Principes de la dynamique du point matériel

La dynamique est l'étude des mouvements en relation avec leur cause. Nous ne nous intéresserons ici qu'au mouvement de points matériels. Nous serons ainsi amenés à déterminer les mouvements de points matériels à partir de l'expression des forces qui s'exercent sur le point et des principes de la mécanique newtonienne, nous menant à la résolution d'équations différentielles.

I. Définitions

A. Masse

La masse est un scalaire positif associé à tout système matériel qui caractérise son inertie, c'est-à-dire sa résistance à la modification de son mouvement, mais aussi sa capacité à persévérer dans son mouvement.

Son unité dans le système international est le ***kilogramme*** (***kg***).

Théoriquement, deux grandeurs différentes doivent être distinguées : la masse inertie, grandeur cinétique intervenant dans la deuxième loi de Newton que nous verrons dans ce chapitre, et la masse grave, provenant du poids. On a pu montrer que ces deux grandeurs étaient égales à mieux que 10^{-12} près et nous les considérerons donc comme une seule grandeur, nommée masse.

B. Quantité de mouvement

Soit un point matériel M, de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$.

On définit alors le vecteur ***quantité de mouvement*** par :

$$\boxed{\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m\,\vec{v}(M/\mathcal{R})}$$

Remarque : lorsque n'existe aucune ambigüité, la mention du référentiel sera omise.

C. Force

On appelle ***force*** toute cause capable de mettre en mouvement un corps au repos ou de modifier son mouvement.

On distingue :

- Les forces « réelles », qui sont de véritables interactions :
  - A distance : il n'y a pas de contact (interaction gravitationnelle, poids, force de Lorentz exercée sur une particule chargée)
  - De contact (réaction du support, frottements, force de rappel élastique)

- Les forces d'inertie qui sont ressenties comme des forces mais ne sont qu'un artifice de calcul. Elles n'existent que dans certains cas et nous ne nous en occuperons pas du tout pour l'instant (voir mécanique en référentiel non galiléen).

II. Lois de Newton

Les lois de Newton sont des postulats, non démontrés mais vérifiés expérimentalement.

A. Première loi : principe de l'inertie

<u>Enoncé :</u> il existe des référentiels particuliers, dits ***<u>galiléens</u>***, par rapport auxquels un point matériel ne subissant aucune action possède un mouvement rectiligne et uniforme.

Nous admettrons l'existence de ces référentiels. Notamment, dans la plupart des cas que nous envisagerons ici, le référentiel terrestre pourra être considérer comme galiléen. Ce constat repose principalement sur l'expérience (au moins de pensée).

<u>Remarque :</u> un point matériel est dit isolé lorsqu'il n'est soumis à aucune action. Il est dit pseudo-isolé si les actions s'exerçant sur lui se compensent.

B. Deuxième loi : principe fondamental de la dynamique

<u>Enoncé :</u> soit un point matériel M, de masse m (constante) animé d'une vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ ***<u>GALILEEN</u>***, subissant n forces notées $\vec{F_i}$ alors :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R})}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt} = m\,\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \sum_{i=0}^{n}\vec{F_i}}$$

C. Troisième loi : loi de l'action et de la réaction

<u>Enoncé :</u> si un point matériel A exerce sur un point matériel B une force $\overrightarrow{F_{A\to B}}$ alors le point B exerce sur A une force $\overrightarrow{F_{B\to A}}$ telle que :

- Les deux forces s'exercent sur la même droite d'action, à savoir la droite passant par A et B ;
- $\boxed{\overrightarrow{F_{B\to A}} = -\overrightarrow{F_{A\to B}}}$

III. Principe de relativité de Galilée

Soient deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ tels que $\mathcal{R}$ soit galiléen et que $\mathcal{R}'$ soit en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\overrightarrow{v_e}$.

Montrons qu'alors le référentiel $\mathcal{R}'$ est aussi galiléen.

Pour cela, considérons un point matériel M ne subissant aucune action et donc dont le mouvement dans $\mathcal{R}$ est rectiligne et uniforme à la vitesse constante $\overrightarrow{v_0}$.

Alors la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}'$ vaut $\vec{v}(M/\mathcal{R}') = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_e}$ et est donc constante.

Donc le mouvement de M par rapport à $\mathcal{R}'$ est aussi un mouvement de translation rectiligne uniforme lorsqu'il n'est soumis à aucune action et, donc, le référentiel $\mathcal{R}'$ est aussi galiléen.

