Доказательство по индукции наглядно может быть представлено в виде так называемого принципа домино. Пусть какое угодно число косточек домино выставлено в ряд таким образом, что каждая косточка, падая, обязательно опрокидывает следующую за ней косточку (в этом заключается шаг индукции). Тогда, если мы толкнём первую косточку (это база индукции), то все косточки в ряду упадут.

Другое образное представление можно описать следующим образом. Пусть мы умеем подходить к основанию лестницы (база индукции), а также умеем подниматься на одну ступеньку (шаг индукции). Тогда мы можем подняться на любую ступеньку лестницы.

Математическая индукция — метод математического доказательства, который используется, чтобы доказать истинность некоторого утверждения, зависящего от натурального параметра (номера). Для этого сначала проверяется истинность утверждения с каким-то начальным номером (чаще всего с номером 1) — *база* (*базис*) *индукции*, а затем доказывается, что если верны утверждения с номерами от начального номера до номера n, то верно и очередное утверждение с номером $n+1$ — *шаг индукции*, или *переход индукции*.

Ниже принцип математической индукции будет сформулирован более формально, точно и строго. При первом прочтении эту формулировку можно пропустить и перейти сразу к примерам.

Предположим, что требуется установить справедливость конечной или бесконечной последовательности утверждений, занумерованных натуральными числами: $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots$ (для определенности считаем, что база индукции соответствует случаю $n = 1$).

Для этого достаточно сначала установить истинность утверждения P_1 (проверить базу индукции), а затем доказать, что для любого номера n если справедливы утверждения $P_1, P_2, \ldots, P_n$, то будет верным и утверждение P_{n+1} (переход индукции). Тогда все утверждения нашей последовательности верны.

Описанный выше шаг индукции часто называют «переходом от n к $n+1$». При этом стоит обратить внимание на то, что при «переходе от n к $n+1$» для доказательства очередного утверждения P_{n+1} можно опираться не только на утверждение P_n, но и на все утверждения с меньшими номерами.

Заметим также, что переход индукции («очередной шаг»), можно с таким же успехом описать и «переходом от $m-1$ к m».

1 Примеры решения задач методом математической индукции (по индукции).

Естественными примерами, когда формально работает метод математической индукции, являются простейшие рассуждения, которые мы завершаем фразой «ну, и так далее». Вспомним, например, как определялась в школе арифметическая прогрессия и как выводилась формула для n-го члена арифметической прогрессии.

Арифметическая прогрессия — это последовательность чисел (членов прогрессии)

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m,$$

в которой каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего добавлением к нему постоянного числа d, называемого *шагом* или *разностью* арифметической прогрессии.

Чтобы найти формулу для n-го члена арифметической прогрессии, можно выписать последовательность равенств

$$\begin{gathered}
a_2 = a_1 + d;\\
a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;\\
a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d;\\
\dots\\
a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d.
\end{gathered}$$

Посмотрим, что же скрывается за многоточием. Сначала мы выписываем формулу для нескольких первых членов, их истинность проверяется непосредственно. А дальше мы считаем, что предполагаемая формула уже работает для всех предыдущих членов последовательности, то есть для всех тех, у которых номер меньше n, и опираясь на это, получаем формулу для n-го члена арифметической прогрессии. Мы как бы подразумеваем, что далее делаем необходимое количество однотипных шагов (то самое «и так далее»), которые приводят нас к ответу для n.

Теперь докажем формулу n-го члена арифметической прогрессии, аккуратно применяя принцип математической индукции. При этом обратим внимание на то, что сначала нужно четко сформулировать доказываемое утверждение.

Пример 1. Для любой конечной или бесконечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$ с разностью d величина n-го члена прогрессии, $n = 2, 3, \dots$, определяется формулой:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

База индукции ($n = 2$). Истинность равенства $a_2 = a_1 + d$ следует непосредственно из определения арифметической прогрессии.

Шаг индукции ($n - 1 \mapsto n$). Пусть для любого значения k, удовлетворяющего условию $2 \le k \le n - 1$, доказываемая формула верна, т. е. $a_k = a_1 + (k-1)d$. Докажем эту формулу в случае, когда $k = n$.

