Talk 5 : Progroupes et Topos.

Rappel : • Loc : catégorie des locales. $= (\mathrm{Frm})^{op}$

un morphisme continu de locales $X \to Y$ est un morph. de frames : $\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{O}(X)$.

- Pour un topos $\mathcal{E}$, $B(\mathcal{E}, G)$:= le topos des $\mathcal{E}$-objets avec une $G \circlearrowright \mathcal{E}$ continue.

- Un groupe localique G est un préfaisceau dans la cat. des locales, qui se factorise par la cat. des groupes.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Loc}^{op} \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}(-,G)"'] & \mathrm{Grps} \arrow[d] \\ & \mathrm{Set} \end{tikzcd}$$

(par le lemme de Yoneda, ceci correspond aux morphismes multiplication, inversion et unité qui satisfont les diagrammes usuels)

- Soit G un grp. localique.

BG := catégorie des G-ensembles

• obj = G-ensembles S avec

$$\underbrace{S \times G}_{\text{produit dans Loc}} \xrightarrow{\sigma_S} \underbrace{S}_{\text{locale discrète}} \quad \text{une action continue.}$$

coproduit ds la cat. des cadres =

avec les deux diagrammes usuels d'une action de G.

- flèches = $(S, \cdot) \xrightarrow{f} (T, \cdot)$ entre G-ensembles

t.q.
$$\begin{tikzcd} S \times G \arrow[r, "f \times G"] \arrow[d, "\sigma_S"'] & T \times G \arrow[d, "\sigma_T"] \\ S \arrow[r, "f"'] & T \end{tikzcd}$$

(i.e. on s'assure que f préserve l'action ou autrement dit, que f est G-equivariant)

I) stabilité :

$\left(\mathcal{F} \underset{p^*}{\overset{p_*}{\rightleftarrows}} \mathcal{E} \text{ s.t. } p^* \text{ préserve les limites finies} \right)$

Soit $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ un $\underbrace{\text{morphisme géom.}}$ de topos (de Grothendieck)

Soit $\underline{\mathrm{Loc}}(\mathcal{E})$, $\underline{\mathrm{Loc}}(\mathcal{F})$ les catég. de locales internes

dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ respectivement.

$\underset{\text{induit}}{\overset{p}{\rightsquigarrow}}$ $\underline{\mathrm{Loc}}(\mathcal{F}) \underset{p_!}{\overset{p^\#}{\rightleftarrows}} \underline{\mathrm{Loc}}(\mathcal{E})$ $p_! \dashv p^\#$ t.q.

1) Pour $Y \in \underline{\mathrm{Loc}}(\mathcal{F})$ $\mathcal{O}(p_!(Y)) \simeq p_*(\mathcal{O}(Y))$

2) Pour $X \in \underline{\mathrm{Loc}}(\mathcal{E})$, on note $\mathrm{Sh}_{\mathcal{E}}(X)$ le topos des $\mathcal{E}$-faisceaux sur X, alors $p^\# X$ est le tiré en arrière du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{sh}_{\mathcal{F}}(p^\# X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{sh}_{\mathcal{E}}(X) \arrow[d] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "p"'] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

couple
enfants
vie sociale
famille

Rem : Souvent $\mathcal{O}(p^{\#}(X)) >> p^{*}\mathcal{O}(X)$ mais tout de même

$\mathcal{O}(p^{*}\mathcal{O}_X)$ a le mérite de définir une présentation de la

locale $p^{\#}(X)$ dans $\mathcal{F}$.

Lemme de stabilité : Soit G un groupe localique, $\mathcal{F}$ un topos.

Alors $\exists$ une équivalence canonique de topos :

$$BG \times \mathcal{F} \simeq B(\mathcal{F}, \gamma^{\#}G).$$

γ étant le morphisme géométrique essentiellement unique $\mathcal{F} \to Set$.

