Devoir de Maison: Topologie sur les EVN

Classe SM 6

-Partie (I) Complétude des EVN-

Soit $\Big(E, \|.\|\Big)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
.(1) Montrer que si $(u_n)_n$ est convergente, alors elle vérifie la propriété (SC) suivante:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{tq} \quad \forall n, p \in \mathbb{N}, \quad n > p \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - u_p\| \leq \varepsilon. \qquad (SC)$$

.(2) Montrer que si $(U_n)_n$ vérifie (SC) et si elle possède une sous suite convergente, alors elle est convergente.
.(3) Montrer que si $(u_n)_n$ vérifie (SC), alors elle est bornée.
.(4) Déduire alors que si de plus E est de dimension finie et si $(u_n)_n$ vérifie (SC), alors $(u_n)_n$ est convergente.
On dispose alors de cette équivalence en dimension finie:

$$(u_n)_n \quad \text{est convergente} \quad \Leftrightarrow (u_n)_n \quad \text{vérifie} \quad (SC) \qquad (\mathcal{P}).$$

NB: On note qu'il existe aussi des espaces vectoriels normés de dimension infinie sur les quels l'équivalence $(\mathcal{P})$ est vérifiée. Tout espace vectoriel normé vérifiant l'équivalence $(\mathcal{P})$ est appelé espace **Complet**.

.(5) Montrer que si $\Big(E, \|.\|\Big)$ est un evn complet, alors tout sev fermé de E est complet.

.(6) **caractérisation par les séries absolument convergentes**:
On se propose dans ce qui suit de prouver l'équivalence suivante:

Un evn E est complet $\Leftrightarrow$ Toute série absolument convergente dans E est convergente.

.(a) Montrer le sens direct en considérant la somme partielle de cette série.
.(b) Pour le sens indirect, notons $\Big(E, \|.\|\Big)$ un evn sur lequel toute série absolument convergente est convergente. Montrons qu'il est complet. Soit $\Big(u_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E vérifiant (SC). On construit une suite d'indices $\Big(n_k\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ par $n_0 = 1$ et

$$\forall k \geq 1, \quad n_k = \inf\Big\{n > n_{k-1}, \quad \text{tq} \quad \forall p, q \geq n, \quad \|u_p - u_q\| \leq 2^{-k}\Big\}.$$

.(i) Montrer que cette suite d'indices est bien définie.
.(ii) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n-k\geq 0} \Big(u_{n_k} - u_{n_{k+1}}\Big)$ converge absolument.
.(iii) Conclure.
(7). Soit $\Big(E, \|.\|\Big)$ un evn complet et soit $f : E \to E$ une contraction sur E. Montrer que f possède un unique point fixe dans E. On se servira de la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$x_0 \in E \quad \text{donné} \quad \text{et} \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

-Partie (II)-

Application: Une classe particulière de fonctions continues $2\pi-$périodiques sur $\mathbb{R}$

-(I) On commence par présenter l'une des applications fondamentales de la complétude, il s'agit du

Lemme de Baire:
Soit $\Big(E, \|.\|\Big)$ un evn complet, alors la propriété suivante est réalisée

- $(\mathcal{Q})$: Si $\Big(\mathcal{A}_n\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite **d'ouverts non vides denses** dans E, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{A}_n$ est dense dans E.

En effet, notons $G = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{A}_n$. On montre que G rencontre toute boule ouverte de E donc également tout ouvert de E. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de E, et soit $x_0 \in \mathcal{O}$, donc $\exists r_0 > 0$ tel que $B(x_0, r_0) \subset \mathcal{O}$.
.(1) Montrer qu'il existe $x_1 \in E$ et $r_1 > 0$ tel que $Bf(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap \mathcal{A}_1$. r_1 peut être choisi tel que $r_1 < \dfrac{r_0}{2}$.