Действительно, с одной стороны, в силу определения арифметической прогрессии справедливо равенство $a_n = a_{n-1} + d$. С другой стороны, по предположению индукции при $k = n - 1$ истинна формула $a_{n-1} = a_1 + (n-2)d$. Объединяя эти данные, получаем

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d.$$

Таким образом, устанавливаемая формула верна и для $k = n$.

Еще одну простую задачу о нахождении суммы арифметической прогрессии можно решить без привлечения метода математической индукции, однако мы установим справедливость соответствующей формулы по индукции.

Пример 2. Доказать, что при любом натуральном n справедливо равенство

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

База индукции ($n = 1$). При $n = 1$ и левая, и правая части доказываемого равенства обращаются в единицу.

Шаг индукции ($n \mapsto n+1$). Пусть для любого значения k, удовлетворяющего условию $1 \le k \le n$, справедливо равенство $1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$. Докажем, что при $k=n+1$ утверждение также верно, т. е. $1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. С учетом предположения индукции это устанавливается совсем просто:

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Для следующей задачи решение с помощью привлечения метода математической индукции является наиболее естественным.

Пример 3. Докажите, что число $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех целых неотрицательных n.

База индукции. Проверим утверждение для $n = 0$:

$$5^0 - 4 \cdot 0 + 15 = 16.$$

Шаг индукции[1] ($n-1 \mapsto n$). Предположим, что для всех целых неотрицательных k, не превосходящих $n-1$, число $5^k - 4k + 15$ делится на 16. В частности, число $5^{n-1} - 4(n-1) + 15$ делится на 16. Покажем, что тогда число $5^n - 4n + 15$ тоже делится на 16. Преобразуем исходное выражение так, чтобы выделить в нём фрагмент для $k = n-1$, добавляя и вычитая соответствующие слагаемые:

$$\begin{aligned} 5^n - 4n + 15 = 5 \cdot 5^{n-1} - 20n + 20 + 75 + 20n - 20 - 75 - 4n + 15 = \\ = 5 \cdot (5^{n-1} - 4(n-1) + 15) + 16(n-5) \end{aligned}$$

Применяя предположение индукции при $k = n-1$, получаем, что первое слагаемое делится на 16. Поскольку второе слагаемое также делится на 16, то и сумма делится на 16. Следовательно, число $5^n - 4n + 15$ делится на 16.

Рассмотрим задачу потруднее.

Пример 4. Доказать, что для любого натурального n число $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ является квадратом некоторого целого числа.

Доказать требуемый факт «в лоб», в том числе и по индукции, — задача, к которой без соответствующей подготовки даже непонятно как подступиться. Для того чтобы решить задачу, формально усложним себе жизнь, усилив[2] доказываемое утверждение до следующего: доказать для любого натурального n равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2.$$

В такой постановке утверждение уже несложно доказывается по индукции (здесь, правда, за кадром остается вопрос о том, как догадаться до доказываемого равенства).

[1] В данной задаче переход к следующему шагу делается в виде «от $n-1$ к n.»

[2] В новой (второй) формулировке задача решается существенно проще, однако вторая версия формально является более трудной, так как решение задачи во второй формулировке автоматически является и решением задачи в первой формулировке, а вот в обратную сторону такой вывод, вообще говоря, сделать нельзя.

Прежде чем непосредственно переходить к доказательству, перепишем с учетом задачи 2 доказываемое неравенство следующим образом:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

База индукции. При $n = 1$ получаем истинное равенство $1^3 = 1^2$.

Шаг индукции $(n \mapsto n+1)$. Пусть для любого значения k, удовлетворяющего условию $1 \leq k \leq n$, справедливо равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

В частности, предполагаем, что справедливо равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Проверим справедливость утверждения для $k = n+1$:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = &\text{ (по предположению индукции)} \\ = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = \\ = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, утверждение выполняется для $k = n+1$. А значит, утверждение выполняется для всех натуральных n.

Задача 4 показывает, что иногда бывает так: важно суметь догадаться до ответа, а уж доказательство того, что это действительно правильный ответ, — чисто техническая и не очень трудная работа. В дальнейшем мы еще столкнемся с такими примерами, в частности, при изучении рекуррентных последовательностей.

