

Projet GMF:Optimisation du retour à l'état d'équilibre

BOURHIS, FERREIRA, LANDURÉ, RUIZ

Mai 2025

Partie 1

Introduction

On s'intéresse au problème suivant : dans le cas où le système est fortement perturbé, donc avec une configuration initiale quelconque $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$, on veut se ramener à un état d'équilibre stable en temps fini. Pour le pendule simple, à partir de $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$, on souhaite se ramener à la configuration stable $(0, 0)$ sur l'intervalle de temps $[0, 1]$. Pour cela, on introduit une fonction de contrôle $h(t)$ pour agir sur le pendule et on obtient l'équation :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = h(t).$$

Ce projet vise à analyser et contrôler le mouvement d'un pendule simple soumis à une force externe $h(t)$. L'objectif est de ramener le pendule, quelle que soit sa position et sa vitesse initiales, vers son état d'équilibre (immobile en position verticale) en exactement une seconde, tout en minimisant la dépense énergétique. Le système est influencé par la gravité, et l'utilisateur peut intervenir via une force extérieure représentée par la fonction $h(t)$. Il s'agit donc de déterminer la forme optimale de cette force de commande.

On étudie le système masse de masse M dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

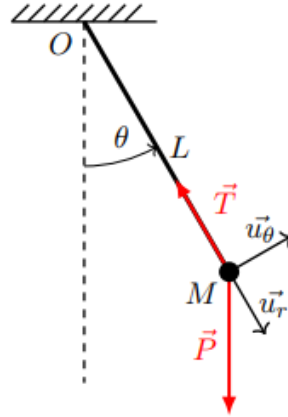


Figure 1: Schéma de la situation

Bilan des forces :

$$\vec{P} = m \vec{g}, \quad \vec{T} = -T \vec{u}_r$$

où T est la tension du fil, et \vec{P} , \vec{T} , \vec{u}_r , \vec{u}_θ sont des vecteurs.

Principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse :

$$M \vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \quad \text{avec} \quad \vec{a} = -L (\dot{\theta})^2 \vec{u}_r + L \ddot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

On exprime \vec{P} dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\vec{P} = m g \cos \theta \vec{u}_r - m g \sin \theta \vec{u}_\theta.$$

Projection sur \vec{u}_θ :

$$m L \ddot{\theta} + m g \sin \theta = 0 \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0.$$

On vient de reconstruire, par l'application du principe fondamental de la dynamique, l'équation qui régit notre système.

Objectif

Dans cette partie, l'objectif est de ramener un pendule en position d'équilibre stable :

$$(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$$

à l'instant final donné $T = 1$, en déterminant une commande optimale $h(t)$.

Cette commande doit permettre ce retour tout en minimisant une fonction de coût représentant l'énergie ou l'effort de contrôle.

Méthode d'Euler explicite appliquée à notre système

La méthode d'Euler explicite est une méthode numérique simple permettant d'estimer la solution d'une équation différentielle en avançant par pas fixes dans le temps.

Considérons une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(0) = y_0$$

Lorsque la solution exacte $y(t)$ n'est pas connue ou difficile à obtenir, on peut la calculer de manière approchée à des instants discrets t_0, t_1, \dots, t_N , en utilisant un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + \Delta t \cdot \frac{dy}{dt} \implies y_{n+1} \approx y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n)$$

Application à notre système :

Le système différentiel modélisant le mouvement du pendule est :

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = -\frac{g}{L} \sin(\theta(t)) + h(t) \end{cases}$$

En appliquant la méthode d'Euler explicite à ce système, on obtient les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \Delta t \cdot \omega_n \\ \omega_{n+1} = \omega_n + \Delta t \cdot \left(-\frac{g}{L} \sin(\theta_n) + h_n \right) \end{cases}$$

où les grandeurs discrètes θ_n , ω_n , et h_n représentent respectivement les approximations de $\theta(t_n)$, $\omega(t_n)$, et $h(t_n)$.

Résolution numérique

Type de ligne	Code Python	Signification typique en recherche
Ligne pleine	'-'	Référence, solution exacte, modèle principal
Ligne pointillée	'--'	Approximation, solution numérique, simulation théorique
Tiret-point	'-.''	Variante, solution corrigée, stratégie de contrôle
Pointillée fine	':'	Seuil, perturbation, bruit, variation rapide

Cas 1 — Oscillations libres ($h(t) = 0$)

Dans cette première simulation, on étudie le comportement d'un pendule simple sans frottement et sans action de commande externe $h(t)$. Le système est donc régi par l'équation :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0$$

Les conditions initiales aléatoires imposent une vitesse angulaire non nulle et un angle initial quelconque. La méthode d'Euler explicite est utilisée pour intégrer numériquement ce système.

Observation : L'angle $\theta(t)$ ainsi que la vitesse angulaire $\omega(t)$ oscillent indéfiniment sans amortissement. Ce comportement illustre la nature conservative du système : l'énergie mécanique totale (somme de l'énergie cinétique et potentielle) reste constante au cours du temps.

Conclusion : En l'absence de dissipation d'énergie, le pendule conserve son mouvement oscillatoire de manière périodique. Il ne converge pas naturellement vers une position d'équilibre.

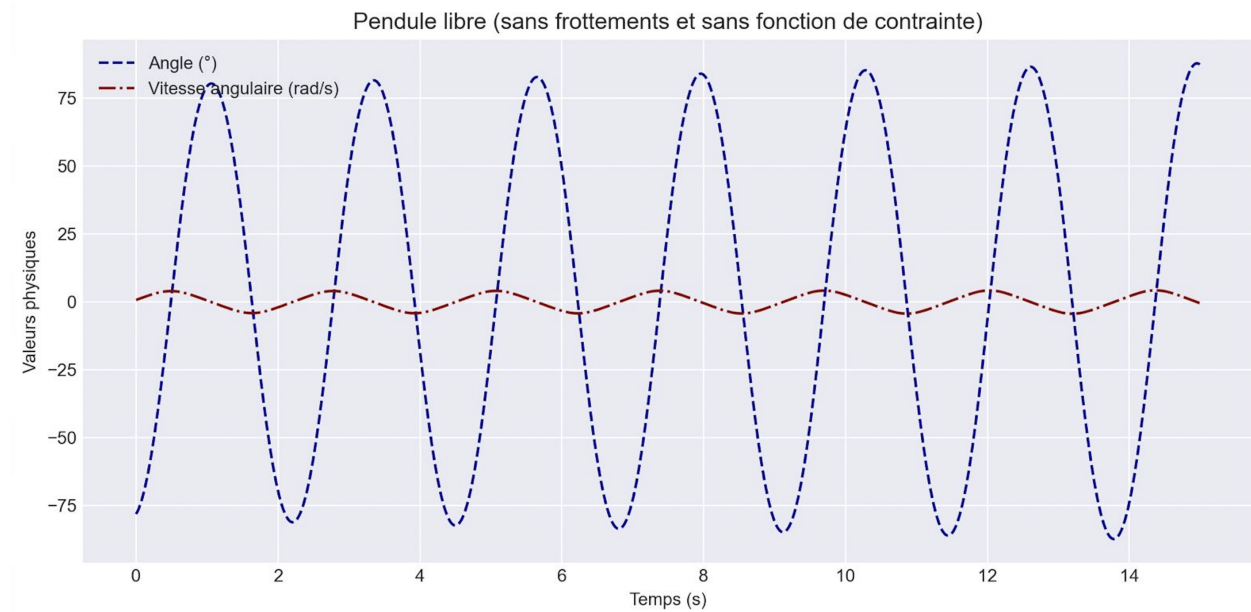


Figure 2: Évolution de l'angle et de la vitesse angulaire sans frottement ni commande

Cas 2 — Pendule avec frottement ($\lambda = 0.5$)

Dans ce second scénario, on introduit un terme de frottement visqueux proportionnel à la vitesse angulaire. Le système devient :

$$\ddot{\theta}(t) + \lambda \dot{\theta}(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0$$

Ce terme modélise une perte d'énergie mécanique à chaque oscillation.

