Projet GMF :
Optimisation du retour à l'état d'équilibre

Une équation aux dérivées ordinaires $y'(t) = f(t, y(t))$, avec pour condition initiale $y(0) = y_0$ permet de décrire le comportement d'une fonction inconnue y au cours du temps. Une solution de cette équation est appelée état d'équilibre si la solution est constante au cours du temps. Les états d'équilibre peuvent être séparés en deux groupes. Les états d'équilibre sont stables si, après une petite perturbation, le système reste proche de cet état d'équilibre pour tout temps. Si au contraire le système s'en éloigne, l'état d'équilibre est dit instable. Un état stable est à privilégier pour contrôler un système. Par exemple, la position du pendule simple est donnée par un angle θ et une vitese $\dot{\theta}$ dont l'équation régissant le mouvement est

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0,$$

et la position $(\theta_0, \theta_1) = (0, 0)$ est un équilibre stable : la solution émanant d'une condition initiale proche de $(0, 0)$ restera proche pour tout temps de cette configuration (régime des petites oscillations).

On s'intéresse au problème suivant : dans le cas où le système est fortement perturbé donc avec une configuration initiale quelconque, on veut se ramener à un état d'équilibre stable en temps fini. Pour le pendule simple, à partir d'une configuration initiale (θ_0, θ_1), on souhaite se ramener à la configuration stable $(0, 0)$ sur un intervalle de temps fini $[0; 1]$. Pour cela, on introduit une fonction de contrôle h pour agir sur le pendule et on obtient l'équation

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = h(t).$$

Parmi toutes les fonctions h permettant de ramener le pendule à un état stable, on souhaite déterminer celle qui minimise l'énergie nécessaire. Le but de ce projet est de déterminer une approximation de la fonction h demandant le minimum d'énergie pour ramener le système à l'état d'équilibre.

Objectifs :

1. Comprendre et implémenter des schémas numériques : méthode d'Euler explicite et la méthode du gradient.
2. Discrétiser un problème d'optimisation dynamique aux contraintes d'égalités. Formuler le problème à l'aide d'un lagrangien.
3. Résoudre numériquement, interpréter les résultats et représenter les solutions associées à plusieurs conditions initiales.

Étapes :

1. La première partie porte sur la résolution du pendule simple. On demande une résolution numérique à l'aide de la méthode d'Euler explicite de l'équation sur l'intervalle $[0; 1]$, avec une discrétisation à N points. En particulier, on prendra soin de réécrire l'équation comme un sytème d'ordre 1. On testera ensuite ce programme pour une fonction h choisie et non-nulle.
2. Pour déterminer la fonction h discrétisée optimale, on réécrira le problème discrétisé sous forme d'un problème d'optimisation dynamique non-linéaire, puis on utilisera la formulation du lagrangien associé.
3. Ce nouveau problème, dans le cas des petites oscillations ($\sin(\theta) \sim \theta$) peut être résolu grâce à la méthode du gradient, où l'ensemble satisfaisant les contraintes est convexe. Il faudra implémenter la méthode du gradient à pas fixe avec projection. On pourra choisir par exemple des fonctions de coût quadratique ($\int_0^1 h(t)^2 dt$), quartique ($\int_0^1 h(t)^4 dt$) ou une fonctionnelle d'énergie ($\int_0^1 h'(t)^2 dt$). On pourra choisir des conditions initiales et finales adéquates pour h.
4. Une des trois pistes peut ensuite être explorée :
   - Dans le cas de plus grandes oscillations, l'approximation de la non-linéarité par une fonction linéaire ne tient plus. Le système ne peut donc pas être simplifié, et l'ensemble des contraintes n'est plus convexe. La procédure de pénalisation des contraintes permet dans ce cas de déterminer une solution approchée de l'optimum. On implémentera donc cette méthode.
   - Lorsqu'une force de frottement s'applique au pendule, l'équation fait intervenir une dérivée première. On peut donc s'intéresser à l'équation du pendule simple amorti et comparer la fonction h optimale dans les cas sans amortissement et avec amortissement.
   - Lorsque le problème n'est pas discrétisé, la formulation du problème sous forme d'un lagrangien est plus aisé, mais sa résolution est plus compliquée. On pourra s'intéresser aux pistes de résolution théorique de ce problème en précisant les espaces fonctionels utilisés.

Outils et compétences requises :

- Mathématiques : Équations différentielles; Optimisation non-linéaire; Calcul numérique.
- Informatique : Python ou MATLAB.

- Visualisation : Création de graphiques et animations.

Livrables :

- Un rapport détaillé contenant une explication des méthodes utilisées, des graphiques et une interprétation des résultats.
- Le code source.
- Une présentation orale.

References

[1] J.-P. Demailly *Analyse numérique et équations différentielles, Manuel pour le Second Cycle de Mathématiques.* Presses Universitaires de Grenoble, 1e édition sept. 1991, 2e éd. sept. 1996, 3e éd. fév. 2006.

[2] Y. Privat *Cours d'optimisation non-linéaire.* 2021. `https://yannick-privat.perso.math.cnrs.fr/cours/optimLin.html`

[3] G. Allaire *Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique* 2005. isbn : 9782730212557

[4] F. Filbet *Analyse numérique. Algorithme et étude mathématique* 2024. isbn : 9782100873791