Пример 5. При каких натуральных n выполняется неравенство

$$2^n > n^2?$$

Для начала попробуем подставить несколько натуральных чисел:
При $n = 1$ неравенство выполняется: $2^1 > 1^2$.
При $n = 2$ неравенство не выполняется: $2^2 = 2^2$.
При $n = 3$ неравенство не выполняется: $2^3 < 3^2$.
При $n = 4$ неравенство не выполняется: $2^4 = 4^2$.
При $n = 5$ неравенство выполняется: $2^5 > 5^2$.
При $n = 6$ неравенство выполняется: $2^6 > 6^2$.
При $n = 10$ неравенство выполняется: $2^{10} > 10^2$.
При $n = 20$ неравенство выполняется: $2^{20} = (2^{10})^2 > 1000^2 > 20^2$.

Сделаем предположение, что неравенство выполняется при всех $n > 4$ и докажем его.

База индукции. При $n = 5$ неравенство выполняется: $2^5 = 32 > 5^2 = 25$.

Шаг индукции. ($n \mapsto n+1$). Пусть для любого значения k, удовлетворяющего условию $4 < k \le n$, справедливо неравенство $2^k > k^2$. В частности, $2^n > n^2$.

Проверим выполнение неравенства для $k = n+1$.. Используя соотношения $2^{n+1} = 2^n + 2^n$, $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, получаем, что нам надо сравнить $2^n + 2^n$ и $n^2 + 2n + 1$. По предположению индукции $2^n > n^2$, поэтому для доказательства требуемого неравенства достаточно доказать, что $2^n > 2n + 1$. Поскольку по предположению индукции $2^n > n^2$, а $n^2 - 2n - 1 > 0$ при $n > (1 + \sqrt{2})$, то при $n > 4$ выполняется цепочка соотношений:

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Таким образом, неравенство $2^n > n^2$ выполняется для всех $n > 4$.

В задаче 4 вместо исходного утверждения мы доказывали формально более сильное. Еще более выпукло возможности доказательства по индукции более сильного утверждения иллюстрирует следующая задача.

Пример 6. Доказать, что для любого натурального n выполняется неравенство

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Попытка провести доказательство этого неравенства по индукции обречена на провал: при переходе индукции — скажем, от n к $n+1$ — мы опираемся на предположение индукции, заключающееся только в том, что сумма n соответствующих слагаемых меньше 2. Не имея дополнительной информации о том, на сколько эта сумма меньше 2, невозможно гарантировать, что при добавлении еще одного положительного слагаемого сумма по-прежнему останется меньше 2. Вот если бы на предыдущем шаге мы имели информацию о величине «зазора» между двойкой и суммой, то в этом случае у нас хотя бы появился бы шанс.

Попробуем воспользоваться этим шансом, т. е. попытаемся доказать по индукции неравенство

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \le 2 - f(n)$$

для некоторой функции $f(n)$, принимающей положительные значения для всех натуральных n — условие положительности нужно для того, чтобы из последнего неравенства вытекало исходное.

Выполнение базы индукции определяется истинностью соотношения $f(1) \le 1$.

Теперь посмотрим, какие нужно наложить условия на функцию $f(n)$, чтобы шаг индукции имел законную силу. Итак, предполагаем, что справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \le 2 - f(n).$$

Оценим соответствующую сумму, переходя от n к $n+1$:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + f(n+1) =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + f(n)\right) + \frac{1}{(n+1)^2} + f(n+1) - f(n) \le$$
$$\le 2 + \frac{1}{(n+1)^2} + f(n+1) - f(n).$$

Эта цепочка соотношений при выполнении условия

$$\frac{1}{(n+1)^2} + f(n+1) - f(n) \leq 0$$

гарантирует законность шага индукции.

Таким образом, если функция $f(n)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(n) > 0$ для любого натурального n;

2) $f(1) \leq 1$;

3) $\frac{1}{(n+1)^2} + f(n+1) - f(n) \leq 0$ для любого натурального n,

то доказательство по индукции усиленного неравенства вполне легитимно. Осталось выяснить, существует ли функция $f(n)$ с такими свойствами.