Preuve : on va décrire un site $\mathcal{S}_G$ pour BG :

on considère $\mathcal{S}_G$:= sous catégorie pleine de BG dont :

obj : G-ensembles de la forme G/U (coset à droite)

pour $U \subset G$ sous-groupe ouvert

on sait que G/U est un ensemble puisqu'on a vu dans l'exposé de Swann que chaque groupe objet dans les ensembles va donner lieu à un groupe localique discret.

morph : $G/U \to G/V$: points $K \in G/V$ t.q.

$$U \subseteq m\left(r(p_V^{-1}(K)) \times p_V^{-1}(K)\right)$$

avec $p_V : G \to G/V$ la projection.

et la topologie de $\mathcal{S}_G$ est la topologie atomique

Si $\mathcal{B}$ est un système cofinal de sous-groupes ouverts (i.e.

$\forall U \underset{ouv}{\leq} G, \exists V \underset{ouv}{\leq} G, V \in \mathcal{B}$ t.q. $V \subset U$),

alors la ss-cat. pleine de $\mathcal{S}_G$ dont les objets sont de la forme G/V, $V \in \mathcal{B}$ est évidemment toujours un site pour $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}$.

Mais les ouverts de $\gamma^{\#}(G)$ de la forme $\gamma^{\#}(U)$, $U \underset{ouv}{\leq} G$ forment un système cofinal pour les ss-gpes ouverts de $\gamma^{\#}(G)$.

De plus, $\gamma^{\#}$ préserve les surjections ouvertes

Donc $\gamma^{\#}$ préserve les quotients de la forme G/U :

i.e., $\gamma^*(G/U) = \gamma^{\#}(G/U) \simeq \gamma^{\#}(G)/\gamma^{\#}(U)$ ▨

Rem : Par la m̂ preuve, on peut obtenir plus généralement une équivalence $B(\mathcal{E}, G) \times_{\mathcal{E}} \mathcal{F} \simeq B(\mathcal{F}, p^{\#}G)$ pour tout morph géom. $p : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ et tout groupe localique G dans $\mathcal{E}$ t.q. $G \to 1$ est un morphisme ouvert de locales dans $\mathcal{E}$.

on va utiliser les sites $\mathcal{S}_G$ qu'on vient de définir pour les espaces classifiants afin de voir que le foncteur B commute avec les limites filtrantes de groupes localiques

II) Limites inverses :

Soit $\phi : G \longrightarrow H$ un morph. ouvert surjectif de groupes localiques.

$$\phi \rightsquigarrow \mathcal{S}_G \underset{T_\phi}{\overset{P_\phi}{\rightleftarrows}} \mathcal{S}_H \quad , \quad P_\phi \dashv T_\phi$$

Définis sur les obj : $P_\phi(G/U) := H/\phi(U)$, $T_\phi(H/V) := G/\phi^{-1}(U)$

et sur les morphismes de manière évidente.

<u>Rem</u> : un morph. continu $G \xrightarrow{\phi} H \rightsquigarrow BG \xrightarrow{B\phi} BH$

et $T_\phi = (B\phi)^*|_{\mathcal{S}_H}$ et $P_\phi = (B\phi)_!|_{\mathcal{S}_G}$.

Donc si $\dots G_2 \xrightarrow{\phi_1} G_1 \xrightarrow{\phi_0} G_0$ est une suite inverse de groupes localiques

on obtient un système de sites et de paires de foncteurs adjoints

$$\dots \mathcal{S}_2 \underset{T_0}{\overset{P_0}{\rightleftarrows}} \mathcal{S}_1 \underset{T_1}{\overset{P_1}{\rightleftarrows}} \mathcal{S}_0 \qquad \mathcal{S}_i := \mathcal{S}_{G_i}$$

Soit $\mathcal{S}^\infty$ le site atomique pour $\varprojlim_n B(G_n)$ (construit dans Moerdijk '86)

dont

obj : suites $(S_{n+1} = T_n(S_n)$ pour un certain $n \geqslant n_0$.

$\mathcal{S}^\infty$ est précisément le site obtenu à partir du groupe localique $G^\infty = \varprojlim G_n$ quand on se restreint aux objets G^∞ / U

avec $U = p_n^{-1}(V)$ pour $V \underset{ouv}{\leq} G_n$ et $p_n : G^\infty \to G_n$

la projection.