Observation : On constate une diminution progressive de l'amplitude des oscillations dans le temps. L'angle $\theta(t)$ tend vers zéro, et la vitesse angulaire $\omega(t)$ s'annule également.

Conclusion : Le système est désormais dissipatif : à cause des frottements, l'énergie se dissipe progressivement, entraînant une convergence vers la position d'équilibre stable $(\theta, \omega) = (0, 0)$. Le pendule finit par s'immobiliser.

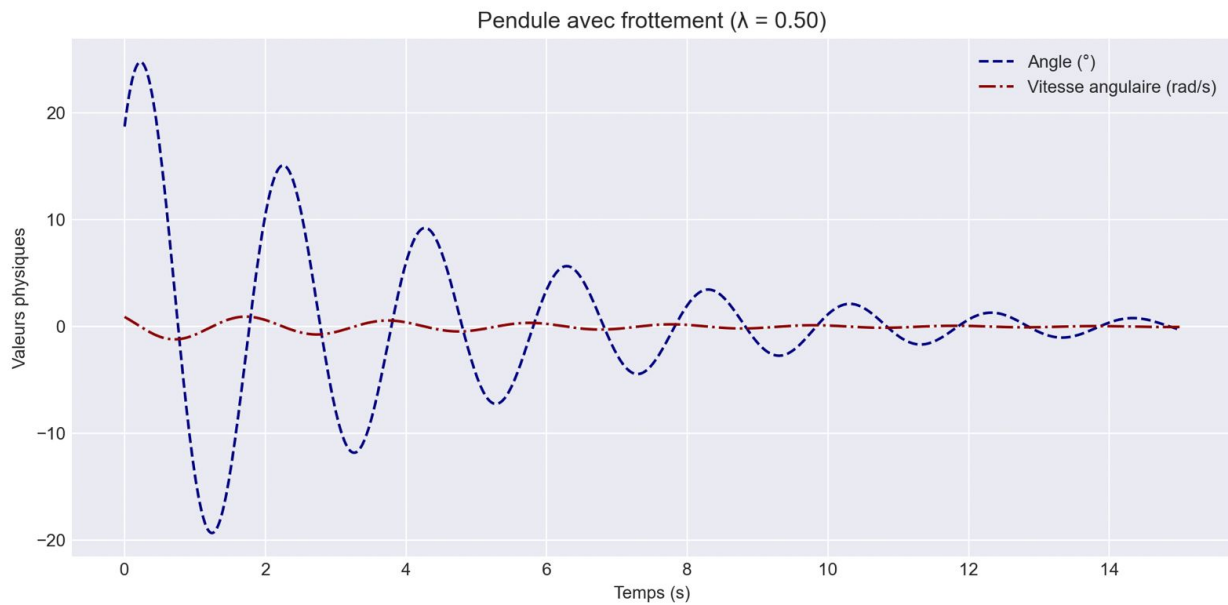


Figure 3: Pendule avec frottement ($\lambda = 1$) : amortissement progressif

Cas 3 — Système masse-ressort avec frottement ($\lambda = 0.5$)

Dans cette simulation, on ne modélise plus un pendule mais un oscillateur harmonique linéaire : un système masse-ressort amorti. Il est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{x}(t) + \lambda \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Cette équation représente un mouvement oscillatoire sous l'effet de deux forces :

- la force de rappel du ressort, proportionnelle à $-x(t)$,
- la force de frottement visqueux, proportionnelle à $-\dot{x}(t)$.

Observation : La position $x(t)$ présente des oscillations dont l'amplitude décroît progressivement avec le temps. La vitesse $v(t)$ suit une évolution similaire. Le mouvement est amorti.

Conclusion : Ce système dissipatif converge vers une position d'équilibre $x = 0$. L'énergie initiale (liée à la position $x_0 = 1$) est progressivement dissipée par les frottements. Le système illustre un comportement typique d'oscillateur amorti : retour progressif à l'équilibre sans oscillations prolongées si l'amortissement est suffisant.

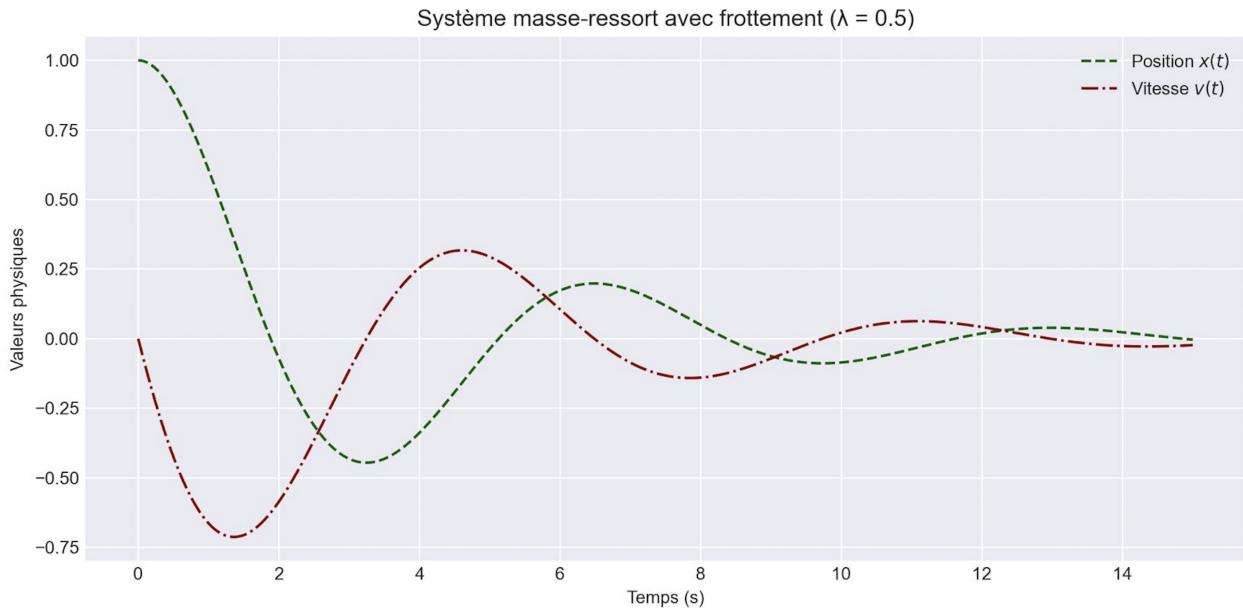


Figure 4: Évolution position et vitesse d'un oscillateur masse-ressort amorti ($\lambda = 0.5$)

Cas 4 — Pendule avec commande active $h(t)$

Dans ce dernier scénario, on introduit une fonction de contrôle $h(t, \theta, \omega)$ afin d'agir dynamiquement sur le système. Le modèle devient alors :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = h(t, \theta, \omega)$$

La commande choisie ici est de type **PD (Proportionnel-Dérivé)** :

$$h(t, \theta, \omega) = -2\theta(t) - 1,5 \cdot \omega(t)$$

Cette loi de commande vise à ramener rapidement le pendule vers sa position d'équilibre en combinant deux effets :

- un terme proportionnel à θ , qui corrige l'écart angulaire,
- un terme proportionnel à ω , qui agit comme un amortissement.