On en déduit que ***tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est aussi galiléen***.

IV. Exemples de forces

A. Réaction du support

En l'absence de frottements solides, la réaction exercée par un support sur un point matériel est ***orthogonale au support***.

B. Frottements

1. Frottements fluides

Les frottements fluides (ou visqueux) visent à modéliser l'action de fluides de manière assez réaliste et simple. Ils sont proportionnels à la vitesse du point matériel par rapport au fluide exerçant les frottements et lui sont opposés :

$$\boxed{\vec{f} = -\lambda\, \vec{v}(M/\mathcal{R})}$$

Où λ est une constante réelle positive.

Remarque : les frottements réels sont souvent mieux modélisés par une force proportionnelle au carré de la vitesse mais la résolution des équations (qui ne sont alors plus linéaires) s'en trouve alors très nettement compliquée.

2. Frottements solides

Soit un point matériel sur un support solide.

La réaction du support peut se décomposer en deux composantes, une tangente au support (notée $\vec{T}$) et une normale au support (notée $\vec{N}$).

Si la vitesse du point par rapport au support est nulle, alors $\|\vec{T}\| \leq f_s\|\vec{N}\|$ où f_s est appelé coefficient de frottement statique.

Si la vitesse du point par rapport au support est non nulle, alors $\|\vec{T}\| = f_d\|\vec{N}\|$ où f_d est appelé coefficient de frottement dynamique (ou cinétique).

Compte-tenu de la proximité de leurs valeurs, on choisit souvent $f_d = f_s = f$.

Remarques :

- En l'absence de frottement, $\vec{T} = \vec{0}$.
- En cas de mouvement, la force de frottement est toujours opposée au mouvement.
- Les coefficients de frottements sont très dépendants de l'état des surfaces (propreté, lubrification, planéité etc.). Les valeurs suivantes sont donc uniquement des ordres de grandeurs indicatifs :
    - Acier / acier : 0,1
    - Acier / glace : 0,02 (mais, pour des skis par exemple, il se forme une couche liquide et les frottements fluides interviennent aussi)
    - Chêne / chêne : 0,34
    - Pneu / route sèche : 0,6
    - Pneu / route mouillée : 0,4

C. Forces d'interaction

1. Gravitationnelle

Soit deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 et distantes de d.

On note $\overrightarrow{u_{1\to 2}}$ le vecteur unitaire orienté de M_1 vers M_2.

Alors M_1 exerce sur M_2 une force $\overrightarrow{F_{1\to 2}}$ telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{1\to 2}} = -\frac{Gm_1m_2}{d^2}\overrightarrow{u_{1\to 2}}}$$

Où $G = 6{,}67.10^{-11}\, m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ est la constante de Cavendish (ou de gravitation universelle).

2. Coulombienne

Soit deux points matériels M_1 et M_2 portant des charges respectives q_1 et q_2 et distantes de d.

On note $\overrightarrow{u_{1\to 2}}$ le vecteur unitaire orienté de M_1 vers M_2.

Alors M_1 exerce sur M_2 une force $\overrightarrow{F_{1\to 2}}$ telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{1\to 2}} = \frac{q_1q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,d^2}\overrightarrow{u_{1\to 2}}}$$

Où $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\, F.m^{-1}$ est la permittivité diélectrique du vide.

Rappel : la charge élémentaire vaut $e \approx 1{,}60.10^{-19}\, C$.

D. Poussée d'Archimède (aperçu)

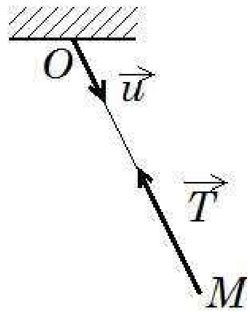
Elle sera développée plus tard, dans le chapitre de thermodynamique traitant de la statique des fluides.

Soit un solide (éventuellement inhomogène) immergé dans un fluide <u>au repos</u>.

Si l'échange du solide avec du fluide ne modifie pas la répartition de pression à la surface du solide, alors les forces pressantes exercées par le fluide sur le solide ont une résultante, appelée <u>poussée d'Archimède</u>, opposée <u>au poids du « fluide déplacé »</u>, c'est-à-dire au poids du fluide qui occuperait le même volume que le solide.

La poussée d'Archimède s'applique au <u>centre de poussée</u> (ou de <u>carène</u>), c'est-à-dire au centre de gravité du « fluide déplacé ».

