

1 準備

1.1 複素平面の位相

定義. $\alpha \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して、開球と閉球をそれぞれ

$$U(\alpha; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\}, \quad D(\alpha; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| \leq r\}$$

と定義する。 \mathbb{C} は $U(\alpha; r)$ という形の部分集合全体が開基となるような位相が入るものとし、 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をアレキサンドロフの一点コンパクト化とする。すなわち、 $\hat{\mathbb{C}}$ の開集合は \mathbb{C} の開集合であるか、または補集合が \mathbb{C} の有界閉集合であるような部分集合である。

注 1.1. $\hat{\mathbb{C}}$ は二次元球面 S^2 と同相である。

定義. 位相空間 X の部分集合 A がコンパクトであるとは、 A の任意の開被覆に有限部分被覆が存在することである。

言い換えると、任意の X の開集合からなる族 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ について、 $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ ならば、 $i_1, \dots, i_n \in I$ で $A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ となるものが存在することである。

定理 1.1. (Heine-Borel の被覆定理)

\mathbb{C} の部分集合 A がコンパクトであることと有界閉集合であることは同値。

[証明]. 略。 □

定義. 位相空間 X が連結であるとは、開かつ閉集合が X と \emptyset のみであることをいう。 X の部分集合 A が連結であるとは、相対位相を入れたとき連結であることをいう。

定義. 位相空間 X の部分集合 A が弧状連結であるとは、任意の $x, y \in A$ に対して連続写像 $f : [0, 1] \rightarrow A$ で $f(0) = x, f(1) = y$ となるものが存在することをいう。

命題 1.2. 弧状連結ならば連結である。

[証明]. $[0, 1]$ は連結であることと、連続写像による連結な集合の像は再び連結であることを用いる。 □

命題 1.3. \mathbb{C} の部分集合 A が連結ならば弧状連結である。

[証明]. $x \sim y$ を「連続写像 $f : [0, 1] \rightarrow A$ で $f(0) = x, f(1) = y$ となるものが存在する」と定義する。この二項関係は同値関係になることが言える。

$A \neq \emptyset$ としてよい。連結であることを仮定して、適当な $x \in X$ を取り、 $A_0 = \{y \in A : x \neq y\}, A_1 = A - A_0$ とおく。 A_0 も A_1 も開集合であることを示そう。

$y \in A_0$ とすると $r > 0$ で $U(y; r) \subseteq A$ となるものがある。 $z \in U(y; r)$ は y と線分で結ぶことで $y \sim z$ が言える。よって $x \sim y$ とあわせて $x \sim z$ となつて、 $z \in A_0$ 。したがって、 $U(y; r) \subseteq A_0$ で、つまり A_0 は開集

合。

$y \in A_1$ とすると $r > 0$ で $U(y; r) \subseteq A$ となるものがある。 $z \in U(y; r)$ は y と線分で結ぶことで $y \sim z$ が言える。よって $x \sim z$ と改定すると $x \simeq y$ となって矛盾。したがって、 $U(y; r) \subseteq A_1$ で、つまり A_1 は開集合。 $x \in A_0$ だから、 $A_0 \neq \emptyset$ 。 A は連結であるから、 $A_0 = A$ 。□

定義. 領域とは、 \mathbb{C} の連結な開部分集合のことである。

例 1.1. 開球は領域である。

命題 1.4. \mathbb{C} の領域 A の任意の 2 点は A 内の折れ線で結ぶことができる。

[証明]. まず、 a, b を結ぶ曲線 $f: [0, 1] \rightarrow A$ が存在する。 $\gamma = f([0, 1])$ は連続写像による像だからコンパクト。よって、 γ の開被覆 $\{U(\alpha; r) \subseteq A : \alpha \in \gamma, r > 0\}$ は有限個の部分被覆 $\{U(\alpha_1; r_1), \dots, U(\alpha_n; r_n)\}$ を持つ。開球の中では任意の 2 点を線分で結べることから、 f が一様連続であることとか、各開集合の逆像たちのなす $[0, 1]$ のルベグ数とかをいろいろ考えれば折れ線で結べることが言えるよ (後は自分でやってね)。□

1.2 一様収束

1.2 節では領域 Ω を固定する。

定義.