Observation : Le système converge rapidement vers l'état d'équilibre $(\theta, \omega) = (0, 0)$ sans oscillations prolongées. Les oscillations initiales sont fortement amorties grâce à l'action du contrôle.

Conclusion : La commande $h(t)$ est efficace pour stabiliser le système. Elle permet de corriger les déviations de l'angle et de la vitesse de manière dynamique, en injectant l'énergie nécessaire pour guider le pendule vers sa position cible tout en maîtrisant l'amortissement. Le système devient alors non seulement dissipatif, mais également piloté.

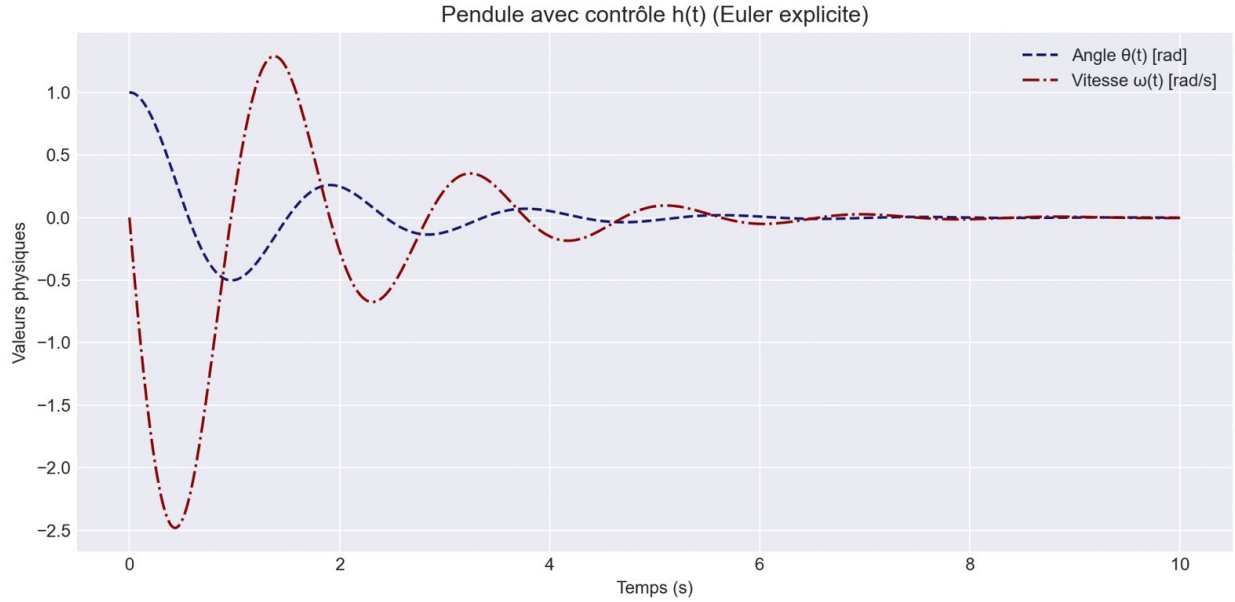


Figure 5: Pendule contrôlé avec commande active $h(t)$ de type PD

Partie 2

Dans ce projet, $h(t)$ joue le rôle de la **commande** (ou input en contrôle) : c'est la **force extérieure** (ou couple) que l'on applique au pendule pour le ramener exactement en position verticale immobile à l'instant final $T = 1$.

Pourquoi optimise-t-on $h(t)$?

- On souhaite que le pendule passe **de n'importe quelle condition initiale** $(\theta(0), \dot{\theta}(0))$ à **l'équilibre** $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ en exactement 1 seconde.
- **Parmi toutes les façons d'y parvenir** (c'est-à-dire parmi toutes les fonctions $h(t)$ possibles), on cherche celle **qui consomme le moins d'énergie**.

On traduit l'énergie de la commande par un **coût** de la forme :

$$J(h) = \int_0^1 h(t)^2 dt \quad (\text{ou plus sévère : } \int_0^1 h(t)^4 dt)$$

- L'algorithme ajuste alors la fonction $h(t)$, point par point (ou intervalle par intervalle), pour **minimiser ce coût** tout en s'assurant que la trajectoire finale vérifie bien :

$$(\theta(1), \dot{\theta}(1)) = (0, 0)$$

On considère le système :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = h(t)$$

avec les conditions :

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \theta(1) = 0, \quad \omega(1) = 0$$

Méthode d'Euler : équation d'ordre 2 \rightarrow ordre 1

On pose :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} x_1(t) = \theta(t) \\ x_2(t) = \dot{\theta}(t) \end{cases}$$

Alors :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ h(t) - \frac{g}{L} \sin(x_1(t)) \end{pmatrix}$$

Méthode d'Euler explicite

On cherche à approximer la solution de :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(0) = x_0$$

Avec la formule de Taylor :

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{soit} \quad x(t_m) \approx x_m$$

D'où :

$$x_{m+1} = x_m + \Delta t \cdot f(t_m, x_m)$$

Application à notre système :

$$\begin{cases} x_1^{m+1} = x_1^m + \Delta t \cdot x_2^m \\ x_2^{m+1} = x_2^m + \Delta t \cdot \left(h(t_m) - \frac{g}{L} \sin(x_1^m) \right) \end{cases}$$

Pour amener le pendule à la position d'équilibre tout en minimisant l'énergie de contrôle, on utilise la fonction coût :

$$J(h) = \int_0^1 h(t)^2 dt$$

où $t \in [0, 1]$, $t_0 = 0$, $t_f = 1$.

Ensuite, on discrétise :

$$J(h) \approx \sum_{i=0}^{m-1} \Delta t \cdot h(t_i)^2$$

avec :

$$\Delta t = \frac{1}{m}, \quad t_i = i \cdot \Delta t$$

On découpe donc l'intervalle $[0, 1]$ en m sous-intervalles, et pour chaque t_i , on a :

$$h(t) = h(t_i) \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}]$$

On souhaite trouver $\min J(h)$ en fonction de θ_i , ω_i , et h_i .

Pour cela, il faut faire en sorte que le pendule respecte les conditions initiales (CI) et termine à son état d'équilibre.

Par Euler :

$$\begin{aligned} \theta_{i+1} &= \theta_i + \Delta t \cdot \omega_i \\ \omega_{i+1} &= \omega_i + \Delta t \cdot \left(-\frac{g}{L} \sin(\theta_i) + h_i \right) \end{aligned}$$

Conditions initiales et finales

On doit donc respecter :

$$\theta_0 = \theta_{\text{init}}, \quad \omega_0 = \omega_{\text{init}}$$

conditions finales souhaitées :

$$\theta_m = 0, \quad \omega_m = 0$$

Méthode du Lagrangien

On utilise la méthode du Lagrangien avec deux séries de multiplicateurs de Lagrange :

$$\lambda_i^\theta \quad \text{et} \quad \lambda_i^\omega$$

Le lagrangien discret s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta_i, \omega_i, h_i) &= \sum_{i=0}^{m-1} \Delta t \cdot h(t_i)^2 + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i^\theta (\theta_{i+1} - \theta_i - \Delta t \cdot \omega_i) \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i^\omega \left(\omega_{i+1} - \omega_i - \Delta t \cdot \left(-\frac{g}{L} \sin(\theta_i) + h_i \right) \right) \end{aligned}$$

Problème d'optimisation

On a un problème d'optimisation :

$$\min J(h) = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta t \cdot h(t_i)^2$$

