Travail, puissance, énergie

I. Travail et puissance d'une force

A. Travail d'une force

Soit une force $\vec{F}$ s'exerçant sur un point M mobile dans un référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ pendant un intervalle de temps infinitésimal dt. Le ***travail élémentaire*** δW exercé par la force $\vec{F}$ sur le point M s'écrit alors :

$$\boxed{\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \vec{F}.\vec{v}(M/\mathcal{R})\,dt}$$

Lorsque le point M passe d'une position M_1 à une position M_2 quelconques, le travail total fourni par la force $\vec{F}$ s'écrit :

$$\boxed{W_{1\to 2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\overrightarrow{OM}}$$

Si $W < 0$ alors il est dit ***résistant***.

Si $W > 0$ alors il est dit ***moteur***.

Le travail est homogène à une énergie : son unité est donc le Joule (J).

Le travail est en fait un *transfert d'énergie* : a priori, il dépend du chemin emprunté par le point matériel sur lequel s'exerce la force pour passer d'une position à une autre.

Par ailleurs, le travail ne peut être défini que pour un déplacement et jamais en une position donnée : *le travail n'est pas une fonction d'état*, ce qui explique l'utilisation pour un travail élémentaire, de la notation « δ » et jamais « d ».

B. Puissance d'une force

Avec les mêmes notations, on définit la puissance d'une force par :

$$\boxed{P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}.\vec{v}(M/\mathcal{R})}$$

L'unité de puissance est le Watt (W).

II. Energie potentielle

A. Forces conservatives ou non

1. Forces conservatives

Pour certaines forces, le travail exercé lors d'un déplacement quelconque (d'une position M_1 à une position M_2 quelconques) entre deux instants t_1 et t_2 est indépendant du chemin réellement suivi par le point matériel pour passer de M_1 à M_2 mais ne dépend que des états initial et final : ces forces sont dites ***conservatives***.

Pour une force conservative, on peut définir une ***fonction scalaire du point, appelée énergie potentielle***, telle que le travail exercé par la force sur le point M lors du déplacement soit égal à l'opposé de la variation de cette fonction entre les points de départ et d'arrivée (le travail de la force lors du déplacement ne dépend que des positions initiale et finale) :

$$\boxed{W_{1\to 2} = -\left(E_p(M_2) - E_p(M_1)\right) = -\Delta E_p}$$

Pour un déplacement infinitésimal,

$$\boxed{dE_p = -\delta W = -\vec{F}.d\overrightarrow{OM}}$$

La différence de notation (*d* ou *δ*, *Δ* ou *rien*) est due au fait que l'énergie potentielle est une fonction d'état (qui est définie pour une position du point *M* donnée) alors que le travail est un transfert d'énergie et n'a de sens que pour un déplacement et en aucun pour une position du point *M* donnée.

On parle donc de :

- dE_p : c'est à la fois une variation infinitésimale et la différentielle de la fonction énergie potentielle
- δW : travail élémentaire
- ΔE_p : variation d'énergie potentielle, signifiant seulement $E_p(M_2) - E_p(M_1)$
- W : travail

Propriété : **le travail d'une force conservative le long d'un parcours fermé est nul**.

En effet, $W_{A\to A} = \oint \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = E_p(A) - E_p(A) = 0$. Cette propriété peut être utilisée comme définition d'une force conservative.

Remarque : on dit d'une force conservative qu'elle dérive d'une énergie potentielle.

2. Forces non conservatives : exemple

Par opposition aux forces conservatives, les forces non conservatives sont des forces dont le travail dépend du chemin suivi pour passer de la position initiale à la position finale ; c'est notamment le cas des forces de frottement.

Si l'on s'intéresse par exemple aux frottements fluides (visqueux), il est simple de montrer que cette force $\left(\vec{f} = -\lambda\, \vec{v}(M/\mathcal{R})\right)$ n'est pas conservative. En effet,

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{f}.d\overrightarrow{OM} = \int_A^B \vec{f}.\vec{v}(M/\mathcal{R})\, dt = -\lambda \int_A^B v^2(M/\mathcal{R})\, dt < 0$$

Ainsi, la force de frottement fluide exerce toujours un travail résistant ($W_{A\to B} < 0$).

B. Exemples d'énergie potentielle

1. Energie potentielle de pesanteur

Soit un point matériel M de masse m soumis à l'attraction terrestre qui se caractérise par le poids, $\vec{P} = m\vec{g}$. Nous supposerons l'accélération de la pesanteur uniforme, c'est-à-dire que la dépendance de $\vec{g}$ avec l'altitude sera négligée.

Notons $\overrightarrow{u_z}$ le vecteur unitaire ***vertical ascendant***.

On peut alors écrire : $\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$.

Montrons que la force de pesanteur est une force conservative et déterminons l'énergie potentielle dont elle dérive.