Les sous-groupes ouverts de cette forme forment un système cofinal $\mathcal{B}$. On obtient donc une équivalence de topos:

$\varprojlim B(G_n) \simeq B(\varprojlim(G_n))$. Et m. plus généralement on a:

<u>Th. de la limite inverse:</u> soit $\{G_i\}_i$ un système filtré indirect de groupes localiques et de morphismes continus ouverts surjectifs. Alors, on a une équivalence de topos

$$\varprojlim B(G_i) = B(\varprojlim G_i)$$

<u>Preuve:</u> - pour les suite inverses ✓ (on vient de le faire plus haut)

- " " systèmes indirects filtrants, c'est une conséquence du lemme suivant

<u>Lemme A:</u> Soit

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathcal{E} \arrow[d, "a"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "f"] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de topos.

t. q. p est une surj. ouverte

Alors b est une équiv. $\Longrightarrow$ a est une équivalence.

<u>Déf</u> : soit $\mathcal{E}$ un topos général et $\mathbb{C}$ un site sur $\mathcal{E}$.

$\mathbb{C}$ est dit **loc. connexe** (ou **moléculaire**) si

$\forall\, c \in Ob(\mathbb{C})$, tout crible U recouvrant de c est une sous-cat pleine **connexe** et **habitée** de $\mathbb{C}/c$

$\forall\, x, y$ objets
$\exists\, x = x_1, \dots, x_r = y$ objets
et morphs $x_i \to x_{i+1}$
ou $x_{i+1} \to x_i$

$U \to$ obj final
est un épi

<u>Déf</u> : Un morphisme géométrique entre topos de Grothendieck

$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{S}$ est dit **borné** si

$\exists\, \underbrace{B}_{\text{appelé borne}} \in \mathcal{E}$, $\forall\, A \in \mathcal{E}$, $\exists$ diag

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\text{épi}"] \arrow[d, "\text{mono}"'] & A \\ B \times f^* I & \end{tikzcd}$$

Th (Morphismes géom. loc. connexes)

Soit $\mathcal{E}$ un topos général, $\mathbb{C}$ un site sur $\mathcal{E}$

($\mathrm{Sh}_{\mathcal{E}}(\mathbb{C})$: cat. des faisceaux sur $\mathbb{C}$ construits dans $\mathcal{E}$, est un topos de Groth.)

Soit $\mathcal{E} \to \mathcal{S}$ (= Ens) un morph géom. Les ASSE :

(1) $\exists$ site $\mathbb{C} \in \mathcal{S}$ loc. connexe t.q. $\mathcal{E} = \mathrm{Sh}_{\mathcal{S}}(\mathbb{C})$

(2) $\exists$ site $\mathbb{C} \in \mathcal{S}$ t.q. $\mathcal{E} = \mathrm{Sh}_{\mathcal{S}}(\mathbb{C})$ et tout préfaisceau constant sur $\mathbb{C}$ est un faisceau

(3) le foncteur $\gamma^* : \mathcal{S} \to \mathcal{E}$ (adj. à gauche du fonct. de sections globales $\gamma_* : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$) a un adjoint à gauche indexé par $\mathcal{S}$.

(4) γ^* commute avec les Π-foncteurs.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}/S \arrow[r, "\gamma^*/S"] \arrow[d, "\Pi_\alpha"'] & \mathcal{E}/\gamma^*(S) \arrow[d, "\Pi_{\gamma^*(\alpha)}"] \\
\mathcal{S}/T \arrow[r] & \mathcal{E}/\gamma^*(T)
\end{tikzcd}$$

Déf : un morphisme géométrique borné est dit loc. connexe s'il vérifie les assertions équivalentes du th précédent.

Déf : un morphisme géom. de topos $f : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ est connexe si f^* est pleinement fidèle.

Lemme A : Soit

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{E} \arrow[d, "a"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "p"] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de topos. $(\dagger)$

t.q. p est une surj. ouverte

Alors b est une équiv. $\Rightarrow$ a est une équivalence.

