Chapitre 4

Structure en PNE

1. **Concepts de base**
2. **Théorie polyédrale**
3. **Unimodularité**

4.1 Concepts de base

4.1.1. Polyèdres

Les méthodes de résolution en PNE utilisent souvent des relaxations linéaires qui sont définies par des inégalités linéaires.

Définition: Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par un ensemble fini d'inégalités linéaires est un polyèdre :

$$\boldsymbol{P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}.}$$

On ne considérera que des polyèdres rationnels : $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}^m$.

Définition: Un polytope est un polyèdre $\boldsymbol{P}$ borné, i.e., il existe $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}$ tel que $\|\boldsymbol{x}\| \leq \boldsymbol{M}, \ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}$.

4.1.2. Convexité

On a vu dans la section 2.3 les définitions de combinaison convexe et d'enveloppe convexe $conv(X)$.

Définition: Un ensemble X est convexe si $X = conv(X)$.

Théorème: Un polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ est convexe.

Preuve : Par définition de $conv(P)$, on sait que $P \subseteq conv(P)$. Montrons donc que $conv(P) \subseteq P$.

Soit $x \in conv(P)$. Alors $\exists k$ un entier, $\lambda \in \mathbb{R}^k_+$ et $v_i \in P$, $i = 1, \ldots, k$, tels que $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Donc

$$Ax = A(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A v_i \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b = b.$$

Par conséquent, $x \in P$ et $conv(P) \subseteq P$. D'où $P = conv(P)$ et P est convexe. $\square$

Proposition: Soit $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble compact. Posons

$$(P) \quad z^P = \min_{x \in X} c^\top x \quad \text{et} \quad (P^C) \quad z^C = \min_{x \in conv(X)} c^\top x.$$

Alors $z^C = z^P$.

Preuve : Puisque $X \subseteq conv(X)$, P^C est une relaxation de P et $z^C \leq z^P$. Montrons que $z^C \geq z^P$.

cas I : Si $conv(X) = \emptyset$, alors $X = \emptyset$ et $z^C = z^P = \infty$.

cas II : Si $conv(X) \neq \emptyset$, alors $\exists x^C \in conv(X)$ une solution optimale de P^C telle que $x^C = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^k$, $v_i \in X$, $i = 1, \ldots, k$, et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Soit $j \in \{1, \ldots, k\}$ un indice tel que $c^\top v_j \leq c^\top v_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$. Alors

$$\begin{aligned} z^C = c^\top x^C = c^\top\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i\right) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i c^\top v_i \\ &\geq \sum_{i=1}^k \lambda_i c^\top v_j \\ &= c^\top v_j \sum_{i=1}^k \lambda_i = c^\top v_j \geq z^P \end{aligned}$$

car $v_j \in X$. Donc $z^C = z^P$. □

4.1.3. Hyperplan de séparation

Théorème: Soit $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble fini et $v_0 \in \mathbb{R}^n \backslash conv(S)$. Alors il existe un hyperplan séparant v_0 de $conv(S)$, i.e., $\exists \pi \in \mathbb{R}^n$ et $\pi_0 \in \mathbb{R}$ définissant l'hyperplan $\pi^{\mathrm{T}} x = \pi_0$ tel que

$$\pi^{\mathrm{T}} x \leq \pi_0, \ \forall x \in conv(S), \quad \text{et} \quad \pi^{\mathrm{T}} v_0 > \pi_0.$$

Preuve (par construction de π et π_0) : Puisque $v_0 \notin conv(S)$, il n'existe pas de vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^k_+$ tel que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ et $v_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$. Donc le programme linéaire

$$\begin{array}{lll} \min\limits_{\lambda} & \sum\limits_{i=1}^k 0 \cdot \lambda_i & \\ \text{sujet à :} & \sum\limits_{i=1}^k \lambda_i v_i = v_0 & (y \in \mathbb{R}^n) \\ & \sum\limits_{i=1}^k \lambda_i = 1 & (y_0 \in \mathbb{R}) \\ & \lambda \geq 0 & \end{array}$$

est non réalisable.

