59
Bibliografía	67

5 ALMACENAMIENTO Y TRÁNSITO EN VASOS Y CAUCES

5.1 Tipos de almacenamientos y sus características	69
5.2 Estimación del volumen útil y el NAMO	72
5.3 Funcionamiento de vasos	78
5.3.1 Entradas al vaso	79
5.3.2 Salidas del vaso	82
5.3.3 Procedimiento de cálculo	83
5.3.4 Entradas	84
5.3.5 Salidas	86
5.4 Tránsito de avenidas en vasos	90
5.4.1 Método semigráfico	93
5.4.2 Método numérico	99
5.5 Tránsito de avenidas en cauces	102
5.5.1 Método de Muskingum	103
Bibliografía	111

6 PRECIPITACIÓN

6.1 Nociones de hidrometeorología	113
6.1.1 Definiciones	113

6.1.2 Contenido de vapor de la atmósfera. Agua precipitable	116
6.1.3 Vientos	120
6.1.4 Modelos de lluvia	126
6.2 Medición de la precipitación	134
6.3 Análisis de los datos de precipitación	140
6.3.1 Lluvia media	148
6.3.2 Curva masa media	151
6.3.3 Deducción de datos faltantes	151
6.3.4 Ajuste de registros de precipitación por cambios en las condiciones de medición	152
6.3.5 Curvas altura de precipitación-área-duración (h_p-A-d)	153
6.3.6 Traspisión de tormentas	161
6.3.7 Curvas intensidad-duración-periodo de retorno ($i-d-T$)	165
6.3.8 Comentario final	176
Bibliografía	176

7 INFILTRACIÓN

7.1 Definición y descripción del proceso de infiltración	177
7.1.1 Conceptos generales	177
7.1.2 Descripción del proceso de infiltración	178
7.1.3 Factores que afectan la capacidad de infiltración	179
7.2 Métodos empíricos	179
7.2.1 Criterio de la capacidad de infiltración media	180
7.2.2 Criterio del coeficiente de escurrimiento	182
7.2.3 Criterio del United States Soil Conservation Service (USSCS)	183
7.2.4 Criterio del índice de precipitación antecedente	186
7.2.5 Método de los números de escurrimiento	187
7.2.6 Otros métodos	191
7.3 Elementos de una teoría de la infiltración	193
7.4 El concepto del potencial en el frente húmedo	198
7.5 Medición de la infiltración	200
Bibliografía	201

8 RELACIONES LLUVIA-ESCURRIMIENTO

8.1 Métodos de envolventes	204
8.2 La fórmula racional	206

8.3 Hidrograma unitario	209
8.3.1 Hidrograma unitario tradicional	213
8.3.2 Curva S	216
8.3.3 Métodos matriciales. Hidrograma unitario instantáneo	222
8.3.4 Hidrogramas unitarios sintéticos	228
Bibliografía	237
9 PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA EN HIDROLOGÍA	239
9.1 Conceptos fundamentales de probabilidad y estadística	240
9.1.1 Probabilidad y sus axiomas	240
9.1.2 Funciones de probabilidad	243
9.1.3 Periodo de retorno	249
9.2 Funciones de distribución de probabilidad usadas en hidrología	252
9.2.1 Distribución normal	253
9.2.2 Distribución lognormal	258
9.2.3 Distribución Pearson III o Gamma de tres parámetros	260
9.2.4 Distribución Gumbel	263
9.2.5 Funciones de distribución para dos poblaciones	265
9.3 Límites de aplicabilidad y selección de la función de distribución de probabilidad	270
9.3.1 Análisis gráfico	270
9.3.2 Método del error cuadrático mínimo	272
9.3.3 Pruebas de bondad del ajuste	275
9.3.4 Selección de la función de distribución	281
9.3.5 Límites de aplicabilidad	281
Bibliografía	282
APÉNDICE A	283
APÉNDICE B	291

Introducción

1.1 DEFINICIÓN Y OBJETIVO DE LA HIDROLOGÍA

Existen varias definiciones de hidrología, pero la más completa es quizás la siguiente:

“Hidrología es la ciencia natural que estudia al agua, su ocurrencia, circulación y distribución en la superficie terrestre, sus propiedades químicas y físicas y su relación con el medio ambiente, incluyendo a los seres vivos.” (Referencia 1.1)

Aceptando esta definición, es necesario limitar la parte de la hidrología que se estudia en la ingeniería a una rama que comúnmente se llama ingeniería hidrológica o hidrología aplicada, que incluye aquellas partes del campo de la hidrología que atañen al diseño y operación de proyectos de ingeniería para el control y aprovechamiento del agua.

El ingeniero que se ocupa de proyectar, construir o supervisar el funcionamiento de instalaciones hidráulicas debe resolver numerosos problemas prácticos de muy variado carácter. Por ejemplo, se encuentra con la necesidad de diseñar puentes, estructuras para el control de avenidas, presas, vertedores, sistemas de drenaje para poblaciones, carreteras y aeropistas y sistemas de abastecimiento de agua. Sin excepción, estos diseños requieren de análisis hidrológicos cuantitativos para la selección del evento de diseño necesario.

El objetivo de la hidrología aplicada es la determinación de esos eventos, que son análogos a las cargas de diseño en el análisis estructural, por poner un ejemplo de la ingeniería civil. Los resultados son normalmente sólo estimaciones, con aproximación limitada en muchos casos y burda en algunos otros. Sin embargo, estas estimaciones rara vez son menos aproximadas que las cargas usadas en el análisis estructural o el volumen de tráfico en carreteras, por ejemplo. El análisis hidrológico exhaustivo es, pues, el primer paso fundamental

en la planeación, diseño y operación de proyectos hidráulicos. En la fase de planeación y diseño, el análisis se dirige básicamente a fijar la capacidad y seguridad de estructuras hidráulicas. Las dimensiones físicas o la capacidad de conducción de una estructura hidráulica se determinan, desde luego, de acuerdo con los volúmenes y gastos que se deseen almacenar, controlar o transmitir. En este sentido, se requieren estudios hidrológicos para determinar la disponibilidad de fuentes naturales y para saber si el abastecimiento de la fuente es adecuado en todo tiempo, o si se requerirá de otras estructuras para corregir las deficiencias o para disponer de los volúmenes excedentes de agua. La seguridad de las presas en lo que concierne a la capacidad del vertedor y a la elevación máxima del embalse, depende, en gran medida, de la determinación de una tormenta de diseño y de su conversión a una avenida generada en la cuenca, o bien directamente de la última, y en menor grado de las olas y la marea generadas por el viento. Asimismo, la estabilidad de muros y terraplenes depende de los estudios hidrológicos e hidráulicos que definen los niveles probables del agua, así como la duración y cambios en el tiempo de dichos niveles. La hidrología juega también un papel importante en la operación efectiva de estructuras hidráulicas, especialmente aquellas que se destinan a la generación de energía y control de avenidas, donde se requiere con frecuencia de pronóstico de avenidas y sequías.

Es así que la hidrología, en cuanto trata con un aspecto importante y vital del medio ambiente, que es el agua, es una ciencia esencial para el aprovechamiento de los recursos hidráulicos y el diseño de obras de defensa. Aunque esta ciencia está lejos de tener un desarrollo completo, existen varios métodos analíticos y estadísticos que son en mayor o menor grado aceptados en la profesión ingenieril.

Los procesos que estudia la hidrología involucran tantas variables que es difícil, si no imposible, prever si alguna vez se aproximará al *status* de ciencia exacta o, incluso, si alguna vez podrá llegar a ser completamente considerada como una ciencia independiente. Las ciencias en que se apoya la investigación hidrológica son básicamente la geografía física, la meteorología, la geología, la hidráulica, las matemáticas y la estadística, aunque también es fácil encontrar relaciones de la hidrología con disciplinas como la física, química, biología, investigación de operaciones y otras. Los límites que separan a la hidrología de estas ciencias no están determinados y no tiene objeto tratar de definirlos rigurosamente. Así como la hidrología es una ciencia muy amplia, interdisciplinaria porque requiere material de otras ciencias para su propia interpretación y uso, el ingeniero especializado en hidrología trabaja integrado a equipos en los que colaboran especialistas en la mayor parte de las disciplinas mencionadas, aunque con frecuencia representa el papel principal y ejerce la función de coordinador del proyecto en algunas de sus etapas.

La hidrología es una parte interesante de la ingeniería, pero en algunos aspectos resulta notablemente diferente de la mayoría de las disciplinas integrantes de ésta. Los fenómenos naturales con los cuales se relaciona no se prestan, al menos hasta ahora, a los análisis rigurosos de la mecánica; por esta razón existe una mayor variedad de métodos, mayor latitud para el criterio y una aparente falta de precisión en la solución de los problemas. A pesar de esto último, la precisión de las soluciones hidrológicas se compara favorablemente con otros tipos de cálculo en ingeniería, donde las incertidumbres se ocultan a menudo con el uso de factores de seguridad, o bien con los procedimientos referentes a la determinación de las propiedades de los materiales.

No obstante la importante función que tiene el hidrólogo en todas las fases del desarrollo de proyectos hidráulicos, es poco común que los estudiantes elijan la hidrología como profesión, ya sea porque esta rama no ha adquirido aún una clara fisonomía como tal, ya sea porque en muchos organismos las posibilidades de progreso profesional del hidrólogo parecen inciertas. Sin embargo, estos factores son cada vez menos un obstáculo para que los estudiantes se orienten hacia la especialización en hidrología.

Una parte importante del trabajo del hidrólogo es la recolección y análisis de datos. La disposición de datos básicos adecuados es esencial en todas las ciencias, y la hidrología no es una excepción. De hecho, las características de los fenómenos naturales con que tiene que ver la hidrología hacen que este punto pueda ser especialmente delicado. Como ya se mencionó, es difícil tratar muchos de los problemas hidrológicos mediante un razonamiento deductivo riguroso, y no siempre es posible comenzar por una ley básica y determinar a partir de ésta el resultado hidrológico deseado. Con frecuencia es necesario partir de un conjunto de hechos observados y, mediante un análisis empírico, establecer las normas sistemáticas que gobiernan tales hechos. Así, el hidrólogo se encuentra en una difícil situación cuando no cuenta con los datos históricos adecuados para la zona particular del problema. Por ello, la mayoría de los países del mundo disponen de una o más agencias gubernamentales que tienen la responsabilidad de recolectar y difundir datos hidrológicos. En México, los organismos encargados de esta recolección y de su publicación en forma de boletines hidrométricos y climatológicos son la Secretaría de Agricultura y Recursos Hídricos (SARH), la Comisión Federal de Electricidad (CFE) y la Comisión Internacional de Límites y Aguas México-Estados Unidos de América, además de algunos otros organismos de carácter local, como el Departamento del Distrito Federal. Es importante que el estudiante conozca la forma en que estos datos son recopilados y publicados, las limitaciones de precisión que tienen y los métodos propios para su interpretación y ajuste.

Las herramientas con que hoy cuenta el hidrólogo son múltiples y muy variadas, pero con frecuencia le son útiles sólo para situarse dentro del orden de magnitud de los parámetros que maneja. Generalmente, cada problema hidrológico es único en cuanto trata con un conjunto diferente de condiciones físicas dentro de una cuenca hidrológica específica, lo que implica que el que trabaja con este tipo de problemas no puede tener una filosofía conformista. Cada nuevo caso es un problema de investigación: éste es uno de los grandes encantos de la hidrología. No es un campo dogmático de la profesión de la ingeniería, sino un reto intelectual sistemático, es un ejercicio de la imaginación y de la inteligencia, de la prudencia y el sentido de la observación.

1.2 BREVE RESEÑA HISTÓRICA

Fijar la fecha exacta del nacimiento de una ciencia es siempre difícil. Esto se aplica particularmente a la hidrología, cuyo origen puede encontrarse en varias esferas conexas: la geografía física, la meteorología, la geología, la hidráulica, etc.

Los inicios de la hidrología se vinculan, por una parte, a las primeras obras de ingeniería de la antigüedad que servían para abastecer de agua a las ciudades o para regar campos de cultivo y, por otra, a los intentos de eminentes eruditos por comprender el medio físico que rodea al hombre.

Entre los conceptos básicos de la hidrología, el de ciclo hidrológico puede considerarse fundamental. Por evidente que este ciclo pueda parecer hoy, hubo de transcurrir mucho tiempo para que se lograra comprender su mecanismo, y ni siquiera los intelectos más brillantes del Renacimiento pudieron evitar algunas hipótesis falsas.

Aunque existen algunas referencias en la literatura más antigua, aparentemente le correspondió a Pierre Perrault el gran mérito de demostrar con evaluaciones cuantitativas en su libro *De l'origine des fontaines*, publicado en 1674, que las precipitaciones y las nevadas son la causa del flujo en los ríos, con lo cual marcó la pauta para el reconocimiento universal del ciclo hidrológico en su interpretación moderna. Lo anterior justificó la decisión de aceptar la obra de Pierre Perrault como principio de la hidrología científica y de celebrar su tricentenario en 1974.

Se acepta que hacia fines del siglo XVII ya existían casi todos los elementos necesarios para fundar la hidrología, pero no se reconocía a ésta como ciencia específica, y sólo se llegó a ese reconocimiento a medida que fue evolucionando en el transcurso de los tres siglos siguientes.

No fue sino hasta el siglo pasado en que la hidrología alcanzó un reconocimiento definitivo como disciplina. Su consolidación fue apoyada durante los

El ciclo hidrológico

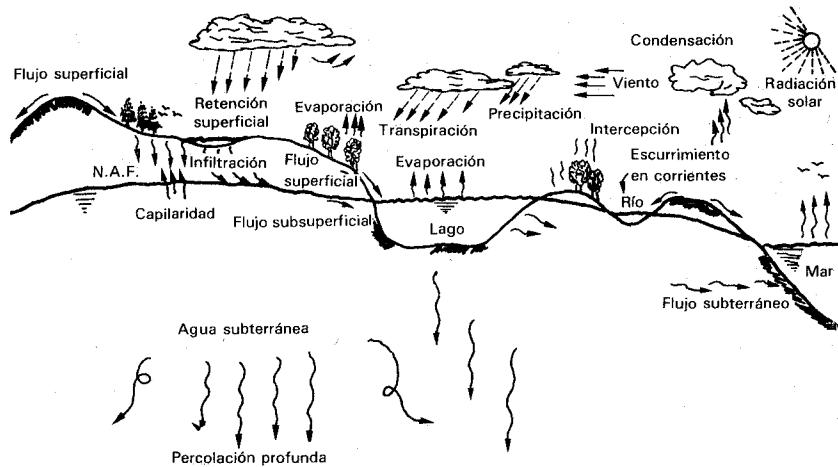


Figura 1.1 Ciclo hidrológico.

últimos sesenta o setenta años por la publicación de una serie de manuales de hidrología, registrándose de esta manera el progreso científico con la aparición de revistas especializadas y con la creación de centros e institutos de investigación hidrológica.

1.3 EL CICLO HIDROLÓGICO

El ciclo hidrológico, como ya se mencionó, se considera el concepto fundamental de la hidrología. De las muchas representaciones que se pueden hacer de él, la más ilustrativa es quizás la descriptiva (véase figura 1.1).

Como todo ciclo, el hidrológico no tiene ni principio ni fin, y su descripción puede comenzar en cualquier punto. El agua que se encuentra sobre la superficie terrestre o muy cerca de ella se evapora bajo el efecto de la radiación solar y el viento. El vapor de agua, que así se forma, se eleva y se transporta por la atmósfera en forma de nubes hasta que se condensa y cae hacia la tierra en forma de precipitación. Durante su trayecto hacia la superficie de la tierra, el agua precipitada puede volver a evaporarse o ser interceptada por las plantas o las construcciones, luego fluye por la superficie hasta las corrientes o se infiltra. El agua interceptada y una parte de la infiltrada y de la que corre por la superficie se evapora nuevamente. De la precipitación que llega a las corrientes, una parte se infiltra y otra llega hasta los océanos y otros grandes

cuerpos de agua, como presas y lagos. Del agua infiltrada, una parte es absorbida por las plantas y posteriormente es transpirada, casi en su totalidad, hacia la atmósfera y otra parte fluye bajo la superficie de la tierra hacia las corrientes, el mar u otros cuerpos de agua, o bien hacia zonas profundas del suelo (percolación) para ser almacenada como agua subterránea y después aflorar en manantiales, ríos o el mar.

BIBLIOGRAFÍA

- 1.1 Chow, V. T. (ed.) *Handbook of Applied Hydrology*. McGraw-Hill, 1964.

2

La cuenca hidrológica

Así como el ciclo hidrológico es el concepto fundamental de la hidrología, la cuenca hidrológica es su unidad básica de estudio. En este capítulo se estudiará este concepto y algunas nociones fundamentales de geomorfología útiles en la ingeniería hidrológica.

2.1 CONCEPTO DE CUENCA

Una cuenca es una zona de la superficie terrestre en donde (si fuera impermeable) las gotas de lluvia que caen sobre ella tienden a ser drenadas por el sistema de corrientes hacia un mismo punto de salida.

La definición anterior se refiere a una cuenca superficial; asociada a cada una de éstas existe también una cuenca subterránea, cuya forma en planta es semejante a la superficial. De ahí la aclaración de que la definición es válida si la superficie fuera impermeable.

Desde el punto de vista de su salida, existen fundamentalmente dos tipos de cuencas: endorreicas y exorreicas. En las primeras el punto de salida está dentro de los límites de la cuenca y generalmente es un lago; en las segundas, el punto de salida se encuentra en los límites de la cuenca y está en otra corriente o en el mar (véase figura 2.1).

2.2 CARACTERÍSTICAS DE LA CUENCA Y LOS CAUCES

El ciclo hidrológico, visto a nivel de una cuenca, se puede esquematizar como un estímulo, constituido por la precipitación, al que la cuenca responde mediante el escurreimiento en su salida. Entre el estímulo y la respuesta ocurren varios fenómenos que condicionan la relación entre uno y otra, y que están

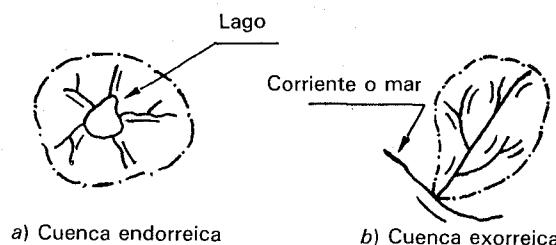


Figura 2.1 Tipos de cuencas.

controlados por las características geomorfológicas de la cuenca y su urbanización. Dichas características se clasifican en dos tipos, según la manera en que controlan los fenómenos mencionados: las que condicionan el *volumen de escurrimiento*, como el área de la cuenca y el tipo de suelo, y las que *condicionan la velocidad de respuesta*, como son el orden de corrientes, pendiente de la cuenca y los cauces, etc. A continuación se describen las características de la cuenca y los cauces de mayor importancia por sus efectos en la relación precipitación-escurrimiento.

El *parteaguas* es una línea imaginaria formada por los puntos de mayor nivel topográfico y que separa la cuenca de las cuencas vecinas (véase figura 2.2).

El *área de la cuenca* se define como la superficie, en proyección horizontal, delimitada por el parteaguas (véase figura 2.2).

La *corriente principal* de una cuenca es la corriente que pasa por la salida de la misma. Nótese que esta definición se aplica solamente a las cuencas exorreicas. Las demás corrientes de una cuenca de este tipo se denominan corrientes tributarias. Todo punto de cualquier corriente tiene una cuenca de aportación, toda cuenca tiene una y sólo una corriente principal. Las cuencas

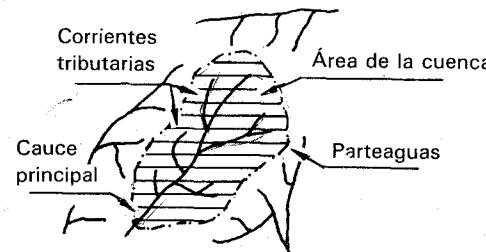


Figura 2.2

correspondientes a las corrientes tributarias o a los puntos de salida se llaman cuencas tributarias o subcuenca.

Entre más corrientes tributarias tenga una cuenca, es decir, entre mayor sea el grado de bifurcación de su sistema de drenaje, más rápida será su respuesta a la precipitación. Por ello, se han propuesto un cierto número de indicadores de dicho grado de bifurcación, algunos de los cuales son los siguientes:

El *orden de corrientes* (referencia 2.1) se determina como se muestra en la figura 2.3. Una corriente de orden 1 es un tributario sin ramificaciones, una de orden 2 tiene sólo tributarios de primer orden, etc. Dos corrientes de orden 1 forman una de orden 2, dos corrientes de orden 3 forman una de orden 4, etc., pero, por ejemplo, una corriente de orden 2 y una de orden 3 forman otra de orden 3. El orden de una cuenca es el mismo que el de la corriente principal en su salida; así, por ejemplo, el orden de la cuenca de la figura 2.3 es 4. Nótese que el orden de una cuenca depende en mucho de la escala del plano utilizado para su determinación; en este sentido, las comparaciones entre una cuenca y otra deben hacerse con cuidado, especialmente cuando los planos correspondientes no están a la misma escala o están editados por diferentes organismos.

Otros indicadores del grado de bifurcación o eficiencia de una cuenca son la densidad de corrientes D_s , definida como el número de corrientes permanentes e intermitentes por unidad de área y la densidad de drenaje D_d , definida como la longitud de corrientes por unidad de área:

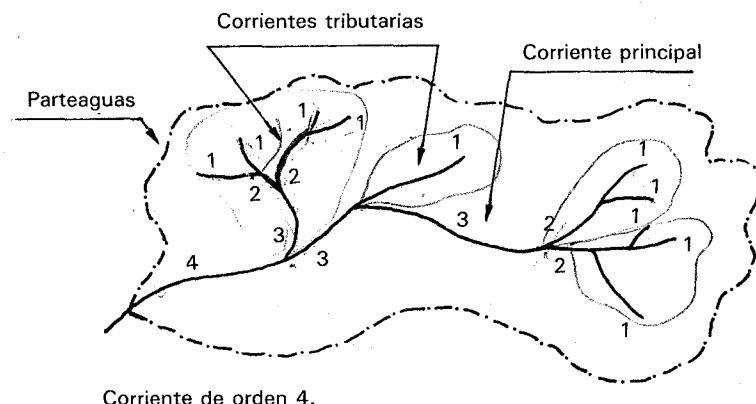


Figura 2.3 Cuenca hidrológica.

$$D_s = \frac{Ns}{A} \quad (2.1)$$

$$D_d = \frac{Ls}{A} \quad (2.2)$$

donde Ns = número de corrientes perennes e intermitentes

Ls = longitud total de las corrientes

y A = área de la cuenca

Un orden de corrientes alto o una densidad elevada refleja una cuenca altamente disectada, que responde rápidamente a una tormenta. Las densidades u órdenes de corrientes pequeñas se observan donde los suelos son muy resistentes a la erosión o muy permeables; donde estos indicadores son elevados, los suelos se erosionan fácilmente o son relativamente impermeables, las pendientes son altas y la cobertura vegetal es escasa.

Uno de los indicadores más importantes del grado de respuesta de una cuenca a una tormenta es la pendiente del cauce principal. Dado que esta pendiente varía a lo largo del cauce, es necesario definir una pendiente media; para ello existen varios métodos, de los cuales se mencionan tres:

- a) La pendiente media es igual al desnivel entre los extremos de la corriente dividido entre su longitud medida en planta (véase figura 2.4a).

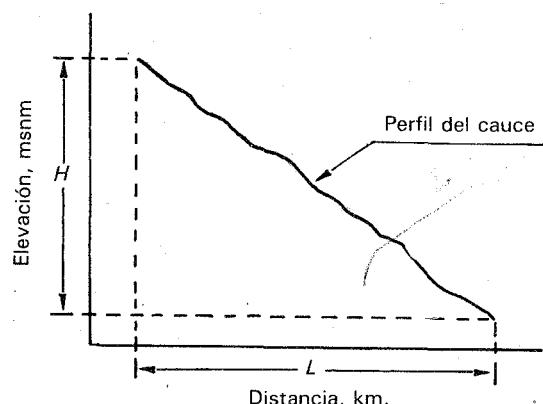


Figura 2.4a Pendiente del cauce principal.

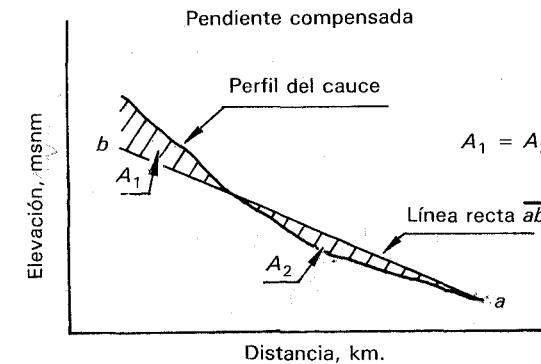


Figura 2.4b Pendiente del cauce principal.

- b) La pendiente media es la de una línea recta que, apoyándose en el extremo de aguas abajo de la corriente, hace que se tengan áreas iguales entre el perfil del cauce y arriba y abajo de dicha línea (véase figura 2.4b).
- c) Taylor y Schwarz (referencia 2.2) proponen calcular la pendiente media como la de un canal de sección transversal uniforme que tenga la misma longitud y tiempo de recorrido que la corriente en cuestión.

La velocidad de recorrido del agua en el tramo i puede calcularse como (referencia 2.3):

$$V_i = k \sqrt{S_i} \quad (2.3)$$

donde k es un factor que depende de la rugosidad y la forma de la sección transversal y S_i es la pendiente del tramo i . Además, por definición:

$$V_i = \frac{\Delta x}{t_i} \quad (2.4)$$

donde Δx es la longitud del tramo i (véase figura 2.4 c) y t_i es el tiempo de recorrido en ese tramo. De 2.3 y 2.4 se obtiene:

$$t_i = \frac{\Delta x}{k \sqrt{S_i}} \quad (2.5)$$

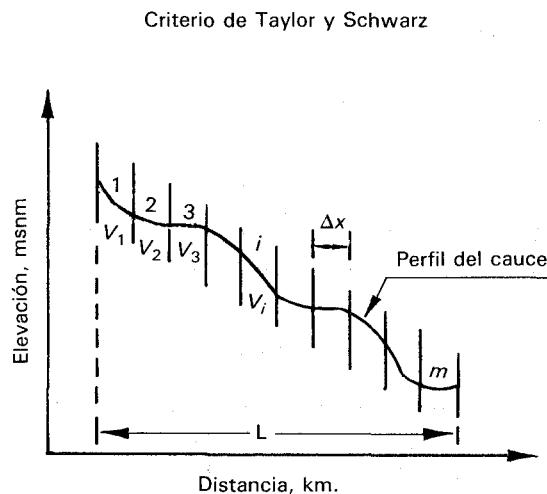


Figura 2.4c Pendiente del cauce principal.

Por otra parte, la velocidad media de recorrido en todo el cauce dividido en m tramos es:

$$V = \frac{L}{T} = k \sqrt{S} \quad (2.6)$$

donde L es la longitud total del cauce, T es el tiempo total de recorrido y S es la pendiente media buscada. El tiempo T será naturalmente (ecuación 2.5):

$$T = \sum_{i=1}^m t_i = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta x}{k \sqrt{S_i}} \quad (2.7)$$

y la longitud L :

$$L = \sum_{i=1}^m \Delta x = m \Delta x \quad (2.8)$$

Finalmente, usando las ecuaciones 2.6, 2.7 y 2.8 y despejando S se obtiene:

$$S = \left[\frac{m}{\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{S_m}}} \right]^2 \quad (2.9)$$

Mediante un razonamiento semejante se puede obtener la siguiente fórmula para el caso en que las longitudes de los tramos no sean iguales:

$$S = \left[\frac{L}{\frac{l_1}{\sqrt{S_1}} + \frac{l_2}{\sqrt{S_2}} + \dots + \frac{l_m}{\sqrt{S_m}}} \right]^2 \quad (2.10)$$

donde l_i es la longitud del tramo i .

Las corrientes se clasifican de varias maneras, pero las más interesantes en la ingeniería hidrológica son tal vez las siguientes:

- a) *Por el tiempo en que transportan agua.* Según esta clasificación las corrientes pueden ser perennes, intermitentes o efímeras (véase figura 2.5).

En una corriente perenne el punto más bajo del cauce se encuentra siempre abajo del nivel de aguas freáticas. Estas corrientes transportan agua durante todo el año y siempre están alimentadas, totalmente o en parte, por el agua subterránea, es decir, son *efluentes*. Una corriente intermitente transporta agua durante la época de lluvias de cada año, cuando el nivel freático asciende hasta quedar por encima del punto A (figura 2.5 b). En época de secas el nivel freático queda por abajo de dicho punto y la corriente no transporta agua, salvo cuando se presenta alguna tormenta. En el caso de las corrientes efímeras o *influentes* el nivel freático está siempre abajo del punto A (figura 2.5c) y transportan agua inmediatamente después de una tormenta, y, en este caso, alimentan a los almacenamientos de agua subterránea.

- b) *Por su posición topográfica o edad geológica.* De acuerdo con esta clasificación los ríos pueden ser de montaña o juveniles, de transición o maduros, o bien de planicie o viejos (véase figura 2.6).

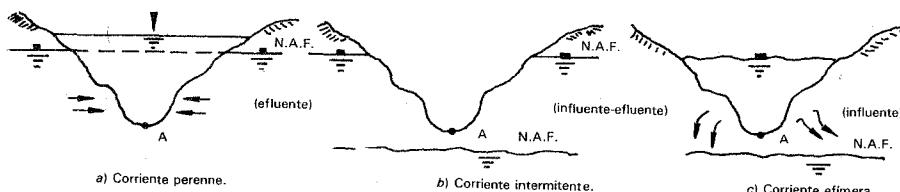
La cuenca hidrológica

Figura 2.5 Clasificación de corrientes (por el tiempo en que transportan agua).

En un mismo cauce se pueden encontrar los tres tipos de ríos. Los ríos de montaña, característicos de cotas elevadas sobre el nivel del mar, tienen grandes pendientes y pocas curvas y, debido a las altas velocidades que alcanza el agua, sus cauces están generalmente formados por cantes rodados con un poco de grava y casi nada de finos. Los ríos de planicie, por el contrario, presentan numerosos meandros debido a las bajas velocidades del agua y su cauce se forma por arenas y finos. En general, estos ríos se encuentran en cotas cercanas al nivel del mar. Los ríos de transición están en una situación intermedia entre los dos anteriores: presentan algunas curvas, con velocidades de agua moderadas y sus cauces están formados básicamente por grava, con algo de cantes rodados y arena.

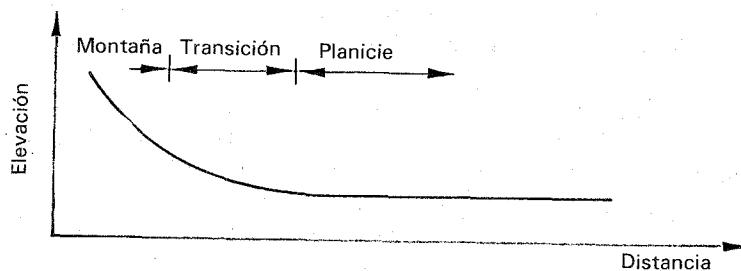


Figura 2.6 Clasificación de corrientes (por su posición topográfica o edad geológica).

BIBLIOGRAFÍA

- 2.1 Horton, R.E. *Erosional Development of Streams*, Geol. Soc. Am. Bull., vol. 56, pp. 281-283, 1945.
- 2.2 Taylor, A.B. y Schwarz, H.E. *Unit-Hydrograph Lag and Peak Flow Related to Drainage Basin Characteristics*, Trans. Am. Geophys. Union, vol. 33, pp. 235-246, abril de 1952.
- 2.3 Chow, V.T. *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, 1966.

Escurrimiento

El escurrimiento se define como el agua proveniente de la precipitación que circula sobre o bajo la superficie terrestre y que llega a una corriente para finalmente ser drenada hasta la salida de la cuenca.

El agua proveniente de la precipitación que llega hasta la superficie terrestre —una vez que una parte ha sido interceptada y evaporada— sigue diversos caminos hasta llegar a la salida de la cuenca. Conviene dividir estos caminos en tres clases: escurrimiento superficial, escurrimiento subsuperficial y escurrimiento subterráneo.

3.1 FUENTES DE LOS DIFERENTES TIPOS DE ESCURRIMIENTO

Una vez que la precipitación alcanza la superficie del suelo, se infiltra hasta que las capas superiores del mismo se saturan. Posteriormente, se comienzan a llenar las depresiones del terreno y, al mismo tiempo, el agua comienza a escurrir sobre su superficie. Este escurrimiento, llamado *flujo en la superficie del terreno*,* se produce mientras el agua no llegue a cauces bien definidos (es decir, que no desaparezcan entre dos tormentas sucesivas). En su trayectoria hacia la corriente más próxima, el agua que fluye sobre el terreno se sigue infiltrando, e incluso se evapora en pequeñas cantidades. Una vez que llega a un cauce bien definido se convierte en *escurrimiento en corrientes*.

El flujo sobre el terreno, junto con el escurrimiento en corrientes, forma el *escurrimiento superficial*. Una parte del agua de precipitación que se infiltra escurre cerca de la superficie del suelo y más o menos paralelamente a él. A esta parte del escurrimiento se le llama *escurrimiento subsuperficial*;

* En lengua inglesa se denomina *overland flow*.

la otra parte, que se infiltra hasta niveles inferiores al freático, se denomina *escurrimiento subterráneo*.

De los tres tipos de escurrimiento, el superficial es el que llega más rápido hasta la salida de la cuenca. Por ello está relacionado directamente con una tormenta particular y entonces se dice que proviene de la *precipitación en exceso o efectiva* y que constituye el *escurrimiento directo*. El escurrimiento subterráneo es el que de manera más lenta llega hasta la salida de la cuenca (puede tardar años en llegar), y, en general, difícilmente se le puede relacionar con una tormenta particular, a menos que la cuenca sea demasiado pequeña y su suelo muy permeable. Debido a que se produce bajo el nivel freático, es el único que alimenta a las corrientes cuando no hay lluvias y por eso se dice que forma el *escurrimiento base*.

El escurrimiento subsuperficial puede ser casi tan rápido como el superficial o casi tan lento como el subterráneo, dependiendo de la permeabilidad de los estratos superiores del suelo; por ello es difícil distinguirlo de los otros dos. Cuando es relativamente rápido se le trata junto con el escurrimiento superficial, y cuando es relativamente lento se le considera parte del subterráneo.

La clasificación anterior, aunque ilustrativa, no deja de ser arbitraria. El agua puede comenzar su viaje hacia la corriente como flujo superficial e infiltrarse en el camino, terminando como escurrimiento subsuperficial o subterráneo. A la inversa, el escurrimiento subsuperficial puede emergir a la superficie si en su camino se encuentra con un estrato muy permeable que aflora en una ladera. Lo importante en realidad es la rapidez con que una cuenca responde a una tormenta, pues esto es lo que determina la magnitud de las correspondientes avenidas.

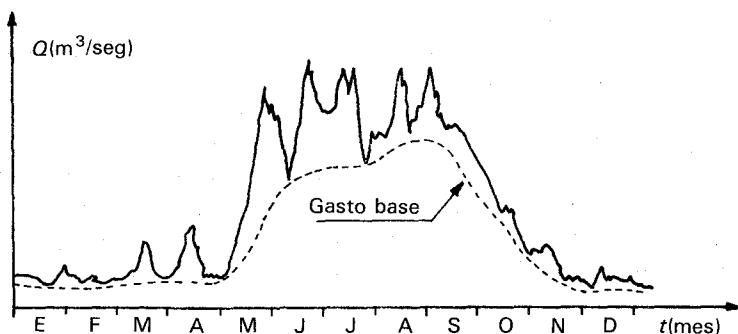


Figura 3.1 Hidrograma.

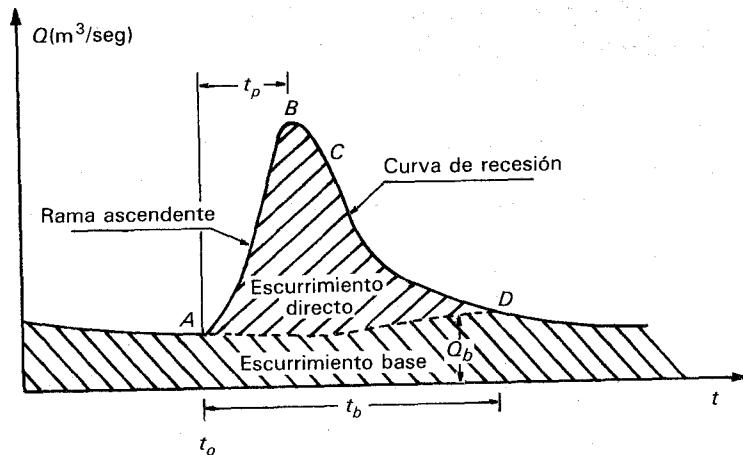


Figura 3.2 Hidrograma aislado.

3.2 HIDROGRAMAS Y SU ANÁLISIS

Si se mide el gasto (que se define como el volumen de escurrimiento por unidad de tiempo) que pasa de manera continua durante todo un año por una determinada sección transversal de un río y se grafican los valores obtenidos contra el tiempo, se obtendría una gráfica como la de la figura 3.1.

Una gráfica como la anterior se denomina *hidrograma anual*; si la escala del tiempo se amplía de tal manera que se pueda observar el escurrimiento producido por una sola tormenta, se tendrá una gráfica como la que se muestra en la figura 3.2. Aunque la forma de los hidrogramas producidos por tormentas particulares varía no sólo de una cuenca a otra sino también de tormenta a tormenta, es posible, en general, distinguir las siguientes partes en cada hidrograma (véase figura 3.2):

A: punto de levantamiento. En este punto, el agua proveniente de la tormenta bajo análisis comienza a llegar a la salida de la cuenca y se produce inmediatamente después de iniciada la tormenta, durante la misma o incluso cuando ha transcurrido ya algún tiempo después de que cesó de llover, dependiendo de varios factores, entre los que se pueden mencionar el tamaño de la cuenca, su sistema de drenaje y suelo, la intensidad y duración de la lluvia, etc.

B: pico. Es el gasto máximo que se produce por la tormenta. Con frecuencia es el punto más importante de un hidrograma para fines de diseño.

C: punto de inflexión. En este punto es aproximadamente cuando termina el flujo sobre el terreno,* y, de aquí en adelante, lo que queda de agua en la cuenca escurre por los canales y como escurrimiento subterráneo.

D: final del escurrimiento directo. De este punto en adelante el escurrimiento es sólo de origen subterráneo. Normalmente se acepta como el punto de mayor curvatura de la curva de recesión, aunque pocas veces se distingue de fácil manera.

T_p: tiempo de pico. Es el tiempo que transcurre desde el punto de levantamiento hasta el pico del hidrograma.

T_b: tiempo base. Es el tiempo que transcurre desde el punto de levantamiento hasta el punto final del escurrimiento directo. Es, entonces, el tiempo que dura el escurrimiento directo.

Rama ascendente. Es la parte del hidrograma que va desde el punto de levantamiento hasta el pico.

Rama descendente o curva de recesión. Es la parte del hidrograma que va desde el pico hasta el final del escurrimiento directo. Tomada a partir del punto de inflexión, es una curva de vaciado de la cuenca.

El tiempo base de un hidrograma aislado puede ser desde algunos minutos hasta varios días, y el pico puede tener valores del orden de unos cuantos litros por segundo hasta miles de metros cúbicos por segundo.

El área bajo el hidrograma, $\int_{t_0}^t Qdt$, es el volumen total escurrido; el área bajo el hidrograma y arriba de la línea de separación entre gasto base y directo, $\int_{t_0}^t (Q-Q_b)dt$, es el volumen de escurrimiento directo.

Debido a que el escurrimiento directo proviene de la precipitación, casi siempre aporta un componente del gasto total en un hidrograma mucho mayor que el que genera el escurrimiento base. Por otra parte, el escurrimiento base está

* Ver apartado 3.1 para la definición de este término.

formado normalmente por agua proveniente de varias tormentas que ocurrieron antes de la considerada y es muy difícil determinar a cuáles pertenece. Para poder correlacionar la precipitación con los hidrogramas que genera es necesario antes separar el gasto base del directo. En vista de que rara vez es posible conocer con precisión la evolución de los niveles freáticos durante una tormenta y que el punto *D* de un hidrograma (véase figura 3.2) es generalmente difícil de distinguir, la tarea de separar el gasto base del directo no es sencilla en la mayoría de los casos. Existen varios métodos, algunos de los cuales se describen a continuación, para separar el gasto base del directo, pero la palabra final la tiene el criterio y buen juicio del ingeniero.

- El método más simple consiste en trazar una línea recta horizontal a partir del punto *A* del hidrograma. Aunque este método puede dar resultados con buena aproximación, de manera especial en tormentas pequeñas donde los niveles freáticos no se alteran mayormente, en general sobreestima el tiempo base y el volumen de escurrimiento directo.
- Otro método es el de determinar una curva tipo vaciado del escurrimiento base, analizando varios hidrogramas y seleccionando aquellos tramos en que sólo exista escurrimiento base. En el ejemplo de la figura 3.3 estos tramos podrían ser los *a - b*, *c - d*, *e - f*, *g - h*, etc. Los tramos seleccionados se dibujan posteriormente en papel semilogarítmico de manera que sus extremos inferiores sean tangentes a una línea (véase figura 3.4).

Si uno de los tramos seleccionados está formado por escurrimiento directo, se nota de inmediato que no es tangente a dicha línea; por ello estos tramos se eliminan del análisis. La línea resultante se llama *curva de vaciado* del gasto base. El punto *D* del hidrograma (véase figura 3.2) se localiza superponiendo la curva de vaciado —dibujada en papel aritmético y a la misma escala que el hidrograma— a la curva de recesión

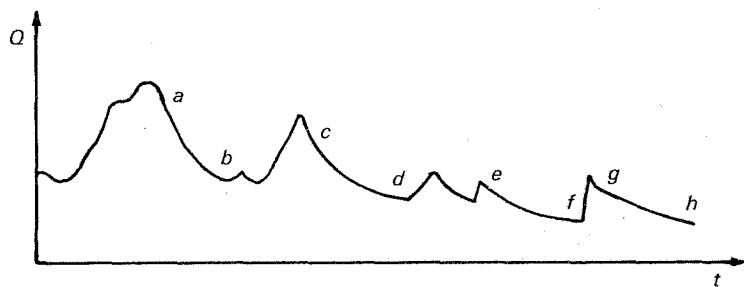


Figura 3.3

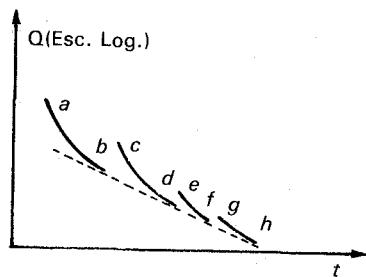


Figura 3.4

- del hidrograma (véase figura 3.5). El punto D se encuentra entonces donde ambas líneas se separan. Este método es más preciso que el anterior, pero tiene la desventaja de que se requiere contar con varios hidrogramas registrados anteriormente, lo que no siempre es posible.
- c) Se han realizado numerosos intentos de correlacionar el tiempo de vaciado del escurreimiento directo con algunas características de las cuencas. El método que mejores resultados ha tenido es el que relaciona dicho tiempo con el área de la cuenca. Una relación muy utilizada es la siguiente (referencia 3.1):

$$N = 0.827 A^{0.2} \quad (3.1)$$

donde N = tiempo de vaciado del escurreimiento directo en días y A = área de la cuenca en km^2 . El punto D del hidrograma estará un tiempo de N días después del pico (véase figura 3.6).

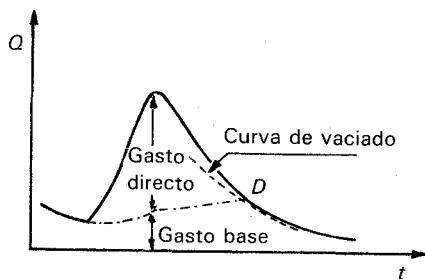


Figura 3.5

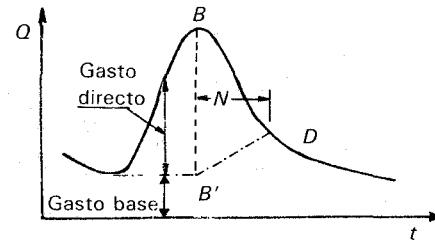


Figura 3.6

Este método es útil en cuencas con un área no menor de unos 3 km^2 . Sus resultados son en general aceptables, aunque, como en todos los demás, deben tomarse con precaución.

- d) Otro método más consiste en buscar el punto de mayor curvatura de la curva de recesión del hidrograma. Esto se puede hacer de la siguiente manera: sea un hidrograma en el que se tienen los gastos señalados en la columna 3 de la tabla 3.1. Una vez ordenados los gastos en la tabla, se dividen entre los ocurridos un Δt fijo después $Q_{+\Delta t}$ (6 h en el ejemplo). Posteriormente se dibujan los cocientes $Q/Q_{+\Delta t}$ contra el tiempo; en el punto donde ocurra un cambio de pendiente se tiene la mayor curvatura de la rama descendente y por tanto el punto D (véase figura 3.7).

Tabla 3.1

1 día	2 hora	3 Q m^3/s	4 $Q_{+\Delta t}$ m^3/s	5 $Q/Q_{+\Delta t}$ m^3/s
5	12	60.1	47.5	1.27
	18	47.5	39.0	1.22
	24	39.0	33.2	1.18
6	6	33.2	28.6	1.16
	12	28.6	25.2	1.13
	18	25.2	22.7	1.11
	24	22.7	20.9	1.09
7	6	20.9	19.7	1.06
	12	19.7	18.9	1.04
	18	18.9	18.2	1.04
	24	18.2		

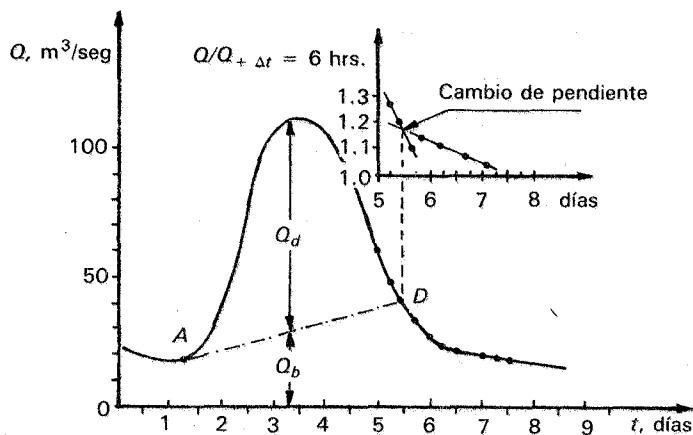


Figura 3.7

Una vez localizado el punto *D* por medio de cualquiera de los métodos anteriores o de algún otro, resta trazar la línea de separación entre el gasto base y el directo.

Para hacer lo anterior también existen varios criterios. El más simple es trazar una línea recta desde el punto *A* hasta el *D* como en la figura 3.7. Otro método es el de continuar hacia atrás la curva de vaciado del gasto base hasta el tiempo en que ocurre el pico y de ahí unir la prolongación con el punto *A* del hidrograma. Otro posible procedimiento es trazar dos líneas rectas, una horizontal a partir del punto *A* hasta el tiempo en que ocurre el pico y otra desde este punto hasta el *D* como se muestra en la figura 3.6.

Ninguno de estos procedimientos de separación es completamente preciso; sin embargo, se puede aceptar un error en la posición del punto *D* de una o dos veces la duración de la tormenta, pues el área bajo esta parte del hidrograma es, en general, sólo un pequeño porcentaje del volumen total escurrido (referencia 3.2).

3.3 AFORO

Aforar una corriente significa determinar a través de mediciones el gasto que pasa por una sección dada.

En México se usan básicamente tres tipos de métodos para aforar corrientes, a saber:

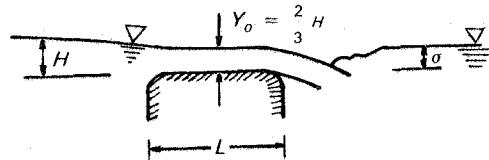


Figura 3.8

- Secciones de control.
- Relación sección-pendiente.
- Relación sección-velocidad.

3.3.1 Sección de control

Una *sección de control* de una corriente se define como aquella en la que existe una relación única entre el tirante y el gasto. De los muchos tipos de secciones de control que se pueden usar para aforar una corriente, los más comunes son los que producen un tirante crítico y los vertedores.

Se forma un tirante crítico elevando el fondo del cauce, estrechándolo o con una combinación de las dos técnicas. Cuando se utiliza la primera (véase figura 3.8), el gasto se calcula usando la fórmula de vertedores de pared gruesa:

$$Q = \frac{2}{3} B H \frac{\sqrt{2}}{3} g H = 1.7 B H^{3/2} \quad (3.2)$$

donde *B* es el ancho del cauce en m, *g* es la aceleración de la gravedad en m/s^2 , *H* es la carga sobre el vertedor (véase figura 3.8) en m y *Q* es el gasto

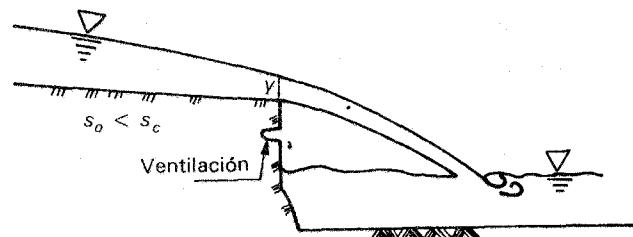


Figura 3.9

en m^3/s . Para que el dispositivo de la figura 3.8 tenga un buen funcionamiento, se recomienda que:

$$3 < \frac{L}{H} < 4 \quad (3.3)$$

$$\sigma < 0.8 H \quad (3.4)$$

Otra manera de provocar la formación de un tirante crítico es cuando la topografía permite disponer de una caída libre (véase figura 3.9); en este caso el gasto se calcula con el tirante medido justo en la caída y:

$$Q = 1.65By \sqrt{y} \quad (3.5)$$

donde y está en m, g en m/s^2 , B en m y Q en m^3/s .

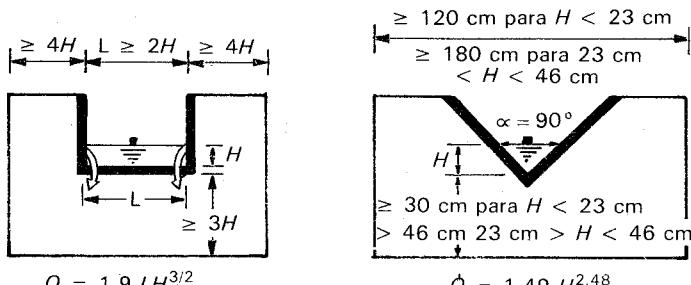
Los vertedores de pared delgada recomendables para realizar aforos son el triangular con ángulo de 90° para gastos pequeños (de 0 a 100 $1/\text{s}$) y el rectangular para gastos mayores (de 100 a 1 000 $1/\text{s}$) (véase figura 3.10).

Si se usa un vertedor rectangular con las dimensiones especificadas en la figura 3.10a, el gasto se calcula como:

$$Q = 1.9L H^{3/2} \quad (3.6)$$

y con un vertedor triangular como el de la figura 3.10b, el gasto es:

$$Q = 1.49 H^{2.48} \quad (3.7)$$



a) Vertedor rectangular.

b) Vertedor triangular. ($\alpha = 90^\circ$).

Figura 3.10 Vertedores de pared delgada.

Aforo

En las ecuaciones 3.6 y 3.7 H es la carga sobre la cresta del vertedor en m, medida a una distancia de cuando menos $4H$ aguas arriba de la cresta; L es la longitud de la cresta en m (ecuación 3.6) y Q es el gasto en m^3/s .

El método de las secciones de control es el más preciso de todos para el aforo, pero presenta algunos inconvenientes. En primer lugar, es relativamente costoso y, en general, sólo se puede usar cuando los gastos no son muy altos. En el caso de los estrechamientos se restringe el transporte de objetos arrastrados por la corriente y la sección puede obstruirse. Un inconveniente de los vertedores es que generan un remanso aguas arriba de la sección. Por ello, este método es adecuado en ríos pequeños, cauces artificiales (como por ejemplo canales de riego) o cuencas experimentales.

3.3.2 Relación sección-pendiente

Este método se utiliza para estimar el gasto máximo que se presentó durante una avenida reciente en un río donde no se cuenta con ningún otro tipo de aforos. Para su aplicación se requiere solamente contar con topografía de un tramo del cauce y las marcas del nivel máximo del agua durante el paso de la avenida. Según la fórmula de Manning, la velocidad es:

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} S_f^{1/2} \quad (3.8)$$

donde R = radio hidráulico, S_f = pendiente de la línea de energía específica y n = coeficiente de rugosidad. Además, de la ecuación de continuidad se tiene que:

$$Q = v A \quad (3.9)$$

donde A es el área hidráulica.

Aplicando la ecuación de Bernoulli (referencia 3.4) entre los extremos inicial y final del tramo (véase figura 3.11) resulta:

$$z_1 + y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_f \quad (3.10)$$

De las ecuaciones 3.9 y 3.10 se obtiene:

$$h_f = \Delta y + \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2} \right) \quad (3.11)$$

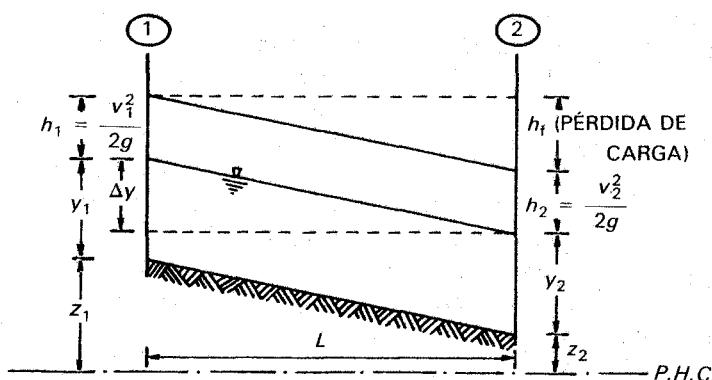


Figura 3.11

donde $\Delta y = (z_1 + y_1) - (z_2 + y_2)$ = diferencia en elevación de las marcas del nivel máximo del agua en los extremos del tramo. Para tomar en cuenta las pérdidas locales conviene escribir la ecuación 3.11 en la forma:

$$h_f = \Delta y + \frac{Q^2}{bg} \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2} \right) \quad (3.12)$$

donde $b = 2$ si $A_1 > A_2$ y $b = 4$ si $A_2 > A_1$

Utilizando las ecuaciones 3.8 y 3.9 se puede escribir:

$$Q = \frac{A}{n} R^{2/3} S_f^{1/2} = \bar{K}_d S_f^{1/2} \quad (3.13)$$

donde $\bar{K}_d = \frac{AR^{2/3}}{n}$ es el *coeficiente de conducción medio en el tramo* que puede calcularse como el promedio geométrico de los coeficientes de conducción en los extremos del mismo:

$$\bar{K}_d = \sqrt{K_{d1} K_{d2}}; K_{di} = \frac{A_i R_i^{2/3}}{n_i} \quad (3.14)$$

Utilizando las ecuaciones 3.12 y 3.13 y tomando en cuenta que $h_f = S_f L$, se obtiene:

$$\frac{Q^2}{\bar{K}_d^2} = \frac{\Delta y}{L} + \frac{Q^2}{bgL} \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2} \right) \quad (3.15)$$

despejando Q :

$$Q = \frac{\sqrt{\Delta y/L}}{\sqrt{\frac{1}{\bar{K}_d^2} - \frac{1}{bgL} \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2} \right)}} \quad (3.16)$$

Con la ecuación 3.16 es posible estimar el gasto de pico de una avenida si se conocen las marcas del nivel máximo del agua en las márgenes, la rugosidad del tramo y la topografía del mismo.

3.3.3 Relación sección-velocidad

Este es el método más usado en México para aforar corrientes. Consiste básicamente en medir la velocidad en varios puntos de la sección transversal y después calcular el gasto por medio de la ecuación de continuidad 3.9.

La velocidad del flujo en una sección transversal de una corriente tiene una distribución como la que se muestra en la figura 3.12.

Para determinar el gasto no es suficiente entonces medir la velocidad en un solo punto, sino que es necesario dividir la sección transversal del cauce en varias subsecciones llamadas *dovelas*. El gasto que pasa por cada dovela es:

$$q_i = a_i v_{mi} \quad (3.17)$$

donde a_i es el área de la dovela i y v_{mi} es la velocidad media en la misma dovela.

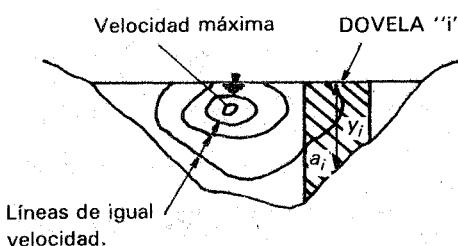


Figura 3.12

La velocidad media v_{mi} se puede tomar como la medida a una profundidad de $0.6 y_i$ aproximadamente, donde y_i es el tirante medido al centro de la dovela (véase figura 3.12) cuando y_i no es muy grande; en caso contrario, conviene tomar al menos dos medidas a profundidades de $0.2 y_i$ y $0.8 y_i$; así la velocidad media es:

$$v_{mi} = \frac{v_{20} + v_{80}}{2} \quad (3.18)$$

donde v_{20} y v_{80} son las velocidades medidas a $0.2 y_i$ y $0.8 y_i$ respectivamente. Cuando y_i es muy grande, puede ser necesario tomar tres o más lecturas de velocidad en la dovela. Es recomendable, además, medir la profundidad de cada dovela cada vez que se haga un aforo. Entonces, el gasto total será:

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i \quad (3.19)$$

donde n es el número de dovelas.

La velocidad se mide con unos aparatos llamados molinetes (véase figura 3.13) que tienen una hélice o rueda de aspas o copas que gira impulsada por la corriente y, mediante un mecanismo eléctrico, transmiten por un cable el número de revoluciones por minuto o por segundo con que gira la hélice. Esta velocidad angular se traduce después a velocidad del agua usando una fórmula de calibración que previamente se determina para cada aparato en particular.

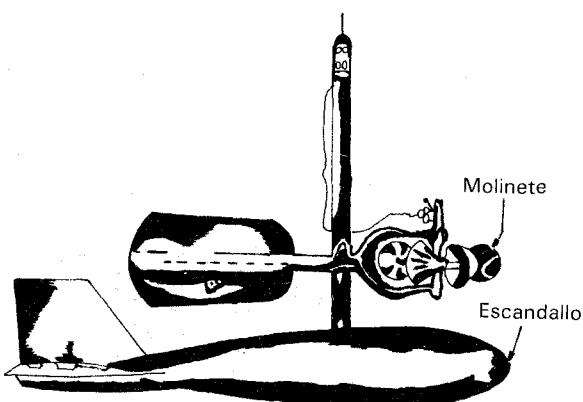


Figura 3.13

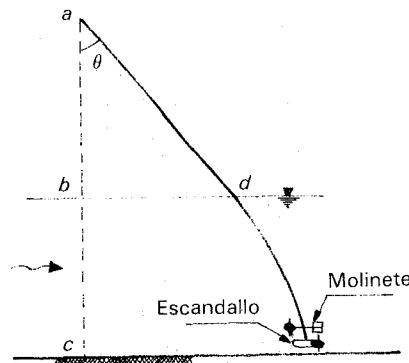


Figura 3.14

Para que el molinete pueda colocarse a la profundidad deseada se fija a un peso hecho de plomo y con forma hidrodinámica, llamado escandallo (véase figura 3.13). La posición que adopta el molinete con el escandallo se muestra en la figura 3.14. La profundidad a la que se hace la medición se calcula usando la fórmula (véase figura 3.14):

$$\overline{bc} = (1 - K) \overline{de} \quad (3.20)$$

donde K es un coeficiente de corrección que se calcula en función del ángulo θ (véase figura 3.14) mediante la tabla 3.2.

Al hacer mediciones con este método conviene seguir los siguientes pasos (referencia 3.5):

- Medir la distancia \overline{ab} .
- Sumergir el escandallo hasta que toque el fondo del río y medir \overline{ae} .
- Calcular \overline{ad} como $\overline{ab} \sec \theta$.
- Restar \overline{ad} de \overline{ae} para obtener \overline{de} .
- Multiplicar \overline{de} por $(1 - K)$ (ecuación 3.20) para obtener \overline{bc} .

El punto a donde se coloca el operador para hacer el aforo puede estar situado en un puente o en una cáñastilla suspendida de un cable.

En algunos casos se aceptan aforos hechos desde un bote, aunque este método no es muy recomendable debido a que se perturba el flujo y el bote es arrastrado por la corriente, impidiendo que el aforo se haga en una sección transversal a la dirección del flujo. Por otra parte, las mediciones desde puen-

Tabla 3.2

θ°	K
4	0.0006
6	0.0016
8	0.0032
10	0.0050
12	0.0072
14	0.0098
16	0.0128
18	0.0164
20	0.0204
22	0.0248
24	0.0296
26	0.0350
28	0.0408
30	0.0472
32	0.0544
34	0.0620
36	0.0698

tes son más recomendables cuando éstos son de un solo claro, pues las pilas o pilotes dentro del cauce producen distorsiones en las líneas de corriente, lo que puede introducir errores de consideración en los aforos.

El principal inconveniente de este método es que cada aforo toma un tiempo relativamente largo (del orden de una hora o más en algunos casos), por lo que durante una avenida se pueden hacer sólo unas cuantas mediciones, lo que podría no ser suficiente para conformar todo el hidrograma y menos aún determinar el pico. Este problema se puede disminuir si se dibujan curvas de elevación del nivel del agua contra el gasto, permitiendo, con ayuda de un registro continuo de niveles en la sección, determinar el gasto en cualquier instante.

3.3.4 Otros métodos

Existen otros métodos con los que es posible realizar aforos. Uno de ellos es el de trazadores, que consiste en soltar una cantidad conocida de partículas fluorescentes, radiactivas, etc., en una sección situada a una cierta distancia aguas arriba de la sección de aforos para medir el tiempo que tardan en llegar a la última. Esto se puede hacer visualmente, con contadores de radiactividad o con algún otro procedimiento, dependiendo del tipo de partículas usadas. Este y otros métodos aún se encuentran en la etapa de experimentación y su uso todavía está limitado en la práctica.

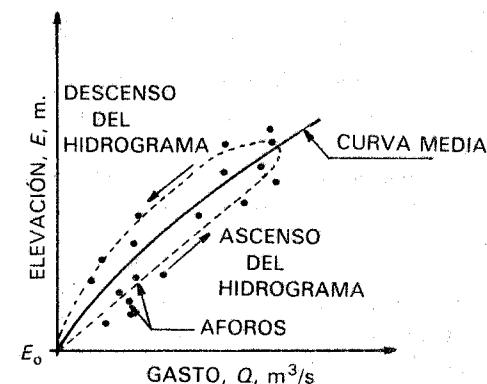


Figura 3.15 Curva elevaciones-gastos

3.3.5 Curvas elevaciones-gastos

Una curva elevaciones-gastos relaciona la elevación de la superficie libre del agua con el gasto que pasa por la sección, y se construye con datos obtenidos de varios aforos. En general, la sección de aforos del río no es una sección de control, por lo que la relación tirantes-gastos no es única. En la figura 3.15 se muestra una curva elevaciones-gastos típica. La histéresis —es decir, el diferente comportamiento que observa la elevación de la superficie libre del agua cuando el gasto aumenta y cuando disminuye— que se muestra en la curva de la figura 3.15 se debe a que la pendiente hidráulica del flujo es mayor durante el ascenso de los hidrogramas que durante el descenso. Se acostumbra ajustar los puntos medidos a una curva media que tiene una ecuación del tipo:

$$Q = C(E - E_0)^n \quad (3.21)$$

donde E_0 es la elevación para la que el gasto es nulo y C y n son dos constantes que se determinan, por ejemplo, obteniendo logaritmos de la ecuación 3.21 y luego aplicando el método de mínimos cuadrados (véase apéndice B).

En la mayoría de los ríos, la forma de las secciones transversales cambia continuamente debido a los procesos de erosión y sedimentación, por lo que es conveniente realizar aforos con la frecuencia suficiente para contar en cualquier momento con una curva elevaciones-gastos actualizada. La variabilidad en el tiempo de la sección de aforos depende de varios factores: su forma, su situación con respecto a curvas y otras características del río y el material que forma el cauce, entre otras. Por ello, es difícil generalizar en cuanto a

la frecuencia con que se deben hacer los aforos. En general, puede decirse que es necesario realizarlos por lo menos 5 ó 6 veces al mes, aunque algunas dependencias como la Comisión Federal de Electricidad y la Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos especifican un aforo diario.

Una vez conocida la curva elevaciones-gastos de la sección de aforos, es suficiente con determinar la elevación de la superficie libre del agua para conocer el gasto en cualquier momento. Dicha elevación se determina con alguno de los siguientes métodos:

- Limnímetro.* Es una regla graduada que se coloca en una de las márgenes del cauce, en la que normalmente se lee la elevación de la superficie cada dos horas en época de avenidas y cada 24 horas en época de estiaje. Dado que la hora en que ocurre el gasto máximo de una avenida puede no coincidir con alguna de las lecturas, conviene marcar el limnímetro con pintura soluble al agua, de manera que se pueda conocer el nivel máximo alcanzado por el río y, por lo tanto, el pico de la avenida.
- Peso suspendido de un cable.* Su uso es similar al del limnímetro (véase figura 3.16). La elevación del nivel del agua será, en este caso, igual a la elevación del punto desde donde se suspende el peso menos la longitud del cable.
- Limnígrafo.* Es un aparato automático con el que se obtiene un registro continuo de niveles (véase figura 3.17). Se coloca junto a la corriente, conectado mediante un tubo o zanja, o bien dentro de ella, por ejemplo, fijado a la pila de un puente cuando se estima que no hay peligro de que lo destruya la corriente durante una avenida o por los objetos arrastrados por el río. El aparato consta básicamente de un flotador unido a una plumilla que marca los niveles del agua en un papel fijado a un tambor que gira mediante un mecanismo de relojería (véase figura 3.17). El papel se cambia normalmente una vez al día, aunque esto se fija de acuerdo con la variabilidad del gasto con el tiempo. El regis-

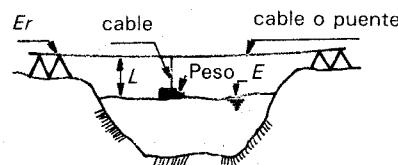


Figura 3.16

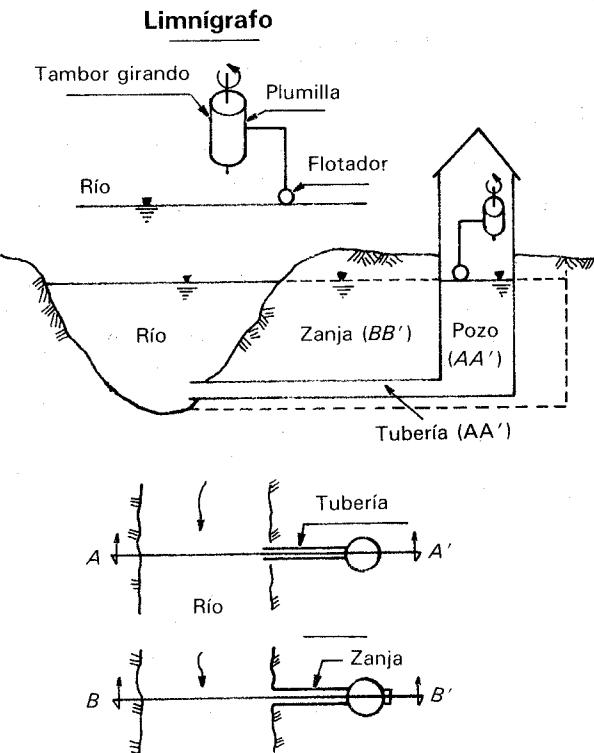


Figura 3.17 Colocación del limnígrafo

tro de niveles contra el tiempo que se obtiene de un limnígrafo se llama *limnograma*.

3.3.6 Condiciones que debe reunir una estación hidrométrica

La selección del sitio adecuado para instalar una estación hidrométrica (donde se miden gastos) debe tomar en cuenta las siguientes condiciones (referencia 3.3):

- Accesibilidad.* La estación debe ser accesible en cualquier tiempo y bajo cualquier condición, *especialmente* durante avenidas.
- Suficiencia.* La estación debe ser capaz de cubrir todo el rango de gastos que pueda ocurrir. El nivel mínimo de la zanja o tubería en el caso de los

limnígrafos y de la regla en el de los limnímetros, debe estar por debajo de la elevación correspondiente al gasto mínimo posible y la posición máxima del flotador o de la regla debe quedar arriba de la elevación correspondiente al gasto máximo posible.

- c) *Estabilidad.* La sección transversal del río donde se instale la estación debe estar en un tramo recto, lo más estable posible, de manera que las variaciones que tenga la curva elevaciones-gastos sean razonablemente pequeñas.
- d) *Permanencia.* La estación debe estar situada de tal manera que nunca sea destruida por una avenida. Una de las características más deseables de un registro es que sea continuo y que esté formado en un mismo sitio. Además, no debe estar afectado por tomas o desvíos, por lo que la estación debe situarse, en lo posible, aguas arriba de ellos.

BIBLIOGRAFÍA

- 3.1 Domínguez, M.R. "Escurrimiento", Cap. A. 1.3, del *Manual de Diseño de Obras Civiles*, Comisión Federal de Electricidad, México, 1981.
- 3.2 Raudkivi, A.J. *Hydrology*, Pergamon Press, 1979.
- 3.3 Chow, V.T. (ed). *Handbook of Applied Hydrology*, McGraw-Hill, 1964.
- 3.4 Chow, V.T. *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, 1966.
- 3.5 Wisler, C.O., Brater, E.F. *Hydrology*, 2nd. Ed., John Wiley & Sons, 1959.

4

Evaporación y transpiración

Desde el punto de vista de la ingeniería hidrológica es importante conocer, por un lado, la cantidad de agua que se pierde por evaporación en grandes depósitos, como presas, lagos o en sistemas de conducción, y, por otro, la cantidad de agua con que es necesario dotar a los distritos de riego, para determinar las fuentes y dimensiones de los sistemas de abastecimiento.

Evaporación es el proceso por el cual el agua pasa del estado líquido en que se encuentra en los almacenamientos, conducciones y en el suelo, en las capas cercanas a su superficie, a estado gaseoso y se transfiere a la atmósfera.

Transpiración es el agua que se despide en forma de vapor de las hojas de las plantas. Esta agua es tomada por las plantas, naturalmente, del suelo.

Evapotranspiración es la combinación de evaporación y transpiración.

Uso consuntivo es la combinación de evapotranspiración y el agua que las plantas retienen para su nutrición. Esta última cantidad es pequeña en comparación con la evapotranspiración (aproximadamente representa sólo el 1%), por lo que los términos evapotranspiración y uso consuntivo se usan como sinónimos.

4.1 EVAPORACIÓN

La evaporación se produce básicamente por el aumento de energía cinética que experimentan las moléculas de agua cercanas a la superficie de un suelo húmedo o una masa de agua, producido por la radiación solar, el viento y las diferencias en presión de vapor.

Este aumento de energía cinética provoca que algunas moléculas de agua "brinquen" de manera continua a la atmósfera. Al mismo tiempo, algunas de las moléculas que ya se encuentran en la atmósfera se condensan y regresan al cuerpo de agua. Naturalmente, lo que interesa en la ingeniería hidrológica es el flujo neto de partículas a la atmósfera, al cual se le denominará en lo sucesivo evaporación.

El intercambio de moléculas descrito se forma en una pequeña zona situada junto a la superficie del agua, como se muestra en la figura 4.1. La evaporación será entonces igual a la cantidad de agua que logre salir de la zona de intercambio. Si e_w es la presión de vapor existente en la zona de intercambio, e_a la presión de vapor del aire que se tiene en un momento dado y e_s la presión de vapor de saturación, se pueden presentar dos situaciones:

a) $e_s > e_w$. En este caso se produce evaporación mientras e_a sea menor que e_w . Cuando la presión del vapor del aire alcanza el valor e_w , deja de haber paso de moléculas de la zona de intercambio a la atmósfera y, por lo tanto, cesa la evaporación. Esto sucede antes de que el aire se sature.

b) $e_s < e_w$. En este caso la evaporación cesa cuando e_a alcanza el valor e_s a pesar de que aún existe un gradiente de presión de vapor entre la zona de intercambio y la atmósfera. A partir de ese momento comienza a invertirse el proceso y se produce condensación, pues $e_a > e_s$.

En cualquier caso, la evaporación es proporcional al gradiente de presión de vapor entre la zona de intercambio y la atmósfera. Esto se conoce como *Ley de Dalton* y se expresa en la forma:

$$E = k (e_w - e_a) \quad (4.1)$$

donde k es una constante de proporcionalidad y E es la evaporación.

Debido a la reducida dimensión vertical de la zona de intercambio, la presión del vapor en la misma es difícil de medir; sin embargo, e_w generalmente

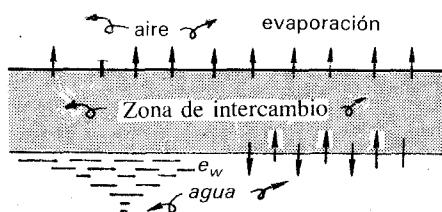


Figura 4.1 Zona de intercambio.

tiene un valor cercano a e_s , de manera que la ecuación 4.1 se expresa en forma aproximada como:

$$E \doteq k (e_s - e_a) \quad (4.2)$$

4.1.1 Fórmulas empíricas

La mayor parte de las fórmulas empíricas que se han propuesto se basan en el planteamiento aproximado de la ley de Dalton (ecuación 4.2). Existe una gran cantidad de fórmulas de este tipo, pero todas ellas son muy similares, por lo que en este apartado se mencionará solamente una.