"preuve du Lemme A" : b est connexe et localement connexe

$\Rightarrow$ a l'est aussi. [Moerdijk '86, Th 5.2) v)]

// (pour un carré cartésien de topos, les surj (ouvertes), les (hyper)connexes, les localement connexes sont stables par pushout)

En particulier, $\exists$ $a_! \dashv a^*$, $b_! \dashv b^*$ t.q.

1) $a_! a^* \cong id$ (car a est connexe et localement connexe)

2) $b_! b^* \cong id$ (car b " " " ")

3) $p^* a_! \cong b_! q^*$ [condition Beck-Chevalley] $(\Leftrightarrow a^* p_* \cong q_* b^*)$.

par ailleurs, $q^* a^* a_! \overset{(\dagger)}{\cong} b^* p^* a_! \overset{(3)}{\cong} b^* b_! q^* \cong q^*$

et q^* fidèle (puisque ouvert + surj) $\Rightarrow$ $a^* a_! \cong id$.

$\blacksquare$

<u>Cor</u>: Soit G un groupe localique prodiscret, soit $Sh(G)$ le topos des faisceaux sur la locale sous-jacente. Alors

$$\begin{tikzcd} Sh(G) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & Ens. \arrow[d, "p_G"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\mu_G}{\Swarrow}"] \\ Ens \arrow[r, "p_G"'] & BG \end{tikzcd}$$

est un pseudo-pullback de topos avec p_G le point canonique du topos BG donné par $p_G^*(X, \cdot) = X$

et μ_G : transf. naturelle générique de composante $X \times G \xrightarrow{(\cdot, \pi_2)} X \times G$ en $X \in BG$.

<u>preuve</u>: Apparemment : connu pour le cas G discret pour le cas G prodiscret, conséquence du th. de la limite inverse ▨

on va mnt voir que le foncteur B induit une équiv. entre deux catégories dont on va fixer la notation d'abord.

Notation:

Pour G, H deux groupes localiques :

- $\underline{\mathrm{Hom}}(G, H)$: une cat.

  obj : $\phi : G \to H$ continuous morph.

  Morph : $\phi \Rightarrow \psi$ sont les points $1 \xrightarrow{h} H$

  t.q. $\psi = h^{-1} \phi h$ (bien déf ?)

- $\underline{\mathrm{Hom}}(BG, BH)$: une cat.

obj : paire (f, α) t.q. $\begin{cases} f : BG \to BH \text{ est un morph géométrique.} \\ \alpha : f p_G \simeq p_H \text{ est un 2-iso} \\ (\text{ou un iso naturel } p_G^* f^* \to p_H^*) \end{cases}$

Morph : $(f, \alpha) \to (f', \alpha')$ est une transf. naturelle

$f^* \to f'^*$

Th A Soient G et H deux groupes localiques,

H prodiscret.

Alors le foncteur B induit une équivalence

$$\underline{\mathrm{Hom}}(G, H) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(BG, BH)$$

<u>Preuve:</u> $B: \underline{\mathrm{Hom}}(G, H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(BG, BH)$.

- H est prodiscret, alors on peut m.q.
  - B est plein et fidèle : facile à voir.
  - B est essentiellement surj :

    soit $(f, \alpha): BG \longrightarrow BH$ une flèche entre topos pointés.

Donc par définition : $f: BG \longrightarrow BH$ est géom.

$\alpha: f p_G \Longrightarrow p_H$ est un 2-iso.

(iso naturel $p_G^* f^* \longrightarrow p_H^*$)

Maintenant on considère le pseudo-pullback

$$
\begin{tikzcd}
Sh(H) \arrow[r, "\gamma_H"] \arrow[d, "\gamma_H"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & Ens \arrow[d, "p_H"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow \mu_H"] \\
Ens \arrow[r, "p_H"'] & BH
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & Sh(G) \arrow[rr, "\gamma_G"] \arrow[d, "\gamma_G"'] & & Sets \arrow[d, "p_G"] \arrow[dll, phantom, "\Downarrow \mu_G"] \\
 & Ens \arrow[rr, "p_G"] \arrow[drr, "p_H"'] & & BG \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "\alpha^{-1}"] \\
 & & & BH \\
Sh(H) \arrow[uur, "\gamma_H"] \arrow[dr, "\gamma_H"'] & & \Downarrow \mu_H & \\
 & Ens \arrow[uurr, "p_H"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$\rightsquigarrow$ 2-auto de $p_H \circ \gamma_G$ donné par : $(\alpha \cdot \gamma_G) \circ (f \cdot \mu_G) \circ (\alpha^{-1} \cdot \gamma_G)$

par la propriété universelle de (1), $\exists !$ flèche

$G \xrightarrow{\phi} H$ de locales t.q.