Par conséquent, son dual

$$\begin{array}{lll} \max\limits_{y,y_0} & v_0^{\mathrm{T}} y + y_0 & \\ \text{sujet à :} & v_i^{\mathrm{T}} y + y_0 \leq 0 & i = 1, \ldots, k \end{array}$$

qui est réalisable ($y = \vec{0}$ et $y_0 = 0$ forment une solution réalisable) est donc non borné.

Il existe alors une solution $(\bar{y}, \bar{y}_0)$ de valeur positive, i.e., $v_0^{\mathrm{T}} \bar{y} + \bar{y}_0 > 0$ et $v_i^{\mathrm{T}} \bar{y} + \bar{y}_0 \leq 0$, $i = 1, \ldots, k$. Choisissons $\pi_0 = -\bar{y}_0$ et $\pi = \bar{y}$.

Si $x \in conv(S)$, alors

$$\pi^{\mathrm{T}} x = \bar{y}^{\mathrm{T}} x \leq \max_{v \in conv(S)} \bar{y}^{\mathrm{T}} v = \max_{v_i \in S} \bar{y}^{\mathrm{T}} v_i \leq -\bar{y}_0 = \pi_0,$$

où l'égalité centrale découle de la proposition précédente.

De plus,

$$\pi^{\mathrm{T}} v_0 = v_0^{\mathrm{T}} \bar{y} > -\bar{y}_0 = \pi_0.$$

□

4.2 Théorie polyédrale

4.2.1. Faces d'un polyèdre

Définition: Soit $S \subset \mathbb{R}^n$. $\pi^{\mathrm{T}} x \le \pi_0$ $(\pi \ne 0)$ est une inégalité valide pour S si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \pi^{\mathrm{T}} x \le \pi_0\}$.

Définition: Soit $\pi^{\mathrm{T}} x \le \pi_0$ et $\mu^{\mathrm{T}} x \le \mu_0$ deux inégalités valides pour $S \subset \mathbb{R}^n_+$. S'il existe une constante $k > 0$ telle que $\pi \ge k\mu$, $\pi_0 \le k\mu_0$ et $(\pi, \pi_0) \ne (\mu, \mu_0)$, alors on dit que $\pi^{\mathrm{T}} x \le \pi_0$ domine $\mu^{\mathrm{T}} x \le \mu_0$.

Proposition: Soit $\pi^{\mathrm{T}} x \le \pi_0$ et $\mu^{\mathrm{T}} x \le \mu_0$ deux inégalités valides pour $S \subset \mathbb{R}^n_+$. Si $\pi^{\mathrm{T}} x \le \pi_0$ domine $\mu^{\mathrm{T}} x \le \mu_0$, alors

$$H^\pi = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \,|\, \pi^{\mathrm{T}} x \le \pi_0\} \subseteq H^\mu = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \,|\, \mu^{\mathrm{T}} x \le \mu_0\}$$

Preuve : Si $x \in H^\pi$, alors

$$\begin{aligned} & k\mu^{\mathrm{T}} x \le \pi^{\mathrm{T}} x \le \pi_0 \le k\mu_0 \\ \Rightarrow\ & k\mu^{\mathrm{T}} x \le k\mu_0 \\ \Rightarrow\ & \mu^{\mathrm{T}} x \le \mu_0 \end{aligned}$$

D'où $x \in H^\mu$. $\square$

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un polyèdre.

Définition: Supposons que $P \subset \mathbb{R}^n_+$. Une inégalité valide $\pi^{\mathrm{T}}x \leq \pi_0$ pour P est dite redondante pour décrire P s'il existe m inégalités valides $\mu_i^{\mathrm{T}}x \leq \mu_{0,i}$, $i = 1, \ldots, m$, pour P et m poids $k_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$, tels que $\Big(\sum_{i=1}^{m} k_i\mu_i\Big)^{\mathrm{T}}x \leq \sum_{i=1}^{m} k_i\mu_{0,i}$ domine $\pi^{\mathrm{T}}x \leq \pi_0$.

On aimerait décrire P avec le plus petit nombre d'inégalités valides, i.e., en excluant toute inégalité redondante.

Définition: Soit $\pi^{\mathrm{T}}x \leq \pi_0$ une inégalité valide pour P. $F = \{x \in P \mid \pi^{\mathrm{T}}x = \pi_0\}$ est une face de P si $F \neq \emptyset$.