E. Tension exercée par un fil

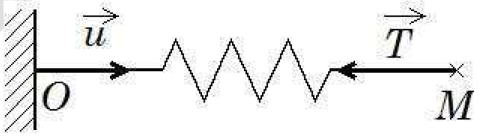


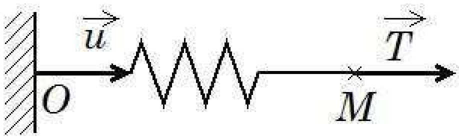
Considérons un point matériel M relié par l'intermédiaire d'un fil ***<u>inextensible</u>*** à un point O (voir figure).

- *<u>Si le fil est tendu</u>*, alors la force $\vec{T}$ exercée par le fil sur le point matériel s'écrit $\boxed{\vec{T} = -T\,\vec{u}}$ avec $\boxed{T > 0}$.
- Lorsque *<u>le fil n'est pas tendu</u>*, $\boxed{T = 0}$

F. Force de rappel élastique

Considérons un point matériel M relié par l'intermédiaire d'un ressort, de *<u>constante de raideur</u>* k et de *<u>longueur à vide</u>* ℓ_0 à un point O (voir figure).

Pour $\ell > \ell_0$,


Pour $\ell < \ell_0$,


Notons $\ell = OM$ la longueur du ressort et $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de O vers M $\left(\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}\right)$.

Alors le ressort exerce sur le point M la force $\vec{T}$ telle que :

$$\boxed{\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}}$$

Remarques :

- On appelle $\ell - \ell_0$ l'allongement du ressort, à ne pas confondre avec ℓ sa longueur.
- Cette loi est appelée loi de Hooke.
- La force est toujours orientée de telle sorte à ramener le ressort à sa position de repos (pas forcément d'équilibre), ce qui explique que l'on parle de force de rappel.

V. Exemples

A. Immobilité / équilibre

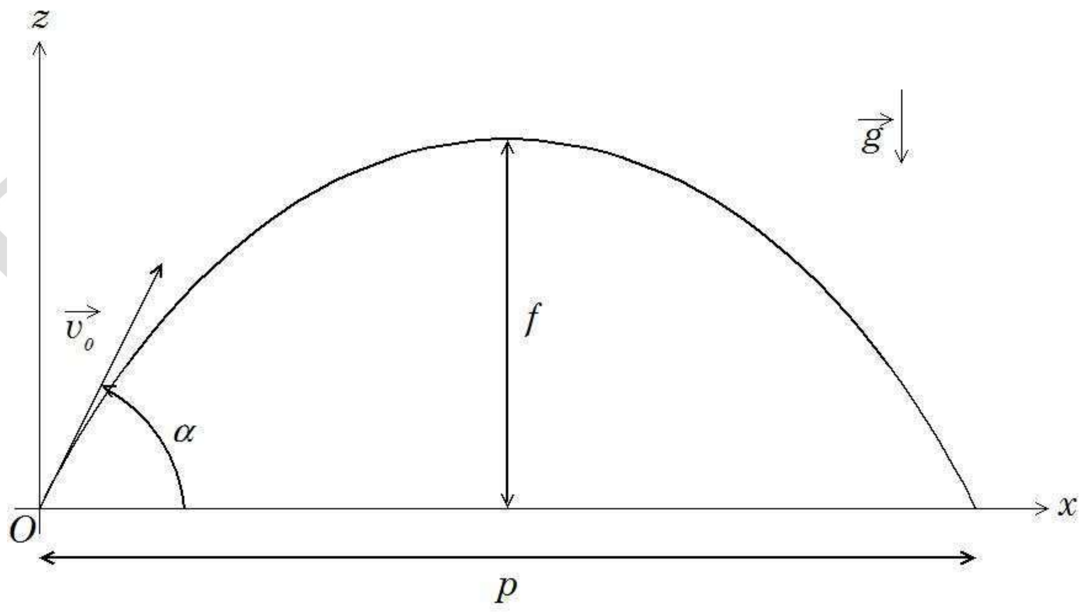
Un point matériel reste immobile lorsque sa vitesse est constamment nulle c'est-à-dire lorsque la somme des forces qui lui est appliquée est constamment nulle (ce qui signifie que sa vitesse est constante) et que la vitesse s'annule au moins à un instant donné (ce qui signifie alors qu'elle est constamment nulle).