Sous contraintes :

$$\begin{aligned}\theta(t_{i+1}) &= \theta(t_i) + \Delta t \cdot \omega(t_i) \\ \omega(t_{i+1}) &= \omega(t_i) + \Delta t \cdot \left(-\frac{g}{L} \sin(\theta(t_i)) + h(t_i) \right) \\ \text{CI : } \theta(t_0) &= \theta_0, \quad \omega(t_0) = \omega_0 \\ \theta(t_m) &= 0, \quad \omega(t_m) = 0 \quad (\text{équilibre})\end{aligned}$$

Lagrangien associé :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(h, \theta, \omega, \lambda^\theta, \lambda^\omega) &= \sum_{i=0}^{m-1} \Delta t \cdot h(t_i)^2 + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i^\theta (\theta_{i+1} - \theta_i - \Delta t \cdot \omega_i) \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i^\omega \left(\omega_{i+1} - \omega_i - \Delta t \cdot \left(-\frac{g}{L} \sin(\theta_i) + h_i \right) \right)\end{aligned}$$

Méthode du gradient :

On cherche à annuler le gradient du lagrangien :

$$\nabla_h \mathcal{L}(h, \theta, \omega, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{m-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \forall i \in \{0, \dots, m-1\}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_i} = 0$$

Calcul du gradient du Lagrangien — $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_k}$

Pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$, on calcule :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_k} &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial}{\partial h_k} (\Delta t \cdot h_i^2) + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i^\theta \cdot \frac{\partial}{\partial h_k} (\theta_{i+1} - \theta_i - \Delta t \cdot \omega_i) \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i^\omega \cdot \frac{\partial}{\partial h_k} \left(\omega_{i+1} - \omega_i - \Delta t \cdot \left(-\frac{g}{L} \sin(\theta_i) + h_i \right) \right)\end{aligned}$$

Les deux premiers termes ne dépendent pas de h_k , sauf quand $i = k$, donc :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_k} = 2\Delta t \cdot h_k - \Delta t \cdot \lambda_k^\omega$$

Donc condition d'optimalité :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_k} = 0 \iff h_k = \frac{1}{2} \lambda_k^\omega$$

Gradient global :

$$\nabla_h \mathcal{L}(h, \theta, \omega, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{m-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \forall i \in \{0, \dots, m-1\}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_i} = 0$$

Dérivation du Lagrangien par rapport à θ_k

On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_k} &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial}{\partial \theta_k} (\Delta t \cdot h_i^2) + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i^\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_k} (\theta_{i+1} - \theta_i - \Delta t \cdot \omega_i) \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i^\omega \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left(\omega_{i+1} - \omega_i - \Delta t \cdot \left(-\frac{g}{L} \sin(\theta_i) + h_i \right) \right) \end{aligned}$$

En simplifiant :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_k} = -\lambda_k^\theta + \lambda_{k-1}^\theta + \lambda_k^\omega \cdot \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cos(\theta_k)$$

Donc, pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_k} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_{k-1}^\theta = \lambda_k^\theta - \lambda_k^\omega \cdot \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cos(\theta_k)$$

De plus,

$$\begin{cases} \omega(t_m) = \omega(t_f) = 0 \\ \theta(t_m) = \theta(t_f) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_{\text{lagrangien}} \perp \omega_m \\ \mathcal{L} \perp \theta_m \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_m^\omega = 0 \\ \lambda_m^\theta = 0 \end{cases}$$

On obtient alors un système de récurrence backward pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$:

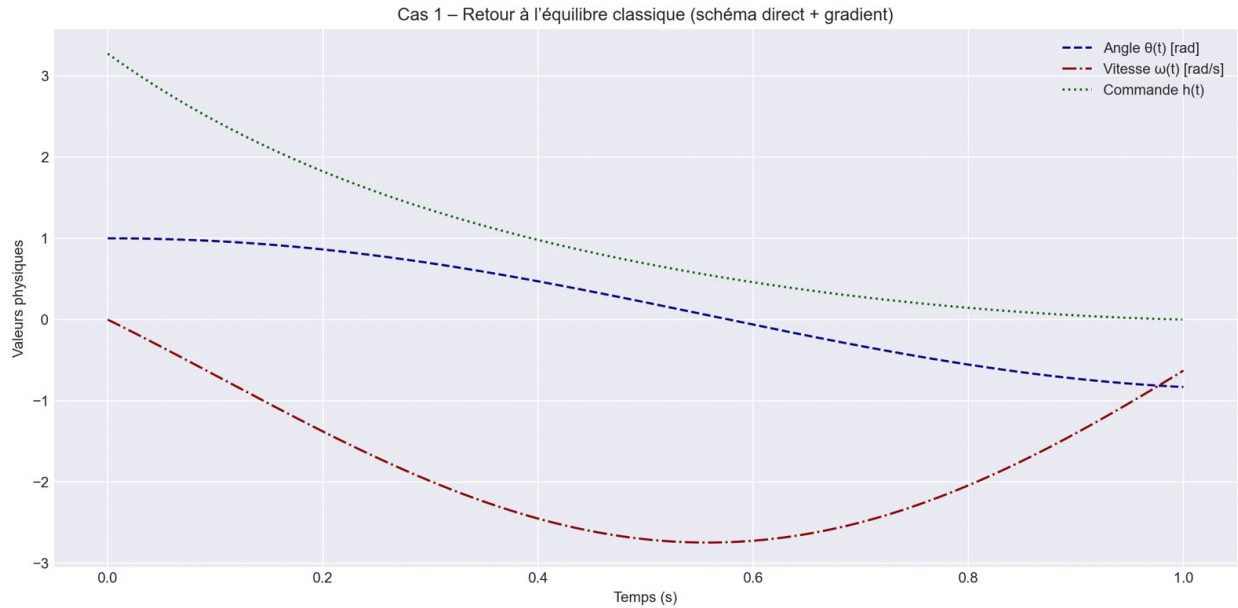
$$\begin{cases} \lambda_k^\theta = \lambda_{k+1}^\theta + \Delta t \cdot \lambda_{k+1}^\omega \cdot \frac{g}{L} \cos(\theta_k) \\ \lambda_k^\omega = \lambda_{k+1}^\omega + \Delta t \cdot \lambda_{k+1}^\theta \\ h_k = \frac{1}{2} \lambda_k^\omega \end{cases} \quad \text{avec} \quad \lambda_m^\omega = \lambda_m^\theta = 0$$

Numériquement, on en déduit la commande h telle que :

$$\omega(t_f) = \theta(t_m) = 0$$

Partie 3

Étude 1 — Retour à l'équilibre classique.