Proposition: Un ensemble F est une face de P s'il existe un sous-système de lignes $[A^0 \,|\, b^0]$ de $[A \,|\, b]$ non vide tel que $F = \{x \in P \mid A^0x = b^0\}$.

On pourrait trouver toutes les faces de P en énumérant tous les sous-systèmes. Si A possèdent m lignes, il y a $2^m - 1$ cas à étudier.

Proposition: Tout polyèdre a un nombre fini de faces.

4.2.2. Points extrêmes

Définition: $u \in P$ est un point extrême de P si $\pi^{\mathrm{T}}x \leq \pi_0$ est une inégalité valide de P telle que $\{x \in P \mid \pi^{\mathrm{T}}x = \pi_0\} = \{u\}$ est une face de P qui contient un seul point. L'ensemble des points extrêmes de P, noté $EXT(P)$, est fini.

Proposition: Soit $u \in P$. Alors $u \in EXT(P)$ si et seulement si $u \notin conv(P \setminus \{u\})$.

Théorème: Soit P un polytope de $\mathbb{R}^n$ et $S = EXT(P) = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Alors $P = conv(S)$.

Preuve : Si $P = \emptyset$, alors $S = \emptyset$ et $conv(S) = \emptyset = P$. Supposons donc que $P \neq \emptyset$.

Puisque $S \subseteq P$, alors $conv(S) \subseteq conv(P) = P$ car P est un ensemble convexe. D'où $conv(S) \subseteq P$.

Montrons par contradiction que $\boldsymbol{P \subseteq conv(S)}$. Soit $\boldsymbol{u \in P}$ et supposons que $\boldsymbol{u \notin conv(S)}$. Alors il existe $\boldsymbol{\pi}$ et $\boldsymbol{\pi_0}$ tels que $\boldsymbol{\pi^{\mathrm{T}} x \leq \pi_0,\ \forall x \in conv(S)}$, et $\boldsymbol{\pi^{\mathrm{T}} u > \pi_0}$. Posons $\boldsymbol{\pi_0^* = \max_{x \in P} \pi^{\mathrm{T}} x < \infty}$.

Considérons $\boldsymbol{F = \{x \in P \,|\, \pi^{\mathrm{T}} x = \pi_0^*\} \neq \emptyset}$ une face de $\boldsymbol{P}$. Comme $\boldsymbol{P}$ est un polytope, il existe $\boldsymbol{v_i \in EXT(P) \cap F}$. Soit $\boldsymbol{v_i}$ un tel point. Alors

$$\boldsymbol{\pi_0^* \geq \pi^{\mathrm{T}} u > \pi_0 \geq \pi^{\mathrm{T}} v_i}$$

car $\boldsymbol{u \in P}$ et $\boldsymbol{v_i \in conv(S)}$. D'où $\boldsymbol{v_i \notin F}$ ce qui mène à une contradiction.

Par conséquent, $\boldsymbol{P \subseteq conv(S)}$ et $\boldsymbol{P = conv(S)}$. □

Théorème: Soit $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Alors $conv(S)$ est un polytope.

Preuve par construction : Soit le polytope

$$Q = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \quad \begin{aligned} &-1 \leq \alpha_j \leq 1, \quad j = 1, \ldots, n, \\ &-1 \leq \beta \leq 1, \\ &v_i^{\mathrm{T}} \alpha - \beta \leq 0, \quad i = 1, \ldots, k\} \end{aligned}$$

et $T = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_m, b_m)\}$ l'ensemble de ses m points extrêmes ($a_\ell \in \mathbb{R}^n$ et $b_\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = 1, \ldots, m$). Puisque $T \subseteq conv(T) = Q$, alors

$$v_i^{\mathrm{T}} a_\ell = a_\ell^{\mathrm{T}} v_i \leq b_\ell, \qquad \forall \ell = 1, \ldots, m, \; i = 1, \ldots, k.$$

Posons $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_\ell^{\mathrm{T}} x \leq b_\ell, \; \ell = 1, \ldots, m\}$ un polyèdre et montrons que $P = conv(S)$.

