

ALGÈBRE

COURS DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ANNÉE



À la découverte de l'algèbre

La première année d'études supérieures pose les bases des mathématiques. Pourquoi se lancer dans une telle expédition ? Déjà parce que les mathématiques vous offriront un langage unique pour accéder à une multitude de domaines scientifiques. Mais aussi parce qu'il s'agit d'un domaine passionnant ! Nous vous proposons de partir à la découverte des maths, de leur logique et de leur beauté.

Dans vos bagages, des objets que vous connaissez déjà : les entiers, les fonctions... Ces notions en apparence simples et intuitives seront abordées ici avec un souci de rigueur, en adoptant un langage précis et en présentant les preuves. Vous découvrirez ensuite de nouvelles théories (les espaces vectoriels, les équations différentielles,...).

Ce tome est consacré à l'algèbre et se divise en deux parties. La première partie débute par la logique et les ensembles, qui sont des fondamentaux en mathématiques. Ensuite vous étudierez des ensembles particuliers : les nombres complexes, les entiers ainsi que les polynômes. Cette partie se termine par l'étude d'une première structure algébrique, avec la notion de groupe.

La seconde partie est entièrement consacrée à l'algèbre linéaire. C'est un domaine totalement nouveau pour vous et très riche, qui recouvre la notion de matrice et d'espace vectoriel. Ces concepts, à la fois profonds et utiles, demandent du temps et du travail pour être bien compris.

Les efforts que vous devrez fournir sont importants : tout d'abord comprendre le cours, ensuite connaître par cœur les définitions, les théorèmes, les propositions... sans oublier de travailler les exemples et les démonstrations, qui permettent de bien assimiler les notions nouvelles et les mécanismes de raisonnement. Enfin, vous devrez passer autant de temps à pratiquer les mathématiques : il est indispensable de résoudre activement par vous-même des exercices, sans regarder les solutions. Pour vous aider, vous trouverez sur le site Exo7 toutes les vidéos correspondant à ce cours, ainsi que des exercices corrigés.

Au bout du chemin, le plaisir de découvrir de nouveaux univers, de chercher à résoudre des problèmes... et d'y parvenir. Bonne route !

Sommaire

1	Logique et raisonnements	1
1	Logique	2
2	Raisonnements	6
2	Ensembles et applications	11
1	Ensembles	12
2	Applications	15
3	Injection, surjection, bijection	17
4	Ensembles finis	20
5	Relation d'équivalence	27
3	Nombres complexes	31
1	Les nombres complexes	31
2	Racines carrées, équation du second degré	36
3	Argument et trigonométrie	38
4	Nombres complexes et géométrie	42
4	Arithmétique	45
1	Division euclidienne et pgcd	45
2	Théorème de Bézout	48
3	Nombres premiers	52
4	Congruences	54
5	Polynômes	59
1	Définitions	59
2	Arithmétique des polynômes	61
3	Racine d'un polynôme, factorisation	65
4	Fractions rationnelles	68
6	Groupes	71
1	Groupe	71
2	Sous-groupes	76
3	Morphismes de groupes	77
4	Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	80
5	Le groupe des permutations \mathcal{S}_n	82
7	Systèmes linéaires	87
1	Introduction aux systèmes d'équations linéaires	87

2	Théorie des systèmes linéaires	91
3	Résolution par la méthode du pivot de Gauss	93
8	Matrices	99
1	Définition	99
2	Multiplication de matrices	101
3	Inverse d'une matrice : définition	106
4	Inverse d'une matrice : calcul	108
5	Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires	110
6	Matrices triangulaires, transposition, trace, matrices symétriques	117
9	L'espace vectoriel \mathbb{R}^n	123
1	Vecteurs de \mathbb{R}^n	123
2	Exemples d'applications linéaires	126
3	Propriétés des applications linéaires	132
10	Espaces vectoriels	137
1	Espace vectoriel (début)	137
2	Espace vectoriel (fin)	140
3	Sous-espace vectoriel (début)	144
4	Sous-espace vectoriel (milieu)	147
5	Sous-espace vectoriel (fin)	150
6	Application linéaire (début)	156
7	Application linéaire (milieu)	158
8	Application linéaire (fin)	161
11	Dimension finie	167
1	Famille libre	167
2	Famille génératrice	171
3	Base	173
4	Dimension d'un espace vectoriel	178
5	Dimension des sous-espaces vectoriels	182
12	Matrices et applications linéaires	187
1	Rang d'une famille de vecteurs	187
2	Applications linéaires en dimension finie	192
3	Matrice d'une application linéaire	198
4	Changement de bases	204
13	Déterminants	211
1	Déterminant en dimension 2 et 3	211
2	Définition du déterminant	215
3	Propriétés du déterminant	220
4	Calculs de déterminants	224
5	Applications des déterminants	228

Vidéo ■ partie 1. Logique

Vidéo ■ partie 2. Raisonnements

Fiche d'exercices ♦ Logique, ensembles, raisonnements

Quelques motivations

- Il est important d'avoir un **langage rigoureux**. La langue française est souvent ambiguë. Prenons l'exemple de la conjonction « ou » ; au restaurant « *fromage ou dessert* » signifie l'un ou l'autre mais pas les deux. Par contre si dans un jeu de carte on cherche « *les as ou les cœurs* » alors il ne faut pas exclure l'as de cœur. Autre exemple : que répondre à la question « *As-tu 10 euros en poche ?* » si l'on dispose de 15 euros ?
- Il y a des notions difficiles à expliquer avec des mots : par exemple la continuité d'une fonction est souvent expliquée par « *on trace le graphe sans lever le crayon* ». Il est clair que c'est une définition peu satisfaisante. Voici la définition mathématique de la continuité d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in I$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

C'est le but de ce chapitre de rendre cette ligne plus claire ! C'est la **logique**.

