1 準備

1.1 複素平面の位相

定義. $\alpha \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して、開球と閉球をそれぞれ

$$U(\alpha; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-\alpha| < r\}, \quad D(\alpha; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-\alpha| \leq r\}$$

と定義する。$\mathbb{C}$ は $U(\alpha; r)$ という形の部分集合全体が開基となるような位相が入るものとし、$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をアレキサンドロフの一点コンパクト化とする。すなわち、$\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合は $\mathbb{C}$ の開集合であるか、または補集合が $\mathbb{C}$ の有界閉集合であるような部分集合である。

注 1.1. $\widehat{C}$ は二次元球面 S^2 と同相である。

定義. 位相空間 X の部分集合 A がコンパクトであるとは、A の任意の開被覆に有限部分被覆が存在することである。
言い換えると、任意の X の開集合からなる族 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ について、$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ ならば、$i_1, \cdots, i_n \in I$ で $A \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ となるものが存在することである。

定理 1.1. (Heine-Borel の被覆定理)
$\mathbb{C}$ の部分集合 A がコンパクトであることと有界閉集合であることは同値。

[証明]. 略。 □

定義. 位相空間 X が連結であるとは、開かつ閉集合が X と $\emptyset$ のみであることをいう。X の部分集合 A が連結であるとは、相対位相を入れたとき連結であることをいう。

定義. 位相空間 X の部分集合 A が弧状連結であるとは、任意の $x, y \in A$ に対して連続写像 $f : [0,1] \to A$ で $f(0) = x, f(1) = y$ となるものが存在することをいう。

命題 1.2. 弧状連結ならば連結である。

[証明]. $[0,1]$ は連結であることと、連続写像による連結な集合の像は再び連結であること用いる。 □

命題 1.3. $\mathbb{C}$ の部分集合 A が連結ならば弧状連結である。

[証明]. $x \sim y$ を「連続写像 $f : [0,1] \to A$ で $f(0) = x, f(1) = y$ となるものが存在する」と定義する。この二項関係は同値関係になることが言える。
$A \neq \emptyset$ としてよい。連結であることを仮定して、適当な $x \in X$ を取り、$A_0 = \{y \in A : x \neq y\}, A_1 = A - A_0$ とおく。A_0 も A_1 も開集合であることを示そう。
$y \in A_0$ とすると $r > 0$ で $U(y; r) \subseteq A$ となるものがある。$z \in U(y; r)$ は y と線分で結ぶことで $y \sim z$ が言える。よって $x \sim y$ とあわせて $x \simeq z$ となって、$z \in A_0$. したがって、$U(y; r) \subseteq A_0$ で、つまり A_0 は開集

合。
$y \in A_1$ とすると $r > 0$ で $U(y;r) \subseteq A$ となるものがある。$z \in U(y;r)$ は y と線分で結ぶことで $y \sim z$ が言える。よって $x \sim z$ と改定すると $x \simeq y$ となって矛盾。したがって、$U(y;r) \subseteq A_1$ で、つまり A_1 は開集合。
$x \in A_0$ だから、$A_0 \neq \emptyset$. A は連結であるから、$A_0 = A$. □

定義. 領域とは、$\mathbb{C}$ の連結な開部分集合のことである。

例 1.1. 開球は領域である。

命題 1.4. $\mathbb{C}$ の領域 A の任意の 2 点は A 内の折れ線で結ぶことができる。

[証明]. まず、a, b を結ぶ曲線 $f : [0,1] \to A$ が存在する。$\gamma = f([0,1])$ は連続写像による像だからコンパクト。よって、γ の開被覆 $\{U(\alpha; r) \subseteq A : \alpha \in \gamma, r > 0\}$ は有限個の部分被覆 $\{U(\alpha_1; r_1), \cdots U(\alpha_n; r_n)\}$ を持つ。開球の中では任意の 2 点を線分で結べることから、f が一様連続であることとか、各開集合の逆像たちのなす $[0,1]$ のルベーグ数とかをいろいろ考えれば折れ線で結べることが言えるよ (後は自分でやってね)。 □