Montrons d'abord que $conv(S) \subseteq P$. Soit $x \in conv(S)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ tel que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$. D'où

$$a_\ell^{\mathrm{T}} x = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_\ell^{\mathrm{T}} v_i \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i b_\ell = b_\ell.$$

Par conséquent, $x \in P$.

Montrons par contradiction que $P \subseteq conv(S)$. Soit $x \in P$. Supposons que $x \notin conv(S)$. Alors il existe π et π_0 tels que

$$\begin{aligned} \pi^{\mathrm{T}} v_i &\leq \pi_0 \quad \forall i = 1, \ldots, k \\ \pi^{\mathrm{T}} x &> \pi_0 \\ -1 \leq \pi_j &\leq 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n \\ -1 \leq \pi_0 &\leq 1 \end{aligned}$$

(quitte à diviser π et π_0 par $\max\limits_{j \in \{0,1,\ldots,n\}} |\pi_j|$).

Donc $(\pi, \pi_0) \in Q = conv(T)$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ tel que $\sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell = 1$ et $(\pi, \pi_0) = \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell (a_\ell, b_\ell)$. D'où

$$\pi^{\mathrm{T}} x = \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell a_\ell^{\mathrm{T}} x \leq \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell b_\ell = \pi_0 < \pi^{\mathrm{T}} x,$$

ce qui mène à une contradiction.

Par conséquent, $x \in conv(S)$ et $P \subseteq conv(S)$. On en conclut que $P = conv(S)$. Comme $conv(S)$ est borné, P est un polyèdre borné, i.e., un polytope. $\square$

Ce résultat se généralise aux polyèdres.

4.2.3. Théorème de Minkowski

Considérons le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$.

Définition: Un vecteur $r \in \mathbb{R}^n$ est un rayon de P si

$$x + \alpha r \in P, \quad \forall x \in P, \ \alpha \geq 0.$$

Définition: Un vecteur $r \in \mathbb{R}^n$ est un rayon extrême de P s'il est un rayon de P et s'il n'existe pas de rayons r^1 et r^2 de P tels que $r^1 \neq \lambda r^2$, $\forall \lambda \geq 0$, et $r = \frac{1}{2}r^1 + \frac{1}{2}r^2$.

Les points et les rayons extrêmes de P permettent de représenter complètement P.

Théorème: Soit

$V = \{v_1, \ldots, v_k\} = EXT(P)$: ensemble des points extrêmes de P

$R = \{r_1, \ldots, r_\ell\}$: ensemble des rayons extrêmes de P

$Q = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^\ell \alpha_j r_j \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda \in \mathbb{R}_+^k, \alpha \in \mathbb{R}_+^\ell\}$

et supposons que $rang(A) = n$. Alors $P = Q$.

Preuve : Montrons que $Q \subseteq P$. Puisque P est convexe et $V \subseteq P$, alors

$$x(\lambda) := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \in P, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^k \text{ tel que } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Par définition d'un rayon, on a que

$$\begin{aligned} x(\lambda) + \alpha_1 r_1 &\in P \quad \forall \alpha_1 \in \mathbb{R}_+ \\ (x(\lambda) + \alpha_1 r_1) + \alpha_2 r_2 &\in P \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+ \\ &\vdots \\ x(\lambda) + \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j r_j &\in P \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^{\ell}. \end{aligned}$$

Donc $Q \subseteq P$.

Montrons par contradiction que $P \subseteq Q$. Supposons qu'il existe $y \in P$ tel que $y \notin Q$. Alors le programme linéaire

$$\begin{aligned} \min_{\lambda,\alpha} \quad & 0 \\ \text{sujet à :} \quad & \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j r_j = y \\ & -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = -1 \\ & \lambda \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

est non réalisable. Son dual

$$\begin{array}{lll} \max\limits_{\pi,\pi_0} & \pi^{\mathrm{T}}y - \pi_0 & \\ \text{sujet à :} & \pi^{\mathrm{T}}v_i - \pi_0 \leq 0 & i = 1,\ldots,k \\ & \pi^{\mathrm{T}}r_j \leq 0 & j = 1,\ldots,\ell \end{array}$$