Fórmula de Meyer

Propuesta en 1915 (referencia 4.1), esta fórmula es:

$$E_m = C (e_s - e_a) \left[1 + \frac{V_w}{16.09} \right] \quad (4.3)$$

donde

E_m = evaporación mensual en cm.

e_a = presión de vapor media mensual en pulgadas de mercurio.

e_s = presión de vapor de saturación media mensual en pulgadas de mercurio.

V_w = velocidad media mensual del viento, medida a 10 m de la superficie, en km/h.

C = coeficiente empírico, cuyo valor puede tomarse como de 38 para depósitos pequeños y evaporímetros y de 28 para grandes depósitos.

e_a y e_s se determinan con base en la temperatura y la humedad relativa medias mensuales y con ayuda de la figura 6.2 correspondiente al capítulo 6.

4.1.2 Balance de energía

Penman, en 1948 (referencia 4.2), desarrolló una teoría basada en el balance de energía para el cálculo de la evaporación que no se presentará con detalle en este texto. El lector interesado puede consultar las referencias 4.2 y 4.3 para ampliar la información. La ecuación final es la siguiente:

$$E = \frac{\Delta \cdot R_n + \gamma E_a}{\Delta + \gamma} \quad (4.4)$$

donde

$$\Delta = \frac{e'_s - e_s}{T'_s - T_a}$$

$$R_n = (1 - r) R_c - R_B$$

$$E_a = k(e_s - e_a) f(V_w)$$

$$\gamma = \text{constante psicrométrica} = 0.27 \frac{\text{mmHg}}{\text{°F}}$$

e'_s = presión de vapor de saturación para la temperatura del aire en la zona de intercambio, mmHg.

e_s = presión de vapor de saturación para la temperatura del aire, mmHg.

T' = temperatura del aire en la zona de intercambio, °F.

r = reflectividad o albedo; $r = 0.05$ para grandes masas de agua.

R_c = radiación solar, g.cal/cm² día.

R_B = radiación emitida por la masa de agua, g.cal/cm² día.

k = constante.

V_w = velocidad del viento, km/h.

E = evaporación, mm/día.

Para facilitar la aplicación de la ecuación 4.4, Wilson (referencia 4.3) propone el nomograma mostrado en la figura 4.2. Para usar dicho nomograma se requieren los siguientes datos:

- Temperatura del aire T_a , °C.
- Relación de nubosidad, n/D .

donde

n = número de horas del sol reales en el mes en cuestión.

D = número de horas de sol posibles, esto es, el que se tendría si no hubiera nubes en todo el día.

El valor de n puede estimarse a partir de información meteorológica y D según la latitud y la época del año con la tabla 4.1.

- R_c , que puede calcularse también en función de la latitud y la época del año con la tabla 4.2.
- La humedad relativa h , en %, que se calcula con la figura 6.2, en función de la presión de vapor y T_a .

Tabla 4.1 Valores de D en h

Latitud N o S	N Jul 17	Ago 19	Sep 17	Oct 18	Nov 17	Dic 16	Ene 16	Feb 11	Mar 13	Abr 12	Mai 13	Jun 14
	S Ene 15	Feb 15	Mar 15	Abr 15	Mai 15	Jun 15	Jul 15	Aug 15	Sep 15	Oct 15	Nov 15	Dic 15
0	12.1	12.1	12.1	12.1	12.1	12.1	12.1	12.1	12.1	12.1	12.1	12.1
10	12.6	12.4	12.2	11.9	11.7	11.5	11.6	11.8	12.0	12.3	12.6	12.7
20	13.2	12.7	12.2	11.7	11.2	10.9	11.0	11.4	12.0	12.6	13.1	13.3
30	13.9	13.1	12.3	11.4	10.6	10.2	10.4	11.0	11.9	12.8	13.6	14.1
40	14.6	13.6	12.4	11.1	9.9	9.3	9.6	10.5	11.8	13.2	14.3	15.0
50	15.9	14.2	12.5	10.6	9.0	8.1	8.5	9.9	11.7	13.6	15.3	16.3
60	18.0	15.3	12.7	10.0	7.4	5.9	6.6	8.7	11.5	14.3	17.0	18.7
70	24.0	17.6	13.2	8.8	3.6	0	0	6.7	11.3	15.2	21.3	24.0
80	24.0	24.0	14.6	4.2	0	0	0	0	11.2	20.2	24.0	24.0
90	24.0	24.0	24.0	0	0	0	0	0	0	24.0	24.0	24.0

Evaporación y transpiración

Tabla 4.2 Valores de R_c , g cal/cm²-día

Latitud	Mar 21	Abr 13	May 6	May 29	Jun 22	Jul 15	Ago 8	Ago 31	Sep 23	Oct 16	Nov 8	Dic 30	Ene 22	Feb 13	Feb 4	Feb 26
N 90	436	795	1029	1109	1024	788	431	158	7							
80	100	436	783	1014	1092	1009	777	431	158	7						
70	310	541	771	967	1012	962	764	535	312	133	25					
60	460	654	833	962	1008	957	825	648	455	281	150	74	50	75	25	135
50	592	754	893	987	1019	983	885	747	585	426	295	210	181	211	150	284
40	707	831	937	1001	1021	996	928	822	697	561	442	358	326	361	298	432
30	798	891	957	996	1004	989	949	882	788	683	581	507	480	509	447	570
20	866	921	951	963	963	958	943	911	856	788	706	646	623	649	509	690
10	908	924	920	907	899	903	913	914	897	860	813	770	755	775	819	870
0	922	899	862	828	814	824	855	889	912	913	898	877	868	881	904	923
S 10	908	849	783	728	708	725	776	838	897	937	954	959	961	964	964	949
20	866	773	680	611	584	608	674	763	856	934	987	1017	1029	1023	997	946
30	798	674	559	479	449	477	554	665	788	903	993	1051	1072	1056	1002	915
40	707	554	425	339	306	338	421	549	697	844	972	1058	1091	1063	982	853
50	592	420	284	199	170	198	282	416	585	765	928	1044	1088	1048	936	775
60	460	277	144	70	48	70	143	274	455	663	865	1113	1077	1022	872	672
70	316	131	24		24	130	312	518	801	1023	1113	1028	809	809	555	
80	166	7			7	158	442	814	1072	1166	1077	820	447			
90							442	825	1088	1183	1094	833	447			

Evaporación

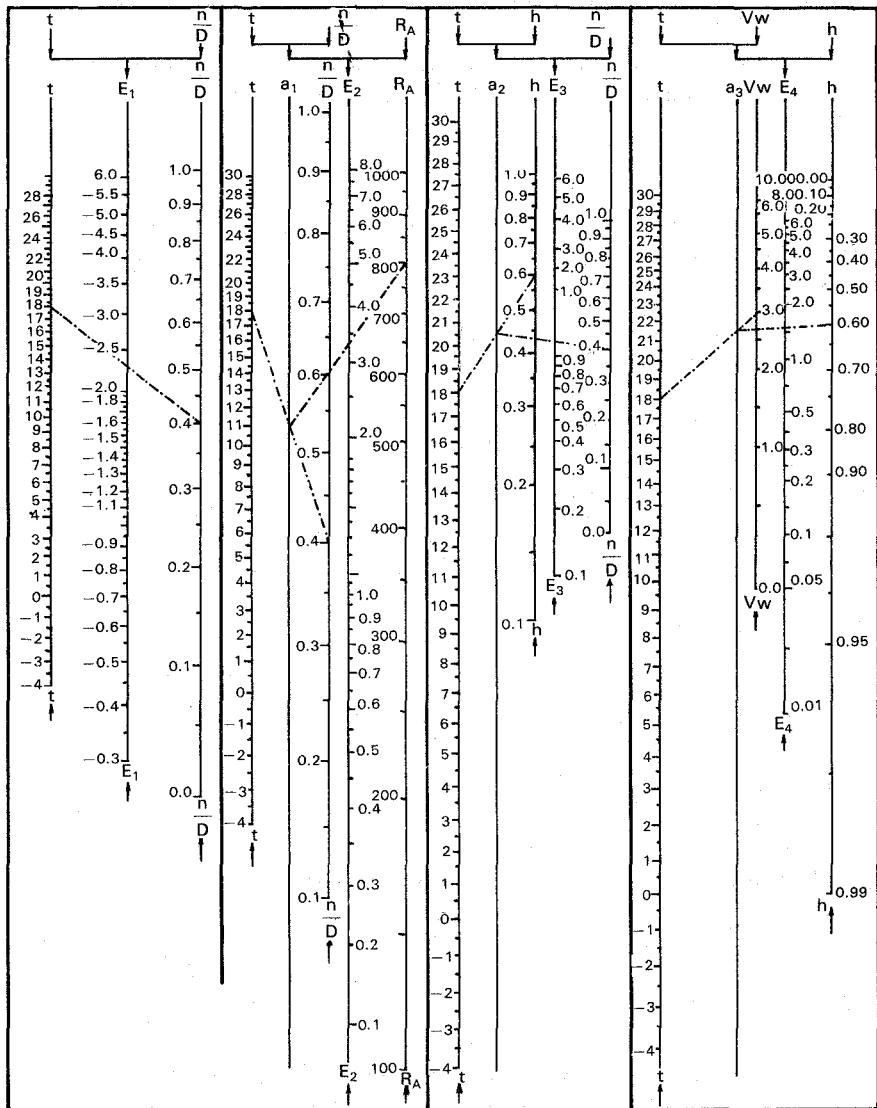


Figura 4.2 Nomograma de Wilson.

e) La velocidad del viento V_w en km/h, medida a 2m de la superficie.

Ejemplo 4.1. Obtener la evaporación en el día 15 de agosto en un sitio localizado en la latitud 60°N cuando la temperatura es de 18°C, $n = 6.3$ h, $V_w = 3$ m/s y $h = 60\%$.

Solución

De la tabla 4.1, $D = 15.3$ h

$$\therefore \frac{n}{D} = \frac{6.3}{15.3} = 0.41$$

De la tabla 4.2: $R_c = 800$ (interpolado).

De la figura 4.2 resulta:

$$E_1 = -2.30$$

$$E_2 = 3.40$$

$$E_3 = 0.92$$

$$E_4 = 1.52$$

$$\Rightarrow E = -2.30 + 3.40 + 0.92 + 1.52 = 3.54 \text{ mm/día}$$

4.1.3 Balance de agua

Este es un método indirecto para calcular la evaporación. Se basa en la ecuación de continuidad que, para un gran almacenamiento, es:

$$E = I - O - \Delta V \quad (4.5)$$

donde

E = volumen de evaporación en el intervalo de tiempo Δt considerado.

I = volumen de entradas al vaso en el Δt (precipitación directa y escorrimiento).

O = volumen de salidas del vaso en el Δt (infiltración y escorrimiento; en el caso de presas el último se forma por las salidas de la obra de toma y el vertedor de excedencias).

ΔV = cambio en el volumen almacenado en el Δt .

La ecuación 4.5 se puede usar con fines estadísticos para estimar la evaporación que podría presentarse en un vaso de almacenamiento dado o en vasos cercanos a él. Sin embargo, para que sus resultados sean confiables, I , O y ΔV deben estar medidos con precisión; dado que E es, en general, un término relativamente pequeño en comparación con los demás, errores leves en la medición de I , O ó ΔV conducirán a errores considerables en la estimación de E .

4.1.4 Medición de la evaporación

La evaporación puede medirse por medio de evaporímetros, que básicamente están formados por un recipiente en el que se coloca cierta cantidad de agua y se mide, diariamente o con la frecuencia que se estime conveniente, el cambio en el tirante. Existen varios tipos de evaporímetros; uno de los más comunes es el llamado clase A, fabricado de fierro galvanizado, cuyas dimensiones se muestran en la figura 4.3.

La altura de evaporación se mide mediante una regla graduada, colocada dentro de un pequeño tubo arietador. Los valores medidos deben corregirse sumándoles la altura de precipitación registrada en el intervalo de tiempo en la estación pluviométrica más cercana, generalmente situada en el mismo lugar que el evaporímetro.

Por otra parte, dado que, para las mismas condiciones atmosféricas, la evaporación es mayor en depósitos pequeños que en los grandes, los datos registrados en un evaporímetro deben corregirse si se desean usar para estimar la evaporación en presas, lagos o cualquier otro tipo de gran almacenamiento. Esta corrección se lleva a cabo multiplicando los valores registrados por un factor que varía entre 0.6 y 0.8. En general, 0.7 es un buen valor.

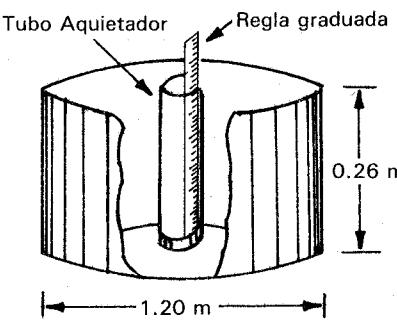


Figura 4.3 Evaporímetro.

4.2 EVAPOTRANSPIRACIÓN O USO CONSUNTIVO

El conocimiento de la evapotranspiración o uso consuntivo es un factor determinante en el diseño de sistemas de riego, incluyendo las obras de almacenamiento, conducción, distribución y drenaje. Especialmente, el volumen útil de una presa para abastecer a una zona de riego depende en gran medida del uso consuntivo.

En México se usan fundamentalmente dos métodos para el cálculo del uso consuntivo: el de Thorntwaite y el de Blaney-Criddle (referencia 4.4). El primero, por tomar en cuenta sólo la temperatura media mensual, arroja resultados estimativos que pueden usarse únicamente en estudios preliminares o de gran visión, mientras que el segundo es aplicable a casos más específicos. A continuación se presentan ambos métodos.

4.2.1 Método de Thorntwaite

Este método, desarrollado en 1944 (referencia 4.5), calcula el uso consuntivo mensual como una función de las temperaturas medias mensuales mediante la fórmula:

$$U_j = 1.6 K_a \left(\frac{10T_j}{I} \right)^a \quad (4.6)$$

donde

U_j = uso consuntivo en el mes j , en cm.

T_j = temperatura media en el mes j , en °C.

a, I = constantes.

K_a = constante que depende de la latitud y el mes del año (tabla 4.3).

Las constantes I (índice de eficiencia de temperatura) y a se calculan de la siguiente manera:

$$I = \sum_{j=1}^{12} i_j \quad (4.7)$$

donde

$$i_j = \left(\frac{T_j}{5} \right)^{1.514} \quad (4.8)$$

y j = número de mes.

Tabla 4.3 Valores de K_a

Latitud, grados	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
0	1.04	0.94	1.04	1.01	1.04	1.01	1.04	1.04	1.01	1.04	1.01	1.01
10	1.00	0.91	1.03	1.03	1.08	1.06	1.08	1.07	1.02	1.02	0.98	0.99
20	0.95	0.90	1.03	1.05	1.13	1.11	1.14	1.11	1.02	1.00	0.93	0.91
30	0.90	0.87	1.03	1.08	1.18	1.17	1.20	1.14	1.03	0.98	0.89	0.88
35	0.87	0.85	1.03	1.09	1.21	1.21	1.23	1.16	1.03	0.97	0.86	0.85
40	0.84	0.83	1.03	1.11	1.24	1.25	1.27	1.18	1.04	0.96	0.83	0.81
45	0.80	0.81	1.02	1.13	1.28	1.29	1.31	1.21	1.04	0.94	0.79	0.75
50	0.74	0.78	1.02	1.15	1.33	1.36	1.37	1.25	1.06	0.92	0.76	0.70

$$a = 675 \times 10^{-9} I^3 - 771 \times 10^{-7} I^2 + 179 \times 10^{-4} I + 0.492 \quad (4.9)$$

4.2.2 Método de Blaney-Criddle

En este método se toma en cuenta, además de la temperatura y las horas de sol diarias, el tipo de cultivo, la duración de su ciclo vegetativo, la temporada de siembra y la zona.

El ciclo vegetativo de un cultivo es el tiempo que transcurre entre la siembra y la cosecha y, por supuesto, varía de cultivo a cultivo. En la tabla 4.4 se presentan los ciclos vegetativos de algunos cultivos comunes en México.

Si se desea estimar la evapotranspiración durante un ciclo vegetativo completo, se puede emplear la fórmula:

$$E_t = K_g F \quad (4.10)$$

donde

E_t = evapotranspiración durante el ciclo vegetativo, cm.

F = factor de temperatura y luminosidad.

K_g = coeficiente global de desarrollo.

El coeficiente global de desarrollo K_g varía entre 0.5 y 1.2. En la tabla 4.4 se muestran algunos de los valores de K_g para diversos cultivos. El factor de temperatura y luminosidad F se calcula como:

$$F = \sum_{i=1}^n f_i \quad (4.11)$$

Tabla 4.4

Cultivo	Ciclo vegetativo	Coeficiente global Kg.
Aguacate	Perenne	0.50 — 0.55
Ajonjolí	3 a 4 meses	0.80
Alfalfa	Entre heladas	0.80 — 0.85
	En invierno	0.60
Algodón	6 ó 7 meses	0.60 — 0.65
Arroz	3 a 5 meses	1.00 — 1.20
Cacahuate	5 meses	0.60 — 0.65
Cacao	Perenne	0.75 — 0.80
Café	Perenne	0.75 — 0.80
Camote	5 a 6 meses	0.60
Caña de azúcar	Perenne	0.75 — 0.90
Cártamo	5 a 8 meses	0.55 — 0.65
Cereales de grano pequeño (alpiste, avena, cebada, centeno, trigo)	3 a 6 meses	0.75 — 0.85
Cítricos	7 a 8 meses	0.50 — 0.65
Chile	3 a 4 meses	0.60
Espárrago	6 a 7 meses	0.60
Fresa	Perenne	0.45 — 0.60
Frijol	3 a 4 meses	0.60 — 0.70
Frutales de hueso y pepita (hoja caduca)	Entre heladas	0.60 — 0.70
Garbanzo	4 a 5 meses	0.60 — 0.70
Girasol	4 meses	0.50 — 0.65
Gladiola	3 a 4 meses	0.60
Haba	4 a 5 meses	0.60 — 0.70
Hortalizas	2 a 4 meses	0.60
Jitomate	4 meses	0.70
Lechuga y col	3 meses	0.70
Lenteja	4 meses	0.60 — 0.70
Maíz	4 meses	0.60 — 0.70
Maíz	4 a 7 meses	0.75 — 0.85
Mango	Perenne	0.75 — 0.80
Melón	3 a 4 meses	0.60
Nogal	Entre heladas	0.70
Papa	3 a 5 meses	0.65 — 0.75
Palma datilera	Perenne	0.65 — 0.80
Palma cocotera	Perenne	0.80 — 0.90
Papaya	Perenne	0.60 — 0.80
Plátano	Perenne	0.80 — 1.00
Pastos de gramíneas	Perenne	0.75
Remolacha	6 meses	0.65 — 0.75
Sandía	3 a 4 meses	0.60
Sorgo	3 a 5 meses	0.70
Soya	3 a 5 meses	0.60 — 0.70
Tabaco	4 a 5 meses	0.70 — 0.80
Tomate	4 a 5 meses	0.70 — 0.80
Trébol ladino	Perenne	0.80 — 0.85
Zanahoria	2 a 4 meses	0.60

Evapotranspiración o uso consumtivo

donde n = número de meses que dura el ciclo vegetativo.

$$f_i = P_i \left(\frac{T_i + 17.8}{21.8} \right) \quad (4.12)$$

P_i = porcentaje de horas de sol del mes i con respecto al año (véase tabla 4.5).

T_i = temperatura media del mes i en °C.

Cuando la zona en cuestión es árida, los valores de f_i (ecuación 4.12) se multiplican por un factor de corrección K_n que se calcula como (referencia 4.4):

$$K_n = 0.03114 T_i + 0.2396 \quad (4.13)$$

Cuando se desea determinar valores de la evapotranspiración en períodos más cortos que un ciclo vegetativo, por ejemplo, de un mes, se usa la fórmula:

$$E_{ti} = Kc_i f_i \quad (4.14)$$

donde E_{ti} es la evapotranspiración durante el periodo i ; f_i se calcula con la fórmula 4.12 con P_i y T_i correspondientes al periodo considerado y Kc_i es un coeficiente de desarrollo parcial. Kc_i se puede determinar mediante parcelas experimentales instaladas en el sitio de interés, o bien usando los valores medios mostrados en la figura 4.4.

4.2.3 Extracciones de un almacenamiento para riego

Los valores de la evapotranspiración que se calculan con los métodos vistos anteriormente representan la cantidad de agua que requieren las plantas para un desarrollo normal. Esta cantidad es diferente de la que se debe extraer de un almacenamiento como una presa, debido a que, por una parte, la precipitación sobre la zona de riego disminuye el volumen de extracción necesario y, por otra, las pérdidas por evaporación e infiltración en las conducciones y los desperdicios lo aumentan. El volumen D_i que es necesario extraer del almacenamiento durante el periodo i será entonces:

$$D_i = E_{ti} A_r - h_{pi} A_r + h_{evi} A_{co} + W_i \quad (4.15)$$

donde

A_r = área de riego.

Tabla 4.5

Porcentaje de horas de sol mensual

LATITUD NORTE	ENE.	FEB.	MAR.	ABR.	MAY.	JUN.	JUL.	AGO.	SEP.	OCT.	NOV.	DIC.
0°	8.50	7.66	8.49	8.21	8.50	8.22	8.50	8.49	8.21	8.50	8.22	8.50
5	8.32	7.57	8.47	8.29	8.65	8.41	8.67	8.60	8.23	8.42	8.07	8.30
10	8.13	7.47	8.45	8.37	8.81	8.60	8.86	8.71	8.25	8.34	7.91	8.10
15	7.94	7.36	8.43	8.44	8.98	8.80	9.05	8.83	8.28	8.20	7.75	7.88
16	7.93	7.35	8.44	8.46	9.07	8.83	9.07	8.85	8.27	8.24	7.72	7.83
17	7.86	7.32	8.43	8.48	9.04	8.87	9.11	8.87	8.27	8.22	7.69	7.80
18	7.83	7.30	8.42	8.50	9.09	8.92	9.16	8.90	8.27	8.21	7.66	7.74
19	7.79	7.28	8.41	8.51	9.11	8.97	9.20	8.92	8.28	8.19	7.63	7.71
20	7.74	7.25	8.41	8.52	9.15	9.00	9.25	8.96	8.30	8.18	7.58	7.66
21	7.71	7.24	8.40	8.54	9.18	9.05	9.29	8.98	8.29	8.15	7.54	7.62
22	7.66	7.21	8.40	8.56	9.22	9.09	9.33	9.00	8.30	8.13	7.50	7.55
23	7.62	7.19	8.40	8.57	9.24	9.12	9.35	9.02	8.30	8.11	7.47	7.50
24	7.58	7.17	8.40	8.60	9.30	9.20	9.41	9.05	8.31	8.09	7.43	7.46
25	7.53	7.14	8.39	8.61	9.33	9.23	9.45	9.09	8.32	8.09	7.40	7.42
26	7.49	7.12	8.40	8.64	9.38	9.30	9.49	9.10	8.31	8.06	7.36	7.31
27	7.43	7.09	8.38	8.65	9.40	9.32	9.52	9.13	8.32	8.03	7.36	7.31
28	7.40	7.07	8.39	8.68	9.46	9.38	9.58	9.16	8.32	8.02	7.27	7.27
29	7.35	7.04	8.37	8.70	9.49	9.43	9.61	9.19	8.32	8.00	7.24	7.20
30	7.30	7.03	8.38	8.72	9.53	9.49	8.67	9.22	8.33	7.99	7.19	7.15
31	7.25	7.00	8.36	8.73	9.57	9.54	9.72	9.24	8.33	7.95	7.15	7.09
32	7.20	6.97	8.37	8.76	9.62	9.59	9.77	9.27	8.34	7.95	7.11	7.05
33	7.15	6.94	8.36	8.78	9.68	9.65	9.82	9.31	8.35	7.94	7.07	6.98
34	7.10	6.91	8.36	8.80	9.72	9.70	9.88	9.33	8.36	7.90	7.02	6.92
35	7.05	6.88	8.35	8.83	9.77	9.76	9.94	9.37	8.37	7.88	6.97	6.85

Evaporación y transpiración

Evapotranspiración o uso consumutivo

LATITUD SUR

0°	8.50	7.66	8.49	8.21	8.50	8.49	8.49	8.21	8.50	8.22	8.50	
5	8.68	7.76	8.51	8.15	8.34	8.09	8.05	8.33	8.38	8.19	8.56	8.68
10	8.86	7.87	8.53	8.55	8.02	7.65	7.95	8.15	8.27	8.17	8.62	8.88
15	9.05	7.98	8.57	8.09	7.94	7.85	7.43	7.76	8.03	8.13	8.76	9.10
20	9.24	8.09	8.65	8.21	8.60	7.94	7.66	7.20	7.54	7.90	8.11	8.86
25	9.46	8.21	8.66	8.62	7.73	7.45	6.96	7.31	7.76	8.07	8.97	9.24
30	9.70	8.33	8.62	7.69	7.36	6.85	7.21	7.70	8.96	9.01	9.33	9.96
32	9.81	8.39	8.63	8.67	7.49	6.97	6.37	6.76	7.63	8.05	9.06	9.42
34	9.92	8.45	8.64	7.64	7.27	6.74	7.10	7.63	8.04	9.11	9.51	10.21
36	10.03	8.51	8.65	7.59	7.18	6.62	6.99	7.56	8.04	9.11	9.61	10.34
38	10.15	8.57	8.66	7.54	7.08	6.50	6.87	7.49	8.03	9.16	9.71	10.49
40	10.27	8.63	8.67	7.44	6.85	6.23	6.76	7.41	8.02	9.21	9.82	10.64
42	10.40	8.70	8.68	7.38	6.73	6.08	6.51	7.25	7.99	9.31	9.94	10.80
44	10.54	8.78	8.69	7.38	6.61	6.37	6.76	7.16	7.96	9.37	10.07	10.97
46	10.69	8.86	8.70	7.32								

Evapotranspiración o uso consumutivo

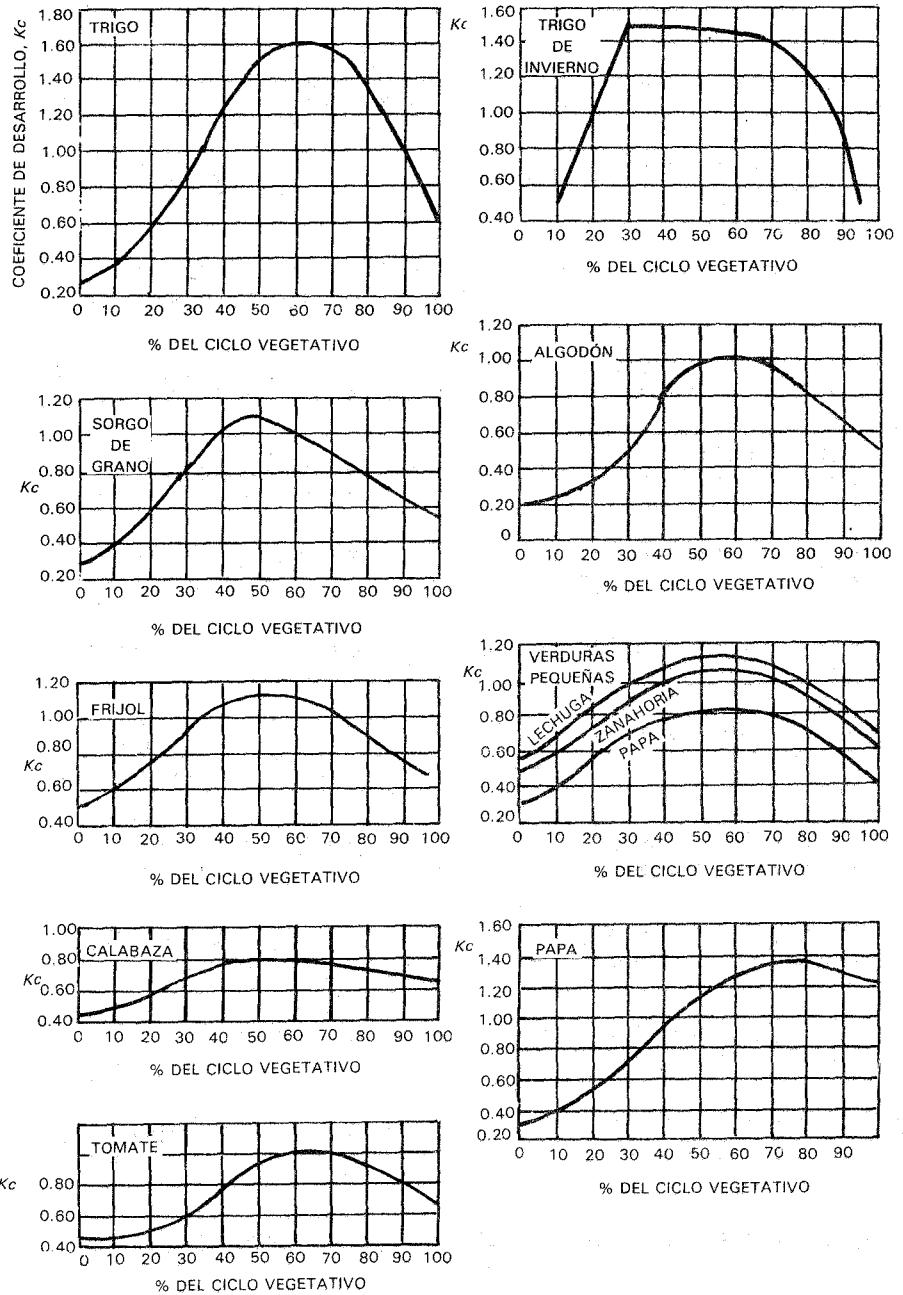


Figura 4.4a Gráficas de coeficientes de desarrollo parcial.

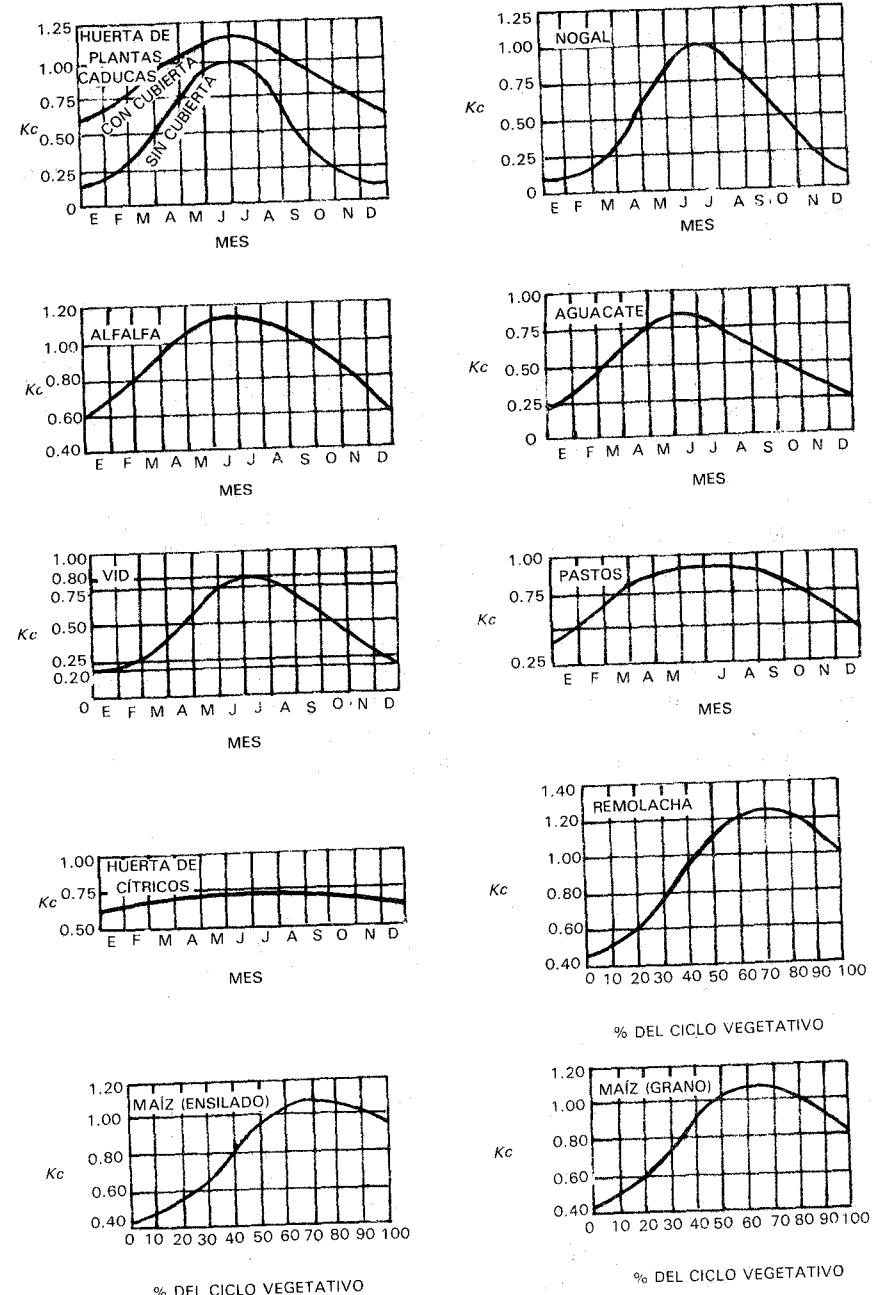


Figura 4.4b

- h_{pi} = altura de precipitación media en la zona de riego en el periodo i .
 A_{co} = área superficial de las conducciones (presas derivadoras, canales, tanques de almacenamiento temporal, etc.).
 W_i = volumen de desperdicio.
 h_{evi} = altura de evaporación media en la zona de riego en el periodo i .

Al factor:

$$\eta = 100 \frac{(E_{ti} - h_{pi})}{D_j} A_r, \text{ en \%} \quad (4.16)$$

se le llama *eficiencia* del sistema. Es deseable, obviamente, tener eficiencias altas, pues así los almacenamientos necesarios resultan de poca magnitud. Sin embargo, en México y otros países η es menor al 70%, llegando en ocasiones a tomar valores tan bajos como del 30%.

Ejemplo 4.2. Determinar las extracciones mensuales que es necesario hacer de una presa para regar un área de 20 000 ha, sembrada de algodón en la región lagunera (zona árida) en la latitud 25° 30'N.

La fecha de siembra es el 10. de abril. Las temperaturas, alturas de precipitación y alturas de evaporación medias mensuales en la zona son las mostradas en la tabla 4.6. El área de las conducciones es de 100 000 m² y se estima que el desperdicio medio mensual es de 2 000 000 m³. Usar: a) el método de Thorntwaite, y b) el método de Blaney-Criddle.

Tabla 4.6

mes	T, °C	hp, cm	hev, cm
ene	13.0	0.0	68.0
feb	15.8	0.0	73.2
mar	18.4	0.0	75.4
abr	22.6	0.0	85.2
may	25.4	6.0	91.5
jun	27.0	8.0	82.3
jul	26.7	10.0	85.2
ago	26.1	7.0	80.1
sep	24.2	0.0	75.9
oct	21.0	0.0	70.0
nov	16.2	0.0	65.1
dic	12.6	0.0	67.3

Solución

Se tomarán 6 meses como ciclo vegetativo del algodón (tabla 4.4).

a) Si se usa el método de Thorntwaite (apartado 4.2.1) se forma una tabla de cálculo como la 4.7.

Tabla 4.7

(1) mes, j	(2) i_j	(3) U_j	(4) V_{et} 10 ⁶ m ³ bruto	(5) V_{et} 10 ⁶ m ³ neto	(6) D_i 10 ⁶ m ³
1	4.25				
2	5.71				
3	7.19				
4	9.81	9.92	19.84	19.91	21.91
5	11.71	14.12	28.24	16.31	18.31
6	12.85	16.06	32.12	16.19	18.19
7	12.63	16.06	32.12	12.31	14.21
8	12.21	14.65	29.30	15.38	17.38
9	10.89	11.19	22.38	22.47	24.47
10	8.78				
11	5.93				
12	4.05				
$I = \Sigma = 106.01$					

En la tabla 4.7, i_j se calculó de acuerdo con la ecuación 4.8; con la ecuación 4.7, I resulta ser de 106.01 y, por tanto, a es (ecuación 4.9):

$$a = 675 \times 10^{-9} (106.01)^3 - 771 \times 10^{-7} (106.01)^2 + \\ + 179 \times 10^{-4} (106.01) + 0.492$$

$$\therefore a = 2.327$$

Con este valor de a y el de I se tiene, de la ecuación 4.6, que la evapotranspiración mensual es:

$$U_j = 1.6 K_a \left(\frac{10T_j}{106.01} \right)^{2.327}$$

Con esta expresión se calcularon los valores de la columna 3 de la tabla 4.7.

El volumen bruto de evapotranspiración (columna 4 de la tabla 4.7) se calculó multiplicando el uso consumtivo mensual por el área de riego. En la columna 5 de la misma tabla se ha anotado el volumen bruto menos el de precipitación más el de evaporación en las conducciones (tabla 4.6).

Finalmente, en la columna 6 se encuentran los volúmenes mensuales que se deben extraer de la presa, que son los obtenidos en la columna 5 más $2 \times 10^6 \text{ m}^3$ mensuales de desperdicios.

b) Usando el método de Blaney-Criddle (apartado 4.2.2) se forma una tabla de cálculo como la 4.8.

Tabla 4.8

<i>I</i> mes	<i>2</i> <i>i</i>	<i>3</i> P_i	<i>4</i> K_{ii}	<i>5</i> f_i	<i>6</i> K_{ci}	<i>7</i> E_{ii} cm	<i>8</i> D_i 10^6 m^3
<i>a</i>	1	8.63	0.943	10.07	0.25	3.77	9.63
<i>m</i>	2	9.35	1.031	19.10	0.60	8.60	4.69
<i>j</i>	3	9.26	1.080	20.56	0.95	19.53	13.61
<i>j</i>	4	9.47	1.071	20.70	1.00	20.70	12.79
<i>a</i>	5	9.09	1.052	19.26	0.75	14.45	9.53
<i>s</i>	6	8.31	0.993	15.90	0.45	7.15	9.23

En la columna 3 de la tabla 4.8 se anotaron los porcentajes de horas de sol mensuales con respecto al año, extraídos de la tabla 4.5. Los valores del factor de corrección K_{ii} , obtenidos de la ecuación 4.13 por tratarse de una zona árida, se muestran en la columna 4. En la columna 5 están los valores de los factores de temperatura y luminosidad mensuales (ecuación 4.12) y en la columna 6 se encuentran los coeficientes de desarrollo mensual tomados de la figura 4.4. En la columna 7 están las evapotranspiraciones mensuales calculadas según la ecuación 4.14 y, finalmente, en la columna 8 se muestran las extracciones necesarias de la presa, calculadas con la ecuación 4.15.

Nótese que entre los resultados de los dos métodos puede haber ciertas diferencias. Por ello, se recomienda usar el de Blaney-Criddle siempre que sea posible.

BIBLIOGRAFÍA

- 4.1 Meyer, A.F. *Computing run-off from rainfall and other physical data*, Trans. Am. Soc. Civil Engs., V. 79, pp. 1056-1155, 1915.
- 4.2 Penman, H.L. *Natural evaporation from open water, bare soil and grass*. P.R.S. (Londres) A. Vol. 193, p. 120, Apr. 1948.
- 4.3 Wilson, E.M. *Engineering Hydrology*, McMillan Press, London, 1974.
- 4.4 Secretaría de Recursos Hídricos. "Proyecto de zonas de riego", México, 1972.
- 4.5 Thorntwaite, C.W., et al. *Report of the Committee on transpiration and evaporation, 1943-44*, Trans. Am. Geoph. Union, V. 25 part V, pp. 683-693.

5

Almacenamiento y tránsito en vasos y cauces

En este capítulo se hace referencia a los conceptos hidrológicos fundamentales necesarios para el diseño de vasos y al tránsito de avenidas en cauces, los cuales, aunque relativamente simples, son de gran importancia en hidrología, pues en gran parte constituyen las bases sobre las que se sustenta el dimensionamiento de las presas y otras obras de aprovechamiento y protección contra inundaciones.

5.1 TIPOS DE ALMACENAMIENTOS Y SUS CARACTERÍSTICAS

La siguiente descripción se refiere a los tipos de almacenamientos y sus características de interés en la hidrología. Los detalles restantes corresponden a otras materias, como obras hidráulicas e hidráulica fluvial.

Un vaso de almacenamiento sirve para regular los escurrimientos de un río, es decir, para almacenar el volumen de agua que escurre en exceso en las temporadas de lluvia para posteriormente usarlo en las épocas de sequía, cuando los escurrimientos son escasos. Esto se puede ilustrar con una situación como la que se muestra en la figura 5.1, donde se ha dibujado, en forma muy esquemática, el hidrograma anual de escurrimiento en un río y una demanda. En este caso, la demanda de agua, constante durante todo el año, es mayor de lo que aporta el río en los meses de diciembre a junio, pero menor de lo que aporta de julio a noviembre. Es necesario, entonces, almacenar el volumen sobrante para poder satisfacer la demanda cuando el escurrimiento en el río no es suficiente, para lo cual se requiere un vaso de almacenamiento.

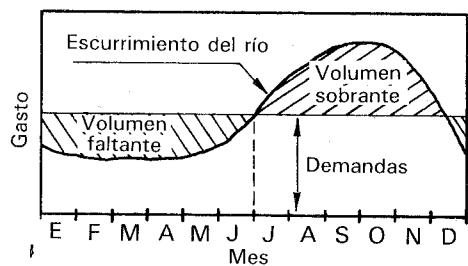


Figura 5.1

Un vaso de almacenamiento puede tener uno o varios de los siguientes propósitos:

- Irrigación.
- Generación de energía eléctrica.
- Control de avenidas.
- Abastecimiento de agua potable.
- Navegación.
- Acuacultura.
- Recreación.
- Retención de sedimentos.

Los principales componentes de un vaso de almacenamiento se muestran en la figura 5.2.

El NAMINO (*nivel de aguas mínimas de operación*) es el nivel más bajo con el que puede operar la presa. Cuando ésta es para irrigación y otros usos, el NAMINO (también llamado en este caso NAMin o *nivel de aguas mínimas*) coincide con el nivel al que se encuentra la entrada de la obra de toma. En el caso de presas para generación de energía eléctrica, el NAMINO se fija de acuerdo con la carga mínima necesaria para que las turbinas operen en buenas condiciones. El *volumen muerto* es el que queda abajo del NAMINO o NAMin; es un volumen del que no se puede disponer. El *volumen de azol-
ves* es el que queda abajo del nivel de la toma y se reserva para recibir el aca-
rreo de sólidos por el río durante la vida útil de la presa. Es conveniente hacer notar que el depósito de sedimentos en una presa no se produce como está mostrado en la figura 5.2 —con un nivel horizontal— sino que los sedimentos se reparten a lo largo del embalse, teniéndose los más gruesos al principio del mismo y los más finos cerca de la cortina. De hecho, en algunos casos existe movimiento de los sedimentos depositados dentro del vaso, fenómeno

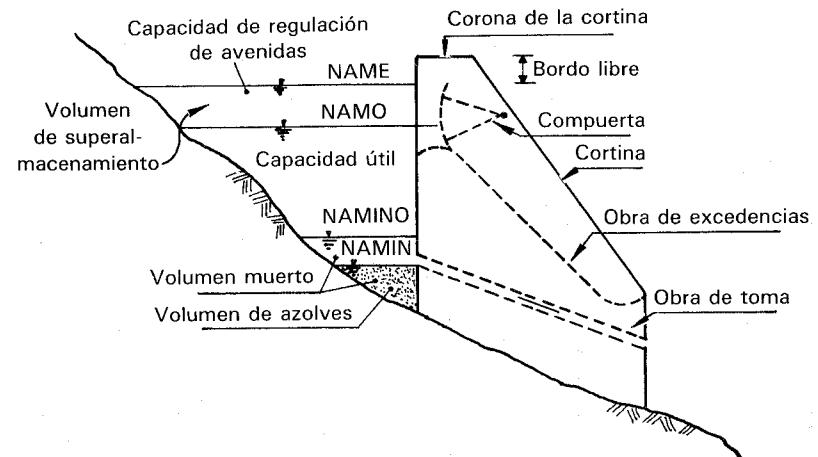


Figura 5.2 Principales componentes de un vaso.

que se conoce como *corriente de densidad*. La operación de la presa se lleva a cabo entre el NAMINO o NAMin y el NAMO (*nivel de aguas máximas ordinarias o de operación*). El NAMO es el máximo nivel con que puede operar la presa para satisfacer las demandas; cuando el vertedor de excedencias (estructura que sirve para desalojar los volúmenes excedentes de agua que pueden poner en peligro la seguridad de la obra) no es controlado por compuertas, el NAMO coincide con su cresta o punto más alto del vertedor. En el caso de que la descarga por el vertedor esté controlada, el NAMO puede estar por arriba de la cresta e incluso puede cambiar a lo largo del año. Así, en época de estiaje es posible fijar un NAMO mayor que en época de avenidas, pues la probabilidad de que se presente una avenida en la primera época es menor que en la segunda. El volumen que se almacena entre el NAMO y el NAMIN o NAMINO se llama *volumen o capacidad útil* y es con el que se satisfacen las demandas de agua.

El NAME (*nivel de aguas máximas extraordinarias*) es el nivel más alto que debe alcanzar el agua en el vaso bajo cualquier condición. El volumen que queda entre este nivel y el NAMO, llamado *superalmacenamiento*, sirve para controlar las avenidas que se presentan cuando el nivel en el vaso está cercano al NAMO. El espacio que queda entre el NAME y la máxima elevación de la cortina (*corona*) se denomina *bordo libre* y está destinado a contener el oleaje y la marea producidos por el viento, así como a compensar las reducciones en la altura de la cortina provocadas por sus asentamientos.

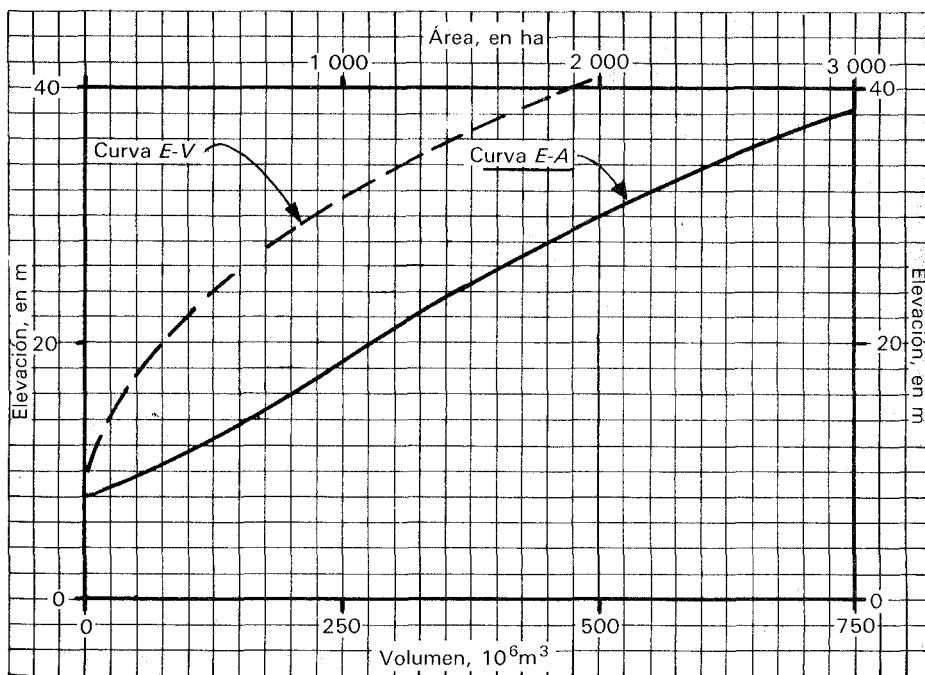


Figura 5.3 Curvas elevación-volumen y elevación-área.

En resumen, existen cuatro volúmenes principales en toda presa que es necesario determinar para diseñar el vaso: el volumen de azolves, el volumen muerto, el volumen útil y el volumen de superalmacenamiento. La determinación de los dos primeros está fuera del enfoque de este texto; el volumen de azolves es materia de la hidráulica fluvial y el volumen muerto, en el caso de plantas hidroeléctricas, depende, entre otras cosas, del tipo de turbina que se use. A continuación se estudiarán métodos para evaluar el volumen útil que debe tener una presa para satisfacer las demandas y el volumen de superalmacenamiento necesario para que la presa no corra peligro.

5.2 ESTIMACIÓN DEL VOLUMEN ÚTIL Y EL NAMO

Existen dos grupos básicos de datos necesarios para el diseño de un vaso de almacenamiento: planos topográficos y registros hidrológicos. Los primeros proporcionan la relación que hay entre los volúmenes, áreas y elevaciones del

vacio, y los segundos sirven para estimar los volúmenes o gastos que llegarán al vaso durante su operación. Los datos topográficos se sintetizan mediante curvas elevaciones-volúmenes y elevaciones-áreas, como se muestra en la figura 5.3.

Por otra parte, para estimar el volumen útil que se requiere para satisfacer una determinada demanda, se deben tener datos de volúmenes escurridos por el río durante un tiempo relativamente largo. Desde luego, entre mayor sea el lapso de registros, más confiable será la estimación del volumen útil. En general, un registro de 20 años o más proporciona una buena estimación.

Es recomendable determinar el volumen útil de una presa en dos pasos: el primero consiste en hacer una primera estimación usando datos mensuales de aportaciones y demandas e ignorando factores de menor importancia, como la evaporación y precipitación directa en el vaso; el segundo es simular el funcionamiento del vaso para un periodo largo, tomando en cuenta las variaciones mensuales y anuales de aportaciones y demandas y todos los demás factores que intervienen en la cantidad de agua almacenada en un determinado instante.

Cuando se desea hacer una primera estimación del volumen útil se pueden usar dos métodos. El primero, llamado de la *curva masa* o diagrama de Rippl, desarrollado en 1883 (referencia 5.1), es útil cuando las demandas son constantes, y el segundo, conocido como *algoritmo del pico secuente*, es conveniente cuando las demandas varían en el tiempo.

Una curva masa es una representación gráfica de volúmenes acumulados contra el tiempo. En la figura 5.4 se muestra una parte de una curva masa.

Supóngase que, en el caso de la figura 5.4, se tiene una demanda constante de agua de $56.3 \text{ m}^3/\text{s}$. La curva masa de demandas es, entonces, una línea recta con pendiente de $56.3 \text{ m}^3/\text{s}$.

La pendiente de la curva masa de escurrimiento es el gasto que pasa por el sitio; entonces, cuando la pendiente de la curva de demandas *ag* es mayor que la de la curva de escurrimiento *af*, el gasto demandado es mayor que el aportado por el río y viceversa. Obviamente, en los puntos en que la curva de escurrimientos tiene una pendiente de 56.3 , el gasto de aportación es igual al de demanda, como sucede en los puntos *b*, *c* y *e* de la figura 5.4.

Ahora bien, supóngase que el vaso se encuentra lleno en el punto *a*. Entonces, se observa lo siguiente:

- Entre el punto *a* y el *b* la demanda es menor que la aportación, por lo que el vaso permanece lleno y el agua sobrante sale por la obra de excedencias.
- Hasta el punto *b*, en diciembre del primer año, se ha derramado un

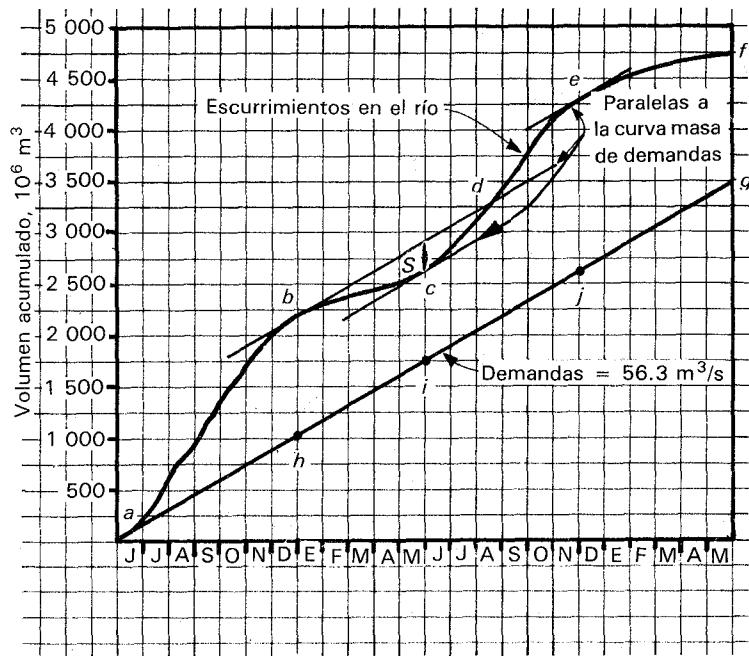


Figura 5.4

- volumen igual a la diferencia de ordenadas entre los puntos b y h , que, en el caso de la figura 5.4, es de aproximadamente $1\ 175 \times 10^6 \text{ m}^3$.
- Del punto b al c el gasto de aportación es menor que el de demanda, por lo que, en este lapso, el volumen almacenado, y por lo tanto también el nivel del agua en el vaso, disminuye.
 - En el punto c se llega al nivel mínimo en el vaso; la máxima diferencia entre el volumen de aportación y el de demanda del punto b al c está dado por la diferencia de ordenadas S entre una recta tangente al punto b y el punto c .
 - Del punto c al e el gasto de aportación es nuevamente mayor que el de demanda y el volumen almacenado aumenta otra vez.
 - Para que durante el lapso indicado por la figura 5.4 no se tenga déficit, es decir, para que no se deje de cumplir con la totalidad de la demanda, el volumen útil mínimo necesario es S (véase inciso d). De esta manera, dado que la presa está llena en el punto b , al llegar al punto c el nivel es el del NAMINO. En estas condiciones, del punto

c al d se incrementa nuevamente el volumen almacenado y en el punto d la presa vuelve a estar llena.

- Entre el punto d y el e la presa permanece llena y se vuelven a tener derrames.
- Del punto e en adelante el gasto de aportación es otra vez menor que el de demanda y el volumen almacenado disminuye.
- La línea $abde$ es una curva masa de salidas totales de la presa (esto es, salidas para cubrir la demanda más derrames) que tiene una pendiente mínima de $56.3 \text{ m}^3/\text{s}$.

Este método se aplica a todo el periodo de datos, y la máxima diferencia que se encuentre entre una tangente a los puntos tales como el b y el e y otra tangente a los puntos tales como el c será el volumen útil mínimo necesario para satisfacer la demanda, *si se repitieran exactamente las aportaciones que se usan como datos*. Es obvio que esto nunca sucede, por lo que el volumen útil, así calculado, no garantiza que no haya algún déficit durante la operación de la presa en su vida útil.

Cuando la demanda no es constante, si bien es posible aplicar el método anterior, es más conveniente hacer el análisis numéricamente en lugar de hacerlo en forma gráfica. El *algoritmo del pico secuente* (referencia 5.3), que se presenta a continuación, se basa en la misma idea de Rippl, pero tiene la ventaja de que es más fácil de usar, especialmente para demandas variables. Este método se ilustrará con un ejemplo.

Ejemplo 5.1. Dada una serie de volúmenes de entrada al vaso X_i y de salida D_i para satisfacer la demanda durante un lapso de T semanas, meses, años, etc. (columnas 2 y 3 de la tabla 5.1, respectivamente), el algoritmo del pico secuente consiste en:

- Calcular la entrada neta al vaso $(X_i - D_i)$ para $i = 1, 2, \dots, 2T$ (columna 4) y la entrada neta acumulada $\sum_{j=1}^{2T} (X_j - D_j)$ para $i = 1, 2, \dots, 2T$ (columna 5).
- Encontrar el primer pico (valor máximo) de las entradas netas acumuladas, P_1 , el cual equivale a la diferencia de ordenadas entre los puntos b y h de la figura 5.4. En el ejemplo de la tabla 5.1, $P_1 = +175 \times 10^3 \text{ m}^3$.
- Localizar el *pico secuente*, P_2 , esto es, el siguiente pico mayor que P_1 , el cual es equivalente a la diferencia de ordenadas entre los puntos e y j de la figura 5.4 y, en el caso de la tabla 5.1, $P_2 = +260 \times 10^3 \text{ m}^3$.

- d) Entre el primer par de picos, P_1 y P_2 , hallar el valor más bajo de la columna 5 de la tabla 5.1. Este valor corresponde a la diferencia de ordenadas entre los puntos c e i de la figura 5.4 y, por lo tanto, la diferencia $T_1 - P_1$ equivale al volumen S en la figura citada. De la tabla 5.1, $T_1 = -845 \times 10^3 \text{ m}^3$ entonces:

$$S = P_1 - T_1 = [175 - (-845)] \times 10^3 = 1\,020 \times 10^3 \text{ m}^3$$

- e) Buscar el pico secuente P_3 mayor que P_2 .
f) Encontrar el valor mínimo T_2 que se encuentre entre P_2 y P_3 y calcular $P_2 - T_2$.
g) Repetir los pasos e y f para todos los picos secuentes de los $2T$ intervalos de tiempo.

En los ejemplos de la figura 5.4 y la tabla 5.1 no es necesario realizar los pasos e, f, y g, pues sólo se tienen dos picos. No obstante, pueden aparecer más picos en un registro más largo.

La capacidad útil mínima necesaria para que no se tenga déficit en el periodo de los datos es, como en el caso de la curva masa:

$$S_u = \max(P_j - T_j) \quad \forall j$$

Nuevamente, dado que el periodo de datos nunca se repetirá exactamente igual durante la vida útil de la presa, este volumen útil no garantiza que no habrá déficit.

En el ejemplo de la tabla 5.1 el volumen útil es $P_1 - T_1 = 1\,020 \times 10^3 \text{ m}^3$. En la columna 6 de la misma tabla se han escrito los volúmenes que contendría el vaso si se presentaran los escurrimientos y demandas señalados en las columnas 2 y 3 y si el vaso está lleno al principio del mes 1. Obsérvese que en el mes 5 del segundo año el vaso se vacía totalmente, pero no hay ningún déficit en la satisfacción de la demanda.

Cuando se tiene alguna libertad para variar las demandas, es posible estimar un volumen hidrológicamente “adecuado” mediante una curva que relacione la demanda anual con la capacidad útil, como la que se muestra en la figura 5.5. Cada punto de esta curva se obtiene mediante un análisis de curva masa o pico secuente. Si las demandas mensuales son variables, el cociente de la demanda de cada mes entre la anual debe ser el mismo para cada punto de la curva. Normalmente, en una curva como la de la figura 5.5 existe un punto A tal que para una demanda anual mayor que la correspondiente a dicho punto, un incremento pequeño en las demandas exige un incremento relativamente grande en el tamaño del vaso y viceversa. Por lo tanto, un

Tabla 5.1

(1) mes	(2) X_i	(3) D_i	(4) $X_i - D_i$	(5) $(X_i - D_i)_{ac}$	(6) Vol.	(7) Derrame	(8) Estado del vaso	
							10^3 m^3	10^3 m^3
1	120	220	-100	-100	920			
2	130	250	-120	-220	800			
3	115	305	-190	-410	610			
4	125	480	-355	-765	255			
5	140	305	-165	-930	90			
6	325	250	+75	-855	165			
7	450	220	+230	-625	395			
8	590	180	+410	-215	805			
9	380	150	+230	+15	1\,020	15		lleno
10	280	150	+130	+145	1\,020	130		lleno
11	190	160	+30	+175P ₁	1\,020	30		lleno
12	110	200	-90	+85	930			
1	120	220	-100	-15	830			
2	130	250	-120	-135	710			
3	115	305	-190	-325	520			
4	125	480	-355	-680	165			
5	140	305	-165	-845T ₁	0			vacio
6	325	250	+75	-770	75			
7	450	220	+230	-540	305			
8	590	180	+410	-130	715			
9	380	150	+230	+100	945			
10	280	150	+130	+230	1\,020	55		lleno
11	190	160	+30	+260P ₂	1\,020	30		lleno
12	110	200	-90	+170	930			

vaso que aproveche la máxima cantidad de agua posible sin ser demasiado costoso tendría que tener el volumen útil correspondiente al punto A.

En la figura 5.5 se observa que, en general, una presa que aprovechara el 100% del escurrimiento resulta muy costosa.

Las consideraciones anteriores están basadas en factores hidrológicos únicamente y la decisión final tendrá, desde luego, que tomar en cuenta otras consideraciones, como las económicas, sociales, etc.

Con el cálculo de la curva masa o el algoritmo del pico secuente y una gráfica como la de la figura 5.5, es posible tener una serie de opciones preliminares de volumen útil. Sin embargo, al estar funcionando la presa, aunque los valores medios se conserven, la ocurrencia de varios años secos durante su vida útil puede producir déficit que hagan que la obra deje de ser renta-

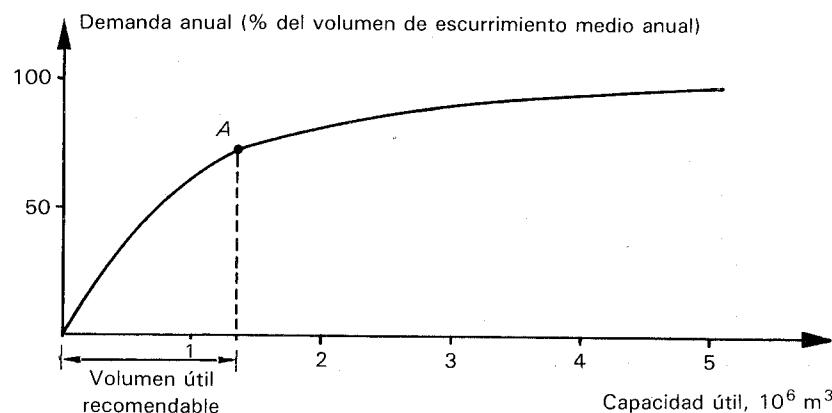


Figura 5.5

ble, o bien la ocurrencia de varios años húmedos puede ocasionar una gran cantidad de desperdicios que pudieran aprovecharse aumentando el volumen útil. Además, las evaporaciones, que no pueden ser tomadas en cuenta en análisis como los descritos anteriormente, pueden llegar a afectar de manera considerable el funcionamiento de la presa. Todos estos aspectos del diseño de vasos de almacenamiento no son tomados en cuenta en los métodos anteriores. Por ello, es siempre necesario corroborar el valor del volumen útil estimado por medio de la simulación del funcionamiento del vaso.

5.3 FUNCIONAMIENTO DE VASOS

La ecuación fundamental para la simulación del funcionamiento de vasos es la de *continuidad*, que expresada en un intervalo de tiempo Δt dado es:

$$X - D = \Delta V \quad (5.1)$$

donde

X = volumen de entradas al vaso durante el intervalo Δt .

D = volumen de salidas del vaso durante el mismo intervalo.

ΔV = cambio del volumen almacenado en el vaso durante el intervalo Δt .

El intervalo de tiempo Δt que se use depende del tamaño del vaso; generalmente se toma $\Delta t =$ un mes, pero en vasos muy grandes, cuyos efectos

reguladores alcanzan a cubrir lapsos del orden de años, Δt puede ser de varios meses, pero nunca mayor de un año; por el contrario, en vasos de muy poca capacidad de regulación, el intervalo de simulación puede reducirse a una semana o hasta un día.

Las entradas a un vaso son:

$$X = E_{cp} + E_t + E_{ll} \quad (5.2)$$

donde

E_{cp} = entradas por cuenca propia.

E_t = entradas por transferencia desde otras cuencas.

E_{ll} = entradas por lluvia directa sobre el vaso.

Y las salidas se componen de:

$$D = S_d + S_e + S_i + S_{de} \quad (5.3)$$

donde

S_d = volumen extraído para satisfacer la demanda.

S_e = volumen evaporado.

S_i = volumen infiltrado en el vaso.

S_{de} = volumen derramado.

5.3.1 Entradas al vaso

a) Entradas por cuenca propia

Son los volúmenes de escurrimiento superficial generados en la cuenca no controlada que descarga directamente a la presa, que está delimitada por el sitio de la boquilla —donde se localiza la cortina— y las presas situadas aguas arriba (véase figura 5.6).

Las entradas por cuenca propia se cuantifican a partir de los datos recabados en las estaciones hidrométricas de la zona. En algunas ocasiones se cuenta con datos de escurrimiento tomados en una estación hidrométrica situada en el sitio donde estará la obra (con frecuencia se instalan las estaciones con este fin). Los datos que se usen serán los de esta estación. Sin embargo, usualmente no se tiene una estación hidrométrica en el sitio exacto donde se proyecta construir la presa, y muchas veces ni siquiera en el mismo río. En estos casos es necesario extrapolar la información recabada en las estaciones más cercanas. Así, las entradas por cuenca propia se calcularían como:

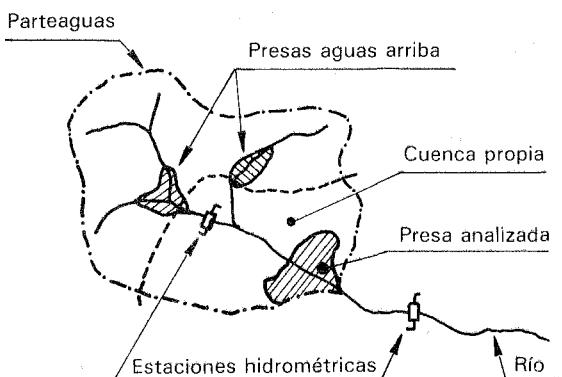


Figura 5.6

$$E_{cp} = F_1 V_{e1} + F_2 V_{e2} + \dots + F_n V_{en} \quad (5.4)$$

donde

F_i = factor de corrección para la estación i .

V_{ei} = volumen de escurrimiento medido en la estación i .

n = número de estaciones hidrométricas consideradas.

Los factores de corrección F_i son función del área de la cuenca de aportación a la estación i y de la posición y características de la cuenca de dicha estación con respecto al sitio de la presa.

Cuando $n = 1$, es decir, cuando se utiliza una sola estación para estimar las entradas por cuenca propia a la presa, el factor F_1 se puede estimar de dos formas:

- Si se dispone de suficiente información sobre la precipitación que cae tanto en la cuenca de aportación a la presa como en la correspondiente a la estación hidrométrica, entonces:

$$F_1 = \frac{V_{ll_{cp}}}{V_{ll_e}} \quad (5.5)$$

donde $V_{ll_{cp}}$ es el volumen de lluvia que cae en la cuenca propia durante el Δt y V_{ll_e} es el volumen de lluvia que cae en la cuenca asociada a la

estación hidrométrica durante el Δt . Si no existen suficientes estaciones medidoras de precipitación, F_1 se puede calcular como:

$$F_1 = \frac{A_{cp}}{A_e} \quad (5.6a)$$

donde A_{cp} = área de cuenca propia y A_e = área de la cuenca correspondiente a la estación hidrométrica.

- Cuando $n > 1$, los factores F_i se pueden calcular como:

$$F_i = K_i \frac{A_{cp}}{A_{ei}} \quad (5.6b)$$

donde K_i es un factor de peso que se asigna a la estación i de acuerdo con su confiabilidad y relación de sus registros con el escurrimiento en la cuenca de aportación a la presa analizada. Nótese que necesariamente:

$$\sum_{i=1}^n K_i = 1 \quad (5.6c)$$

También es factible, desde luego, usar volúmenes de lluvia en lugar de áreas de cuenca en la fórmula 5.6b.

b) Entradas por transferencia desde otras cuencas (E_t)

Estas entradas provienen de las descargas, libres o controladas, de presas situadas aguas arriba de la presa en cuestión o en otras cuencas. Si existen estas transferencias, siempre serán conocidas.

c) Entradas por lluvia directa sobre el vaso (E_{ll})

Los aparatos que registran la cantidad de lluvia que cae lo hacen en forma de volumen por unidad de área, es decir, como *altura de precipitación* (véase capítulo 6). El volumen de lluvia que cae directamente sobre el vaso será entonces esa altura de precipitación hp multiplicada por el área que tenga la superficie libre del vaso, en promedio, durante el Δt usado en el cálculo. El área se determina por medio de la curva elevaciones-áreas del vaso, como se muestra en la figura 5.7 (véase también figura 5.3).

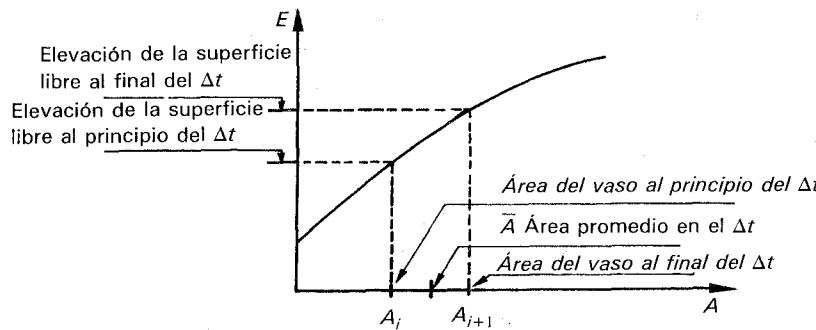


Figura 5.7 Curva elevación-área del vaso.

Las entradas por lluvia directa sobre el vaso son:

$$E_{ll} = h_p \bar{A} \quad (5.7)$$

donde \bar{A} es el área promedio del vaso en el Δt .

5.3.2 Salidas del vaso

a) Volumen extraído para satisfacer la demanda (S_D)

Está constituido por la ley de demandas bajo análisis, la cual depende, por un lado, del tipo de aprovechamiento de que se trate: agua potable, riego, generación de energía eléctrica, etc. y, por otro, de la relación beneficio/costo de la obra. Para fines de la simulación del funcionamiento del vaso, este volumen siempre es un dato.

b) Volumen evaporado directamente del vaso (S_e)

De la misma manera que la precipitación, la evaporación se mide en *lámina o altura* (volumen/unidad de área). Si se tienen evaporímetros cerca del vaso, la evaporación registrada se corrige como se indica en el apartado 4.1.4 y, por lo tanto, el volumen de evaporación se calcula de manera similar al de lluvia directa sobre el vaso:

$$S_e = h_{ev} \bar{A} \quad (5.8)$$

donde h_{ev} = lámina de evaporación y \bar{A} = área media del vaso durante el Δt .

Cuando no se cuenta con evaporímetros cerca del vaso, la lámina de evaporación se puede calcular usando la fórmula empírica que se estudió en el apartado 4.1.1 o alguna similar.

c) Volumen infiltrado en el vaso (S_i)

Este volumen es difícil de medir. Afortunadamente, en general, es muy pequeño; si se estima lo contrario, entonces será necesario realizar un estudio geológico detallado del vaso que proporcione los elementos para su cálculo.

d) Volumen derramado (S_{de})

El volumen de agua que sale por la obra de excedencias es resultado de la simulación y depende de los niveles característicos (especialmente del NAMO) y de la política de operación de las compuertas que se defina para cada opción.

5.3.3 Procedimiento de cálculo

Si el subíndice i denota el principio del intervalo simulado y el $i + 1$ el final del mismo, la ecuación de continuidad (5.1) se puede expresar como:

$$V_{i+1} = V_i + X_i - D_i \quad (5.9)$$

donde V_{i+1} y V_i son los volúmenes almacenados en los instantes $i + 1$ e i , respectivamente. Las entradas netas al vaso durante el intervalo considerado, $X_i - D_i$, se pueden expresar, para fines de cálculo como:

$$X_i - D_i = I_i - O_i + P_i - S_{dei} \quad (5.10)$$

donde

I_i = volumen de entradas al vaso que no depende del nivel en el mismo durante el intervalo considerado.

O_i = volumen de salidas del vaso que no depende del nivel en el mismo durante el intervalo considerado.

P_i = volumen de entradas—volumen de salidas que sí dependen del nivel en el vaso durante el intervalo considerado.

De manera que:

$$I_i = E_{cpi} + E_{ti} \quad (5.11)$$

$$\dot{O}_i = S_{Di} \quad (5.12)$$

$$P_i = E_{lli} - S_{ei} - S_{ii} \quad (5.13)$$

La ecuación 5.9 está sujeta a la restricción:

$$V_{\min} \leq V_{i+1} \leq V_m \quad (5.14)$$

donde V_{\min} es el volumen de almacenamiento correspondiente al NAMINO o NAMIN y V_m es el volumen de almacenamiento al NAMO.

Con las ecuaciones 5.9 y 5.14 es posible hacer el funcionamiento del vaso. El procedimiento de cálculo se muestra en el diagrama de bloques de la figura 5.8, que se ilustrará con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2. Simular un año del funcionamiento de un vaso con las siguientes características:

Curvas elevaciones-capacidades y elevaciones-áreas: de los datos topográficos del vaso, se han determinado varios puntos que relacionan elevaciones con capacidades y áreas del vaso y, mediante el método de mínimos cuadrados (véase apéndice B), se han obtenido las siguientes ecuaciones que sirven sólo para este vaso en particular:

$$V = 10 E^{1.18} \quad (5.15)$$

$$A = 0.0118 E^{0.18} \quad (5.16)$$

donde E = elevación de la superficie libre del agua, en m, V = volumen almacenado, en miles de m^3 y A = área de la superficie libre del agua, en km^2 .

La elevación del NAMO es la 50.40 m y la del NAMINO la 7.05 m, de manera que el volumen muerto es de $100.2 \times 10^3 m^3$ y el volumen útil es $920.4 \times 10^3 m^3$. A continuación se proporciona el resto de los datos.

5.3.4 Entradas

Por cuenca propia (E_{cpi}). Aguas abajo de la presa se tiene una estación hidrométrica que registró, en el año de estudio, los volúmenes mostrados en la columna 2 de la tabla 5.2. El área correspondiente a la estación hidrométrica es de $500 km^2$ y el de la cuenca correspondiente a la presa es de $400 km^2$. No hay suficientes estaciones medidoras de lluvia.