Оказывается, да, существует: например, $f(n) = 1/n$. Действительно,

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

Следовательно, мы доказали по индукции справедливость для всех натуральных n неравенства

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \leq 2,$$

а, значит, и истинность исходного неравенства

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Задача 6 показывает, что доказательство по индукции более сильного утверждения имеет не только минусы, но и большой плюс — предположение индукции, являющееся основой для перехода индукции, — тоже более сильное утверждение.

Отметим, что пока во всех рассмотренных примерах доказательства по индукции предположение индукции использовалось только для «предшествующего» значения параметра. В следующей задаче предположение индукции уже используется дважды для двух разных значений параметра, по которому ведется индукция.

Пример 7. Доказать следующее утверждение: если число $x + \frac{1}{x}$ является целым, то для любого натурального n число $x^n + \frac{1}{x^n}$ — тоже целое.

База индукции ($n = 1$) следует непосредственно из условия.

Шаг индукции ($n - 1 \mapsto n$). Пусть для любого значения k, удовлетворяющего условию $1 \leq k \leq n - 1$, число $x^k + \frac{1}{x^k}$ является целым. Покажем, что тогда целым будет и число $x^n + \frac{1}{x^n}$. В силу равенства

$$\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n}.$$

получаем, что

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right).$$

По условию задачи и предположению индукции, применяемому для $k = n-1$ и $k = n-2$, справа во всех трех скобках стоят целые числа, т. е. справа — разность произведения целых чисел и целого числа. А значит, слева также целое число. Следовательно, утверждение также справедливо для $k = n$.

Рассмотрим теперь серьезную задачу, решающуюся методом математической индукции и в которой предположение индукции используется во всей своей полноте.

Пример 8. Доказать, что в любой стране, в которой из каждого города выходит четное число дорог и из любого города можно добраться по этим дорогам в любой другой, можно выехать из некоторого города, проехать по каждой дороге ровно один раз и вернуться в исходный город.

Доказывать будем это утверждение по индукции. Но в этой задаче у нас формально нет величины, которая могла бы стать параметром, по которому будут вестись индуктивные рассуждения — ранее в каждом примере у нас такая величина была непосредственно в формулировке. Введем такой параметр самостоятельно — индукцию будем вести по количеству дорог в стране, обозначив эту величину через n. Заметим, что по условию задачи менее двух дорог в стране быть не может.

База индукции ($n = 2$). Две дороги может быть только в случае, когда в стране только два города и эти города соединены двумя дорогами. Понятно, что в этом случае проехать по каждой дороге ровно один раз и вернуться в исходный город можно.

Шаг индукции ($n-1 \mapsto n$). Пусть для любой страны с числом дорог не более $n-1$ утверждение верно. Докажем возможность пройти по одному разу по каждой дороге и вернуться в стартовый город для произвольной страны с n дорогами.

Опишем способ, позволяющий обойти все дороги по одному разу.

Начнем с предварительной процедуры: стартуя из произвольного города страны, мы каждый раз выезжаем из очередного города по новой дороге. Это всегда можно сделать, так как по условию из каждого города выходит четное число дорог — если по одной мы въехали, то найдется еще хотя бы одна дорога, по которой можно выехать. Таким образом, в силу того факта, что в любой стране конечное число дорог, рано или поздно, а точнее, не более, чем через n переездов, мы впервые попадем в город, в котором уже были (пусть он называется городом M), тем самым «закольцевав» или «зациклив» часть пройденного пути. На этом предварительная процедура заканчивается.

Начиная все сначала, стартовать будем из города M. Как-нибудь пометим те дороги, которые входят в «цикл» (при изучении темы «Графы» будет дано строгое математическое определение цикла, сейчас нам вполне достаточно интуитивного понимания) дорог, который описан в предварительной процедуре. Например, как это модно в городе M, выложим вдоль дороги бордюрный камень из самой новой коллекции.

Если нам повезло и получилось так, что все дороги оказались помечены, то переход индукции установлен — стартуя из города M, мы объехали все дороги ровно по одному разу и вернулись в город M.

Теперь рассмотрим основной случай — остались непомеченные дороги. Отметим, что по-прежнему из каждого города страны выходит четное число[3] непомеченных дорог, так как для каждого города число непомеченных дорог либо совпадает с числом всех дорог, либо ровно на 2 меньше. А вот условие, что из каждого города страны можно доехать до любого другого по непомеченным дорогам, уже может и не выполняться.