est non borné. Donc il existe π et π_0 tels que

$$\begin{aligned} \pi^{\mathrm{T}}y - \pi_0 &> 0 \\ \pi^{\mathrm{T}}v_i &\leq \pi_0 \quad \forall i = 1,\ldots,k \\ \pi^{\mathrm{T}}r_j &\leq 0 \quad \forall j = 1,\ldots,\ell. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le programme linéaire $\max\limits_{x\in P\neq\emptyset} \pi^{\mathrm{T}}x$. Si ce problème n'est pas non borné, alors la valeur optimale est atteinte en un point de $V = EXT(P)$ car $rang(A) = n$. Or $y \in P$ et $\pi^{\mathrm{T}}y > \pi_0 \geq \pi^{\mathrm{T}}v_i$, $\forall v_i \in EXT(P)$ est une contradiction.

S'il est non borné, alors il existe un rayon extrême r_j tel que $\pi^{\mathrm{T}}r_j > 0$, ce qui mène à une autre contradition.

Donc il n'existe pas $y \in P$ tel que $y \notin Q$ ce qui implique que $P \subseteq Q$.

D'où $P = Q$. $\square$

4.2.4. Facettes

Soit S un ensemble discret. On a vu que

$$\min_{x \in S} c^{\mathrm{T}} x \quad \text{est équivalent à} \quad \min_{x \in conv(S)} c^{\mathrm{T}} x.$$

Énumérer les éléments de S n'est pas facile en général. Ce n'est pas plus facile d'identifier $conv(S)$.

Un cube est un polyèdre de dimension 3 qui possède
- **6 faces de dimension 2**
- **12 faces de dimension 1**
- **8 faces de dimension 0 (les points extrêmes)**

Pour le représenter, on peut se limiter aux inégalités valides engendrant les 6 faces de dimension 2 (appelées des facettes).

Définition: L'ensemble $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ est dit affinement indépendant si $\{v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_k - v_1\}$ est linéairement indépendant, i.e., si le système

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$$

possède l'unique solution $\alpha = 0$.

Définition: La dimension d'un polyèdre P est donnée par

$$dim(P) = \max\{|S|-1 \mid S \subseteq P \text{ affinement indépendant}\},$$

i.e., $dim(P)$ est un de moins que le nombre maximal de points de P affinement indépendants.

Si $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \neq \emptyset$, alors le nombre maximal de points de P affinement indépendants est $n + 1 - rang(A)$. D'où $dim(P) = n - rang(A)$.

Si $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$, alors $dim(P) = n - rang(A^=)$, où $A^= x = b^=$ sont les contraintes de P toujours satisfaites à égalité.

Remarque : S'il existe un point strictement intérieur à $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ (i.e., il existe x tel que $Ax < b$), alors $dim(P) = n$ car $rang(A^=) = 0$.

Définition: Une facette de P est une face F de P telle que $dim(F) = dim(P) - 1$.

Proposition: Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polyèdre tel que $dim(P) = n$. L'inégalité $\pi^{\mathrm{T}} x \leq \pi_0$ (ou un multiple positif) fait nécessairement partie de la définition de P si et seulement si elle définit une facette de P.

Proposition: Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polyèdre tel que $dim(P) = n$ et $\pi^{\mathrm{T}} x \leq \pi_0$ une inégalité valide pour P. $F = \{x \in P \mid \pi^{\mathrm{T}} x = \pi_0\}$ est une facette de P si et seulement si il existe k points de P affinement indépendants satisfaisant $\pi^{\mathrm{T}} x = \pi_0$ où $k = dim(P)$.

Plusieurs autres approches peuvent être utilisées pour prouver qu'une inégalité valide engendre une facette d'un polyèdre. Une autre de ces approches est énoncée dans la proposition suivante.

Proposition: Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polyèdre tel que $dim(P) = n$, $\pi^{\mathrm{T}} x \leq \pi_0$ une inégalité valide pour P et $F = \{x \in P | \pi^{\mathrm{T}} x = \pi_0\}$. Soit k points $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de F avec $k \geq n$ et un hyperplan quelconque $\mu^{\mathrm{T}} x = \mu_0$ les contenant, i.e., $\mu^{\mathrm{T}} v_i = \mu_0$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. Si ce système d'équations linéaires en μ et μ_0 ne possède que des solutions de la forme $(\mu, \mu_0) = \lambda(\pi, \pi_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors F est une facette de P.