$$\mu_H \cdot \phi = (\alpha \cdot \gamma_G) \circ (f \cdot \mu_G) \circ (\alpha^{-1} \cdot \gamma_G)$$

$\rightsquigarrow$ $(\alpha \cdot \gamma_G) \circ (\mu_H \cdot \phi) = (\alpha \cdot \gamma_G) \circ (f \cdot \mu_G)$

$\Longleftrightarrow$ $\alpha : f^* \longrightarrow (B\phi)^*$ natural iso.

et l'unicité de ϕ $\Longrightarrow$ ϕ est un homéomorphisme. ∎

III) Topos de Galois

Ce qu'on voudrait maintenant c'est de pouvoir caractériser les topos de la forme $\mathbb{B}G$ avec pour un grp prodiscret G

[référence pour cette théorie SGA 1].

Déf : un topos de Groth. est dit **atomique** le foncteur des sections globales $\Gamma : \mathcal{E} \to Set$ est **logique** (i.e. Γ^* préserve les limites finies et les "objets puissance").

Déf : Un atome d'un topos de Grothendieck $\mathcal{E}$ est dit un **atome normal** / **objet de Galois** si A est un $Aut(A)$-torseur dans $\mathcal{E}$ (i.e., le morphisme canonique

$$(\pi_1, ev) : A \times \gamma^*(Aut(A)) \longrightarrow A \times A$$

est un $\mathcal{E}$-isomorphisme.

Déf : • Un **topos de Galois** est un topos atomique normal, connexe pointé, qui est généré par ses atomes normaux.

• Un objet X d'un topos de Grothendieck est dit **localement trivial** si

$$\exists\ U \twoheadrightarrow 1 \text{ épi},\ \exists\ \begin{tikzcd} U \times \gamma^*(S) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & U \times X \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd} \text{ iso},$$

pour un certain $S \in Ens$

si de plus, $X \twoheadrightarrow 1$ est un épi, alors, X est dit un **recouvrement localement trivial**

Rem : • des limites finies et colimites finies d'objets loc. triviaux sont loc. triviales.

• si $X \xrightarrow{f} Y$ est un morph d'objets loc. triviaux, alors, $im(f) \subset Y$ est un sous-objet complementé.

(i.e. $\exists$ sous-objet $\widetilde{im(f)} \hookrightarrow Y$ t.q. $\widetilde{im(f)} \cap im(f) = 1_{\mathcal{E}}$ (objet initial dans $\mathcal{E}$ qui doit être une cat. cohérente))

$\rightsquigarrow$ si Y est connexe alors f est épi.

Th de descente pour les topos de Grothendieck

Soit $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{D}$ un morph géométrique de topos de Grothendieck.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & \mathcal{D} \arrow[dl] \\ & \mathcal{S} & \end{tikzcd}$$

soit le diag.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \times_{\mathcal{D}} \mathcal{E} \times_{\mathcal{D}} \mathcal{E} \arrow[r, shift left=2, "p_{12}"] \arrow[r, "p_{23}"] \arrow[r, shift right=2, "p_{13}"'] & \mathcal{E} \times_{\mathcal{D}} \mathcal{E} \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "f"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E} \arrow[u, "\delta"] & & \end{tikzcd}$$

Déf : • **Données de descente** sur $X \in Ob(\mathcal{E})$ consiste en

- $\theta : p_1^*(X) \longrightarrow p_2^*(X)$ t.q.

$$\delta^*\theta = id \quad , \quad p_{23}^*(\theta) \circ p_{12}^*(\theta) = p_{13}^*(\theta)$$

• **Des(f) :** une cat.