B. Tir balistique

Soit un point matériel M de masse m.

Ce point matériel se trouve initialement à l'origine O d'un repère cartésien orthonormé direct $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ tel que le plan $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ soit horizontal et que le vecteur $\overrightarrow{u_z}$ soit vertical ascendant. Le vecteur $\overrightarrow{u_x}$ est alors choisi de telle sorte qu'initialement, la vitesse du point M vaille $\vec{v}(0) = v_0 \, cos(\alpha) \, \overrightarrow{u_x} + v_0 \, sin(\alpha) \, \overrightarrow{u_z}$ où v_0 est la norme de la vitesse initiale.

Nous considérerons l'accélération de la pesanteur, $\vec{g}$, uniforme. Les frottements seront négligés. Nous supposerons par ailleurs le référentiel terrestre galiléen.



Nous allons dans un premier temps déterminer l'équation horaire du mouvement puis en déduire la portée du tir et sa flèche.

Pour cela, appliquons la deuxième loi de Newton :

- Système : point matériel M
- Référentiel : terrestre, supposé galiléen
- Repère : $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$
- Bilan des forces :
    - Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g}$

Donc $\vec{a} = \vec{g}$. Or $\vec{a} = \ddot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$. On en déduit trois équations différentielles scalaires :

$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$ que nous allons intégrer par rapport au temps : $\begin{cases} \dot{x} = cte_{x1} \\ \dot{y} = cte_{y1} \\ \dot{z} = -gt + cte_{z1} \end{cases}$.

A l'instant initial, $\vec{v}(0) = v_0\, cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_x} + v_0\, sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_z}$ donc $\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0\, cos(\alpha) \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \dot{z}(0) = v_0\, sin(\alpha) \end{cases}$. Or $\begin{cases} \dot{x}(0) = cte_{x1} \\ \dot{y}(0) = cte_{y1} \\ \dot{z}(0) = cte_{z1} \end{cases}$. On en déduit donc que $\begin{cases} cte_{x1} = v_0\, cos(\alpha) \\ cte_{y1} = 0 \\ cte_{z1} = v_0\, sin(\alpha) \end{cases}$ puis $\begin{cases} \dot{x} = v_0\, cos(\alpha) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0\, sin(\alpha) \end{cases}$.

Intégrons à nouveau ces équations, sachant qu'à l'instant initial le point M se trouve à l'origine du repère donc que $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$: $\begin{cases} x = v_0\, cos(\alpha)t + cte_{x0} \\ y = cte_{y0} \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\, sin(\alpha)t + cte_{z0} \end{cases}$.

En utilisant les conditions initiales, $\begin{cases} cte_{x0} = 0 \\ cte_{y0} = 0 \\ cte_{z0} = 0 \end{cases}$ et donc : $\boxed{\begin{cases} x = v_0\, cos(\alpha)t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\, sin(\alpha)t \end{cases}}$.

On obtient donc l'équation d'une parabole, comme le confirme l'équation cartésienne que l'on obtient en remplaçant dans l'expression de z le temps par son expression en fonction de x : $t = \frac{x}{v_0\, cos(\alpha)}$ et donc $z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\, cos(\alpha)}\right)^2 + v_0\, sin(\alpha)\frac{x}{v_0\, cos(\alpha)}$ et finalement $z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\, cos(\alpha)}\right)^2 + tan(\alpha)\, x$.

La flèche est le point le plus haut atteint par le projectile, c'est-à-dire le maximum de z. On peut alors déterminer l'instant auquel ce maximum est atteint noté t_f en déterminant à quel instant la dérivée première de $z(t)$ s'annule. Nous avons déjà déterminé $\dot{z}(t)$ donc on en déduit immédiatement que $\dot{z}(t_f) = 0 \Leftrightarrow t_f = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$. En remplaçant dans l'expression de $z(t)$, on en déduit $f = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}\right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} = \frac{1}{2} \frac{(v_0 \sin(\alpha))^2}{g}$.

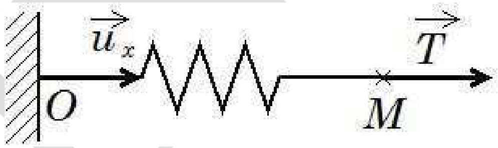
La portée est le point le plus éloigné accessible, c'est-à-dire le point tel que x soit maximum. Le sol étant considéré horizontal, cela correspondra à la valeur de x non nulle pour laquelle $z = 0$. Utilisons l'équation cartésienne de la trajectoire : $-\frac{1}{2} g \left(\frac{p}{v_0 \cos(\alpha)}\right)^2 + \tan(\alpha)\, p = 0$. Comme $p \neq 0$, $-\frac{1}{2} g \left(\frac{1}{v_0 \cos(\alpha)}\right)^2 p + \tan(\alpha) = 0$. Donc $p = \frac{2}{g} \tan(\alpha) (v_0 \cos(\alpha))^2$.