4.3 Unimodularité

Parfois la solution de la relaxation linéaire d'un PNE donne une solution optimale pour le PNE. Voyons une classe de problèmes, facilement reconnaissable, qui possède toujours cette propriété.

Considérons le PNE suivant :

$$\begin{array}{lll} (\boldsymbol{PNE}) & \boldsymbol{z} = \min\limits_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ & \textbf{sujet à :} & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^{\boldsymbol{n}} \end{array}$$

avec $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^{m}$, et dénotons par RL sa relaxation linéaire.

Si RL possède une solution optimale, alors il en existe une qui soit un point extrême $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_B}, \boldsymbol{x_N}) = (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, 0)$ où $\boldsymbol{B}$ est une sous-matrice $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{m}$ non singulière de $\boldsymbol{A}$.

Lemme: Soit $\boldsymbol{B} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ une matrice non singulière. $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$, $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$, si et seulement si $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) = \pm 1$.

Preuve : Supposons que $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) = \pm 1$. Dénotons par $\boldsymbol{adj}(\boldsymbol{B})$ la matrice adjointe de $\boldsymbol{B}$ et remarquons que tous ses éléments sont des entiers. Par conséquent, tous les éléments de $\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{\boldsymbol{adj}(\boldsymbol{B})}{\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B})}$ sont aussi des entiers, ce qui implique que $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$, $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$.

Maintenant, supposons que $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$, $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$. Alors $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{B}^{-1} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$. Donc $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) \in \mathbb{Z}$ et $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}^{-1}) \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, puisque $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}^{-1}) = 1$, on déduit que $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}^{-1}) = \pm 1$. $\square$

Définition: Une matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ de plein rang est unimodulaire si $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) = \pm 1$ pour toute base $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{A}$.

Par conséquent, si $\boldsymbol{A}$ est unimodulaire, résoudre RL est suffisant pour résoudre PNE. Par contre, il est difficile de vérifier l'unimodularité d'une matrice.

Définition: Une matrice est totalement unimodulaire (TU) si chacune de ses sous-matrices carrées à un déterminant égal à 1, -1 ou 0.

Proposition: Si A est TU, alors A est unimodulaire.

Preuve : Soit B une base de A. Puisque A est TU, alors $det(B) = 1, -1$ ou 0. Comme B est une base, $det(B) \neq 0$. D'où $det(B) = \pm 1$. □

Par conséquent, si A est TU, résoudre RL est suffisant pour résoudre PNE. Voyons des conditions suffisantes pour détecter que A est TU.

Proposition: Si

(i) $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, $\forall i, j$,

(ii) $\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \leq 2$, $\forall j$, et

(iii) il existe une partition M_1 et M_2 des indices des lignes telle que $\sum_{i \in M_1} a_{ij} = \sum_{i \in M_2} a_{ij}$ pour toute colonne j satisfaisant $\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = 2$,

alors A est TU.

Preuve (par contradiction) : Supposons que les trois conditions tiennent mais que $\boldsymbol{A}$ n'est pas TU. Soit $\boldsymbol{B}$ la plus petite sous-matrice carrée de $\boldsymbol{A}$ telle que $\boldsymbol{det(B)} \notin \{-1, 0, 1\}$. La condition (i) implique que la dimension de $\boldsymbol{B}$ est au moins 2×2. De plus, chacune des colonnes de $\boldsymbol{B}$ contient au moins deux éléments non nuls (sinon $\boldsymbol{B}$ ne serait pas minimale). La condition (ii) implique qu'il y a exactement deux éléments dans ces colonnes. La condition (iii) implique qu'il existe deux ensembles $\boldsymbol{M_1}$ et $\boldsymbol{M_2}$ tels que la somme des lignes de $\boldsymbol{M_1}$ est égale à la somme des lignes de $\boldsymbol{M_2}$. Donc ces lignes sont linéairement dépendantes et $\boldsymbol{det(B)} = 0$ (contradiction).

$\square$

Remarque : $\boldsymbol{M_2}$ pourrait être vide.