obj : (X, θ), θ donnée de descente sur $X \in \mathcal{E}$

Morph : $(X, \theta) \longrightarrow (X', \theta')$ est un morph

$$X \xrightarrow{\ h\ } X' \qquad \theta_{h(x)} = h(\theta_x).$$

(i.e. f commute avec les données de descente)

$\rightsquigarrow$ $\forall\, D \in \mathcal{D}$, $f^*(D)$ peut être équipé (de manière canonique d'une donnée de descente)

$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r] \arrow[dr, "f^*"'] & \mathrm{Des}(f) \arrow[d, "U\ (\text{oubli})"] \arrow[dl, phantom, "\circ" near start] \\
& \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

f est dit de descente effective si $\mathcal{D} \sim \mathrm{Des}(f)$
equiv. of cats.

Th. de descente : [Formulation de Joyal – Tierney]

Toute surj. ouverte est un morphisme de descente effective.

Preuve : [preuve de Moerdijk 1985] $\boxtimes$

Th B : Soit $\mathcal{E}$ un topos de Groth, ASSE

(1) $\mathcal{E}$ est un topos de Galois.

(2) $\mathcal{E} \overset{\text{équiv}}{\sim} BG$ pour un certain grp localique prodiscret G

(3) $\mathcal{E}$ est pointé, connexe et localement connexe engendré par ses recouvrements triviaux.

(4) $\mathcal{E}$ est pointé, connexe, localement connexe, et tout objet de $\mathcal{E}$ est une somme de recouvrements loc. triviaux.

<u>Preuve</u>: (1) $\Rightarrow$ (4) ok : tout objet de Galois A est un recouvrement loc. trivial.

(4) $\Rightarrow$ (3) évident

(3) $\Rightarrow$ (1) : c'est un raisonnement standard de la théorie de Galois : si X est un recouv. loc. trivial connexe de $\mathcal{E}$ via : $\alpha : U \times \gamma^{\#}(S) \xrightarrow{\sim} U \times X$ au dessus de U, alors

$$B = \mathrm{Iso}(\gamma^{\#}(S), X) \xhookrightarrow{\text{subobj}} X^{\gamma^{\#}(S)} \text{ dans } \mathcal{E}$$

En particulier, $\alpha \rightsquigarrow U \xrightarrow{\hat{\alpha}} B$, donc $B \twoheadrightarrow 1$

$\exists$ une flèche évidente : $\mathrm{Aut}(S) \longrightarrow \mathrm{Aut}(B)$

$\rightsquigarrow$ B est un $\mathrm{Aut}(S)$-torseur par la flèche canonique

$$B \times \gamma^{*}\mathrm{Aut}(S) \simeq B \times \mathrm{Aut}(S) \xrightarrow{\sim} B \times B.$$

$\rightsquigarrow$ $\gamma^{*}\mathrm{Aut}(B) \circlearrowright B$ transitivement.

Soit $A \subset B$ une composante (dans le sens complémenté ?)

B est loc. triv. $\Longrightarrow$ A l'est

$$\mathrm{Aut}(A) = \{ \alpha|_A \, : \, \alpha \in \mathrm{Aut}(B), \ \alpha(A) \subset A \}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Aut}(A) \circlearrowright A$ transitivement

$$\rightsquigarrow \quad A \times \gamma^* \mathrm{Aut}(A) \twoheadrightarrow A \times A \qquad \text{épi}$$
$$(a, s) \mapsto (a, s(a))$$

On peut m.q. c'est aussi un mono, donc un $\mathcal{E}$-iso.

$\rightsquigarrow$ B est une somme d'objets de Galois.

et B recouvre X par évaluation en n'importe quel $s_0 \in S$: $B \twoheadrightarrow X$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{E}$ est un topos de Galois.

$(2) \Rightarrow (1)$: si G est un grp prodiscret alors $\forall \underset{\text{ouvert}}{U \triangleleft G}$, G/U est un objet de Galois de BG. Par la preuve du lemme de stabilité, la sous-cat. pleine de BG

dont les objets st de la forme G/U

est un site pour BG pour la top. atomique

$(1) \Rightarrow (2)$: Soit $\mathbf{Ens} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ un point.