Conditions initiales :

$$\theta(0) = 1 \text{ rad}, \quad \omega(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{grande déviation angulaire, mais sans vitesse}$$

Conditions finales visées :

$$\theta(1) = 0, \quad \omega(1) = 0$$

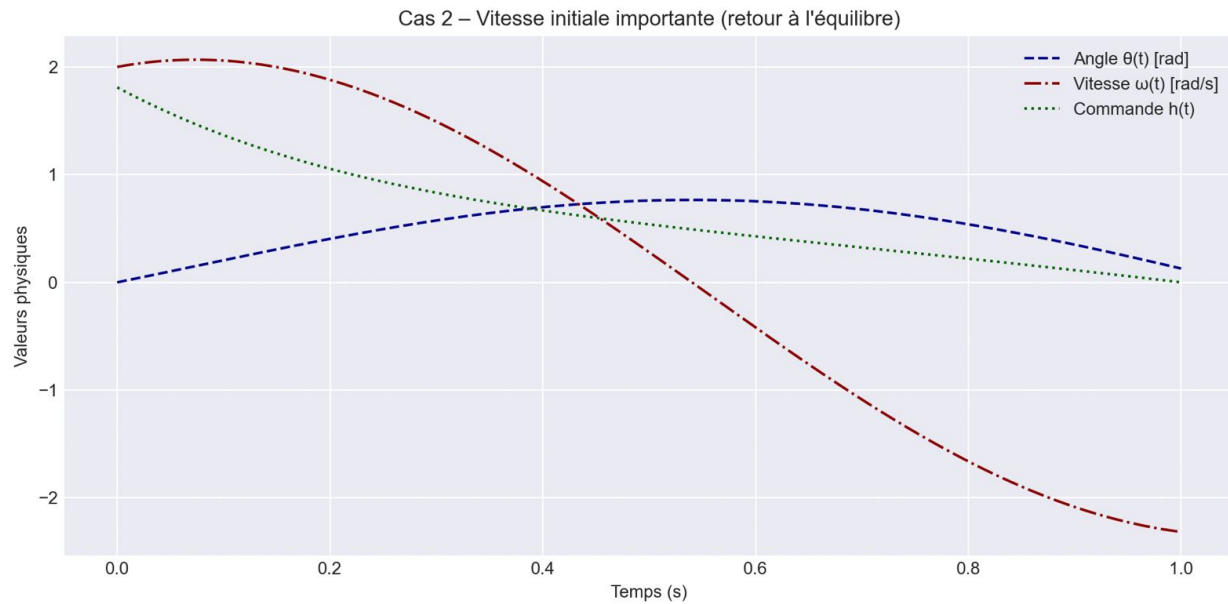
Analyse des résultats obtenus :

- **Angle $\theta(t)$** : On observe une décroissance progressive de l'angle vers 0. Le pendule revient lentement vers la verticale. Cela correspond à un retour contrôlé sans brusquerie, géré par une commande continue.
- **Vitesse angulaire $\omega(t)$** : La vitesse augmente progressivement en négatif jusqu'à un minimum, avant de remonter pour s'annuler à $t = 1$. Le profil est symétrique et typique d'un freinage inertiel.
- **Commande $h(t)$** : La fonction de contrôle est décroissante et relativement régulière, démarrant autour de $h(0) = 3,5$. Cela traduit une **action modérée mais constante** sur l'ensemble de l'intervalle. Le contrôle agit essentiellement pour contrebalancer le couple gravitationnel, sans nécessiter de correction brutale.
- **$J(h)=1.77$**

Conclusion :

Ce cas illustre une situation standard où le pendule est dévié mais immobile. La stratégie optimale consiste à exercer une commande douce et soutenue afin de guider le système vers l'équilibre. Le coût $J(h)$ associé reste **modéré**, car il n'y a ni freinage immédiat ni besoin de surcompensation. Cette configuration représente un scénario idéal pour la stabilisation.

Étude 2 — Vitesse initiale importante (retour à l'équilibre)



Conditions initiales :

$$\theta(0) = 0 \text{ rad}, \quad \omega(0) = 2 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \text{le pendule démarre droit mais en mouvement rapide}$$

Conditions finales visées :

$$\theta(1) = 0, \quad \omega(1) = 0$$

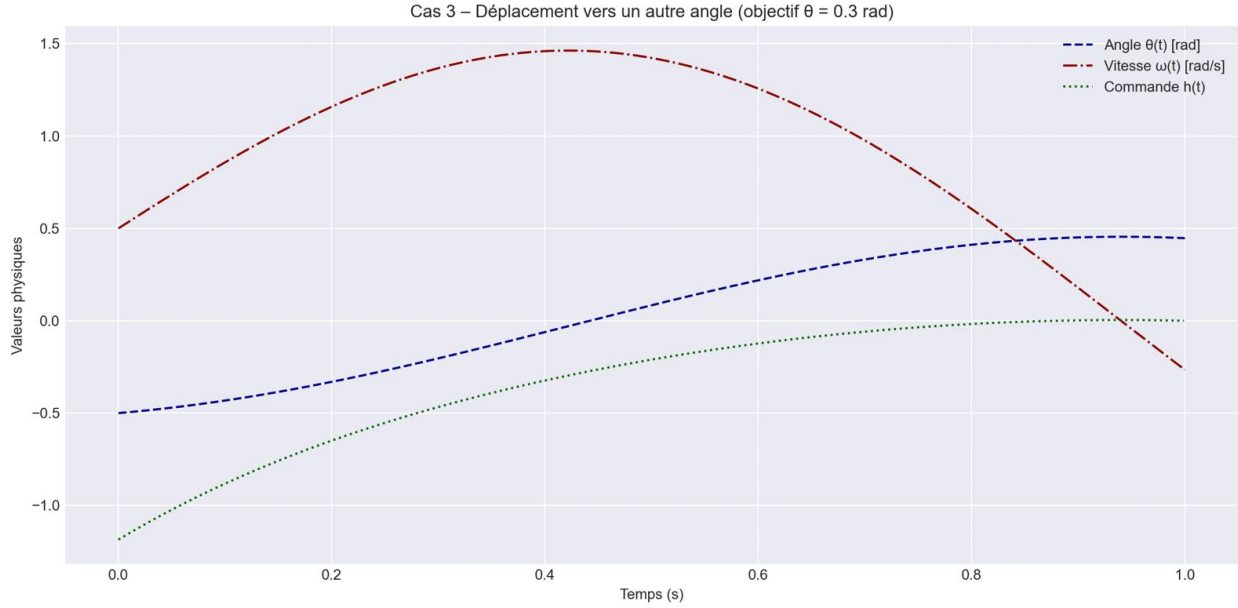
Analyse des résultats obtenus :

- **Angle $\theta(t)$** : L'angle augmente dans un premier temps sous l'effet de la vitesse initiale, avant d'être corrigé par le contrôle qui le ramène ensuite vers 0. Le maximum est atteint à mi-parcours.
- **Vitesse angulaire $\omega(t)$** : On observe un pic dès le début (liée à la condition initiale), suivi d'une forte décroissance. Cela traduit une **action de freinage immédiate** pour ralentir l'inertie initiale.
- **Commande $h(t)$** : La commande est relativement élevée au début (valeurs proches de 1,8) pour contrer la vitesse initiale, puis elle diminue de manière continue. On observe ici un **effort de contrôle concentré en début de trajectoire**.
- **$J(h)=0.6245$**

Conclusion :

Dans ce scénario, la vitesse initiale génère une forte énergie cinétique. Le contrôle $h(t)$ doit donc agir rapidement pour enrayer le mouvement et ensuite stabiliser le système. Cela conduit à un coût $J(h)$ **moins élevé** que dans le cas d'un angle initial élevé mais sans vitesse (cas 1), car il faut une impulsion initiale plus énergétique.

Étude 3 — Déplacement vers un autre angle.



Conditions initiales : $\theta(0) = -0,5$ rad, $\omega(0) = 0,2$ rad/s

Conditions finales : $\theta(1) = 0,3$ rad, $\omega(1) = 0$

Dans ce scénario, on ne cherche pas à ramener le pendule à l'équilibre vertical ($\theta = 0$), mais à une position angulaire différente et positive ($\theta = 0,3$). Cela implique une commande plus complexe, car il faut non seulement inverser le mouvement initial (le pendule démarre avec un angle négatif et une vitesse positive), mais aussi le stabiliser autour d'une nouvelle cible.