Для произвольного города назовем содержащей этот город *губернией* множество всех городов страны, в которые можно добраться из этого города по непомеченным дорогам. Отметим, что губерния может содержать только один город. Тогда из каждого города губернии можно доехать в любой другой город этой губернии, а ни в какой

[3]Напомним, что 0 — чётное число. В данном случае из города может выходить 0 дорог.

другой город страны по непомеченным дорогам добраться нельзя. Понятно, что множество всех городов страны разбивается на губернии. Губерния может состоять и из одного города.

Для каждой губернии выполнены все условия предположения индукции: 1) из каждого города выходит четное число непомеченных дорог; 2) из каждого города губернии можно доехать по непомеченным дорогам в любой другой город этой губернии; 3) число непомеченных дорог в губернии точно не превосходит величины $n-2$. Поэтому, применяя предположение индукции, получаем, что можно выехать из некоторого города губернии, проехать по каждой непомеченной дороге этой губернии ровно один раз и вернуться в исходный город. Поскольку маршрут замкнулся, то в качестве начального города можно выбрать произвольный город губернии.

Наконец, приступаем к описанию алгоритма проезда по всем дорогам страны ровно по одному разу и возвращения в исходный город.

Статуем из города M. Сначала по предположению индукции проезжаем по всем непомеченным дорогам губернии, содержащей этот город, и возвращаемся в город M. Далее по помеченной дороге перемещаемся в новый город. Если этот город не входит в губернию, содержащую город M, то по предположению индукции проезжаем по всем непомеченным дорогам этой губернии и возвращаемся в исходный город, а далее по единственной помеченной дороге, на которой мы еще не были, переезжаем в новый город. Если же этот входит в губернию, содержащую город M, то сразу по этой помеченной дороге переезжаем в новый город.

Таким же образом поступаем, попав по помеченной дороге в очередной город. Если этот город мы еще не посещали, то не были и в этой губернии, и тогда проезжаем по всем непомеченным дорогам этой губернии, если же в этом городе были, то по непомеченным дорогам не ездим, а сразу переезжаем по помеченной дороге в следующий город.

Поскольку мы перемещаемся по конечному циклу помеченных дорог, а проезд по губернии начинается и заканчивается в одном и том же городе помеченного цикла, то рано или поздно мы вернемся в город M. В этот момент мы проедем по всем дорогам страны, помеченным и непомеченным, ровно по одному разу.

В рассмотренной задаче 8 предположение индукции используется, вообще говоря, много раз, причем про то, с каким параметром используются предположения индукции, мы ничего конкретного (кроме факта, что этот параметр не превосходит $n-2$) сказать не можем.

В следующем примере индукция ведется «рывками», по лестнице индукции мы прыгаем сразу через три ступеньки. При этом и база индукции проверяется для трех идущих подряд ступенек, чтобы при прыжках через три ступеньки мы какую-нибудь ступеньку не пропустили.

Пример 9. Доказать, что, имея гирьки весом 3 г и 5 г (в неограниченном количестве), можно уравновесить весы, на одной чаше которых находится груз массой n г, где n — натуральное число, $n \geq 8$.

Разобьём веса на тройки вида $3m-1$, $3m$ и $3m+1$, где m — натуральное число, $m \geq 3$. Нетрудно видеть, что любое натуральное число, начиная с 8, попадает в одну из этих троек. Индукцию будем вести по m.

База индукции ($m = 3$). Значение параметра m, равное 3, соответствует грузам массой 8, 9 и 10 г. Если масса груза 8 г, то используется по одной гирьке 3 г и 5 г, если масса груза 9 г, то используются 3 гирьки по 3 г, если масса груза 10 г, то используется две гирьки по 5 г.

Шаг индукции ($m-1 \mapsto m$). Предположим, что для $k = m-1$ утверждение доказано. Покажем тогда, что используя заданные гирьки, можно уравновесить весы, на одной чаше которых находится груз массой $3m-1$, $3m$, или $3m+1$ г. По предположению индукции, используя гирьки весом 3 г и 5 г, можно уравновесить весы, на одной чаше которых находится груз массой $3(m-1)-1$, $3(m-1)$, или $3(m-1)+1$ г. Добавляя к гирькам ещё одну гирьку весом 3 г, мы можем уравновесить весы с грузом массой $3m-1$, $3m$, или $3m+1$ г соответственно.