On construit ainsi une suite $\Big(x_n\Big)_n$ d'éléments de E et une suite $\Big(r_n\Big)_n$ de nombres réels strictement positifs vérifiant $Bf(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap \mathcal{A}_{n+1}$ et $r_{n+1} < \dfrac{r_n}{2}$.
.(2) Déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \Big\|x_{n+1} - x_n\Big\|$ est convergente.
.(3) Déduire alors que $G \cap \mathcal{O}$ est différent du vide et conclure.

-(II) On considère maintenant deux evn $\Big(E, \|.\|\Big)$ et $\Big(F, \|.\|\Big)$. On rappelle que si T est une application linéaire continue de E dans F, alors sa norme subordonnée est définie par

$$|||T||| = \sup_{x\in B_f(0,1)} \|T(x)\|_F = \sup_{x\in S(0,1)} \|T(x)\|_F.$$

On suppose que E est complet, E vérifie donc la propriété $(\mathcal{Q})$. On admet que cette propriété entraîne le résultat suivant: **(The uniform Boundedness Principle)**
Soit I une famille quelconque, et soit $\Big(Ti\Big)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F, alors, on a deux alternatives:

- Soit $\Big\{|||Ti|||, \quad i \in I\Big\}$ est borné.
- Soit $\exists x \in E$ tel que $\sup\limits_{i\in I} \|Ti(x)\|_F =_+ \infty$.

Dans tout ce qui suit, on considère l'evn $\Big(\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty\Big)$ et on admet qu'il est complet. Soit $E = \mathcal{C}_{2\pi}$ l'evn des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ muni de la norme infinie; $\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = \sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$.
.(1) En se servant de la question (5) de la partie (I), montrer que E est complet.

Pour tout $f \in E$ et pour tous $k \in \mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose:

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \qquad T_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f).$$

.(2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, T_n est une forme linéaire sur E.

.(3) Montrer que la fonction $\psi : t \mapsto \dfrac{\sin\Big((n+\frac{1}{2})t\Big)}{\sin(\frac{t}{2})}$ est prolongeable par continuité sur $[-\pi, \pi]$.

.(4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $\forall t \in [-\pi, \pi]$

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \psi(t).$$

.(5) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $f \in B_f(0,1)$ de E:

$$|T_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big|D_n(t)\Big| dt.$$

.(6) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est une forme linéaire continue sur E et que

$$|||T_n||| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big|D_n(t)\Big| dt.$$

.(7) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r > 0$ et $t \in [-\pi, \pi]$, on pose

$$f_r(t) = \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + r}.$$

.(a) Vérifier que D_n est 2π-périodique et déduire que $f_r \in E$.

.(b) Montrer que $\lim\limits_{r \to 0^+} |T_n(f_r)| = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Big|D_n(t)\Big| dt.$

.(c) Conclure alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |||T_n||| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big|D_n(t)\Big| dt.$$

.(8) (a) Montrer par comparaison avec une série que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(y)|}{y} dy$ diverge.

.(b) En considérant une propriété de concavité de la fonction sin, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$|||T_n||| \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(y)|}{y} dy.$$

.(c) Déduire que: $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} |||T_n||| = +\infty$.

.(8) Conclure en considérant la question (1), qu'il existe une fonction $f_* \in E$ telle que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} |T_n(f_*)| = +\infty. \qquad \circledast$$

Conclusion: Si on pose, $S_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ et $f \in E$. On a donc $T_n(f) = S_n(f)(0)$, la suite de fonctions $(S_n)_n$ est appelée somme partielle de la série de Fourier de f, cette série est donnée par $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$. Le résultat $\circledast$ prouve que la somme partielle de la série de Fourier de f_* en 0 ne converge pas vers $f_*(0)$ et donc f_* ne peut pas être somme de sa série de Fourier. f_* fait donc partie d'une classe de fonctions continues et 2π-périodiques qui ne sont pas somme de leur séries de Fourier pour la convergence simple.