Analyse des graphes :

- L'angle $\theta(t)$ évolue de manière monotone pour rejoindre progressivement l'objectif $\theta = 0,3$, sans oscillation majeure.
- La vitesse angulaire $\omega(t)$ augmente initialement (effet d'accélération), atteint un pic, puis diminue pour stabiliser la trajectoire à la position finale.
- La commande $h(t)$ adopte un profil **biphasé** : une première phase négative permet de corriger l'écart initial, suivie d'un ralentissement pour amortir et figer le mouvement.
- **$J(h)=0.2225$**

Conclusion : Ce cas illustre bien le rôle adaptatif de la commande $h(t)$, qui doit gérer à la fois un changement de direction et une stabilisation fine. On observe un coût modéré à élevé en fonction de l'intensité nécessaire pour inverser le mouvement, mais la commande reste relativement fluide et progressive.

Pourquoi $h(t)$ revient à zéro lorsque le pendule se stabilise dans un angle différent de zéro ?

Dans notre formulation du problème de contrôle optimal, on impose uniquement que, à l'instant final T ,

$$\theta(T) = \theta_{\text{target}}, \quad \omega(T) = 0,$$

mais on ne contraint pas la commande $h(t)$ à maintenir l'équilibre au-delà de $t = T$.

Autrement dit, l'unique objectif est d'atteindre la configuration

$$(\theta(T), \omega(T)) = (\theta_{\text{target}}, 0)$$

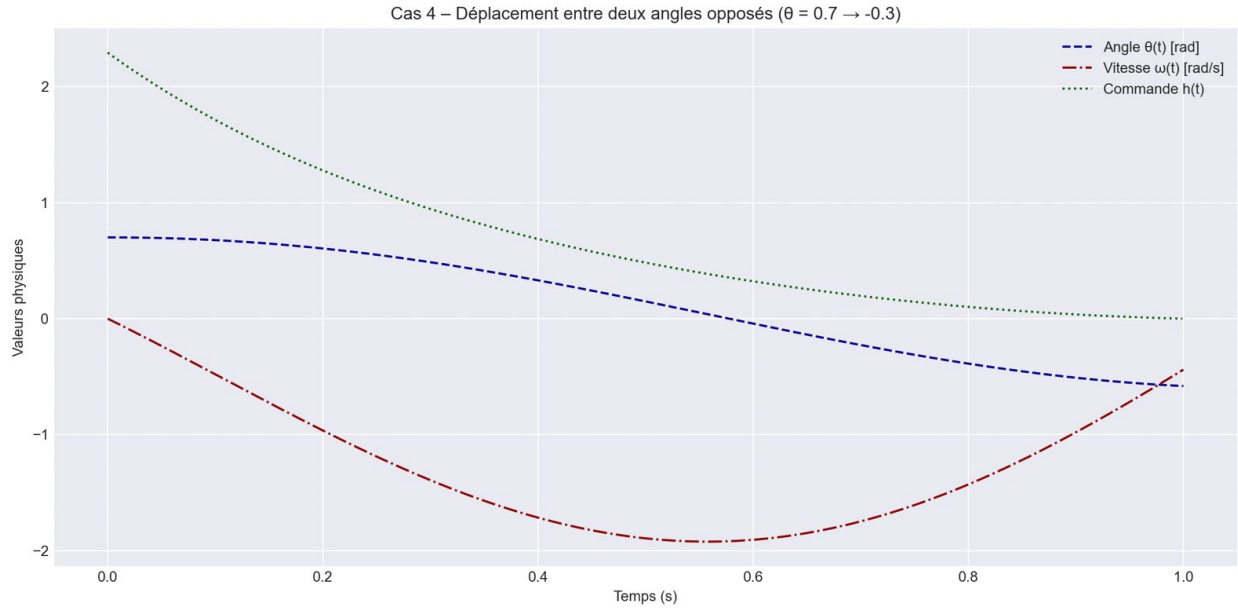
en minimisant la quantité d'énergie injectée, mesurée par le coût quadratique

$$J(h) = \int_0^T h(t)^2 dt.$$

Dès que ces conditions terminales sont satisfaites, la solution permettant de minimiser $J(h)$ pousse naturellement $h(T)$ à zéro. En effet, toute contribution non nulle de h au moment $t = T$ augmenterait inutilement la valeur de l'intégrale $\int_0^T h(t)^2 dt$ sans améliorer les conditions finales, puisque $\theta(T)$ et $\omega(T)$ sont déjà atteints.

Il en résulte que, même si le pendule se stabilise à un angle $\theta_{\text{target}} \neq 0$, la commande optimale $h(t)$ s'annule au voisinage de $t = T$. Physiquement, cela peut sembler paradoxal, car, pour maintenir un pendule incliné de façon statique au-delà du temps T , il faudrait effectivement un couple constant non nul. Cependant, notre problème ne porte que sur l'intervalle $[0, T]$: une fois la configuration $(\theta_{\text{target}}, 0)$ atteinte, la minimisation du coût n'exige plus aucune action de h .

Étude 4 — Déplacement entre deux angles opposés (0,7 et -0,3).



Dans ce scénario, le pendule débute à l'arrêt complet ($\theta(0) = 0.7 \text{ rad}$, $\omega(0) = 0$) et doit atteindre une position finale inclinée négative ($\theta(1) = -0.3 \text{ rad}$, $\omega(1) = 0$). La commande $h(t)$ est donc responsable à la fois de l'initiation du mouvement et de son amortissement.

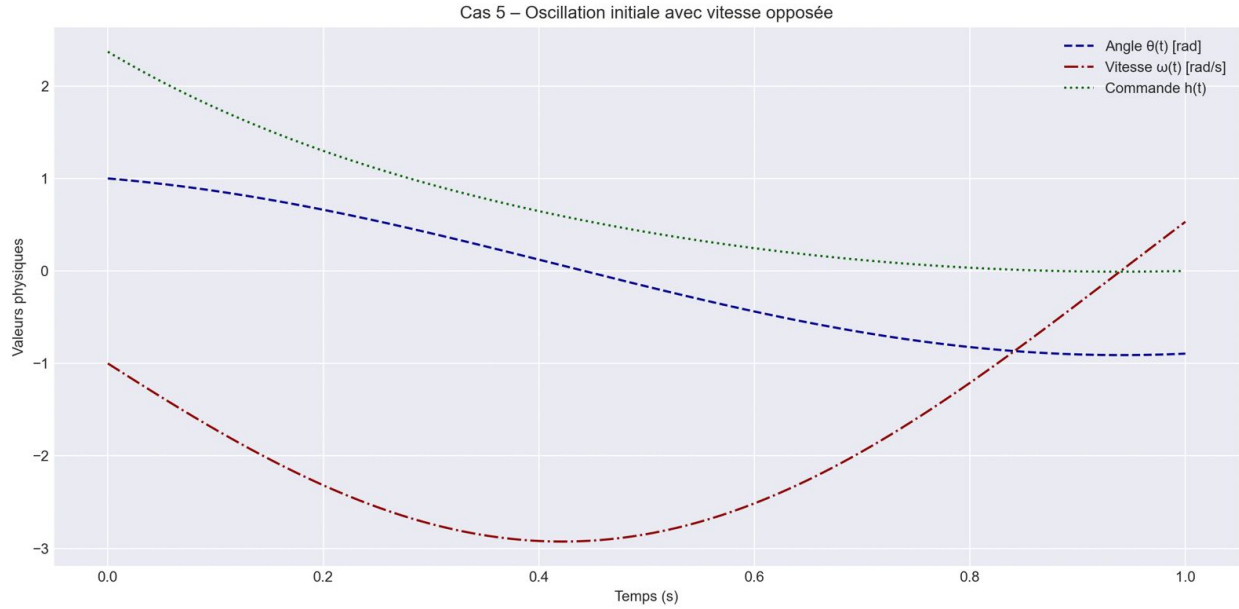
Analyse du graphe :