Следовательно, можно уравновесить весы с грузом массы n г, где n — любое натуральное число, $n \geq 8$.

Следующий пример является, во-первых, геометрическим, а во-вторых, при доказательстве шага индукции предположение используется для двух меньших значений параметра, необязательно непосредственно предшествующим доказываемому.

Пример 10. Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

Попробуем набросать схему доказательства по индукции. В качестве базы нетрудно проверяются случаи треугольника, четырёхугольника и пятиугольника. Для шага индукции разделим одной из диагоналей исходный многоугольника на два других. Однако мы можем столкнуться со следующей ситуацией: в полученных многоугольниках из их общей стороны (диагонали в исходном многоугольнике) не выходит ни одной диагонали, а в исходном — выходит. Пытаясь представить такой случай замечаем, что у такого многоугольника есть ещё хотя бы одна вершина, из которой не выходит ни одна диагональ. Усилим утверждение. Будем рассматривать n-угольники, у которых $n \geq 4$ и докажем, что найдутся две несмежные (то есть не лежащие на одной стороне многоугольника) вершины, из которых не проведено ни одной диагонали.

База индукции. Если в четырёхугольнике провести диагональ, то найдутся две несмежные вершины, из которых не проведено ни одной диагонали.

Шаг индукции. Предположим, что для всех k-угольников, $4 \leq k \leq (n-1)$ утверждение выполняется. Докажем, что для $k = n$ утверждение также выполняется. Рассмотрим n-угольник с непересекающимися диагоналями внутри него. Выберем одну из диагоналей и разделим n-угольник по этой диагонали на два меньших многоугольника. Обозначим вершины, которые соединяет эта диагональ, A и B. Таким образом, получаем m-угольник, $3 \leq m \leq n-1$, и $(n-m+2)$-угольник, $3 \leq n-m+2 \leq n-1$ (двойка получается из-за того, что вершины и B принадлежат обоим многоугольникам). Покажем, что в обоих частях есть вершина, отличная от вершин A и B, из которой не выходит ни одной диагонали. Если $m = 3$ или $n-m+2 = 3$, то соответствующая часть не содержит диагоналей, а значит, из третьей вершины не выходит ни одной диагонали. Если же $m \geq 4$ или $n-m+2 \geq 4$, то по предположению индукции в каждом из этих многоугольников найдутся две несмежные вершины, из которых не выходит ни одной диагонали. Поскольку в обоих многоугольниках вершины A и B являются смежными, то найдётся отличная от них вершина, из которой не выходит ни одной диагонали. А значит, в рассматриваемом n-угольнике найдутся две несмежные вершины, из которых не выходит ни одной диагонали.

Отметим, что бывают еще более хитрые варианты применения метода математической индукции, например, количество параметров, по которым ведется индукция, может быть больше одного.

2 Примеры ошибок в доказательстве по индукции.

Доказательство по индукции — очень важный и достаточно часто встречающийся в математике способ доказательства различных утверждений. Но такое доказательство, как и любое другое в математике, должно быть аккуратным и точным. Иначе может получиться ерунда. Разберем несколько примеров неаккуратных (по сути неверных) доказательств по индукции.

Начнем с того, что нередко после решения нескольких задач, в которых база индукции совершенно очевидна, возникает желание в последующих задачах сразу переходить к содержательной части — доказательству легитимности шага индукции. Чего, конечно, делать нельзя. Если проигнорировать базу индукции, то в этом случае можно по индукции «доказать» такое абсурдное утверждение: «Любое натуральное число n больше тысячи.» Действительно, шаг индукции ($n-1 \mapsto n$) безупречен: по предположению индукции выполняется неравенство $n-1 > 1000$. Следовательно, $n > 1001$; поэтому тем более $n > 1000$.

Теперь приведем еще несколько псевдодоказательств «по индукции». Попробуйте самостоятельно разобраться, в каком месте каждого из «доказательств» содержится ошибка.

