Fait : si couvert $X_{ét}$ et pas $FÉt_X$ ça marche plus

mais on peut faire +/− la même chose.

$\lim G_i = \emptyset$ dans Top Grps. c'est possible.

⇝ <u>Locales :</u> $\mathrm{Top}_{\text{sobres}} \xhookrightarrow{\text{ff}} \mathrm{Loc}$.

Dans les locales, $\lim G_i$ existe

et si $G_i \to G_j$ surj $\Rightarrow \lim G_i = 0$

"top sans points"

ex. de lim

ω_1 = l'ens des ordinaux dénombrables $[n]$

ω $\quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni$ bon ordre.

S_α = fct str. ↗↗ $([0,\alpha], \mathbb{R})$ $\quad \alpha = [x]^{-1} [\![0,n]\!]$

$S_\alpha \longrightarrow S_\beta$ $\quad \beta < \alpha$ et surj

Mauvaise idée de prendre $\lim G_i \in$ Top Grps.

$\lim G_i \in$ Loc groupe localique.

I) locales:

<u>Def:</u> un poset $\mathcal{U}$ est une locale si

(1) $\forall$ partie (U_α) de $\mathcal{U}$ a un sup $\bigsqcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{U}$.

$\Rightarrow \bigsqcup_\phi \in \mathcal{U} \rightsquigarrow \mathcal{U}$ a un plus petit élém.

$\Rightarrow (U_\alpha) \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow A = \{V \,/\, V \in U_\alpha \,, \forall \alpha\} \neq 0$

$\Rightarrow \sup A = \inf \mathcal{U}_\alpha$

Sim $\inf(U, V) =: U \wedge V$.

(2) $\forall \{U_\alpha\},\ V \in \mathcal{U},\ \left(\bigsqcup_\alpha U_\alpha\right) \wedge V = \bigsqcup_\alpha U_\alpha \wedge V$

$(\mathcal{U}, \vee)$ monoidale

Frames (cadres) := ob = locales

flèches = croissantes t.q. $f\left(\bigsqcup U_\alpha\right) = \bigsqcup_V f(U)$

$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$

$\Rightarrow f(\min) = \min.$

$\mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Loc}$

$X \longrightarrow \mathrm{Op}(X)$

$f_* \longrightarrow f^{-1} : \mathrm{Op}(Y) \longrightarrow \mathrm{Op}(X)$

Si $\mathcal{U}$ est une locale, noté $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ le cadre associé

<u>Def</u>: $\mathcal{U}$ locale, un filtre / resp unidal de $\mathcal{U}$ est

t.q : (1) $\mathcal{F}$ (I) est non vide.

(2) $\forall F \in \mathcal{F}, \forall U \in \mathcal{U}, F \leq U \Rightarrow U \in \mathcal{F}$

(3) $A, B \in \mathcal{F}, \exists C \in \mathcal{F} \quad A \leq C, B \leq C$

$I \qquad\qquad\qquad \geq \qquad \geq$

$F \subseteq \mathcal{U}$ un filtre est dit premier si $\mathcal{U} \setminus \mathcal{F}$ est unidal et si

$a \notin \mathcal{F} \quad b \notin \mathcal{F}, \quad a \wedge b \notin I$

$\notin I$

$\mathrm{Spec}\, \mathcal{U} = \{ \text{filtres premiers de } \mathcal{U} \}$

Topo de Zariski : base d'ouvts donnée par

les $D(a)$, $a \in \mathcal{U}$, $\mathcal{D}(a) = \{ \mathcal{F} \,/\, a \in \mathcal{F} \}$