Et finalement $p = \frac{2\, v_0^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$.

C. Oscillateur élastique horizontal

Soit un point matériel M de masse m astreint à se déplacer sur une tige rectiligne horizontale, fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Ce point est relié par l'intermédiaire d'un ressort sans masse de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k à un point O qui sera choisi comme origine du repère. Nous négligerons par la suite tous les frottements.

Nous choisirons le vecteur $\overrightarrow{u_x}$ orienté suivant la tige, de O vers M et le vecteur $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant. Le vecteur $\overrightarrow{u_y}$ s'en déduit de telle sorte que le trièdre $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ soit direct.



Nous allons dans un premier temps déterminer l'équation différentielle du mouvement de M puis l'équation horaire, $x(t)$, en supposant qu'à l'instant initial, $x(0) = x_0$ et $\vec{v}(0) = v_0\, \overrightarrow{u_x}$.

Pour cela, appliquons le principe fondamental de la dynamique :

- Système : point matériel M
- Référentiel : terrestre, supposé galiléen
- Repère : $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$
- Bilan des forces :
  - Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$
  - Réaction du support : elle est normale au support donc $\vec{R} = R_y\overrightarrow{u_y} + R_z\overrightarrow{u_z}$
  - Force de rappel exercée par le ressort : $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\, \overrightarrow{u_x} = -k(x - \ell_0)\, \overrightarrow{u_x}$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$.

Le point matériel étant astreint à se déplacer sur l'axe (Ox), $\overrightarrow{OM} = x\, \overrightarrow{u_x}$ donc $\vec{v}(M) = \dot{x}\, \overrightarrow{u_x}$ puis $\vec{a}(M) = \ddot{x}\, \overrightarrow{u_x}$. On peut en déduire trois équations scalaires :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) \\ 0 = R_y \\ 0 = R_z - mg \end{cases}$$

Seule la première nous intéresse pour trouver l'équation différentielle du mouvement (les deux autres permettant de déterminer la réaction du support) : $m\ddot{x} + kx = k\,\ell_0$.

Posons $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ la ***pulsation propre*** du système. On peut alors écrire :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\,\ell_0}$$

Pour déterminer $x(t)$, il suffit de résoudre (on dit aussi intégrer) cette équation. Comme le second membre n'est pas nul, la solution de l'équation différentielle sera la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation sans second membre : $x(t) = x_{SP}(t) + x_{SGEH}(t)$.

La solution générale de l'équation homogène s'écrit $x_{SGEH}(t) = A\,cos(\omega_0 t) + B\,sin(\omega_0 t)$:.

Le second membre de l'équation étant constant, cherchons pour solution une fonction constante. Sa dérivée est alors nulle donc $\omega_0^2 x_{SP}(t) = \omega_0^2\,\ell_0$ et donc $x_{SP}(t) = \ell_0$.

On en déduit que $x(t) = A\,cos(\omega_0 t) + B\,sin(\omega_0 t) + \ell_0$.

Utilisons à présent les conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration, A et B : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.

En reprenant l'expression de $x(t)$, on obtient : $x(0) = A + \ell_0$. Don$x_0 = A + \ell_0$ et finalement $A = x_0 - \ell_0$.

Pour utiliser la seconde condition initiale portant sur la dérivée de $x(t)$ à l'instant initial, dérivons $x(t)$: $\dot{x}(t) = -A\omega_0\,sin(\omega_0 t) + B\omega_0\,cos(\omega_0 t)$. Donc $\dot{x}(0) = B\omega_0$ donc $B = \frac{v_0}{\omega_0}$.