- L'angle $\theta(t)$ décroît progressivement, reflétant une rotation contrôlée dans le sens négatif. L'évolution est régulière et bien amortie.
- La vitesse angulaire $\omega(t)$ augmente d'abord en amplitude négative, atteignant un pic intermédiaire, avant de revenir vers zéro pour stabiliser le système.
- La commande $h(t)$ présente un profil décroissant, initiant l'accélération puis réduisant progressivement l'effort de contrôle pour freiner et stabiliser le pendule. L'amplitude reste modérée, traduisant une trajectoire relativement douce.
- **$J(h)=0.8713$**

Conclusion : La stratégie de contrôle est équilibrée : une énergie initiale est injectée pour provoquer le mouvement, suivie d'un ralentissement progressif. Le coût énergétique reste raisonnable grâce à une

trajectoire fluide, sans oscillations brusques ni sur-correction. La même logique qu'expliquée précédemment s'applique ici aussi.

Étude 5 — Oscillation initiale avec vitesse opposée.



Le pendule commence avec un angle initial élevé (ici, $\theta(0) = 1$ rad) mais avec une vitesse initiale dirigée vers l'équilibre (ici, $\omega(0) = -1$ rad/s). Cette configuration est intéressante, car le mouvement naturel du pendule tend déjà à ramener l'angle vers la position cible.

La commande $h(t)$ n'a donc pas besoin d'exercer un effort important de freinage comme dans le cas d'une vitesse dans le sens opposé. Elle agit ici comme un **accompagnement**, voire un *relai*, pour guider le pendule dans son mouvement de retour sans surcorrection.

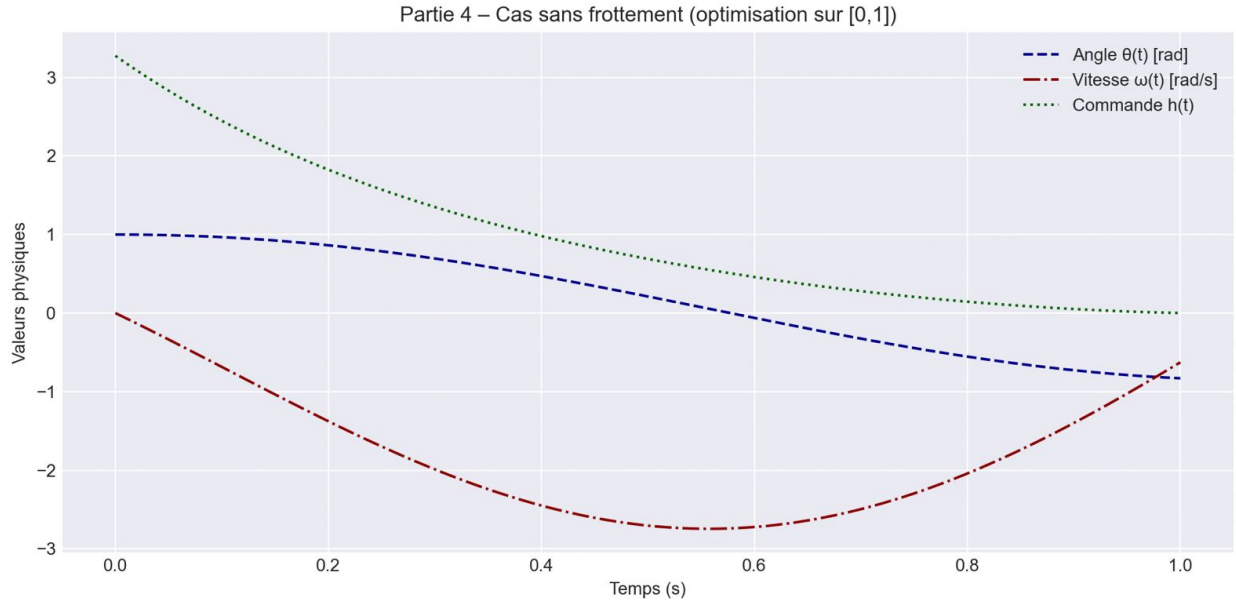
Analyse des courbes :

- L'angle $\theta(t)$ décroît de manière douce et continue vers zéro, aidé par la vitesse initiale.
- La vitesse $\omega(t)$ devient plus négative avant d'inverser sa tendance pour se stabiliser à zéro à l'instant final.
- La commande $h(t)$ présente une décroissance régulière et modérée, sans pic brutal, ce qui traduit une faible sollicitation énergétique.
- **$J(h)=0.8901$**

Conclusion : Cette configuration permet une commande efficace et économe en énergie. Le coût $J(h)$ est plus faible que dans les cas précédents, car le système utilise l'inertie initiale de manière avantageuse. Le contrôle agit avec souplesse pour atteindre l'objectif final sans effort excessif.

Partie 4

Sans frottements.



Cas sans frottement — Optimisation sur $[0, 1]$

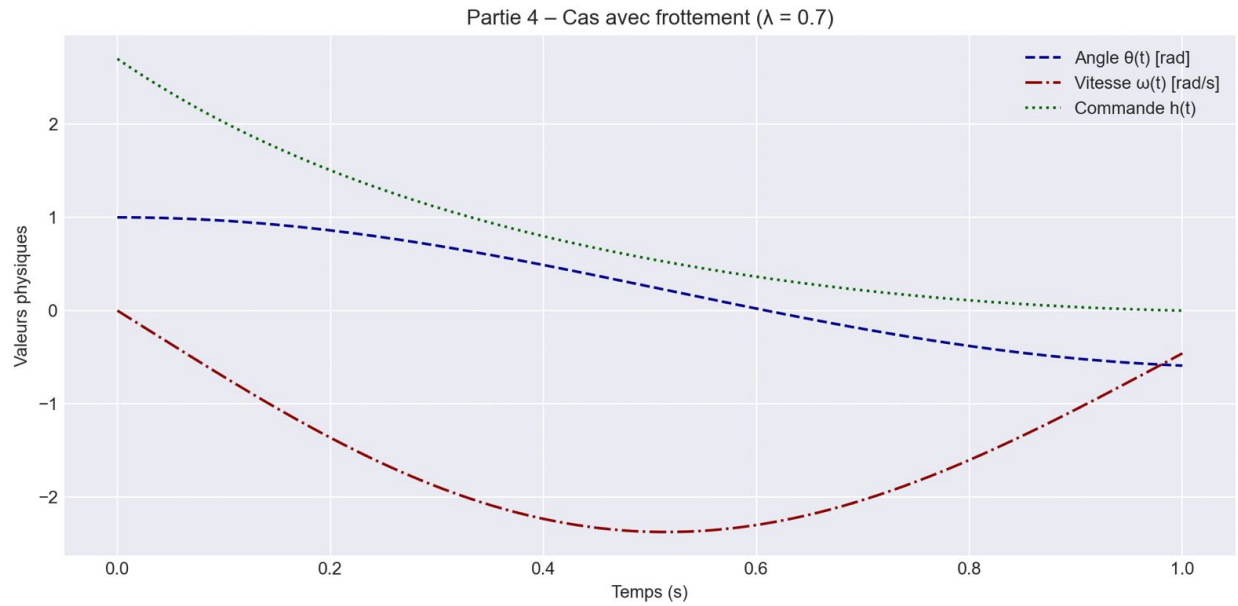
Ce scénario correspond à un pendule évoluant sans aucun terme de frottement, soumis uniquement à la gravité et à la commande externe $h(t)$. L'objectif est de ramener l'angle $\theta(t)$ à zéro en 1 seconde, tout en minimisant l'énergie de contrôle.