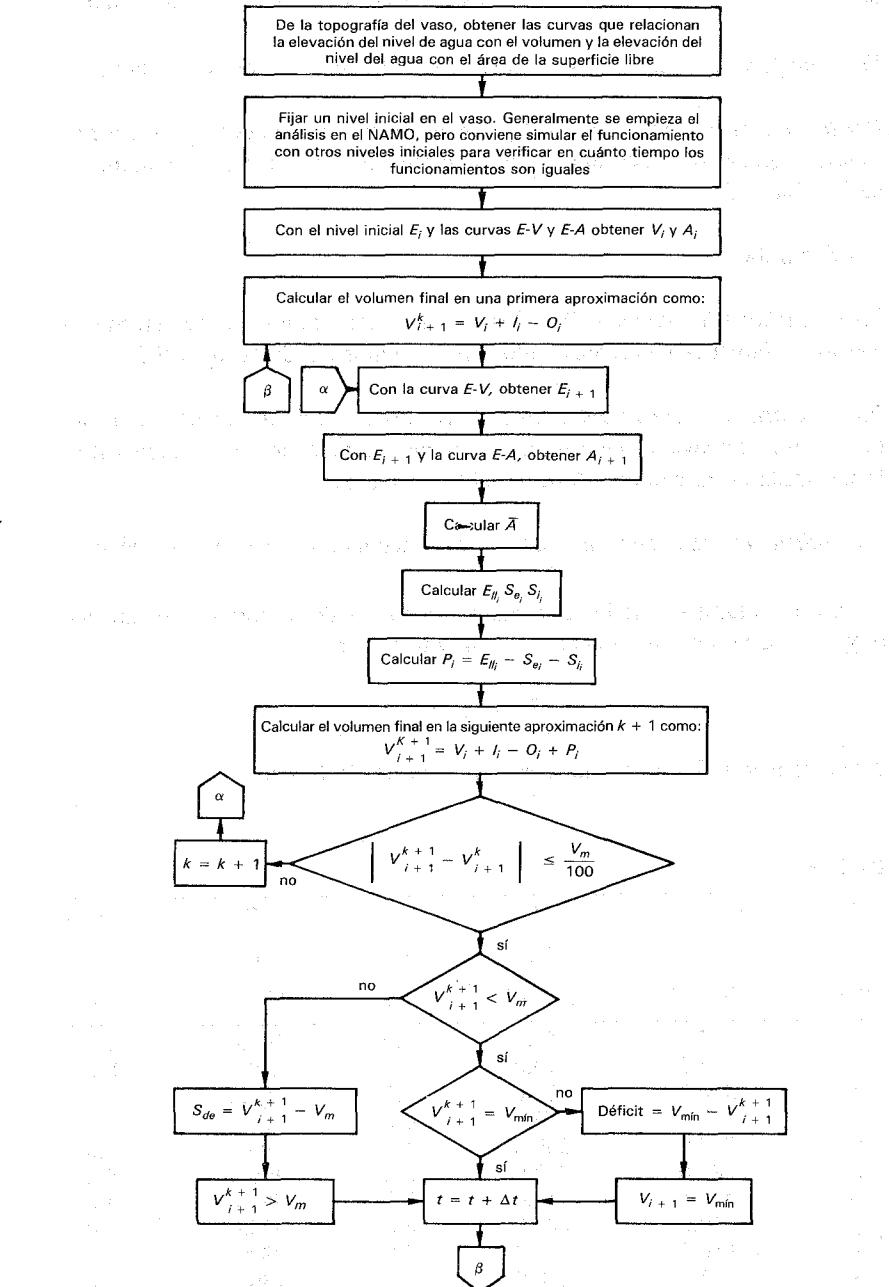


Figura 5.8 Diagrama de bloques (funcionamiento de vasos).

Por transferencia (E_t). No hay transferencia de agua desde otras cuencas.

Por lluvia directa sobre el vaso (E_{ll}). De una estación medidora de lluvia cercana a la presa se tienen alturas de precipitación anotadas en la columna 4 de la tabla 5.2.

5.3.5 Salidas

Para satisfacer la demanda (S_D). Del estudio correspondiente, se determinaron los volúmenes mensuales dados en la columna 5 de la tabla 5.2.

Por evaporación directa del vaso (S_e). De los datos de un evaporímetro situado cerca del vaso se determinó que la lámina de evaporación mensual es la mostrada en la columna 6 de la tabla mencionada.

Por infiltración (S_i). Se estima que la infiltración en el vaso es despreciable.

En la columna 3 de la tabla 5.2 se ha calculado la entrada por cuenca propia de acuerdo con la ecuación 5.4 con $n = 1$:

$$E_{cp} = F_1 V_{ei}$$

donde el factor F_1 se calcula, según la ecuación 5.6, como:

Tabla 5.2

Mes	1	2	3	4	5	6
	V_{ei} 10^3 m^3	E_{cp} 10^3 m^3	hp cm	S_D 10^3 m^3	h_{ev} cm	
n	75.0	60.0	1.0	200.0	1.0	
d	87.5	70.0	0.0	260.0	0.0	
e	100.0	80.0	0.0	280.0	0.0	
f	137.5	110.0	0.0	320.0	1.0	
m	250.0	200.0	1.0	390.0	3.0	
a	387.5	310.0	2.0	400.0	5.0	
m	562.5	450.0	3.0	390.0	4.0	
j	850.0	680.0	4.0	320.0	4.0	
j	650.0	520.0	4.0	280.0	3.0	
a	562.5	450.0	5.0	230.0	3.0	
s	437.5	350.0	4.0	190.0	2.0	
o	131.3	105.0	2.0	190.0	1.0	

$$F_1 = \frac{A_{cp}}{A_e} = \frac{400}{500} = 0.8$$

La simulación del funcionamiento del vaso se muestra en la tabla 5.3. Los cálculos realizados en dicha tabla se hicieron siguiendo paso a paso el diagrama de bloques de la figura 5.8.

Es conveniente hacer la simulación del funcionamiento del vaso para toda su vida útil; debido a que normalmente no se tienen registros tan largos, éstos se pueden completar usando, por ejemplo, la fórmula de Thomas-Fiering (referencia 5.3) para la generación de registros sintéticos:*

$$Q_{i+1} = \bar{Q}_{i+1} + b_i (Q_i - \bar{Q}_i) + t_i S_{i+1} \sqrt{1 - r_i^2} \quad (5.17)$$

donde

Q_{i+1} = volumen de escurrimiento en el mes $i + 1$.

\bar{Q}_{i+1} = volumen medio de escurrimiento en el mes $i + 1$, obtenido de los registros.

Q_i = volumen de escurrimiento en el mes i .

\bar{Q}_i = volumen medio de escurrimiento en el mes i , obtenido de los registros.

b_i = $r_i S_{i+1} / S_i$.

t_i = número aleatorio con distribución normal, media cero y variancia uno.

S_i = desviación estándar de los volúmenes registrados en el mes i .

S_{i+1} = desviación estándar de los volúmenes registrados en el mes $i + 1$.

r_i = coeficiente de correlación entre los volúmenes del mes i y el $i + 1$ (véase apéndice B).

El primer sumando del lado derecho de la fórmula 5.17, de estar aislado, constituiría el modelo más simple posible para la generación de registros sintéticos: aquél en el que el volumen escurrido en un mes dado es siempre igual al medio en ese mes. El segundo sumando toma en cuenta la correlación de los volúmenes escurridos en cada dos meses consecutivos y, finalmente, el tercer sumando toma en cuenta el carácter aleatorio del escurrimiento.

* En este sentido, existe una enorme variedad de métodos para la generación de registros sintéticos (ver, por ejemplo, la referencia 5.10). Debido al enfoque del libro, se presenta únicamente uno de los métodos más simples.

Tabla 5.3

Mes	E_i	A_i km^2	V_i $10^3 m^3$	I_i $10^3 m^3$	O_i $10^3 m^3$	E_{ii} $10^3 m^3$	S_{ei} $10^3 m^3$	P_i $10^3 m^3$	V_{i+1} $10^3 m^3$	E_{i+1} $10^3 m^3$	A_{i+1} km^2	Observaciones	
nov	50.4	40.8	1 020.6	60	200	37.82	37.82	0	880.6	44.5	34.7		
dic	44.5	34.7	880.6	70	260	0	0	0	690.0	36.2	26.5		
ene	36.2	26.5	890.0	80	280	0	0	0	490.0	27.1	18.2		
feb	27.1	18.2	490.0	110	320	0	14.0	-14.0	280.0	16.8	9.8		
feb						0	13.8	-13.8	266.2	16.1	9.3	ok	
mar	16.1	9.3	266.2	200	390	5.8	17.5	-11.7	76.2	5.6	2.3		
mar						5.6	16.9	-11.3	64.5	4.9	2.0	no pasa déficit = 35.1 EI = NAMINO	
mar								64.9	100.0	7.04	3.2		
abr	7.04	3.2	100.0	310	400	3.5	8.8	-5.3	100.0	1.0	0.3		
abr								4.7	10.0	0.5	0.1	déficit = 95.3 EI = NAMINO	
abr									100.0	7.04	3.2		
may	7.04	3.2	100.0	450	390	12.8	17.0	-4.2	160.0	10.5	5.3		
may								0	155.8	10.2	5.3	ok	
jun	10.2	5.2	155.8	680	320	97.3	73.0	24.3	755.8	28.3	19.3		
jun	28.3	19.3	515.8	520	280	99.4	74.5	24.9	780.1	40.1	30.4		
jul	40.2	30.4	780.7	450	280	175.9	105.5	70.4	1 000.7	49.6	40.0		
jul						183.7	110.2	73.5	1 071.1	52.5	43.1	no pasa derrame = 54.2	
ago	40.8	1 020.0	350	190	177.4	88.7	88.7	1 268.7	60.6	51.9			
ago						185.4	92.7	92.7	1 272.7	50.4	40.8		
sep	50.4	40.8	1 020.0	105	190	77.9	38.9	38.9	935.0	46.8	37.1		
sep						79.6	39.8	39.8	973.9	48.4	38.8	no pasa	
oct	50.4	40.8	1 020.0						974.8	48.5	38.8	ok	
oct										122	130	100	- 15
oct													

Funcionamiento de vasos

Tabla 5.4 Volumenes en $10^3 m^3$

Año	e	f	m	a	m	j	j	a	s	o	n	d
1	20	40	60	80	95	100	110	150	120	70	30	10
2	-	30	80	105	120	140	130	160	140	110	40	-
3	-	-	93	100	135	160	180	104	95	70	-	-
4	-	25	115	140	150	180	220	95	80	60	-	7
5	12	27	125	160	180	205	240	185	130	120	60	12
6	10	-	75	70	110	150	200	90	120	100	40	23
7	9	15	48	54	85	98	150	102	105	125	-	10
8	16	21	54	78	60	77	100	145	100	80	15	8
9	22	-	14	39	28	45	60	137	125	95	20	6
10	13	16	18	41	39	62	75	122	130	100	-	15

La aplicación de la fórmula 5.17 puede tener algunos problemas en el caso de corrientes efímeras o intermitentes, donde los gastos pueden ser nulos en algunos meses del año. Para este caso, se usa el siguiente procedimiento (referencia 5.4):

- a) Para cada mes i determinar el número de años en que hubo flujo, N_i . Si N es el número total de años de registro, calcular la probabilidad de que en un año dado haya flujo en el mes i como:

$$P_i = N_i/N \quad (5.18)$$

- b) Calcular \bar{Q}_i y S_i y determinar el coeficiente de correlación para los pares sucesivos de meses en que se hayan tenido escurrimientos. Generar secuencias de volúmenes mensuales para el mes i , escoger un número aleatorio r' uniformemente distribuido entre 0 y 1. Si $P_i > r'$, habrá escurrimiento en ese mes; si $r' > P_i$ no habrá escurrimiento en ese mes y se repite el procedimiento para el mes $i + 1$.

Ejemplo 5.3. En un río se tiene el registro de volúmenes mostrado en la tabla 5.4. Generar 5 años de registros sintéticos.

En la tabla 5.5a se muestra el cálculo de \bar{Q}_i , S_i , P_i , r_i y b_i y en la tabla 5.5b se presentan los volúmenes generados para los cinco años. Por comodidad, para decidir si en un mes dado hay escurrimiento o no, se ha usado el mismo número aleatorio t_i .

En este caso, el primer volumen es nulo, pero en general conviene usar como Q_i (ecuación 5.17) para el primer mes la media \bar{Q}_i del último mes del año.

Tabla 5.5a Volúmenes en 10^3 m^3

<i>i</i>	\bar{Q}_i	S_i	P_i	r_i	b_i
1	14.6	4.6	0.7	0.800	1.39
2	24.9	8.0	0.7	0.386	1.69
3	68.2	35.1	1.0	0.955	1.04
4	86.7	38.2	1.0	0.923	1.12
5	100.2	46.2	1.0	0.986	1.08
6	121.7	50.4	1.0	0.954	1.11
7	146.5	58.7	1.0	-0.142	-0.07
8	129.0	29.9	1.0	0.605	0.36
9	114.5	17.8	1.0	0.629	0.75
10	93.0	21.1	1.0	0.766	0.54
11	34.2	14.8	0.6	0.490	0.17
12	11.4	5.1	0.8	-0.627	-0.57

Tabla 5.5b Volúmenes en 10^3 m^3

<i>i</i>	t_i	Q_i									
1	0.395	0.00	13	0.507	0.00	25	0.746	23.77	37	0.946	24.49
2	0.853	0.75	14	0.680	0.00	26	0.120	0.00	38	0.132	0.00
3	0.834	67.91	15	0.798	51.96	27	0.257	34.44	39	0.882	54.68
4	0.852	96.05	16	0.087	70.79	28	0.109	52.83	40	0.847	82.23
5	0.501	119.58	17	0.289	87.52	29	0.664	74.06	41	0.721	108.02
6	0.792	149.29	18	0.544	112.58	30	0.853	100.64	42	0.925	137.91
7	0.306	182.51	19	0.412	143.63	31	0.686	135.20	43	0.856	179.56
8	0.807	150.37	20	0.331	139.00	32	0.248	137.13	44	0.286	135.15
9	0.280	126.16	21	0.613	126.79	33	0.355	122.46	45	0.251	120.27
10	0.286	106.44	22	0.802	115.37	34	0.602	108.84	46	0.399	103.87
11	0.939	50.39	23	0.841	54.28	35	0.946	51.76	47	0.162	0.00
12	0.032	0.00	24	0.397	0.00	36	0.132	0.00	48	0.490	0.00
									59	0.308	0.00
									60	0.574	0.00

5.4 TRÁNSITO DE AVENIDAS EN VASOS

El tránsito de avenidas en vasos es un procedimiento que sirve para determinar el hidrograma de salida de una presa dado un hidrograma de entrada. Algunas de sus principales aplicaciones son:

- Conocer la evolución de los niveles en el vaso y de los gastos de salida por la obra de excedencias, para saber si la política de operación de las compuertas del vertedor es adecuada y así, al presentarse una avenida, no se pongan en peligro la presa, bienes materiales o vidas humanas aguas abajo.
- Dimensionar la obra de excedencias.
- Fijar el NAME y las dimensiones de las obras de desvío y ataguías.

En el tránsito de avenidas en vasos se usa, como en la simulación del funcionamiento de vasos, la ecuación de continuidad:

$$I - 0 = \frac{dV}{dt} \quad (5.19)$$

donde

I = gasto de entrada al vaso.

0 = gasto de salida del vaso.

$\frac{dV}{dt}$ = variación del volumen almacenado en el tiempo.

o bien, en diferencias finitas:

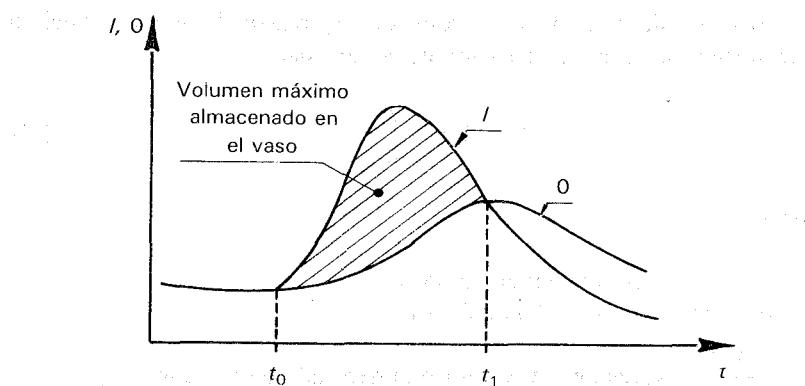
$$\frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \frac{0_i + 0_{i+1}}{2} = \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta t} \quad (5.20)$$

donde los subíndices i e $i + 1$ denotan valores al inicio y al final del intervalo de tránsito Δt , respectivamente.

El valor de Δt que se usa en el tránsito de avenidas, debido a la duración de las mismas, es considerablemente más pequeño que el empleado en la simulación del funcionamiento de vasos; en el primer caso, Δt es del orden de horas, mientras que en el segundo, Δt es en general de un mes. Por esto, durante el tránsito de una avenida, términos como la lluvia directa en el vaso, la evaporación y la infiltración son insignificantes y normalmente se ignoran. En términos globales es recomendable que el Δt que se use sea menor o igual a una décima parte del tiempo de pico del hidrograma de entrada:

$$\Delta t \leq 0.1 t_p \quad (5.21)$$

Durante el tránsito de una avenida por un vaso, la forma de los hidrogramas de entrada y salida es aproximadamente como se muestra en la figura 5.9. Antes del tiempo t_0 , las condiciones están establecidas y la entrada es igual a la salida. En el intervalo $t_0 < t < t_1$, la entrada es mayor que la salida y, de acuerdo con la ecuación 5.19, aumenta el volumen almacenado en el vaso y, por lo tanto, su nivel. En el tiempo t_1 se alcanza el máximo almacenamiento y consecuentemente el máximo nivel en el vaso. El área que hay entre los dos hidrogramas entre t_0 y t_1 ,

Figura 5.9 Hidrogramas de entrada (I) y salida (0)

$$V_s = \int_{t_0}^{t_1} (I - 0) dt \quad (5.22)$$

es el volumen máximo almacenado y es, por lo tanto, el volumen de superalmacenamiento requerido para la avenida de entrada $I(t)$ considerada, y el nivel que se tiene en el vaso en el tiempo t_1 será el NAME necesario para esa misma avenida. Cuando $t > t_1$, las salidas son mayores que las entradas y, por la ecuación 5.19, el volumen almacenado en el vaso disminuye.

Al realizar el tránsito de una avenida por un vaso, en cualquier instante dado, se conocen todas las condiciones ($I, 0$ y V) en i (ecuación 5.20), y se desean conocer en $i + 1$. Entonces, la ecuación de continuidad 5.20 tiene dos incógnitas, 0_{i+1} y V_{i+1} (obviamente I se conoce para cualquier tiempo), por lo que se requiere otra ecuación para tener un sistema determinado. Esta ecuación es la que liga los gastos que salen por el vertedor con la elevación de la superficie libre del agua, que en general tiene la forma (referencia 5.5):

$$0_v = CL(E - E_0)^{3/2}, \quad E > E_0 \quad (5.23)$$

donde

E = elevación de la superficie libre del vaso, m.

E_0 = elevación de la cresta del vertedor, m.

L = longitud de la cresta del vertedor, m.

C = coeficiente de descarga.

0_v = gasto por el vertedor de excedencias, $m^3/s.$

El coeficiente de descarga C es siempre del orden de 2, y éste es un valor suficientemente aproximado para hacer el tránsito de la avenida. Obviamente, si $E < E_0$, $0_v = 0$.

La ecuación 5.23 es válida cuando la descarga por el vertedor es libre; si tiene compuertas y se pretende usarlas durante el paso de la avenida, la ecuación 5.23 se sustituiría por una regla de operación de compuertas previamente establecida con la limitante de que el gasto de descarga debe ser menor o igual que 0_v . Por otra parte, se puede pensar en que la obra de toma esté funcionando de manera simultánea al paso de la avenida. Si el gasto descargado por la obra de toma 0_T es significativo en relación al descargado por el vertedor 0_v , entonces la salida total de la presa será:

$$0 = 0_v + 0_T \quad (5.24)$$

Así, con las ecuaciones 5.20, 5.23 y 5.24 y la curva elevaciones-volumenes del vaso (figura 5.3) se tiene un sistema de ecuaciones determinado, cuya solución, en cada intervalo de tiempo, proporciona las salidas y los volúmenes en el vaso.

De los procedimientos existentes para el tránsito de avenidas en vasos se presentan dos: uno semigráfico, útil para cálculos manuales, y uno numérico, que conviene utilizar cuando se cuenta con una computadora digital o una calculadora programable.

5.4.1 Método semigráfico

La ecuación de continuidad 5.20 también se puede escribir en la forma:

$$I_i + L_i + \left(\frac{2V_i}{\Delta t} - 0_i \right) = \frac{2V_{i+1}}{\Delta t} + 0_{i+1} \quad (5.25)$$

donde los términos desconocidos se han puesto del lado derecho de la ecuación. Dado que tanto V_{i+1} como 0_{i+1} dependen del nivel en el vaso (véase la figura 5.3 y la ecuación 5.23), antes de realizar el tránsito conviene trazar

una gráfica auxiliar que relaciona $\frac{2V}{\Delta t} + 0$ con 0 para cada elevación (véase figura 5.10). Para trazar dicha gráfica los pasos a seguir son:

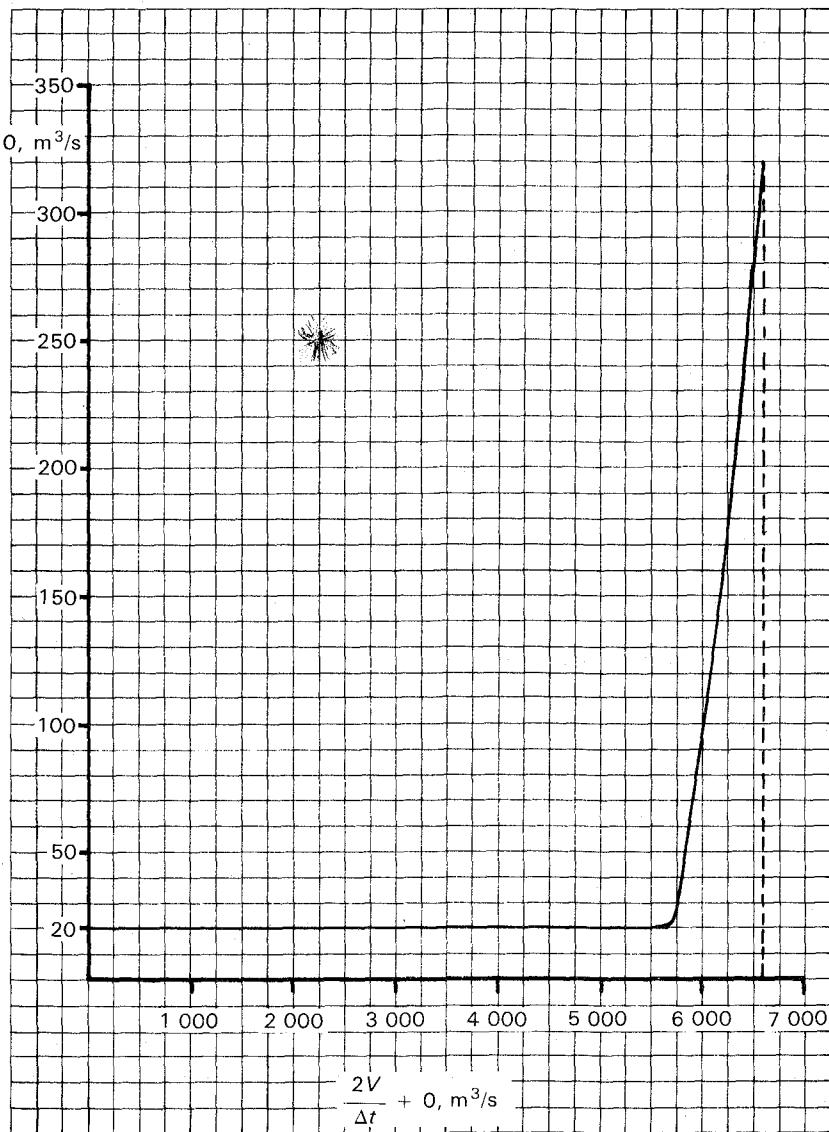


Figura 5.10

Tránsito de avenidas en vasos

- Se fija el Δt que se usará en el cálculo.
- Se fija un valor de E , mayor que E_0 .
- Se calcula 0 con las ecuaciones 5.23 y 5.24.
- Se determina V con la curva elevaciones-volumenes del vaso (figura 5.3).
- Se calcula $\frac{2V}{\Delta t} + 0$.
- Se regresa al punto b tantas veces como sea necesario para definir suficientes puntos.
- Se dibuja la curva.

Una vez dibujada la curva, se utiliza el siguiente procedimiento para el tránsito de la avenida:

- Se fija un nivel inicial en el vaso E_i . En general conviene que este nivel inicial sea el del NAMO para hacer el tránsito en las condiciones más desfavorables.
- Se calculan las salidas 0_i y el volumen V_i correspondientes a la elevación E_i .
- Se calcula $\frac{2V_i}{\Delta t} - 0_i$.
- Con los gastos I_i e I_{i+1} , conocidos de la avenida de entrada y el resultado del inciso c, se calcula $\frac{2V_{i+1}}{\Delta t} + 0_{i+1}$ usando la ecuación de continuidad (ecuación 5.25):

$$\frac{2V_{i+1}}{\Delta t} + 0_{i+1} = I_i + I_{i+1} + \left(\frac{2V_i}{\Delta t} - 0_i \right)$$

- Con el resultado del inciso anterior y la curva $\frac{2V}{\Delta t} + 0$ contra 0 (figura 5.10) se determina 0_{i+1} .
- Se resta 0_{i+1} dos veces de $\frac{2V_{i+1}}{\Delta t} + 0_{i+1}$. Con esto se tiene:

$$\frac{2V_{i+1}}{\Delta t} - 0_{i+1}$$

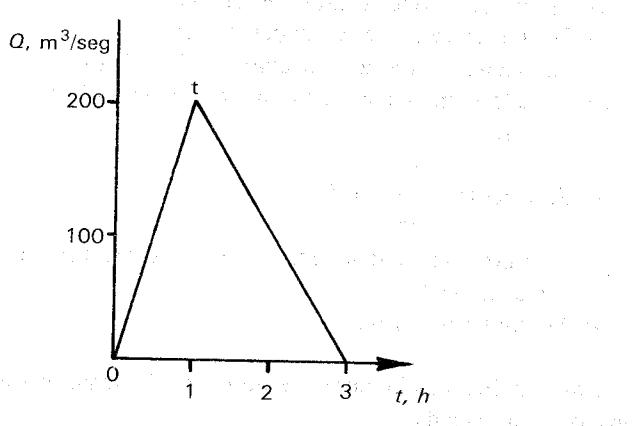


Figura 5.11 Hidrograma de entradas.

- g) Se pasa al siguiente intervalo (esto es, se hace $i = i + 1$) y se vuelve al paso d tantas veces como sea necesario para terminar con el hidrograma de entrada.

Ejemplo 5.4. Transitar la avenida mostrada en la figura 5.11 por un vaso cuya curva elevaciones-volúmenes tiene la ecuación*:

$$V = 10 E^{1.18} \quad (5.26)$$

donde E = elevación en m y V = volumen en miles de m^3 . La elevación del NAMO es la 50.4 m, el vertedor es de cresta libre con longitud de 15 m y coeficiente de descarga de 2, y la salida por la obra de toma es constante e igual a $20 \text{ m}^3/\text{s}$.

Usar el método semigráfico. Encontrar el NAME correspondiente a esta avenida y vertedor y determinar el hidrograma de salidas del vaso.

* Nótese que las ecuaciones 5.26 y 5.27 son válidas sólo para este vaso en particular. Cada vaso tiene sus propias ecuaciones, que pueden obtenerse a partir de un análisis de regresión (véase apéndice B).

Solución

La ecuación de salidas es (ecuaciones 5.23 y 5.24):

$$\begin{aligned} 0 &= CL(E - E_0)^{3/2} + 0_T \\ &= 2 \times 15 (E - 50.4)^{3/2} + 20 = 30 (E - 50.4)^{3/2} + 20 \end{aligned} \quad (5.27)$$

si $E > 50.4 \text{ m}$, Si $E < 50.4 \text{ m}$, $0 = 0_T = 20 \text{ m}^3/\text{s}$.

se usará $\Delta t = 0.1 \text{ h} = 360 \text{ s}$.

a) Curva $\frac{2V}{\Delta t} + 0$ contra 0.

En la tabla 5.6 se muestran los cálculos para la curva $\frac{2V}{\Delta t} + 0$. En

la columna 1 están las elevaciones seleccionadas; en la 2 se encuentran los volúmenes almacenados correspondientes a las elevaciones de la columna 1 y calculados con la ecuación 5.26; en la 3 están los gastos de salida, calculados con las elevaciones de la columna 1 y la ecuación 5.27 y en la columna

4 se ha hecho el cálculo de $\frac{2V}{\Delta t} + 0$. En la figura 5.10 se muestra la curva resultante.

b) Tránsito de la avenida.

Los cálculos para el tránsito de la avenida se han hecho en la tabla 5.7. Si se usa una tabla como ésta, el procedimiento a seguir es:

Tabla 5.6

(1) E m	(2) V 10^3 m^3	(3) 0 m^3/s	(4) $\frac{2V}{\Delta t} + 0$ m^3/s
50.4	1 020.6	20.0	5 690.0
51.0	1 035.0	33.9	5 783.8
52.0	1 059.0	80.7	5 963.9
53.0	1 083.0	145.8	6 162.7
54.0	1 107.2	224.9	6 376.0

Tabla 5.7

<i>I</i>	<i>i</i>	<i>I_i</i>	<i>I_i + I_{i+1}</i>	$\frac{2V_i}{\Delta t} - O_i$	$\frac{2V_{i+1}}{\Delta t} + O_{i+1}$	<i>O_i</i>	<i>V_i</i>	<i>E_i</i>	NAME
<i>t</i>		<i>m³/s</i>	<i>m³/s</i>	<i>m³/s</i>	<i>m³/s</i>	<i>m³/s</i>	<i>10³ m³</i>	<i>m</i>	
0.0	0	0.0	20.0	5 670	5 690	20.0	1 020.6	50.4	
0.1	1	20.0	60.0	5 650	5 710	20.0	1 023.5	50.5	
0.2	2	40.0	100.0	5 666	5 766	22.0	1 030.3	50.2	
0.3	3	60.0	140.0	5 702	5 842	32.0	1 031.3	51.2	
0.4	4	80.0	180.0	5 742	5 922	50.0	1 049.4	51.6	
0.5	5	100.0	220.0	5 780	6 000	99.0	1 056.2	50.0	
0.6	6	120.0	260.0	5 803	6 063	115.0	1 067.0	52.3	
0.7	7	140.0	300.0	5 832	6 132	118.0	1 075.3	52.7	
0.8	8	160.0	340.0	5 856	6 196	138.0	1 082.5	53.0	
0.9	9	180.0	380.0	5 876	6 256	160.0	1 088.6	53.2	
1.0	10	200.0	390.0	5 888	6 278	184.0	1 093.0	53.4	
1.1	11	190.0	370.0	5 894	6 264	192.0	1 094.4	53.5	
1.2	12	180.0	350.0	5 888	6 238	188.0	1 091.2	53.3	
1.3	13	170.0	330.0	5 874	6 204	182.0	1 091.2	53.3	
1.4	14	160.0	310.0	5 880	6 190	162.0	1 086.5	53.1	
1.5	15	150.0	290.0	5 874	6 164	158.0	1 085.4	53.1	
1.6	16	140.0	270.0	5 872	6 142	146.0	1 081.1	52.9	
1.7	17	130.0	250.0	5 860	6 110	141.0	1 077.7	52.8	
1.8	18	120.0	230.0	5 646	6 076	132.0	1 073.5	52.6	
1.9	19	110.0	210.0	5 832	6 042	122.0	1 070.3	52.5	
2.0	20	100.0	190.0	5 824	6 014	108.0	1 066.1	52.3	
2.1	21	90.0	170.0	5 814	5 984	100.0	1 062.0	52.1	
2.2	22	80.0	150.0	5 800	5 950	92.0	1 056.8	52.0	
2.3	23	70.0	130.0	5 790	5 920	80.0	1 054.4	51.8	
2.4	24	60.0	110.0	5 778	5 888	71.0	1 049.6	51.6	
2.5	25	50.0	90.0	5 760	5 850	64.0	1 045.8	51.5	
2.6	26	40.0	70.0	5 748	5 816	52.0	1 040.4	51.2	
2.7	27	30.0	50.0	5 728	5 778	44.0	1 035.7	51.0	
2.8	28	20.0	40.0	5 710	5 740	34.0	1 030.3	50.8	
2.9	29	10.0	10.0	5 690	5 700	30.0	1 025.3	50.6	
3.0	30	0.0	0.0	5 606	5 606	22.0	1 020.2	50.4	
3.1	31	0.0	0.0	5 562	5 562	20.0	1 016.3	50.2	
3.2	32	0.0	0.0	5 522	5 522	20.0	1 012.7	50.1	
3.3	33	0.0	0.0	5 482	5 482	20.0	1 009.1	49.9	
3.4	34	0.0	0.0	5 442	5 442	20.0	1 005.5	49.8	
3.5	35	0.0	0.0	5 402	5 402	20.0			

- Calcular todas las sumas $I_i + I_{i+1}$ (columna 4) a partir de la avenida de entrada (columna 3).
- Fijar el nivel inicial. En este caso, $E_0 = 50.4$ m (columna 9).
- Calcular el volumen inicial, el gasto de salida y $\frac{2V_i}{\Delta t} - O_i$, donde $O_i = 0$ (columna 5).
- Sumar el resultado de la columna 4 con el de la columna 5 y anotarlo en la columna 6.

- Determinar, con el valor de $\frac{2V_{i+1}}{\Delta t} + O_{i+1}$ (columna 6) y la curva $\frac{2V}{\Delta t} + 0$ contra 0 (figura 5.10), la salida en el siguiente intervalo O_{i+1} y anotarla en el próximo renglón de la columna 7.
- Restar el último valor anotado en la columna 7 dos veces del último valor anotado en la columna 6 y colocar el resultado en la columna 5.
- Volver al cuarto paso hasta que las salidas por el vertedor sean nulas.

5.4.2 Método numérico

En la figura 5.12 se muestra un diagrama de bloques que indica los pasos que se siguen en el método numérico.

En dicha figura se observa que este método usa un procedimiento de aproximaciones sucesivas para calcular el volumen y el gasto de salida en el intervalo $i+1$. Primero se supone que el gasto de salida es igual al que se tuvo en el instante anterior y con esto se calcula en una primera aproximación el volumen almacenado, V_{i+1}^1 (nótese que los números arriba y a la derecha de V no son exponentes, sino superíndices que cuentan las iteraciones). Con este volumen y la curva elevaciones-volumenes se determina la elevación y con ella una nueva estimación del gasto de salida. Con este gasto de salida O_{i+1}^1 se calcula un nuevo volumen y, si es similar al calculado en la iteración anterior, se imprimen los resultados y se pasa a un nuevo intervalo de tiempo; en caso contrario, se hace otra iteración.

Ejemplo 5.5. Resolver el problema del ejemplo 5.4 usando el método numérico.

Solución

Se escribió un programa de computadora en lenguaje BASIC para resolver el ejemplo, el cual sigue el diagrama de bloques de la figura 5.12. Este programa y los resultados se muestran enseguida.

```

5 PRINT " " : PRINT " TRÁNSITO DE AVENIDAS EN VASOS": PRINT
" "
10 READ I1,E1,V1,O1,DT,T0,C,L,E0,OT,A,B,TT
20 I = 1
25 PRINT "I","I(I)","V(I)","E(I)","O(I)"
26 PRINT " ","M3/S","M3","M","M3/S"
27 PRINT I,I1,V1,E0,O1
30 PR# 0: INPUT "I(I+1)?";I2
35 K = 0
40 O2 = O1

```

```

45 PR# 1
50 V2(2) = ((I2 + I1) / 2 - (O2 + O1) / 2) * DT + V1
60 E = (V2(1) / A) (1 / B)
65 IF E < EO THEN O2 = OT: GOTO 80
70 O2 = C * L * (E - EO) 1. 5 + OT
80 K = K + 1
90 IF K = 1 THEN 50
100 IF ABS (V2(1) - V2(2)) / V2(2) > TO THEN V2(1) = V2(2): GOTO 50
110 IF I * DT > TT THEN STOP
114 PR# 1
115 PRINT "";
120 PRINT I + 1, I2, V2(1), E, O2
130 V2(1) = V2(2)
135 V1 = V2(2)
140 I = I + 1
142 O1 = O2
145 I1 = I2
150 GOTO 30
160 DATA 0, 50. 4, 1020600, 20, 360, 0 . 001, 2, 15, 50. 4, 20, 10000, 1. 18, 12600
170 END

```

TRÁNSITO DE AVENIDAS EN VASOS

I	I(I) M3/S	V(I) M3	E(I) M	O(I) M3/S
1	0	1020600	50.4	20
2	20	1017000	50.2480777	20
3	40	1020600	50.3987737	20
4	60	1031400	50.8503768	29.0674524
5	80	1046135.72	51.4653914	52.9902055
6	100	1059459.24	52.0203293	81.8765626
7	120	1069583.68	52.44131	107.495297
8	140	1077685.37	52.7777459	129.994108
9	160	1084887.5	53.0765018	151.362847
10	180	1091596.87	53.3545456	172.355206
11	200	1097949	53.6175445	193.144255
12	190	1097949	53.6175445	193.144255
13	180	1095282.58	53.5071745	184.312163
14	170	1091930.2	53.3683525	173.424407
15	160	1088897.42	53.2427087	163.787057
16	150	1085734.08	53.1115994	153.955194
17	140	1082510.21	52.9779215	144.1726
18	130	1079208.07	52.8409352	134.407798
19	120	1075821.26	52.7003699	124.66893
20	110	1072340.45	52.5558328	114.960688
21	100	1068754.6	52.4068593	105.28971
22	90	1065050.3	52.2528848	95.6647999
23	80	1061210.98	52.0932113	86.0979487
24	70	1057215.71	51.926959	76.6059824
25	60	1053037.56	51.7529937	67.2133592
26	50	1048640.75	51.5698104	57.9572273
27	40	1043976.15	51.3753421	48.8972615
28	30	1038973.14	51.1666179	40.1367618
29	20	1033523.9	50.9391029	31.8748675
30	20	1029248.95	50.7604882	26.4931856
31	20	1026911.4	50.6627737	24.041049
32	20	1025456.63	50.6019437	22.7224935
33	20	1025456.63	50.6019437	22.7224935
34	20	1024476.53	50.5609546	21.9372083
35	20	1023637.78	50.5258722	21.3397262
36	20	1023047.93	50.5011979	20.9657806

Tránsito de avenidas en vasos

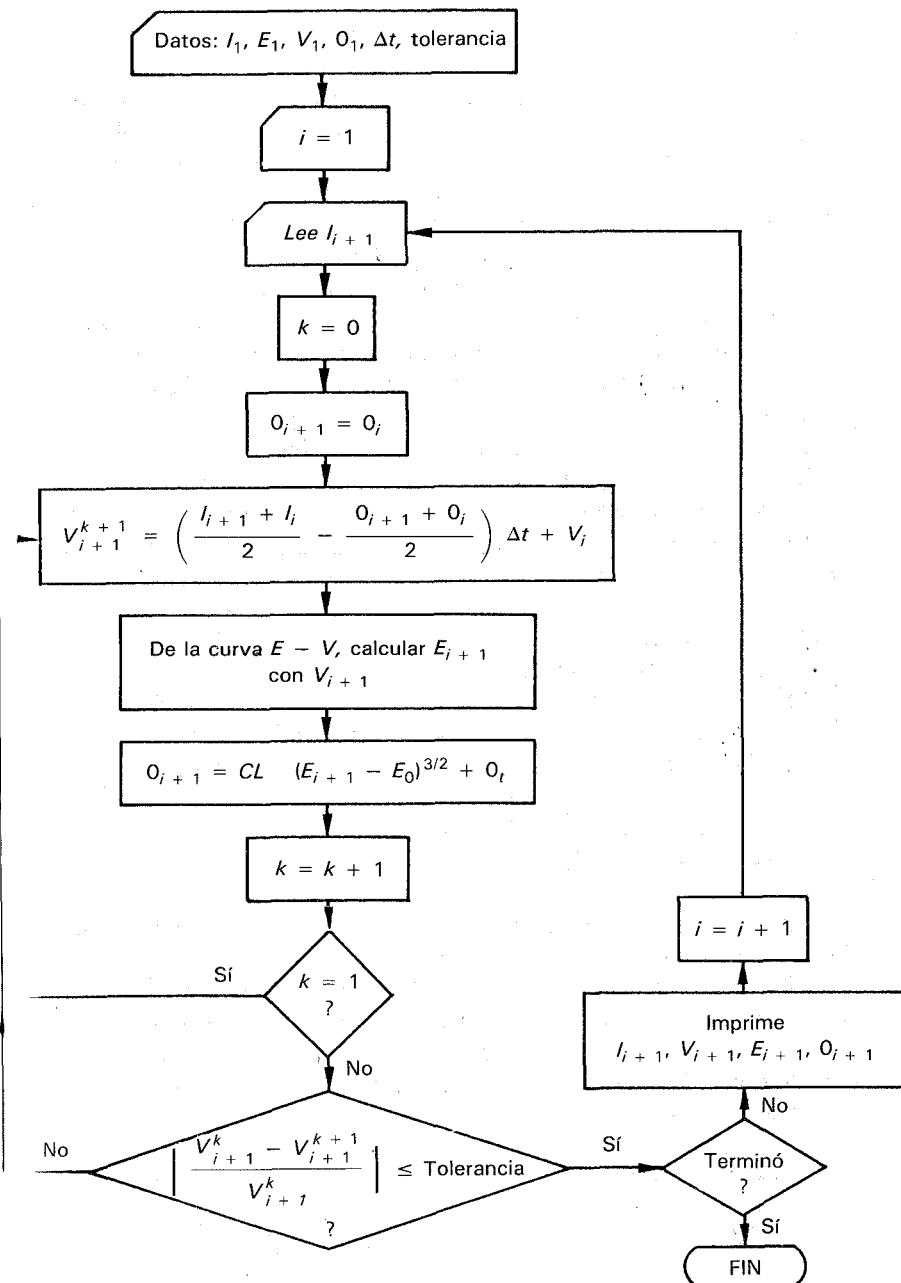


Figura 5.12

5.5 TRÁNSITO DE AVENIDAS EN CAUCES

Normalmente, el sitio donde se miden los escurrimientos o donde se encuentra una presa para control de inundaciones se localiza varios kilómetros aguas arriba del punto donde las avenidas pueden causar daños, debido a las condiciones topográficas y geológicas que deben existir para construir una presa o las que debe reunir el sitio para instalar una estación hidrométrica.

Es necesario por ello contar con métodos que permitan conocer la variación de un hidrograma al recorrer un tramo de cauce, para poder determinar el efecto de presas reguladoras en tramos aguas abajo, para diseñar bordos de protección contra inundaciones, etc. La simulación de la variación de un hidrograma al recorrer un cauce se conoce como *tránsito de avenidas en cauces*.

Este problema es similar al tránsito de avenidas en vasos en el sentido de que el río mismo es también una especie de almacenamiento alargado y de que la solución se da por medio de la ecuación de continuidad y alguna relación entre almacenamiento y gasto de salida. Sin embargo, aquí aparecen algunas dificultades adicionales como (referencia 5.6):

- Con frecuencia no se tienen planos topográficos precisos del tramo y la relación descargas-volumenes no se conoce.
- Casi siempre se tienen entradas a lo largo del tramo, adicionales a las de la sección aguas arriba, que no son conocidas.
- El nivel de la superficie libre del agua no es horizontal, como sucede en el caso de vasos, lo que implica que un mismo tirante en el extremo final del tramo se puede formar para diferentes gastos de salida (véase figura 3.15).

Los métodos existentes para el tránsito de avenidas en cauces se pueden dividir en dos tipos: hidráulicos e hidrológicos.

Los métodos hidráulicos se basan en la solución de las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento para escurrimiento no permanente; su deducción está fuera del enfoque de este texto, pero se pueden consultar, por ejemplo las referencias 5.5 y 5.7. En su forma diferencial, estas ecuaciones son:

Conservación de masa:

$$y \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{q}{B} \quad (5.28)$$

Conservación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g (S_0 - S_f) \quad (5.29)$$

donde

y = tirante.

v = velocidad.

q = gasto lateral.

B = ancho de la superficie libre.

S_0 = pendiente del fondo.

S_f = pendiente de fricción; si se calcula con la fórmula de Manning:

$$S_f = \frac{v^2 n^2}{R_H^{4/3}}$$

R_H = radio hidráulico.

n = coeficiente de rugosidad.

x = coordenada espacial.

t = tiempo.

Las ecuaciones 5.28 y 5.29 forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas no lineales, del que no existe una solución analítica conocida. Por ello, es necesario resolverlo usando algún método numérico como el de las características, diferencias finitas o elemento finito.

El tratamiento de estas soluciones está fuera de los alcances de este texto; el lector interesado puede recurrir en primera instancia a la referencia 5.7 para un tratamiento más completo.

Los métodos hidrológicos utilizan simplificaciones de las ecuaciones 5.28 y 5.29 para llegar a soluciones más simples, pero menos aproximadas que las que se logran con los métodos hidráulicos. En este apartado se estudiará uno de estos métodos, llamado método de Muskingum.

5.5.1 Método de Muskingum

Este método fue presentado por primera vez en 1938 (referencia 5.8). Utiliza la ecuación de continuidad 5.19 en su forma discreta:

$$\frac{I_i + I_{i+1}}{2} \Delta t - \frac{0_i + 0_{i+1}}{2} \Delta t = \Delta V \quad (5.30)$$

y una relación algebraica entre el almacenamiento en el tramo V y las entradas I y salidas O de la forma:

$$V = K O + K x (I - O) = K [xI + (1 - x)O] \quad (5.31)$$

donde K es una constante llamada *parámetro de almacenamiento* y x es un factor de peso que expresa la influencia relativa de las entradas y las salidas del almacenamiento en el tramo.

La ecuación 5.31 está planteada pensando en que el almacenamiento en un tramo de río se puede dividir en dos partes (véase figura 5.13). El primero es un *almacenamiento en prisma*, KO , que depende solamente de las salidas y sería el único si el nivel de la superficie libre del agua fuera paralelo al fondo del río. Este almacenamiento se puede comparar con el que se tiene en el caso de un vaso, que, si se combina la ecuación 5.23 con la figura 5.3, se expresa como:

$$V_p = f(O) \quad (5.32)$$

donde f indica alguna función. En el caso de cauces, se supone que la función $f(O)$ es de la forma:

$$f(O) = KO \quad (5.33)$$

El otro tipo de almacenamiento, que en general no existe en el caso de vasos, llamado *almacenamiento en cuña*, se debe al efecto de la pendiente de la superficie libre del agua en el gasto. Esta pendiente depende tanto de las entradas como de las salidas, y en el método de Muskingum el almacenamiento en cuña se toma como una función lineal de la diferencia de ambas:

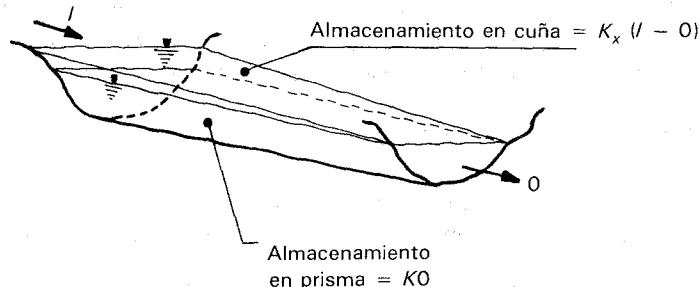


Figura 5.13 Almacenamientos durante el paso de una avenida.

$$V_c = f(I - O) = Kx (I - O) \quad (5.34)$$

De la ecuación 5.31:

$$\Delta V = V_{i+1} - V_i = K [x(I_{i+1} - I_i) + (1 - x)(O_{i+1} - O_i)] \quad (5.35)$$

Sustituyendo la ecuación 5.35 en la 5.30 se tiene:

$$\frac{I_{i+1} + I_i}{2} \Delta t - \frac{O_{i+1} + O_i}{2} \Delta t = K [x(I_{i+1} - I_i) + (1 - x)(O_{i+1} - O_i)]$$

Despejando O_{i+1} :

$$O_{i+1} = \frac{Kx + \Delta t/2}{K(1 - x) + \Delta t/2} I_i + \frac{\Delta t/2 - Kx}{K(1 - x) + \Delta t/2} I_{i+1} + \frac{K(1 - x) - \Delta t/2}{K(1 - x) + \Delta t/2} O_i$$

o bien:

$$O_{i+1} = C_1 I_i + C_2 I_{i+1} + C_3 O_i \quad (5.36)$$

donde

$$C_1 = \frac{Kx + \Delta t/2}{\alpha}; \quad C_2 = \frac{\Delta t/2 - Kx}{\alpha}; \quad C_3 = \frac{K(1 - x) - \Delta t/2}{\alpha}; \\ \alpha = K(1 - x) + \Delta t/2$$

Nótese que $C_1 + C_2 + C_3 = 1$.

Con la ecuación 5.36 es posible hacer el tránsito de cualquier avenida por el tramo dados Δt y los valores de K y x . Como en el caso del tránsito de avenidas en vasos, se recomienda que Δt cumpla con la condición 5.21. El parámetro K tiene unidades de tiempo y su valor es aproximadamente igual al tiempo de viaje del pico de la avenida a lo largo del tramo (referencia 5.9):

$$K = \frac{L}{\omega} \quad (5.37)$$

donde L = longitud del tramo y ω = velocidad promedio del pico de la avenida. ω puede estimarse, en relación con la velocidad media del agua v , como (referencia 5.5):

$$\omega \approx 1.5 v \quad (5.38)$$

El parámetro x varía entre 0.0 y 0.5. Si $x = 0.0$, el volumen almacenado en el tramo es sólo función de la salida 0 (véase ecuación 5.31), es decir, no existe almacenamiento en cuña y el tramo se comporta como un vaso cuya curva de gastos es la ecuación 5.33. Si $x = 0.5$, las entradas y salidas tienen la misma importancia y no habría ningún abatimiento del pico. En términos muy generales, se puede decir que x se aproxima a 0.0 en cauces muy caudalosos y de pendiente pequeña, y a 0.5 en caso contrario. A falta de otros datos, es recomendable tomar $x = 0.2$ como un valor medio.

Cuando se cuenta con al menos una avenida medida en ambos extremos del cauce, los parámetros K y x se estiman con mayor precisión mediante el siguiente razonamiento.

Si se dibuja la ecuación 5.31 en una gráfica tomando V como ordenada y $(xI + (1 - x)O)$ como abscisa, se obtendrá una línea recta con pendiente K . Por otra parte, el volumen almacenado en el tramo hasta un tiempo t_0 dado es el área acumulada entre el hidrograma de entrada y el de salida (véase figura 5.14), es decir:

$$V = \int_0^{t_0} (I - O) dt \quad (5.39)$$

Entonces, si se supone un valor de x , se calcula $[xI + (1 - x)O]$ y el resultado se grafica contra el volumen almacenado para tiempos $0 \leq t \leq t_1$ (véase figura 5.14), y la gráfica tendrá que ser una línea recta de pendiente K si el valor supuesto de x es el correcto. En caso contrario, es necesario suponer otro valor de x hasta que se obtenga aproximadamente una línea recta (véase figura 5.15).

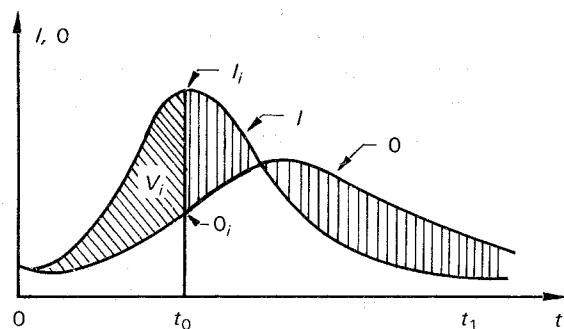


Figura 5.14

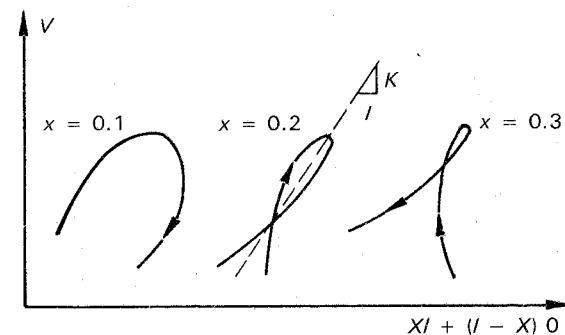


Figura 5.15

Ejemplo 5.6. En los extremos de un tramo de un río se han medido los gastos mostrados en la tabla 5.9.

Se requiere transitar la avenida mostrada en la columna 2 de la tabla 5.11.

Tabla 5.9

<i>t</i> días	<i>I</i> <i>m</i> ³ / <i>s</i>	<i>O</i> <i>m</i> ³ / <i>s</i>
0	59	42
1	93	70
2	129	76
3	205	142
4	210	183
5	234	185
6	325	213
7	554	293
8	627	397
9	526	487
10	432	533
11	252	481
12	203	371
13	158	252
14	130	196
15	105	161
16	90	143
17	80	112
18	68	95
19	59	83
20	59	75

Tabla 5.10

t , días	V_t $m^3/s\cdot\text{día}$	$xI + (I - x)0$			
		$x = 0.1$	$x = 0.2$	$x = 0.3$	$x = 0.4$
0	17	44	45	47	49
1	40	72	75	77	79
2	93	81	87	92	97
3	156	148	155	161	167
4	183	186	188	191	194
5	232	190	195	200	205
6	344	224	235	247	258
7	605	319	345	371	397
8	835	420	443	466	489
9	874	491	495	499	503
10	773	523	513	503	493
11	544	458	435	412	389
12	376	354	337	321	304
13	282	243	233	224	214
14	216	189	183	176	170
15	160	155	150	144	139
16	107	138	132	127	122
17	75	109	106	102	99
18	48	92	90	87	84
19	24	81	78	76	73
20	8	73	72	70	69

Solución

Como se cuenta con una avenida medida en ambos extremos del tramo, se puede calibrar el método (es decir, valuar x y K) con el procedimiento descrito anteriormente.

a) Calibración del método (valuación de x y K).

De acuerdo con la ecuación 5.39, el volumen almacenado se calcula como:

$$V_t = \sum_{t=0}^t (I - 0) \Delta t$$

En la tabla 5.10 se muestra el cálculo de las parejas de valores (V_t , [$xI + (1 - x)0$]) para todos los tiempos que se tienen en la tabla 5.9 y en la figura 5.16 están dibujadas las gráficas correspondientes. En esta figura

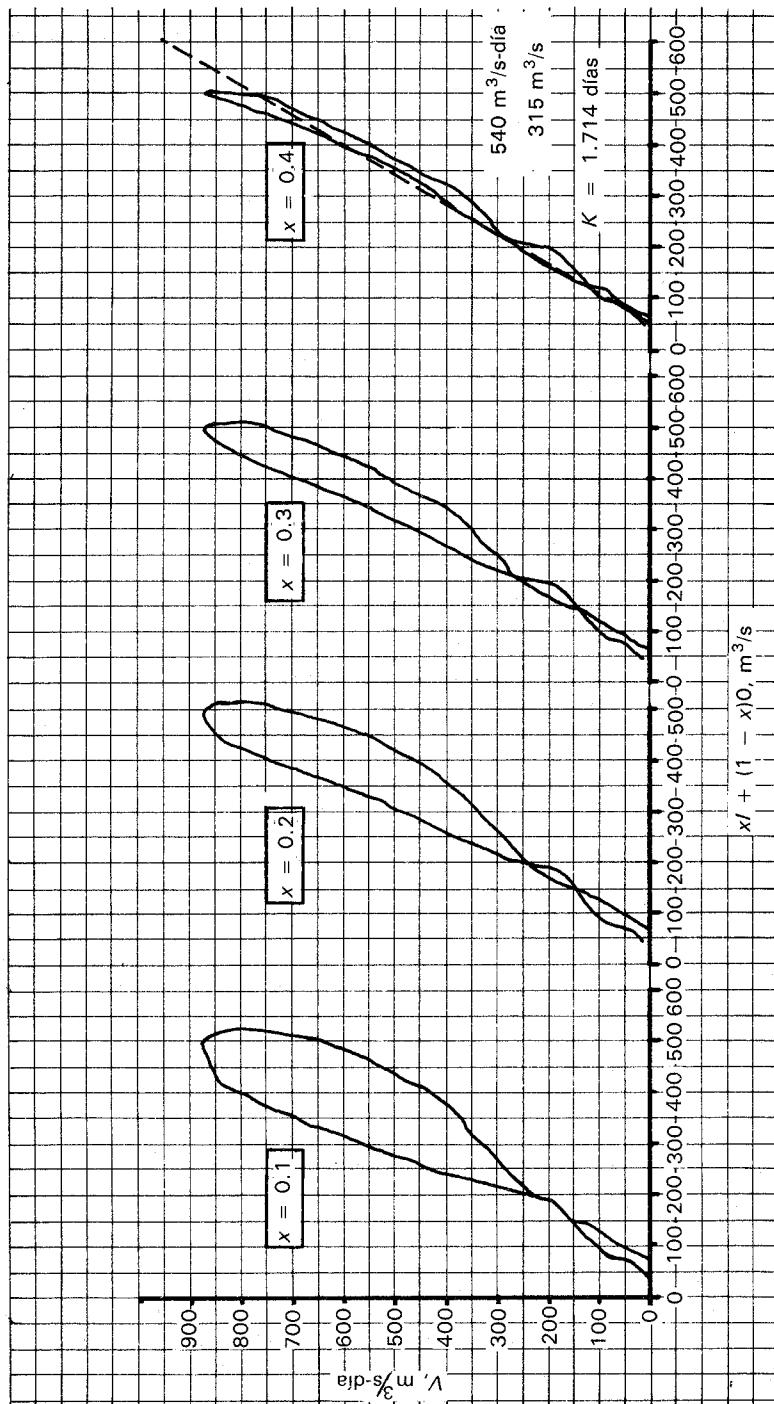
Figura 5.16 Obtención de K y x (método Muskingum).

Tabla 5.11

<i>t</i> , días (0)	<i>I</i>	<i>I</i>
	<i>m</i> ³ /s (1)	<i>O</i> <i>m</i> ³ /s (2)
0	40	40
1	80	35
2	130	59
3	240	92
4	350	176
5	610	258
6	1 050	435
7	980	847
8	760	962
9	610	849
10	525	704
11	940	537
12	1 520	731
13	1 210	1 286
14	1 180	1 241
15	1 005	1 224
16	930	1 090
17	810	1 001
18	760	883
19	690	812
20	660	737
21	600	695
22	500	646
23	400	563
24	310	468
25	250	372
26	190	300
27	170	231
29	140	195

se observa que la gráfica que más se aproxima a una línea recta es la correspondiente a $x = 0.4$. La pendiente de esta línea es 1.714, por lo que los valores de los parámetros x y K son $x = 0.4$, $K = 1.714$ días.

b) Tránsito de la avenida

Una vez estimados los parámetros x y K , o bien calculados como se hizo en el inciso a, es posible calcular los coeficientes del método de Muskingum (ecuación 5.36). En este caso sus valores son los siguientes:

Bibliografía

$$\alpha = K(1 - x) + \frac{\Delta t}{2} = 1.71(0.6) + 0.5 = 1.526$$

$$C_1 = \frac{Kx + \Delta t/2}{\alpha} = \frac{1.714(0.4) + 0.5}{1.526} = 0.777$$

$$C_2 = \frac{\Delta t/2 - Kx}{\alpha} = \frac{0.5 - 1.714(0.4)}{1.526} = -0.122$$

$$C_3 = \frac{\Delta t/2 + K(1 - x)}{\alpha} = \frac{1.714(0.6) - 0.5}{1.526} = 0.346$$

Obsérvese que $C_1 + C_2 + C_3 = 0.777 - 0.122 + 0.346 = 1.0$. La ecuación para el tránsito es (véase ecuación 5.36):

$$O_{i+1} = 0.777I_i - 0.122 I_{i+1} + 0.346 O_i \quad (5.40)$$

En la columna 3 de la tabla 5.11 se muestra la avenida transitada, que resulta de aplicar recursivamente la ecuación 5.40.

BIBLIOGRAFÍA

- 5.1 Rippl, W. *The Capacity of Storage Reservoirs for Water Supply*. Proc. Inst. Civil Eng. 71, pp. 270-278, 1883.
- 5.2 Fiering, M. B. *Streamflow Synthesis*. Mac Millan, 1967.
- 5.3 Thomas, M. A., Fiering, M. B. *Mathematical Synthesis of Streamflow Sequences for the Analysis of River Basins by Simulation*. En "Design of Water Resources Systems", ed. por A. Maas, et al, pp. 459-493, Harvard Univ. Press, 1962.
- 5.4 Clarke, R. T. "Mathematical Models in Hydrology". *Irrigation and Drainage*. No. 19, Food and Agric. Org. of U.N. Roma 1973.
- 5.5 Henderson, F. M. *Open Channel Flow*. Mac Millan, 1966.
- 5.6 Wisler, C. O., Brater, E. F. *Hydrology*. John Wiley & Sons, 2da. Ed., 1959.
- 5.7 Berezowsky, V. M. "Escurrimiento a Superficie Libre". Cap. A.2.9. del Manual de Diseño de Obras Civiles, Comisión Federal de Electricidad, México, 1980.
- 5.8 Mc Carthy, G. T. "The Unit Hydrograph and Flood Routing", manuscrito no publicado, presentado en una conferencia de la División Noratlántica, U.S. Army Corps of Engineers, 24 de junio de 1938.
- 5.9 Raudkivi, A. J. *Hydrology*. Pergamon Press, 1979.
- 5.10 Kotegoda, N. T. *Stochastic Water Resources Technology*. Halsted Press, 1980.

6

Precipitación

Desde el punto de vista de la ingeniería hidrológica, la precipitación es la fuente primaria del agua de la superficie terrestre, y sus mediciones forman el punto de partida de la mayor parte de los estudios concernientes al uso y control del agua. En este capítulo se estudiarán dos aspectos fundamentales de la precipitación: por un lado, la manera en que se produce y algunos métodos con que se puede predecir dadas ciertas condiciones atmosféricas, para lo cual será necesario revisar algunos aspectos básicos de metereología y, por otro, la manera en que se mide la precipitación y diversos criterios para el análisis, síntesis, corrección y tratamiento de los datos.

6.1 NOCIONES DE HIDROMETEOROLOGÍA

La *meteorología* es el estudio de todos los fenómenos atmosféricos. El estudio de los fenómenos relacionados con el agua atmosférica, que son los que interesan en la ingeniería hidrológica, se denomina *hidrometeorología*. Aun cuando está dentro de la meteorología, la hidrometeorología constituye por sí misma toda una ciencia, cuyo tratamiento ocuparía un volumen mayor que el presente, de manera que en este texto solamente es posible revisar unos cuantos conceptos básicos. A continuación se verán las definiciones y conceptos necesarios para el planteamiento de algunos modelos simples de lluvia.

6.1.1 Definiciones

a) *Presión atmosférica*. Es el peso de la columna de aire que gravita sobre una unidad de área, dividido entre dicha unidad de área.

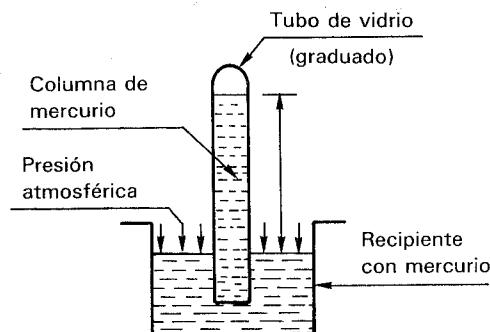


Figura 6.1 Experimento de Torricelli.

La presión atmosférica se mide normalmente con aparatos que usan el mismo principio que el de Torricelli (véase figura 6.1); entre mayor sea la presión atmosférica, mayor será la altura h de la columna que se alcance en el tubo. Al nivel del mar, esta columna alcanza una altura de aproximadamente $h = 760$ mm de Hg. La altura h se usa como unidad de presión. Otras unidades de presión atmosférica muy usadas son el bar (1 bar = 760 mm Hg), la atmósfera (1 atm = 1.033 kg/cm²) y el kg/cm². Un bar se define como la presión que existe en promedio al nivel del mar, con una temperatura de 0 °C. Existe una convención internacional que estipula que la presión estándar o de referencia sea la que se tiene al nivel del mar y con una temperatura de 15 °C (referencia 6.1), que es de 1013.2 mb (1 bar = 1 000 mb, mb = milibares.)

La presión varía con la altitud a razón de aproximadamente 1 mb por cada 10 m, o más exactamente en la forma:

$$p = 1013.2 \left[\frac{288 - 0.0065z}{288} \right]^{5.256} \quad (6.1)$$

donde z = altitud sobre el nivel del mar en m y p = presión en mb.

b) *Presión de vapor*. La atmósfera está formada por una gran cantidad de elementos, como son hidrógeno, oxígeno, dióxido de carbono, etc. Desde el punto de vista de la ingeniería hidrológica, el componente más importante es, desde luego, el agua, en forma sólida, líquida y, especialmente, gaseosa, a pesar de que el agua líquida y el hielo juntos no pasan, en promedio, del 1% del volumen de la atmósfera y el vapor de agua no representa más del 4%.

La cantidad de vapor de agua contenida en el aire se expresa como la presión que ejercería si todos los otros gases estuvieran ausentes, esto es, como

el peso de una columna de vapor por unidad de área, al cual se conoce como *presión de vapor*. Para una temperatura y presión dadas, siempre hay una cantidad máxima de vapor por unidad de volumen que puede existir sin condensarse, es decir, sin pasar al estado líquido. Cuando una masa de aire contiene esta cantidad máxima de vapor, se dice que está *saturada* y la temperatura existente en ese momento se denomina *punto de rocío*.

La *presión de vapor de saturación* es la presión de vapor que existe en una masa de aire cuando está saturada. Se puede relacionar con la presión de vapor que se tiene en un momento dado mediante la ecuación (referencia 6.1):

$$e_d = e_w - 0.00066 p (T_a - T_w) (1 + 0.00115 T_w) \quad (6.2)$$

donde e_d es la presión de saturación correspondiente a un punto de rocío T_d ; T_a es la temperatura real del aire, medida con un termómetro común (también llamado de *bulbo seco*); T_w es la temperatura medida con un termómetro que tiene el depósito de mercurio cubierto con una franela húmeda (o termómetro de *bulbo húmedo*), y e_w es la presión de vapor correspondiente. T_a se conoce normalmente como *temperatura de bulbo seco* y T_w como *temperatura de bulbo húmedo*. Las temperaturas se miden en °C y las presiones en cualquier unidad.

c) *Humedad relativa*. Es la relación entre la presión de vapor real y la de saturación, expresada en porcentaje:

$$H_r = 100 \frac{e_a}{e_d} \quad (6.3)$$

donde e_a es la presión de vapor real, e_d es la presión de vapor de saturación y H_r es la humedad relativa en %.

La humedad relativa se mide por medio del higrógrafo, cuyo órgano sensible está constituido por un haz de cabellos de mujer joven y rubia; la longitud de los cuales varía sensiblemente con el grado de humedad (referencia 6.2). La humedad relativa se relaciona con la presión de vapor y la temperatura con la gráfica mostrada en la figura 6.2.

d) *Humedad absoluta*. Es la *masa* de vapor de agua contenida en una unidad de volumen de aire:

$$\rho_v = \frac{\text{masa de vapor}}{\text{volumen de aire}} = \frac{M_v}{V} \quad (6.4)$$

donde ρ_v es la humedad absoluta, también llamada *densidad de vapor o concentración de vapor*.

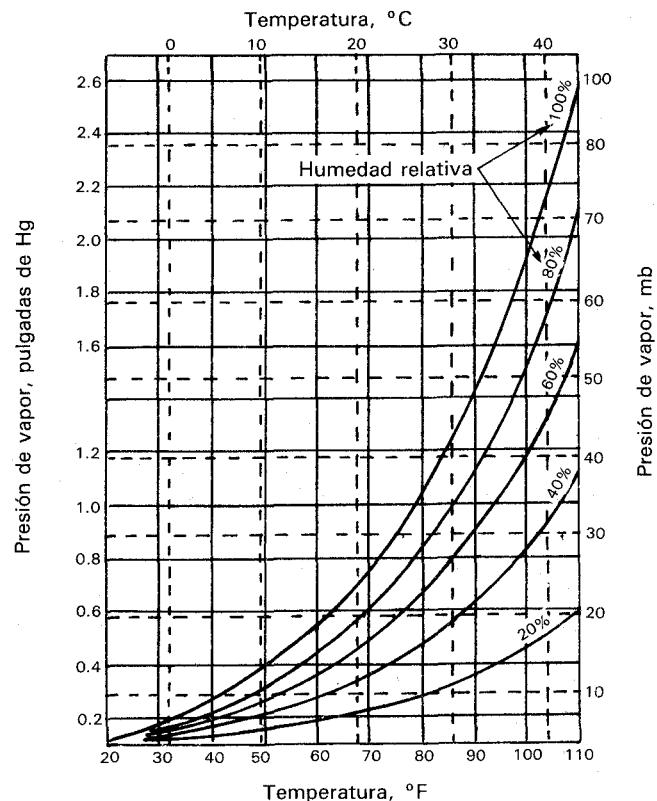


Figura 6.2

e) *Humedad específica.* Se define como la relación entre la masa de vapor y la de aire húmedo (aire + vapor):

$$H_s = q = \frac{M_v}{M_a + M_v} = \frac{\rho_v}{\rho_a + \rho_v} = \frac{\rho_v}{\rho} \quad (6.5)$$

donde H_s o q es la humedad específica, M_a es la masa del aire seco, ρ_a es la densidad del aire seco y ρ es la densidad del aire húmedo.

6.1.2 Contenido de vapor de la atmósfera. Agua precipitable

Para que se formen las nubes, el agua que se evapora de la superficie terrestre debe elevarse hasta que la presión y la temperatura sean las necesarias para

que exista condensación (véase figura 6.2), es decir, hasta que se pueda alcanzar el punto de rocío. Cuando una masa de aire asciende, se ve sujeta a una presión gradualmente decreciente; entonces se expande y, al expanderse, en virtud de las leyes de los gases, disminuye su temperatura (ver, por ejemplo, referencia 6.3). Si la temperatura disminuye lo suficiente como para quedar por abajo del punto de rocío, puede comenzar la condensación. Esta tiene lugar al unirse varias de las pequeñas gotas que forman las nubes (cuyo diámetro está entre 5 y 100 μ) para formar gotas más grandes; sin embargo, para que esta unión se verifique en cantidades significativas sin la intervención de otros elementos, es necesario que la supersaturación (temperaturas más bajas del punto de rocío) sea mayor de la que normalmente se produce en la atmósfera; en esas condiciones se tendrán núcleos de condensación (unión de varias gotitas) uniformes. En realidad, estos núcleos se forman, con las condiciones de supersaturación comunes, alrededor de corpúsculos de naturaleza mineral u orgánica presentes en la atmósfera y provenientes de erosión orográfica, humos de combustiones naturales o artificiales, polen y, en lugar destacado, cristales de sal marina, que se encuentran incluso en sitios ubicados a gran distancia del mar. De esta manera se forman gotas más grandes (con diámetros de 100 a 500 μ) que tienen ya suficiente peso para caer bajo la acción de la fuerza de gravedad. Durante su caída las gotas crecen aún más en virtud de su coalescencia, con lo que pueden alcanzar diámetros de 5 a 7 mm o mayores.

En la ingeniería hidrológica interesa la cantidad de vapor de agua contenida en la atmósfera sobre un lugar determinado y, en especial, la cantidad de lluvia que puede generarse de ese vapor. La masa total de vapor de agua existente en una columna de aire de área unitaria y altura z se llama agua precipitable y se calcula, de acuerdo con la ecuación 6.4, como:

$$W = \int_0^z \rho_v dz \quad (6.6)$$

Si se acepta que la presión varía hidrostáticamente, esto es, $d\rho = -\rho g dz$,

$$W = - \int_{p_0}^p \frac{\rho_v}{\rho g} dp \quad (6.7)$$

De la definición de humedad específica (ecuación 6.5):

$$W = \frac{1}{g} \int_p^{p_0} q dp \quad (6.8)$$

En la ecuación 6.8, p está en unidades de $[FL^{-2}]$ y W resulta en unidades de $[ML^{-2}]$; si, como es común, p está en mb y se desea que W esté en unidades de volumen/área, es decir, de longitud o lámina, la ecuación 6.8 es:

$$W = 10 \int_p^{p_0} q dp \quad (6.9)$$

donde p está en mb, q en kg/kg y W en mm.

Con la ecuación 6.9 es posible calcular el agua precipitable si se dispone de datos de humedad específica a diferentes altitudes o niveles de presión, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.1. Un globo de sondeos meteorológicos registró las humedades específicas mostradas en la columna 3 de la tabla 6.1 a las altitudes señaladas en la columna 2. Obtener la lámina de agua precipitable que existe: a) entre 0 y 1 000 m, b) entre 0 y 10 000 m y c) entre 2 500 y 7 500 m.