Pour conclure,

$$\boxed{x(t) = (x_0 - \ell_0)\,cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\,sin(\omega_0 t) + \ell_0}$$

D. Point matériel sur un cylindre

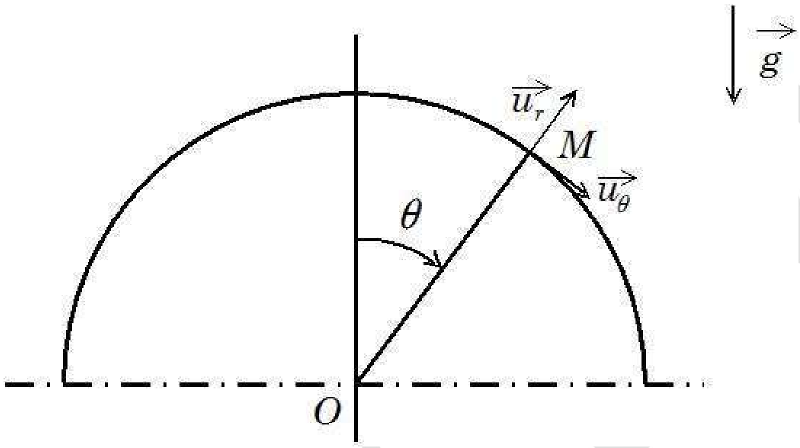
Soit un point matériel M de masse m initialement au sommet d'un hémi-cylindre de rayon R et d'axe Oz horizontal, fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen (voir figure). Nous négligerons par la suite tous les frottements.

A l'instant initial, le point matériel subit une légère perturbation lui faisant quitter le sommet du cylindre avec une vitesse initiale que nous considérerons nulle.

Déterminons :

1. L'équation différentielle du mouvement ;
2. L'expression de $\dot{\theta}^2$;
3. L'expression de la réaction du support en fonction de θ ;
4. L'angle pour lequel le point matériel décolle éventuellement.

Compte-tenu des symétries du problème, nous utiliserons les coordonnées cylindriques :



Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

- Système : point matériel M
- Référentiel : terrestre, supposé galiléen
- Repère : $(\overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{u_\theta},\ \overrightarrow{u_z})$
- Bilan des forces :
    - Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg(-cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} + sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta})$ (attention, $\overrightarrow{u_z}$ n'est pas vertical !)
    - Réaction du support : elle est normale au support donc $\vec{R} = R_r\overrightarrow{u_r}$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{R}$.

En coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$.

Donc $\vec{v}(M) = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$ puis $\vec{a}(M) = -R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$.

On peut en déduire trois équations scalaires :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = R_r - mg\,cos(\theta) \\ mR\ddot{\theta} = mg\,sin(\theta) \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

La troisième équation, après une double intégration par rapport au temps, permet de montrer que $z = 0$ et donc que le mouvement est plan.

La deuxième équation peut être réécrite : $\boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\, sin(\theta) = 0}$, équation différentielle du mouvement vérifiée par θ.

Pour en déduire $\dot{\theta}^2$, nous allons multiplier cette équation par $\dot{\theta}$ avant d'intégrer par rapport au temps : $\dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\, \dot{\theta} sin(\theta) = 0$. En prenant une primitive de cette équation, on obtient :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R}\, cos(\theta) = cte$$

La constante d'intégration peut être déterminée à l'aide des conditions initiales : $\dot{\theta}(0) = 0$ (puisque la vitesse initiale est supposée nulle) et $\theta(0) = 0$ (puisque le point matériel part du sommet du cylindre). Donc $\frac{g}{R} = cte$. Et donc :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\big(1 - cos(\theta)\big)}$$

La première équation permet de déterminer la réaction du support :

$R_r = -mR\dot{\theta}^2 + mg\, cos(\theta) = mg\, cos(\theta) - 2mg\big(1 - cos(\theta)\big)$

Donc $\boxed{R_r = mg(3\, cos(\theta) - 2)}$.

Le point matériel quitte le support lorsque la réaction du support s'annule : $R_r = 0$

Donc pour $3\, cos(\theta) - 2 = 0$, c'est-à-dire pour un angle θ_d défini par :