Pour cela, intéressons nous au travail élémentaire exercé par le poids au cours d'un déplacement infinitésimal :

$\delta W = \vec{P}.d\overrightarrow{OM} = -mg\overrightarrow{u_z}.\left(dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z}\right) = -m\,g\,dz$

Or m et g sont des constantes donc $\delta W = -d(m\,g\,z)$

On peut donc définir une fonction énergie potentielle, E_p, telle que $\delta W = -dE_p$ et donc $dE_p = d(m\,g\,z)$ puis, après intégration, $E_p(z) = m\,g\,z + cte$.

Il en résulte que le poids est une force conservative et que l'énergie potentielle dont elle dérive peut s'écrire :

$$\boxed{E\ \ (z) = m\,g\,z + cte}$$

Avec $\overrightarrow{u_z}$ le vecteur unitaire ***vertical ascendant***. (ce qui signifie que z correspond à l'altitude)

Si le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_z}$ est ***vertical descendant*** (z correspond alors à la profondeur), alors

$$\boxed{E\ \ (z) = -m\,g\,z + cte}$$

Ces deux expressions peuvent être résumées en une seule :

$$\boxed{E\ \ (z) = -m\,\vec{g}.\overrightarrow{u_z}\,z + cte}$$

Remarque : **l'énergie potentielle étant définie par intégration, elle l'est toujours à une constante additive près**, qui sera choisie, non pas en fonction d'éventuelles conditions initiales mais en fonction de considérations soit physiques, soit liées au problème. Nous verrons par ailleurs que la constante d'intégration n'a pas toujours besoin d'être déterminée, loin de là.

2. Energie potentielle élastique

Considérons un point matériel M relié par l'intermédiaire d'un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 à un point O (voir figure).

Notons $\ell = OM$ la longueur du ressort et $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de O vers M $\left(\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}\right)$.

Alors le ressort exerce sur le point M la force $\vec{T}$ telle que $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$

Montrons que la force de rappel élastique est une force conservative et déterminons l'énergie potentielle dont elle dérive.

Pour cela, intéressons nous au travail élémentaire exercé par cette force au cours d'un déplacement infinitésimal :

$\delta W = \vec{T}.d\overrightarrow{OM} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}.(d\ell\,\vec{u} + \ell\,d\vec{u}) = -k(\ell - \ell_0)d\ell - k(\ell - \ell_0)\,\ell\,\vec{u}.d\vec{u}$

Or $\vec{u}.d\vec{u} = \frac{1}{2}d(\vec{u}.\vec{u}) = 0$ car $\vec{u}.\vec{u} = 1$, le vecteur $\vec{u}$ étant un vecteur unitaire.

Donc $\delta W = -k(\ell - \ell_0)d\ell = -d\left(\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2\right) = -dE_p$

Donc on peut définir une fonction énergie potentielle telle que $E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + cte$. Le travail ne dépendant pas du chemin suivi, la force est bien conservative.

La force de rappel élastique est donc conservative et dérive de l'énergie potentielle :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + cte}$$

Remarque : la force de rappel élastique étant nulle lorsque la longueur du ressort est égale à la longueur à vide, on choisit fréquemment la constante d'intégration nulle ce qui correspond à une énergie potentielle nulle lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide.

III. Energie cinétique – énergie mécanique

A. Energie cinétique

Soit un point M de masse m mobile dans un référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$. On peut alors définir son énergie cinétique, $E_c(M/\mathcal{R})$ par :

$$\boxed{E_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}mv^2(M/\mathcal{R})}$$

B. Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Soit un point M de masse m mobile dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen soumis à des forces dont nous noterons la résultante $\sum \vec{F}$. Montrons que pour un déplacement infinitésimal $d\overrightarrow{OM}$, sa variation infinitésimale d'énergie cinétique est égale au travail élémentaires des forces.

Pour cela, partons de la somme des travaux élémentaires des forces s'exerçant sur le point matériel :

$$\sum \delta W = \sum (\vec{F}.d\overrightarrow{OM}) = \left(\sum \vec{F}\right).d\overrightarrow{OM}$$

Or, d'après la deuxième loi de Newton, dans un référentiel galiléen, $\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$. Donc

$$\sum \delta W = \left(m\frac{d\vec{v}}{dt}\right).d\overrightarrow{OM} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.d\overrightarrow{OM} = m\, d\vec{v}.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = m\,\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}.d\vec{v} = m\,\vec{v}.d\vec{v}$$

Or $\vec{v}.d\vec{v} = \frac{1}{2}d(\vec{v}.\vec{v}) = \frac{1}{2}d(v^2) = d\left(\frac{1}{2}v^2\right)$. Donc

$$\sum \delta W = md\left(\frac{1}{2}v^2\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dE_c$$

Remarque : $\sum \delta W = \sum(\vec{F}.d\overrightarrow{OM}) = (\sum \vec{F}).d\overrightarrow{OM} = \delta(\sum W)$, ce qui signifie que la somme des travaux des forces est égale au travail de la somme des forces.