- Enfin les mathématiques tentent de **distinguer le vrai du faux**. Par exemple « *Est-ce qu'une augmentation de 20%, puis de 30% est plus intéressante qu'une augmentation de 50% ?* ». Vous pouvez penser « oui » ou « non », mais pour en être sûr il faut suivre une démarche logique qui mène à la conclusion. Cette démarche doit être convaincante pour vous mais aussi pour les autres. On parle de **raisonnement**.

Les mathématiques sont un langage pour s'exprimer rigoureusement, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et vérifiables. Le raisonnement est le moyen de valider — ou d'infirmer — une hypothèse et de l'expliquer à autrui.

1. Logique

1.1. Assertions

Une **assertion** est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemples :

- « *Il pleut.* »
- « *Je suis plus grand que toi.* »
- « $2 + 2 = 4$ »
- « $2 \times 3 = 7$ »
- « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$. »
- « Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z| = 1$. »

Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q .

L'opérateur logique « et »

L'assertion « P **et** Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion « P et Q » est fausse sinon.

On résume ceci en une **table de vérité** :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

FIGURE 1.1 – Table de vérité de « P et Q »

Par exemple si P est l'assertion « *Cette carte est un as* » et Q l'assertion « *Cette carte est cœur* » alors l'assertion « P et Q » est vraie si la carte est l'as de cœur et est fausse pour toute autre carte.

L'opérateur logique « ou »

L'assertion « P **ou** Q » est vraie si l'une (au moins) des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion « P ou Q » est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses.

On reprend ceci dans la table de vérité :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

FIGURE 1.2 – Table de vérité de « P ou Q »

Si P est l'assertion « *Cette carte est un as* » et Q l'assertion « *Cette carte est cœur* » alors l'assertion « P ou Q » est vraie si la carte est un as ou bien un cœur (en particulier elle est vraie pour l'as de cœur).

Remarque.

Pour définir les opérateurs « ou », « et » on fait appel à une phrase en français utilisant les mots *ou*, *et* ! Les tables de vérités permettent d'éviter ce problème.

La négation « non »

L'assertion « **non** P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	V	F
$\text{non } P$	F	V

FIGURE 1.3 – Table de vérité de « $\text{non } P$ »**L'implication \implies**

La définition mathématique est la suivante :

L'assertion « $(\text{non } P) \text{ ou } Q$ » est notée « $P \implies Q$ ».

Sa table de vérité est donc la suivante :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	V	V

FIGURE 1.4 – Table de vérité de « $P \implies Q$ »

L'assertion « $P \implies Q$ » se lit en français « P implique Q ».

Elle se lit souvent aussi « si P est vraie alors Q est vraie » ou « si P alors Q ».

Par exemple :

- « $0 \leq x \leq 25 \implies \sqrt{x} \leq 5$ » est vraie (prendre la racine carrée).
- « $x \in]-\infty, -4[\implies x^2 + 3x - 4 > 0$ » est vraie (étudier le binôme).
- « $\sin(\theta) = 0 \implies \theta = 0$ » est fausse (regarder pour $\theta = 2\pi$ par exemple).
- « $2 + 2 = 5 \implies \sqrt{2} = 2$ » est vraie ! Eh oui, si P est fausse alors l'assertion « $P \implies Q$ » est toujours vraie.

L'équivalence \iff

L'**équivalence** est définie par :

« $P \iff Q$ » est l'assertion « $(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)$ ».

On dira « P est équivalent à Q » ou « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ». Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. La table de vérité est :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	V

FIGURE 1.5 – Table de vérité de « $P \iff Q$ »

Exemples :

- Pour $x, x' \in \mathbb{R}$, l'équivalence « $x \cdot x' = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x' = 0)$ » est vraie.
- Voici une équivalence *toujours fausse* (quelle que soit l'assertion P) : « $P \iff \text{non}(P)$ ».

On s'intéresse davantage aux assertions vraies qu'aux fausses, aussi dans la pratique et en dehors de ce chapitre on écrira « $P \iff Q$ » ou « $P \implies Q$ » uniquement lorsque ce sont des assertions vraies. Par exemple si l'on écrit « $P \iff Q$ » cela sous-entend « $P \iff Q$ est vraie ». Attention rien ne dit que P et Q soient vraies. Cela signifie que P et Q sont vraies en même temps ou fausses en même temps.