Solución:

La presión (columna 4) se calcula en función de la altitud z usando la ecuación 6.1. El agua precipitable entre dos altitudes z_{n0} y z_{n1} se determina mediante la siguiente aproximación a la ecuación 6.9 (véase figura 6.3):

$$W = 10 \sum_{n=n_0}^{n_1} \frac{q_n + q_{n+1}}{2} (p_n - p_{n+1}) \quad (6.10)$$

Tabla 6.1

(1) n	(2) z_n, m	(3) $q_n, \text{kg/kg}$	(4) p_n, mb	(5) $p_n - p_{n+1}$	(6) $\frac{q_n + q_{n+1}}{2}$	(7) $10(5 \times 6)$
1	0	0.0142	1 013.2	114.2	0.0133	15.19
2	1 000	0.0124	899.0	152.0	0.0110	16.64
3	2 500	0.0095	747.0	81.0	0.0083	6.72
4	3 400	0.0070	666.0	201.0	0.0067	13.46
5	6 100	0.0063	465.0	83.0	0.0060	4.98
6	7 500	0.0056	382.0	41.0	0.0047	1.93
7	8 300	0.0038	341.0	43.0	0.0028	1.23
8	9 200	0.0017	298.0	34.0	0.0010	0.34
9	10 000	0.0002	264.0			

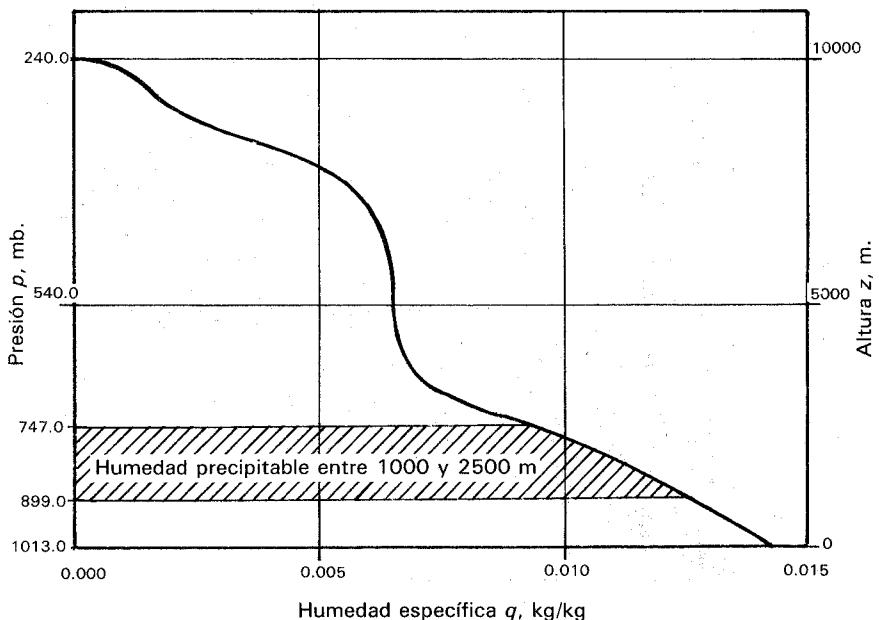


Figura 6.3

En la columna 7 de la tabla 6.1 se han calculado las láminas de agua precipitable entre cada dos altitudes sucesivas. De los valores de esta columna y la ecuación 6.10 se obtiene:

- a) $W(0, 1000) = 15.19 \text{ mm}$
- b) $W(0, 10000) = 60.49 \text{ mm}$
- c) $W(2500, 7500) = 41.88 \text{ mm}$

Desafortunadamente, es difícil que se tengan a la mano datos de sondeos meteorológicos, por lo que la lámina precipitable W debe estimarse usando mediciones en la superficie terrestre, que son más fáciles de obtener. Los datos que se usan en este caso son los de punto de rocío en la superficie T_d . Si se cuenta con este dato, la lámina precipitable se estima suponiendo un estado de saturación, con lo que es posible usar datos estandarizados como los de la gráfica de la figura 6.4. Para usar esta gráfica se deben seguir los contornos de las líneas de T_d ; lo mismo sucede si se usa con la altitud, pero si se usan presiones, se debe referir horizontalmente.

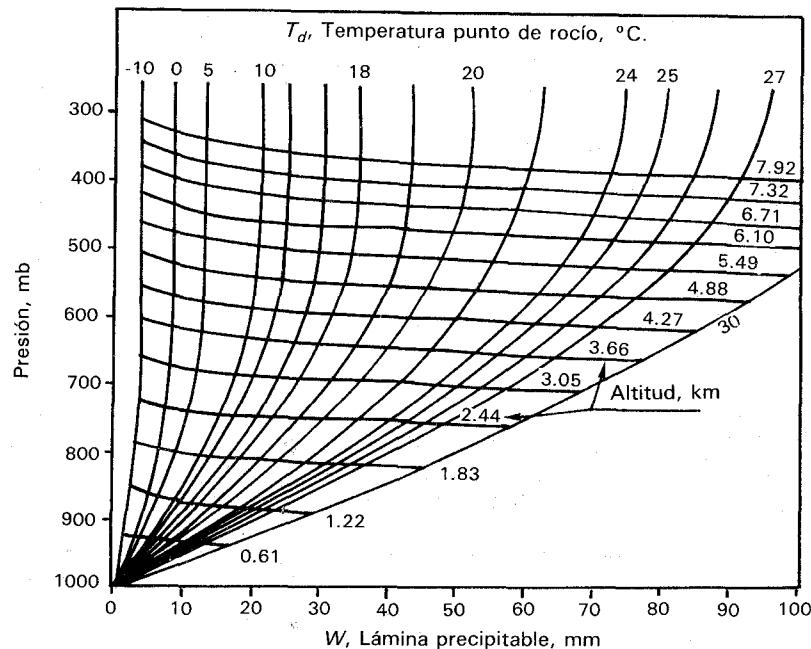


Figura 6.4

Así, por ejemplo, si se tiene $T_d = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $p = 700\text{ mb}$, W resulta ser de 35 mm; para un punto de rocío de $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $z = 3.66\text{ km}$, W es de 12.5 mm. Con la tabla 6.2 también es posible calcular W en función de la altitud.

El punto de rocío con el que se usan la figura 6.4 y la tabla 6.2 está referido al nivel del mar (1 000 mb). Cuando el dato de punto de rocío está tomado a una altitud diferente, es necesario corregirlo usando la figura 6.4a.

6.1.3 Vientos

El viento es aire en movimiento. Su velocidad se mide mediante *anemómetros* o *anemógrafos* y su dirección por medio de *veletas*.

Las unidades en que se expresa la velocidad del viento más comunes son km/h, m/s o nudos (1 nudo = 0.526 m/s). Generalmente, se le llama "viento" sólo al componente horizontal del movimiento del aire, pues el vertical casi siempre es muy pequeño.

Tabla 6.2 Agua precipitable (mm) entre la superficie (1 000 mb) y la altitud indicada, como función del punto de rocío ($^{\circ}\text{C}$) a 1 000 mb

Altitud (m)	Punto de rocío a los 1 000 mb, en $^{\circ}\text{C}$						
	0	5	10	15	20	25	30
200	1	1	2	2	3	4	6
400	2	3	4	5	6	9	12
600	3	4	5	7	10	13	17
800	3	5	7	9	13	17	22
1 000	4	6	8	11	15	21	23
1 400	5	7	10	15	20	28	37
1 800	6	9	12	18	25	34	46
2 000	6	10	13	19	27	37	50
2 400	7	10	15	22	31	43	57
2 800	7	11	16	24	34	48	65
3 000	8	11	17	25	35	50	68
3 400	8	12	18	26	38	54	74
3 800	8	12	19	28	41	58	80
4 000	8	12	19	28	42	60	83
5 000	8	13	20	31	46	67	94
6 000	8	13	21	32	49	72	103
7 000	8	14	21	33	51	76	110
8 000	8	14	21	33	52	78	115
9 000	8	14	21	33	52	80	118
10 000			14	21	33	52	80
11 000				21	33	52	81
12 000					33	52	81
13 000						52	81
14 000						52	81
15 000						81	124

6.1.3.1 Fuerzas que producen los vientos

Las fuerzas que producen los vientos son fundamentalmente: la de presión, debida a la rotación de la Tierra (Coriolis), la centrípeta o ciclostrófica y la de fricción. A continuación se describe brevemente cada una de estas fuerzas y las relaciones entre ellas.

a) Fuerzas de presión.

Las diferencias de presión entre dos puntos cualesquiera de la atmósfera producen vientos, del mismo modo que la diferencia de presión en dos puntos de seno de un líquido produce una corriente (véase figura 6.5).

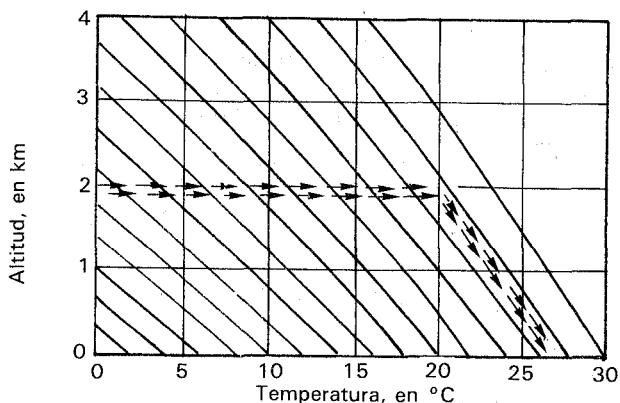


Figura 6.4a Diagrama para ajustar los valores de punto de rocío, refiriéndolos al nivel del mar (1 000 mb).

La presión se mide, como todas las demás variables atmosféricas, cada tres horas en todos los observatorios del mundo. Con estas mediciones se dibujan mapas de isobares o líneas que unen puntos de igual presión. Es común dibujar las isobares a cada cuatro mb (véase figura 6.6).

Si se toma el elemento sombreado de la figura 6.6 (véase figura 6.7), de la segunda ley de Newton se tiene:

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} \quad (6.11)$$

pero la fuerza actuando sobre el elemento es:

$$F = (p_2 - p_1) \Delta z \Delta y \quad (6.12)$$



Figura 6.5

Figura 6.6

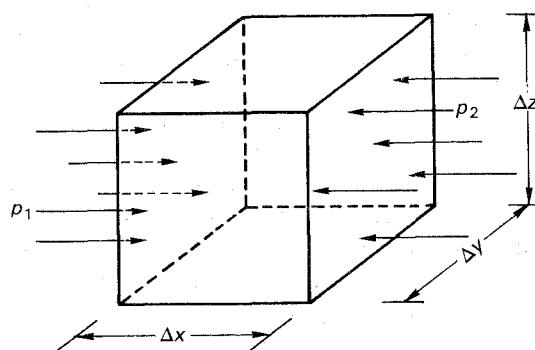


Figura 6.7

y la masa del mismo es:

$$m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \quad (6.13)$$

donde ρ es la densidad.

Sustituyendo (6.12) y (6.13) en (6.11) y simplificando, se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{p_2 - p_1}{\Delta x} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

La aceleración del viento debida al gradiente de presiones es entonces:

$$B = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (6.14)$$

b) Fuerza debida a la rotación de la Tierra (Coriolis).

Si se traza una línea a velocidad constante de arriba hacia abajo en un trozo de madera que se mueve de izquierda a derecha con una velocidad también constante, la línea trazada será una línea recta (véase figura 6.8 a). En

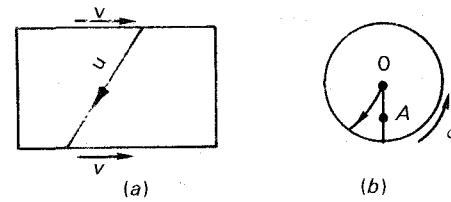


Figura 6.8

cambio, si se intenta hacer lo mismo del centro al borde de un disco que gira con una velocidad angular constante, la línea trazada será siempre curva (véase figura 6.8b).

Esto se debe a que la velocidad lineal varía a lo largo del radio del disco, al contrario de lo que sucede en el caso del trozo de madera. Si un observador está situado en un punto como el *A*, girando con el disco, pensaría que existe alguna fuerza desviadora que produce que la trayectoria se desvíe de una línea recta. Lo mismo sucede con la Tierra; si un proyectil se lanza hacia el ecuador, siempre se desvía hacia la derecha en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el hemisferio sur. A la fuerza imaginaria que produce esta desviación se le llama *de Coriolis*. La aceleración asociada a dicha fuerza es (referencia 6.1):

$$G = 2 v \omega \operatorname{sen} \phi \quad (6.15)$$

donde

v = velocidad del viento, m/s.

ω = velocidad angular de rotación de la Tierra, rad/s; $\omega = 7.272 \times 10^{-5}$ rad/s.

ϕ = latitud.

c) Fuerza centrípeta.

Esta fuerza se desarrolla cuando el viento tiene una trayectoria curva, como en el caso de los ciclones. Su aceleración es:

$$C = \frac{v^2}{r} \quad (6.16)$$

donde r es el radio de curvatura de la trayectoria. Para fines prácticos, r se puede tomar como el radio de curvatura de las isobaras.

d) Fuerza debida a la fricción.

La fuerza producida por la fricción actúa en sentido contrario a la dirección del viento y su magnitud depende de la naturaleza de la superficie de la Tierra. En general, esta fuerza es muy pequeña en comparación con las demás, y puede despreciarse, especialmente, en altitudes mayores de unos 600 m.

6.1.3.2 Relaciones entre las fuerzas

Si el flujo del aire es tal que se puede despreciar la fricción, y las isobaras son aproximadamente rectas, de tal modo que el radio de curvatura de la trayectoria del viento es infinito, en estado de equilibrio se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} F = C = O \\ B = G \end{array} \right\} \quad (6.17)$$

Un viento generado en estas condiciones se llama *viento geostrófico*. De las ecuaciones 6.14, 6.15 y 6.17 se puede escribir:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 2 v \omega \operatorname{sen} \phi$$

es decir:

$$v = \frac{1}{2\rho\omega \operatorname{sen} \phi} \frac{\Delta p}{\Delta x} \quad (6.18)$$

que es la velocidad del viento geostrófico.

Cuando la fricción es despreciable, pero las isobaras son curvas, el componente ciclostrófico del viento es diferente de cero y entonces se tiene el llamado *viento gradiente*:

$$B = G + C \quad (6.19)$$

De la ecuación 6.15 se observa que las fuerzas de Coriolis son pequeñas en latitudes cercanas al ecuador. En estas latitudes es donde se producen las corrientes de aire de alta velocidad típicas de los ciclones tropicales, en las que sólo intervienen las fuerzas de presión y ciclostróficas. Al viento así generado se le llama *viento ciclostrófico*:

$$B = C \quad (6.20)$$

El viento inercial se produce cuando, además de la fricción, se puede despreciar la fuerza debida al gradiente de presiones y entonces:

$$G = C \quad (6.21)$$

En general, las cuatro fuerzas actúan combinadas en mayor o menor medida. Esto constituye el denominado *viento real*.

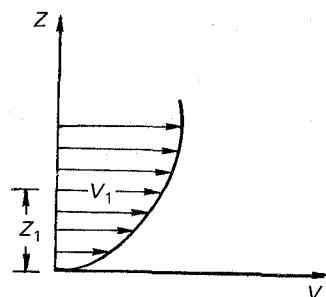


Figura 6.9 Velocidad del viento.

$$B = G + C + F \quad (6.22)$$

6.1.3.3 Variación de la velocidad del viento con la altura

En general, la velocidad del viento varía con la altura de manera exponencial (véase figura 6.9).

Esta variación se expresa de varias formas, entre las cuales la más utilizada es la siguiente:

$$\frac{v}{v_1} = \left(\frac{z}{z_1} \right)^k \quad (6.23)$$

donde v_1 y z_1 son una velocidad y una altitud de referencia, respectivamente. Con la ecuación 6.23 es posible estimar la velocidad del viento a cualquier altitud si se tienen mediciones de la misma en un punto cercano, por ejemplo, a la superficie terrestre. De observaciones experimentales, se ha encontrado que el valor de k varía entre $1/7$ y $1/5$ para un amplio rango de condiciones y que el valor más frecuente es $k = 1/7$, principalmente en alturas z_1 de hasta unos 10 m.

6.1.4 Modelos de lluvia

Los modelos de lluvia son métodos con los cuales se aislan los factores significativos en el proceso de precipitación y se extrapolan hasta sus extremos probables, de tal manera que se tenga una idea razonable de la máxima precipitación que puede caer en una zona dadas ciertas condiciones atmosféricas. Estos modelos son más aplicables a gran escala que a tormentas pequeñas, pues en las últimas los errores que inevitablemente se cometan en la estimación del flujo de humedad pueden llegar a ser considerables.

Los modelos de lluvia más simples son el de plano inclinado y el convergente. El primero describe, de modo simplificado, el proceso que se da en la producción de precipitación en tormentas orográficas o frontales, mientras que el segundo describe el que se verifica en el caso de tormentas convectivas o en el de las ciclónicas.

6.1.4.1 Modelo de plano inclinado

El modelo de plano inclinado (véase figura 6.10) considera una masa de aire que tiene una lámina precipitable W_{12} , que entra a una cuenca rectangular de ancho X y largo Y con velocidad v_{12} . La masa de aire, después de elevarse uniformemente a lo largo de la cuenca hasta una altura Δh , sale de la misma con una velocidad v_{34} y una lámina precipitable W_{34} .

La masa (m) que pasa por cualquier sección de altura Δz en un intervalo de tiempo Δt es:

$$\frac{m}{\Delta t} = \rho \Delta z X v = \frac{\gamma}{g} \Delta z X v \quad (6.24)$$

donde ρ = densidad del aire, γ = peso específico del mismo y g = aceleración de la gravedad. Si se acepta que la distribución de presiones es aproximadamente hidrostática, entonces:

$$\gamma \Delta z = \Delta p \quad (6.25)$$

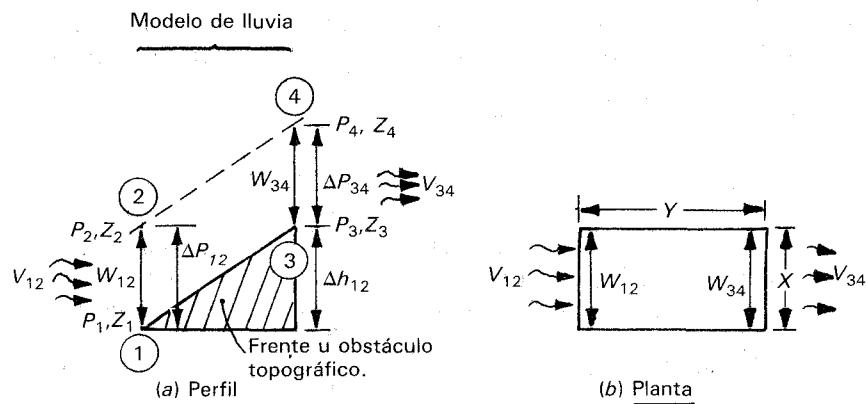


Figura 6.10

y de la ecuación 6.24 se tiene:

$$\frac{m}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{g} X v \quad (6.26)$$

Por otra parte, del principio de conservación de masa se tiene que:

$$\frac{\text{masa que entra}}{\Delta t} - \frac{\text{masa que sale}}{\Delta t} = \frac{\text{masa almacenada}}{\Delta t} \quad (6.27)$$

La masa almacenada, es decir, la masa de la precipitación que se produce dentro del modelo, es muy pequeña en comparación con las de entrada y salida, por lo que se puede despreciar. La ecuación de continuidad de masa es, según las ecuaciones 6.26 y 6.27,

$$\frac{\Delta p_{12}}{g} X v_{12} = \frac{\Delta p_{34}}{g} X v_{34}$$

Simplificando:

$$v_{34} = \frac{\Delta p_{12}}{\Delta p_{34}} v_{12} \quad (6.28)$$

Del mismo modo es posible establecer una ecuación de continuidad de humedad:

$$\frac{\text{humedad precipitable que entra}}{\Delta t} - \frac{\text{humedad precipitable que sale}}{\Delta t} = \frac{\text{humedad precipitada}}{\Delta t} \quad (6.29)$$

aunque, en este caso, la cantidad almacenada, que es la humedad que se precipita dentro del modelo, ya no es despreciable, por lo que debe conservarse en el análisis.

De la ecuación 6.29, se tiene:

$$W_{12} X v_{12} - W_{34} X v_{34} = \frac{W_p X Y}{\Delta t} = \frac{W_p A}{\Delta t} \quad (6.30)$$

donde $W_{ij} X v_{ij}$ es la humedad precipitable que pasa por la sección ij , W_p es la humedad precipitada en la cuenca y A es el área de la cuenca.

Sustituyendo la ecuación 6.28 en la 6.30 y reacomodando, se tiene:

$$\frac{W_p}{\Delta t} = \frac{X}{A} v_{12} \left[W_{12} - W_{34} \frac{\Delta p_{12}}{\Delta p_{34}} \right] \quad (6.31)$$

Con la ecuación 6.31 es posible calcular la precipitación total W_p que se tiene en una cuenca si las condiciones dadas en la figura 6.10 prevalecen du-

rante un tiempo Δt . Al cociente $K = X/A$ se le llama *factor geométrico* o *constante de la cuenca* y es el que toma en cuenta la influencia de la geometría de la cuenca en la precipitación. La ecuación 6.31 también se puede escribir como:

$$\frac{W_p}{\Delta t} = K v_{12} W_{12} \left[1 - \frac{W_{34}}{W_{12}} \frac{\Delta p_{12}}{\Delta p_{34}} \right] \quad (6.32)$$

El término entre paréntesis de la ecuación 6.32 se interpreta como la fracción del agua precipitable de entrada W_{12} que "se suelta" en la cuenca y se llama *factor de convergencia o de eficiencia*. Al factor:

$$W_e = W_{12} \left[1 - \frac{W_{34}}{W_{12}} \frac{\Delta p_{12}}{\Delta p_{34}} \right]$$

se le llama *agua precipitable efectiva*. El término del lado izquierdo de las ecuaciones 6.31 y 6.32 es una lámina de lluvia por unidad de tiempo, que de aquí en adelante se llamará *intensidad de la lluvia*.

En este caso, $i = W_p/\Delta t$ es una intensidad media que prevalece durante el tiempo en que se tienen las condiciones meteorológicas dadas en la figura 6.10. La ecuación 6.32 se puede escribir como:

$$i = K v_{12} W_e \quad (6.33)$$

En una cuenca real el factor geométrico K se calcula haciendo que X sea un lado de un rectángulo que circunscribe a la cuenca, perpendicular a la dirección del viento (véase figura 6.11).

Cabe aclarar que en este tipo de modelos se supone que la masa de aire es estable y que, por lo tanto, el ascenso de la misma es producido únicamente

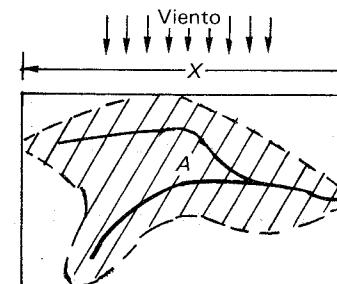


Figura 6.11

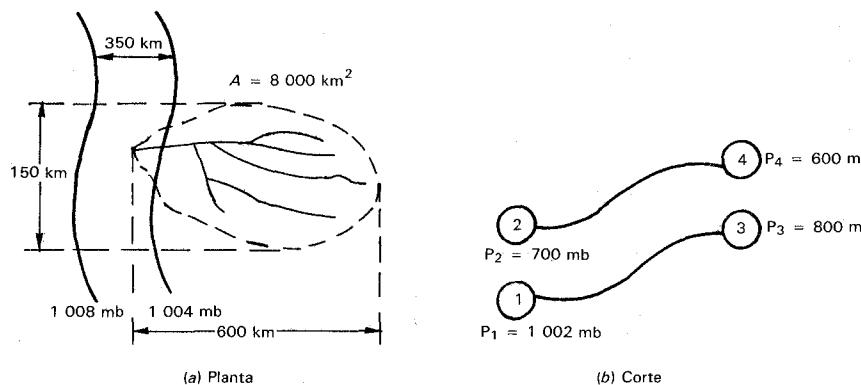


Figura 6.12

por la barrera frontal o topográfica. Este proceso es poco común en la naturaleza y produce lluvias leves. En general, las masas de aire se hacen inestables al elevarse y la precipitación se produce por una combinación de efectos convectivos y orográficos.

Ejemplo 6.2. Calcular la intensidad de precipitación y la altura total de precipitación en la cuenca de la figura 6.12, si se sabe que el viento de entrada es geostrófico. En el punto 1, el aire tiene una temperatura de bulbo seco de 25 °C y una humedad relativa del 40%. Estas condiciones meteorológicas prevalecen durante 4 h. La latitud aproximada es 20° λ N (λN = latitud norte).

Solución

De la ecuación 6.33 se tiene:

$$i = K v_{12} W_e$$

El factor geométrico es (véase figura 6.12):

$$K = \frac{X}{A} = \frac{150}{8000} = 0.019 / \text{km} = 19 \times 10^{-6} / \text{m}$$

Como el viento de entrada es geostrófico, su velocidad se calcula con la ecuación 6.18:

$$v_{12} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{2 \omega \sin \phi} \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

La densidad de la atmósfera internacional estándar al nivel del mar es:

$$\rho = 0.125 \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4};$$

la diferencia de presiones y la distancia entre isobaras son:

$$\Delta p = 4 \text{ mb} = 4 \times 10.19 \frac{\text{kg/m}^2}{\text{mb}} = 40.8 \text{ kg/m}^2, \\ \Delta x = 350000 \text{ m}$$

y la velocidad es entonces:

$$v_{12} = \frac{1}{0.125} \frac{1}{2 \times 7.3 \times 10^{-5} \operatorname{sen}(20^\circ)} \frac{40.8}{350000} = 18.68 \text{ m/s}$$

El agua precipitable efectiva es:

$$W_e = W_{12} - W_{34} \frac{\Delta p_{12}}{\Delta p_{34}}$$

De la figura 6.2, para $T_a = 25^\circ \text{C}$ y $H_r = 40\%$ el punto de rocío es $T_d = 12^\circ \text{C}$. Con este valor de T_d y los niveles de presión dados en la figura 6.12, es posible determinar las láminas de agua precipitable W_{12} y W_{34} , con ayuda de la figura 6.4. Estas láminas son:

$$\begin{array}{ll} p_1 = 1002 \text{ mb} & W_1 = 0 \\ p_2 = 700 \text{ mb} & W_2 = 19 \text{ mm} \\ p_3 = 800 \text{ mb} & W_3 = 14 \text{ mm} \\ p_4 = 600 \text{ mb} & W_4 = 23 \text{ mm} \end{array}$$

Por lo tanto:

$$W_{12} = W_2 - W_1 = 19 \text{ mm} = 0.019 \text{ m} \\ W_{34} = W_4 - W_3 = 9 \text{ mm} = 0.009 \text{ m}$$

$$W_e = 0.019 - 0.009 \frac{1002 - 700}{800-600} = 0.0054 \text{ m}$$

La intensidad de la lluvia i es entonces:

$$i = 19 \times 10^{-6} \times 18.68 \times 0.0054 = 1.92 \times 10^{-6} \text{ m/s}$$

o bien:

$$i = 6.9 \text{ mm/h}$$

y la altura total de precipitación es:

$$hp = i \Delta t = 6.9 \times 4 = 27.6 \text{ mm}$$

El volumen de lluvia que cae sobre la cuenca es:

$$V_{11} = hp A = 27.6 \times 10^{-3} \times 8000 \times 10^6$$

$$V_{11} = 220.8 \times 10^6 \text{ m}^3$$

6.1.4.2 Modelo convergente con flujo radial de entrada

Cuando el aire es forzado a converger en una cierta zona, se produce un movimiento vertical del mismo por la elevación de la presión en la parte inferior de la zona (véase figura 6.13).

Si el aire con agua precipitable W_{12} converge radialmente a una columna circular de radio r y toda esa agua precipitable se deposita en la base del cilindro, la intensidad de la lluvia sería:

$$i = \frac{2 \pi r v_{12} W_{12}}{\pi r^2} = \frac{2}{r} v_{12} W_{12} \quad (6.34)$$

En este caso, el factor geométrico sería $K = \frac{2}{r}$ y el factor de eficiencia tomaría el valor de 1. Este valor es prácticamente imposible, aunque en ciclones intensos la situación se aproxima a ésta bajo ciertas condiciones; en realidad, si sólo hay entrada de aire, la presión dentro de la columna de la figura 6.13 aumenta de manera continua hasta que el gradiente de presión se invierte y, entonces, el aire se ve obligado a salir por alguna parte. De aquí que la situación arriba descrita no pueda mantenerse por mucho tiempo. Un modelo

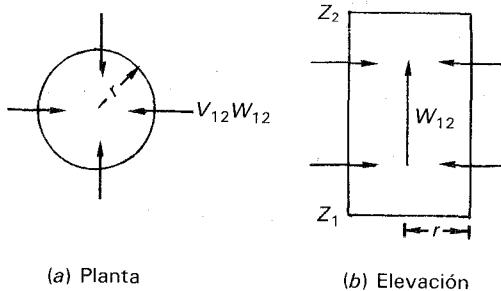


Figura 6.13

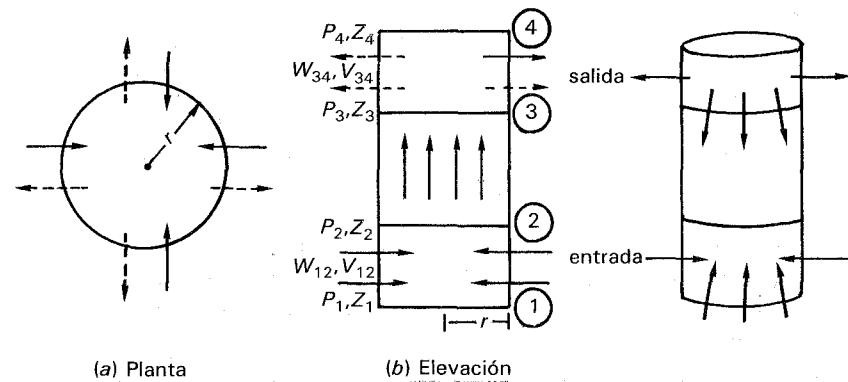


Figura 6.14

más realista, que representa un caso que sí puede mantenerse por períodos razonables de tiempo, es el que se muestra en la figura 6.14.

Se puede demostrar (referencia 6.1) que, en este caso, el agua precipitable efectiva resulta igual que en el modelo de plano inclinado:

$$W_e = W_{12} - \frac{\Delta p_{12}}{\Delta p_{34}} W_{34}$$

y, entonces, la intensidad es:

$$i = \frac{2}{r} v_{12} \left[W_{12} - \frac{\Delta p_{12}}{\Delta p_{34}} W_{34} \right] \quad (6.35)$$

6.1.4.3 Límites de los modelos

Tanto en el caso del modelo de plano inclinado como en el del convergente, es necesario fijar las altitudes o niveles de presión que limitan al modelo. Para ello, se pueden tomar en cuenta los siguientes comentarios:

a) *Límite superior del modelo p_4 .* El punto 4 en ambos modelos (véanse figuras 6.10 y 6.14) es el límite hasta el cual se produce precipitación. Para fines prácticos, este punto se puede tomar como la altura media de la parte superior de las nubes cumulonimbus en las diferentes latitudes y estaciones del año. Las observaciones hechas en este sentido indican que dicha altura varía entre los 8 y los 16 km, que corresponden aproximadamente a niveles de presión de

Tabla 6.3

Punto de rocío, °C	10	15	20	25
p_4 , mb	300	240	150	100

300 y 100 mb, respectivamente. En el caso del modelo convergente, y en especial cuando se trata de tormentas convectivas, es recomendable usar los valores de p_4 dados en la tabla 6.3, en función del punto de rocío en la superficie (referencia 6.1).

b) *Ancho de la capa de entrada Δp_{12} .* El ancho de la capa de entrada se puede tomar como la zona de la atmósfera en donde hay mayor cantidad de humedad. Normalmente esto sucede entre la superficie de la Tierra y un nivel de presión de 800 a 700 mb, dependiendo también del punto de rocío en la superficie.

c) *Ancho de la capa de salida Δp_{34} .* El límite inferior de la capa de salida p_3 depende, naturalmente, del tipo de modelo; en el de plano inclinado este límite estará dado por la topografía del terreno o la forma del frente y en el caso del modelo convergente, el ancho de la capa de salida puede tomarse igual al ancho de la de entrada, esto es, Δp_{34} estaría entre 200 y 300 mb.

6.2 MEDICIÓN DE LA PRECIPITACIÓN

Los aparatos más usuales en México para medir la precipitación son los pluviómetros y los pluviógrafos.

Los pluviómetros están formados por un recipiente cilíndrico graduado de área transversal a al que descarga un embudo que capta el agua de lluvia, y cuya área de captación es A (véase figura 6.15). Se acostumbra colocar en el embudo un par de mallas para evitar la entrada de basura u otros objetos. El área de captación A es normalmente diez veces mayor que el área del recipiente a , con el objeto de que, por cada milímetro de lluvia, se deposite un centímetro en el recipiente. De este modo, es posible hacer lecturas a simple vista hasta de una décima de milímetro de lluvia, que corresponde a un milímetro depositado en el recipiente. En México se acostumbra tomar lecturas de los pluviómetros diariamente a las 8 de la mañana.

Los pluviógrafos son semejantes a los pluviómetros, con la diferencia de que tienen un mecanismo para producir un registro continuo de precipitación. Este mecanismo está formado por un tambor que gira a velocidad constante sobre el que se coloca un papel graduado especialmente. En el recipiente se coloca un flotador que se une mediante un juego de varillas a una plumilla

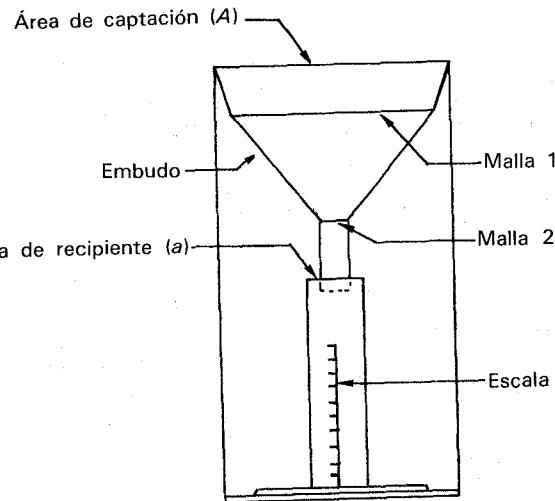


Figura 6.15

que marca las alturas de precipitación en el papel (véase figura 6.16). El recipiente normalmente tiene una capacidad de 10 mm de lluvia y, al alcanzarse esta capacidad, se vacía automáticamente mediante un sifón (véase figura 6.16). El pluviógrafo antes descrito es el de uso más común en México, aunque existen otros tipos en el mundo. Algunos ejemplos son el de resorte, que en lugar de flotador usa un resorte que se deforma con el peso del agua y que es más preferible cuando se miden alturas de nieve, y el de balancín, que tiene dos recipientes colocados en un balancín, de modo que cuando uno de ellos se llena desequilibra la balanza, que gira dejando el otro recipiente en posición de ser llenado. En algunos aparatos (referencia 6.4) el volumen de agua necesaria para hacer girar el balancín es el correspondiente a 0.25 mm de lluvia. En este tipo de pluviógrafos, al girar el balancín se acciona un interruptor que produce un impulso eléctrico que a su vez mueve la plumilla para registrar la altura de precipitación correspondiente.

El registro que se obtiene de un pluviógrafo se llama *pluviograma*. Normalmente, este registro es similar al mostrado en la figura 6.17.

En el registro de la figura 6.17, obtenido directamente de un pluviógrafo de flotador y sifón, los descensos ocurren cuando se ha llenado el recipiente, esto es, cuando se han alcanzado 10 mm de precipitación y se desaloja el agua contenida en él por medio del sifón. Es frecuente que el pluviógrafo tenga alguna falla y por ello los registros resultan defectuosos. En ocasiones es posible recuperar los datos de un registro defectuoso y a veces no, dependiendo del tipo de falla. Tanto para comprobar que el pluviógrafo funciona correctamente como para recuperar los datos de un registro defectuoso, conviene ayu-

darse del registro del pluviómetro. En las figuras 6.18a-6.18e se muestran algunas de las fallas más comunes.

Cuando no hubo lluvia en un día dado, se acostumbra poner el mismo papel al día siguiente y así sucesivamente hasta que se registre alguna precipitación (véase figura 6.18f); la precipitación registrada corresponde, obviamente, al último día.

Si a un registro como el de la figura 6.17 se le quitan los descensos, se obtiene una gráfica de precipitación acumulada contra el tiempo llamada *curva masa de precipitación* (véase figura 6.19).

Nótese que esta curva es no decreciente, y que su pendiente, en cualquier tiempo, es igual a la intensidad de la lluvia (altura de precipitación por unidad de tiempo) en ese instante.

A partir de una curva masa de precipitación es posible dibujar diagramas de barras que representen las variaciones de la altura de precipitación o de

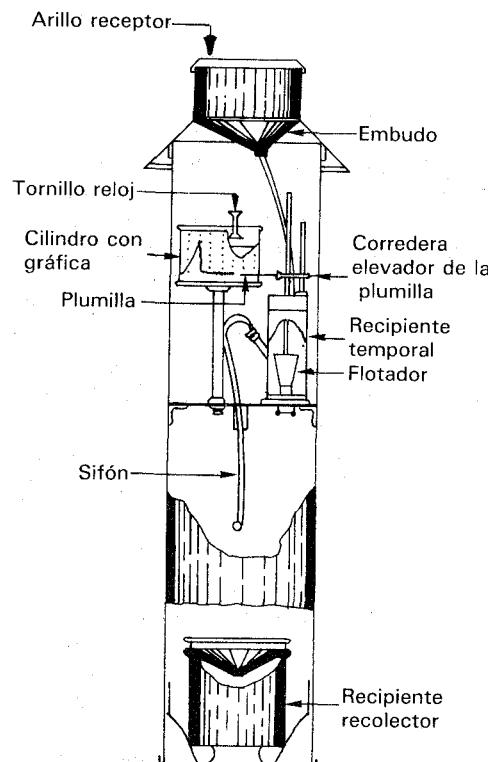


Figura 6.16

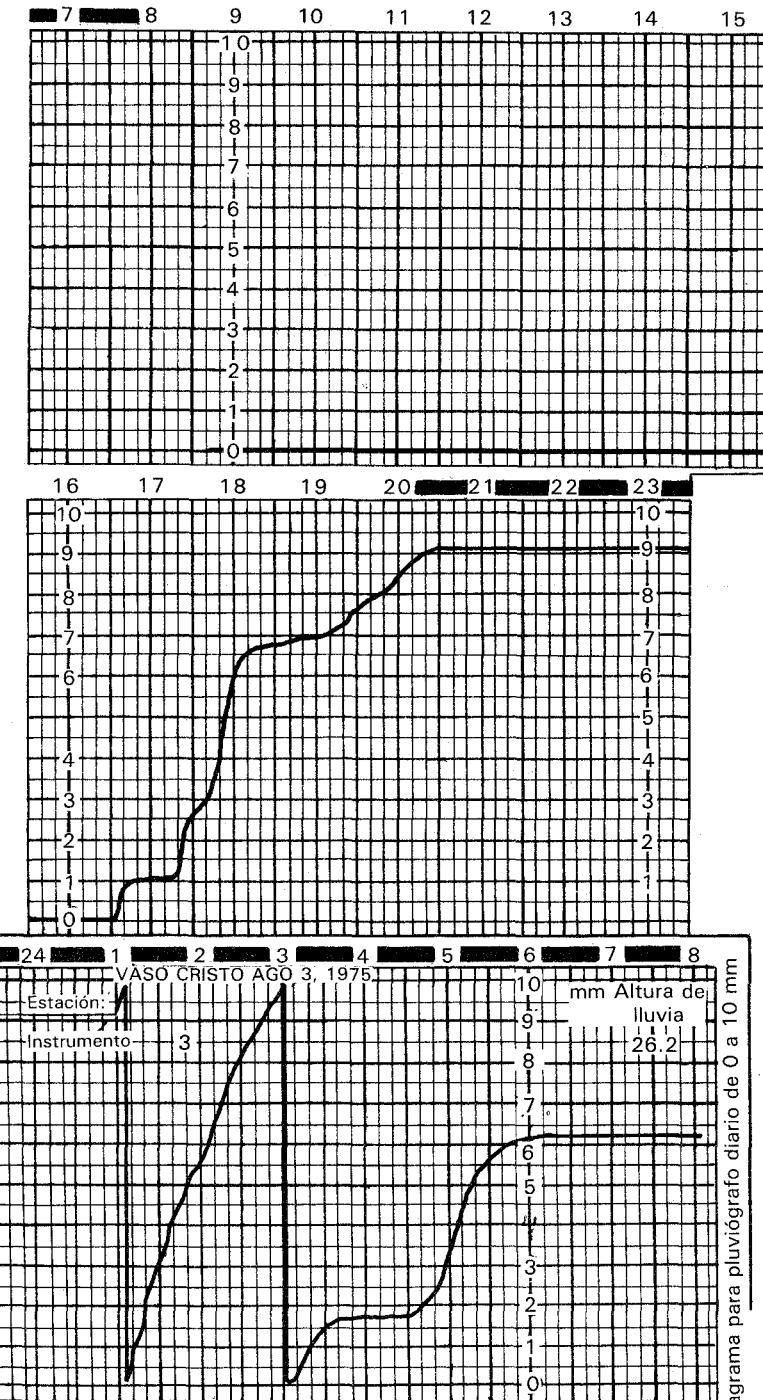


Figura 6.17

Diagrama para pluviógrafo diario de 0 a 10 mm

Precipitación

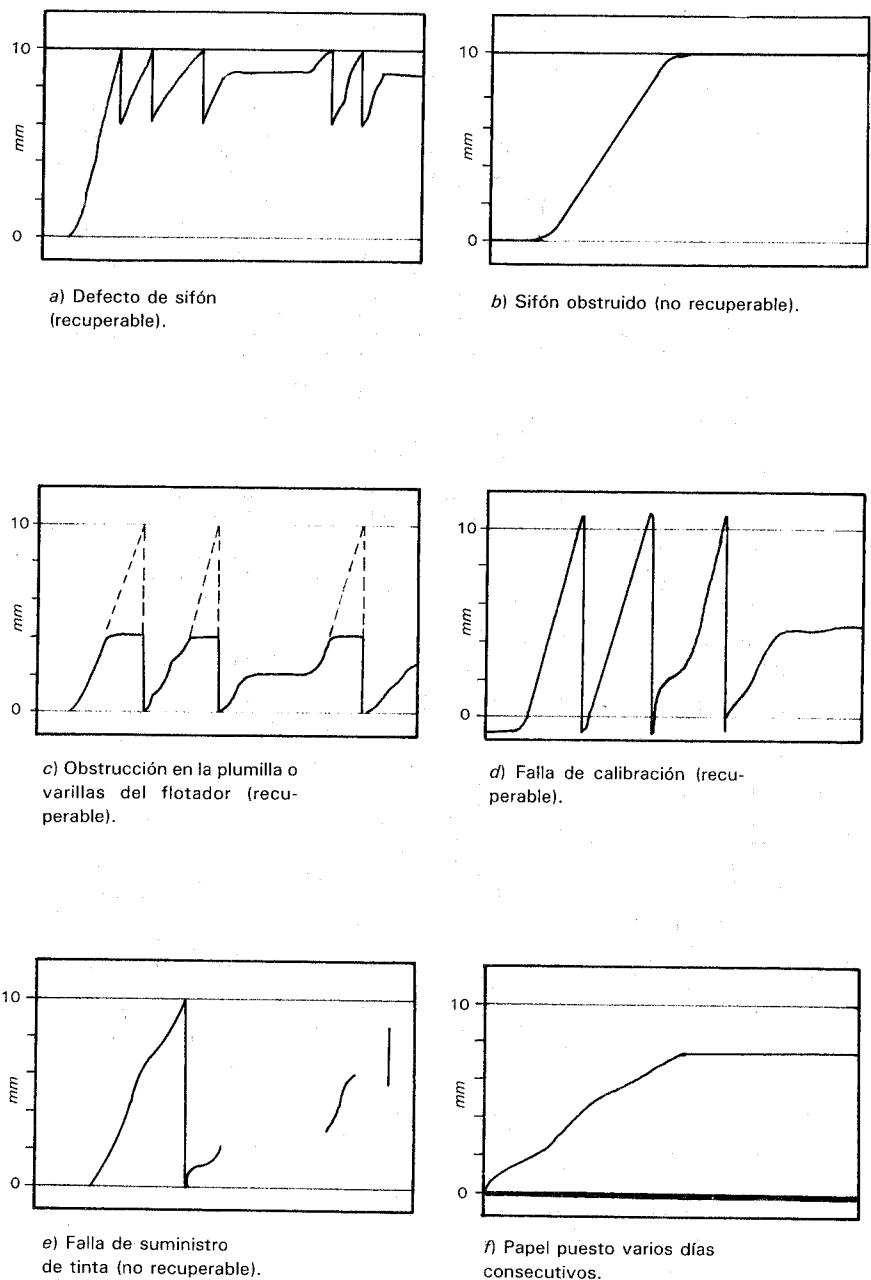


Figura 6.18

Medición de la precipitación

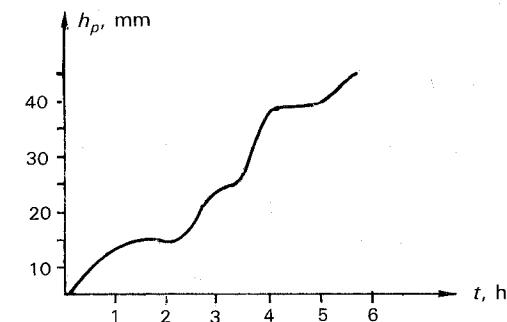


Figura 6.19 Curva masa de precipitación.

su intensidad en intervalos de tiempo previamente seleccionados (véase figura 6.20). Estos diagramas de barras se llaman *hietogramas*.

El hietograma de la figura 6.20a se construye dividiendo el tiempo que duró la tormenta en n intervalos (que pueden ser iguales o no) y midiendo la altura de precipitación que se tuvo en cada uno de ellos. El hietograma de la figura 6.20b puede obtenerse a partir del de la figura 6.20a, dividiendo la altura de precipitación de cada barra entre el tiempo Δt que dura la misma. Ambos tipos de hietogramas son equivalentes, pero uno puede ser más útil que el otro dependiendo del tipo de análisis, como se verá más adelante.

El intervalo Δt seleccionado es importante en cuanto a la información que proporciona el hietograma; un valor de Δt demasiado grande arrojaría muy poca información y uno muy pequeño la daría excesiva y difícil de manejar.

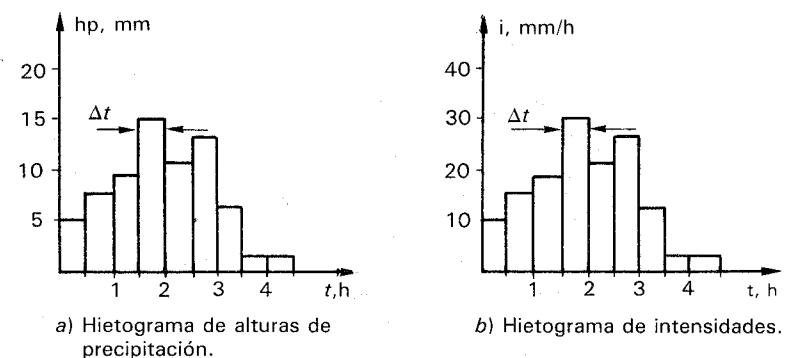


Figura 6.20 Hietogramas.

6.3 ANÁLISIS DE LOS DATOS DE PRECIPITACIÓN

6.3.1 Lluvia media

En general, la altura de lluvia que cae en un sitio dado difiere de la que cae en los alrededores aunque sea en sitios cercanos. Los aparatos descritos en el subcapítulo 6.2 registran la *lluvia puntual*, es decir, la que se produce en el punto en que está instalado el aparato y, para los cálculos ingenieriles, es necesario conocer la *lluvia media* en una zona dada, como puede ser una cuenca.

Para calcular la lluvia media de una tormenta dada, existen tres métodos de uso generalizado:

a) Método aritmético

Consiste simplemente en obtener el promedio aritmético de las alturas de precipitación registradas en cada estación usada en el análisis:

$$\bar{h}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{pi} \quad (6.36)$$

donde h_p es la altura de precipitación media, h_{pi} es la altura de precipitación registrada en la estación i y n es el número de estaciones bajo análisis.

b) Polígonos de Thiessen

Este método consiste en lo siguiente:

1. Unir, mediante líneas rectas dibujadas en un plano de la cuenca, las estaciones más próximas entre sí (líneas discontinuas en la figura 6.21). Con ello se forman triángulos en cuyos vértices están las estaciones pluviométricas.
2. Trazar líneas rectas que bisectan los lados de los triángulos (líneas rectas continuas en la figura 6.21). Por geometría elemental, las líneas correspondientes a cada triángulo convergerán en un solo punto.
3. Cada estación pluviométrica quedará rodeada por las líneas rectas del paso 2, que forman los llamados polígonos de Thiessen (referencia 6.5) y, en algunos casos, en parte por el parteaguas de la cuenca (ver figura 6.21).
4. El área encerrada por los polígonos de Thiessen y el parteaguas será el *área de influencia* de la estación correspondiente.

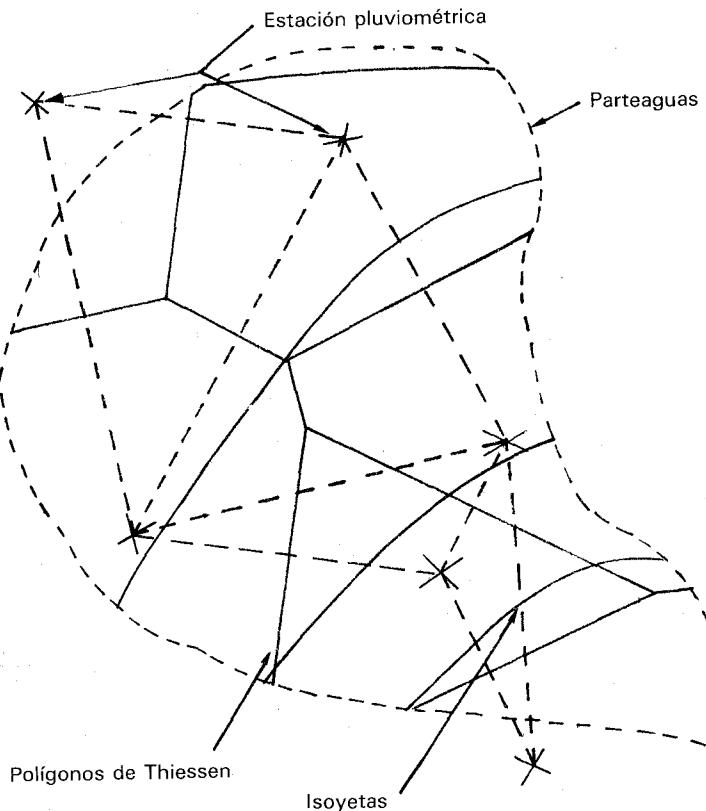


Figura 6.21

4. La lluvia media se calcula entonces como un promedio pesado de las precipitaciones registradas en cada estación, usando como peso el área de influencia correspondiente:

$$\bar{h}_p = \frac{1}{A_T} \sum_{i=1}^n A_i h_{pi} \quad (6.37)$$

donde A_i es el área de influencia de la estación i y A_T es el área total de la cuenca.

Precipitación

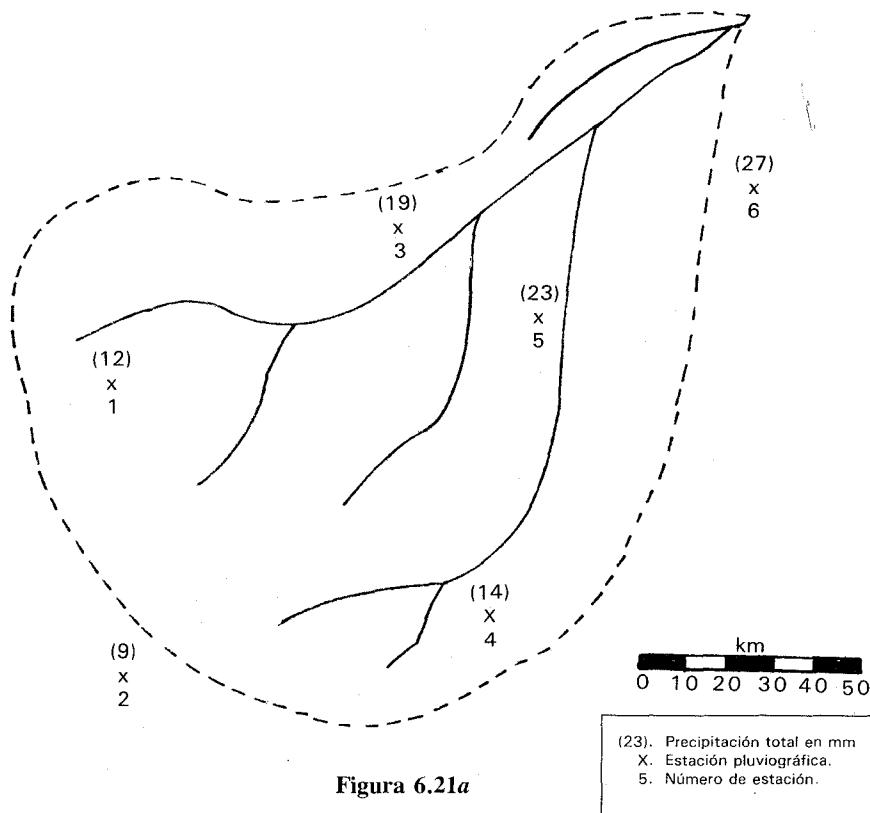


Figura 6.21a

c) Método de las isoyetas

Este método consiste en trazar, con la información registrada en las estaciones, líneas que unen puntos de igual altura de precipitación llamadas *isoyetas*, de modo semejante a como se trazan las curvas de nivel en topografía.

La precipitación media se calcula en forma similar a la ecuación 6.37, pero ahora el peso es el área A'_i entre cada dos isoyetas y el parteaguas de la cuenca y la cantidad que se pesa es la altura de precipitación promedio entre las dos isoyetas, \bar{h}_{pi} :

$$\bar{h}_p = \frac{1}{A_T} \sum_{i=1}^{n'} (\bar{h}_{pi} A'_i) \quad (6.38)$$

donde n' es el número de áreas A'_i consideradas.

Análisis de los datos de precipitación

Ejemplo 6.3. En la cuenca mostrada en la figura 6.21a se han registrado las alturas de precipitación señaladas en la misma. Calcular las alturas medias de precipitación en la cuenca usando los tres métodos vistos anteriormente.

Solución

a) Método aritmético. La precipitación media es (ecuación 6.36):

$$\bar{h}_p = \frac{1}{6} (12 + 9 + 19 + 14 + 23 + 27) = 17.33 \text{ mm}$$

b) Polígonos de Thiessen. En la figura 6.22 se muestra la división en áreas de influencia de la cuenca.

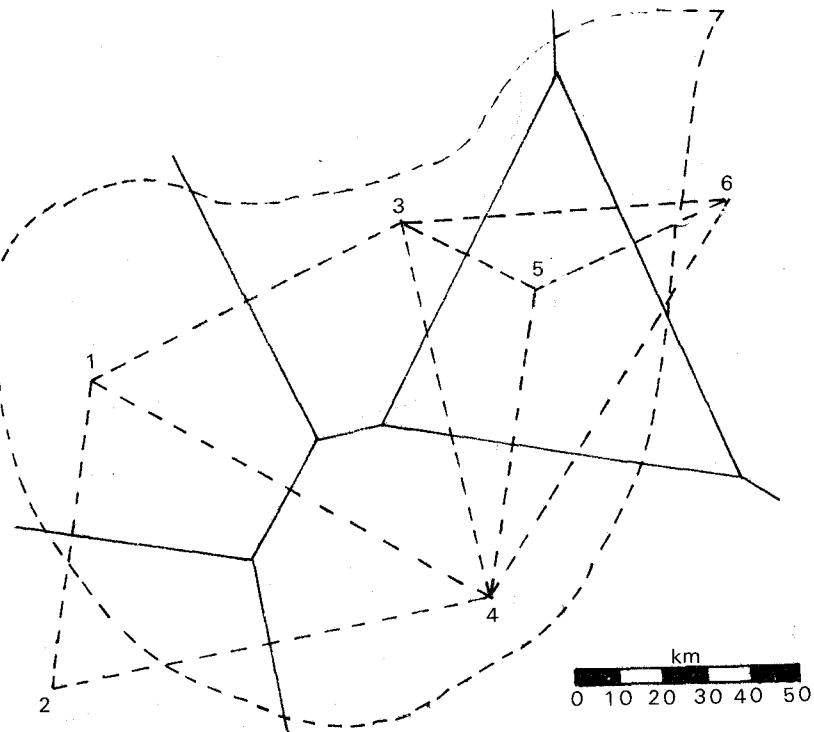


Figura 6.22

Las áreas de influencia de cada estación son:

$A_1 = 4\ 613 \text{ km}^2$, $A_2 = 1\ 170 \text{ km}^2$, $A_3 = 2\ 802 \text{ km}^2$, $A_4 = 4\ 061 \text{ km}^2$, $A_5 = 3\ 314 \text{ km}^2$, $A_6 = 1\ 390 \text{ km}^2$. La precipitación media resulta ser (ecuación 6.37):

$$\bar{h}_p = \frac{1}{17\ 350} (12 \times 4\ 613 + 9 \times 1\ 170 + 19 \times 2\ 802 + 14 \times 4\ 061 + 23 \times 3\ 314 + 27 \times 1\ 390)$$

$$\bar{h}_p = 16.7 \text{ mm}$$

c) Isoyetas. En la figura 6.23 se ilustra el trazo de las isoyetas para este caso. A un lado de cada estación está anotada la precipitación registrada.

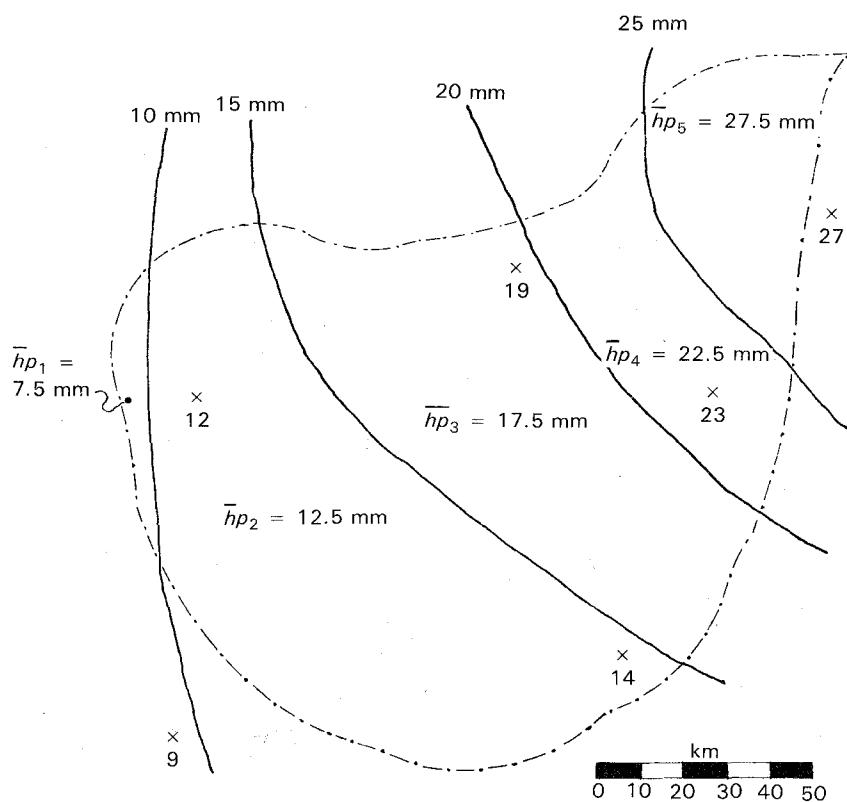


Figura 6.23

Como se observa en la figura 6.23, si se trazan isoyetas a cada 5 mm, la cuenca queda dividida en cinco partes. Las áreas y alturas de precipitación media en cada parte son las siguientes:

$$A_1 = 368 \text{ km}^2 ; \bar{h}_{p_1} = 7.5 \text{ mm}$$

$$A_2 = 7\ 295 \text{ km}^2 ; \bar{h}_{p_2} = 12.5 \text{ mm}$$

$$A_3 = 5\ 452 \text{ km}^2 ; \bar{h}_{p_3} = 17.5 \text{ mm}$$

$$A_4 = 2\ 237 \text{ km}^2 ; \bar{h}_{p_4} = 22.5 \text{ mm}$$

$$A_5 = 1\ 998 \text{ km}^2 ; \bar{h}_{p_5} = 27.5 \text{ mm}$$

y la altura de precipitación media resulta:

$$\bar{h}_p = \frac{1}{17\ 350} (7.5 \times 368 + 12.5 \times 7\ 295 + 17.5 \times 5\ 452 + 22.5 \times 2\ 237 + 27.5 \times 1\ 998)$$

$$\bar{h}_p = 17.0 \text{ mm}$$

El método aritmético es el más simple de todos, pero no toma en cuenta la distribución de las estaciones en la cuenca ni la manera en que se distribuye la lluvia en el espacio, pues le asigna el mismo peso a todas las alturas de precipitación registradas; por ello, es útil únicamente en zonas con topografía muy suave y condiciones atmosféricas muy uniformes, o bien para tener sólo una idea aproximada de la altura de precipitación media.

Por el contrario el método de los polígonos de Thiessen sí toma en cuenta la distribución de las estaciones en el área de la cuenca, pero no los factores topográficos y de otro tipo que afectan a la distribución de la lluvia; este método es, sin embargo, más conveniente que el de las isoyetas desde el punto de vista práctico, particularmente para cálculos repetitivos, como cuando se analiza una gran cantidad de tormentas, pues los polígonos no cambian a menos que se agreguen o se eliminen estaciones.

El más preciso de todos es el método de las isoyetas si éstas se dibujan de manera que tomen en cuenta los efectos topográficos en la distribución de la lluvia, para lo que es necesario tener cierta experiencia. Por otra parte, es el método más laborioso de los tres, pues cada tormenta tiene un plano de isoyetas diferente. Si las isoyetas se trazan indiscriminadamente, por ejemplo, suponiendo una variación lineal de la altura de precipitación entre las estaciones, su precisión no es mayor que la de los polígonos de Thiessen.

La altura de precipitación media calculada depende, en general, del número de estaciones pluviométricas o pluviográficas que se usan en el análisis; entre menor sea el número de estaciones, mayor será el error cometido

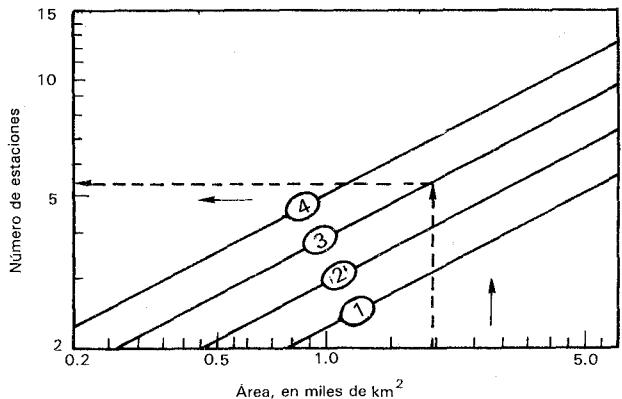


Figura 6.24

en la estimación de la precipitación media. De acuerdo con la referencia 6.10 el error estándar en el cálculo de la lluvia media en porcentaje, E , depende del área de la cuenca A y del número de pluviógrafos N en la forma:

$$E = a A^b N^c$$

donde a , b y c son constantes; b y c pueden tomarse de manera aproximada como 0.2 y -0.5, respectivamente, y a depende de las características de la cuenca y las tormentas. En la figura 6.24 se muestra la cantidad mínima de pluviógrafos necesaria para calcular la precipitación media según las recomendaciones de la Organización Meteorológica Mundial.

La curva que debe utilizarse depende de los días de tormenta por año y el escurrimiento medio anual, como se muestra en la tabla 6.4.

En todos los casos es recomendable tener datos de al menos dos estaciones en una cuenca.

Tabla 6.4

Esc. medio anual, cm/año	Días de tormenta por año		
	<30	30-45	>45
> 15	curva 1	curva 2	curva 3
≤ 15	curva 2	curva 3	curva 4

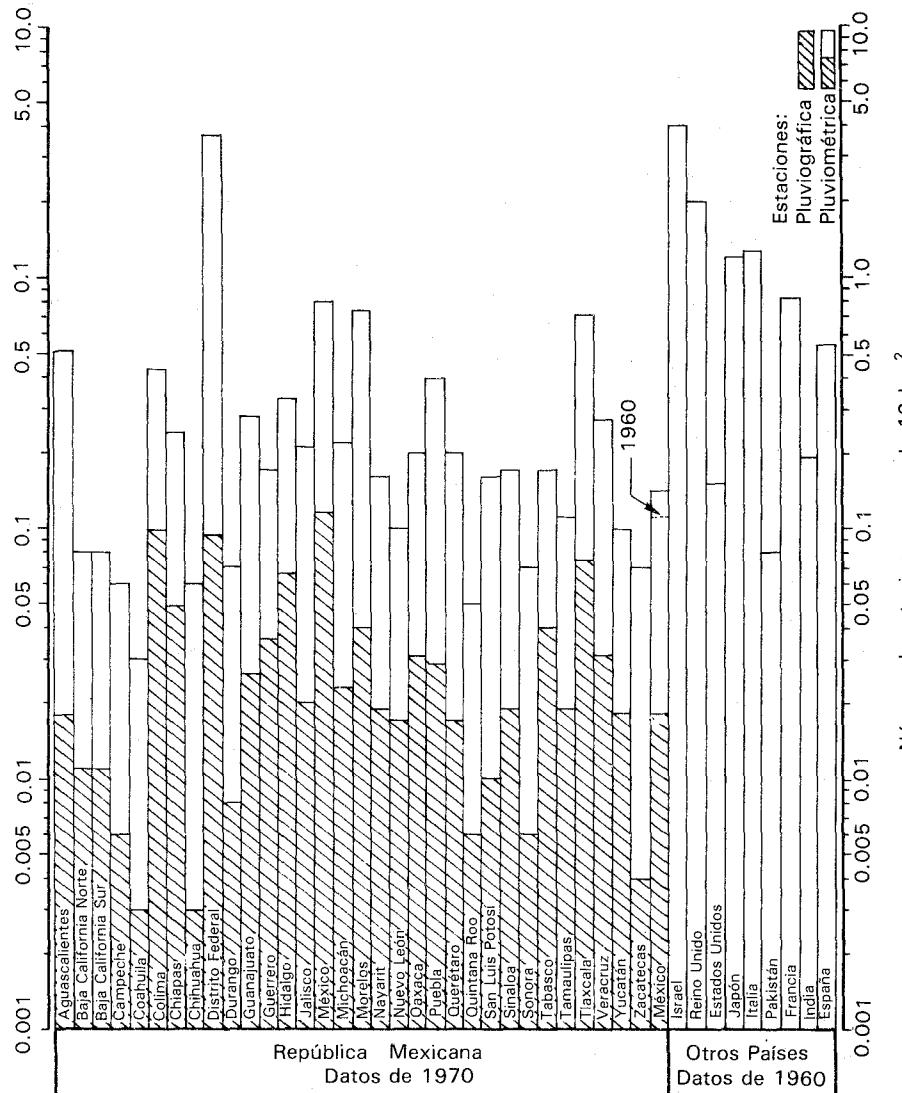


Figura 6.25

En la figura 6.25 se muestra la densidad de estaciones pluviométricas y pluviográficas en la República Mexicana y otros lugares del mundo (referencias 6.6 y 6.4, respectivamente).

6.3.2 Curva masa media

Los métodos descritos anteriormente se han planteado cuando se requiere conocer la altura *total* de precipitación que, en promedio, se produce en la cuenca durante una tormenta. Cuando se desea conocer la *variación* en el tiempo de la precipitación media en la cuenca, es necesario determinar una *curva masa media* de precipitación. Esta curva se construye aplicando el método aritmético o el de polígonos de Thiessen a las alturas de precipitación acumuladas en cada estación para diferentes tiempos. El resultado será una curva masa media y se puede refinar calculando la precipitación media de toda la tormenta con el método de las isoyetas y multiplicando cada ordenada de la curva masa media por el factor de ajuste:

$$Fa = \frac{\bar{h}_{pis}}{\bar{h}_{p_0}} \quad (6.39)$$

donde \bar{h}_{pis} es la altura de precipitación media de toda la tormenta calculada con el método de las isoyetas y \bar{h}_{p_0} es la misma altura, pero calculada con el método aritmético o el de polígonos de Thiessen. Con esto se obtiene una curva llamada *curva masa media ajustada*.

Ejemplo 6.4. Construir una curva masa media ajustada para la cuenca y la tormenta de la figura 6.21 si las curvas masa de cada estación son las mostradas en la figura 6.26.

Solución

Se usará el método de los polígonos de Thiessen. En la tabla 6.5 se muestra el cálculo.

En las columnas 2 a 7 de la tabla se han anotado los valores de la altura de precipitación acumulada para cada estación. En las columnas 8 a 13 se encuentran los productos del área de influencia A_i por las alturas de precipitación y en la columna 14, formada por la suma de los valores de las columnas 8 a 13 dividida entre el área total de la cuenca, está la curva masa media. Nótese que, como es de esperarse, el último valor de la columna 14 coincide con el resultado del ejemplo anterior para el método de los polígonos de Thiessen.

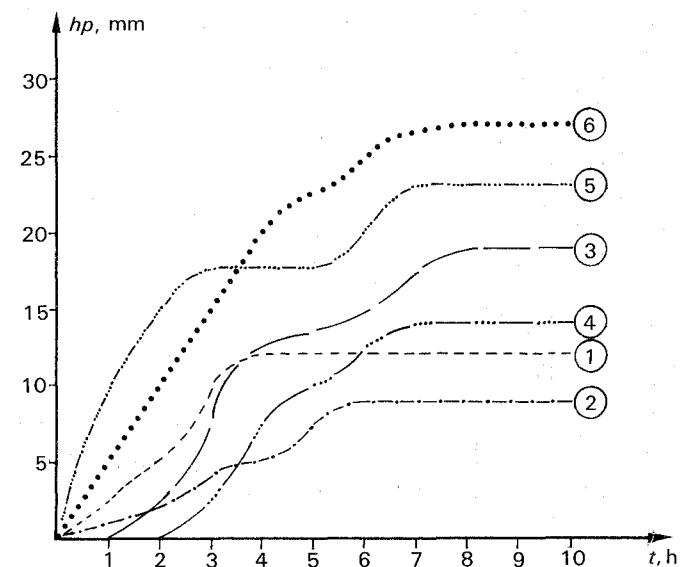


Figura 6.26

Para construir la curva masa media ajustada, todos los valores de la columna 14 se multiplican por el factor de ajuste dado por la ecuación 6.39 (véase ejemplo 6.3).

Tabla 6.5

hora	hp_1	hp_2	hp_3	hp_4	hp_5	hp_6	$mm \cdot km^2$	$A_1 hp_1$	$A_2 hp_2$	$A_3 hp_3$	$A_4 hp_4$	$A_5 hp_5$	$A_6 hp_6$	\bar{h}_p
mm	mm	mm	mm	mm	mm			mm						
1	2.5	1.0	0.0	0.0	10.0	5.0	11 533	1 170	0	0	33 140	6 950	3.04	
2	5.0	2.0	2.5	0.0	15.0	10.0	23 065	2 340	7 005	0	49 710	13 900	5.53	
3	10.0	4.0	7.5	2.5	17.5	15.0	46 130	4 680	21 015	10 152	57 995	20 850	9.27	
4	12.0	5.0	12.5	7.5	17.5	20.0	55 356	5 850	35 025	30 458	57 995	27 800	12.25	
5	12.0	7.5	13.75	10.0	17.5	22.5	55 356	8 775	38 528	40 610	57 995	31 275	13.40	
6	12.0	9.0	15.0	12.5	20.0	25.0	55 356	10 530	42 030	50 763	66 280	34 750	14.97	
7	12.0	9.0	17.5	14.0	23.0	26.5	55 356	10 530	49 035	56 854	76 222	36 835	16.42	
8	12.0	9.0	19.0	14.0	23.0	27.0	55 356	10 530	53 238	56 854	76 222	37 530	16.70	
9	12.0	9.0	19.0	14.0	23.0	27.0	55 356	10 530	53 238	56 854	76 222	37 530	16.70	
10	12.0	9.0	19.0	14.0	23.0	27.0	55 356	10 530	53 238	56 854	76 222	37 530	16.70	

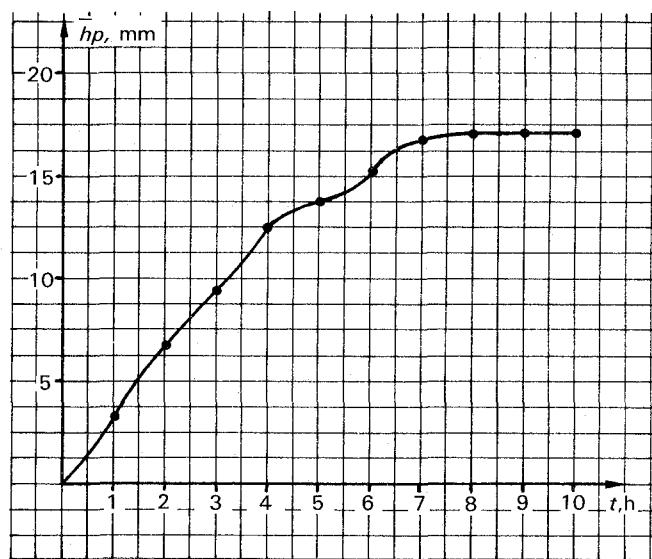


Figura 6.27

$$F_a = \frac{17.00}{16.70} = 1.02$$

Tabla 6.6

hora	$\bar{h}p$ mm
1	3.10
2	5.63
3	9.44
4	12.47
5	13.64
6	15.24
7	16.72
8	17.00
9	17.00
10	17.00

y la curva masa media ajustada resulta ser la mostrada en la tabla 6.6 y en la figura 6.27.