関数列 $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ に各点収束するとは、任意の $z \in \Omega$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ となること。

関数列 $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 一様収束するとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある N があって、任意の $n > N$, $z \in \Omega$ に対し $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ となること。

一様収束するなら各点収束するのは定義より明らかである。

定理 1.5.

各 f_n が連続で、 f に一様収束するならば f は連続である。

[証明]. $z \in \Omega$ とする。 $\epsilon > 0$ とする。一様収束性より、ある n で、全ての $w \in \Omega$ に対して $|f_n(w) - f(w)| < \epsilon$ となるものがある。

f_n は連続だから、 $\delta > 0$ で、 $|w - z| < \delta \Rightarrow |f_n(w) - f_n(z)| < \epsilon$ となるものがある。

$|w - z| < \delta$ のとき、

$|f(w) - f(z)| \leq |f(w) - f_n(w)| + |f_n(w) - f_n(z)| + |f_n(z) - f(z)| < 3\epsilon$ だから、連続である。□

定理 1.6.

各 f_n が連続であるとする。 $\{f_n\}$ がある関数に一様収束すること、コーシーの条件: 任意の $\epsilon > 0$ に対して、 N が存在して、任意の $z \in \Omega$, $n, m > N$ に対し $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$ が成立することは同値。

[証明]. f に一様収束するとすれば、 $\epsilon > 0$ に対し、 N で $z \in \Omega$, $n > N$ のとき $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon$ となる。 $n, m > N$ なら $|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_m(z)| < 2\epsilon$ だから、コーシーの条件は満たされている。

逆に、コーシーの条件を満たすとすると、 $z \in \Omega$ を固定したとき、数列 $\{f_n(z)\}_n$ はコーシー列である。したがってある値に収束するので、それを $f(z)$ とおこう。 $\varepsilon > 0$ とする。

$\varepsilon > 0$ としよう。ある N があって、 $z \in \Omega, n, m > N$ のとき $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$ となる。

$m > N$ とする。 $f(z)$ の定義より、ある M があって、 $n > M$ なら $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ となる。 $n > N, M$ を適当にとると、 $|f(z) - f_m(z)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_m(z)| < 2\varepsilon$ 。

つまり、任意の $\varepsilon > 0$ に対して N が存在して、 $z \in \Omega, m > N$ のとき $|f(z) - f_m(z)| < 2\varepsilon$ となる。これは一様収束することを示している。□

定義. 関数列 $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ に広義一様収束するとは、任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ 上で $f_n|_K$ が $f|_K$ に一様収束することをいう。

Ω の関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を、各自然数 n に対して、領域 Ω_n とその上の関数 $f_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{C}$ で、以下の条件を満たすものとする：

- $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$
- 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ に対して n_0 があって、 $n > n_0 \implies K \subseteq \Omega_n$

このときも広義一様収束の定義を当てはめることができる。以下に述べる定理の仮定をこれに直しても、似た証明ができることに注意する。

定理 1.7.

連続な関数列 f_n が f に、連続な関数列 g_n が g にそれぞれ広義一様収束するとして、 h を Ω 上の連続な関数とする。このとき、 $f_n \pm g_n$ は $f \pm g$ に、 $f_n g_n$ は $f g$ に、 $h f_n$ は $h f$ に広義一様収束する。

[証明]. 最後だけ証明する。 $K \subseteq \Omega$ をコンパクト集合とする。 $\varepsilon > 0$ として、 $|h(z)|$ の K での最大値を M としよう。 $M = 0$ のときは証明することはない。

$M > 0$ のとき、仮定より N があって、 $z \in \Omega, n > N$ なら $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/M$ となる。このとき、 $|h(z)f_n(z) - h(z)f(z)| < M\varepsilon/M = \varepsilon$ なので、 K 上で一様収束する。□

定義.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が $f(z)$ に一様収束するとは、部分和 $s_N(z) = \sum_{n=1}^N f_n(z)$ が $f(z)$ に一様収束することをいう。

2 参考文献

[1] L. V. Ahlfors: 複素解析 2008 年