H6.3 Landau-Notation für Komplexitätsklassen:

a) Sei f eine beliebige Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^+$. Die folgenden Landau-Klassen sind paarweise disjunkt:

$O(f) \cap \omega(f) = \emptyset$

$\Omega(f) \cap o(f) = \emptyset$

$\Theta(f) \cap o(f) = \emptyset$

$\Theta(f) \cap \omega(f) = \emptyset$

$o(f) \cap \omega(f) = \emptyset$

b) Die Funktion $g(n) = (2n - 1) \cdot (4n + 1)$ liegt in den folgenden Laufzeitklassen: $g(n) = 8n^2 - 2n - 1$.

- $g(n) \in \omega(1)$ [$g(n)$ wächst echt langsamer als f(n) = 1]
- $g(n) \in \Omega(n)$ [$g(n)$ wächst schneller als f(n) = n oder genauso schnell]
- $g(n) \in O(n^2)$ [$g(n)$ wächst langsamer als f(n) = n^2 oder genauso schnell]
- $g(n) \in \Theta(n^2)$ [$g(n)$ wächst genauso schnell wie f(n) = n^2]
- $g(n) \in \Omega(n^2)$ [$g(n)$ wächst schneller als f(n) = n^2 oder genauso schnell]
- $g(n) \in o(n^3)$ [$g(n)$ wächst echt langsamer als f(n) = n^3]
- $g(n) \notin O(n)$, $g(n) \notin \Theta(n)$, $g(n) \notin o(n^2)$, $g(n) \notin \omega(n^2)$, $g(n) \notin \omega(n^3)$

c) Beziehung zwischen den Klassen $o(f)$, $O(f)$, $\Theta(f)$ mit Hilfe von Mengenoperationen:

- $o(f) \subset O(f)$ [$o(f)$ ist eine echte Teilmenge von $O(f)$]
- $\Theta(f) \subset O(f)$ [$\Theta(f)$ ist eine echte Teilmenge von $O(f)$]
- $o(f) \cup \Theta(f) = O(f)$

d) Menge aller Funktionen an, die mindestens logarithmische, aber höchstens lineare Laufzeit haben in Landau-Notation und mit Hilfe von Mengenoperationen angegeben.

Sei M eine Menge.
$M = \Omega(\log n) \cap O(n)$

e) Gebt mit Begründung an, welche Funktionen in $o(1)$ liegen.

Definition o(f):

$o(f) = \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \forall C > 0 : \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq C \cdot f(n)\}$.

Da $\forall n \geq n_0$ dem $\lim\limits_{n} \rightarrow \infty$ entspricht (Skript S. 46) und eine Funktion g(n) in der Laufzeitklasse o(f) liegt, sofern der $\lim\limits_{n} \rightarrow \infty = 0$ ist, gilt für o(1):

Der $\lim\limits_{n} \rightarrow \infty \frac{g(n)}{f(n)}$ ist nur dann 0, wenn $g(n) = 0$. Also gibt es keine Funktion in der Laufzeitklasse o(1).