$\Rightarrow i \notin \mathcal{F}, \ i \leq a.$

$$X_{top} \xrightarrow[0<1]{} \xrightarrow{x} X$$

comme : $x \in Pt(\mathcal{U}) \iff \mathbb{1} \xrightarrow{f} \mathcal{U}$ dans Loc

$$\mathcal{O}(\mathcal{U}) \xrightarrow{f^*} 0<1 \qquad \Uparrow \ \sqcup, \cap \ldots$$

on a $\quad \mathrm{Spec}\, \mathcal{U} \simeq Pt(\mathcal{U})$

$$\mathcal{F} \longrightarrow x_{\mathcal{F}}$$

$$f^{*-1}(\{1\}) \longleftarrow f$$

$$\mathcal{D}(a) = \{ f : \mathcal{U} \to 0<1 \}$$

on a une adjonction entre $\mathrm{Top} \underset{\mathrm{Spec}}{\overset{\mathrm{op}(-)}{\rightleftarrows}} \mathrm{Locales}$

qui induit :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Top}_{sobre} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dr, "\mathrm{op}", "ff"'] & \text{Locales Spatiales} = \mathrm{im}\, \mathrm{Op}(\mathrm{Top}_{sobre}) \arrow[d] \\
& \mathrm{Loc}
\end{tikzcd}$$

sobre : [redacted]

preuve d'adjonction :

loc associé à $Op(X)$.

$$\mathrm{Hom}_{Top}(X, \mathrm{Spec}\, \mathcal{U}) = \mathrm{Hom}_{Loc}(\Omega(X), \mathcal{U})$$

ouvert : $\Omega(X) \to \mathcal{U}$ se factorise uniquement par $\Omega(\mathrm{Spec}\, \mathcal{U}) \to \mathcal{U}$

$f : \Omega(X) \to \mathcal{U}$ si $x \in X$

$\Omega(\ast) \to \Omega(X) \to \mathcal{U} \Leftrightarrow \overline{f(x)} \in \mathrm{Pt}(\mathcal{U})$

fait : $\bar{f} : X \to \mathrm{Spec}\, \mathcal{U}$ (suffit de vérifier loc ....)

pour l'histoire de sober : $\forall x \in X$, $\overline{\{x\}}$ inv $X \setminus \overline{\{x\}} = U$

$\Rightarrow X \to \mathrm{Spec}(\Omega(X))$ $\blacksquare$

(toutes les suites spectrales c'est le spec d'un anneau) check

Fait : Locales $\simeq$ $\underbrace{0\text{-catégories}}_{\text{points}}$ avec ttes les colimites

et les colims sont universelles ($X \times_S \mathrm{colim}\, Y_i = \mathrm{colim}\, X \times_S Y_i$)

$$\left(\bigcup U_\alpha\right) \cap V = \bigcup (U_\alpha \cap V)$$

avec morphs exacts cocontinus.

$\mathcal{U}$: Fancy Locales $\xrightarrow[ff]{N}$ $\mathcal{C}at_\infty$

Vus comme des limites :

$\forall\ f: X \to Y$ dans Loc, $f^*: \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$

$\exists\ \underbrace{f_*}_{\text{un adjoint à droite}} : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$

⚠ : pas de morph. de Frames, $f_*(\sqcup U_\alpha) \neq \sqcup f_a(U_\alpha)$

<u>Déf</u> : $f: U \to X$ ouvert (ds ....)

Si f^* a un adj à dr. $f_!$ qui envoie

$f_!(U \wedge f^*(V)) = f_!(U) \wedge V$ (formule de proj) e.g. si $U \hookrightarrow X$ ouvert ds Top

"image directe" $Op(Y) \to Op(X)$ .....

f ds Top ouverte ssi $\Omega(f)$ est ouverte.

<u>Prop</u>: être ouvert est stable par pullback.

si gf ouvert et f surj (epi obtenu par coequalisateur $U \rightrightarrows X$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend right] \\ X \arrow[d, "g"] \\ Y \end{tikzcd}$$

• $g \cdot f$ ouverts $\Rightarrow$ gf ouvert.

<u>preuve</u>:

$$\begin{tikzcd} X_Z \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Z \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} \mathcal{O}(X_Z) & \mathcal{O}(Z) \arrow[l] \\ \mathcal{O}(X) \arrow[u] & \mathcal{O}(Y) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Si g, f ouverts, f surj, on veut un adj. dr. de g^*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(Y)}(g^* z, y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(f^* g^* z, f^* y)$$

$$\| $$

$$\mathrm{Hom}(z, (gf)_! f^* y)$$

avec $g_! = h_! f^*$, $g_!(U \wedge g^* V) = h_!(f^* U \wedge (gf)^* V)$

$= h_!(\qquad)$

pk si surj $\Longrightarrow f^*$ f.f.