Пример 11. Доказать, что для всех натуральных n число n^2+n+41 является простым.

Доказательство. Начинаем проверять все числа подряд:

n	n^2+n+41	n	n^2+n+41	n	n^2+n+41	n	n^2+n+41
1	43	7	97	13	223	19	421
2	47	8	113	14	251	20	461
3	53	9	131	15	281	21	503
4	61	10	151	16	313	22	547
5	71	11	173	17	347	23	593
6	83	12	197	18	383	24	641

Конечно, нам быстро надоедает, так как кажется, что проверять бессмысленно — мы полностью прониклись мыслью о том, что утверждение верно. Но, ожидая подвоха, проверяем еще несколько чисел:

n	n^2+n+41	n	n^2+n+41	n	n^2+n+41	n	n^2+n+41
25	691	28	853	31	1033	34	1231
26	743	29	911	32	1097	35	1301
27	797	30	971	33	1163	36	1373

По-прежнему все полученные числа простые. Всё, считаем утверждение доказанным.[4]

[4]Вообще, в случае, когда не видно общего решения, идея попробовать разобраться, что происходит при нескольких начальных значениях параметра, по которому ведется индукция, — очень даже

Пример 12. Индукцией по n докажем, что у любых n людей глаза одинакового цвета.

База индукции ($n = 1$) является, очевидно, верным (хотя и бессодержательным) утверждением.

Шаг индукции ($n \mapsto n + 1$). Пусть установлено, что у любых n людей глаза одинакового цвета. Покажем, что тогда у любых $n + 1$ людей глаза одинакового цвета. Действительно, если рассмотреть всех людей, кроме последнего, то по предположению индукции у них у всех глаза одинакового цвета. Теперь рассмотрим всех людей, кроме первого. У них по предположению индукции все глаза одинакового цвета (естественно, того же самого цвета). Поэтому у всех $n+1$ людей глаза одинакового цвета. Утверждение доказано по индукции.[5]

Пример 13. Докажем, что насыпать кучу из манки (манной крупы) невозможно.

Индукция по числу крупинок n. База индукции: одна крупинка, конечно, не является кучей. Пусть теперь насыпано n крупинок и насыпанное не является кучей. Тогда добавление одной маленькой крупинки манки, безусловно, не превратит высыпанное в кучу.[6]

Пример 14. Докажем индукцией по числу городов, что если в стране из каждого города выходит хотя бы одна дорога в какой-либо другой город, то из всякого города можно попасть в любой другой город страны.

База индукции ($n = 2$) очевидна.

Шаг индукции ($n \mapsto n+1$). Возьмем произвольную страну с n городами и добавим к ней новый город, из которого выходит хотя бы одна дорога. Эта дорога ведет в один из старых городов. По предположению индукции из любого старого города можно попасть в любой другой старый город. Следовательно, из нового города можно попасть в любой старый город (и наоборот). Значит, из любого города можно попасть в любой другой город. Утверждение доказано по индукции.[7]

Все предложенные в последних примерах «доказательства по индукции» не являются вообще доказательствами уже хотя бы потому, что с их помощью «доказываются» заведомо неверные утверждения. Поэтому сомнений в нелегитимности этих «доказательств», конечно, нет. Однако в жизни (на семинаре, контрольной, экзамене) приходится, как правило, доказывать методом математической индукции истинные утверждения. И тогда ошибки в доказательствах не так бросаются в глаза. Обращаем внимание на то, что при этом ошибочные доказательства, безусловно, так и остаются ошибочными.

здравая. Это может натолкнуть на мысль о том, как нужно доказывать в общем случае, но, конечно, само по себе не является доказательством. В данном случае подстановка любого числа до 39 в выражение $n^2 + n + 41$ даст простое число, а при $n = 40$ и $n = 41$ получаются составные числа: $40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41^2$ и $41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43$. Обратите внимание, что для доказательства того, что числа составные, нам не потребовалось выписывать эти числа в явном виде.

[5] Указание: проверьте переход от одного человека к двум.

[6] Указание: попробуйте сначала строго определить, что такое куча.

[7] Подсказка: верно ли, что любую сеть городов, в которой из любого города выходит хотя бы одна дорога, можно получить последовательным добавлением одного города?