6.3.3 Deducción de datos faltantes

Es frecuente que en un registro de precipitación falten los datos de un cierto periodo, debido a la ausencia del operador o a fallas del aparato registrador. En estos casos se pueden estimar los datos faltantes si se tienen registros simultáneos de algunas estaciones situadas cerca de la estación en cuestión y uniformemente repartidas. Una manera de hacerlo es mediante una gráfica como las de las figuras 6.28 a y 6.28 b, donde se correlacionan las precipitaciones medidas en una estación cercana o el promedio de las medidas en varias estaciones circundantes con la registrada en la estación en estudio (para detalles del procedimiento de correlación, véase apéndice B).

Una vez obtenida esta gráfica, y si la correlación es aceptable, bastaría conocer la precipitación en la estación más cercana (véase figura 6.28a), o bien la precipitación media en las estaciones circundantes consideradas (véase figura 6.28b) en los días en cuestión para deducir los datos faltantes.

Cuando la correlación obtenida del análisis anterior no es aceptable, se puede usar otro método, basado en la precipitación media anual, que sigue dos tipos de criterios (referencia 6.4):

a) Si la precipitación media anual en cada una de las estaciones circundantes difiere en menos del 10% de la registrada en la estación en estudio, los datos faltantes se estiman haciendo un promedio aritmético de los registrados en las estaciones circundantes.

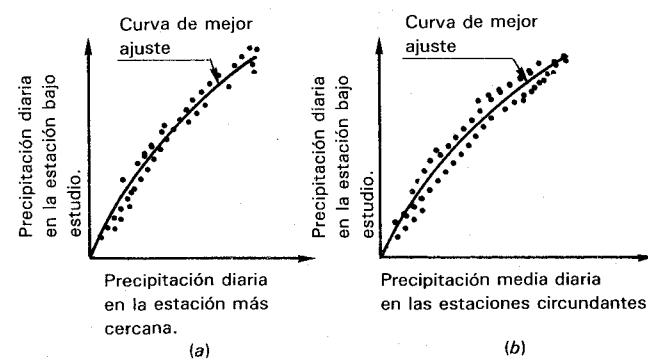


Figura 6.28

b) Si la precipitación media anual de cualquiera de las estaciones circundantes difiere en más de 10%, se usa la fórmula:

$$h_{px} = \frac{1}{n} \left[\frac{p_x}{p_1} h_{p_1} + \frac{p_x}{p_2} h_{p_2} + \dots + \frac{p_x}{p_n} h_{p_n} \right] \quad (6.40)$$

donde h_{p_i} = altura de precipitación registrada el día en cuestión en la estación auxiliar i .

h_{px} = altura de precipitación faltante en la estación en estudio.

p_i = precipitación media anual en la estación auxiliar i .

p_x = precipitación media anual en la estación en estudio.

n = número de estaciones auxiliares.

Para obtener resultados confiables, es recomendable que el número de estaciones auxiliares n sea como mínimo tres.

6.3.4 Ajuste de registros de precipitación por cambios en las condiciones de medición

Cuando en una estación pluviométrica tiene lugar algún cambio en las condiciones de medición, como por ejemplo cambio de operador, de localización o de las condiciones adyacentes, las tendencias del registro sufren normalmente alteraciones que pueden llegar a ser importantes en cuanto a su no homogeneidad. Para detectar y corregir estas alteraciones se usa una técnica llamada *curva masa doble*, que se basa en observaciones hechas en el sentido de que la precipitación acumulada media para varias estaciones no es muy sensible a cambios en una de ellas, debido a que muchos de los errores se compensan, mientras que la lluvia acumulada de una estación particular se afecta de inmediato ante la presencia de cambios importantes. Así, si en una gráfica se pone en un eje la precipitación anual acumulada media de varias estaciones circundantes a la estación en estudio, y en el otro eje se pone la lluvia anual acumulada de la estación en cuestión, se obtendrá una línea recta siempre que en ésta no hayan existido cambios o no sean importantes; en caso contrario, la línea cambia de pendiente en el año a partir del cual la estación comenzó a operar en condiciones diferentes. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 6.29 se observa que hubo algún cambio a partir de 1976. Entonces, para que los datos registrados en la estación en todos los años sean consistentes, los registros anteriores a 1976 se pueden "corregir" multiplicándolos por el factor de ajuste:

$$F_a = \frac{A}{B} = \frac{0.83}{0.63} = 1.32$$

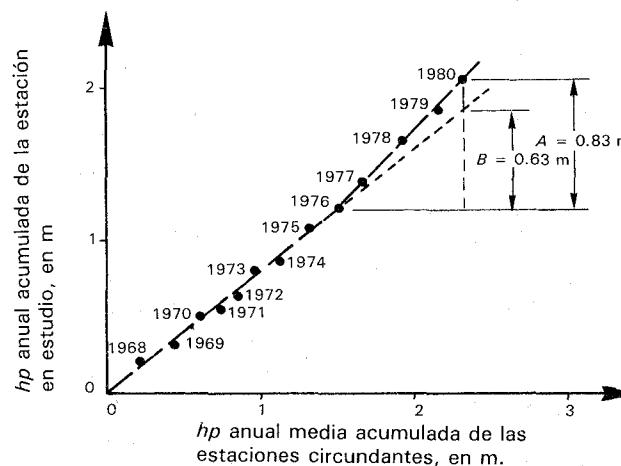


Figura 6.29

Para que el ajuste sea suficientemente confiable, conviene que el número de estaciones circundantes usadas no sea menor de diez. Por otra parte, si en la zona en estudio hay variaciones muy apreciables de la precipitación en cada época del año, es conveniente hacer ajustes por separado para cada época. Así, por ejemplo, se puede hacer un ajuste para la época de lluvias y otro para la sequía.

6.3.5 Curvas altura de precipitación-área-duración ($h_p - A - d$)

Las curvas altura de precipitación-área-duración sirven para determinar el potencial de precipitación que existe en una zona dada y, además, constituyen uno de los métodos más simples que existen para trasponer tormentas de un sitio a otro. Este análisis trata de establecer las cantidades máximas de precipitación que se producen en diferentes áreas y para diferentes duraciones, con base en una red de estaciones que registran simultáneamente la precipitación durante una tormenta dada. Estas curvas se extrapolan a sus valores máximos probables para ser usadas en estudios de estimación de avenidas.

Cuando se tienen datos de una tormenta, el procedimiento para determinar estas curvas es el siguiente:

- Dibujar las curvas masa de las estaciones que cuentan con pluviógrafo.
- Trazar los polígonos de Thiessen para las estaciones pluviográficas.

- c) Dibujar las isoyetas correspondientes a la altura de precipitación total de la tormenta, medida tanto con estaciones pluviográficas como pluviométricas.
- d) Calcular el área encerrada entre cada dos isoyetas y el parteaguas de la cuenca, así como la precipitación media en esa área, de manera similar al ejemplo 6.3 c). Para las isoyetas próximas al parteaguas, el área será la encerrada entre la isoyeta y el parteaguas.
- e) Superponer el plano de isoyetas al de los polígonos de Thiessen (incisos c y b, respectivamente) y calcular la porción del área de influencia de cada estación pluviográfica que queda entre cada dos isoyetas.
- f) Determinar la curva masa media correspondiente al área encerrada por cada isoyeta y el parteaguas, partiendo de la de mayor precipitación, como si ésta fuera una cuenca. Estas curvas masa medias se pueden ajustar de manera semejante a como se hizo en el ejemplo 6.4.
- g) Seleccionar diferentes duraciones de interés, que en general pueden ser múltiplos de 6h, aunque este intervalo varía en función del área de la cuenca.
- h) Para cada duración, seleccionar los máximos incrementos de precipitación de las curvas masa calculadas en el inciso f), de manera que estén situados en intervalos de tiempo contiguos.
- i) Dibujar los datos de área, altura de precipitación y duración como en la figura 6.31.

Ejemplo 6.5. Construir las curvas altura de precipitación-área-duración para la tormenta de la figura 6.26 que se presentó en la cuenca de la figura 6.21.

Solución

- a) Las curvas masa se encuentran en la figura 6.26.
- b) En este caso, todas las estaciones son pluviográficas. En la figura 6.22 se muestran los polígonos de Thiessen.
- c) Las isoyetas se han dibujado en la figura 6.23.
- d) Las áreas encerradas entre cada dos isoyetas, así como la precipitación media en esas áreas son (ejemplo 6.3):

<i>i</i>	Área, A_i km ²	Precipitación media h_{pi} , mm
1	368	7.5
2	7 295	12.5
3	5 452	17.5
4	2 237	22.5
5	1 998	27.5

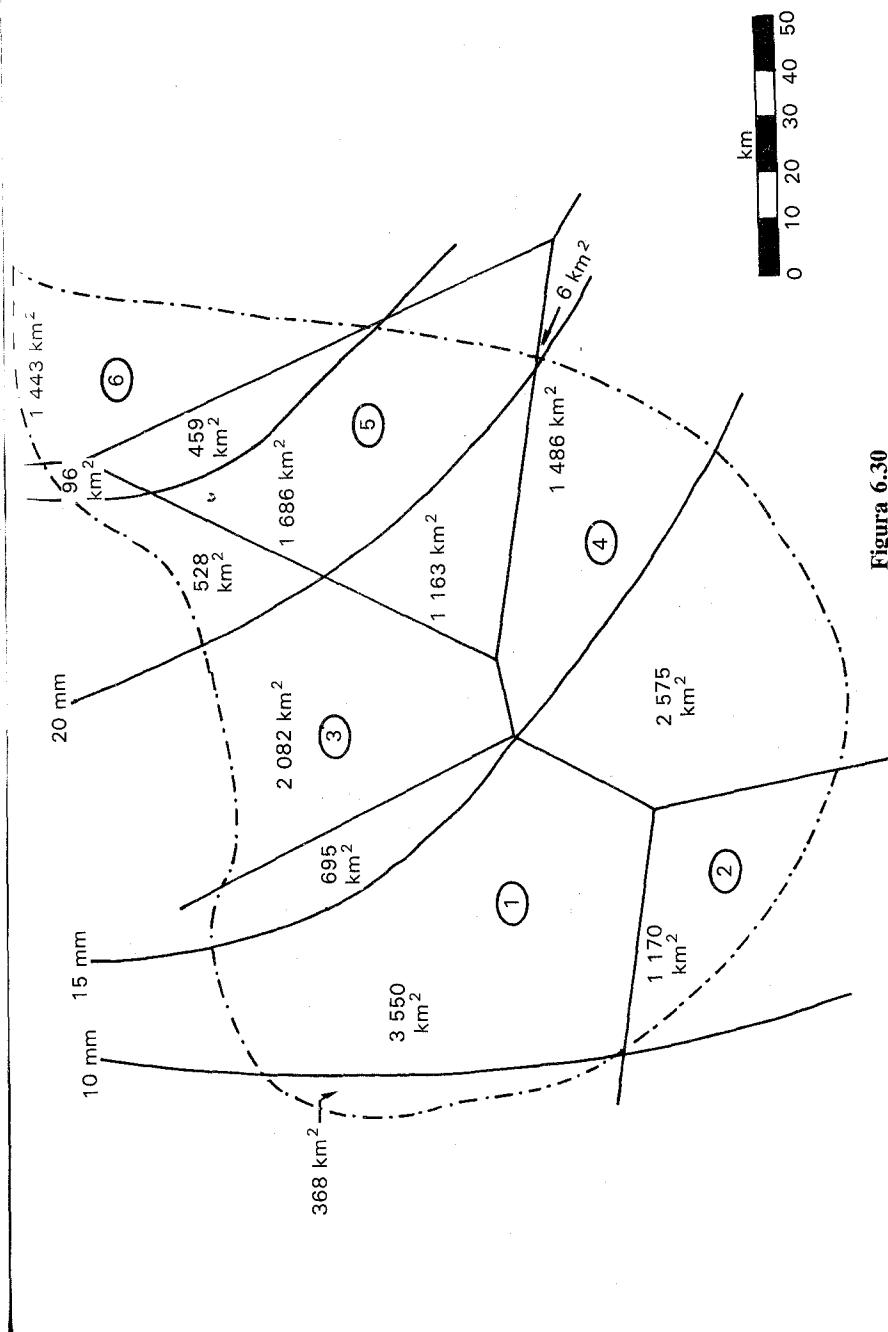
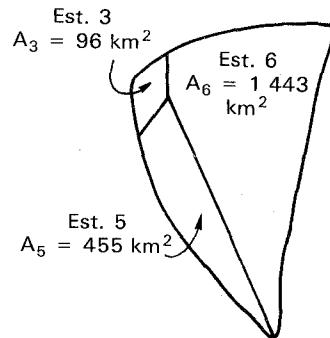


Figura 6.30

- e) En la figura 6.30 se muestra la superposición de los planos de isoyetas y polígonos y las porciones de las áreas de influencia correspondientes.
 f) Enseguida se calculan las curvas masa medias.

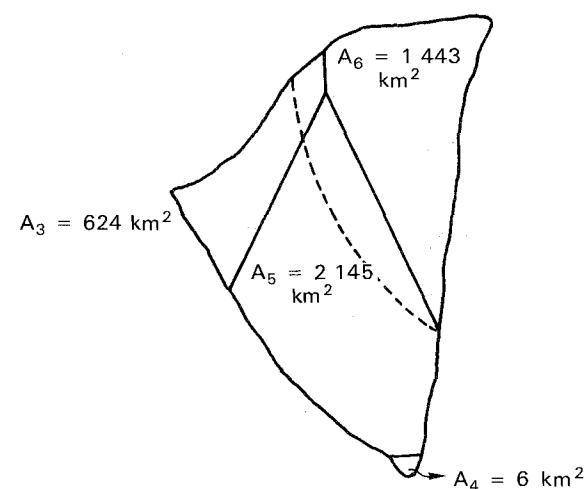
Isoyeta de 25 mm

Área total: 1998 km²

$$\text{Factor de ajuste: } \frac{27.5}{25.70} = 1.07$$

hora	$h_{p3}A_3$ mm · km ²	$h_{p5}A_5$ mm · km ²	$h_{p6}A_6$ mm · km ²	\bar{h}_p mm	\bar{h}_{paj} mm	Incremento mm
0	0	0	0	0	0	—
1	0	4 590	7 215	5.91	6.33	6.33
2	240	6 885	14 430	10.79	11.55	5.25
3	720	8 033	21 645	15.21	16.28	4.73
4	1 200	8 033	28 860	19.07	20.41	4.13
5	1 320	8 033	32 468	20.93	22.40	1.99
6	1 440	9 180	36 075	23.37	25.01	2.61
7	1 680	10 557	38 240	25.26	27.03	2.02
8	1 824	10 557	38 961	25.70	27.50	0.47
9	1 824	10 557	38 961	25.70	25.70	—

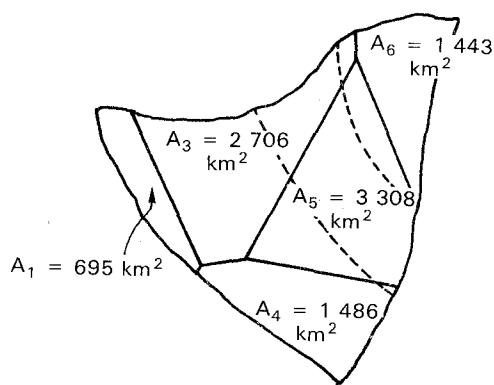
Isoyeta de 20 mm

Área total: 4 218 km²

$$\text{Factor de ajuste: } \frac{24.87}{23.76} = 1.05$$

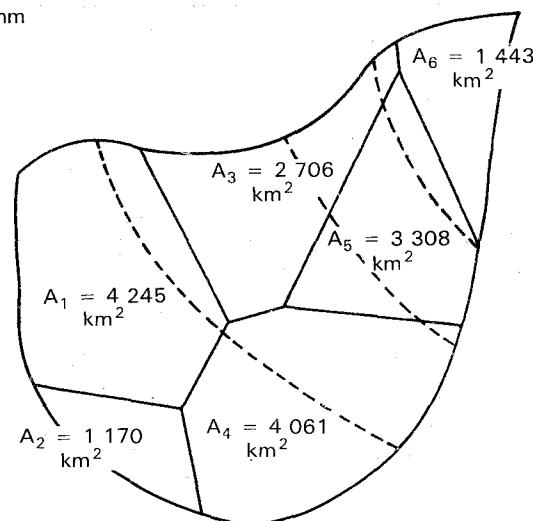
hora	$h_{p3}A_3$ mm km ²	$h_{p4}A_4$ mm km ²	$h_{p5}A_5$ mm km ²	$h_{p6}A_6$ mm km ²	\bar{h}_p mm	\bar{h}_{paj} mm	Incremento mm
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	21 450	7 215	6.80	7.12	7.12
2	1560	0	32 175	14 430	11.92	11.95	4.83
3	4680	15	37 538	21 645	15.14	15.85	3.90
4	7800	45	37 538	28 865	17.60	18.42	2.57
5	8580	60	37 538	32 468	18.65	19.52	1.10
6	9360	75	42 960	36 075	20.96	21.94	2.42
7	10920	84	49 335	38 240	23.37	24.46	2.52
8	11856	84	49 335	38 961	23.76	24.87	6.11
9	11856	84	49 335	38 961	23.76	24.87	—

Isoyeta de 15 mm

Área total: 9638 km²Factor de ajuste: $\frac{20.91}{20.30} = 1.03$

hora	$h_{p1} A_1$ mm km ²	$h_{p3} A_3$ mm km ²	$h_{p4} A_4$ mm km ²	$h_{p5} A_5$ mm km ²	$h_{p6} A_6$ mm km ²	\bar{h}_p mm	\bar{h}_{paj} mm	Incremento mm
0	0	0	0	0	0	0	0	—
1	1 738	0	0	33 080	7215	4.36	4.49	4.4
2	3 475	6 765	0	49 620	14 430	7.71	7.94	3.9
3	6 950	20 295	3 715	57 890	21 645	11.47	11.82	3.8
4	8 340	33 825	11 145	57 890	28 860	14.53	14.97	3.1
5	8 340	37 208	14 860	57 890	32 468	15.64	16.11	1.1
6	8 340	40 590	18 575	66 160	36 075	17.61	18.14	2.0
7	8 340	47 355	20 804	76 084	38 240	19.80	20.40	2.2
8	8 340	51 414	20 804	76 084	38 961	20.30	20.91	0.5
9	8 340	51 414	20 804	76 084	38 961	20.30	20.91	—

Isoyeta de 10 mm

Área total: 16933 km²Factor de ajuste: $\frac{17.23}{16.82} = 1.025$

hora	$h_{p1} A_1$ mm km ²	$h_{p2} A_2$ mm km ²	$h_{p3} A_3$ mm km ²	$h_{p4} A_4$ mm km ²	$h_{p5} A_5$ mm km ²	$h_{p6} A_6$ mm km ²	\bar{h}_p mm	\bar{h}_{paj} mm	Incremento mm
0	0	0	0	0	0	0	0	0	—
1	10 613	1 170	0	0	33 080	7 215	3.08	3.16	3.16
2	21 225	2 340	6 765	0	49 620	14 430	5.57	5.71	2.55
3	42 450	4 680	20 295	10 152	57 890	21 645	9.28	9.51	3.80
4	50 940	5 850	33 825	30 458	57 890	28 860	12.27	12.57	3.06
5	50 940	8 775	37 208	40 610	57 890	32 468	13.46	13.79	1.22
6	50 940	10 530	40 590	50 763	66 160	36 075	15.06	15.43	1.64
7	50 940	10 530	47 355	56 854	76 084	38 240	16.54	16.95	1.52
8	50 940	10 530	51 414	56 854	76 084	38 961	16.82	17.24	0.29
9	50 940	10 530	51 414	56 854	76 084	38 961	16.82	17.24	—

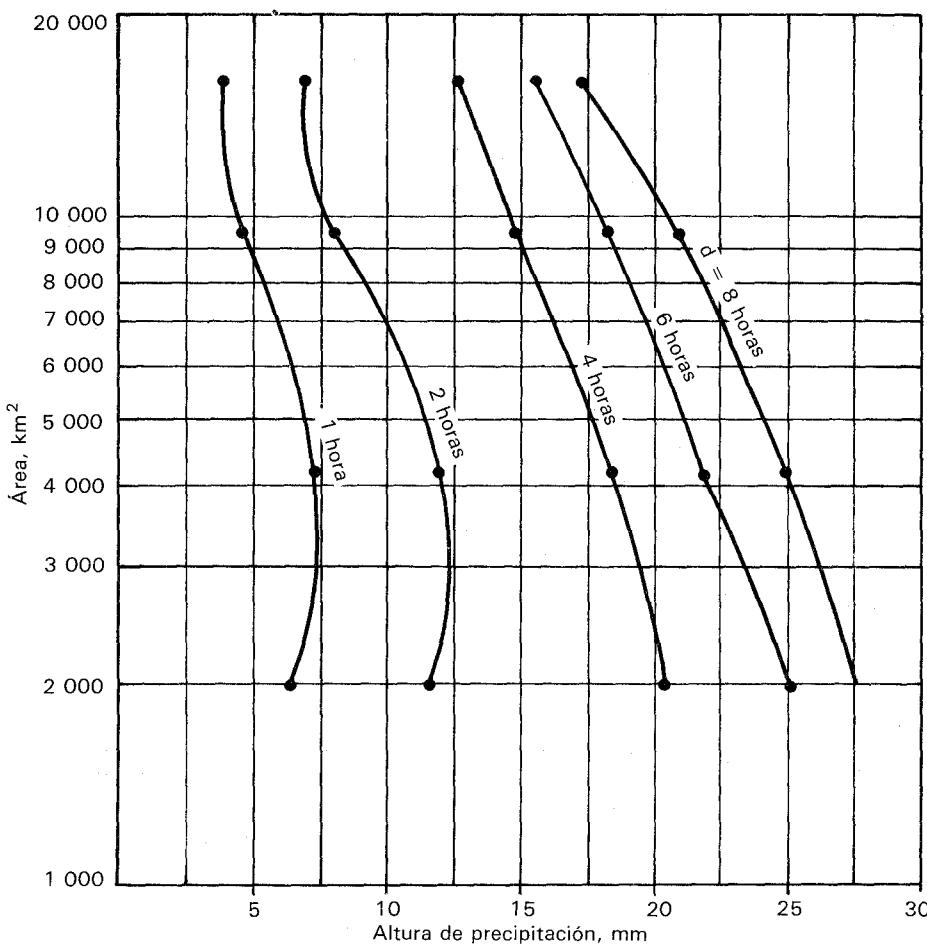


Figura 6.31

Cuenca completa. Este cálculo ya se hizo en el ejemplo 6.4. Los resultados son:

hora	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h_{pj} , mm	0	3.10	5.63	9.44	12.47	13.64	15.24	16.72	17.00	17.00
Incremento mm	—	3.10	2.53	3.81	3.03	1.17	1.60	1.48	0.28	—

Tabla 6.7

Área km ²	Incremento máximo, mm.				
	1 h	2 h	4 h	6 h	8 h
1 998	6.33	11.58	20.41	25.01	27.10
4 218	7.12	11.95	18.42	21.94	24.87
9 638	4.49	7.94	14.97	18.44	20.91
16 933	3.80	6.86	12.57	15.43	17.24
17 350	3.81	6.84	12.47	15.24	17.00

- g) Se seleccionaron para este caso duraciones de 1, 2, 4, 6 y 8 h.
 h) En la tabla 6.7 se muestra el cálculo de los incrementos máximos.
 i) En la figura 6.31 se muestran las gráficas de los datos de la tabla 6.7.

6.3.6 Trasposición de tormentas

Cuando se cuenta con poca información sobre tormentas extremas ocurridas en una cuenca, o cuando se desea ampliar la información sobre las cantidades máximas de precipitación que se pueden presentar en la misma, puede resultar conveniente trasponer, a la cuenca en estudio, tormentas ocurridas en sitios diferentes. Esto tiene, desde luego, la limitación de que la tormenta traspuesta sea meteorológicamente factible de ocurrir en la cuenca en estudio, de manera que el sitio donde se presentó debe ser similar desde el punto de vista meteorológico. Así, por ejemplo, no es válido trasponer una tormenta ciclónica a una zona donde sólo se pueden presentar tormentas convectivas, ni una tormenta tropical a zonas polares.

Al trasponer una tormenta de un sitio a otro, se plantea la hipótesis de que no hay cambios en su estratificación de humedad, sus dimensiones espaciales ni en la magnitud y distribución de los vientos de entrada y salida (referencia 6.1). Estos y otros factores deben ser considerados al trasponer una tormenta y, en caso de duda, debe consultarse a un meteorólogo.

La tormenta por trasponer debe estar en forma de curvas hp -A-d como en la figura 6.31. Una vez que la tormenta se ha sintetizado en esta forma, la trasposición consiste simplemente en multiplicar los valores de la precipitación por el factor de ajuste (referencia 6.8)

$$K = \frac{h_a}{h_o} \quad (6.41)$$

donde h_o = agua precipitable en el punto de ocurrencia de la tormenta por trasponer, para el punto de rocío persistente durante unas 12 h en el lapso de duración de la tormenta, y h_a = agua precipitable en la cuenca en estudio para el mismo punto de rocío. Los valores de h_o y h_a se pueden determinar mediante las figuras 6.4 y 6.4a. Despues, mediante el área de la cuenca, se establecen alturas de precipitación para diferentes duraciones de las curvas hp - A - d ajustadas con el factor K (ecuación 6.41), con lo que se obtiene una curva masa. De esta curva masa se calculan las alturas de precipitación en intervalos de tiempo Δt previamente seleccionados y, por último, se conforman diferentes hietogramas, colocando dichas alturas en diferentes posiciones, pero respetando las alturas de precipitación acumulada hasta obtener la condición más desfavorable.

La tormenta se puede aún maximizar multiplicando sus áreas de precipitación por el factor de maximización:

$$K_M = \frac{h_M}{h_a} \quad (6.42)$$

donde h_M = agua precipitable correspondiente a la temperatura de rocío máxima persistente durante unas 12 h en el sitio en estudio.

Ejemplo 6.6. La tormenta de la figura 6.31 se presentó en una cuenca cuya altitud media es de 500 msnm, cuando el punto de rocío persistente durante 12 h fue de 10 °C. Trasponer y maximizar esta tormenta a una cuenca meteorológicamente similar, que tiene una altitud media de 1 000 msnm, un área de 6 000 km² y un punto de rocío máximo persistente de 25 °C.

Solución

En primer lugar, se calcula el factor de ajuste K (ecuación 6.41); de la figura 6.4 con $z = 500$ m y $T_d = 15$ °C, el valor de h_o es 7.5 mm, y para 1 000 m y $T_d = 15$ °C, resulta $h_a = 11.5$ mm. Entonces:

$$K = \frac{11.5}{7.5} = 1.53$$

Multiplicando los valores de la tabla 6.7 por $K = 1.53$, se obtienen los datos para la curva hp - A - d de la tormenta traspuesta (tabla 6.8).

Ahora se maximizará la tormenta de la tabla 6.8 mediante el factor de maximización K_M (ecuación 6.42). Con $z = 1 000$ m y $T_d = 25$ °C, resulta, de la figura 6.4, $h_M = 22.5$ mm. Entonces:

$$K_M = \frac{22.5}{11.5} = 1.96$$

Tabla 6.8

Área km ²	Altura de precipitación, mm				
	1 h	2 h	4 h	6 h	8 h
1 998	9.69	17.72	31.23	38.27	42.08
4 218	10.90	18.28	28.18	33.57	38.05
9 638	6.87	12.15	22.90	33.21	31.99
16 933	5.81	10.50	19.22	23.61	26.38
17 350	5.83	10.47	19.08	23.32	26.01

Multiplicando los valores de la tabla 6.8 por $K_M = 1.96$, se obtiene la tormenta maximizada, tabla 6.9.

Con los datos de la tabla 6.9 se forman las curvas hp - A - d mostradas en la figura 6.32.

De la figura 6.32 con el área de 6 000 km² de la cuenca en estudio, se obtienen los valores de la curva masa, así como sus incrementos, mostrados en la tabla 6.10.

Tabla 6.9

Área km ²	Altura de precipitación, mm				
	1 h	2 h	4 h	6 h	8 h
1 998	18.99	34.83	61.21	75.01	82.48
4 218	21.36	35.83	55.23	65.80	74.58
9 638	13.47	23.81	44.80	55.29	62.70
16 933	11.39	20.58	37.69	42.28	51.71
17 350	11.43	20.52	37.40	45.71	50.98

Tabla 6.10

Duración, h	0	1	2	4	6	8
hp, mm	0	18.1	32.0	51.0	61.2	70.0
incremento, mm	—	18.1	13.9	19.0	10.2	8.8

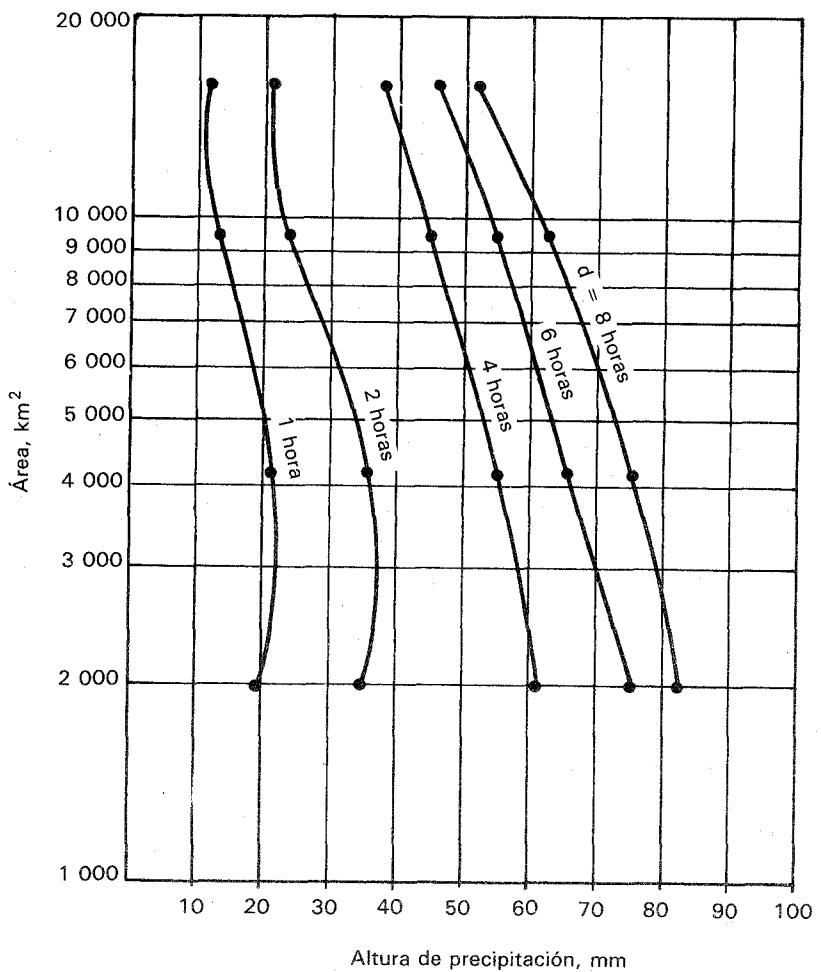


Figura 6.32

Finalmente, se escogen varias posiciones de las barras de hietograma; cuidando que se conserve la altura de precipitación acumulada. En la figura 6.33 se muestran dos de estas posibilidades. Estos hietogramas se usarían posteriormente para alimentar algún modelo de la relación lluvia-escorrentamiento (capítulo 8) para obtener diferentes avenidas, de las que se escogería la más desfavorable para el caso de que se trate.

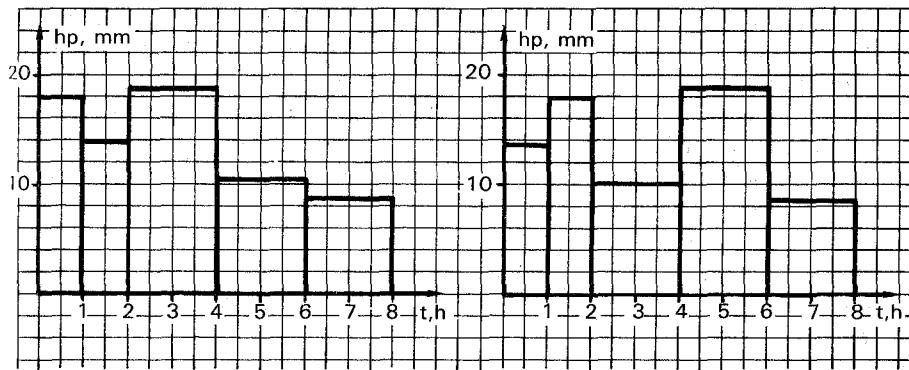


Figura 6.33

6.3.7 Curvas intensidad-duración-período de retorno (*i-d-T*)

El grado óptimo de seguridad de una estructura depende, por un lado, de su costo y, por otro, del costo de las pérdidas asociadas con una falla. Por ejemplo, puede ser aceptable que un aeropuerto pequeño se inunde en promedio una vez cada dos o tres años, si el costo de su sistema de drenaje se compara con el de uno que sólo permite inundaciones una vez cada 50 años en promedio, o más aún, podría resultar totalmente incosteable un sistema de drenaje con el que se pudiera extraer cualquier cantidad de precipitación por grande que fuera, aun cuando tal drenaje fuera posible de construir.

Por otra parte, sería poco económico y poco ético aceptar un riesgo alto de falla del vertedor de una presa grande situada aguas arriba en una ciudad importante, pues esta falla tendría consecuencias desastrosas, mientras que en el ejemplo del aeropuerto una insuficiencia del drenaje no ocasionaría más que algunas molestias a los usuarios.

Sin embargo, al menos en lo que a la teoría estadística respecta, no es posible tener una seguridad del 100% de que no exista ninguna avenida cuyas dimensiones hagan insuficiente el vertedor de la presa, sino que sólo se puede hablar de aceptar un riesgo pequeño. La magnitud de este riesgo aceptable depende del balance entre el costo de la obra y el de los daños que se producirían al verificarce una falla, y para poder determinar cuál es el riesgo que se corre al proponer los parámetros de diseño de la obra, es necesario analizar estadísticamente los datos hidrológicos recabados en la zona en estudio.

Estos datos son fundamentalmente de dos tipos: escurrimientos y precipitaciones. Un análisis del primer tipo de datos tendría como resultado directo un parámetro de diseño, que es el gasto máximo, mientras que el segundo proporcionaría datos con los cuales sería necesario alimentar un modelo de la relación lluvia-escurrimiento, para obtener una avenida de diseño. En este capítulo se estudiará sólo parte del análisis estadístico de precipitaciones, que se refiere a las curvas intensidad-duración-período de retorno, y todo lo referente a escurrimientos se tratará con amplitud en el capítulo 9, donde también se hará una revisión más profunda de los conceptos de probabilidad y estadística aplicables a la hidrología. A continuación se hace solamente un recordatorio de algunos de dichos conceptos.

6.3.7.1 Algunos conceptos de probabilidad y estadística

Probabilidad. Si un experimento tiene n resultados posibles y mutuamente excluyentes y si de ellos n_a resultados tienen un atributo a , entonces la probabilidad de que ocurra un evento A con el atributo a es:

$$P(A) = \frac{n_a}{n} \quad (6.43)$$

Por ejemplo, el experimento puede llamarse “tiro de un dado” u “ocurrencia de una tormenta” y el atributo a puede ser “el número que sale del tiro del dado es 2”, o bien “la altura de precipitación total es mayor o igual que 500 mm”.

Período de retorno. Sea A el evento “el número que sale del tiro del dado es 2” y B el evento “la altura máxima de precipitación en 24 h en cualquier año es de 500 mm”. Nótese que en el experimento “tiro de un dado” es posible hablar de resultados que tienen un valor numérico *exacto*, como 1, 2, etc., y las probabilidades asociadas a estos resultados son diferentes de cero ($1/6$ en cada caso). Es claro, sin embargo, que en el experimento “ocurrencia de una tormenta”, la probabilidad de que el resultado tome un valor *exacto*, como 500 mm, es nula. En el último caso es necesario hablar más bien de *intervalos*, como por ejemplo que la precipitación mencionada tome un valor de 500 mm o *mayor*, de 500 mm o *menor* o que esté en el intervalo de 300 a 500 mm.

El número de años en que, *en promedio*, se presenta un evento como el B , se llama *periodo de retorno*, *intervalo de recurrencia* o simplemente *frecuencia* y se acostumbra denotarlo con T .

Así, por ejemplo, el período de retorno de la ocurrencia del número dos en el tiro de un dado es el número de tiros en que, en promedio, el dos sale una vez; en este caso T es igual a 6 tiros. Del mismo modo, se dice que “el

periodo de retorno de la precipitación máxima en 24 h de 500 mm es de 25 años” cuando, *en promedio*, se presenta una precipitación de esa magnitud o *mayor* una vez cada 25 años. Nótese que esto no significa que dicha precipitación se presente exactamente una vez cada 25 años, de la misma manera que el dos no sale exactamente una vez cada seis tiros del dado.

De acuerdo con la definición, la probabilidad de que en cualquier tiro del dado salga un dos es $P(2) = 1/6$; entonces se tiene la siguiente relación entre probabilidad y período de retorno:

$$P(A) \cdot T = 1 \quad (6.44)$$

es decir:

$$T = \frac{1}{P} \quad (6.45)$$

donde T y P se refieren a un evento cualquiera A .

La misma relación vale en el caso de la precipitación máxima en 24 h:

$$T = \frac{1}{P(hp \geq 500 \text{ mm})}$$

esto es, el período de retorno de la precipitación máxima en 24 h de 500 mm es el inverso de que esta precipitación sea igualada o excedida en un año cualquiera.

Obviamente, $P(hp \leq 500 \text{ mm}) = 1 - P(hp \geq 500 \text{ mm})$ y, entonces,

$$P(hp \leq 500 \text{ mm}) = 1 - \frac{1}{T}$$

Usualmente, cuando se tienen datos de un cierto período, y se desea aplicar algún método estadístico para extraer dichos datos a períodos de retorno mayores al de las mediciones, es necesario asignar un valor de T a cada dato registrado. Por las razones que se expondrán en el capítulo 9, conviene usar la siguiente expresión para asignar períodos de retorno a una serie de datos (ver ecuación 9.30):

$$T = \frac{n + 1}{m} \quad (6.46)$$

donde m = número de orden en una lista de mayor a menor de los datos y n = número de datos.

Riesgo. Si P es la probabilidad de que ocurra un evento en cualquier año,

$$P = \frac{1}{T}$$

entonces la probabilidad de que dicho evento *no* ocurra en un año cualquiera es:

$$\bar{P} = 1 - \frac{1}{T}$$

Si se supone que la no ocurrencia de un evento en un año cualquiera es independiente de la no ocurrencia del mismo en los años anteriores y posteriores, entonces la probabilidad de que el evento no ocurra en n años sucesivos es:

$$\underbrace{\bar{P} \bar{P} \bar{P} \dots \bar{P}}_{n \text{ factores}} = \bar{P}^n = \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n$$

y, por lo tanto, la probabilidad de que el evento ocurra al menos una vez en n años sucesivos es:

$$R = 1 - \bar{P}^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n \quad (6.47)$$

R es llamada *riesgo* en la teoría probabilística. Con este parámetro es posible determinar cuáles son las implicaciones de seleccionar un periodo de retorno dado para una obra que tiene una vida útil de n años.

Ejemplo 6.7. Determinar el riesgo de falla de una obra que tiene una vida útil de 10 años si se diseña para un periodo de retorno de 10 años.

Solución

En este caso, $T = 10$ años y $n = 10$ años. Sustituyendo en la ecuación 6.47:

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10} = 0.651$$

El riesgo es del 65.1%, es decir, se tiene una probabilidad del 65.1% de que la obra falle durante su vida útil.

6.3.7.2 Métodos para la determinación de las curvas i - d - T

Existen básicamente dos métodos con los que se puede determinar la relación entre las variables i , d y T para un sitio dado.

El primero, llamado de *intensidad-periodo de retorno*, relaciona estas dos variables para cada duración por separado mediante alguna de las funciones de distribución de probabilidad usadas en hidrología, que se estudiarán con detalle en el capítulo 9. El segundo método relaciona simultáneamente las tres variables en una familia de curvas cuya ecuación es:

$$i = \frac{k T^m}{(d + c)^n} \quad (6.48)$$

donde k , m , n y c son constantes que se calculan mediante un análisis de *correlación lineal múltiple* (véase apéndice B).

Si se toman logaritmos de la ecuación 6.48 se obtiene:

$$\log i = \log k + m \log T - n \log (d + c)$$

o bien:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad (6.49)$$

donde:

$$\begin{aligned} y &= \log i, a_0 = \log k, a_1 = m, x_1 = \log T, \\ a_2 &= -n, x_2 = \log (d + c) \end{aligned}$$

La ecuación 6.49 es la de una familia de líneas rectas de pendiente a_2 , ordenada al origen a_0 y espacioamiento a_1 (véase figura 6.34).

Si los datos registrados de i , d y T se dibujan en papel logarítmico (véase figura 6.34), usualmente se agrupan en torno a líneas rectas. A veces las líneas resultan ligeramente curvas, lo que se puede corregir agregando a las duraciones un valor constante c , o bien, en algunos casos, cuando la pendiente de las líneas varía mucho, dividiendo la línea para cada periodo de retorno en dos rectas. Si los datos se agrupan lo suficiente en torno a líneas rectas, el valor de c puede tomarse como cero.

Al hacer un ajuste de correlación lineal múltiple de una serie de tres tipos de datos, se obtiene un sistema de ecuaciones como el siguiente (ver apéndice B y referencia 6.9):

$$\left. \begin{aligned} \Sigma y &= N a_0 + a_1 \Sigma x_1 + a_2 \Sigma x_2 \\ \Sigma (x_1 y) &= a_0 \Sigma x_1 + a_1 \Sigma (x_1^2) + a_2 \Sigma (x_1 x_2) \\ \Sigma (x_2 y) &= a_0 \Sigma x_2 + a_1 \Sigma (x_1 x_2) + a_2 \Sigma (x_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

donde N es el número de datos y las incógnitas son a_0 , a_1 y a_2 ; x_1 , x_2 y y son, respectivamente, los logaritmos del periodo de retorno, la duración (con el valor de c agregado de ser necesario) y la intensidad, obtenidos de un registro de precipitación. Una vez calculados los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 es posible valuar los parámetros k , m y n de la ecuación 6.48.

Tabla 6.11

fecha			duración, minutos					
año	mes	día	5	10	20	45	80	120
1954	oct.	5	—	—	—	10.5	12.8	14.2
	oct.	8	8.0	9.0	9.3	—	—	—
1955	jul.	8	8.0	8.0	—	—	—	—
	nov.	2	—	8.0	14.5	20.5	34.0	48.0
1956	may.	15	12.5	15.5	—	20.0	24.8	25.5
1957	sep.	21	7.5	11.0	—	14.3	19.0	25.7
1958			SIN	DATOS	—	—	—	—
1959	jun.	14	5.7	—	9.2	10.0	15.2	15.6
1960	ago.	13	—	6.8	—	—	—	—
1961	ago.	11	9.8	11.7	18.0	20.6	21.1	22.6
1962	jul.	10	7.1	7.1	7.1	7.1	7.1	7.1
1963	sep.	10	13.5	18.5	20.7	38.5	60.0	80.0
1964	may.	17	8.0	10.0	11.5	—	—	—
1964	jun.	16	—	—	—	20.3	23.1	30.0
1964	may.	31	10.0	17.5	17.7	18.7	18.7	19.8

Alturas de precipitación en mm

Ejemplo 6.8. En una estación pluviográfica se han registrado las alturas de precipitación máxima en mm para diferentes duraciones mostradas en la tabla 6.11. Determinar las curvas intensidad-duración-período de retorno.

La Secretaría de Agricultura y Recursos Hídricos y otros organismos cuentan con tablas similares a la 6.11 para un gran número de estaciones en la República Mexicana. En caso de que no se cuente con esta tabla para la estación de interés, es necesario recurrir a los registros del pluviógrafo y, para cada año de registro, escoger la máxima altura de precipitación registrada para cada duración seleccionada. Normalmente, estas alturas máximas de precipitación corresponden a sólo una o dos de las tormentas máximas del año. Por otra parte, siempre es conveniente manejar estaciones que cuenten con registros de más de 25 años para que el análisis sea confiable. Aquí se hará sólo con 10 años a manera de ejemplo.

El primer paso es transformar las alturas de precipitación de la tabla 6.11 a intensidades dividiéndolas entre sus respectivas duraciones, como se muestra en la tabla 6.12.

Una vez transformados los datos a intensidades, es necesario asignar a cada uno un período de retorno. En la tabla 6.13 se han ordenado los datos

Tabla 6.12

AÑO	Duración, minutos					
	5	10	20	45	80	120
1954	96	54	28	14	10	7
1955	96	48	44	27	26	24
1956	150	93	60	33	19	13
1957	90	66	43	25	19	15
1959	68	41	28	13	11	8
1960	118	70	54	27	16	11
1961	85	43	21	9	5	4
1962	162	111	62	51	45	40
1963	96	60	35	27	17	15
1964	120	105	53	25	14	10

Intensidades en mm/h

para cada duración de mayor a menor y se les ha asignado un período de retorno de acuerdo con la ecuación 6.46.

En la figura 6.34 se muestran los puntos correspondientes a los datos de la tabla 6.10. Como se puede observar, los datos tienden a agruparse en torno

Tabla 6.13

Número de orden	T años	Duración, minutos					
		5	10	20	45	80	120
1	11.00	162	111	62	51	45	40
2	5.50	150	105	60	33	26	24
3	3.67	120	93	54	27	19	15
4	2.75	118	70	53	27	19	15
5	2.20	96	66	44	27	17	13
6	1.83	96	60	43	25	16	11
7	1.57	96	54	35	25	14	10
8	1.38	90	48	28	14	11	8
9	1.22	85	43	28	13	10	7
10	1.10	68	41	21	9	5	4

Intensidades en mm/h

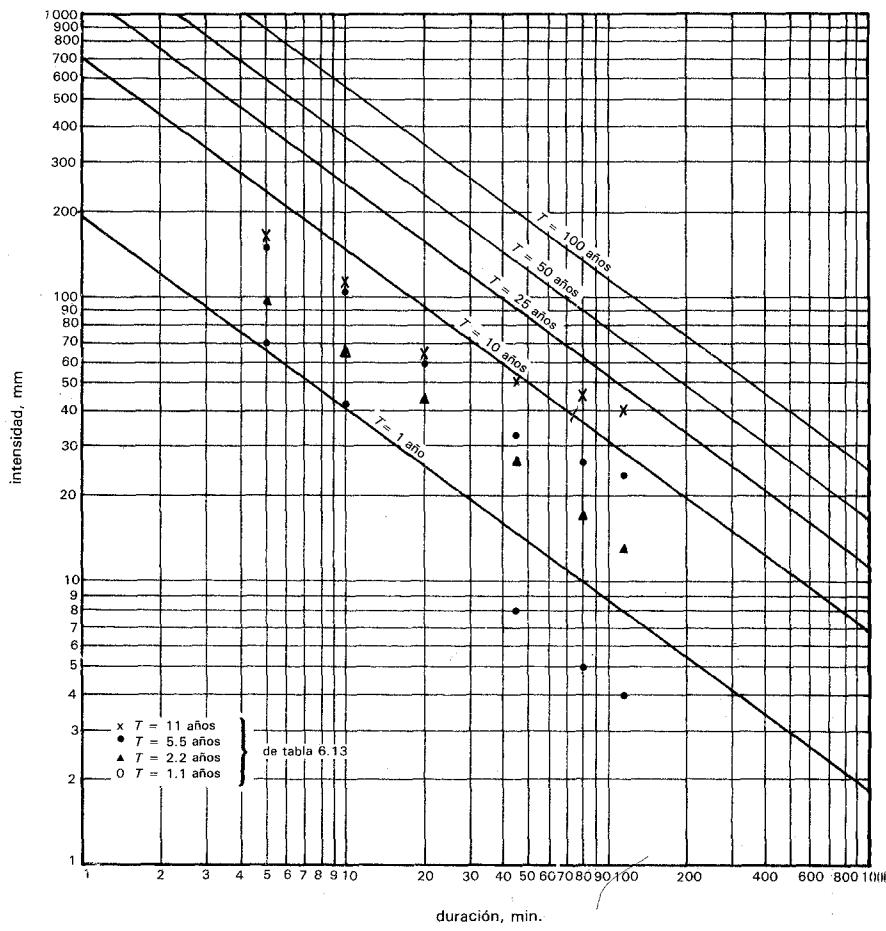


Figura 6.34

a líneas rectas, salvo para períodos de retorno de 11 y 5.5 años, por lo que en este ejemplo se tomará $c = 0$.

En la tabla 6.14 se han calculado los parámetros x_2 , x_1 y y , así como sus productos y cuadrados, y las sumas indicadas en la ecuación 6.50.

Sustituyendo los resultados de la tabla 6.14 en el sistema de ecuaciones 6.50 resulta:

$$\begin{aligned} 60 a_0 + 22.968 a_1 + 86.350 a_2 &= 90.698 \\ 22.968 a_0 + 14.304 a_1 + 33.055 a_2 &= 37.864 \\ 86.350 a_0 + 33.055 a_1 + 138.570 a_2 &= 120.758 \end{aligned}$$

Tabla 6.14

x_2	x_1	y	$x_1 y$	$x_2 y$	x_1^2	x_2^2	$x_1 x_2$
0.699	1.041	2.210	2.301	1.545	1.084	0.489	0.728
0.699	0.740	2.176	1.610	1.521	0.548	0.489	0.517
0.699	0.565	2.079	1.175	1.453	0.319	0.489	0.395
0.699	0.439	2.072	0.910	1.448	0.193	0.489	0.307
0.699	0.342	1.982	0.678	1.385	0.117	0.489	0.239
0.699	0.238	1.982	0.472	1.385	0.057	0.489	0.166
0.699	0.196	1.982	0.388	1.385	0.038	0.489	0.137
0.699	0.140	1.954	0.274	1.366	0.020	0.489	0.098
0.699	0.086	1.929	0.166	1.348	0.007	0.489	0.007
0.699	0.041	1.833	0.075	1.281	0.002	0.489	0.060
1.000	1.041	2.045	2.129	2.045	1.084	1.000	1.041
1.000	0.740	2.021	1.496	2.021	0.584	1.000	0.740
1.000	0.565	1.969	1.112	1.969	0.319	1.000	0.565
1.000	0.439	1.845	0.810	1.845	0.193	1.000	0.439
1.000	0.342	1.820	0.622	1.820	0.117	1.000	0.342
1.000	0.238	1.778	0.423	1.778	0.057	1.000	0.238
1.000	0.196	1.732	0.339	1.732	0.038	1.000	0.196
1.000	0.140	1.681	0.235	1.681	0.020	1.000	0.140
1.000	0.086	1.633	0.140	1.633	0.007	1.000	0.086
1.000	0.041	1.613	0.066	1.613	0.002	1.000	0.041
1.301	1.041	1.792	1.865	2.331	1.084	1.693	1.354
1.301	0.740	1.778	1.316	2.313	0.548	1.693	0.963
1.301	0.565	1.732	0.979	2.253	0.319	1.693	0.753
1.301	0.439	1.724	0.757	2.243	0.193	1.693	0.571
1.301	0.342	1.643	0.562	2.138	0.117	1.693	0.445
1.301	0.238	1.633	0.389	2.125	0.057	1.693	0.310
1.301	0.196	1.544	0.303	2.009	0.038	1.693	0.255
1.301	0.140	1.447	0.203	1.883	0.020	1.693	0.182
1.301	0.086	1.447	0.124	1.883	0.007	1.693	0.112
1.301	0.041	1.301	0.053	1.693	0.002	1.693	0.053
1.653	1.041	1.708	1.778	2.823	1.084	2.732	1.721
1.653	0.740	1.519	1.124	2.511	0.548	2.732	1.223
1.653	0.565	1.431	0.809	2.365	0.319	2.732	0.134
1.653	0.439	1.431	0.628	2.365	0.193	2.732	0.726
1.653	0.342	1.431	0.489	2.365	0.117	2.732	0.565
1.653	0.238	1.398	0.333	2.311	0.057	2.732	0.813
1.653	0.196	1.398	0.274	2.311	0.038	2.732	0.224
1.653	0.140	1.146	0.160	1.894	0.020	2.732	0.131
1.653	0.086	1.114	0.096	1.891	0.007	2.732	0.142
1.653	0.041	0.954	0.039	1.577	0.002	2.732	0.068
1.903	1.041	1.653	1.721	3.146	1.084	3.621	1.981
1.903	0.740	1.415	1.047	2.693	0.548	3.621	1.408
1.903	0.565	1.279	0.723	2.434	0.319	3.621	1.075
1.903	0.439	1.279	0.561	2.434	0.193	3.621	0.835
1.903	0.342	1.230	0.121	2.341	0.117	3.621	0.651

Tabla 6.14 (Continuación).

x_2	x_1	y	x_1y	x_2y	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	
1.903	0.238	1.204	0.287	2.291	0.057	3.621	0.453	
1.903	0.196	1.146	0.225	2.181	0.038	3.621	0.373	
1.903	0.140	1.041	0.146	1.981	0.020	3.621	0.266	
1.903	0.086	1.000	0.086	1.903	0.007	3.621	0.164	
1.903	0.041	0.699	0.029	1.330	0.002	3.621	0.078	
2.079	1.041	1.602	1.668	3.331	1.084	4.322	2.164	
2.079	0.740	1.380	1.021	2.869	0.548	4.322	1.538	
2.079	0.565	1.176	0.664	2.445	0.319	4.322	1.175	
2.079	0.439	1.176	0.516	2.445	0.193	4.322	0.013	
2.079	0.342	1.114	0.381	2.316	0.117	4.322	0.711	
2.079	0.238	1.041	0.248	2.164	0.057	4.322	0.495	
2.079	0.196	1.000	0.196	2.079	0.038	4.322	0.407	
2.079	0.140	0.903	0.126	1.877	0.020	4.322	0.291	
2.079	0.086	0.845	0.073	1.757	0.007	4.322	0.179	
2.079	0.041	0.602	0.025	1.252	0.002	4.322	0.085	
Σ	86.350	22.968	90.698	37.864	120.758	14.304	138.57	33.055

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene:

$$a_0 = 2.277; \quad a_1 = 0.571; \quad a_2 = -0.68$$

y los valores de los parámetros de la ecuación 6.48 son:

$$\begin{aligned} K &= 10^{2.277} &= 189.23 \\ m &= & 0.571 \\ n &= & 0.68 \end{aligned}$$

por lo que la ecuación de las curvas $i-d-T$ es:

$$i = \frac{189.23 T^{0.57}}{d^{0.68}} \quad (6.51)$$

(d en min, T en años, i en mm/h).

En la figura 6.34 se muestran las curvas dibujadas según la ecuación 6.51.

Cada una de las rectas de la figura 6.34, para un periodo de retorno dado, se interpreta como una curva masa de precipitación. Por ejemplo, para un periodo de retorno $T = 10$ años, resulta de la ecuación 6.51

$$i = 703.06 d^{-0.68} \quad (6.52)$$

Multiplicando la ecuación 6.52 por la duración d se obtiene la altura de precipitación:

$$hp = i \frac{d}{60} = 11.72 d^{0.32} \quad (6.53)$$

En la figura 6.35 se encuentra graficada la ecuación 6.53 en forma de curva masa.

De una gráfica como la de la figura 6.35 es posible obtener un hietograma, mismo que puede usarse como tormenta de diseño para alimentar a algún modelo de la relación lluvia-escorrentamiento, como se verá en el capítulo 8.

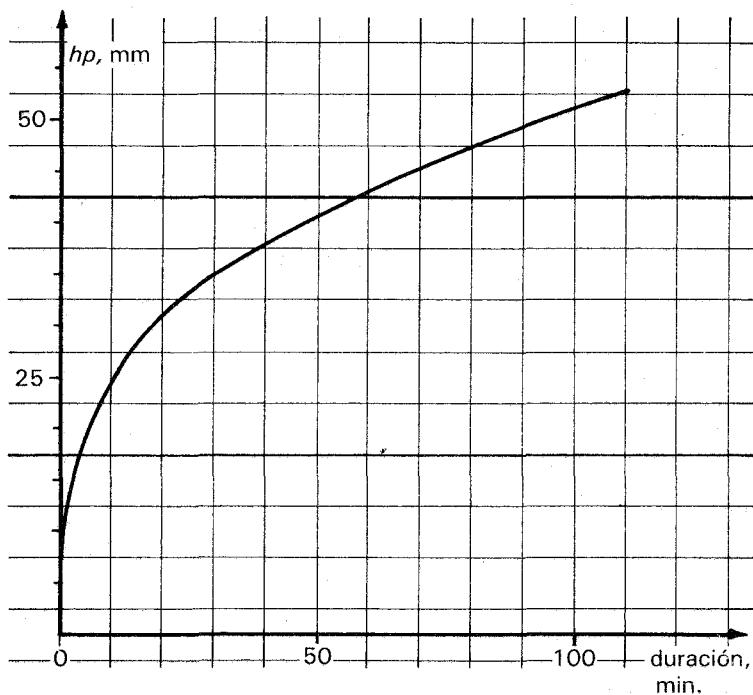


Figura 6.35

6.3.8 Comentario final

Las características más significativas de la precipitación, desde el punto de vista de la ingeniería hidrológica, pueden resumirse en cuatro: su altura o intensidad, su distribución en el espacio, su distribución en el tiempo y su frecuencia o probabilidad de ocurrencia. Las primeras dos partes de este subcapítulo ligan a la altura de precipitación con la distribución en el espacio; en los apartados 6.3.5 y 6.3.6, a su vez, se han correlacionado estas dos características con la distribución en el tiempo, y en el apartado 6.3.7 se toman en cuenta la intensidad, la distribución en el tiempo y la frecuencia.

Los métodos anteriores estudian el problema desde diversos puntos de vista, los cuales deben ser tomados en cuenta en cualquier estudio hidrológico. Las conexiones que se deben establecer entre estos puntos y el peso relativo que se debe dar a cada uno para llegar a un resultado concreto, dependen de la cantidad y calidad de los datos disponibles y, en gran medida, del criterio del hidrólogo.

Por ello, difícilmente se pueden proporcionar aquí criterios generales en cuanto a la aplicación de los métodos estudiados. Cada problema hidrológico es único, y el papel que desempeña el juicio ingenieril es, en todos los casos, más importante que la "precisión" que se puede lograr con cada método.

BIBLIOGRAFÍA

- 6.1 Wiesner, C.J. *Hidrometeorology*. Chapman & Hall. Ltd. Great Britain, 1970.
- 6.2 Biblioteca Salvat de Grandes Temas. *La atmósfera y la predicción del tiempo*. Salvat Editores. Barcelona, 1973.
- 6.3 Callen, H.B. *Thermodynamics*. John Wiley. New York, 1960.
- 6.4 Chow, V.T. (ed.) *Handbook of Applied Hydrology*. McGraw-Hill, 1964.
- 6.5 Thiessen, A.H. "Precipitation for large areas" *Monthly Weather Rev.*, vol. 39, pp. 1082, 1084, July, 1911.
- 6.6 Domínguez, R. "Red Hidrológica. Elementos Básicos", Documentación del Plan Nacional Hidráulico. México, 1976.
- 6.7 Langbein, W.B. "Stream Gaging Networks," Publ. No. 38, *Int. Assoc. for Sci. Hydrol.* Roma, 1954.
- 6.8 Domínguez, M.R., Lozoya, C.J., "Tormenta de Diseño". Capítulo A.1.7 del *Manual de Diseño de Obras Civiles*. CFE. México, 1981.
- 6.9 Viessman, W., Knapp, J.W., Lewis, G.L., Harbaugh, T.E. *Introduction to Hydrology*. Harper & Row, 1977.
- 6.10 Collado, M.J., Domínguez, M.R. "Predicción de avenidas", capítulo A.1.11 del *Manual de Diseño de Obras Civiles*, CFE, México, 1980.

7.1 DEFINICIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE INFILTRACIÓN

7.1.1 Conceptos generales

Infiltración. Se define como el movimiento del agua, a través de la superficie del suelo y hacia adentro del mismo, producido por la acción de las fuerzas gravitacionales y capilares.

La diferencia entre el volumen de agua que llueve en una cuenca y el que escurre por su salida recibe el nombre genérico de *pérdidas*. En general, las pérdidas están constituidas por la intercepción en el follaje de las plantas y en los techos de las construcciones, la retención en depresiones o charcos (que posteriormente se evapora o se infiltra), la evaporación y la infiltración. Además de que en la práctica es difícil separar estos cuatro componentes, la porción más considerable de las pérdidas está dada por la infiltración, por lo que es costumbre calcularlas conjuntamente bajo este nombre.

La infiltración juega un papel de primer orden en la relación lluvia-escorrimiento y, por lo tanto, en los problemas de diseño y predicción asociados a la dimensión y operación de obras hidráulicas. En general, el volumen de infiltración es varias veces mayor que el de escorrimiento durante una tormenta dada, especialmente en cuencas con un grado de urbanización relativamente bajo. Sin embargo, la infiltración recibe poca atención por parte de los ingenieros proyectistas, quizás por la falta de herramientas adecuadas para su tratamiento. Por ello, en este capítulo se hará una revisión de los métodos existentes para el cálculo de la infiltración más completa que lo usual.

7.1.2 Descripción del proceso de infiltración

El proceso de infiltración puede describirse de la siguiente manera:

Considérese un área de suelo suficientemente pequeña, de modo que sus características (tipo de suelo, cobertura vegetal, etc.), así como la intensidad de la lluvia en el espacio puedan considerarse uniformes, aunque la última cambie en el tiempo.

Supóngase que, al inicio de una tormenta, el suelo está de tal manera seco que la cantidad de agua que puede absorber en la unidad de tiempo (es decir, su *capacidad de infiltración*) es mayor que la intensidad de la lluvia en esos primeros instantes de la tormenta. Bajo estas condiciones, se infiltraría toda la lluvia, es decir:

$$\text{si } i < f_p, \quad f = i \quad (7.1)$$

donde

f = infiltración, expresada como lámina por unidad de tiempo, por ejemplo, mm/h.

f_p = capacidad de infiltración, en las mismas unidades.

i = intensidad de la lluvia.

En esta parte del proceso las fuerzas producidas por la capilaridad predominan sobre las gravitatorias.

Al avanzar el tiempo, si la lluvia es *suficientemente intensa*,* el contenido de humedad del suelo aumenta hasta que su superficie alcanza la saturación. En este momento se empiezan a llenar las depresiones del terreno, es decir, se originan *charcos* y comienza a producir flujo sobre la superficie. A este instante se le llama *tiempo de encharcamiento* y se denota como t_p .

Después del tiempo de encharcamiento, si la lluvia sigue siendo intensa, las fuerzas capilares pierden importancia frente a las gravitatorias, pues el contenido de humedad del suelo aumenta y la capacidad de infiltración disminuye con el tiempo. Además, bajo estas condiciones, la infiltración se hace independiente de la variación en el tiempo de la intensidad de la lluvia, en tanto que ésta sea mayor que la capacidad de transmisión del suelo, de manera que:

$$\text{si } i > f_p, \quad t > t_p, \quad f = f_p \quad (7.2)$$

donde f_p decrece con el tiempo. Nótese que las dos primeras desigualdades de 7.2 son interdependientes.

*Este término se aclarará más adelante.

Bajo las condiciones anteriores, la capa saturada —que en el tiempo de encharcamiento era muy delgada y estaba situada en la superficie del suelo— se ensancha a medida que su límite inferior, denominado *frente húmedo*, baja. Entonces, dado que cada vez una mayor parte del suelo está saturada, las fuerzas capilares pierden importancia paulatinamente hasta que llega un momento, teóricamente en $t = \infty$, en que, el estar todo el medio saturado, el movimiento del agua se produce sólo por la acción de la gravedad y la capacidad de infiltración se hace constante.

La descripción anterior es, de rigor, válida solamente para una columna de suelo homogénea donde el nivel freático esté muy profundo; sin embargo, se verifica con una precisión aceptable en la mayoría de los casos prácticos.

Si después del tiempo de encharcamiento la tormenta entra en un periodo de calma, es decir, su intensidad disminuye hasta hacerse menor que la capacidad de infiltración, el tirante de agua existente sobre la superficie del suelo, de haberlo, disminuye hasta desaparecer y el agua contenida en los charcos también se infiltra, y en menor grado se evapora.

Cuando ya no hay agua sobre la superficie del terreno, el contenido de humedad de las capas de suelo cercanas al frente húmedo se difunde, haciendo que dicho frente avance hacia arriba hasta que la superficie deja de estar saturada.

Posteriormente, la lluvia puede volver a intensificarse y alcanzar otro tiempo de encharcamiento repitiéndose todo el ciclo descrito.

7.1.3 Factores que afectan la capacidad de infiltración

La forma precisa en que se realiza el proceso descrito depende de un gran número de factores, entre los que destacan:

- a) Textura del suelo.
- b) Contenido de humedad inicial.
- c) Contenido de humedad de saturación.
- d) Cobertura vegetal.
- e) Uso del suelo.
- f) Aire atrapado.
- g) Lavado de material fino.
- h) Compactación.
- i) Temperatura, sus cambios y diferencias.

7.2 MÉTODOS EMPÍRICOS

Cuando se tienen mediciones simultáneas de lluvia y volumen de escorrentamiento

en una cuenca, las pérdidas se pueden calcular, de acuerdo con su definición (véase apartado 7.1.1), como:

$$V_p = V_{II} - V_{ed} \quad (7.3)$$

donde

V_p = volumen de pérdidas.

V_{II} = volumen de lluvia.

V_{ed} = volumen de escurrimiento directo.

Si ambos miembros de la ecuación 7.3 se dividen entre el área de la cuenca se obtiene:

$$F = I - R \quad (7.4)$$

donde

F = infiltración o lámina de pérdidas acumulada.

I = altura de lluvia acumulada.

R = escurrimiento directo acumulado.

y si a su vez la ecuación 7.4 se deriva con respecto al tiempo se tiene:

$$f = i - r \quad (7.5)$$

donde r es la lámina de escurrimiento directo por unidad de tiempo.

Para la aplicación de los métodos que simulan la relación lluvia-escurrimiento (capítulo 8) es necesario conocer la variación en el tiempo de r . Para ello se usan comúnmente dos tipos de criterios en cuencas aforadas: el de la capacidad de infiltración media y el del coeficiente de escurrimiento.

7.2.1 Criterio de la capacidad de infiltración media

Este criterio supone que la capacidad de infiltración es constante durante toda la tormenta. A esta capacidad de infiltración se le llama índice de infiltración media ϕ . Cuando se tiene un registro simultáneo de precipitación y escurrimiento de una tormenta, el índice de infiltración media se calcula de la siguiente manera:

a) Del hidrograma de la avenida se separa el gasto base y se calcula el volumen de escurrimiento directo.

b) Se calcula la altura de lluvia en exceso o efectiva hp_e como el volumen de escurrimiento directo dividido entre el área de la cuenca:

$$hp_e = \frac{V_{ed}}{A_c} \quad (7.6)$$

c) Se calcula el índice de infiltración media ϕ trazando una línea horizontal en el hietograma de la tormenta, de tal manera que la suma de las alturas de precipitación que queden arriba de esa línea sea igual a hp_e . El índice de infiltración media ϕ será entonces igual a la altura de precipitación correspondiente a la línea horizontal dividida entre el intervalo de tiempo Δt que dure cada barra del hietograma.

Ejemplo 7.1. En una cuenca de 36 km^2 se midieron el hietograma y el hidrograma mostrados en la figura 7.1 a y b, respectivamente. Determinar el índice de infiltración media que se tuvo durante la tormenta.

a) Separación del gasto base y cálculo del volumen de escurrimiento directo.

De la figura 7.1b se observa que, en este caso, la línea de separación entre gasto base y gasto directo es una recta horizontal. El volumen de escurrimiento directo es entonces:

$$V_{ed} = \frac{10 \times 3600 \times 7}{2} = 126000 \text{ m}^3$$

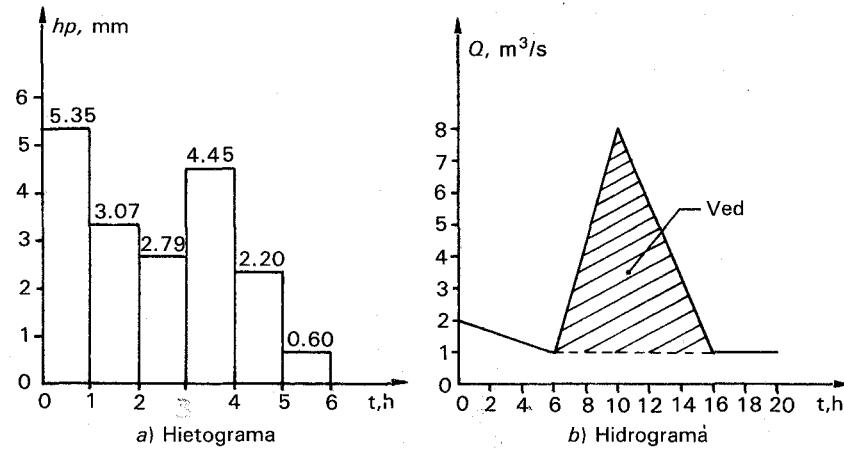


Figura 7.1

b) Cálculo de la lluvia efectiva.

De la ecuación 7.6, la altura de lluvia efectiva es:

$$hp_e = \frac{126\,000}{36 \times 10^6} = 0.0035 \text{ m} = 3.5 \text{ mm}$$

c) Cálculo de ϕ .

En la tabla 7.1 se hacen algunos tanteos para encontrar el valor correcto de ϕ .

En la tabla 7.1, hp_{ei} es la altura de precipitación en exceso correspondiente a la i -ésima barra del histograma. El índice de infiltración media es de 3.15 mm/h.

Nótese que si el intervalo de tiempo que duran las barras del histograma de la figura 7.1a hubiera sido de 2 h, ϕ sería de 3.15 mm/2 h o 1.575 mm/h y si $\Delta t = 0.5$ h, $\phi = 3.15 \text{ mm}/0.5 \text{ h} = 6.30 \text{ mm/h}$.

7.2.2 Criterio del coeficiente de escurrimiento

Con este criterio se supone que las pérdidas son proporcionales a la intensidad de la lluvia, esto es:

$$f = (1 - Ce)i, \text{ es decir, } r = Cei \quad (7.7)$$

donde la constante de proporcionalidad Ce , sin unidades, se denomina *coeficiente de escurrimiento*. Otra manera de escribir la ecuación 7.7 es:

$$V_{ed} = Ce V_{II} \quad (7.8)$$

o bien:

$$Ce = \frac{V_{ed}}{V_{II}} \quad (7.9)$$

Tabla 7.1

ϕ mm/h	hp_{e1} mm	hp_{e2} mm	hp_{e3} mm	hp_{e4} mm	hp_{e5} mm	hp_{e6} mm	Σhp_{ei} mm
4	1.35	0	0	0.45	0	0	1.8 \neq 3.5
3	2.35	0.07	0	1.45	0	0	3.87 \neq 3.5
3.15	2.20	0	0	1.30	0	0	3.50 = 3.5

Ejemplo 7.2. Calcular el coeficiente de escurrimiento para el caso del ejemplo 7.1.

La altura total de precipitación es:

$$h_{pt} = 18.46 \text{ mm}$$

y el volumen llovido será entonces:

$$V_{II} = 18.46 \times 10^{-3} \times 36 \times 10^6 = 664\,560 \text{ m}^3$$

Por lo tanto, el coeficiente de escurrimiento es:

$$C_e = \frac{126\,000}{664\,560} = 0.19$$

Los cálculos de los ejemplos 7.1 y 7.2 se llevan a cabo cuando se tiene un registro de la precipitación y del escurrimiento para la tormenta en cuestión. Con frecuencia lo que se tiene es una *tormenta de diseño*, para la cual no existe un registro de escurrimiento. Existen varios métodos con los que se puede estimar el coeficiente de escurrimiento o el índice de infiltración media cuando se tienen registros simultáneos de lluvia y escurrimiento para tormentas anteriores. Enseguida se verá sólo uno de ellos.

7.2.3 Criterio del United States Soil Conservation Service (USSCS)

Según este criterio (referencia 7.1) la relación entre el coeficiente de escurrimiento y la altura de precipitación total de una tormenta está dada por:

$$C_e = \frac{(P - 0.2S)^2}{P^2 + 0.8SP} \quad (7.10)$$

donde P es la altura total de precipitación de la tormenta y S es un parámetro por determinar, con las mismas unidades de P .

El parámetro S se puede estimar si se conocen varias parejas de valores (P , Ce); el valor de S puede tomarse como el que hace que la variancia del error cometido al calcular Ce con la ecuación 7.10, con respecto al coeficiente de escurrimiento real, sea mínima.

Ejemplo 7.3. En una cuenca se han determinado las alturas de precipitación totales y los correspondientes coeficientes de escurrimiento mostrados en las columnas 1 y 2 de la tabla 7.2. Determinar el parámetro S de la ecuación 7.10 y calcular el coeficiente de escurrimiento para una tormenta, cuya altura de precipitación total es $P = 80$ mm.

Métodos empíricos

Solución

En las columnas 3, 6, 9 y 12 de la tabla 7.2 se han calculado los coeficientes de escurrimiento con la ecuación 7.10, suponiendo diferentes valores de S . En las columnas 4, 7, 10 y 13 se encuentran los errores cometidos en el cálculo de Ce con respecto a los coeficientes de escurrimiento reales, y en las columnas 5, 8, 11 y 14 se muestran los cálculos necesarios para determinar la variancia del error en cada caso.