Si $y \leq y' \rightsquigarrow f^* y \leq f^* y' \rightsquigarrow$ fidèle

Si $x \leq x'$ ds $\mathcal{O}(X) \Longleftrightarrow 0 \leq 1 \longrightarrow \mathcal{O}(X)$

$$0 \longmapsto x$$

$$1 \longmapsto x'$$

$f = \mathrm{coeq}\left(U \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} X\right)$

$f^* = \mathrm{eq}\left(\mathcal{O}(X) \overset{a^*}{\underset{b^*}{\rightrightarrows}} \mathcal{O}(U)\right)$

$a^*(x \leq x') = a^* x \leq a^* x'$

$b^*(x \leq x') = b^* x \leq b^* x'$

$a^* \mathcal{X} = b^* \mathcal{X}$

$\to \tilde{x}$ se factorise par f^*

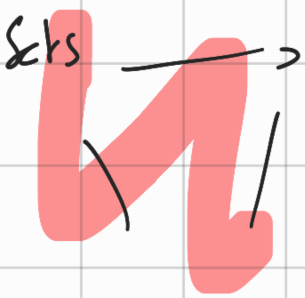
$x \le x' \to f^*(y \le y^*)$ $\blacksquare$

Déf: sous-locales : $X \to Y$ sous-locale si $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ surj comme poset.

voisinage d' $1\!\!1 \xrightarrow{x} X$, $U \subseteq X$ ouvert de ss-locale

$$\begin{tikzcd} 1\!\!1 \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "x"'] & U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

. X discret si $X = P(S) = \Omega$ (esp. discret)



$(X_\alpha)_A$ famille de locales

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(X_\alpha) \arrow[r, squiggly] & B = \prod \mathcal{O}(X_\alpha) \quad \ldots; \arrow[d, "p_\alpha"] \\ & \mathcal{O}(X_\alpha) \end{tikzcd}$$

$\exists\, q_\alpha : \mathcal{O}(X_\alpha) \longrightarrow B$

$a \longmapsto (1, 1, \dots, a, 1, \dots)$

$A \subset B$ l'image de q_α.

$\Rightarrow \prod X_\alpha = \Omega(A)$. "topologie ds rectangles"

$\Rightarrow X \times Y \longleftrightarrow X \times U \;\dots\; U \times U$

<u>Prop:</u> X discrète $\Longleftrightarrow$ $X \to X \times X$ ouverte

$\xrightarrow[\text{ok}]{}$

si $X \to X \times X$ ouvert si $1\!\!1 \to X$ pt.

$i_x : X \xrightarrow{(x;\, id)} X \times X$

Δ ouvert $x^{-1}(\Delta)$ ouv. ds X
$\underset{\{x\}}{\shortparallel}$

$\Rightarrow X = \Omega(P(X))$ $\blacksquare$

Groupes localiques:

<u>Def:</u> un grp localique $\Leftrightarrow$ obj en grpes ds Loc.

$\iff \mathrm{Loc}^{op} \longrightarrow \mathrm{Grp}.$

e.g. $\forall G \in \mathrm{Grp} \rightsquigarrow G$ groupe discret localique.

$\cap$ (on Grp)

$\forall G \in \mathrm{Top\,Grp} \rightsquigarrow \Omega(\mathcal{O}_p(G))$ est un grpe localique

e.g.: $S_\alpha = \mathrm{id}$ ... $\rightsquigarrow$ $G \in \mathrm{Grp\,loc}\,\mathbb{C}$

...

$$\begin{tikzcd}
R_H \arrow[r] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "m(\mathrm{id} \times \mathrm{inv})"] \\
H \arrow[r] & G
\end{tikzcd}$$

"$g, g' / g g'^{-1} \in H$"

$$R_H \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} G \longrightarrow G/H \text{ def coeq.}$$

H normal dist.

...

...

...