Analyse des courbes :

- **Angle $\theta(t)$** : L'angle initial est non nul (environ 1 rad) et décroît progressivement jusqu'à atteindre la valeur cible $\theta(1) \approx 0$. La variation est continue et lissée, sans oscillation parasite.
- **Vitesse angulaire $\omega(t)$** : Elle commence à zéro et devient rapidement négative pour freiner l'angle. On note une phase de décélération jusqu'à un minimum, puis une remontée vers zéro pour respecter la condition finale $\omega(1) = 0$.
- **Commande $h(t)$** : La commande commence à une valeur élevée (environ 3.2) et décroît régulièrement jusqu'à s'annuler à l'instant final. Elle fournit initialement l'effort nécessaire pour contrer la gravité et initier la chute contrôlée, puis diminue pour ajuster la trajectoire en douceur.

Conclusion : En l'absence de frottement, l'énergie n'est pas naturellement dissipée, donc $h(t)$ doit compenser entièrement les effets de l'inertie et de la gravité. Cela se traduit par une commande initiale forte suivie d'un relâchement progressif. Le profil du contrôle est optimal : il utilise un effort maximal là où nécessaire puis décroît jusqu'à l'arrêt. Ce comportement illustre bien la stratégie de commande optimale en environnement conservatif.

Avec frottements.



Cas avec frottement — $\lambda = 0,7$

Dans ce scénario, le pendule est soumis à un frottement visqueux modélisé par un coefficient $\lambda = 0,7$, en plus de la gravité et de la commande externe $h(t)$. Ce frottement agit comme une dissipation naturelle d'énergie.

Analyse des courbes :

- **Angle $\theta(t)$** : L'angle initial est de 1 radian. Il décroît progressivement vers 0, de manière plus rapide qu'en absence de frottement. Cela s'explique par l'effet dissipatif de λ , qui aide à stabiliser naturellement le pendule.
- **Vitesse angulaire $\omega(t)$** : On observe une accélération négative modérée, suivie d'un retour progressif vers zéro. Le frottement ralentit plus efficacement la dynamique, rendant l'évolution plus douce.
- **Commande $h(t)$** : La commande débute à une valeur élevée (environ 2.7), mais elle décroît plus rapidement qu'en l'absence de frottement. Cela indique que l'effort de commande est partiellement relayé par l'effet amortissant du système.

Conclusion : La présence de frottements permet de réduire l'intensité et la durée de la commande $h(t)$, car le système dissipe déjà de l'énergie par lui-même. On obtient une trajectoire plus stable, avec un coût $J(h)$ potentiellement plus faible que dans le cas sans frottement.

$J(h)$	1,7782	1,3361	1,2678	1,2048	1,1466	1,0928	1,043
Coefficient de frottement	0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1

Analyse :

On observe une tendance claire : plus le coefficient de frottement λ augmente, plus le coût $J(h)$ diminue.

- **Sans frottement** ($\lambda = 0$), le coût est maximal ($J(h) = 1.7782$) car l'intégralité de l'effort pour stabiliser le système repose sur la commande externe $h(t)$.
- **Avec frottement croissant** ($\lambda = 0.5 \rightarrow 1.0$), le système bénéficie d'une dissipation naturelle d'énergie. Ainsi, la commande $h(t)$ a besoin d'exercer moins d'effort pour ramener le pendule à l'équilibre, ce qui réduit progressivement $J(h)$.
- **À $\lambda = 1.0$** , le coût est le plus faible ($J(h) = 1.043$), traduisant un équilibre optimal entre dissipation naturelle et effort de commande.

Conclusion : L'ajout de frottement visqueux dans le système agit comme un amortisseur passif efficace. Il allège la charge de la commande optimale $h(t)$, ce qui permet de réduire significativement le coût total $J(h)$ de stabilisation. Cela met en évidence l'intérêt de modéliser ou intégrer un effet dissipatif dans les systèmes physiques soumis à contrôle.

Pistes d'approfondissement.

Plusieurs axes peuvent être envisagés pour prolonger et enrichir l'étude du contrôle optimal d'un pendule :

- **Changer l'échelle de temps** $[0, T]$: Dans cette étude, l'optimisation a été réalisée sur l'intervalle temporel $[0, 1]$. Il serait pertinent d'étudier l'influence de la durée totale T sur le comportement optimal. Un intervalle plus court pourrait nécessiter une commande plus intense, tandis qu'un intervalle plus long laisserait davantage de liberté pour une trajectoire douce, potentiellement moins coûteuse.
- **Faire varier la longueur de la corde** L : La longueur du pendule impacte directement la fréquence naturelle du système ($\omega_0 = \sqrt{g/L}$). En modifiant L , on modifie donc la dynamique du système. Il serait intéressant d'étudier comment le profil de la commande optimale $h(t)$ s'adapte à des pendules plus courts (plus rapides) ou plus longs (plus lents).
- **Introduire la masse** m : Jusqu'ici, la masse du pendule n'intervenait pas explicitement car les équations étaient homogénéisées. Cependant, dans un cadre plus réaliste, la masse pourrait affecter l'énergie cinétique et donc la quantité de travail nécessaire pour stabiliser le système. En intégrant cette variable, on pourrait étudier l'effet de l'inertie sur le coût $J(h)$ et sur la stratégie de contrôle optimale.

Ces pistes ouvrent la voie à une analyse plus large du système et de ses performances. En jouant sur les paramètres physiques ou sur les objectifs du contrôle, on peut adapter la stratégie optimale à différents contextes physiques, industriels ou pédagogiques.

Conclusion Générale

Ce projet a été assez difficile à gérer, surtout parce qu'il était très axé sur la théorie. Les consignes n'étaient pas toujours claires et certains d'entre nous n'avaient pas vraiment étudié la physique les années précédentes. Par conséquent, comprendre et expliquer certains concepts, comme les équations différentielles qui décrivent le mouvement du pendule, nous a posé pas mal de problèmes.

Malgré tout, on a su tirer parti des points forts de chacun. On a réparti les tâches en fonction des compétences : certains faisaient le codage, d'autres creusaient la partie théorique et interprétaient les résultats. Même si on avait tous un emploi du temps chargé et qu'on a parfois pris du retard sur les livrables, cette organisation nous a permis d'avancer.

Au final, on a appris beaucoup de choses grâce à ce projet : passer d'un modèle mathématique à une implémentation concrète n'était pas évident, mais ça nous a fait progresser. C'est surtout cette expérience de travail en équipe et les nouvelles connaissances acquises qu'on retiendra.

Bibliographie

- Cours de mécanique analytique – LPTHE, Sorbonne Université : <https://sciences.sorbonne-universite.fr/structures-de-recherche/lpthe>
- G. Allaire Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique 2005. isbn : 9782730212557
- Introduction à la résolution approchée d'EDOs (pendule simple) : <https://www.math.cmu.edu/~ldietric/fichiers/enseignement/m1/TP4.pdf>
- Youtube Machine Learnia : https://www.youtube.com/watch?v=rcl_YRyoLIYt $t = 178s$
- G. Allaire Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique 2005. isbn : 9782730212557
- Youtube (les maths par l'exemple) : <https://www.youtube.com/watch?v=DdUL3sNZuA>
- lien Github pour les codes: <https://github.com/marwanferreira/ProjetFinalGM>