En la figura 7.2 se ha dibujado la variancia, definida como:

$$Ve = \frac{1}{n} \Sigma (e - \bar{e})^2 \quad (7.11)$$

De la figura 7.2 se infiere que el valor más correcto de S , es decir, el que produce la mínima variancia del error, es $S = 30 \text{ mm}$. La ecuación 7.10, para este caso particular, es:

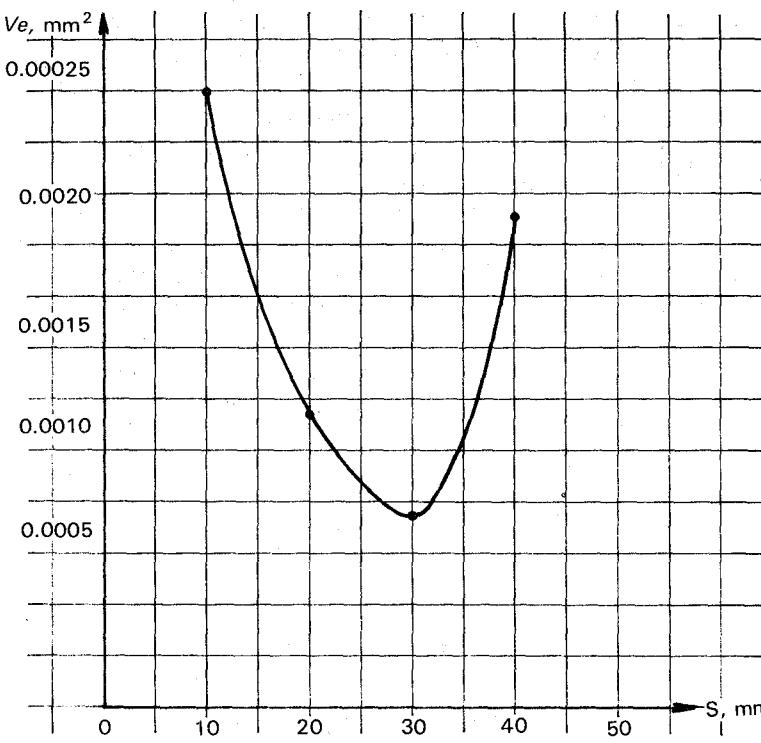


Tabla 7.2

$$C_e = \frac{(P-6)^2}{P^2 + 24P}$$

de manera que para una tormenta con $P = 80$ mm se tiene $C_e = 0.66$.

7.2.4 Criterio del índice de precipitación antecedente

Este criterio relaciona el índice de infiltración media ϕ con las condiciones de humedad del suelo y es útil para problemas de predicción de avenidas a corto plazo. Las condiciones de humedad del suelo se representan mediante el índice de precipitación antecedente IPA definido como:

$$IPA_{j+1} = K \cdot IPA_j + P_j \quad (7.12)$$

donde P es la precipitación total, K es una constante que toma en cuenta la disminución de la humedad con el tiempo, cuyo valor puede tomarse como de 0.85 para cálculos diarios, y el subíndice j indica el día en cuestión.

Si se tienen registros de P y ϕ para varias tormentas en la cuenca en estudio, y además se cuenta con las precipitaciones de algunos días anteriores a cada tormenta, es posible construir una gráfica de ϕ contra IPA , que tiene la forma mostrada en la figura 7.3. La función $IPA(\phi)$ se determina mediante un análisis de regresión (véase apéndice B).

Para formar una gráfica de esta naturaleza conviene seleccionar una o varias temporadas de lluvias del registro y suponer un valor inicial de IPA , por ejemplo de 10 mm. Es también conveniente escoger solamente las avenidas con un solo pico para evitar errores en la separación del gasto base y por lo tanto en el cálculo de ϕ .

Con la gráfica de IPA contra ϕ es factible estimar el valor posible del índice de infiltración media ϕ a corto plazo, conociendo únicamente la precipitación en los días anteriores.

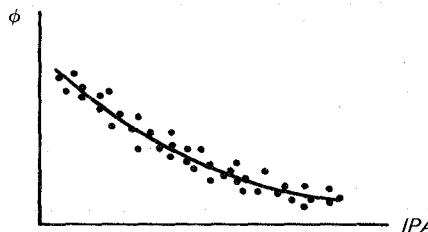


Figura 7.3

7.2.5 Método de los números de escorrentamiento

Todos los criterios antes mencionados requieren que la cuenca esté aforada, es decir, que se hayan medido gastos de salida al mismo tiempo que las precipitaciones. Dado que la mayor parte de las cuencas del país no están aforadas, con mucha frecuencia no se cuenta con estos datos, por lo que es necesario tener métodos con los que se pueda estimar la altura de lluvia efectiva a partir de la total y las características de la cuenca.

El U.S. Soil Conservation Service propone el siguiente método (referencia 7.1), llamado "de los números de escorrentamiento", que reúne las características mencionadas.

La altura de lluvia total P se relaciona con la altura de lluvia efectiva P_e mediante las curvas mostradas en la figura 7.4.

Estas curvas se pueden expresar algebraicamente mediante la ecuación (referencia 7.2):

$$P_e = \frac{\left[P - \frac{508}{N} + 5.08 \right]^2}{P + \frac{2032}{N} - 20.32} \quad (7.13)$$

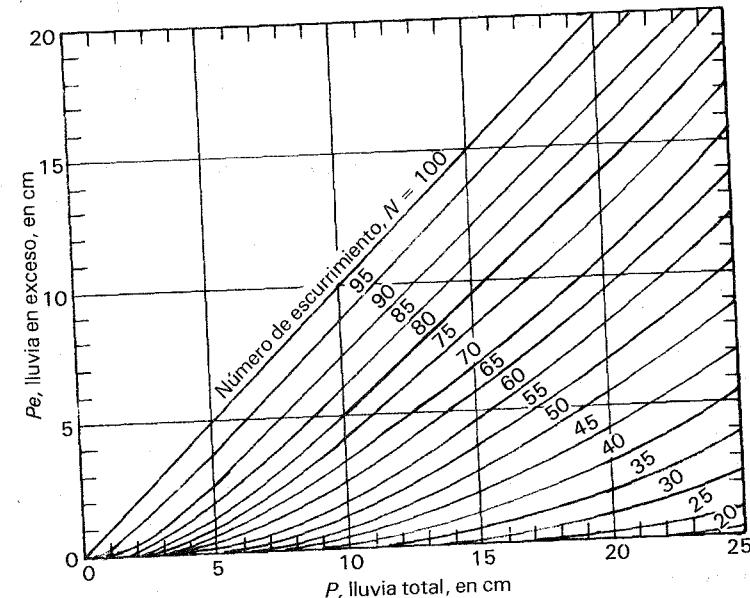


Figura 7.4

Tabla 7.3 Selección de N

Uso de la tierra y cobertura	Tratamiento del suelo	Pendiente del terreno, en %	Tipo de suelo			
			A	B	C	D
Sin cultivo	Surcos rectos	—	77	86	91	94
Cultivos en surco	Surcos rectos	> 1	72	81	88	91
	Surcos rectos	< 1	67	78	85	89
	Contorneo	> 1	70	79	84	88
	Contorneo	< 1	65	75	82	86
	Terrazas	> 1	66	74	80	82
	Terrazas	< 1	62	71	78	81
Cereales	Surcos rectos	> 1	65	76	84	88
	Surcos rectos	< 1	63	75	83	87
	Contorneo	> 1	63	74	82	85
	Contorneo	< 1	61	73	81	84
	Terrazas	> 1	61	72	79	82
	Terrazas	> 1	59	70	78	81
Leguminosas o praderas con rotación	Surcos rectos	> 1	66	77	85	89
	Surcos rectos	< 1	58	72	81	85
	Contorneo	> 1	64	75	83	85
	Contorneo	< 1	55	69	78	83
	Terrazas	> 1	63	73	80	83
	Terrazas	< 1	51	67	76	80
Pastizales	-----	> 1	68	79	86	89
	-----	< 1	39	61	74	80
	Contorneo	> 1	47	67	81	88
	Contorneo	< 1	6	35	70	79
Pradera permanente	-----	< 1	30	58	71	78
Bosques naturales	Muy ralo	—	56	75	86	91
	Ralo	—	46	68	78	84
	Normal	—	36	60	70	77
	Espeso	—	26	52	62	69
	Muy espeso	—	15	44	54	61
Caminos	De terracería	—	72	82	87	89
	Con superficie dura	—	74	84	90	92

Tabla 7.4

Tipo de suelo	Textura del suelo
A	Arenas con poco limo y arcilla; Suelos muy permeables.
B	Arenas finas y limos.
C	Arenas muy finas, limos, suelos con alto contenido de arcilla.
D	Arcillas en grandes cantidades; suelos poco profundos con subhorizontes de roca sana; suelos muy impermeables.

que resulta más práctica de usar que la gráfica 7.4, especialmente para valores de P pequeños. En la figura 7.4 y la ecuación 7.13, N es el "número de escurrimiento" cuyo valor depende del tipo de suelo, la cobertura vegetal, la pendiente del terreno y la precipitación antecedente, entre otros factores.

En la tabla 7.3 se muestran los valores de N para algunas condiciones. El tipo de suelo se estima tomando como guía la tabla 7.4. Para tomar en cuenta las condiciones iniciales de humedad del suelo, se hace una corrección al número de escurrimiento obtenido de la tabla 7.3, según la altura de precipitación acumulada cinco días antes de la fecha en cuestión, 11_5 , de la siguiente manera:

- a) Si $11_5 < 2.5$ cm, hacer corrección A.
- b) Si $2.5 < 11_5 < 5$ cm, no hacer corrección.
- c) Si $11_5 > 5$ cm, hacer la corrección B.

Las correcciones A y B mencionadas se muestran en la tabla 7.5.

Ejemplo 7.4. Una cuenca está formada en un 70% por bosques naturales normales y en un 30% por pastizales naturales con pendiente menor al 1%. El suelo de toda la cuenca está constituido por arenas muy finas con un alto contenido de arcillas.

Calcular el coeficiente de escurrimiento para una tormenta que tiene una altura total de precipitación de 50 mm, tomando en cuenta que durante los cinco días anteriores hubo una precipitación acumulada de 89 mm.

Tabla 7.5

<i>N</i>	<i>N con corrección A</i>	<i>N con corrección B</i>
0	0	0
10	4	22
20	9	37
30	15	50
40	22	60
50	31	70
60	40	78
70	51	85
80	63	91
90	78	96
100	100	100

Solución

De acuerdo con la tabla 7.4, el suelo es del tipo C. Según la tabla 7.3, los valores de *N* son, para el área boscosa y de pastizales respectivamente, de:

$$N_{70} = 70$$

$$N_{30} = 86$$

Un valor de *N* medio para la cuenca es:

$$\bar{N} = 0.7 \times 70 + 0.3 \times 86 = 75$$

Dado que la precipitación antecedente es mayor que 2.5 cm, el valor de *N* debe modificarse según la corrección B de la tabla 7.5.

El valor corregido de *N* es:

$$N_c = 88$$

Con este valor de *N_c* y con *P* = 5 cm, se obtiene, de la ecuación 7.13, o la figura 7.4, que la precipitación efectiva es:

$$P_e = \frac{\left[5 - \frac{508}{88} + 5.08 \right]^2}{5 + \frac{2032}{88} - 20.32} = 2.39 \text{ cm}$$

El coeficiente de escurrimiento es, según la ecuación 7.9:

$$C_e = \frac{V_{ed}}{V_{II}} = \frac{P_e Ac}{P Ac} = \frac{P_e}{P} = \frac{2.39}{5.00} = 0.48$$

7.2.6 Otros métodos

Se han hecho numerosos intentos por representar el proceso de infiltración de alguna fórmula más o menos empírica. La fórmula más conocida es tal vez la llamada de Horton, publicada por primera vez en 1921 (referencia 7.3) por Gardner y Widstoe y años después, en 1940, y de manera aparentemente independiente, por Horton (referencia 7.4):

$$f_p = f_c + (f_o - f_c) e^{-kt} \quad (7.14)$$

donde *f_p* es la capacidad de infiltración y *f_o*, *f_c* y *k* son constantes empíricas. La función representada por la ecuación 7.14 se ilustra en la figura 7.5.

Wilson (referencia 7.5) propone los valores de *f_o*, *f_c* y *k* que se muestran en la tabla 7.6 para algunos tipos de suelo.

Puede observarse que además de lo difícil que resulta encuadrar al suelo en cuestión en los tipos mencionados en la tabla, las variaciones en *f_c* son tan grandes que es muy probable cometer errores de consideración al escoger algún valor.

Kostiakov (referencia 7.6) en 1932 propuso la fórmula:

$$f_p = c n t^{n-1} \quad (7.15)$$

donde *c* y *n* son constantes empíricas. Hasta ahora no se han hecho intentos por correlacionar los valores de *c* y *n* con las características del suelo, humedad

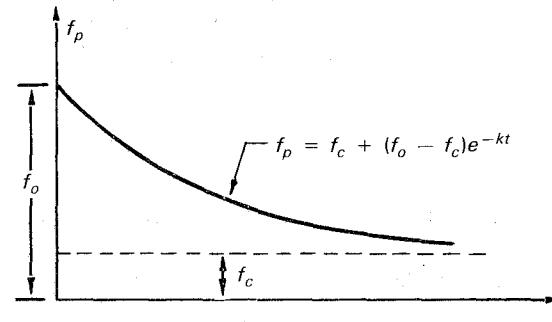


Figura 7.5

Tabla 7.6

Tipo de suelo		$f_o, \text{ mm/h}$	$f_c, \text{ mm/h}$	$k, \text{ min}^{-1}$
Agrícola normal	desnudo	280	6-220	1.6
	cubierto de vegetación	900	20-290	0.8
Turba		325	2-20	1.8
Areno-arcillosos	desnudo	210	2-25	2.0
	cubierto de vegetación	670	10-30	1.4

antecedente, etc. Sin embargo, desde un punto de vista teórico, n tendría que estar en el rango:

$$0 \leq n \leq 1 \quad (7.16)$$

para que la función 7.15 sea decreciente con el tiempo.

Philip, en 1957 (referencia 7.7), después de un elaborado desarrollo matemático, concluye que la relación entre la infiltración y el tiempo está dada por la serie:

$$f = \frac{1}{2} St^{-\frac{1}{2}} + (A_2 + K_i) + \frac{3}{2} A_3 t^{\frac{1}{2}} + 2 A_4 t + \dots \quad (7.17)$$

donde A_2, A_3, A_4, \dots son constantes empíricas, K_i es la conductividad hidráulica del suelo en las condiciones de humedad iniciales y S es un término llamado "sortividad", constante durante un evento dado, que representa la influencia de la capilaridad en el proceso. Este autor propone que, para fines de hidrología aplicada, se usen únicamente los dos primeros términos de la ecuación 7.17:

$$f = \frac{1}{2} St^{-\frac{1}{2}} + A \quad (7.18)$$

donde $A = A_2 + K_i$. Naturalmente, la infiltración acumulada es:

$$F = \int_0^t f dt = St^{\frac{1}{2}} + At \quad (7.19)$$

Si se compara la ecuación 7.18 con la 7.15 se concluye que:

Teoría de la infiltración

$$n \rightarrow 0.5 \text{ si } t \rightarrow 0 \quad (7.20a)$$

$$\text{y } n \rightarrow 1.0 \text{ si } t \rightarrow \infty \quad (7.20b)$$

y además:

$$c \rightarrow S \text{ si } t \rightarrow 0 \quad (7.21a)$$

$$c \rightarrow A \text{ si } t \rightarrow \infty \quad (7.21b)$$

esto es, c y n son funciones del tiempo y no constantes, como se propone en la derivación original de la ecuación 7.15.

Por otra parte, comparando la ecuación 7.18 con la 7.14 para grandes valores de t , puede inferirse que f_c en la fórmula de Horton tiene un significado similar al de A en la de Philip, esto es, una capacidad de infiltración constante para contenidos altos de humedad del suelo.

Independientemente del comportamiento matemático de las funciones anteriores, hace falta definir relaciones simples y precisas entre los parámetros que intervienen en dichas funciones, y las características del suelo y la cuenca.

Este problema puede solucionarse en parte mediante una teoría de la infiltración.

7.3 ELEMENTOS DE UNA TEORÍA DE LA INFILTRACIÓN

Sea un elemento de suelo como el que se muestra en la figura 7.6.

Si se considera un movimiento unidimensional del agua en el medio poroso (véase figura 7.6), según el principio de conservación de masa debe cumplirse que:

$$(q + \Delta q) \Delta x \Delta y - q \Delta x \Delta y = - \frac{\Delta \Theta}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (7.22)$$

donde q es el gasto de entrada por unidad de área, $q + \Delta q$ es el gasto de salida por unidad de área, Θ es el contenido de humedad en el elemento de suelo* y t es el tiempo. Simplificando la ecuación 7.22 y haciendo $\Delta t, \Delta z \rightarrow 0$ se obtiene la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0 \quad (7.23)$$

*Esto es, volumen de agua/volumen total de suelo.

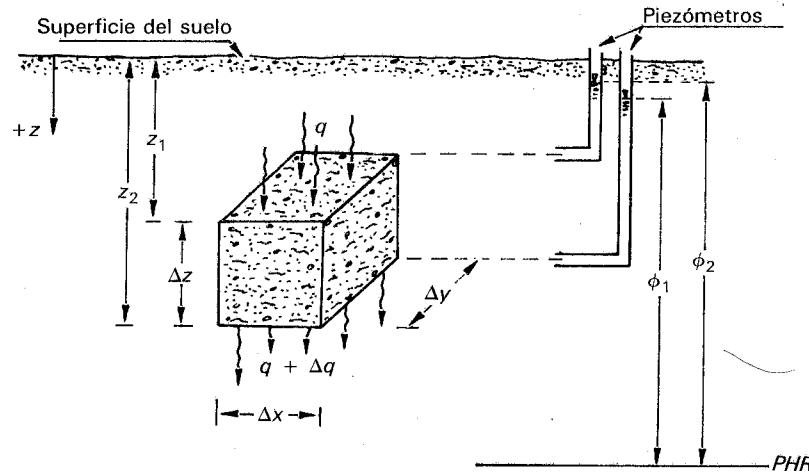


Figura 7.6

donde se han usado derivadas parciales en vista de que q y Θ dependen tanto de z como de t . La ecuación 7.23 tiene dos funciones incógnita: $q(z, t)$ y $\Theta(z, t)$; es necesaria, por tanto, otra ecuación para tener un sistema determinado. Esta otra ecuación es la ley de Darcy, planteada para flujo en medios porosos no saturados:

$$q = -K \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (7.24)$$

donde K es la conductividad hidráulica del medio o simplemente conductividad** y ϕ es el *potencial total*, que es igual al nivel que alcanzaría el agua en un piezómetro colocado dentro del suelo (véase figura 7.6). El potencial total ϕ se puede dividir en dos partes:

$$\phi = \psi + \Omega \quad (7.25)$$

donde $\psi = p/\gamma$ es el potencial capilar (p = presión y γ = peso específico del agua) y Ω el potencial de fuerzas externas por unidad de peso del agua. Generalmente, la única fuerza externa de importancia que actúa en el sistema es la gravedad; si se acepta una distribución hidrostática de presiones en un intervalo Δz pequeño, se puede escribir:

**Nótese que K no es, en general, igual a la permeabilidad del suelo, pues ésta es la conductividad para condiciones de saturación.

$$\Omega = -z \quad (7.26)$$

En la ecuación 7.25, ψ representa la influencia de las fuerzas capilares en el proceso de infiltración y Ω la de las fuerzas gravitacionales.

Derivando la ecuación 7.24 con respecto a z se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-K \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} K \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} K \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial K}{\partial z} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Sustituyendo 7.27 en la ecuación de continuidad 7.23 resulta:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K}{\partial z} \quad (7.28)$$

La ecuación 7.28 se conoce como *ecuación de Richards* (referencia 7.8). Nótese que tanto ψ como K son funciones de Θ . En las figuras 7.7a y 7.7b se muestra la forma típica de estas funciones.

Debido a esta dependencia de ψ y K de Θ , la ecuación 7.28 es fuertemente no lineal y no existe una solución analítica conocida para ella. Por lo tanto, para resolverla es necesario recurrir a ciertas hipótesis simplificadorias o usar

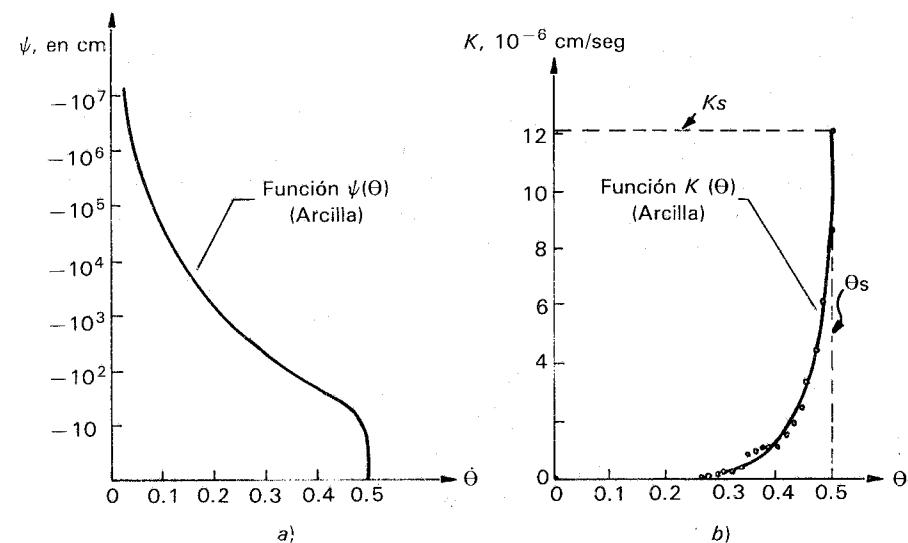


Figura 7.7
UNIVERSIDAD DE ORIENTE
BIBLIOTECA
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA TIERRA

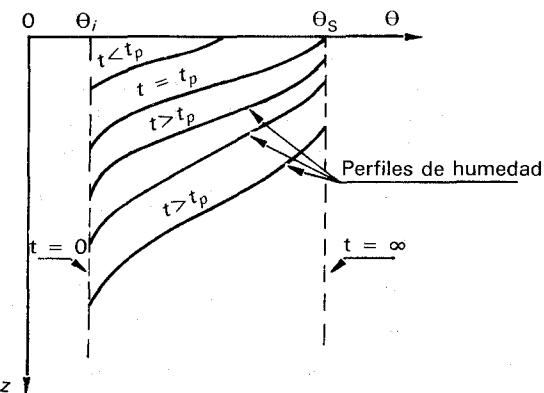


Figura 7.8

los métodos numéricos. Ambos casos caen fuera del enfoque de este texto, pero es conveniente hacer notar algunos aspectos de las ecuaciones anteriores útiles en la comprensión del fenómeno.

La función:

$$\Theta = \Theta(z, t) \quad (7.29)$$

que satisface la ecuación diferencial 7.28 tiene una forma como la que se ilustra en la figura 7.8.

De acuerdo con la definición de contenido de humedad Θ , que es el volumen de agua por unidad de volumen total de suelo, el volumen de agua infiltrada deberá ser igual al aumento en el contenido de humedad con respecto al inicial, multiplicado por el volumen de suelo. Para aclarar lo anterior, considérese un cubo de suelo de 1 m de lado (figura 7.9).

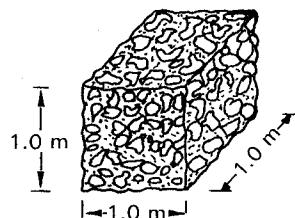


Figura 7.9

Supóngase que el contenido de humedad inicial es $\Theta_i = 0.1$, esto es que el cubo contiene $0.1 \times 1 \times 1 \times 1 = 0.1 \text{ m}^3$ de agua. Si se hace caer agua sobre el cubo hasta que alcance un contenido de humedad $\Theta = 0.5$, el volumen de agua dentro del cubo será de 0.5 m^3 . El volumen de agua infiltrada es entonces de $(0.5 - 0.1) \times 1 \times 1 \times 1 = 0.4 \text{ m}^3$, o bien, la infiltración acumulada es $F = 0.4/(1 \times 1) = 0.4 \text{ m}$. En una columna de suelo de área unitaria y longitud infinita el razonamiento anterior se expresa como:

$$F = \int_0^\infty (\Theta - \Theta_i) dz \quad (7.30)$$

y la infiltración será:

$$f = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty (\Theta - \Theta_i) dz \quad (7.31)$$

La ecuación 7.31 representa, de manera teórica, la infiltración cuando se conocen las propiedades del suelo (figuras 7.7a y 7.7b) y sus condiciones iniciales de humedad.

Por otra parte, se ha visto (apartado 7.1.2) que cuando el suelo está saturado (esto es, $\Theta = \Theta_s$) las fuerzas capilares no existen y solamente actúa la fuerza de gravedad. En estas condiciones, $\psi = 0$ (véase figura 7.7a) y de las ecuaciones 7.25 y 7.26 se tiene que:

$$\phi = -z \text{ si } \Theta = \Theta_s \quad (7.32)$$

Sustituyendo la ecuación 7.32 en la ley de Darcy (ecuación 7.24) y tomando en cuenta que en este caso $K = K_s$ (véase figura 7.7b) se obtiene:

$$q = K_s \text{ si } \Theta = \Theta_s \quad (7.33)$$

de donde se infiere que K_s es la velocidad mínima con que el suelo puede transmitir agua, o bien, K_s es la mínima capacidad de infiltración que puede tener un suelo dado.

Nótese que la conductividad hidráulica del suelo saturado K_s es la propiedad que con frecuencia se denomina "permeabilidad" y que se puede determinar con cierta facilidad en un laboratorio, o bien estimarse con base en la textura del suelo (referencia 7.9). De esta manera y de acuerdo con la ecuación 7.33, el parámetro f_c de la fórmula de Horton (ecuación 7.14), A de la fórmula de Philip (ecuación 7.18) y c de la fórmula de Kostiakov (ecuación 7.15), deben ser iguales, teóricamente, a la conductividad saturada del suelo. En la práctica esto no se cumple con exactitud debido a que el valor de K_s obtenido en una prueba de permeámetro difícilmente es igual al que se tiene *in situ*; sin embargo, K_s da una buena idea del valor de dichos parámetros.

7.4 EL CONCEPTO DEL POTENCIAL EN EL FRENTE HÚMEDO

En los dos subcapítulos anteriores se han descrito dos tipos de métodos que, por su complejidad y fundamento físico, pueden considerarse opuestos: por una parte, los métodos empíricos no cuentan con un fundamento teórico sólido pero son simples de usar una vez que se han determinado los parámetros correspondientes; por otro lado, la teoría de la infiltración tiene un respaldo físico relativamente fuerte, pero resulta complejo y difícil de usar. Es, por tanto, conveniente contar con un método que esté situado en un punto intermedio, lo cual se logra haciendo algunas simplificaciones a la teoría de la infiltración. Estas simplificaciones consisten básicamente en suponer que los perfiles de humedad no avanzan en el tiempo como en la figura 7.8, sino como se muestra en la figura 7.10, como un pistón. De este modo, el suelo situado arriba del perfil de humedad está saturado y abajo de él tiene el contenido de humedad inicial Θ_i . Aceptando esta hipótesis, la ley de Darcy (ecuación 7.24) se expresa, en la zona saturada, como:

$$q = -K_s \frac{(\psi_f - z_f) - (\psi_{sup} - z_{sup})}{z_f - z_{sup}} \quad (7.34)$$

donde los subíndices f y sup denotan, respectivamente, las condiciones en el frente húmedo (límite inferior de la capa saturada) y en la superficie del suelo. Tomando como origen del eje z la superficie del suelo y la presión atmosférica como referencia e igual a cero resulta:

$$\psi_{sup} = z_{sup} = 0, z_f = z \quad (7.35)$$

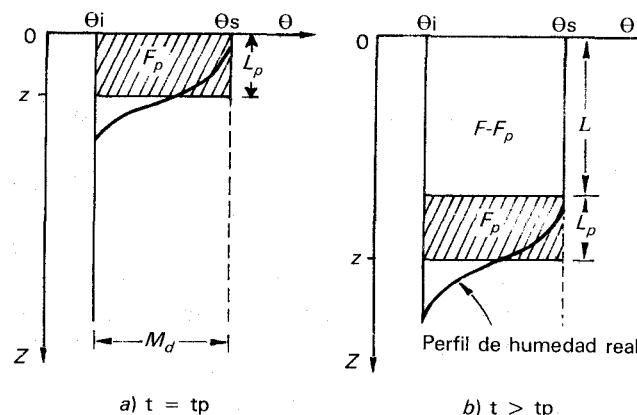


Figura 7.10

Potencial en el frente húmedo

de donde la ecuación 7.34 se escribe como:

$$q = -K_s \frac{\psi_f - z}{z} = K_s \left(1 - \frac{\psi_f}{z} \right) \quad (7.36)$$

Se define como *deficiencia de humedad* M_d a la diferencia entre los contenidos de humedad de saturación e inicial, esto es:

$$M_d = \Theta_s - \Theta_i \quad (7.37)$$

Multiplicando y dividiendo por M_d el segundo término del paréntesis de la ecuación 7.36 se obtiene:

$$q = K_s \left(1 - \frac{\psi_f M_d}{z(\Theta_s - \Theta_i)} \right) \quad (7.38)$$

De acuerdo con las suposiciones hechas en la figura 7.10, si el medio está saturado entre $z = 0$ y $z = z_f$, la velocidad del agua será la misma en toda esta región, incluyendo la superficie; entonces, $f = q$. Por otra parte, tomando en cuenta la ecuación 7.30, resulta en este caso que $F = z(\Theta_s - \Theta_i)$. Así, la ecuación 7.38 se transforma en:

$$f = K_s \left(1 - \frac{\psi_f M_d}{F} \right) \quad (7.39)$$

La expresión 7.39 se desarrolló originalmente en 1911 por Green y Ampt (referencia 7.10), y es válida sólo en el caso de que $i > K_s$, siendo i la intensidad de la lluvia. En caso contrario, de acuerdo con la ecuación 7.1, se tiene que:

$$f = i \text{ si } i < K_s \quad (7.40)$$

Nótese que si pasa un tiempo largo con una lluvia intensa ($i > K_s$), F crece hasta que $\psi_f M_d / F$ se hace despreciable; en ese momento se tiene que $f = K_s$, lo que concuerda con lo expuesto en el subcapítulo anterior. Lo mismo sucede cuando M_d es pequeño, es decir, cuando el contenido de humedad del suelo está inicialmente cerca al de saturación.

Todos los parámetros que intervienen en la fórmula de Green y Ampt (ecuación 7.39) tienen un sentido físico bien definido y pueden estimarse de acuerdo con la textura del suelo y las condiciones de humedad iniciales, salvo el potencial en el frente húmedo ψ_f . Lo anterior provocó que la fórmula permaneciera abandonada por cerca de medio siglo. Sin embargo, en épocas relativamente recientes (referencias 7.11 y 7.12 por ejemplo) se ha propuesto que ψ_f se calcule como un promedio pesado de los valores que adquiere a lo

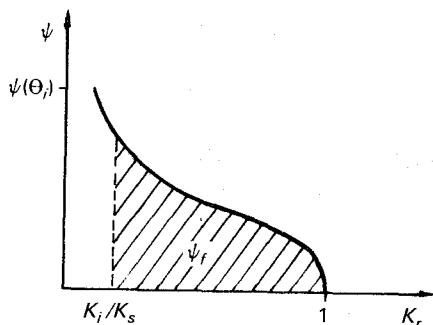


Figura 7.11

largo del perfil de humedad real (véase figura 7.7a), y que el coeficiente de peso sea la conductividad relativa k_r definida como:

$$k_r = K/K_s \quad (7.41)$$

Así, combinando las figuras 7.7a y 7.7b es posible obtener una relación entre ψ y k_r que, en general, tiene la forma mostrada en la figura 7.11.

Así, el valor de ψ_f será el área sombreada en la figura 7.11. Para fines prácticos se puede despreciar el valor de k_r/k_s y el potencial en el frente húmedo se calcularía como:

$$\psi_f = \int_0^\infty K_r d\psi = \int_0^1 \psi dk_r \quad (7.42)$$

El método anteriormente descrito se encuentra aún en una etapa de pruebas y todavía su uso no es generalizado. Sin embargo, se considera que tiene amplias perspectivas de aplicación práctica (referencias 7.10, 7.11, 7.12, 7.13, entre otras).

7.5 MEDICIÓN DE LA INFILTRACIÓN

En teoría es posible determinar los valores de los diversos parámetros que intervienen en los métodos descritos anteriormente mediante mediciones directas de la infiltración.

El aparato que sirve para medir la infiltración se llama *infiltrómetro*. Al contrario de lo que sucede con la precipitación o la evaporación, la infiltración puede diferir considerablemente de un sitio a otro relativamente cercano, por lo que las mediciones hechas con infiltrómetros sólo pueden considerarse representativas de áreas muy pequeñas.

Los infiltrómetros se clasifican en dos tipos básicos: a) simuladores de lluvia, en los que se aplica el agua de modo y en cantidades similares a la lluvia natural, y b) de carga constante, en los que se coloca una lámina constante de agua sobre el suelo dentro de un área cerrada. Enseguida se describen brevemente sólo los del segundo tipo.

Los infiltrómetros de carga constante más comunes son los formados por un tubo simple o por dos tubos concéntricos. Cuando se usa un tubo simple, su diámetro es normalmente de 20 cm y su longitud de 45 a 60 cm. Estos tubos se hincan en el terreno a una profundidad de 40 a 50 cm y el agua se aplica a través de buretes graduados de tal manera que se mantiene un tirante constante, suficiente para cubrir las plantas pequeñas. Si se toman lecturas de los buretes en diferentes tiempos es posible construir una gráfica de capacidad de infiltración contra el tiempo, de lo cual se deducen los parámetros que intervienen en los modelos vistos anteriormente. Los tubos concéntricos, normalmente de unos 20 a 35 cm de diámetro, se usan para reducir efectos de frontera en el anillo interior, que es donde se hacen las mediciones. En este caso, los tubos se hincan en el suelo sólo lo necesario para que no haya escapes de agua.

Los resultados que se obtienen de pruebas con infiltrómetros son, en general, poco confiables, pues el suelo se altera al hincar los tubos y no se toma en cuenta la estratigrafía del mismo. Además, como ya se mencionó, estos resultados sólo pueden considerarse como representativos de áreas sumamente pequeñas.

BIBLIOGRAFÍA

- 7.1 U. S. Soil Conservation Service, "National Engineering Handbook" sec. 4, Supplement A, Hydrology, 1957.
- 7.2 Springall, G. R. "Drenaje en cuencas pequeñas" Publicación 143 del Instituto de Ingeniería, UNAM. México, 1969.
- 7.3 Gardner, W., Widstoe, J. A., *The movement of soil moisture* Soil Sci. 11:215-232, 1921.
- 7.4 Horton, R. E., "An approach to the physical interpretation of infiltration capacity". Soil Sci. Soc. Am. Proc. 5, 399-417, 1940.
- 7.5 Wilson, E. M. *Engineering Hydrology*. McMillan Press. London, 1974.
- 7.6 Kostiakov, A. N. "Sobre la dinámica del coeficiente de percolación de agua y la necesidad de estudiarlo desde un punto de vista dinámico para propósitos de

"mejoramiento", Trans. 6th. Comm. Int. Soc. Soil Sci. Part A, pp. 17-21, Moscú, 1932 (en ruso).

- 7.7 Philip, J. R., "The theory of infiltration: 4. Sorptivity and algebraic infiltration equations" Soil Sci. 84, pp. 257-264, 1957.
- 7.8 Richards, L. A., "Capillary conduction of liquids through porous mediumis". Physics, V.I, pp. 318-333, 1931.
- 7.9 Juárez, B. E., Rico, R. A. *Mecánica de suelos* V.I., Ed. Limusa, México, 1975.
- 7.10 Green, W.H., Ampt., G.A. "Studies on soil physics: 1. The flow of air and water through soils". J. Agr. Sci., 4(1), 1-24, 1911.
- 7.11 Mein, R.G., Larson C.L. "Modeling infiltration during a steady rain". Water Res. Res., V.9 No. 2, pp. 384-394, 1973.
- 7.12 Morel-Seytoux, H.J., Khanji, J. "Derivation of an equation of infiltration", Water Res. Res., V. 10, No. 4, pp. 795-800, 1974.
- 7.13 Chu, S.T.; "Infiltration during an unsteady rain". Water Res. Res., V. 14, No. 3, pp. 461, 466, 1978.
- 7.14 Chow, V.T. *Handbook of applied hydrology* McGraw-Hill, 1964.

8

Relaciones lluvia-escurrimiento

Es sumamente común que no se cuente con registros adecuados de escurrimiento en el sitio de interés para determinar los parámetros necesarios para el diseño y operación de obras hidráulicas. En general, los registros de precipitación son más abundantes que los de escurrimiento y, además, no se afectan por cambios en la cuenca, como construcción de obras de almacenamiento y derivación, talas, urbanización, etc. Por ello, es conveniente contar con métodos que permitan determinar el escurrimiento en una cuenca mediante las características de la misma y la precipitación. Las características de la cuenca se conocen por medio de planos topográficos y de uso de suelo, y la precipitación a través de mediciones directas en el caso de predicción de avenidas frecuentes, o bien usando los métodos estudiados en el capítulo 6 en el caso de avenidas de diseño.

Los principales parámetros que intervienen en el proceso de conversión de lluvia a escurrimiento son los siguientes:

1. Área de la cuenca.
2. Altura total de precipitación.
3. Características generales o promedio de la cuenca (forma, pendiente, vegetación, etc.).
4. Distribución de la lluvia en el tiempo.
5. Distribución en el espacio de la lluvia y de las características de la cuenca.

Debido a que, por un lado, la cantidad y calidad de la información disponible varían grandemente de un problema a otro y a que, por otro, no siempre se requiere la misma precisión en los resultados, se han desarrollado una gran cantidad de métodos para analizar la relación lluvia-escurrimiento. En este

apartado se verán solamente los métodos más representativos de cada grupo y los que se adaptan mejor al medio mexicano.

Desde luego, la complejidad de los métodos aumenta a medida que se toman en cuenta más de los parámetros citados anteriormente. En este sentido también aumenta su precisión, pero los datos que se requieren son más y de mejor calidad. Sólo se explicarán los métodos que toman en cuenta los cuatro primeros parámetros, pues los que consideran todos, llamados modelos conceptuales, matemáticos o de parámetros distribuidos, se encuentran aún en su fase experimental y, además, la información disponible en México todavía no es lo suficientemente completa para su aplicación. En la referencia 8.1 se puede encontrar una buena descripción de este tipo de métodos.

8.1 MÉTODOS DE ENVOLVENTES

Estos métodos toman en cuenta sólo el área de la cuenca. Aunque no son métodos que analicen propiamente la relación entre la lluvia y el escurrimiento, se explicarán por ser de enorme utilidad en los casos en que se requieran sólo estimaciones gruesas de los gastos máximos probables, o bien cuando se carezca casi por completo de información.

La idea fundamental de estos métodos es relacionar el gasto máximo Q con el área de la cuenca A_c en la forma:

$$Q = \alpha A_c^\beta \quad (8.1)$$

donde Q es el gasto máximo y α y β son parámetros empíricos, que también pueden ser función de A_c . Nótese que, con $\beta=1$ y $\alpha=C_i$, 8.1 es la fórmula racional (véase apartado 8.2). Se ha visto que β es del orden de 3/4 para cuencas de área menor que unos 1500 km² y de 1/2 para cuencas mayores (referencia 8.3).

Existen una gran cantidad de fórmulas del tipo de la 8.1, pero las más usadas en México son las de Creager y Lowry. La fórmula de Creager es:

$$q = 1.303 C_c (0.386 A_c)^\alpha A_c^{-1} \quad (8.2)$$

donde q es el gasto máximo por unidad de área, $q=Q/A_c$,

$$\alpha = \frac{0.936}{A_c^{0.048}} \quad (8.3)$$

C_c es un coeficiente empírico y A_c está en km².

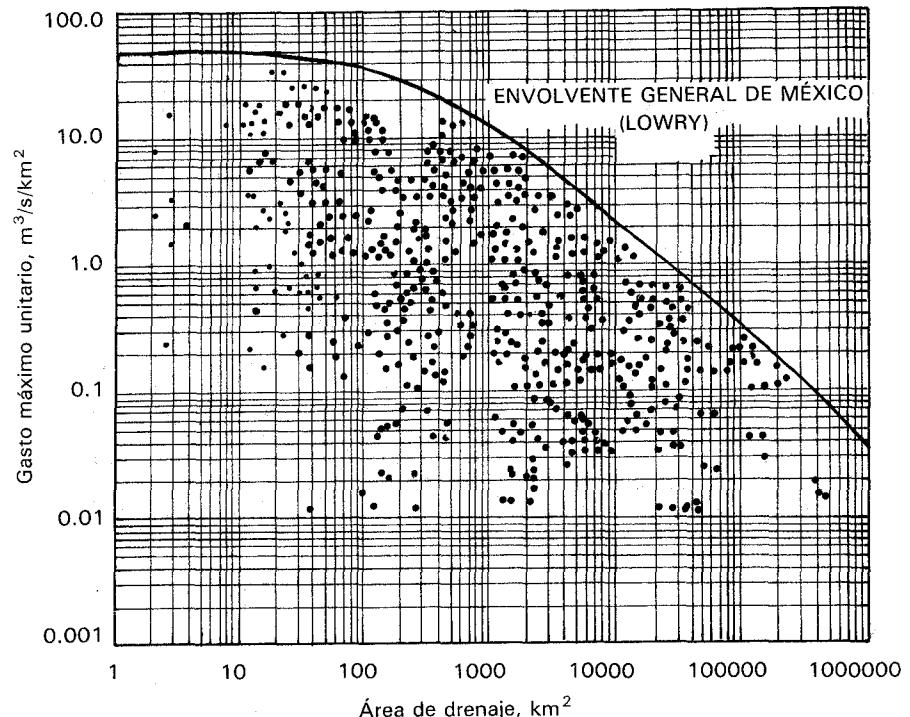


Figura 8.1

La fórmula de Lowry es:

$$q = \frac{C_L}{(A_c + 259)^{0.85}} \quad (8.4)$$

donde C_L es otro coeficiente empírico.

Los valores de C_c y C_L se determinan por regiones, llevando a una gráfica logarítmica los gastos unitarios máximos q registrados contra sus respectivas áreas de cuenca y seleccionando el valor de C_c y C_L que envuelva a todos los puntos medidos (véase, por ejemplo, figura 8.1).

El valor de $C_c=200$ es la envolvente para todos los puntos que analizó Creager, aunque $C_c=100$ da valores mucho más razonables y se usa como envolvente mundial. Para la fórmula de Lowry (8.4) se puede tomar un valor de $C_L = 3\,500$ como mundial.

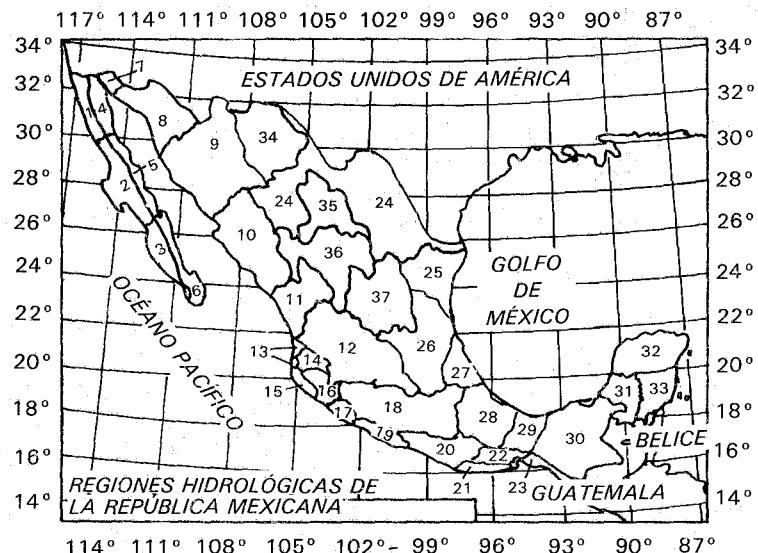


Figura 8.2

La Secretaría de Agricultura y Recursos Hídricos ha calculado los valores de C_c y C_L para las 37 regiones en que ha dividido a la República Mexicana (véase figura 8.2). En la tabla 8.1 se muestran los correspondientes a C_L (referencia 8.7).

8.2 LA FÓRMULA RACIONAL

La fórmula racional es posiblemente el modelo más antiguo de la relación lluvia-escorrimiento. Su origen se remonta a 1851 ó 1889, de acuerdo con diversos autores (por ejemplo, consultar referencias 8.2 y 8.3). Este modelo toma en cuenta, además del área de la cuenca, la altura o intensidad de la precipitación y es hoy en día muy utilizado, particularmente en el diseño de drenajes urbanos.

Supóngase que en una cuenca impermeable se hace caer uniformemente una lluvia de intensidad constante durante un largo tiempo. Al principio, el gasto que sale de la cuenca será creciente con el tiempo, pero llegará un momento en el que se alcance un punto de equilibrio, es decir, en el que el volumen que entra por unidad de tiempo por la lluvia sea el mismo que el gasto de salida de la cuenca (véase figura 8.3).

Tabla 8.1 Coeficientes de la envolvente de Lowry*

Región No.	Descripción	C_L
1	Baja California noroeste (Ensenada)	980
2	Baja California centro (El Vizcaíno)	530
3	Baja California suroeste (Magdalena)	2190
4	Baja California noreste (Laguna Salada)	1050
5	Baja California centro este (Sta. Rosalía)	990
6	Baja California sureste (La Paz)	5120
7	Río Colorado	1050
8	Sonora norte	760
9	Sonora sur	2140
10	Sinaloa	3290
11	Presidio - San Pedro zona costera	4630
11	Presidio - San Pedro zona alta	470
12	Lerma - Santiago	1290
13	Huicicila	760
14	Amete	600
15	Costa de Jalisco	5270
16	Armería - Coahuayana	4940
17	Costa de Michoacán	2100
18	Balsas alto	1090
18	Balsas medio y bajo	4450
19	Costa Grande	2100
20	Costa Chica - Río Verde	3180
20	Alto Río Verde	390
21	Costa de Oaxaca (Pto. Ángel)	3000
22	Tehuantepec	2170
23	Costa de Chiapas	1190
24A	Alto Bravo - Conchos	1020
24B	Medio Bravo	5170
24C	Río Salado	1410
24D	Bajo Bravo	2130
25	San Fernando - Soto la Marina	2330
26A	Alto Pánuco	1360
26B	Bajo Pánuco	3010
26C	Valle de México	760
27	Tuxpan - Nautla	2450
28	Papaloapan	1750
29	Coatzacoalcos	1840
30	Grijalva - Usumacinta	2130
30	Alto Grijalva	610
31	Yucatán oeste (Campeche)	370
32	Yucatán norte (Yucatán)	sin datos
33	Yucatán este (Quintana Roo)	sin datos
34	Cuencas cerradas del norte (Casas Grandes)	230
35	Mapimí	1510
36	Nazas	380
36	Aguanaval	1310
37	El Salado	

*Datos registrados hasta 1975.

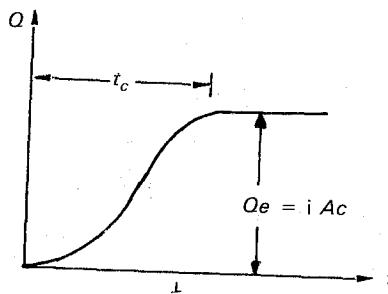


Figura 8.3

El tiempo que transcurre entre el inicio de la lluvia y el establecimiento del gasto de equilibrio se denomina *tiempo de concentración*, y equivale al tiempo que tarda el agua en pasar del punto más alejado hasta la salida de la cuenca.

Naturalmente, el tiempo de concentración t_c (véase figura 8.3) depende de la longitud máxima que debe recorrer el agua hasta la salida de la cuenca y de la velocidad que adquiere, en promedio, dentro de la misma. Esta velocidad está en función de las pendientes del terreno y los cauces, y de la rugosidad de la superficie de los mismos. El tiempo de concentración se calcula mediante la ecuación:

$$t_c = \frac{L}{3600 v} \quad (8.5)$$

donde t_c es el tiempo de concentración en h, L es la longitud del cauce principal de la cuenca en m y v es la velocidad media del agua en el cauce principal en m/s. La velocidad media v se estima con las tablas 8.2a y 8.2b, extraídas de la referencia 8.4. Nótese que la fórmula 8.5 no toma en cuenta el recorrido del agua de lluvia desde que llega a la superficie hasta los cauces.

Otra manera de estimar el tiempo de concentración es mediante la fórmula de Kirpich (referencia 8.2):

$$t_c = 0.000325 \frac{L^{0.77}}{S^{0.385}} \quad (8.6)$$

donde S es la pendiente del cauce principal, L se expresa en m y t_c resulta en h. S se determina con alguno de los métodos estudiados en el capítulo 2.

Tabla 8.2

Pendiente del cauce principal, %	Velocidad media, m/s	Velocidad media, m/s			
		Pendiente %	Bosques	Pastizales	Canal natural no bien definido
1-2	0.6	0-3	0.3	0.5	0.3
2-4	0.9	4-7	0.6	0.9	0.9
4-6	1.2	8-11	0.9	1.2	1.5
6-8	1.5	12-15	1.1	1.4	2.4

a)

b)

En una cuenca no impermeable, sólo una parte de la lluvia con intensidad i escurre directamente hasta la salida. Si se acepta que durante la lluvia, o al menos una vez que se ha establecido el gasto de equilibrio, no cambia la capacidad de infiltración en la cuenca, se puede escribir la llamada *fórmula racional*:

$$Q_p = Ci A_c \quad (8.7)$$

donde C es un coeficiente de escorrentamiento, que representa la fracción de la lluvia que escurre en forma directa (véase apartado 7.2.2) y Q_p es el gasto máximo posible que puede producirse con una lluvia de intensidad i en una cuenca de área A_c y coeficiente de escorrentamiento C . Como se mencionó en el capítulo 7, el coeficiente de escorrentamiento toma valores entre 0 y 1 y varía apreciablemente de una cuenca a otra y de una tormenta a otra debido a las condiciones de humedad iniciales. Sin embargo, es común tomar valores de C representativos de acuerdo con ciertas características de las cuencas. Algunos de estos valores se muestran en la tabla 8.3, los cuales generalmente son conservadores para que puedan ser usados para diseño.

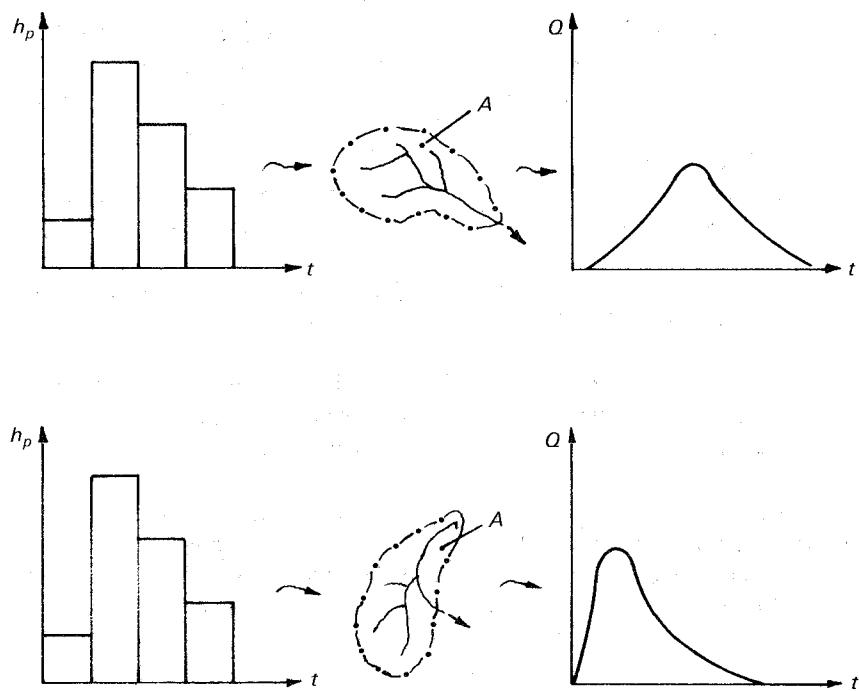
Existe una gran cantidad de métodos desarrollados a partir de la fórmula racional, entre los que destaca el método de Gregory Arnold (referencia 8.5) por su uso en el medio mexicano. En el presente texto no se describirán dichos métodos debido a que están basados en las ideas antes expuestas.

8.3 HIDROGRAMA UNITARIO

Supóngase que se presenta una misma tormenta en dos cuencas con el mismo suelo y la misma área, pero de diferente forma (véase figura 8.4); aunque el

Tabla 8.3 Valores del coeficiente de escurrimiento

TIPO DEL ÁREA DRENADA	COEFICIENTE DE ESCURRIMIENTO	
	MÍNIMO	MÁXIMO
ZONAS COMERCIALES:		
Zona comercial	0.70	0.95
Vecindarios	0.50	0.70
ZONAS RESIDENCIALES:		
Unifamiliares	0.30	0.50
Multifamiliares, espaciados	0.40	0.60
Multifamiliares, compactos	0.60	0.75
Semirurbanas	0.25	0.40
Casas habitación	0.50	0.70
ZONAS INDUSTRIALES:		
Espaciado	0.50	0.80
Compacto	0.60	0.90
CEMENTERIOS, PARQUES		
	0.10	0.25
CAMPOS DE JUEGO		
	0.20	0.35
PATIOS DE FERROCARRIL		
	0.20	0.40
ZONAS SUBURBANAS		
	0.10	0.30
CALLES:		
Asfaltadas	0.70	0.95
De concreto hidráulico	0.70	0.95
Adoquinadas	0.70	0.85
ESTACIONAMIENTOS		
	0.75	0.85
TECHADOS		
	0.75	0.95
PRADERAS:		
Suelos arenosos planos (pendientes 0.02 o menos)	0.05	0.10
Suelos arenosos con pendientes medias (0.02-0.07)	0.10	0.15
Suelos arenosos escarpados (0.07 o más)	0.15	0.20
Suelos arcillosos planos (0.02 o menos)	0.13	0.17
Suelos arcillosos con pendientes medias (0.02-0.07)	0.18	0.22
Suelos arcillosos escarpados (0.07 o más)	0.25	0.35

Hidrograma unitario**Figura 8.4**

volumen escurrido sea el mismo, el gasto de pico y las demás características del hidrograma varían de una cuenca a otra. El método del hidrograma unitario toma en cuenta este efecto, considerando, además de la altura total de precipitación y el área de la cuenca, su forma, pendiente, vegetación, etc., aunque no de forma explícita.

Hidrograma unitario. Se define como el hidrograma de escurrimiento directo*, que se produce por una lluvia efectiva* o en exceso* de lámina unitaria**, duración d_e y repartida uniformemente en la cuenca.

El método del hidrograma unitario fue desarrollado originalmente por Sherman en 1932 (referencia 8.6), y está basado en las siguientes hipótesis:

* Para la definición de estos conceptos véase el capítulo 3.

** Generalmente de 1 mm, aunque puede ser de 1 pulgada, 1 cm, etc.

- a) *Tiempo base constante.* Para una cuenca dada, la duración total de escurrimiento directo o tiempo base es la misma para todas las tormentas con la misma duración de lluvia efectiva, independientemente del volumen total escurrido. Todo hidrograma unitario está ligado a una duración de la lluvia en exceso.
- b) *Linealidad o proporcionalidad.* Las ordenadas de todos los hidrogramas de escurrimiento directo con el mismo tiempo base, son directamente proporcionales al volumen total de escurrimiento directo, es decir, al volumen total de lluvia efectiva. Como consecuencia, las ordenadas de dichos hidrogramas son proporcionales entre sí (véase figura 8.5).
- c) *Superposición de causas y efectos.* El hidrograma que resulta de un periodo de lluvia dado puede superponerse a hidrogramas resultantes de periodos lluviosos precedentes (véase figura 8.6).

El concepto del hidrograma unitario se ha usado de manera muy extensa en prácticamente todo el mundo desde su publicación original. Esta idea se ha ampliado y mejorado de manera considerable desde entonces. A continuación se verán las principales formas de aplicación del concepto.

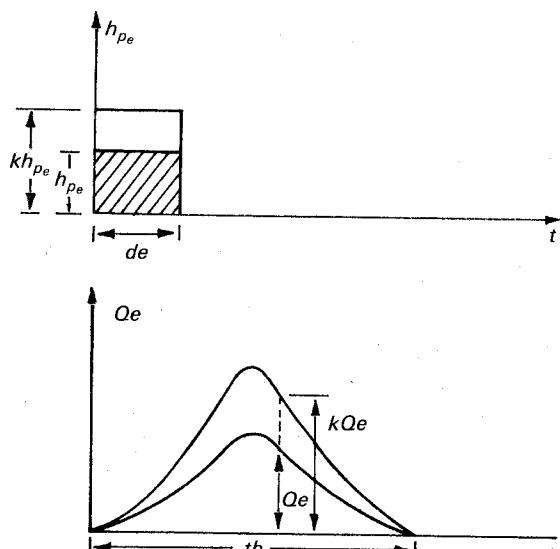


Figura 8.5

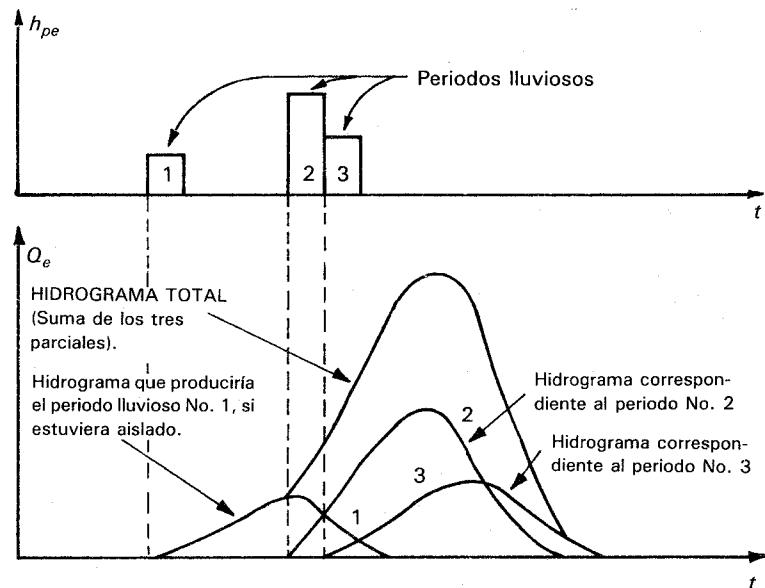


Figura 8.6

8.3.1 Hidrograma unitario tradicional

Supóngase que en una cierta cuenca con área de $1\ 080 \text{ km}^2$ se conoce un hidrograma de escurrimiento total y el hietograma de la tormenta que lo produjo (véase figura 8.7).

Con los métodos estudiados en el subcapítulo 3.2 es posible separar el escurrimiento base del directo; al hidrograma resultante se le denominará “hidrograma de calibración”. Con lo anterior se puede conocer, en primer lugar, el volumen de escurrimiento directo, y, en segundo, el tiempo base t_b . Así, en el ejemplo de la figura 8.7, el volumen de escurrimiento directo resultaría ser de:

$$V_e \doteq \Delta t \sum_{i=1}^8 Q_i = 2 \times 3\ 600 (100 + 150 + 200 + 100 + 80 + 60 + 40 + 20) \\ = 5.4 \times 10^6 \text{ m}^3$$

y el tiempo base es de 18.0 h.

Una vez calculado el volumen de escurrimiento directo, se determina la altura de lluvia efectiva, que en este caso es de:

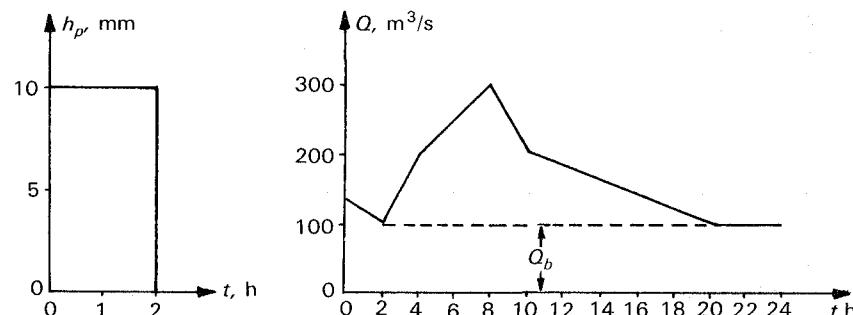
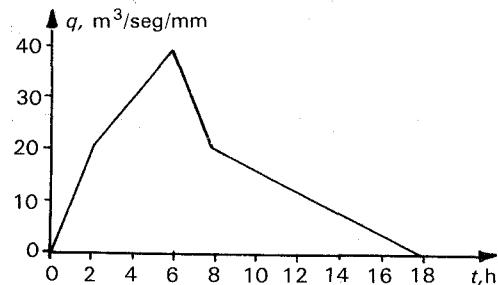


Figura 8.7

$$h_{pe} = \frac{V_e}{A_c} = \frac{5.4 \times 10^6 \text{ m}^3}{1080 \times 10^6 \text{ m}^2} = 0.005 \text{ m} = 5 \text{ mm}$$

y la duración en exceso es, obviamente, de 2 h.

Aceptando las hipótesis de tiempo base constante y linealidad, un hidrograma unitario, es decir, un hidrograma de escurrimiento directo producido por una lluvia de 1 mm de lámina y duración en exceso de 2 h, debe tener para este ejemplo un tiempo base de 18 h y la misma forma que el hidrograma de la figura 8.7, pero con sus ordenadas reducidas a una quinta parte, ya que la altura de lluvia efectiva en este caso fue de 5 mm. Entonces, dividiendo las ordenadas del hidrograma de escurrimiento directo de la figura 8.7 entre 5 se obtiene el hidrograma unitario de la figura 8.8. Con este hidrograma unitario es posible determinar hidrogramas de escurrimiento directo para cualquier tormenta cuya duración de lluvia en exceso sea de 2 h. Por ejemplo, la tormenta

Figura 8.8 Hidrograma unitario para $d_e = 2$ h.

de la figura 8.9a tiene una duración en exceso de 2 h y una altura de precipitación efectiva de $2 + 8 = 10$ mm; el hidrograma de escurrimiento directo que se produciría con esta tormenta se obtiene multiplicando las ordenadas del hidrograma unitario de la figura 8.8 por 10 mm (véase figura 8.9b).

Si además se acepta el principio de superposición de causas y efectos, el hidrograma unitario de la figura 8.8 puede usarse también para tormentas cuya duración en exceso sea múltiplo de 2 h. Por ejemplo, sea la tormenta de la figura 8.10a, que tiene una duración en exceso de 4 h. Esta tormenta puede considerarse compuesta por dos consecutivas, cada una con una duración en exceso de 2 h. Aplicando el hidrograma unitario de la figura 8.8 a cada una de estas dos tormentas, sumando las ordenadas y, obviamente, desfasando el segundo hidrograma 2 h del primero, se obtiene el hidrograma de escurrimiento directo producido por la tormenta completa (véase figura 8.10b).

Es necesario enfatizar que todo hidrograma unitario está necesariamente ligado a una duración en exceso y que si no se conoce la última, entonces el hidrograma unitario pierde completamente su significado.

Con lo visto hasta este momento, es posible determinar hidrogramas de escurrimiento directo para tormentas con la misma duración en exceso que el de calibración (2 h en el ejemplo anterior) o algún múltiplo. Sin embargo, el hidrograma unitario de la figura 8.8 no se puede usar, sin modificaciones, para tormentas con duración en exceso de por ejemplo, 1 ó 3 horas o cualquier otra que no sea múltiplo de 2 h. Enseguida se verá una técnica con la que es posible modificar un hidrograma unitario, construido para una duración en exceso d_e , para poder usarlo cuando la duración en exceso de la tormenta en cuestión, d'_e no sea múltiplo de d_e .

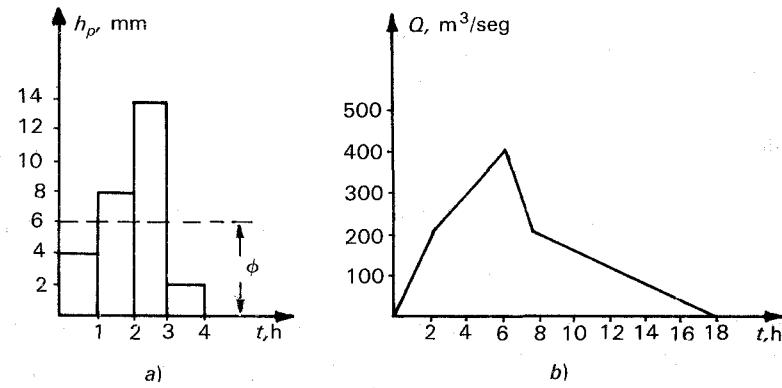


Figura 8.9

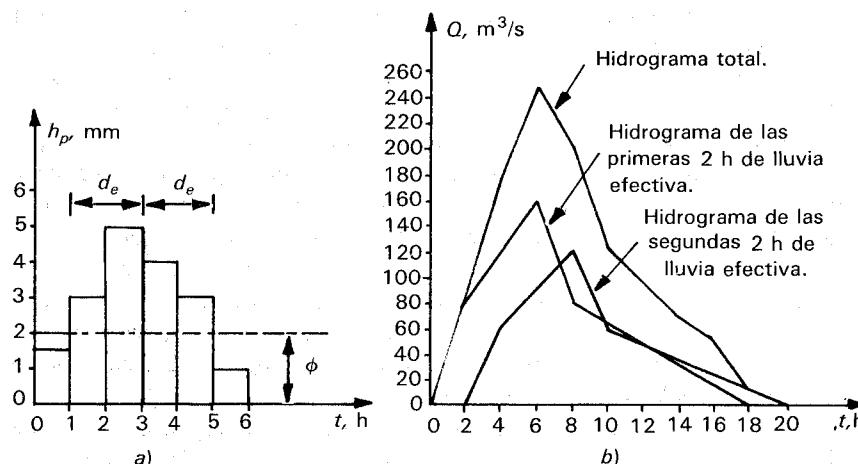


Figura 8.10

8.3.2 Curva S

Supóngase que se tiene un hidrograma unitario para duración en exceso d_e . Si ocurre una tormenta cuyo hietograma esté formado por un número muy grande de barras, cada una con duración d_e y altura de precipitación efectiva de 1 mm (véase figura 8.11a), y si se acepta el principio de superposición de causas y efectos, entonces se tendrá un hidrograma de escurrimiento directo similar al de la figura 8.3. Dado que la intensidad de la lluvia es, en este caso,

$$i = \frac{1 \text{ mm}}{d_e} \quad (8.8)$$

entonces, el gasto de equilibrio será (véase figura 8.11b):

$$Q_e = iA_c = \frac{1 \text{ mm}}{d_e} A_c \quad (8.9)$$

Nótese que la ecuación 8.9 es la fórmula racional (ecuación 8.7), pero con un coeficiente de escurrimiento unitario en vista de que i es en este caso la intensidad de la lluvia efectiva. El hidrograma de escurrimiento directo que se produce con una lluvia como ésta se llama *curva S*. Esta curva es un hidro-

grama formado por la superposición de un número de hidrogramas unitarios suficiente para llegar al gasto de equilibrio (véase figura 8.11b).

Es común que al sumar las ordenadas de los hidrogramas unitarios no se llegue al gasto de equilibrio definido por la ecuación 8.9, sino que se presentan oscilaciones en la parte superior de la curva S como se muestra en la figura 8.12.

Esto ocurre para duraciones en exceso grandes o, más exactamente, cuando el hidrograma unitario no puede representarse con precisión mediante líneas rectas a cada d_e horas. Cuando se presenta este problema, conviene revisar la separación de gasto base que se hizo y la duración en exceso d_e , pues la proporción que guardan ambas variables se sale de lo común. Si en la revisión se encuentra que t_b y d_e son correctos, entonces será necesario suavizar la curva S. Para ello, se debe tomar en cuenta que:

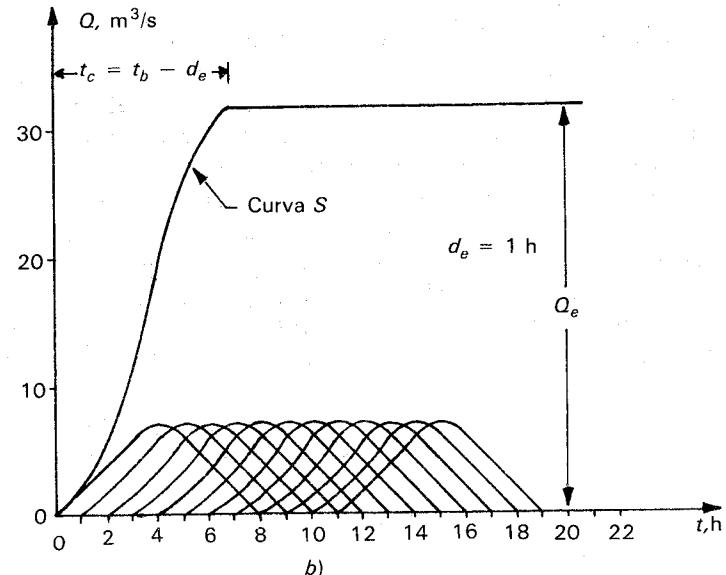
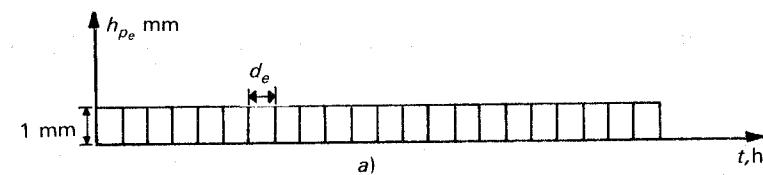


Figura 8.11

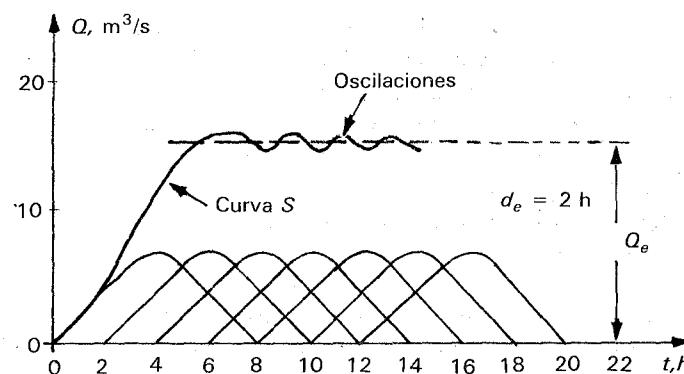


Figura 8.12

- a) El tiempo de concentración t_c o el tiempo en que se alcanza el gasto de equilibrio es:

$$t_c = t_b - d_e \quad (8.10)$$

donde t_b es el tiempo base del hidrograma unitario.

- b) El gasto de equilibrio es el dado por la ecuación 8.9.

Si la curva S de la figura 8.11b se desplaza d_e horas en el tiempo y las ordenadas de la curva desplazada se restan de las de la original, el resultado sería el hidrograma unitario con el que se construyó la curva S . Si la curva S se desplaza d'_e horas en el tiempo (figura 8.13b) y sus ordenadas se restan de la curva S original (figura 8.13c), se obtendría el hidrograma resultante de una lluvia con intensidad 1 mm/ d_e que cae durante d'_e horas. Para que el hidrograma resultante sea unitario, la intensidad de la precipitación debe ser $1/d'_e$; entonces es necesario multiplicar sus ordenadas por d_e/d'_e . Con esto se obtiene un hidrograma unitario para una duración en exceso d'_e .

Ejemplo 8.1. Obtener un hidrograma unitario para una duración en exceso de 3 h a partir del hidrograma unitario para $d_e = 2 h$ de la figura 8.8.

Solución

- a) *Obtención de la curva S .* En la tabla 8.4 se muestra el cálculo hecho para obtener la curva S . Como se observa, en este caso se llega a un

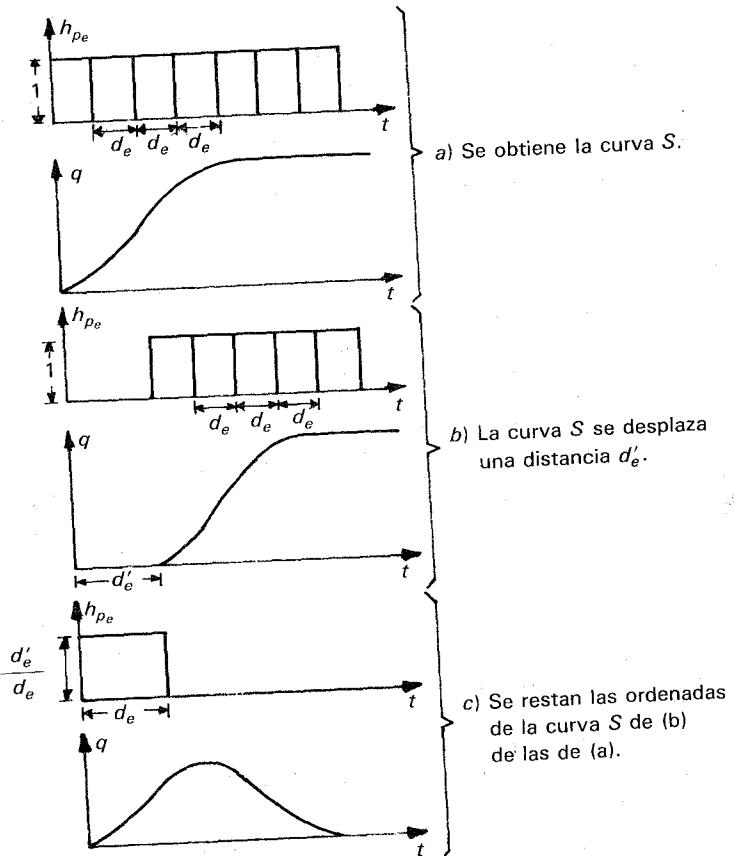


Figura 8.13

gasto de equilibrio, sin oscilaciones, de 150 m³/s. Este valor puede comprobarse con la ecuación 8.9:

$$Q_e = \frac{Ac (1 \text{ mm})}{d_e} = \frac{1 080 \times 10^6 \times 1 \times 10^{-3}}{2 \times 3 600} = 150 \text{ m}^3/\text{s}$$

La curva S obtenida se muestra en la figura 8.14.