Soit $\mathbb{A} \subset \mathcal{E}$ le site atomique des objets de Galois de $\mathcal{E}$.

$$p : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr] \arrow[dr, "p^*"'] & & B(\mathrm{Aut}(p)) \overset{?}{=} \mathrm{Des}(p) \arrow[dl] \\ & \mathbf{Ens} & \end{tikzcd}$$

avec $\mathrm{Aut}(p)$ = le grp localique d'automorphismes de p (une sous locale de $\prod_{A \in \mathbb{A}} \mathrm{Aut}\, p^*(A)$).

Par le th. de descente [Moerdijk 85] :

$$\mathcal{E} \simeq B(\mathrm{Aut}(p))$$

Il reste à vérifier que $\mathrm{Aut}(p)$ est prodiscret

(on note au passage que $\mathrm{Aut}(p^*(A))$ n'est pas discret si $p^*(A)$ est infini).

Soit $\mathbb{D}$ le diagramme du foncteur $p^* : \mathbb{A} \to \mathrm{Ens}$

$\mathbb{D}$ = cat :

obj : (x, A), $x \in p^*(A)$,

Morph : $(x, A) \to (y, B)$ est un $\mathcal{E}$-morphisme

$A \to B$ t.q. $p^*(f)(x) = y$.

Alors : $\mathrm{Aut}(p) \simeq \varprojlim_{(x,A)} \mathrm{Aut}(A)$ comme groupe

localique (les $\mathrm{Aut}(A)$ sont discrets)

IV Remarques sur le groupe fondamental

Soient :

- $\mathcal{E}$ un topos pointé connexe localement connexe.
- $\mathrm{Cov}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$ soit la sous-cat pleine de $\mathcal{E}$ engendrée (comme topos) par les recouvrement loc. triviaux de $\mathcal{E}$.

Th. de Giraud : une cat. C est un topos de Grothendieck ssi

1) C est loc. présentable
2) elle admet les colimites universelles
3) " " " coproduits disjoints
4) " " les quotients effectifs.

$\overset{\text{Giraud}}{\rightsquigarrow}$ $\mathrm{Cov}(\mathcal{E})$ est un topos de Grothendieck pointé.

$\underset{\text{Th.B}}{\rightsquigarrow}$ $\mathrm{Cov}(\mathcal{E}) \simeq B(G)$ pour $G = \pi_1(\mathcal{E})$

groupe localique prodiscret (unique à iso près)

($\pi_1(\mathcal{E})$ est le grp fondamental de $\mathcal{E}$ défini

comme progroupe [Artin_Mazur '69] modulo

l'équivalence : $L : \{\text{progroupes surjectifs}\} \xleftrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{c}\text{groupes} \\ \text{localiques} \\ \text{prodiscrets}\end{array}\right\}$

la flèche

$\mathrm{cov}(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{E}$
$(\pi_1(\mathcal{E})\text{-torsor})$

topos pointé, G prodiscret

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr] \arrow[dr, "\text{univ.}"', "\xi"] & & BG \\ & B(\pi_1\mathcal{E}) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ G induit une équivalence :

(1) $\quad \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, BG) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(B(\pi_1\mathcal{E}), BG)$

(2) $\quad \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\pi_1(\mathcal{E}), G)$

(1) : universalité de ξ

(2) : Th A.

<u>En particulier :</u> si G discret, on récupère l'espace classifiant topologique BG, qui classifie les G-torseurs.

$\rightsquigarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, BG) \approx \{G\text{-torsors sur } \mathcal{E}\}$

$\approx \left\{ \begin{array}{l} G\text{-fibrés principaux} \\ \text{sur } \mathcal{E} \end{array} \right\}$

$\rightsquigarrow$ à iso près, (1) + (2) donnent l'identification classique :

$$\pi^1(\mathcal{E}, G) = [\pi_1(\mathcal{E}), G]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G\text{-torseurs} \\ \text{sur } \mathcal{E} \end{array} \right\} \Big/ \mathrm{iso} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1(\mathcal{E}), G) \Big/ \mathrm{int}(G)$$

[Réf Artin – Mazur – '69, §10]