$$\boxed{\theta_d = Arccos\left(\frac{2}{3}\right)}$$

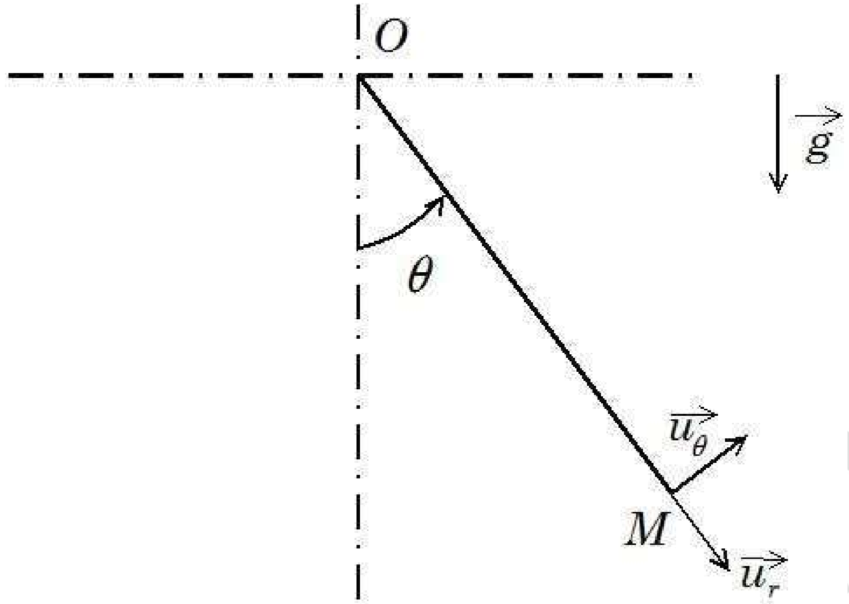
Numériquement, on obtient $\theta_d = 48{,}2°$.

E. Pendule synchrone

Soit un point matériel M de masse m attaché par l'intermédiaire d'un fil sans masse, inextensible de longueur ℓ (supposé tendu ici) à un point O dans le référentiel terrestre que nous supposerons galiléen. Nous négligerons par la suite tous les frottements.

Le point matériel est lâché sans vitesse initiale depuis un angle θ_0.

Déterminons l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $\theta(t)$.
Compte-tenu des symétries du problème, nous utiliserons les coordonnées polaires (voir figure), le mouvement étant plan (aucune force ne s'exerce suivant $\overrightarrow{u_z}$ et la vitesse initiale n'a aucune composant suivant $\overrightarrow{u_z}$).



Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

- Système : point matériel M
- Référentiel : terrestre, supposé galiléen
- Repère : $(\overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{u_\theta},\ \overrightarrow{u_z})$
- Bilan des forces :
    - Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg(cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} - sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta})$ (attention, $\overrightarrow{u_z}$ n'est pas vertical !)
    - Tension du fil : $\vec{T} = -T\,\overrightarrow{u_r}$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{T}$.

En coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{OM} = \ell\,\overrightarrow{u_r}$.

Donc $\vec{v}(M) = \ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ puis $\vec{a}(M) = -\ell\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + \ell\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$.

On peut en déduire trois équations scalaires :

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = -T + mg\,cos(\theta) \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\,sin(\theta) \end{cases}$$

La deuxième équation peut être réécrite : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,sin(\theta) = 0}$, équation différentielle du mouvement vérifiée par θ.

Déterminons l'équation horaire du mouvement, à savoir $\theta(t)$ dans le cas où $\theta_0 \ll 1$.

On a alors $\theta \ll 1$ donc $sin(\theta) \approx \theta$ et l'équation différentielle devient donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$.

Posons $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$ la pulsation propre du pendule.

On peut alors réécrire l'équation différentielle : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ équation différentielle du second ordre à coefficients constants dont la solution s'écrit : $\theta(t) = A\,cos(\omega_0 t) + B\,sin(\omega_0 t)$

Or $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ donc $A = \theta_0$ et $B = 0$.

Donc $\boxed{\theta(t) = \theta_0\,cos(\omega_0 t)}$.

Table des matières

I. Définitions 1

A. Masse 1

B. Quantité de mouvement 1

C. Force 1

II. Lois de Newton 2

A. Première loi : principe de l'inertie 2

B. Deuxième loi : principe fondamental de la dynamique 2

C. Troisième loi : loi de l'action et de la réaction 2

III. Principe de relativité de Galilée 2

IV. Exemples de forces 3

A. Réaction du support 3

B. Frottements 3

1. Frottements fluides 3

2. Frottements solides 3

C. Forces d'interaction 4

1. Gravitationnelle 4

2. Coulombienne 4

D. Poussée d'Archimède (aperçu) 5

E. Tension exercée par un fil 5

F. Force de rappel élastique 5

V. Exemples 6

A. Immobilité / équilibre 6

B. Tir balistique 6

C. Oscillateur élastique horizontal 8

D. Point matériel sur un cylindre 9

E. Pendule synchrone 11