- b) *Desplazamiento de la curva S d'_e h en el tiempo.* En la tabla 8.5 (columna 3) se muestra la curva S desplazada 3 h en el tiempo.

Tabla 8.4

t, h	HU	Σ							
	$despl$								
	$2h$	$4h$	$6h$	$8h$	$10h$	$12h$	$14h$	$16h$	
$m^3/s/mm$									
0	0								0
2	20	0							20
4	30	20	0						50
6	40	30	20	0					90
8	20	40	30	20	0				110
10	16	20	40	30	20	0			126
12	12	16	20	40	30	20	0		138
14	8	12	16	20	40	30	20	0	146
16	4	8	12	16	20	40	30	20	150
18	0	4	8	12	16	20	40	30	150
20	0	4	8	12	16	20	40	30	.
22	0	4	8	12	16	20	40	30	.
24	0	4	8	12	16	20	20	30	.
26	0	4	8	12	16	20	16	30	.
28	0	4	8	12	8	12	12	30	.
30	0	4	8	12	8	4	8	30	.

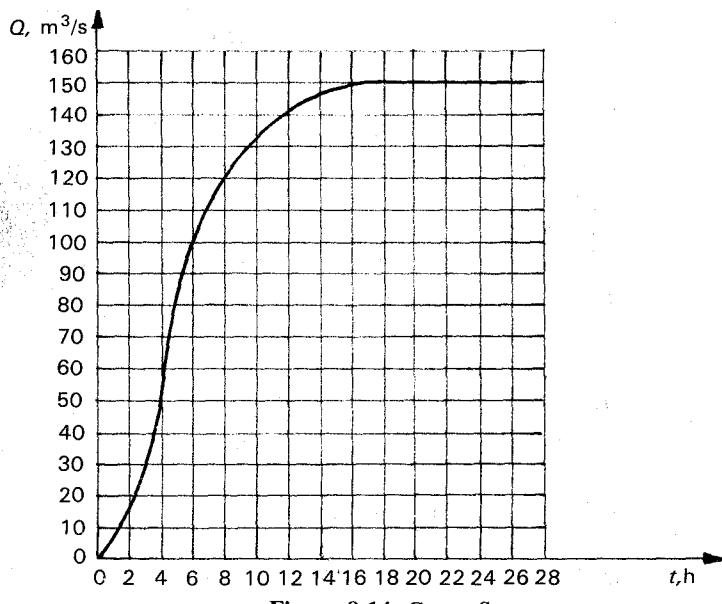


Figura 8.14 Curva S.

Tabla 8.5

I, h	2 $Curva S$	3 $Curva S$ $despl 3h$	4 $2 - 3$	5 4×0.67 $(HU para$ $d_e = 3h)$
0	0			0
1	10			6.7
2	20			13.3
3	35	0		23.3
4	50	10		26.7
5	70	20		33.3
6	90	35		36.7
7	100	50		33.3
8	110	70		26.7
9	118	90		18.7
10	126	100		17.3
11	132	110		14.7
12	138	118		13.3
13	142	126		10.7
14	146	132		9.3
15	148	138		6.7
16	150	142	8	5.3
17	150	146	4	2.7
18	150	148	2	1.3
19	150	150	0	0
20	150	150		
21	150	150		

c) Resta de las ordenadas de la curva S . En la columna 4 de la tabla 8.5 se ha hecho la resta de ordenadas.

d) Corrección. Se puede demostrar que el volumen del hidrograma obtenido en la cuarta columna de la tabla 8.5 es de $1.62 \times 10^6 m^3$, mientras que el volumen de un hidrograma unitario, cualquiera que sea su duración en exceso, debe ser:

$$V_e = Ac (1 \text{ mm}) = 1.08 \times 10^6 m^3$$

La relación entre ambos volúmenes es:

$$\frac{1.08}{1.62} = 0.67$$

que es precisamente el cociente de las respectivas duraciones en exceso:

$$\frac{2}{3} = 0.67$$

Así, si las ordenadas del hidrograma de la columna 4 de la tabla 8.5 se multiplican por 0.67, se obtiene un hidrograma unitario para $d_e = 3$ h (columna 5), que en efecto tiene el volumen de $1.08 \times 10^6 \text{ m}^3$, como puede comprobarse.

8.3.3 Métodos matriciales. Hidrograma unitario instantáneo

Considérense los hietogramas de lluvia efectiva mostrados en la figura 8.15.

Se observa que tanto la altura total de lluvia efectiva como la duración en exceso ($d_e = 14$ h) es igual en los tres hietogramas. Por lo tanto, si se tiene un hidrograma unitario para esta duración en exceso, podrían obtenerse los respectivos hidrogramas de escurrimiento directo. Sin embargo, en este caso los tres hidrogramas resultarían exactamente iguales, lo que no sucede en la realidad. El método del hidrograma unitario instantáneo toma en cuenta este problema, es decir, la distribución temporal de la lluvia.

Sea el hidrograma unitario para duración en exceso d_e mostrado en la figura 8.16a. Si se presenta una tormenta como la de la figura 8.16b, con varios períodos lluviosos, cada uno de ellos de duración en exceso d_e , enton-

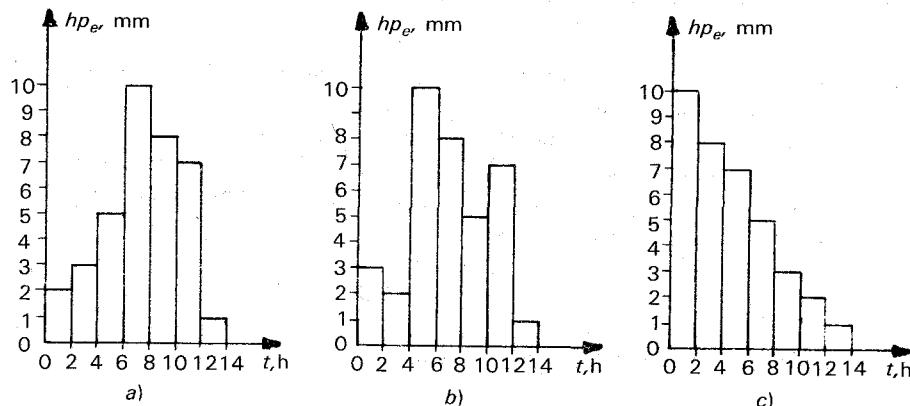


Figura 8.15 Hietogramas de lluvia efectiva.

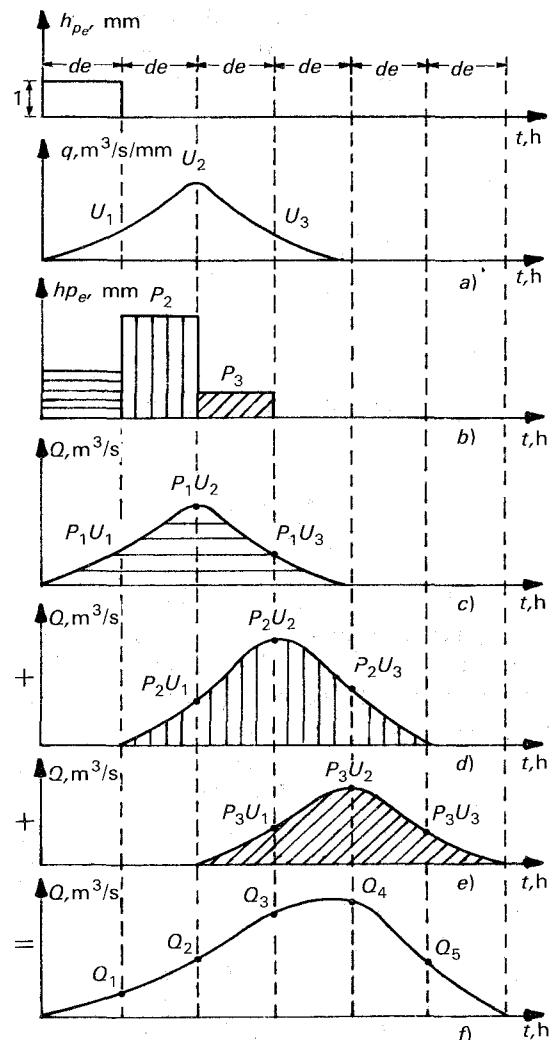


Figura 8.16

ces, de acuerdo con el principio de superposición de causas y efectos, los hidrogramas producidos por cada barra del hietograma serán los mostrados en la figura 8.16c, d y e, y el hidrograma de la tormenta completa será el mostrado en la figura 8.16f.

Así, si U_i es la i -ésima ordenada del hidrograma unitario (véase figura 8.16a) y P_j es la j -ésima lluvia del hietograma (véase figura 8.16b), las ordenadas Q_i del hidrograma (véase figura 8.16f) son, en este caso,

$$\begin{aligned} Q_1 &= P_1 U_1 \\ Q_2 &= P_1 U_2 + P_2 U_1 \\ Q_3 &= P_1 U_3 + P_2 U_2 + P_3 U_1 \\ Q_4 &= P_2 U_3 + P_3 U_2 \\ Q_5 &= P_3 U_3 \end{aligned} \quad (8.11)$$

En general, la k -ésima ordenada del hidrograma, Q_k , es:

$$Q_k = \sum_{j=1}^k P_j U_{k-j+1} \quad (8.11a)$$

Considérese el problema inverso, es decir, en el que se conoce el hidrograma (véase figura 8.16f) y la precipitación (véase figura 8.16b) y se desea obtener un hidrograma unitario como el de la figura 8.16a.

Naturalmente, el sistema de ecuaciones 8.11 sigue siendo válido; este sistema se puede escribir como:

$$P \{U\} = \{Q\} \quad (8.12)$$

donde:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ P_2 & P_1 & 0 \\ P_3 & P_2 & P_1 \\ 0 & P_3 & P_2 \\ 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix}; \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}; \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix}$$

La incógnita es entonces el vector $\{U\}$. Sin embargo, en el sistema 8.11 se tendrían cinco ecuaciones con tres incógnitas, por lo que el sistema es indeterminado y no existen valores de $\{U\}$ que satisfagan simultáneamente las

cinco ecuaciones. Así, para tener una solución del sistema 8.12 es necesario aceptar un cierto error en cada uno de los componentes de $\{U\}$; naturalmente, es deseable que dicho error sea el mínimo posible. Se puede demostrar (referencia 8.1) que se comete el mínimo error posible en los valores de $\{U\}$ si la ecuación 8.12 se premultiplica por la matriz traspuesta de P :

$$P^T P \{U\} = P^T \{Q\} \quad (8.13)$$

Lo que en este caso resultaría:

$$\begin{bmatrix} P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 & P_1 P_2 + P_2 P_3 & P_1 P_3 \\ P_1 P_2 + P_2 P_3 & P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 & P_1 P_2 + P_2 P_3 \\ P_1 P_3 & P_1 P_2 + P_2 P_3 & P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3 \\ P_1 Q_2 + P_2 Q_3 + P_3 Q_4 \\ P_1 Q_3 + P_2 Q_4 + P_3 Q_5 \end{Bmatrix} \quad (8.14)$$

El sistema 8.14 es ya un sistema determinado, con una solución única. Esta solución proporciona el valor del vector $\{U\}$ buscado. Nótese que en el caso del hidrograma unitario instantáneo, como en el tradicional, siempre debe especificarse la duración en exceso, que es la duración de las barras del hietograma de la figura 8.16b. Sin embargo, en contraposición con el hidrograma unitario tradicional, en el instantáneo se tiene una mayor flexibilidad en el manejo de esta duración en exceso, pudiéndose reducir tanto como se desee.

Asimismo (véase por ejemplo la ecuación 8.11), en todos los casos el número de ordenadas del hidrograma final N_Q está ligado con el número de barras del hietograma N_p , y al número de ordenadas del hidrograma unitario N_u por medio de la ecuación:

$$N_Q = N_p + N_u - 1 \quad (8.15)$$

Con esta ecuación es posible saber de antemano el número de ordenadas que tendrá el hidrograma unitario y, por lo tanto, el orden de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones (ecuaciones 8.13 y 8.14).

También conviene hacer notar que, bajo ciertas circunstancias, la solución de sistemas como el 8.14 produce algunas ordenadas negativas del hidrograma unitario. Aunque existen procedimientos de optimización que evitan este tipo de problemas, desde el punto de vista práctico podría ser suficiente obligar a que dichas ordenadas sean nulas, corrigiendo en consecuencia el volumen del hidrograma unitario pero respetando el valor del pico.

Ejemplo 8.2. Obtener un hidrograma unitario instantáneo para una cuenca en la que se registraron el hietograma de lluvia efectiva y el hidrograma de escurrimiento directo mostrados en las figuras 8.17a y 8.17b, respectivamente.

Solución

El número de barras del hietograma (véase figura 8.17a) es $N_p = 3$ y el número de ordenadas del hidrograma de escurrimiento directo (véase figura 8.17b), es $N_Q = 5$. Por lo tanto, de la ecuación 8.15, el número de ordenadas del hidrograma unitario será:

$$N_u = 5 - 3 + 1 = 3$$

La matriz de coeficientes y el vector de términos independientes son, de acuerdo con la ecuación 8.14,

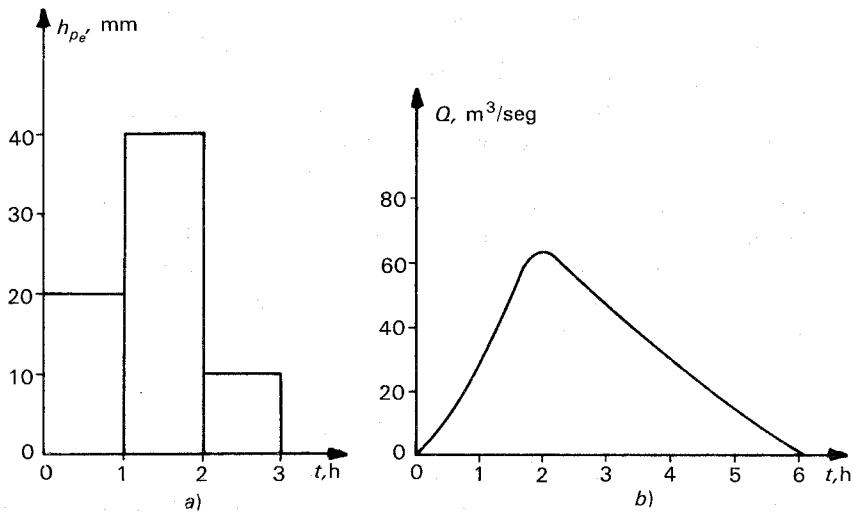


Figura 8.17

$$\begin{bmatrix} P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 & P_1 P_2 + P_2 P_3 & P_1 P_3 \\ P_1 P_2 + P_2 P_3 & P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 & P_1 P_2 + P_2 P_3 \\ P_1 P_3 & P_1 P_2 + P_2 P_3 & P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2100 & 1200 & 200 \\ 1200 & 2100 & 1200 \\ 200 & 1200 & 2100 \end{bmatrix}$$

$$P^T Q = \begin{bmatrix} P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3 \\ P_1 Q_2 + P_2 Q_3 + P_3 Q_4 \\ P_1 Q_3 + P_2 Q_4 + P_3 Q_5 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4200 \\ 4400 \\ 3000 \end{Bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} 2100 & 1200 & 200 \\ 1200 & 2100 & 1200 \\ 200 & 1200 & 2100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4200 \\ 4400 \\ 3000 \end{Bmatrix}$$

y su solución resulta (véase figura 8.18):

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} 1.485 \\ 0.759 \\ 0.853 \end{Bmatrix} \quad (8.16)$$

El hidrograma de la figura 8.18 puede ahora aplicarse a cualquier tormenta que se divida en intervalos de 1.0 h. Si se aplica al hietograma de la figura 8.17a para observar la magnitud del error que se comete en el cálculo de los gastos, se obtiene:

$$Q = \begin{Bmatrix} 29.7 \text{ m}^3/\text{s} \\ 74.6 \text{ m}^3/\text{s} \\ 62.3 \text{ m}^3/\text{s} \\ 41.7 \text{ m}^3/\text{s} \\ 8.5 \text{ m}^3/\text{s} \end{Bmatrix}$$

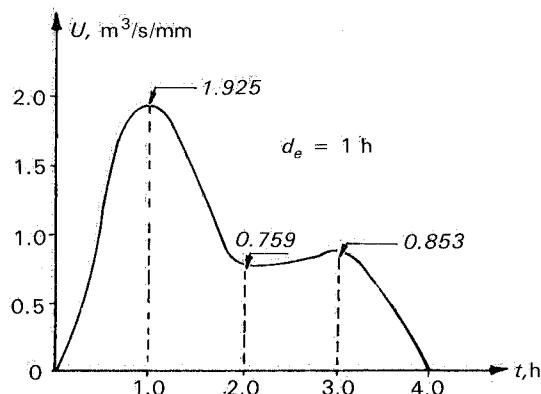


Figura 8.18

Este hidrograma se ha dibujado en la figura 8.19 junto con el original para fines comparativos.

8.3.4 Hidrogramas unitarios sintéticos

Para usar el método del hidrograma unitario, en cualquiera de las modalidades vistas en este capítulo, siempre es necesario contar con al menos un hidrograma medido a la salida de la cuenca, además de los registros de precipitación. Sin embargo, la mayor parte de las cuencas, no sólo en nuestro país, sino en todo el mundo, no cuentan con una estación hidrométrica o bien con los registros pluviográficos necesarios.

Por ello, es conveniente contar con métodos con los que puedan obtenerse hidrogramas unitarios usando únicamente datos de características generales de la cuenca. Los hidrogramas unitarios así obtenidos se denominan *sintéticos*.

Debido a su importancia, se ha desarrollado una gran cantidad de hidrogramas unitarios sintéticos; a continuación se explicarán tres de ellos.

8.3.4.1 Método de Chow

Chow (referencia 8.8) desarrolló un método para el cálculo del gasto de pico de hidrogramas de diseño de alcantarillas y otras estructuras de drenaje pequeñas. Este método sólo proporciona el gasto de pico y es aplicable a cuencas no urbanas con una área menor de 25 km^2 . Enseguida se presenta una versión simplificada de este método.

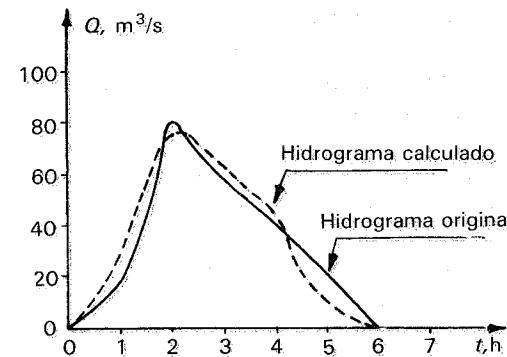


Figura 8.19

El gasto de pico Q_p de un hidrograma de escorrentamiento directo puede expresarse como el producto de la altura de precipitación efectiva P_e por el gasto de pico de un hidrograma unitario, q_p :

$$Q_p = q_p P_e \quad (8.17)$$

El gasto de pico del hidrograma unitario, q_p , se expresa como una fracción del gasto de equilibrio para una lluvia con intensidad $i = 1 \text{ mm}/d_e$ (ecuación 8.9):

$$q_p = \frac{1 \text{ mm}}{d_e} A_c Z \quad (8.18)$$

donde Z es la fracción mencionada, que se denomina *factor de reducción de pico*. Si A_c se expresa en km^2 y d_e en h, la ecuación 8.19 se escribe como:

$$q_p = \frac{0.278 A_c}{d_e} Z \quad (8.19)$$

donde q_p está en $\text{m}^3/\text{s}/\text{mm}$.

Sustituyendo 8.19 en 8.17, se tiene:

$$Q_p = \frac{0.278 P_e A_c}{d_e} Z \quad (8.20)$$

Dado que este método se usa en cuencas no instrumentadas, el procedimiento conveniente para valuar P_e a partir de la lluvia total, P , es el de los números de escurrimiento (apartado 7.2.5). El factor de reducción de pico Z se calcula, según Chow, como una función del tiempo de retraso (tiempo que transcurre del centro de masa de la precipitación al pico del hidrograma) y de la duración en exceso d_e , como se muestra en la figura 8.20. Esta figura se obtuvo a partir de 60 hidrogramas en 20 cuencas pequeñas (de 0.01 a 20/km²) del medio oeste estadounidense.

El tiempo de retraso se calcula, según Chow, como:

$$t_r = 0.005 \left[\frac{L}{\sqrt{S}} \right]^{0.64} \quad (8.21)$$

donde L es la longitud del cauce principal en m, S su pendiente en % y t_r , el tiempo de retraso en h. La fórmula 8.21 se obtuvo para las mismas cuencas mencionadas anteriormente.

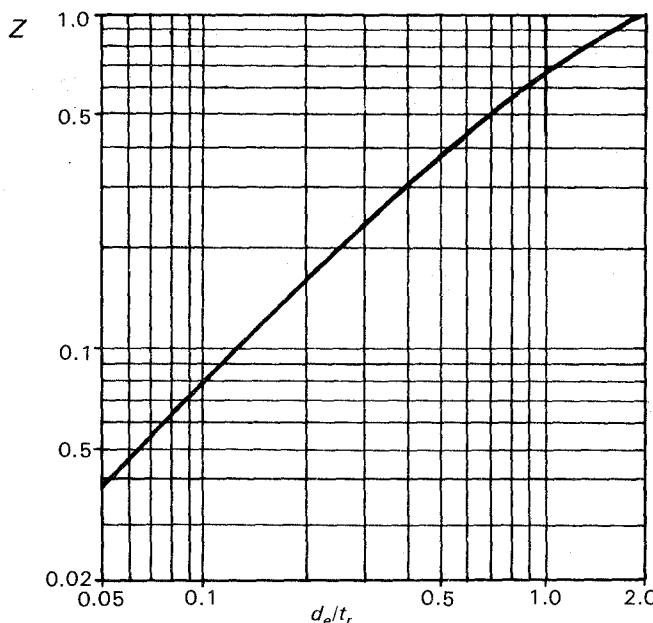


Figura 8.20

Hidrograma unitario

Para aplicar este método es muy conveniente tener los datos de precipitación en forma de curvas $i-d-T$ (apartado 6.3.7). Así, para el periodo de retorno adecuado al problema, se calcularían los picos correspondientes a varias duraciones y se escogería el mayor para el diseño.

Ejemplo 8.3. Calcular el gasto de diseño para una alcantarilla de una carretera con los siguientes datos:

- a) Área de la cuenca: 15 km^2 .
 - b) Longitud del cauce principal: 5 km.
 - c) Tipo de suelo: arcilla, en su totalidad.
 - d) Uso del suelo: bosques normales, en su totalidad.
 - e) Pendiente del cauce principal: 1%.

Las curvas i - d - T tienen la ecuación:

$$i = \frac{720 T^{0.4}}{d^{0.7}} \quad (8.22)$$

Solución

Se selecciona un periodo de retorno de 10 años. De la ecuación 8.22, usando $T = 10$ años y multiplicando por d , se tiene la siguiente relación entre la duración de la lluvia y la precipitación total:

$$P = \frac{720}{60} (10)^{0.4} d^{1-0.7} = 30.1 d^{0.3} \quad (8.23)$$

El tiempo de retraso es (ecuación 8.21):

$$t_r = 0.005 \times \left[\frac{5000}{1} \right]^{0.64} = 1.16 \text{ h} = 69.6 \text{ min}$$

El número de escurrimiento es, suponiendo que el suelo está inicialmente muy húmedo por ser la condición más desfavorable (véanse tablas 7.3, 7.4 y 7.5).

$$N = 89$$

En la tabla 8.6 se muestra el cálculo de los gastos pico. En la columna 1 se han supuesto diferentes duraciones de lluvia efectiva, con las cuales se han calculado las alturas de precipitación total con la ecuación 8.23 (nótese que se acepta el criterio del coeficiente de escurrimiento, apartado 7.2.2, por lo que $d = d_e$) anotadas en la columna 2. Las precipitaciones efectivas P_e de la columna 3 se calcularon con los valores de P y la ecuación 7.13. En la columna 4 se muestran los valores de d_e/t_r y en la columna 5 los correspondientes de Z , obtenidos de la figura 8.20. Finalmente, en la columna 6 se han calculado los gastos de pico resultantes de la ecuación 8.20.

Nótese que, debido a que la zona estudiada es muy lluviosa (ecuación 8.3), los gastos de pico obtenidos resultan notablemente elevados para el tamaño de la cuenca (véase figura 8.21).

El gasto de diseño será de $180 \text{ m}^3/\text{s}$. Si el río es perenne se debe agregar un gasto base al obtenido.

8.3.4.2 Hidrograma unitario triangular

Mockus (referencia 8.9) desarrolló un hidrograma unitario sintético de forma triangular, como se muestra en la figura 8.22.

De la geometría del hidrograma unitario, se escribe el gasto de pico como:

$$q_p = \frac{0.555 A}{t_b} \quad (8.24)$$

donde A = área de la cuenca en km^2 , t_p = tiempo de pico en h y q_p = gasto de pico en $\text{m}^3/\text{s}/\text{mm}$.

Tabla 8.6

1 $d_e, \text{ min}$	2 $P, \text{ mm}$	3 $P_e, \text{ mm}$	4 d_e/t_r	5 Z	6 $Q_p, \text{ m}^3/\text{s}$
10	60	33.9	0.14	0.10	84.6
20	74	46.3	0.29	0.22	127.2
30	84	55.4	0.43	0.32	147.9
40	91	61.8	0.58	0.43	166.2
50	97	66.9	0.72	0.52	174.1
60	103	73.0	0.86	0.59	179.6
70	108	77.7	1.01	0.65	180.5
80	112	81.5	1.15	0.70	178.4
90	116	85.3	1.29	0.71	168.4

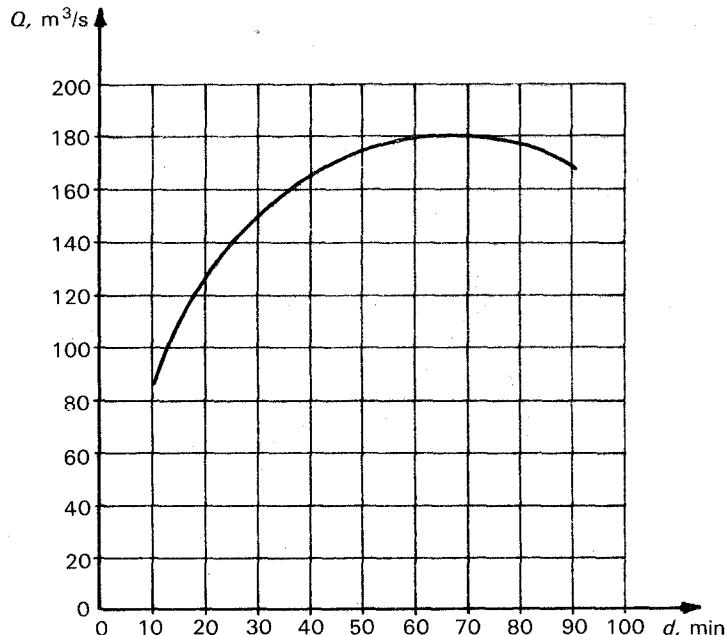


Figura 8.21

Del análisis de varios hidrogramas, Mockus concluye que el tiempo base y el tiempo de pico t_p se relacionan mediante la expresión:

$$t_b = 2.67 t_p \quad (8.25)$$

A su vez, el tiempo de pico se expresa como (figura 8.22):

$$t_p = \frac{d_e}{2} + t_r \quad (8.26)$$

donde d_e es la duración en exceso y t_r el tiempo de retraso, el cual se estima mediante el tiempo de concentración t_c (véase apartado 8.2, ecuaciones 8.5 y 8.6) como (referencia 8.2):

$$t_r = 0.6 t_c \quad (8.27)$$

o bien con la ecuación 8.21.

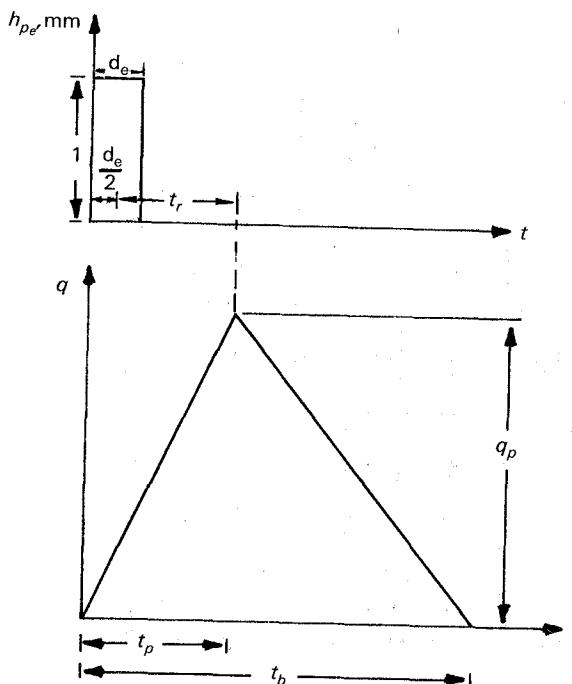


Figura 8.22 Hidrograma unitario sintético (forma triangular).

Además, la duración en exceso con la que se tiene mayor gasto de pico, a falta de mejores datos, se puede calcular aproximadamente como (referencia 8.2):

$$d_e = 2 \sqrt{t_c} \quad (8.28)$$

para cuencas grandes, o bien $d_e = t_c$ para las pequeñas. Todos los tiempos y la duración en exceso en las fórmulas 8.25 a 8.28 están en h.

Sustituyendo 8.25 en 8.24 se obtiene:

$$q_p = \frac{0.208 A}{t_p} \quad (8.29)$$

donde (ecuaciones 8.26 a 8.28):

$$t_p = \sqrt{t_c} + 0.6 t_c \quad (8.30)$$

Con las ecuaciones 8.25, 8.26 y 8.30 se calculan las características del hidrograma unitario triangular.

8.3.4.3 Hidrogramas unitarios adimensionales

En la mayoría de los casos, es suficiente con las características de un hidrograma unitario triangular para propósitos prácticos. Sin embargo, si la extensión de la curva de recesión del hidrograma afecta el diseño, puede usarse un hidrograma curvilíneo.

En la figura 8.23 se muestra un hidrograma unitario adimensional, obtenido a partir de varios hidrogramas registrados en una gran variedad de cuencas (referencia 8.9).

Para obtener un hidrograma unitario a partir de esta figura para una cuenca en particular, basta con multiplicar las ordenadas por el gasto de pico q_p de la ecuación 8.29 y las abscisas por el tiempo de pico de la ecuación 8.26.

Ejemplo 8.4. Determinar un hidrograma unitario sintético: a) triangular, y b) curvilíneo para la cuenca del ejemplo 8.3.

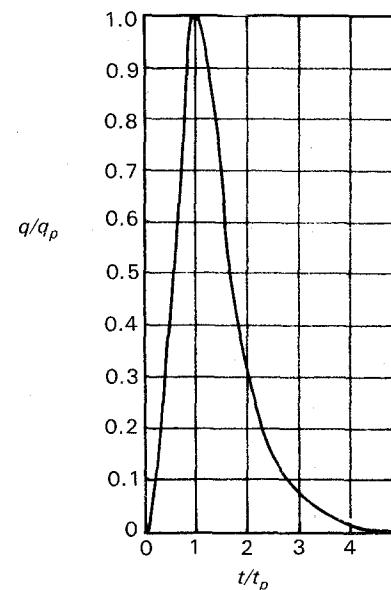


Figura 8.23

Solución

El tiempo de concentración es, según la ecuación 8.6,

$$t_c = 0.000325 \frac{L^{0.77}}{S^{0.385}} = 0.000325 \frac{5000^{0.77}}{0.01^{0.385}} = 1.35 \text{ h}$$

Dado que no se conoce la duración en exceso se usará la ecuación 8.28:

$$d_e = 2\sqrt{t_c} = 2\sqrt{1.35} = 2.32 \text{ h.}$$

El tiempo de retraso es entonces (ecuación 8.27):

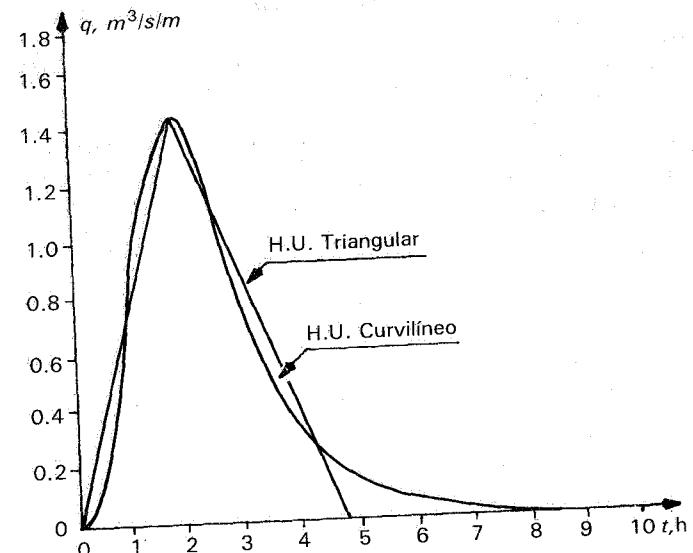
$$t_r = 0.6 t_c = 0.6 (1.35) = 0.81 \text{ h}$$

por lo tanto, el tiempo de pico resulta (ecuación 8.26):

$$t_p = \frac{d_e}{2} + t_r = \frac{2.32}{2} + 0.81 = 1.97 \text{ h}$$

Tabla 8.7

t, h	$q, \text{m}^3/\text{s/mm}$	t, h	$q, \text{m}^3/\text{s/mm}$
0.20	0.02	5.50	0.15
0.39	0.12	5.91	0.12
0.59	0.25	6.90	0.06
0.79	0.44	7.88	0.03
0.99	0.68	8.87	0.01
1.18	0.95	9.85	0.00
1.58	1.41		
1.97	1.58		
2.36	1.45		
2.76	1.19		
3.15	0.84		
3.55	0.66		
3.94	0.51		
4.33	0.38		
4.73	0.28		
5.12	0.21		

**Figura 8.24**

y el tiempo base (ecuación 8.25):

$$t_b = 2.67 t_p = 2.67 (1.97) = 5.26 \text{ h}$$

Finalmente, de la ecuación 8.29 el gasto de pico es:

$$q_p = \frac{0.208 A}{t_p} = \frac{0.208 (15)}{1.97} = 1.58 \text{ m}^3/\text{s/mm}$$

- a) En la figura 8.24 se muestra el hidrograma unitario triangular.
- b) Multiplicando las ordenadas de la figura 8.23 por $1.58 \text{ m}^3/\text{s/mm}$ y las abscisas por 1.97 h , se obtiene el hidrograma unitario curvilíneo calculado en la tabla 8.7 y mostrado en la figura 8.24.

BIBLIOGRAFÍA

- 8.1 Viessman, W., *Introduction to hydrology*. Harper & Row Publishers 2nd ed. New York, 1977.
- 8.2 Chow, V.T. (ed.) *Handbook of applied hydrology*. Mc Graw-Hill. New York, 1964.
- 8.3 Raudkivi, A.J., *Hydrology*. Pergamon Press. Oxford, 1979.

- 8.4 U.S. Bureau of Reclamation. *Design of Small Dams*. U.S. Government Printing Office, Washington, 1974.
- 8.5 Secretaría de Recursos Hidráulicos. *Proyecto de zonas de riego*. México, 1972.
- 8.6 Sherman L.K. *Stream flow from rainfall by the unitgraph method*. Eng. News Record, V, 108, p. 501, 1932.
- 8.7 Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos. "Envolventes de gastos máximos observados y probables en la República Mexicana". México, 1978.
- 8.8 Chow V.T.; "Hydrologic determination of waterway areas for the design of drainage structures in small drainage basins" Univ. Ill. Eng. Expt. Sta. Bull. 462, 1962.
- 8.9 Mockus, Victor. *Use of storm and watershed characteristics in synthetic unit hidrograph analysis and application*. U.S. Soil Conservation Service, 1957.

9

Probabilidad y estadística en hidrología

El diseño y la planeación de obras hidráulicas están siempre relacionadas con eventos hidrológicos futuros; por ejemplo, la avenida de diseño para el vertedor de una presa es un evento que tal vez no se ha presentado jamás, o al menos no en el periodo de datos disponible, pero que es necesario conocer para determinar las dimensiones de la obra. La complejidad de los procesos físicos que tienen lugar en la generación de esta avenida hace, en la mayoría de los casos, imposible una estimación confiable de la misma por métodos basados en las leyes de la mecánica o la física, sea porque estos métodos son insuficientes, sea porque el modelo matemático resultante sería exageradamente grande, complicado y difícil de manejar.

Por ello, y como sucede en la mayoría de las ciencias, con mucha frecuencia el estadístico es el camino obligado en la solución de los problemas. En particular, la probabilidad y la estadística juegan un papel de primer orden en el análisis hidrológico.

En este capítulo se dará una introducción al análisis estadístico en hidrología. Para ello, se hará, en primer lugar, un recordatorio de los conceptos fundamentales de la probabilidad y estadística; posteriormente, se estudiarán las principales funciones de distribución de probabilidad usadas en hidrología y, por último, se analizarán los límites de aplicabilidad de las diferentes funciones. Aunque este capítulo está principalmente enfocado a la determinación de gastos de pico de diseño, los métodos pueden, en general, aplicarse también a otro tipo de problemas, como los relacionados con volúmenes mensuales de escurrimiento o gastos mínimos anuales, por ejemplo.

9.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

9.1.1 Probabilidad y sus axiomas

Este apartado se realizó parafraseando a Kolmogorov (referencia 9.1).

Las leyes naturales más simples son aquellas que expresan las condiciones bajo las cuales un evento de interés ocurre o no ocurre con certeza. Estas condiciones se expresan como:

- Si se presenta un conjunto de condiciones S , entonces el evento A , seguramente, ocurre; o bien
- Si se presenta un conjunto de condiciones S , entonces el evento A no puede ocurrir.

En el primer caso, A es un *evento seguro* con respecto a las condiciones S y en el segundo es un *evento imposible*.

Cuando un evento A , en presencia de un conjunto de condiciones S , a veces ocurre y a veces no, se llama *aleatorio* con respecto al conjunto S . Es natural suponer que, cuando esto sucede, no se han tomado en cuenta en el conjunto S todas las condiciones necesarias para la ocurrencia o no ocurrencia del evento, y no, como a veces se hace, que no exista una ley física que conduzca a esta ocurrencia o no ocurrencia. Esas condiciones o leyes que no se incluyen en el análisis del evento A se suplen por una *ley de probabilidades*, la cual indica con qué *frecuencia* se presenta el evento dadas las condiciones S .

Sea, por ejemplo, el volumen mensual de escurrimiento en una sección dada de un río. Al tomar una muestra de los escurrimientos (esto es, al afilar la corriente en un número finito de meses), se observa que el volumen mensual de escurrimiento es a veces mayor de $300\ 000\ m^3$, pero a veces es menor. Si se quisiera aprovechar el agua del río, por ejemplo, para riego, pero sin hacer una presa, el dato de que el volumen es a veces mayor de $300\ 000\ m^3$, pero a veces menor resulta, obviamente, demasiado vago. Por otra parte, la determinación precisa de los volúmenes mensuales de escurrimiento que se presentarán durante los siguientes L años (siendo L la vida útil de la obra de captación) involucraría el análisis de un conjunto de condiciones que van desde las meteorológicas hasta los cambios que se presentarán en la cuenca de aportación demasiado complicado o para el cual no se dispone de herramientas adecuadas.

Podría entonces buscarse el volumen mínimo y el máximo observado durante los n meses en que se han hecho las observaciones y proporcionar al proyectista del aprovechamiento un dato de tipo:

$$25\ 000 \leq V \leq 1\ 000\ 000 \quad (9.1)$$

donde V es el volumen de escurrimiento mensual en m^3 .

Aunque 9.1 es de mayor utilidad que el dato de que el volumen mensual a veces es mayor de $300\ 000\ m^3$, pero a veces menor, todavía es de poca utilidad para el proyectista. Él recibaría una información mucho más valiosa si se le dice que en aproximadamente el 70% de los meses el volumen es mayor de $300\ 000\ m^3$; una evaluación mucho más completa de los escurrimientos del río sería mostrar, para cualquier volumen V , el porcentaje $\nu(V)$ de los meses en que han escurrido no menos de $V\ m^3$ en el periodo de datos (véase figura 9.1).

Si el número de meses de observación con cuyos datos se ha formado la figura 9.1 es grande (por ejemplo, 1 000), es razonable suponer que durante la vida útil de la obra (que podría ser de 500 meses) el escurrimiento en el río tendrá un comportamiento similar al mostrado en la figura 9.1, aunque, a menos que la muestra sea infinita, nunca será exactamente igual. Esto significa que, por grande que sea la muestra, siempre habrá alguna *probabilidad* (que disminuye conforme aumenta el tamaño de la muestra) de que el volumen en un mes cualquiera sea mayor de $10 \times 10^5\ m^3$ o menor de $0.25 \times 10^5\ m^3$. Entonces, la figura 9.1 es sólo una aproximación a la *ley de probabilidades* que suple las condiciones S , por las cuales el volumen mensual de escurrimiento toma un valor dado v ; dicha aproximación estará más cercana a esta ley conforme el tamaño de la muestra es mayor.

Considérese un grupo grande de series de pruebas (aforos del río). Sea n_r el número de pruebas en la r -ésima serie y μ_r el número de pruebas en esta serie en que ocurre un cierto evento A .

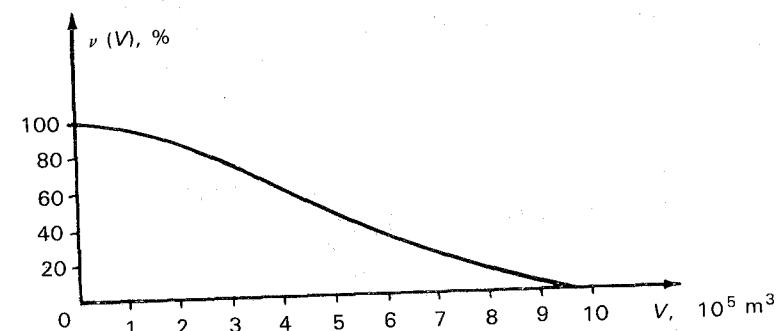


Figura 9.1

Se define como *frecuencia* ν_r del evento A al cociente:

$$\nu_r = \frac{\mu_r}{n_r} \quad (9.2)$$

Si ν_r es la misma para cualquier r , se dice que *el evento A ocurre con una probabilidad p, definida como:*

$$p = P(A) \equiv \nu_r \quad (9.3)$$

Obviamente, $0 \leq \mu_r \leq n_r$, de donde se desprende que $0 \leq \nu_r \leq 1$. Extendiendo esta idea de *frecuencia relativa* ν_r a probabilidad se tiene el *primer axioma de la teoría de la probabilidad*:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (9.4)$$

Por otra parte, cuando, para un evento E , ocurre que $\mu_r = n_r$, se dice que el evento E es seguro y entonces:

$$P(E) = 1 \quad (9.5)$$

Para que un evento sea seguro debe incluir todos los posibles casos o resultados del experimento (espacio muestral). Así, en el caso del escurrimiento del río, el evento seguro es:

$$E: 0 \leq V \leq \infty \quad (9.6)$$

La ecuación 9.5 constituye el *segundo axioma de la teoría de la probabilidad*. Una consecuencia de este axioma es que la probabilidad de que no se presente ninguno de los posibles eventos del espacio muestral es nula. Así, por ejemplo,

$$P(V < 0) = 0 \quad (9.7)$$

Se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes cuando no pueden ocurrir simultáneamente. Por ejemplo, el evento

$$A: V > 500,000 \text{ m}^3$$

y el evento

$$B: V < 10,000 \text{ m}^3$$

son mutuamente excluyentes. Si la frecuencia del evento A es ν_1 y la del evento B es ν_2 , entonces la frecuencia de la unión de los dos es $\nu = \nu_1 + \nu_2$; por lo tanto, la probabilidad de $C = A \cup B$ es:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (9.8)$$

que es el *tercer axioma de la teoría de la probabilidad*.

La ley de probabilidades que describe el comportamiento estadístico de una variable aleatoria —que en el caso mencionado anteriormente es el volumen de escurrimiento mensual— se puede representar de varias maneras, entre las que cabe mencionar la función masa de probabilidad discreta, la función de distribución de probabilidad acumulada, la función de densidad de probabilidad y la función de distribución de probabilidad. A continuación se hará un breve recordatorio de estas funciones y sus propiedades.

9.1.2 Funciones de probabilidad

A continuación y hasta el final del capítulo, se usarán, como es común, letras mayúsculas para denotar variables aleatorias y minúsculas para denotar los valores que toman dichas variables. También, como es costumbre, se denotará con mayúsculas a las funciones de distribución o acumuladas y con minúsculas a las funciones masa o de densidad.

9.1.2.1 Funciones discretas de probabilidad

Cuando el número de valores x que puede tomar una variable aleatoria X es finito, se dice que la variable aleatoria X es discreta. Por ejemplo, si en el experimento “tiro de dos dados” se define la variable aleatoria X como:

$$X = D_1 + D_2$$

donde D_1 y D_2 son los puntos obtenidos del primero y segundo dado respectivamente, el espacio muestral* será el mostrado en la tabla 9.1.

* Se define como “espacio muestral” al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento (referencia 9.5).

Tabla 9.1

1+1=2	2+1=3	3+1=4	4+1=5	5+1=6	6+1=7
1+2=3	2+2=4	3+2=5	4+2=6	5+2=7	6+2=8
1+3=4	2+3=5	3+3=6	4+3=7	5+3=8	6+3=9
1+4=5	2+4=6	3+4=7	4+4=8	5+4=9	6+4=10
1+5=6	2+5=7	3+5=8	4+5=9	5+5=10	6+5=11
1+6=7	2+6=8	3+6=9	4+6=10	5+6=11	6+6=12

En este caso, el número total de resultados posibles del experimento es 36 y el número n de valores que puede tomar la variable aleatoria X es 11 ($x=2,3,\dots,12$). La probabilidad asociada a cada uno de estos n posibles valores de X se muestra en la tabla 9.2 y en forma gráfica en la figura 9.2. Una función como la mostrada en esta figura se denomina “función masa de probabilidad discreta” si se refiere a la población o “histograma de frecuencias relativas” si se refiere a una muestra y describe el comportamiento de la variable aleatoria X . Este comportamiento puede también ser descrito en términos de probabilidades acumuladas mediante la función:

$$G(x) = P(X \leq x) \quad (9.9)$$

que se lee como “la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor menor o igual que x ”. En este caso, dado que la variable aleatoria X es discreta, se escribe:

$$G(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) \quad (9.10)$$

La función $G(x)$ se muestra en la figura 9.3.

9.1.2.2 Funciones continuas de probabilidad

Cuando el número n de valores que puede tomar una variable aleatoria X es infinito, como es el caso, por ejemplo, de los volúmenes de escorrentamiento mensual de un río, se dice que dicha variable aleatoria es continua.

Es posible deducir la forma equivalente a la función de la figura 9.2 para variables aleatorias continuas al imaginar dados con un número muy grande de caras. En el límite, cuando el número de caras tiende a infinito, la función tendría un aspecto como el que se muestra en la figura 9.4.

Una función como ésta se llama *función de densidad de probabilidad*.

Tabla 9.2

$x = \text{valor de } X$	Número de resultados favorables	Probabilidad $g(x) = P(X = x)$
2	1	1/36
3	2	2/36 = 1/18
4	3	3/36 = 1/12
5	4	4/36 = 1/9
6	5	5/36
7	6	6/36 = 1/6
8	5	5/36
9	4	4/36 = 1/9
10	3	3/36 = 1/12
11	2	2/36 = 1/18
12	1	1/36

Nótese que, al contrario de lo que sucede con la función masa de la figura 9.2, cuando una variable aleatoria es continua, la probabilidad de que ésta tome un valor *exacto* es siempre nula:

$$P(X = x) = 0 \quad (9.11)$$

y sólo es posible hablar de probabilidades diferentes de cero para intervalos finitos:

$$P(a \leq X \leq b) \neq 0, a < b, a > x_0, b < x_1 \quad (9.12)$$

donde (x_0, x_1) es el intervalo de definición de la variable aleatoria X . Mediante un argumento similar, la función que equivale a la figura 9.3 para la variable aleatoria continua del ejemplo tiene una forma como la que se muestra en la figura 9.5.

En este caso, como en la ecuación 9.9:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (9.13)$$

y en términos de la función de densidad de probabilidad $f(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (9.14)$$

Obviamente, debe cumplirse también que:

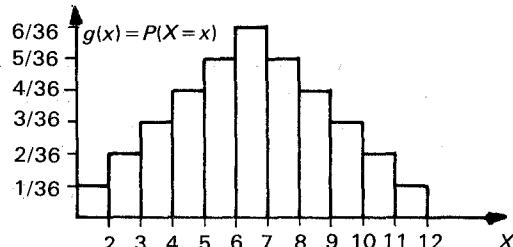


Figura 9.2

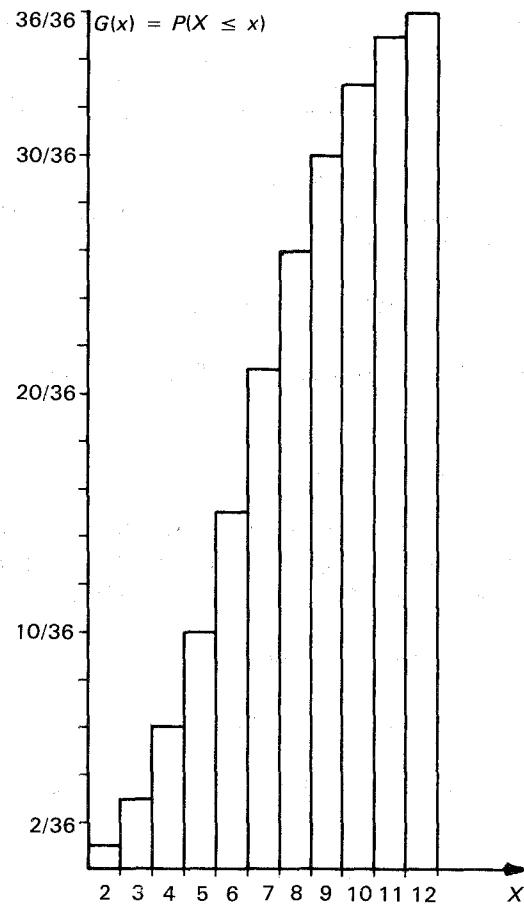


Figura 9.3

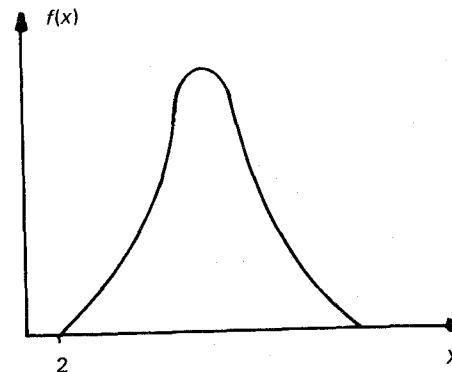


Figura 9.4

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (9.15)$$

Nótese que de acuerdo con los dos primeros axiomas de la probabilidad:

$$f(x) \geq 0 \quad (9.16a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (9.16b)$$

y que, según la ecuación 9.14:

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) = \\ &= \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = F(b) - F(a) \end{aligned} \quad (9.17)$$

También, de acuerdo con el primer axioma de la probabilidad,

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad (9.18)$$

y además:

$$F(b) > F(a) \text{ si } b > a \quad (9.18a)$$

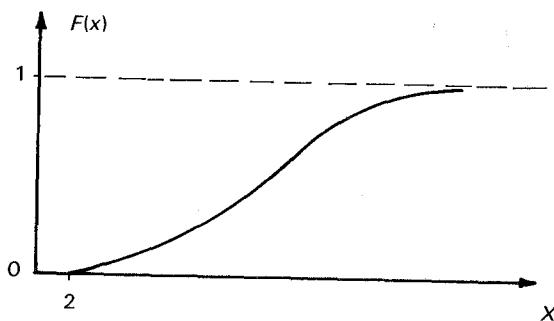


Figura 9.5

Ejemplo 9.1. Determinar el valor de la constante a de la función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases} \quad (9.19)$$

¿Cuál es la probabilidad de que un valor X seleccionado aleatoriamente de esta función: a) sea menor que 2? b) esté entre 1 y 3? c) sea mayor que 4? d) sea mayor que 6? e) sea igual a 2.5?

Solución

De la ecuación 9.16b se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^5 f(x)dx + \int_5^{\infty} f(x)dx = 1 \quad (9.20)$$

Sustituyendo 9.19 en 9.20:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (0) dx + \int_0^5 ax^2 dx + \int_5^{\infty} (0) dx &= \int_0^5 ax^2 dx = \\ &= \left[\frac{ax^3}{3} \right]_0^5 = \frac{125a}{3} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto: } a = \frac{3}{125}.$$

La función de densidad de probabilidad es entonces:

$$f(x) = \frac{3x^2}{125} \quad (9.21)$$

y la función de distribución de probabilidad resulta (ecuación 9.14)

$$F(x) = \frac{x^3}{125} \quad (9.22)$$

Entonces:

$$a) \text{ de 9.13, } F(2) = P(X \leq 2) = \frac{8}{125}$$

$$b) \text{ de 9.17, } P(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1) = \frac{9}{125} - \frac{1}{125} = \frac{8}{125}$$

$$\begin{aligned} c) \text{ de 9.13, } P(X \geq 4) &= 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - \frac{64}{125} = \\ &= \frac{61}{125} \end{aligned}$$

$$d) P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - 1 = 0$$

$$e) \text{ de 9.11, } P(X = 2.5) = 0$$

9.1.3 Período de retorno

Cada espacio muestral tiene su propia función de distribución o de densidad de probabilidad, que normalmente no se conoce *a priori*. Cuando de ese espacio se extrae un grupo de datos (muestra) al azar, es razonable esperar que su función de distribución de probabilidad sea similar a la del espacio completo, en particular si la muestra es grande. Además, lo más razonable que se puede suponer en cuanto a la frecuencia de cada dato del grupo es que ésta sea, dentro del espacio muestral, igual a la observada.

Tabla 9.3

año	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
$Q_{\text{máx}}$ m^3/s	2000	5000	4500	3800	2900	3100	1500	2200	3900	4700

Considérese, por ejemplo, el conjunto de diez gastos máximos anuales de la tabla 9.3.

Si esta muestra fuera todo el espacio, la función de distribución de probabilidades sería la mostrada en la figura 9.6. De esta función se observa, por ejemplo, que la probabilidad de que el gasto máximo anual sea menor o igual a $1500 \text{ m}^3/\text{s}$ se encuentra dentro de los límites.

$$0 \leq P(X \leq 1500 \text{ m}^3/\text{s}) \leq 0.1 \quad (9.23)$$

y la probabilidad de que dicho gasto sea menor o igual a $5000 \text{ m}^3/\text{s}$ se encuentra dentro de los límites

$$0.9 \leq P(X \leq 5000 \text{ m}^3/\text{s}) \leq 1.0 \quad (9.24)$$

Los límites de las ecuaciones 9.23 y 9.24 se pueden expresar en función de la posición de la variable aleatoria $X (= Q_{\text{máx}})$ en una tabla de valores de la misma, ordenados de mayor a menor (véase tabla 9.4). Así, si m es el número de

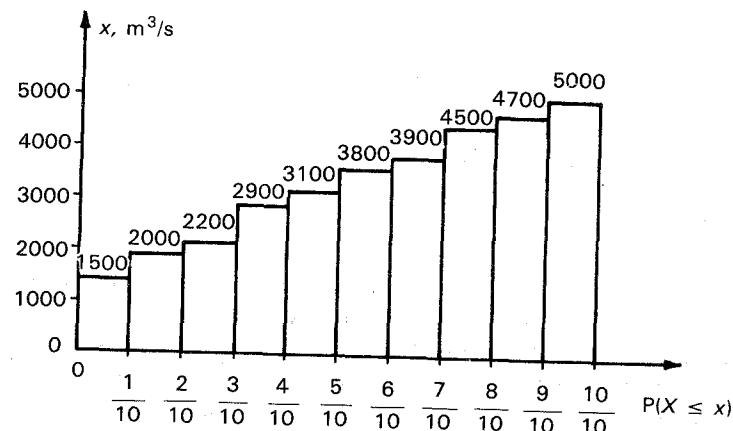


Figura 9.6

Tabla 9.4

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X = Q_{\text{máx}}$ (m^3/s)	5000	4700	4500	3900	3800	3100	2900	2200	2000	1500

orden y n el número total de datos, y si se escoge el límite superior en las ecuaciones 9.23 y 9.24, se tiene para un valor x con número de orden m :

$$P(X \leq x) = 1 + \frac{1-m}{n} \quad (9.25)$$

y si se toma el límite inferior resulta:

$$P(X \leq x) = 1 - \frac{m}{n} \quad (9.26)$$

Se observa que, en el caso de la ecuación 9.25, la probabilidad de que el gasto sea mayor de $5000 \text{ m}^3/\text{s}$ es nula y, en el segundo caso, la probabilidad de que el gasto máximo anual sea menor de $1500 \text{ m}^3/\text{s}$ es también nula. Sin embargo, resulta absurdo decidir que jamás se presentará un gasto mayor de $5000 \text{ m}^3/\text{s}$ o uno menor de $1500 \text{ m}^3/\text{s}$ sólo porque en 10 años de registro no se han presentado gastos de estas magnitudes. En vista de que este gasto es una variable aleatoria continua, cuyo dominio de definición es:

$$0 \leq x \leq \infty \quad (9.27)$$

siempre habrá una probabilidad no nula de que se presente un gasto menor o igual que un valor cualquiera en este rango, no importa qué tan pequeño o grande sea dicho valor.

De aquí la necesidad de usar una fórmula que asigne una probabilidad no nula a cualquier evento. Esto puede hacerse con una fórmula del tipo:

$$P(X \leq x) = 1 - \frac{2m-1}{2n} \quad (9.28)$$

que sitúa la probabilidad exactamente en el centro del intervalo.

Otra manera de hacer lo anterior es suponiendo que la frecuencia observada de un evento es la misma que la población de frecuencias de ese evento (referencia 9.2), lo que conduce a la fórmula:

$$P(X \leq x) = 1 - \frac{m}{n+1} \quad (9.29)$$

La ecuación 9.29 es la más usada en hidrología. El periodo de retorno* del m -ésimo evento de los n registrados es entonces, de acuerdo con las ecuaciones 9.29 y 6.45,

$$T = \frac{n+1}{m} \quad (9.30)$$

Así, el máximo evento registrado en un conjunto de 10 tiene un periodo de retorno de 11 años y el mínimo lo tiene de 1.1 años.

En hidrología, normalmente se prefiere trabajar con periodos de retorno en lugar de probabilidades, pues es un concepto que resulta más claro ya que tiene las mismas unidades (tiempo) que la vida útil de las obras y puede compararse con ésta. Dicho concepto se estudió en el apartado 6.3.7.

9.2 FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD USADAS EN HIDROLOGÍA

Una vez que se asigna un periodo de retorno al gasto de diseño de la obra en cuestión, generalmente es necesario, para conocer dicho gasto de diseño, hacer extrapolaciones a partir de los gastos máximos anuales registrados, pues rara vez este periodo es menor al periodo de datos.

Por ejemplo, puede ser necesario determinar un gasto de diseño con periodo de retorno de 1 000 años a partir de 25 años de registro. Si los gastos máximos anuales registrados se dibujan contra sus respectivos periodos de retorno, generalmente se observa alguna tendencia más o menos definida. El problema radica en cómo extender esta tendencia hasta el periodo de retorno deseado. Una posibilidad es extrapolar los datos *a ojo*, es decir, gráficamente. Aunque este método puede dar muy buenos resultados si se aplica por una persona con experiencia, tiene la desventaja de la subjetividad; esto es, si veinte ingenieros diferentes lo aplican, es probable que el resultado sean veinte gráficas diferentes.

Para eliminar esta subjetividad, se debe buscar entre las distintas funciones de distribución de probabilidad teóricas la que se ajuste mejor a los datos medidos, y usar esta función para la extrapolación.

En la estadística existen decenas de funciones de distribución de probabilidad teóricas; de hecho, existen tantas como se quiera, y obviamente no es posible probarlas todas para un problema particular. Por lo tanto, es necesa-

* Para una discusión más amplia sobre periodo de retorno, ver apartado 6.3.7.1.

rio escoger, de esas funciones, las que se adapten mejor al problema bajo análisis.

Entre las funciones de distribución de probabilidad usadas en hidrología, se estudiarán las siguientes:

- a) Normal.
- b) Lognormal.
- c) Pearson III.
- d) Gumbel.
- e) Funciones para dos poblaciones.

Las funciones anteriores, aún cuando son las más comúnmente usadas en la hidrología aplicada, no son todas, pues el enfoque de este texto no es exhaustivo. No obstante, se presentan las bases necesarias para estudiar cualquier función de distribución de probabilidad.

Las funciones normal y lognormal son generalmente apropiadas para variables aleatorias que cubren todo el rango de valores de los resultados posibles del experimento bajo análisis, como por ejemplo los volúmenes de escurrimiento mensual en un río. Las funciones Gumbel se desarrollaron para el análisis de los valores extremos de dichos resultados (referencia 9.3), como los gastos máximos o mínimos anuales. La función Pearson III ocupa un lugar intermedio.

Las funciones de distribución de probabilidad se estudiarán sin mucha justificación teórica, tanto en lo que respecta a su desarrollo como a la evaluación de sus parámetros, considerando que dicha justificación teórica se sale del enfoque de este texto. El lector interesado puede recurrir a las referencias listadas al final de este capítulo. En general, los estimadores de los parámetros de las distribuciones que se indican en el texto son los que pueden obtenerse por el método de momentos; se incluyeron sólo éstos por ser los más sencillos, pero no debe olvidarse que existen otros métodos (*e.g.* máxima verosimilitud y mínimos cuadrados). Además, el uso de las funciones puede tener ciertas limitaciones que no se mencionan necesariamente a continuación.

9.2.1 Distribución normal

La función de densidad de probabilidad normal se define como:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

donde μ y σ son los parámetros de la distribución. Estos parámetros determinan la forma de la función $f(x)$ y su posición en el eje x (véase figura 9.7).

Es posible demostrar (referencia 9.2) que μ y σ son, respectivamente, la media y la desviación estándar de la población y pueden estimarse como la media y desviación estándar de los datos. De acuerdo con la ecuación 9.14, la función de distribución de probabilidad normal es:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (9.32)$$

Hoy en día, no se conoce analíticamente la integral de la ecuación 9.32, por lo que es necesario recurrir a métodos numéricos para valuarla. Sin embargo, para hacer esto se requeriría una tabla para cada valor de μ y σ , por lo que se ha definido la variable *estandarizada*

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (9.33)$$

que está normalmente distribuida con media cero y desviación estándar unitaria. Así, la función de distribución de probabilidad (ecuación 9.32) se puede escribir como:

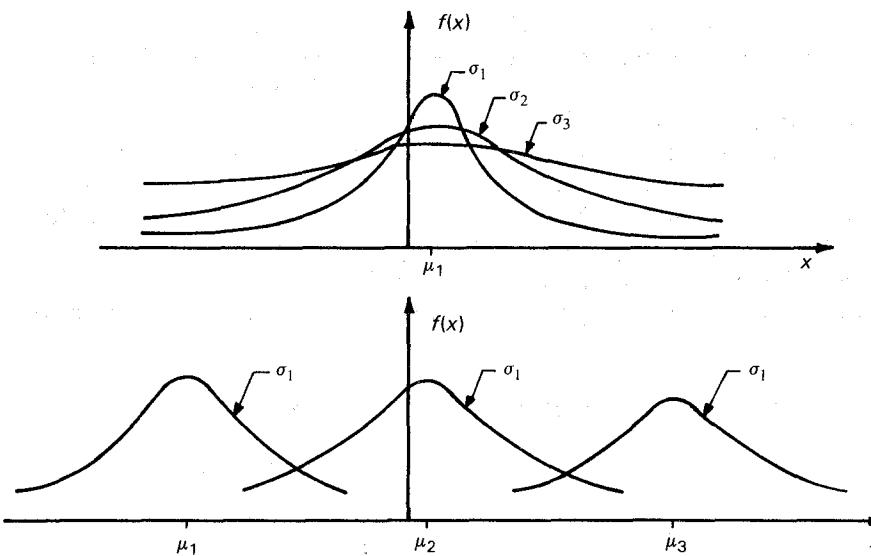


Figura 9.7

$$F(x) = F(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \quad (9.34)$$

La función $F(z)$ se ha calculado numéricamente y se han publicado tablas de ella. En la tabla 1 del apéndice A se muestra esta función. Debido a que la función $F(z)$ es simétrica, en dicha tabla se encuentran únicamente valores de:

$$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

con lo que es posible calcular $F(z)$ para cualquier valor de z .

Otra manera de estimar $f(z)$ o $F(z)$, más conveniente si se usa una computadora, es mediante fórmulas aproximadas. La función de densidad $f(z)$ se approxima, con una precisión mayor de 2.27×10^{-3} , como (referencia 9.4):

$$f(z) = (a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6)^{-1} \quad (9.35)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= 2.490895 \\ a_1 &= 1.466003 \\ a_2 &= -0.024393 \\ a_3 &= 0.178257 \end{aligned}$$

y la función de distribución como (referencia 9.4):

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= H(z), z > 0 \\ F(z) &= 1 - H(z), z < 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.36)$$

donde

$$H(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} (b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3) \quad (9.37)$$

$$\text{siendo } q = \frac{1}{1 + b_0 |z|}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= 0.33267 \\ b_1 &= 0.43618 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= -0.12017 \\ b_3 &= 0.93730 \end{aligned}$$

Ejemplo 9.2. Los gastos máximos anuales registrados en la estación hidrométrica Las Perlas en el río Coatzacoalcos se muestran en la tabla 9.5.

- ¿Cuál es la probabilidad de que, en un año cualquiera, el gasto sea mayor o igual a $7\ 500\ m^3/s$?
- Se planea construir cerca de este sitio un bordo para protección contra inundaciones. ¿Cuál debe ser el gasto de diseño si se desea que el periodo de retorno sea de 60 años?

Supóngase que los datos de la tabla 9.5 siguen una distribución normal.

Solución

La media y desviación estándar de los datos son respectivamente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{25} x_i}{n} = 3\ 886\ m^3/s$$

Tabla 9.5

año	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
$x = \text{gasto máximo, } m^3/s$	2230	3220	2246	1804	2737	2070	3682
año	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
$x, m^3/s$	4240	2367	7061	2489	2350	3706	2675
año	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
$x, m^3/s$	6267	5971	4744	6000	4060	6900	5565
año	1975	1976	1977	1978			
$x, m^3/s$	3130	2414	1796	7430			

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 1\ 825.9\ m^3/s$$

La media y desviación estándar de la población pueden entonces estimarse como:

$$\begin{aligned} \mu &\doteq \bar{x} = 3\ 886\ m^3/s \\ \sigma &\doteq S = 1\ 825.9\ m^3/s \end{aligned}$$

a) Para $x = 7\ 500\ m^3/s$, la variable estandarizada z es (ecuación 9.33):

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{7\ 500 - 3\ 886}{1\ 825.9} = 1.98$$

De la tabla 1 del apéndice A o de la ecuación 9.36 se obtiene:

$$F(x) = F(z) = P(X \leq 7\ 500) = 0.9761$$

Por lo que la probabilidad de que el gasto máximo anual sea mayor o igual que $7\ 500\ m^3/s$ resulta:

$$P(X \geq 7\ 500) = 1 - P(X \leq 7\ 500) = 1 - 0.9761 = 0.0239$$

b) De la ecuación 6.45 se tiene que:

$$T = \frac{1}{P(X \geq x)} = \frac{1}{1 - P(X \leq x)}$$

Por lo tanto:

$$P(X \leq x) = \frac{T-1}{T} \quad (9.38)$$

Entonces, para $T = 60$ años, la función de distribución de probabilidad es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{59}{60} = 0.9833$$

y de la tabla 1 del apéndice A o resolviendo la ecuación 9.36 por tanteos, se obtiene la variable estandarizada:

$$z = 2.126$$

Por lo tanto, despejando x de la ecuación 9.33 se tiene:

$$x = z\sigma + \mu = 2.126 (1825.9) + 3886$$

$$x = 7775.2 \text{ m}^3/\text{s}$$

Entonces, según la distribución normal el gasto de diseño para un periodo de retorno de 60 años es de $7775.2 \text{ m}^3/\text{s}$.

9.2.2 Distribución lognormal

En esta función los logaritmos naturales de la variable aleatoria se distribuyen normalmente. La función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \frac{1}{x\beta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \alpha}{\beta}\right)^2} \quad (9.39)$$

donde α y β son los parámetros de la distribución. Si se compara la ecuación 9.39 con la 9.31, se deduce que α y β son respectivamente la media y la desviación estándar de los logaritmos de la variable aleatoria. En la figura 9.8 se muestra una gráfica de la función de densidad de probabilidad para diferentes valores de α y β .

Como se observa, esta función no necesariamente es simétrica.

Los valores de α y β se estiman a partir de n observaciones x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, como:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\ln x_i}{n} \quad (9.40)$$

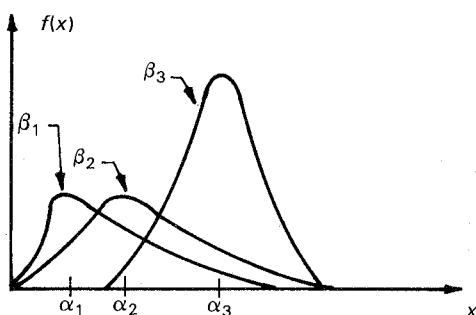


Figura 9.8

$$\beta = \left[\sum_{i=1}^n \frac{(\ln x_i - \alpha)^2}{n} \right]^{1/2} \quad (9.41)$$

La función de distribución de probabilidad es, de acuerdo con la ecuación 9.14:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \frac{1}{x\beta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \alpha}{\beta}\right)^2} dx \quad (9.42)$$

Los valores de la función de distribución de probabilidad 9.42 se obtienen usando la tabla 1 del apéndice A o la fórmula 9.36 si la variable estandarizada se define como:

$$z = \frac{\ln x - \alpha}{\beta} \quad (9.43)$$

Ejemplo 9.3. Resolver el ejemplo 9.2 usando la función de distribución log-normal.

Solución

La media y desviación estándar de los datos, estimadores de las de la población, son (ecuaciones 9.40 y 9.41):

$$\alpha = \sum_{i=1}^{25} \frac{\ln x_i}{25} = 8.162$$

$$\beta = \left[\sum_{i=1}^{25} \frac{(\ln x_i - 8.162)^2}{25} \right]^{1/2} = 0.451$$

a) Para $x = 7500 \text{ m}^3/\text{s}$, la variable estandarizada (ecuación 9.43) es:

$$z = \frac{\ln (7500) - 8.162}{0.451} = 1.687$$

De la tabla 1 del apéndice A, o la fórmula 9.36, se obtiene:

$$F(x) = F(z) = 0.9545$$

y por lo tanto:

$$P(x \geq 7500) = 1 - P(x \leq 7500) = 1 - F(x) = 1 - 0.9545 = 0.0455$$

b) Nuevamente, de 9.38 se tiene:

$$F(z) = F(x) = 0.9833$$

De la tabla 1 del apéndice A o resolviendo 9.36 por tanteo, para este valor de $F(z)$ se obtiene:

$$z = 2.13$$

Despejando x de la ecuación 9.43:

$$x = e^{z\beta + \alpha}$$

$$\therefore \boxed{x = e^{2.13(0.451) + 8.162} = 9160.3 \text{ m}^3/\text{s}} \quad (9.44)$$

9.2.3 Distribución Pearson III o Gamma de tres parámetros

La función de densidad de probabilidad Pearson III se define como:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\beta_1)} \left\{ \frac{x - \delta_1}{\alpha_1} \right\}^{\beta_1 - 1} e^{-\frac{x - \delta_1}{\alpha_1}} \quad (9.45)$$

donde α_1 , β_1 y δ_1 son los parámetros de la función y $\Gamma(\beta_1)$ es la función Gamma. En el apéndice A se hallan las propiedades básicas y la tabla de valores de la función Gamma.

$$X_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Los parámetros α_1 , β_1 y δ_1 se evalúan, a partir de n datos medidos, mediante el siguiente sistema de ecuaciones (referencia 9.2):

$$\bar{x} = \alpha_1 \beta_1 + \delta_1 \quad (9.46)$$

$$S^2 = \alpha_1^2 \beta_1 \quad (9.47)$$

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{\beta_1}} \quad (9.48)$$

donde \bar{x} es la media de los datos, S^2 su variancia y γ su coeficiente de sesgo, que se define como:

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^3 / n}{S^3} \quad (9.49)$$

La función de distribución de probabilidad es:

$$F(x) = \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\beta_1)} \int_0^x e^{-\left(\frac{x-\delta_1}{\alpha_1}\right)} \left(\frac{x-\delta_1}{\alpha_1}\right)^{\beta_1-1} dx \quad (9.50)$$

Sustituyendo

$$y = \frac{x - \delta_1}{\alpha_1} \quad (9.51)$$

la ecuación 9.50 se escribe como:

$$F(y) = \frac{1}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^y y^{\beta_1-1} e^{-y} dy \quad (9.52)$$

La función 9.52 es una función de distribución ji cuadrada con $2\beta_1$ grados de libertad y $\chi^2 = 2y$ (referencia 9.4):

$$F(y) = F(\chi^2 | \nu) = F_{\chi^2}(2y | 2\beta_1) \quad (9.53)$$

En la tabla 3 del apéndice A se encuentra la función de distribución χ^2 . Esta manera de usar la función de distribución Pearson III es estrictamente válida cuando $\beta_1 = \eta/2$, donde η es un entero positivo cualquiera. Si, como es común, 2β es no entero, puede tomarse como el entero más próximo o bien interpolar en la tabla 3 del apéndice A. Cuando $\beta < 0.3$, será necesario acudir a tablas de la función de distribución Gamma de un parámetro, como la que puede hallarse en la referencia 9.5. Por otra parte, es también común que los valores calculados de δ con las ecuaciones 9.46 a 9.48 resulten absurdos.

dos (muy grandes o negativos). En estos casos, es recomendable fijar el valor de δ a ojo, como la ordenada al origen en una gráfica de gasto contra periodo de retorno.