1.2 一様収束

1.2 節では領域 Ω を固定する。

定義.
関数列 $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ が関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ に各点収束するとは、任意の $z \in \Omega$ に対して、$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ となること。
関数列 $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ が関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 一様収束するとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある N があって、任意の $n > N,\ z \in \Omega$ に対し $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ となること。

一様収束するなら各点収束するのは定義より明らかである。

定理 1.5.
各 f_n が連続で、f に一様収束するならば f は連続である。

[証明]. $z \in \Omega$ とする。$\varepsilon > 0$ とする。一様収束性より、ある n で、全ての $w \in \Omega$ に対して $|f_n(w) - f(w)| < \varepsilon$ となるものがある。
f_n は連続だから、$\delta > 0$ で、$|w - z| < \delta \Rightarrow |f_n(w) - f_n(z)| < \varepsilon$ となるものがある。
$|w - z| < \delta$ のとき、
$|f(w) - f(z)| \leq |f(w) - f_n(w)| + |f_n(w) - f_n(z)| - |f_n(z) - f(z)| < 3\varepsilon$ だから、連続である。 □

定理 1.6.
各 f_n が連続であるとする。$\{f_n\}$ がある関数に一様収束すること、コーシーの条件: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、N が存在して、任意の $z \in \Omega, n, m > N$ に対し $|f_n(z) - f_m(z)|$ が成立することは同値。

[証明]. f に一様収束するとすれば、$\varepsilon > 0$ に対し、N で $z \in \Omega, n > N$ のとき $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ となる。
$n, m > N$ なら $|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_m(z)| < 2\varepsilon$ だから、コーシーの条件は満たされている。

逆に、コーシーの条件を満たすとすると、$z \in \Omega$ を固定したとき、数列 $\{f_n(z)\}_n$ はコーシー列である。したがってある値に収束するので、それを $f(z)$ とおこう。$\varepsilon > 0$ とする。
$\varepsilon > 0$ としよう。ある N があって、$z \in \Omega, n, m > N$ のとき $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$ となる。
$m > N$ とする。$f(z)$ の定義より、ある M があって、$n > M$ なら $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ となる。$n > N, M$ を適当に取ると、$|f(z) - f_m(z)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_m(z)| < 2\varepsilon$.
つまり、任意の $\varepsilon > 0$ に対して N が存在して、 $z \in \Omega, m > N$ のとき $|f(z) - f_m(z)| < 2\varepsilon$ となる。これは一様収束することを示している。 $\square$

定義. 関数列 $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ が $f : \Omega \to \mathbb{C}$ に広義一様収束するとは、任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ 上で $f_n|K$ が $f|K$ に一様収束することをいう。

Ω の関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を、各自然数 n に対して、領域 Ω_n とその上の関数 $f_n : \Omega_n \to \mathbb{C}$ で、以下の条件を満たすものとする:

- $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$
- 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ に対して n_0 があって、$n > n_0 \implies K \subseteq \Omega_n$

このときも広義一様収束の定義を当てはめることができる。以下に述べる定理の仮定をこれに直しても、似た証明ができることに注意する。

定理 1.7.
連続な関数列 f_n が f に、連続な関数列 g_n が g にそれぞれ広義一様収束するとして、h を Ω 上の連続な関数とする。このとき、$f_n \pm g_n$ は $f \pm g$ に、$f_n g_n$ は fg に、hf_n は hf に広義一様収束する。

[証明]. 最後だけ証明する。$K \subseteq \Omega$ をコンパクト集合とする。$\epsilon > 0$ として、$|h(z)|$ の K での最大値を M としよう。$M = 0$ のときは証明することはない。
$M > 0$ のとき、仮定より N があって、$z \in \Omega, n > N$ なら $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/M$ となる。このとき、$|h(z)f_n(z) - h(z)f(z)| < M\varepsilon/M = \varepsilon$ なので、K 上で一様収束する。 $\square$

定義.
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が $f(z)$ に一様収束するとは、部分和 $s_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$ が $f(z)$ に一様収束することをいう。

2 参考文献

[1] L. V. Ahlfors: 複素解析 2008 年