Otra manera muy común de usar esta función de distribución de probabilidad es tomando logaritmos de la variable aleatoria y suponiendo que éstos se comportan según dicha función. A esta manera de usarla se le denomina "función de distribución de probabilidad Log-Pearson III" (referencia 9.2).

Ejemplo 9.4. Resolver el ejemplo 9.2 usando la función de distribución Pearson III.

Solución

a) Cálculo de los valores de α_1 , β_1 y δ_1 . El coeficiente de sesgo γ es (ecuación 9.49):

$$\gamma = \sum_{i=1}^{25} \frac{(x_i - 3886)^3 / 25}{(1825.9)^3} = 1.258$$

Entonces (ecuaciones 9.46, 9.47 y 9.48):

$$\beta_1 = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^2 = \left(\frac{2}{1.258}\right)^2 = 2.526$$

$$\alpha_1 = \frac{S}{\sqrt{\beta_1}} = \frac{1825.91}{\sqrt{2.526}} = 1148.8$$

$$\delta_1 = \bar{x} - \alpha_1 \beta_1 = 3886 - 1148.8 (2.526) = 983.9$$

Para 7500 m³/s, la variable estandarizada y es (ecuación 9.51):

$$y = \frac{7500 - 983.9}{1148.8} = 5.672$$

El valor de χ^2 y el número de grados de libertad son entonces (ecuación 9.53):

$$\begin{aligned}\chi^2 &= 2y = 2(5.672) = 11.344 \\ \nu &= 2\beta_1 = 2(2.526) = 5.05\end{aligned}$$

De la tabla 3 del apéndice A se obtiene, para estos valores de χ^2 y ν (se tomaron 5 grados de libertad):

$$F(x) = 95.5 \%$$

Por lo tanto,

$$P(x \leq 7500) = 1 - F(7500) = 1 - 95.5 = 4.5\%.$$

b) De acuerdo con los problemas anteriores:

$$P(X \leq x) = F(x) = F(y) = 0.9833$$

De la tabla 3 del apéndice A se obtiene por interpolación para $\nu = 5$: $x_{0.9833}^2 = 14.1$; de 9.53:

$$y = \frac{14.1}{2} = 7.05$$

y de 9.51:

$$x = 7.05 (1148.8) + 983.9 = 9071 \text{ m}^3/\text{s}.$$

9.2.4 Distribución Gumbel

Supóngase que se tienen N muestras, cada una de las cuales contiene n eventos. Si se selecciona el máximo x de los n eventos de cada muestra, es posible demostrar (referencia 9.3) que, a medida que n aumenta, la función de distribución de probabilidad de x tiende a:

$$F(x) = e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}} \quad (9.54)$$

La función de densidad de probabilidad es entonces:

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha(x-\beta)} - e^{-\alpha(x-\beta)} \quad (9.55)$$

donde α y β son los parámetros de la función.

Los parámetros α y β se estiman (referencia 9.2) como:

$$\alpha = \frac{1.2825}{S} \quad (9.56)$$

$$\beta = \bar{x} - 0.45 S \quad (9.57)$$

para muestras muy grandes, o bien como:

$$\alpha = \frac{\sigma_y}{S} \quad (9.58)$$

$$\beta = \bar{x} - \mu_y/\alpha \quad (9.59)$$

para muestras relativamente pequeñas, donde μ_y y α_y se muestran en la tabla 9.6.

Ejemplo 9.5. Resolver el ejemplo 9.2 usando la función de distribución Gumbel.

Tabla 9.6

n	μ_y	σ_y
10	0.4952	0.9496
15	0.5128	1.0206
20	0.5236	1.0628
25	0.5309	1.0914
30	0.5362	1.1124
35	0.5403	1.1285
40	0.5436	1.1413
45	0.5463	1.1518
50	0.5485	1.1607
55	0.5504	1.1682
60	0.5521	1.1747
65	0.5535	1.1803
70	0.5548	1.1854
75	0.5559	1.1898
80	0.5569	1.1938
85	0.5578	1.1974
90	0.5586	1.2007
95	0.5593	1.2037
100	0.5600	1.2065

Solución

Para 25 años de registro, de la tabla 9.6 se tiene:

$$\mu_y = 0.5309; \sigma_y = 1.0914$$

Por lo tanto, de las ecuaciones 9.58 y 9.59;

$$\alpha = \frac{1.0914}{1825.91} = 0.000598 \text{ (m}^3\text{/s)}^{-1}$$

$$\beta = \bar{x} - \frac{\mu_y}{\alpha} = 3886 - \frac{0.5309}{0.000598} = 2997.81 \text{ m}^3\text{/s}$$

a) Para $x = 7500 \text{ m}^3\text{/s}$, de la ecuación 9.54:

$$F(x) = e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}} = e^{-e^{-0.000598(7500-2997.8)}}$$

$$F(x) = 0.9345$$

Por lo tanto:

$$P(X \geq 7500 \text{ m}^3\text{/s}) = 1 - 0.9345 = 0.065$$

b) Para $T=60$ años, de las ecuaciones 9.38 y 9.54:

$$F(x) = \frac{T-1}{T} = 0.9833 = e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}}$$

Despejando x :

$$x = \beta - \frac{1}{\alpha} \ln \ln \left(\frac{T}{T-1} \right) = 2997.8 - \frac{1}{0.000598} \ln \ln \left(\frac{1}{0.9833} \right) = 9827.1 \text{ m}^3\text{/s.}$$

9.2.5 Funciones de distribución para dos poblaciones

En muchos lugares, especialmente en las zonas costeras de México, los gases máximos anuales pertenecen a dos poblaciones diferentes: la primera es

la de los gastos producidos por precipitaciones relacionadas con los fenómenos meteorológicos dominantes en la región en estudio, y la segunda es la de los gastos producidos por precipitaciones ciclónicas, normalmente mayores que los primeros.

También sucede en algunas zonas, como el noroeste de la República Mexicana, que una población está compuesta por gastos producidos directamente por precipitaciones, y otra por gastos provenientes de deshielos. En adelante se hablará de gastos producidos por tormentas ciclónicas o no ciclónicas por ser el caso más común, pero no debe olvidarse que las mismas ideas se pueden aplicar también a casos como el descrito.

González (referencia 9.6) ha demostrado que, en estos casos, la función de distribución de probabilidad se puede expresar como:

$$F(x) = F_1(x) [p + (1-p) F_2(x)] \quad (9.60)$$

donde $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son, respectivamente, las funciones de distribución de probabilidad de los gastos máximos anuales no producidos por tormentas ciclónicas y de los producidos por ellas, y p es la probabilidad de que en un año cualquiera el gasto máximo no sea producido por una tormenta ciclónica.

El número de parámetros de la función 9.60 es:

$$n = n_1 + n_2 + 1 \quad (9.61)$$

donde n_1 = número de parámetros de $F_1(x)$, n_2 = número de parámetros de $F_2(x)$ y el parámetro restante es p .

Asimismo, González usa un método numérico de minimización del error para calcular los valores de los parámetros. Este método está fuera del enfoque de este texto, por lo que se explicará sólo un criterio aproximado para calcular dichos parámetros.

En este criterio es, en primer lugar, necesario estimar p , la probabilidad de que un año cualquiera sea no ciclónico.

Esto se puede hacer usando la información de boletines meteorológicos, preguntando a los habitantes de la zona o bien inspeccionando los gastos máximos anuales. En general, se observa con cierta claridad un salto brusco en los valores de los gastos no ciclónicos a los ciclónicos.

Este salto también se manifiesta en una gráfica de gasto contra periodo de retorno (véase figura 9.8a).

El valor de p será entonces:

$$p = \frac{N_n}{N_T} \quad (9.62)$$

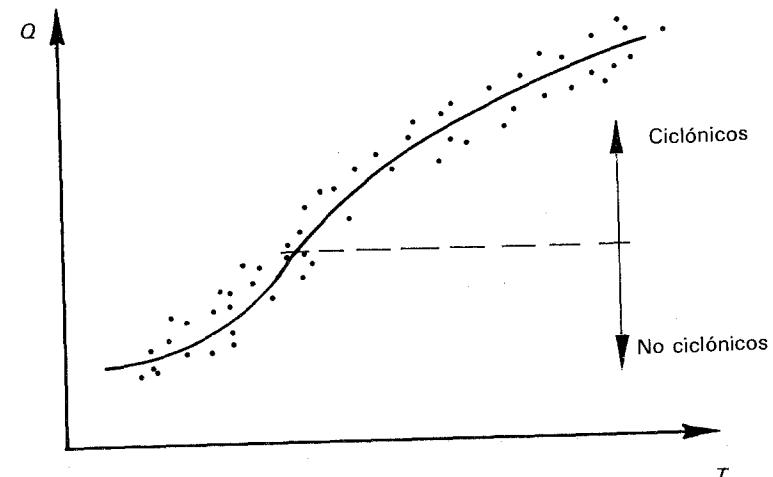


Figura 9.8a

donde N_n es el número de años de registro en que el gasto máximo no se produjo por una tormenta ciclónica y N_T es el número total de años de registro.

Si se tienen dudas en cuanto a los años en que los gastos máximos fueron producidos por ciclones, es aconsejable probar diferentes valores de N_n hasta que se logre un buen ajuste (véase apartado 9.3). Si se cuenta con una computadora, resulta conveniente usar el método que se describe en la referencia 9.6.

Una vez estimados los años en que se presentaron ciclones y el valor de p , el resto de los parámetros se evalúan mediante las fórmulas vistas en los subcapítulos anteriores.

Es común aceptar que $F_1(x)$ y $F_2(x)$ (ecuación 9.60) son del tipo Gumbel. De ser así, entonces:

$$F(x) = e^{-e^{-\alpha_1(x-\beta_1)}} [p + (1 - p) e^{-e^{-\alpha_2(x-\beta_2)}}] \quad (9.63)$$

donde α_1 y β_1 son los parámetros correspondientes a la población no ciclónica y α_2 y β_2 corresponden a la ciclónica.

Ejemplo 9.6. Resolver el ejemplo 9.2 usando una función de distribución de probabilidad para dos poblaciones, suponiendo que ambas tienen una función de distribución Gumbel.

Solución.

En la tabla 9.7 se muestran los gastos máximos anuales ordenados de mayor a menor.

Supóngase que los siete primeros gastos fueron producidos por una tormenta ciclónica. De este modo, $N_n = 18$, $N_T = 25$ y:

$$p = \frac{18}{25} = 0.72$$

Las medias y desviaciones estándar de las poblaciones no ciclónicas y ciclónicas son:

Tabla 9.7

<i>m</i>	<i>T</i> años	<i>x</i> m^3/s
1	26.00	7430
2	13.00	7061
3	8.67	6900
4	6.50	6267
5	5.20	6000
6	4.33	5971
7	3.71	5565
8	3.25	4744
9	2.89	4240
10	2.60	4060
11	2.36	3706
12	2.17	3682
13	2.00	3220
14	1.86	3130
15	1.73	2737
16	1.63	2675
17	1.53	2489
18	1.44	2414
19	1.37	2367
20	1.30	2350
21	1.24	2246
22	1.18	2230
23	1.13	2070
24	1.08	1804
25	1.04	1796

$$\bar{x}_1 = 2712.6 \text{ m}^3/\text{s}; S_1 = 2089.2 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\bar{x}_2 = 6456.3 \text{ m}^3/\text{s}; S_2 = 630.6 \text{ m}^3/\text{s}$$

Los parámetros α_1 , α_2 , β_1 y β_2 son, entonces, de acuerdo con las ecuaciones 9.58 y 9.59:

$$\alpha_1 = \frac{1.05}{2089.2} = 0.000503 \text{ (m}^3/\text{s})^{-1}$$

$$\alpha_2 = \frac{0.94}{630.6} = 0.00149 \text{ (m}^3/\text{s})^{-1}$$

$$\beta_1 = 2712.6 - \frac{0.52}{0.000503} = 1678.8 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\beta_2 = 6456.3 - \frac{0.494}{0.00149} = 6124.8 \text{ m}^3/\text{s}$$

donde los valores de μ_{y_1} , σ_{y_1} , μ_{y_2} y σ_{y_2} se interpolaron en la tabla 9.6.
La función de distribución de probabilidad resulta ser entonces:

$$F(x) = e^{-e^{-0.00053(x-1678.8)}} \left[0.72 + (0.28)e^{-e^{-0.00149(x-6124.8)}} \right] \quad (9.64)$$

a) Para $x = 7500 \text{ m}^3/\text{s}$, de la ecuación 9.64 se tiene:

$$F(7500) = 0.916$$

Por lo tanto:

$$P(X \geq 7500 \text{ m}^3/\text{s}) = 1 - 0.916 = 0.084.$$

b) Aquí se requiere un valor de x tal que:

$$F(x) = 0.9833$$

De la ecuación 9.64, por tanteo:

x m ³ /s	$F(x)$
9000	0.9710
10000	0.9840
9800	0.9822
9900	0.9831

$$\therefore x = 9900 \text{ m}^3/\text{s.}$$

9.3 LÍMITES DE APLICABILIDAD Y SELECCIÓN DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

En la tabla 9.8 se resumen los resultados de los ejemplos 9.2 a 9.6.

Se observa que la diferencia entre una y otra función puede ser apreciable. En muchos casos las diferencias son mucho mayores que las que resultan aquí. Una selección apresurada de cualquiera de las funciones podría traducirse en una estructura sobrediseñada y costosa o subdiseñada y peligrosa. Por ello, se debe seleccionar la función con cuidado. Enseguida se describen algunos métodos para hacerlo.

9.3.1 Análisis gráfico

Un primer método que se usa para seleccionar la función consiste simplemente en inspeccionar una gráfica donde se haya dibujado cada una de las diferentes funciones junto con los puntos medidos (figuras 9.9 a 9.13). La fun-

Tabla 9.8

Función de distribución	$P(X \geq 7500 \text{ m}^3/\text{s})$ %	x para $T=60$ años, m ³ /s
Normal	2.39	7775
Lognormal	4.55	9160
Pearson III	4.50	9071
Gumbel	6.50	9827
Gumbel dos poblaciones	8.40	9900

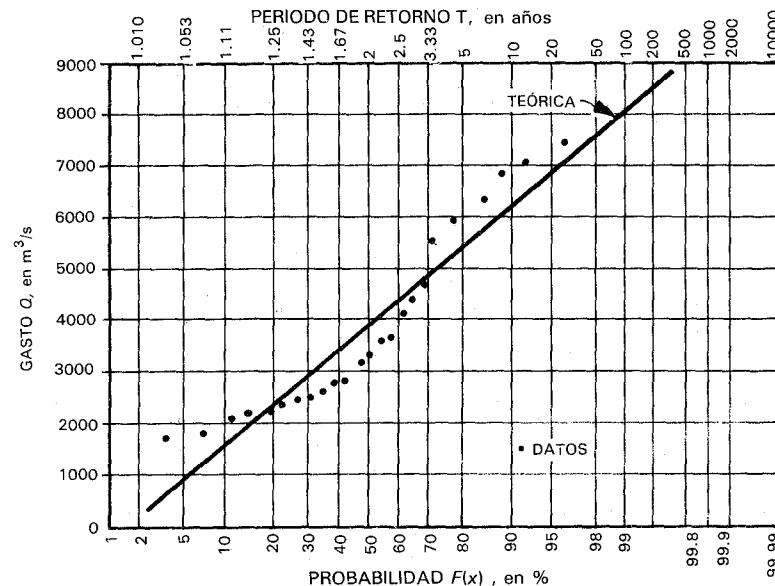


Figura 9.9 Distribución normal.

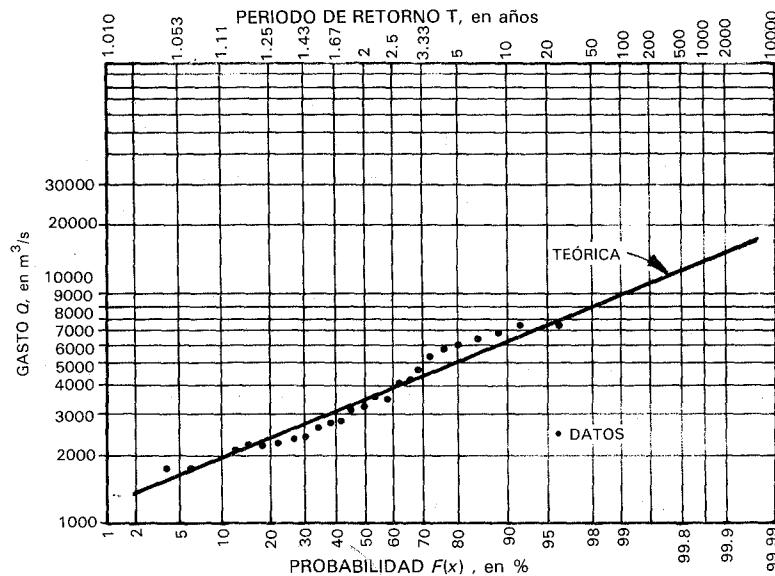


Figura 9.10 Distribución Log normal.

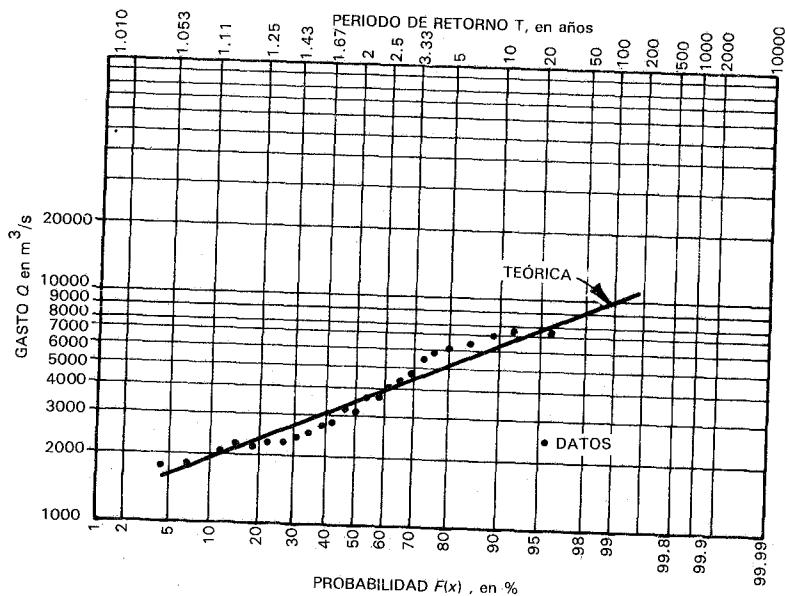


Figura 9.11 Distribución Pearson III.

ción de distribución de probabilidad que se seleccione será la que se apegue visualmente mejor a los datos medidos.

Este método se usa a veces, incluso, para ajustar las funciones de distribución de probabilidad a los datos medidos, dibujando en un papel especial para cada función dichos datos, escogiendo la función para la que el conjunto de puntos sea semejante a una línea recta y finalmente trazando a ojo dicha línea recta para poder hacer las extrapolaciones necesarias.

Este es un método con un alto grado de subjetividad y, usado aisladamente, puede ser tanto peligroso. Sin embargo, es muy ilustrativo y recomendable para ser usado con otros métodos. Si lo aplica un ingeniero con experiencia, puede resultar el mejor de todos.

9.3.2 Método del error cuadrático mínimo

Este método es menos subjetivo que el anterior. Consiste en calcular, para cada función de distribución, el error cuadrático

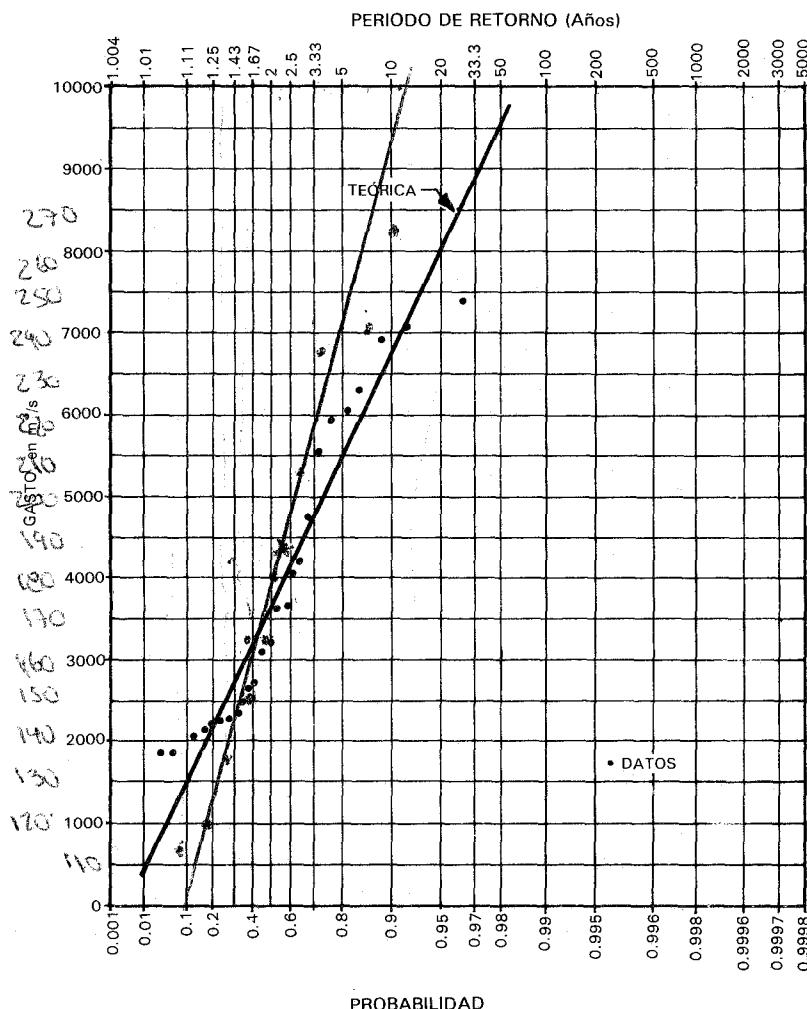


Figura 9.12 Distribución Gumbel.

$$C = \left[\sum_{i=1}^n (x_{e_i} - x_{o_i})^2 \right]^{1/2} \quad (9.65)$$

donde x_{e_i} es el i -ésimo dato estimado y x_{o_i} es el i -ésimo dato calculado con la función de distribución bajo análisis. En la tabla 9.9 se muestran los gastos

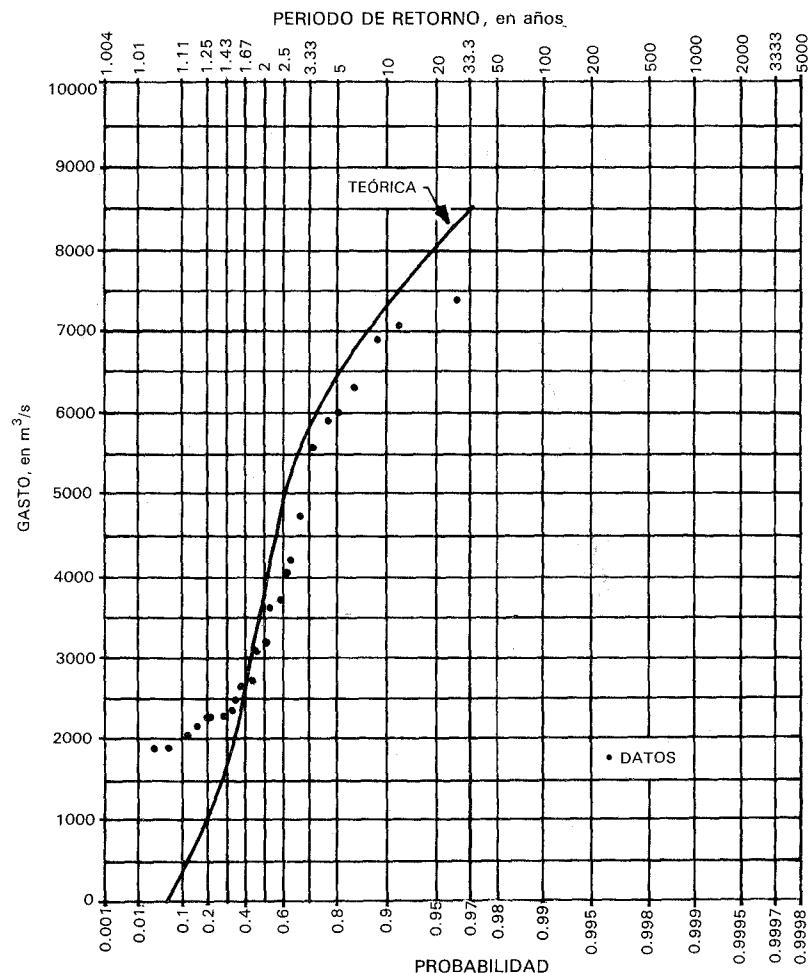


Figura 9.13 Distribución Gumbel para dos poblaciones.

estimados para cada una de las funciones de distribución usadas en el subcapítulo anterior, y los errores cuadráticos correspondientes.

De los resultados consignados en la tabla 9.9, se observa que las funciones que parecen ser más adecuadas en este caso son las lognormal, Pearson III y Gumbel. De ellas, la Pearson III es la que tiene el error cuadrático más pequeño, aunque las diferencias entre las tres no son muy significativas.

Tabla 9.9

<i>T</i> años	x_o m^3/s	NORMAL		LOG NORMAL		PEARSON III		GUMBEL		GUMBEL 2 POBL.	
		x_e m^3/s	$(x_e - x_o)^2$	x_e m^3/s	$(x_e - x_o)^2$						
26	7430	7118	97344	7787	127449	7789	128881	8416	972196	8521	1190281
13	7061	6489	327184	6668	154449	6783	77284	7222	25921	7623	315844
8.67	6900	6075	680625	6019	776161	6141	576081	6510	152100	7135	55225
6.50	6267	5748	269361	5552	511225	5753	264196	5992	75625	6784	267289
5.20	6000	5473	277729	5187	660969	5369	398161	5581	175561	6530	280900
4.33	5971	5229	550564	4884	1181569	4983	976144	5235	541696	6296	105625
3.71	5565	5007	311364	4624	885481	4688	769129	4935	396900	6071	256036
3.25	4744	4803	3481	4396	121104	4490	64516	4672	5184	5857	1238769
2.89	4240	4609	136161	4191	2401	4289	2401	4431	36481	5603	1857769
2.60	4060	4422	131044	4001	3481	4087	729	4207	21609	5242	1397124
2.36	3706	4237	281961	3823	13689	3882	30976	3995	83521	4656	902500
2.17	3682	4065	146689	3664	146689	3688	36	3804	14884	4149	218089
2.00	3220	3886	443556	3505	81225	3483	69169	3611	152881	3680	211600
1.86	3130	3713	339889	3359	52441	3336	42436	3432	91204	3289	25281
1.73	2737	3527	624100	3207	220900	3181	197136	3245	258064	2919	33124
1.63	2675	3359	467856	3077	161604	3046	137641	3083	166464	2626	2401
1.53	2489	3165	456976	2933	197136	2890	160801	2900	168921	2294	38025
1.44	2414	2958	295936	2787	139129	2732	101124	2713	89401	1982	186624
1.37	2367	2767	160000	2659	85264	2595	51984	2547	32400	1718	421201
1.30	2350	2542	36864	2515	27225	2441	8281	2357	49	1416	872356
1.24	2246	2307	3721	2373	16129	2288	1764	2168	6084	1142	1218816
1.18	2230	2014	46656	2207	529	2122	11664	1941	83521	810	2016400
1.13	2070	1695	140625	2040	900	1970	10000	1708	131044	479	2531281
1.08	1804	1245	312481	1826	484	1771	1089	1397	165649	49	3080025
1.04	1796	654	304164	1578	47524	1564	53824	1022	599076	—	—
C			2810		2369		2033		2108		4327

9.3.3 Pruebas de bondad del ajuste

En la teoría estadística, las pruebas de bondad del ajuste más conocidas son la χ^2 y la Kolmogorov-Smirnov. Enseguida se describen de manera breve.

Una descripción detallada de las bases estadísticas de estas pruebas se sigue del enfoque de este texto. El lector interesado puede recurrir a la referencia 9.5.

9.3.3.1 Prueba χ^2

La prueba χ^2 es la más popular. Fue propuesta por Karl Pearson en 1900.

Tabla 9.10

Intervalo <i>i</i>	Límite Inferior <i>I_i</i>	Límite Superior <i>S_i</i>	Marca de clase	Número observado <i>θ_i</i>
1	0	1400	700	0
2	1400	2800	2100	11
3	2800	4200	3500	5
4	4200	5600	4900	3
5	5600	7000	6300	4
6	7000	8400	7700	2

$$\Sigma = n = 25$$

Para aplicar la prueba, el primer paso es dividir los datos en un número k de intervalos de clase, como se muestra en la tabla 9.10 para los datos del ejemplo anterior, donde se ha escogido $k = 6$.

Posteriormente se calcula el parámetro estadístico:

$$D = \sum_{i=1}^k (\theta_i - \epsilon_i)^2 / \epsilon_i \quad (9.66)$$

donde θ_i es el número observado de eventos en el intervalo i y ϵ_i es el número esperado de eventos en el mismo intervalo.

ϵ_i se calcula como:

$$\epsilon_i = n [F(S_i) - F(I_i)] \quad i=1, 2, \dots, k \quad (9.67)$$

donde $F(S_i)$ es la función de distribución de probabilidad en el límite superior del intervalo i , $F(I_i)$ es la misma función en el límite inferior y n es el número de eventos. En la columna 5 de la tabla 9.11 se muestran los valores ϵ_i para las cinco funciones de distribución vistas anteriormente.

Una vez calculado el parámetro D para cada función de distribución considerada, se determina el valor de una variable aleatoria con distribución χ^2 para $v = k - 1 - m$ grados de libertad y un nivel de significancia α , donde m es el número de parámetros estimados a partir de los datos.

Para aceptar una función de distribución dada, se debe cumplir:

$$D \leq \chi^2_{1-\alpha, k-1-m} \quad (9.68)$$

El valor de $\chi^2_{1-\alpha, k-1-m}$ se obtiene de tablas de la función de distribución χ^2 , como la 4 del apéndice A.

Tabla 9.11

Función de distribución	Intervalo <i>i</i>	$F(S_i)$	$F(I_i)$	ϵ_i	$(\theta_i - \epsilon_i)^2 / \epsilon_i$	D
Normal	1	0.087	0.017	1.75	1.75	
	2	0.276	0.087	4.73	8.31	
	3	0.432	0.276	3.90	0.31	
	4	0.824	0.432	9.80	4.72	
	5	0.956	0.824	3.30	0.15	
	6	0.993	0.956	0.93	1.23	
					24.41	16.47
Lognormal	1	0.021	0	0.53	0.53	
	2	0.309	0.021	7.20	2.01	
	3	0.655	0.309	8.65	1.54	
	4	0.851	0.655	4.90	0.74	
	5	0.938	0.851	2.18	1.52	
	6	0.974	0.938	0.90	1.34	
					24.36	7.68
Pearson III	1	0.019	0	0.48	0.48	
	2	0.466	0.019	11.18	0.00	
	3	0.637	0.466	4.28	0.12	
	4	0.831	0.637	4.85	0.71	
	5	0.933	0.831	2.55	0.83	
	6	0.976	0.933	1.08	0.78	
					24.42	2.92
Gumbel	1	0.074	0.002	1.80	1.80	
	2	0.324	0.074	6.25	3.61	
	3	0.614	0.324	7.25	0.70	
	4	0.810	0.614	4.90	0.74	
	5	0.913	0.810	2.58	0.79	
	6	0.961	0.913	1.20	0.53	
					23.98	8.17
Gumbel dos poblaciones	1	0.228	0.070	3.95	3.95	
	2	0.408	0.228	4.50	9.39	
	3	0.543	0.408	3.38	0.78	
	4	0.654	0.543	2.78	0.02	
	5	0.871	0.654	5.43	0.37	
	6	0.958	0.871	2.18	0.01	
					22.22	14.52

Los valores de la α que se usan normalmente son del 10, 5 y 1%. El valor de α , en la teoría estadística, es la probabilidad de rechazar la *hipótesis nula*

$$H_0: \text{La función de distribución de probabilidad es } \mathcal{D}(\alpha, \beta, \dots) \quad (9.69)$$

cuando en realidad es cierta, es decir, de cometer un *error tipo I*. En la ecuación 9.69, \mathcal{D} es la función de distribución de probabilidad considerada y α, β, \dots son sus parámetros.

Sin embargo, α no se puede hacer arbitrariamente pequeña sin incrementar al mismo tiempo la probabilidad de cometer un *error tipo II*, que es el de aceptar H_0 cuando en realidad no es verdadera. El valor más común de α es de 0.05 (referencia 9.5); para este nivel de significancia suelen aceptarse varias funciones de distribución de probabilidad. De ser el caso, y si se usa solamente este criterio para aceptar una función, se escogería la que tiene el menor valor de D .

Así, seleccionando un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$, se tiene, para funciones de dos parámetros (tabla 3 del apéndice A):

$$\chi^2_{0.95,3} = 7.81 \quad (9.70)$$

para funciones de tres parámetros:

$$\chi^2_{0.95,2} = 5.99 \quad (9.71)$$

y para funciones de cuatro parámetros estimados de los datos:

$$\chi^2_{0.95,1} = 3.84 \quad (9.72)$$

Comparando $\chi^2_{0.95,3}$ con los valores de D correspondientes a las funciones normal, lognormal y Gumbel, que tienen dos parámetros, se aceptaría solamente la función lognormal para este nivel de significancia. También se aceptaría la función Pearson III, que tiene tres parámetros ($2.92 < 5.99$) y se rechazaría la Gumbel de dos poblaciones, que tiene cuatro parámetros ($14.52 > 3.84$).

Nótese que al rechazar una función dada se incluyen los parámetros estimados; es decir, en este caso, por ejemplo, se dice “se rechaza la función de distribución normal con $\mu = 3886$, $\sigma = 1825.9$ ”, pero podría aceptarse esta misma función con otros valores de los parámetros, aunque esto normalmente no ocurre si dichos parámetros se calculan con los métodos vistos.

Para decidir entre las funciones aceptadas, *i.e.*, lognormal y Pearson III, se comparan sus respectivos valores de D , con lo que se concluiría que la Pearson III es la que mejor se ajusta a los datos. Este tipo de análisis debe hacerse, sin embargo, con cierto cuidado, pues dado que la función Pearson III tiene más parámetros que la lognormal, la comparación no es del todo válida.

Por otra parte, siempre se debe tener precaución al aplicar la prueba, pues sus resultados dependen mucho de la selección de los intervalos y del tamaño de la muestra, e incluso pueden resultar contradictorios para una misma muestra (referencia 9.5). Sus resultados deben tomarse con mucha reserva, en especial cuando se usan para discriminar una función de distribución de probabilidad de otra y son, en cambio, mucho más útiles sólo para compararlas.

9.3.3.2 Prueba Kolmogorov-Smirnov

Esta prueba consiste en comparar el máximo valor absoluto de la diferencia D entre la función de distribución de probabilidad observada $F_o(x_m)$ y la estimada $F(x_m)$

$$D = \max |F_o(x_m) - F(x_m)| \quad (9.73)$$

con un valor crítico d que depende del número de datos y el nivel de significancia seleccionado (tabla 5 del apéndice A). Si $D < d$, se acepta la hipótesis nula 9.69. Esta prueba tiene la ventaja sobre la χ^2 de que compara los datos con el modelo estadístico sin necesidad de agruparlos. La función de distribución de probabilidad observada se calcula como (ecuación 9.29):

$$F_o(x_m) = 1 - \frac{m}{n+1} \quad (9.74)$$

donde m es el número de orden del dato x_m en una lista de mayor a menor y n es el número total de datos.

Para el caso del ejemplo anterior se ha elaborado la tabla 9.12.

En la columna 2 se han escrito los gastos máximos anuales registrados, ordenados de mayor a menor, en la 3 se calculan los valores de la función de distribución de probabilidad observada según la ecuación 9.74; en las columnas 4, 6, 8, 10 y 12 se tienen los valores de $F(x_m)$ calculados según las cinco funciones de distribución teóricas vistas anteriormente y en las 5, 7, 9, 11 y 13 se muestran los valores absolutos de las diferencias entre $F_o(x_m)$ y $F(x_m)$.

Se ha encerrado en un rectángulo el valor de D para cada función de distribución. Como se puede observar, según esta prueba se aceptarían todas las funciones de distribución consideradas para un nivel de significancia $\alpha = 0.05$,

Tabla 9.12

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
x_m (m ³ /s)	$F_o(x_m)$	$F_o(x_m)$	$F(x_m)$ Normal	$ F_o(x_m) - F(x_m) $ Normal	$F(x_m)$ Lognormal	$ F_o(x_m) - F(x_m) $ Lognormal	$F(x_m)$ Pearson	$ F_o(x_m) - F(x_m) $ Pearson	$F(x_m)$ Gumbel	$ F_o(x_m) - F(x_m) $ Gumbel	$ F_o(x_m) - F(x_m) $ Gumbel 2	
1. 7430	0.9615	0.9738	0.0123	0.9520	0.0095	0.9518	0.0097	0.9318	0.0297	0.9107	0.0507	
2. 7061	0.9231	0.9589	0.0358	0.9396	0.0165	0.9360	0.0129	0.9157	0.0074	0.8780	0.0451	
3. 6900	0.8846	0.9505	0.0659	0.9332	0.0486	0.9285	0.0439	0.9076	0.0230	0.8598	0.0248	
4. 6267	0.8462	0.9025	0.0573	0.9011	0.0549	0.9876	0.0514	0.8680	0.0218	0.7647	0.0815	
5. 6000	0.8077	0.8765	0.0688	0.8830	0.0753	0.8709	0.0632	0.8470	0.0393	0.7175	0.0902	
6. 5971	0.7692	0.8729	0.1037	0.8810	0.1118	0.8680	0.0988	0.8445	0.0753	0.7124	0.0568	
7. 5565	0.7308	0.8212	0.0904	0.8473	0.1165	0.8273	0.0965	0.8062	0.0754	0.6492	0.0816	
8. 4744	0.6923	0.6808	0.0115	0.7486	0.0563	0.7408	0.0485	0.6612	0.0311	0.5814	0.1109	
9. 4240	0.6538	0.5774	0.0764	0.6678	0.0920	0.6446	0.0992	0.6214	0.0324	0.5453	0.1073	
10. 4060	0.6154	0.5379	0.0775	0.6274	0.0120	0.6103	0.0051	0.5887	0.0267	0.5324	0.0830	
11. 3706	0.5769	0.4602	0.1167	0.5495	0.0274	0.5427	0.0342	0.5196	0.0573	0.5020	0.0749	
12. 3682	0.5385	0.4530	0.0855	0.5438	0.0053	0.5381	0.0004	0.5147	0.0238	0.4998	0.0387	
13. 3220	0.5000	0.3576	0.1433	0.4246	0.0754	0.4320	0.0680	0.4166	0.0834	0.4543	0.0457	
14. 3130	0.4615	0.3391	0.1224	0.4013	0.0602	0.4087	0.0528	0.3669	0.0646	0.4447	0.0168	
15. 2737	0.4231	0.2643	0.1588	0.2915	0.1316	0.3069	0.1163	0.3108	0.124	0.4002	0.0229	
16. 2675	0.3816	0.2540	0.1306	0.2742	0.1104	0.2908	0.0938	0.2973	0.0873	0.3928	0.0082	
17. 2489	0.3462	0.2221	0.1241	0.2236	0.1226	0.2430	0.1032	0.2578	0.0884	0.3702	0.0240	
18. 2414	0.3077	0.2105	0.0972	0.2040	0.1037	0.2245	0.0832	0.2423	0.0655	0.3608	0.0531	
19. 2367	0.2692	0.2033	0.0659	0.1922	0.0770	0.2129	0.0563	0.2326	0.0366	0.3549	0.0857	
20. 2350	0.2308	0.2004	0.0304	0.1880	0.0428	0.2087	0.0220	0.2292	0.0116	0.3528	0.1220	
21. 2246	0.1923	0.1841	0.0082	0.1623	0.0300	0.1831	0.0092	0.2085	0.0162	0.3395	0.1472	
22. 2230	0.1538	0.1830	0.0292	0.1587	0.0049	0.1792	0.0254	0.2054	0.0516	0.3374	0.1836	
23. 2070	0.1154	0.1587	0.0433	0.1210	0.0056	0.1397	0.0243	0.1752	0.0598	0.3167	0.2013	
24. 1804	0.0769	0.1271	0.0502	0.0708	0.0061	0.0802	0.0033	0.1298	0.0529	0.2815	0.2046	
25. 1796	0.0335	0.1261	0.0876	0.0694	0.0309	0.0787	0.0403	0.1285	0.0900	0.2805	0.2420	

Aplicabilidad y selección de la distribución de probabilidad

para el cual el valor crítico d es 0.26 con $n = 25$ (tabla 5 del apéndice A). La función de distribución con el menor valor de D es la Gumbel por lo que, según esta prueba, esta función sería la preferible.

9.3.4 Selección de la función de distribución

En la tabla 9.13 se resumen los resultados de las pruebas efectuadas en el apartado 9.3.3.

En esta tabla se han calificado las funciones según el orden de preferencia indicado por cada prueba, dando 1 a la “mejor” y 5 a la “peor”. De estos resultados se concluye que la función que mejor se ajusta a los datos es la Pearson III. Este resultado puede corroborarse mediante una inspección de las figuras 9.9 a 9.13. La función seleccionada sería entonces la Pearson III en este caso, aunque cabe observar que la diferencia de esta función con la lognormal y la Gumbel es poco significativa a pesar de que la última fue rechazada por la prueba χ^2 .

9.3.5 Límites de aplicabilidad

Al extrapolar los gastos máximos anuales o cualquier otra variable hidrológica, aun cuando se haga mediante una cuidadosa selección de una función de distribución de probabilidad, debe siempre tenerse en cuenta la credibilidad y homogeneidad de los datos y la longitud del registro. Obviamente, si se sabe que en una estación dada existen las condiciones necesarias para que se presenten errores de consideración en los registros, los resultados de cualquier análisis estadístico deben tomarse con suma reserva. Aun cuando los datos son confiables, los análisis estadísticos del tipo visto anteriormente deben usarse, en general, sólo cuando no estén afectados por cambios en las características hidrológicas de la cuenca provocados por presas, urbanización,

Tabla 9.13

Función	Error cuadrático mínimo	χ^2	Kolmogorov
Normal	4	se rechaza	4
Lognormal	3	2	3
Pearson III	1	1	2
Gumbel	2	se rechaza	1
Gumbel 2 poblaciones	5	se rechaza	5

Tabla 9.14 Longitud del registro, en años, necesaria para estimar avenidas con un intervalo de confianza de 0.05 y periodo de retorno T (referencia 9.8)

T en años	Error aceptable	
	10%	25%
10	90	18
50	110	39
100	115	48

desvíos, etc. Por otra parte, es natural pensar en que las predicciones son más confiables a medida que aumenta la longitud de los registros. En la tabla 9.14 se muesra la longitud del registro, en años, necesaria para predecir avenidas con un intervalo de confianza de 0.05 (referencia 9.7) para diferentes períodos de retorno T .

En todo caso, los resultados de los análisis estadísticos, como en casi toda la hidrología, no deben aceptarse dogmáticamente. El criterio y el juicio ingenieril deben siempre estar presentes. Aun cuando a veces se recomienda no usar registros de menos de, por ejemplo, 20 años para análisis estadísticos (referencia 9.8), con frecuencia no hay otra alternativa, y es ahí donde el papel del ingeniero adquiere clara importancia sobre los métodos del análisis.

Apéndice

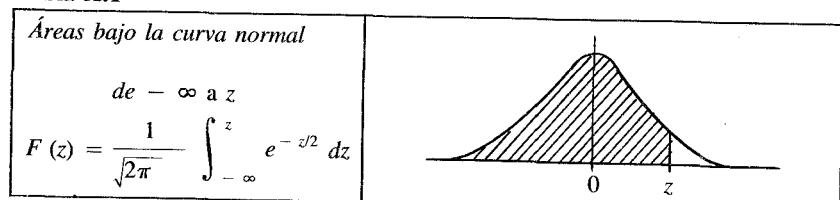
A*

BIBLIOGRAFÍA

- 9.1 Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N., Laurent'ev, M. A. (eds.) *Mathematics*. cap. XI, trad. S. H. Gould. The M. I. T. Press, 1963.
- 9.2 Kite, G. W. "Frequency and risk analysis in hydrology". Water Res. Publ. Co. St. Univ. Fort Collins, 1977.
- 9.3 Gumbel, E. J. *Statistics of Extremes*. Columbia Univ. Press, 1958.
- 9.4 Abramowitz M., Stegun, I. A. *Handbook of mathematical functions*. Dover. New York, 1965.
- 9.5 Benjamin, J. R., Cornell, C. A. *Probability, statistics and decision for civil engineers*. McGraw-Hill. New York, 1970.
- 9.6 González Villareal, F. J. "Contribución al análisis de frecuencias de valores extremos de los gastos máximos en un río". Publ. 277. Instituto de Ingeniería, UNAM, México, dic. 1970.
- 9.7 Benson, M. A. "Characteristics of frequency curves based on a theoretical 1000 - year record", U. S. Geol. Surv. Water-Supply Pap. 1543-A, pp. 51-74, 1952.
- 9.8 Linsley, R. K., Kohler, M. A., Paulhus, J. L. H. *Hydrology for engineers*. 2nd. ed. McGraw-Hill, 1975.

* Datos tomados de *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*. Spiegel, M.R. McGraw-Hill. Serie Schaum, excepto donde se indique lo contrario.

Tabla A.1



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7258	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7996	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Apéndice A

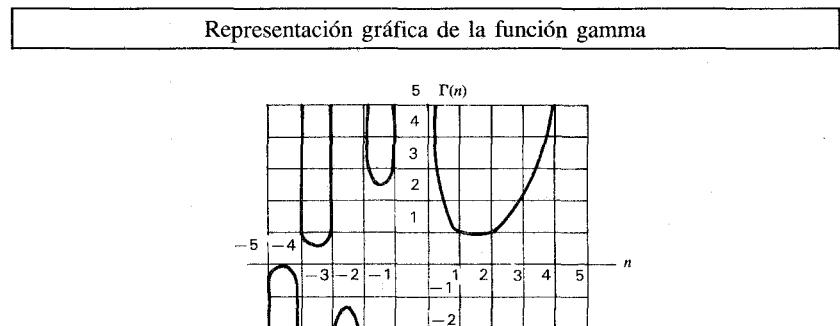
Tabla A.2

	La función gamma	
	Definición de la función gamma $\Gamma(n)$ para $n > 0$	

1 $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \quad n > 0$

2 $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$
3 $\Gamma(n+1) = n! \quad \text{si } n = 0, 1, 2, \dots \text{ donde } 0! = 1$

	Función gamma para $n < 0$	
4	$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$	



	Algunos valores de la función gamma	
5	$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$	

5 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

6 $\Gamma(m + \frac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m - 1)}{2^m} \sqrt{\pi} \quad m = 1, 2, 3, \dots$

7 $\Gamma(-m + \frac{1}{2}) = \frac{(-1)^m 2^m \sqrt{\pi}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m - 1)} \quad m = 1, 2, 3, \dots$

Tabla A.3

Función gamma

$$\Gamma(x) = \int_0^x t^{x-1} e^{-t} dt \text{ para } 1 \leq x \leq 2$$

Para poder obtener valores adicionales empleese la fórmula $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$

x	$\Gamma(x)$
1.00	1.00000
1.01	0.99433
1.02	0.98884
1.03	0.98355
1.04	0.97844
1.05	0.97350
1.06	0.96874
1.07	0.96415
1.08	0.95973
1.09	0.95546
1.10	0.95135
1.11	0.94740
1.12	0.94359
1.13	0.93993
1.14	0.93642
1.15	0.93304
1.16	0.92980
1.17	0.92670
1.18	0.92373
1.19	0.92089
1.20	0.91817
1.21	0.91558
1.22	0.91311
1.23	0.91075
1.24	0.90852

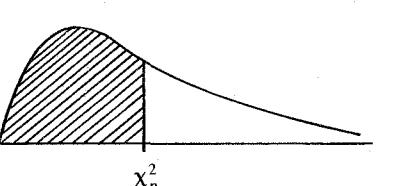
x	$\Gamma(x)$
1.25	0.90640
1.26	0.90440
1.27	0.90250
1.28	0.90072
1.29	0.89904
1.30	0.89747
1.31	0.89600
1.32	0.89464
1.33	0.89338
1.34	0.89222
1.35	0.89115
1.36	0.89018
1.37	0.88931
1.38	0.88854
1.39	0.88785
1.40	0.88726
1.41	0.88676
1.42	0.88636
1.43	0.88604
1.44	0.88581
1.45	0.88566
1.46	0.88560
1.47	0.88563
1.48	0.88575
1.49	0.88595

Tabla A.3 (Continuación).

x	$\Gamma(x)$
1.50	0.88623
1.51	0.88659
1.52	0.88704
1.53	0.88757
1.54	0.88818
1.55	0.88887
1.56	0.88964
1.57	0.89049
1.58	0.89142
1.59	0.89243
1.60	0.89352
1.61	0.89468
1.62	0.89592
1.63	0.89724
1.64	0.89864
1.65	0.90012
1.66	0.90167
1.67	0.90330
1.68	0.90500
1.69	0.90678
1.70	0.90864
1.71	0.91057
1.72	0.91258
1.73	0.91467
1.74	0.91683
1.75	0.91906

x	$\Gamma(x)$
1.76	0.92137
1.77	0.92376
1.78	0.92623
1.79	0.92877
1.80	0.93138
1.81	0.93408
1.82	0.93685
1.83	0.93969
1.84	0.94261
1.85	0.94561
1.86	0.94869
1.87	0.95184
1.88	0.95507
1.89	0.95838
1.90	0.96177
1.91	0.96523
1.92	0.96877
1.93	0.97240
1.94	0.97610
1.95	0.97988
1.96	0.98374
1.97	0.98768
1.98	0.99171
1.99	0.99581
2.00	1.00000

Tabla A.4

Valores percentiles (χ_p^2) de la distribución ji-cuadrado con n grados de libertad (área sombreada = p).											
											

n	$\chi_{0.995}^2$	$\chi_{0.99}^2$	$\chi_{0.975}^2$	$\chi_{0.95}^2$	$\chi_{0.90}^2$	$\chi_{0.75}^2$	$\chi_{0.50}^2$	$\chi_{0.25}^2$	$\chi_{0.10}^2$	$\chi_{0.05}^2$	$\chi_{0.025}^2$	$\chi_{0.01}^2$	$\chi_{0.005}^2$
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.455	0.102	0.0158	0.0039	0.0010	0.0002	0.0000
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.575	0.211	0.103	0.0506	0.0201	0.0100
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.584	0.352	0.216	0.115	0.072
4	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.711	0.484	0.297	0.207
5	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.831	0.554	0.412
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.872	0.676
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.989
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5
29	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3	42.9	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0
60	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5
70	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.6	89.3	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3	90.1	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3

Tabla A.5 Valores críticos d para la prueba Kolmogorov-Smirnov de bondad del ajuste*

Tamaño de la muestra	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
5	0.51	0.56	0.67
10	0.37	0.41	0.49
15	0.30	0.34	0.40
20	0.26	0.29	0.35
25	0.24	0.26	0.32
30	0.22	0.24	0.29
40	0.19	0.21	0.25
n grande	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

*Tomada de la referencia 9.5.

Apéndice

B

Regresión y correlación

B.1 REGRESIÓN LINEAL SIMPLE

Uno de los modelos más simples y comunes en la hidrología está basado en la suposición de que dos variables se relacionan en forma lineal. En general, el objetivo de un modelo de esta naturaleza es poder estimar el valor de una variable, que se denomina variable dependiente, a partir del valor de la otra, que se llama variable independiente.

Ejemplo B.1. En la tabla B.1 se muestra el escurrimiento anual y la precipitación anual de 1966 a 1977 en la estación hidrométrica Altamirano, sobre el río Tzanconeja, Chis. y en la estación climatológica del mismo nombre. Llamando x a la precipitación y y al escurrimiento, se desea saber si un modelo de la forma:

$$\hat{y} = \alpha + \beta x \quad (\text{B.1})$$

Tabla B.1 Datos de la estación Altamirano, Chis.

año	$y = \text{escurrimiento anual, m}$	$x = \text{lluvia anual, m}$
1966	0.557	1.637
1967	0.436	1.655
1968	0.562	1.884
1969	0.776	2.018
1970	0.600	1.536
1971	0.391	1.349
1972	0.359	1.327
1973	0.567	1.555
1974	0.635	1.405
1975	0.495	1.335
1976	0.580	1.391
1977	0.325	1.133

representa adecuadamente la relación entre las dos variables y cuáles son los valores de α y β que hacen que la representación sea la mejor posible. Si se dibujan los datos en una gráfica, como se muestra en la figura B.1, se observa que, para cualquier función del tipo de la ecuación B.1, se cometerá un error que, para cualquier función del tipo de la ecuación B.1, se cometerá un error e_i en la predicción para un valor x_i de la variable independiente, cuyo valor es:

$$e_i = \hat{y}_i - y_i \quad (\text{B.2})$$

donde \hat{y}_i es el valor de y estimado por la ecuación B.1. Para encontrar los valores de α y β que hacen que la representación de la relación entre x y y sea la mejor posible, conviene hacer que

$$M = \sum e_i^2 \quad (\text{B.3})$$

sea mínimo. De este modo se evita, por ejemplo, que los errores positivos y negativos se compensen, como sucedería si se tratara de hacer $\sum e_i = 0$ ó las dificultades algebraicas que aparecen al tratar de minimizar $\sum |e_i|$.

Para que M sea mínimo, se debe cumplir que:

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = 0 \quad (\text{B.4})$$

y que:

$$\frac{\partial M}{\partial \beta} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Sustituyendo (B.3), (B.2) y (B.1) en (B.4) y (B.5) se obtiene:

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = 2\sum [\alpha + \beta x_i - y_i] = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial M}{\partial \beta} = 2\sum x_i [\alpha + \beta x_i - y_i] = 0 \quad (\text{B.7})$$

o bien:

$$n\alpha + \beta \sum x_i - \sum y_i = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\alpha \sum x_i + \beta \sum x_i^2 - \sum x_i y_i = 0 \quad (\text{B.9})$$

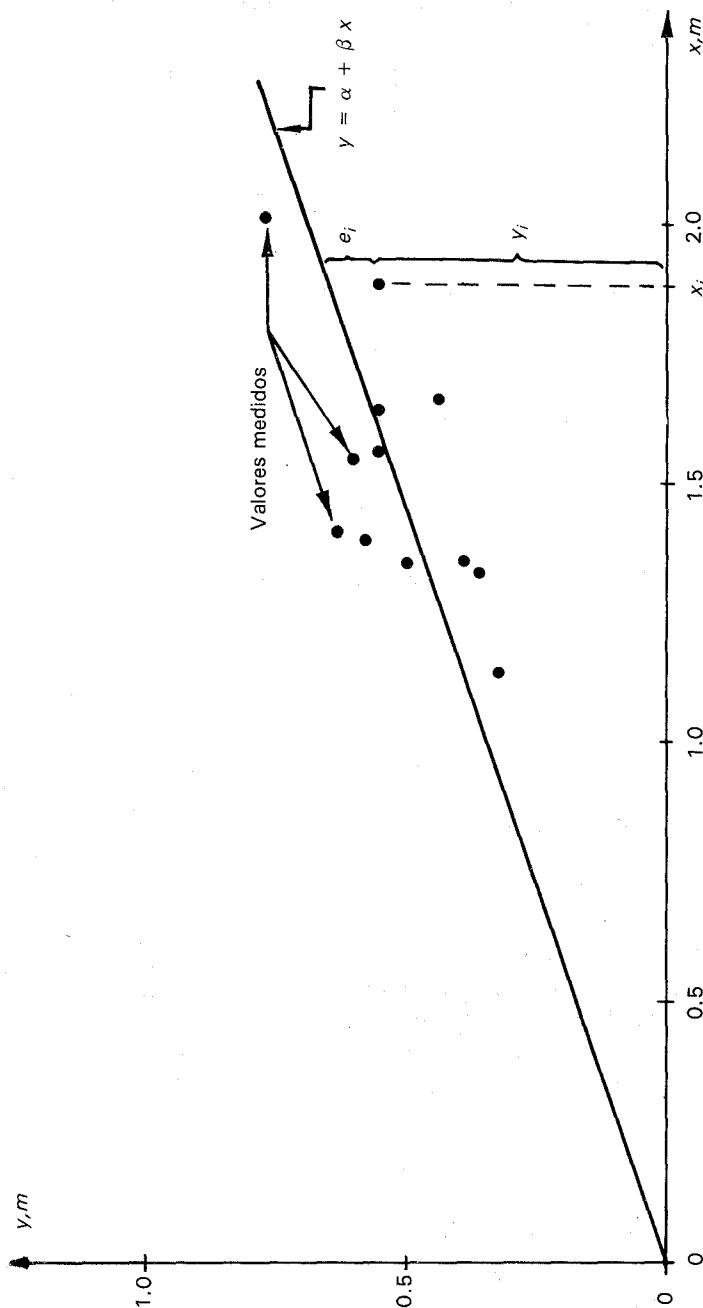


Figura B.1

(B.8) y (B.9) se denominan *ecuaciones normales*. Su solución, en términos de α y β , es:

$$\alpha = \frac{\Sigma y_i \Sigma x_i^2 - \Sigma x_i y_i \Sigma x_i}{n \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} \quad (B.10)$$

$$\beta = \frac{n \Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i}{n \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} \quad (B.11)$$

Así, para el ejemplo en cuestión se tiene:

$$n = 12$$

$$\Sigma x_i = 6.283; (\Sigma x_i)^2 = 332.152$$

$$\Sigma x_i^2 = 28.37; \Sigma x_i y_i = 9.793$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (B.10) y (B.11):

$$\alpha = \frac{-0.229}{8.289} = -0.028$$

$$\beta = \frac{3.009}{8.289} = 0.363$$

Así, la ecuación de regresión resulta:

$$\hat{y} = -0.028 + 0.363 x$$

En la figura B.1 se muestran los datos y la recta de regresión correspondiente. Siempre que se realice un ajuste por regresión como el anterior, conviene determinar qué tan bien se *ajusta* la recta a los puntos medidos, o dicho en otras palabras, qué tanta dispersión existe entre los puntos en torno a la recta. Para ello se calcula el *coeficiente de correlación* como (referencias B.1 y B.2)

$$\rho = \beta \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad (B.12)$$

donde σ_x = desviación estándar de x .

σ_y = desviación estándar de y .

El coeficiente de correlación ρ varía entre -1 y $+1$. Cuando su valor se acerca a -1 (en el caso de $\beta < 0$) o a $+1$ (cuando $\beta > 0$), se dice que hay una buena dependencia o correlación lineal entre x y y . Cuando $\rho \sim 0$, entonces dicha correlación no es aceptable. En el caso del ejemplo, se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 0.251 \\ \sigma_y &= 0.124\end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\rho = \frac{(0.251)}{(0.124)} (0.363) = 0.735$$

En general, un coeficiente de correlación de 0.8 ó mayor es aceptable, aunque esto no debe tomarse dogmáticamente.

B.2 REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE

Lo anterior puede extenderse a dos o más variables dependientes. Por ejemplo, para el caso de dos variables dependientes, x_1 y x_2 , el modelo lineal adopta la forma:

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \quad (B.13)$$

donde α , β_1 y β_2 son los parámetros a encontrar.

En este caso, es posible demostrar que las ecuaciones normales son (referencia B.2):

$$\Sigma y = \alpha n + \beta_1 \Sigma x_1 + \beta_2 \Sigma x_2 \quad (B.14)$$

$$\Sigma(x_1 y) = \alpha \Sigma x_1 + \beta_1 \Sigma(x_1)^2 + \beta_2 \Sigma(x_1 x_2) \quad (B.15)$$

$$\Sigma(x_2 y) = \alpha \Sigma x_2 + \beta_1 \Sigma(x_1 x_2) + \beta_2 \Sigma(x_2)^2 \quad (B.16)$$

cuya solución proporciona los valores de α , β_1 y β_2 y el coeficiente de correlación múltiple es (referencia B.2):

$$R = \left(1 - \frac{S_{y|x_1, x_2}^2}{S_y^2} \right)^{1/2} \quad (B.17)$$

donde

$$S_{y|x_1, x_2}^2 = \frac{1}{n-3} \sum (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

S_y^2 = variancia de y .

\hat{y}_i = valor estimado de y para x_{1i} y x_{2i} .

Ejemplo B.2. Se desea saber si en una cierta región el gasto máximo medio anual*, el área de la cuenca y la altura media de precipitación máxima en 24 h se pueden correlacionar linealmente, y qué tan bueno es el ajuste. Los datos se presentan en la tabla B.2.

Solución

Los coeficientes de las ecuaciones (B.14) a (B.16) son:

n	= 14	$\Sigma(x_1x_2)$	= 43.37
Σy	= 304.3	$\Sigma(x_2y)$	= 628.04
Σx_1	= 21.34	$\Sigma(x_2)^2$	= 86.99
Σx_2	= 34.30		
$\Sigma(x_1y)$	= 1 465.94		
$\Sigma(x_1)^2$	= 108.74		

Tabla B.2

Estación	$y = \text{gasto máximo medio anual, } 10^2 m^3/s$	$x_1 = \text{área de la cuenca, } 10^3 km^2$	$x_2 = \text{altura media de precipitación máxima en 24 h, cm}$
1	15.5	1.25	1.7
2	8.5	0.87	2.1
3	85.5	5.69	1.9
4	105.0	8.27	1.9
5	24.8	1.62	2.1
6	3.8	0.18	2.4
7	1.8	0.15	3.2
8	18.0	1.40	2.7
9	8.8	0.30	2.9
10	8.3	0.32	2.9
11	3.6	0.18	2.8
12	1.9	0.15	2.7
13	16.5	0.87	2.1
14	2.8	0.09	2.9

* Es decir, el promedio de los gastos máximos anuales.

Por lo tanto, dichas ecuaciones resultan:

$$14\alpha + 21.34\beta_1 + 34.38\beta_2 = 304.30$$

$$21.34\alpha + 108.74\beta_1 + 43.37\beta_2 = 1 465.94$$

$$34.30\alpha + 43.37\beta_1 + 86.99\beta_2 = 628.04$$

Resolviendo el sistema, resulta:

$$\alpha = 2.013; \quad \beta_1 = 13.13; \quad \beta_2 = -0.12$$

$$\text{Además, } S_{y|x_1, x_2}^2 = 15.6$$

$$S_y^2 = 1 026.77$$

por lo que el coeficiente de correlación múltiple es:

$$R = (1 - \frac{15.6}{1 026.77})^{1/2} = 0.9923$$

Se observa que existe una buena correlación entre las tres variables.

Las ecuaciones (B.14) a (B.16) se pueden generalizar a más de dos variables independientes; para n variables independientes, el modelo es de la forma:

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n \quad (\text{B.17a})$$

y las ecuaciones normales son:

$$\Sigma y = \alpha n + \beta_1 \Sigma x_1 + \beta_2 \Sigma x_2 + \dots + \beta_n \Sigma x_n$$

$$\Sigma x_1 y = \alpha \Sigma x_1 + \beta_1 \Sigma x_1^2 + \beta_2 \Sigma x_1 x_2 + \dots + \beta_n \Sigma x_1 x_n \quad (\text{B.17b})$$

⋮

$$\Sigma x_n y = \alpha \Sigma x_n + \beta_1 \Sigma x_n x_1 + \beta_2 \Sigma x_n x_2 + \dots + \beta_n \Sigma x_n^2$$

B.3 REGRESIÓN NO LINEAL

Cuando las variables no se relacionan en forma lineal, es posible usar los conceptos anteriores para determinar una ecuación de regresión, cuya forma puede ser, por ejemplo, en el caso de dos variables x y y :

$$y = \alpha x^\beta \quad (\text{B.18})$$

Si se obtienen logaritmos de la ecuación B.18:

$$\ln y = \ln \alpha + \beta \ln x \quad (\text{B.19})$$

Definiendo

$$y' = \ln y$$

$$a = \ln \alpha$$

$$x' = \ln x$$

se tiene:

$$y' = a + \beta x' \quad (\text{B.20})$$

que es una ecuación lineal, que puede analizarse de manera análoga a como se hizo en la regresión lineal simple. El resultado sería a y β ; el valor de α (ecuación B.18) será entonces:

$$\alpha = e^a \quad (\text{B.21})$$

Análogamente es posible hacer análisis de correlación no lineal múltiple. Por ejemplo, en el caso de dos variables independientes, se podría establecer la ecuación:

$$y = \alpha x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \quad (\text{B.22})$$

Tomando logaritmos de la ecuación B.22:

$$\ln y = \ln \alpha + \beta_1 \ln x_1 + \beta_2 \ln x_2 \quad (\text{B.23})$$

o bien:

$$y' = a + \beta_1 x'_1 + \beta_2 x'_2 \quad (\text{B.24})$$

donde $y' = \ln y$

$$x'_1 = \ln x_1$$

$$x'_2 = \ln x_2$$

$$a = \ln \alpha$$

La ecuación (B.24) es la de un plano en los ejes x'_1 , x'_2 y y' y su análisis sería similar al correspondiente a la correlación lineal múltiple.

En los casos en que se desea ajustar a los puntos medidos un polinomio de grado n

$$y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n \quad (\text{B.25})$$

se puede aplicar la metodología descrita para el caso de una línea recta. En este caso, las ecuaciones normales resultan:

$$\Sigma y = a n + \beta_1 \Sigma x + \beta_2 \Sigma x^2 + \dots + \beta_n \Sigma x^n$$

$$\Sigma xy = \alpha \Sigma x + \beta_1 \Sigma x^2 + \beta_2 \Sigma x^3 + \dots + \beta_n \Sigma x^{n+1}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\Sigma x^n y = \alpha \Sigma x^n + \beta_1 \Sigma x^{n+1} + \beta_2 \Sigma x^{n+2} + \dots + \beta_n \Sigma x^{2n}$$

Tabla B.3

<i>i</i>	Altura de escala, m	Gasto m^3/s
1	2.45	531
2	1.51	294
3	1.48	288
4	0.78	159
5	5.80	1635
6	6.00	1705
7	4.16	1089
8	5.58	1560
9	3.80	937
10	4.08	1013
11	2.63	616
12	1.11	210
13	1.01	201
14	0.71	146
15	0.51	120
16	0.52	111
17	0.50	81
18	2.02	449
19	1.72	369
20	1.92	422
21	1.35	266
22	1.28	247
23	1.40	280

Ejemplo B.3. En la estación hidrométrica El Colorado, sobre el río Lacantún, Chis., se han medido, en 1976, las alturas de escala y los gastos mostrados en la tabla B.3. Determinar una curva media que relacione la altura de escala con el gasto

- Usando un modelo de la forma B.18
- Usando un polinomio de segundo orden (modelo B.25)

Solución

a) Sea $x = \text{gasto en m}^3/\text{s}$, $y = \text{altura de escala en m}$. Entonces, usando el modelo lineal B.20 se tienen los siguientes coeficientes de las ecuaciones normales:

$$\begin{aligned}\Sigma y' &= \Sigma(\ln y) = 12.498 \\ \Sigma(x')^2 &= \Sigma(\ln x)^2 = 826.519 \\ \Sigma(x'y') &= \Sigma(\ln x \ln y) = 89.413 \\ \Sigma x' &= \Sigma(\ln x) = 136.378 \\ n &= 23 \\ \sigma_x &= 0.901 \\ \sigma_y &= 0.775\end{aligned}$$

De las ecuaciones B.10 y B.11,

$$= \frac{12.498 \times 826.519 - 89.413 \times 136.378}{23 \times 826.519 - (136.378)^2}$$

$$= \frac{-1864.132}{410.978} = -4.536$$

$$\beta = \frac{23 \times 89.413 - 136.378 \times 12.498}{410.978} = 0.857$$

Por lo tanto, de la ecuación B.21:

$$\alpha = e^{-4.536} = 0.0107$$

y el modelo es:

$$y = 0.0107 x^{0.857}$$

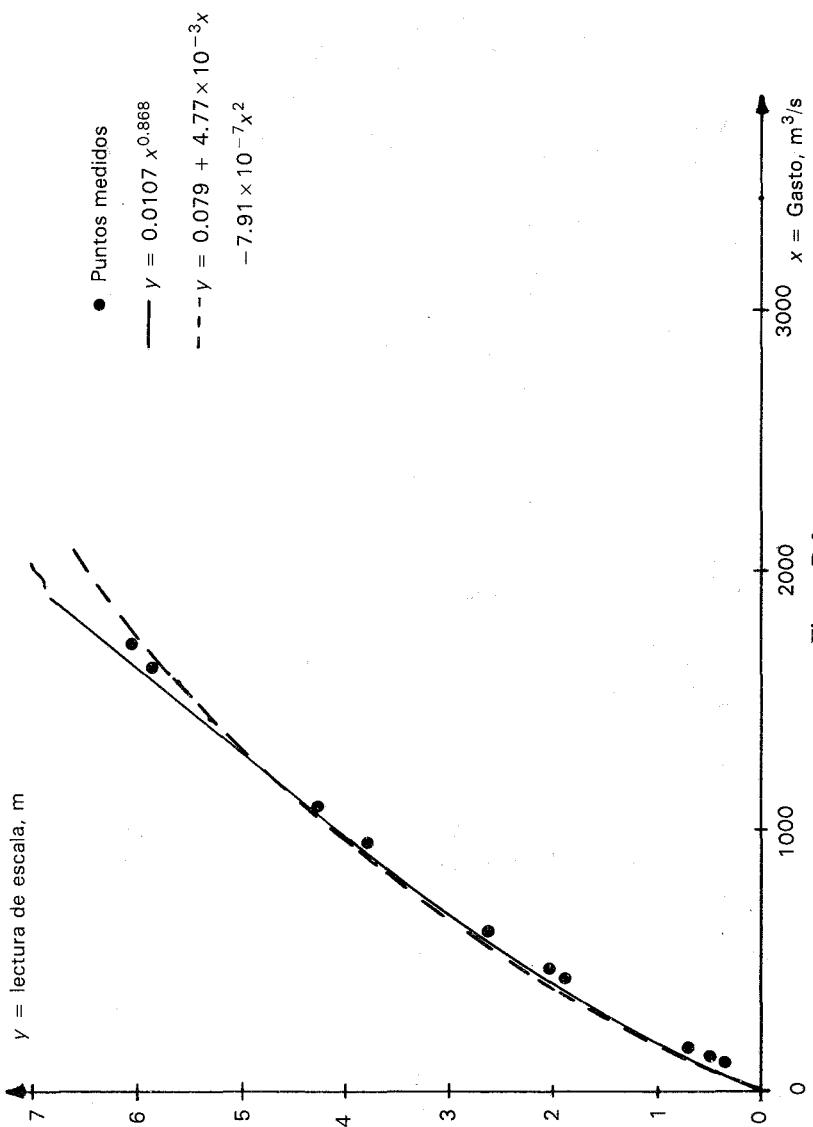


Figura B.2

con un coeficiente de correlación

$$\rho = \beta \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0.857 \frac{0.901}{0.775} = 0.996$$

Se observa una excelente correlación entre el modelo y los datos. Esto se puede verificar visualmente en la gráfica de la figura B.2.

b) Las ecuaciones normales son en este caso (ver ecuación (B.26)):

$$\begin{aligned}\Sigma y &= \alpha n + \beta_1 \Sigma x + \beta_2 \Sigma x^2 \\ \Sigma xy &= \alpha \Sigma x + \beta_1 \Sigma x^2 + \beta_2 \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 y &= \alpha \Sigma x^2 + \beta_1 \Sigma x^3 + \beta_2 \Sigma x^4\end{aligned}$$

y se tiene:

$$\begin{aligned}n &= 23 \\ \Sigma y &= 52.38 \\ \Sigma x &= 12.729 \\ \Sigma x^2 &= 12,825,097 \\ \Sigma x^3 &= 1.70099 \times 10^{10} \\ \Sigma x^4 &= 2.50982 \times 10^{13} \\ \Sigma xy &= 48682.46 \\ \Sigma x^2 y &= 62,334,105\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones es entonces:

$$\begin{aligned}23\alpha + 1.27 \times 10^4 \beta_1 + 1.28 \times 10^7 \beta_2 &= 52.38 \\ 1.27 \times 10^4 \alpha + 1.28 \times 10^7 \beta_1 + 1.70 \times 10^{10} \beta_2 &= 4.87 \times 10^4 \\ 1.28 \times 10^7 \alpha + 1.70 \times 10^{10} \beta_1 + 2.51 \times 10^{13} \beta_2 &= 6.23 \times 10^7\end{aligned}$$

y su solución es, salvo errores de redondeo:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.079 \\ \beta_1 &= 4.77 \times 10^{-3} \\ \beta_2 &= -7.91 \times 10^{-7}\end{aligned}$$

Así, el modelo resulta:

$$y = 0.079 + 4.77 \times 10^{-3}x - 7.91 \times 10^{-7}x^2$$

551.48
A642



Nº 0003 D123900028979

ESTA OBRA SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL DÍA
6 DE MAYO DE 1992, EN LOS TALLERES DE
GRUPO IMPRESA, S. A.
LAGO CHALCO 230, COL. ANÁHUAC
MÉXICO, D.F.

LA EDICIÓN CONSTA DE 1000 EJEMPLARES
Y SOBRANTES PARA REPOSICIÓN

517