Le théorème de l'énergie cinétique peut donc se résumer ainsi :

Dans un référentiel ***galiléen***,

- pour un déplacement infinitésimal, δW étant le travail de toutes les forces s'exerçant sur le point matériel,

$$\boxed{dE_c = \delta W}$$

  On parle parfois de forme différentielle du théorème.
- pour un déplacement quelconque, d'une position M_1 à une position M_2, $W_{1\to 2}$ étant le travail de toutes les forces s'exerçant sur le point matériel,

$$\boxed{\Delta E_c = E_c(M_2) - E_c(M_1) = W_{1\to 2}}$$

La seconde expression est obtenue par intégration de la première entre les positions M_1 et M_2.

Remarque : ce théorème est le point de départ de tous les théorèmes énergétiques et permet de tous les démontrer mais il n'est que rarement utilisé dans les exercices.

C. Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Nous venons de montrer (en conservant les mêmes notations et hypothèses) que, dans un référentiel galiléen, $dE_c = \delta W$.

Donc $\frac{dE_c}{dt} = \frac{\delta W}{dt} = P$ où $\boldsymbol{P}$ **est la puissance de toutes les forces s'exerçant sur le point matériel (ou la somme des puissances de ces mêmes forces).**

Dans un référentiel galiléen,

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P}$$

Ce théorème (de la puissance cinétique) est utilisable pour déterminer l'équation différentielle mais on lui préfèrera généralement le théorème de la puissance mécanique.

D. Energie mécanique et théorèmes de l'énergie mécanique (TEM) et de la puissance mécanique (TPM)

1. Définition de l'énergie mécanique

Reprenons le théorème de l'énergie cinétique : dans un référentiel galiléen, $dE_c = \delta W$.

Nous pouvons séparer le travail des forces en deux termes :

- Le travail des forces non conservatives, noté δW_{nc} ;
- Le travail des forces conservatives, noté δW_c opposé à la variation élémentaire d'énergie potentielle dont dérive la somme des forces non conservatives : $\delta W_c = -dE_p$.

Le théorème de l'énergie cinétique devient alors $dE_c = \delta W = \delta W_{nc} + \delta W_c = \delta W_{nc} - dE_p$.

Donc $dE_c + dE_p = \delta W_{nc}$ puis $d\left(E_c + E_p\right) = \delta W_{nc}$.

On définit alors l'énergie mécanique par :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p}$$

2. Théorème de l'énergie mécanique

Nous venons de voir que d'une part $d\left(E_c + E_p\right) = \delta W_{nc}$ et d'autre part $E_m = E_c + E_p$.

On en déduit aussitôt le théorème de l'énergie mécanique, dans un référentiel galiléen,

$$\boxed{dE_m = \delta W_{nc}}$$

Où δW_{nc} représente le travail élémentaire de la somme des forces non conservatives (ou la somme des travaux des forces non conservatives).

Pour un déplacement quelconque, d'une position M_1 à une position M_2, $W_{nc1\to 2}$ étant le travail de toutes les forces non conservatives s'exerçant sur le point matériel, dans un référentiel galiléen, le théorème de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\boxed{\Delta E_m = E_m(M_2) - E_m(M_1) = W_{nc1\to 2}}$$

3. Théorème de la puissance mécanique

Reprenons le théorème de l'énergie mécanique, sous sa forme différentielle, $dE_m = \delta W_{nc}$ et divisons par dt. On obtient : $\frac{dE_m}{dt} = \frac{\delta W_{nc}}{dt} = P_{nc}$ où ***P_{nc} représente la somme des puissances des forces non conservatives (ou la puissance de la somme des forces non conservatives).***

Le théorème de la puissance mécanique s'écrit alors, dans un ***référentiel galiléen***,

$$\boxed{\boxed{\frac{dE_m}{dt} = P_{nc}}}$$

Remarque : ce théorème est, très, très, très utile pour déterminer l'équation différentielle du mouvement.

IV. Problèmes à un degré de liberté

Dans toute cette partie, nous nous intéresserons au mouvement d'un point matériel M, de masse m mobile dans un référentiel supposé galiléen $\mathcal{R}$.

Nous supposerons que son mouvement ne dépend que d'une variable, que nous noterons q (q peut représenter un angle, une abscisse, une cote…) et qui permet donc de définir parfaitement la position du point M.

Nous supposerons de plus que le point matériel M n'est soumis qu'à des forces conservatives.

A. Conservation de l'énergie mécanique et intégrale première du mouvement (IPM)

Le point M n'étant soumis qu'à des forces conservatives, le théorème d'énergie mécanique s'écrit : $dE_m = 0$. En intégrant cette relation, on en déduit que $E_m = cte$, la constante étant déterminée par les conditions initiales : on dit qu'***il y a conservation de l'énergie mécanique***.

L'équation de conservation de l'énergie mécanique,

$$\boxed{E_m = cte}$$

est appelée ***intégrale première du mouvement***.

Remarque : l'intégrale première du mouvement, après dérivation, mène à l'équation différentielle du mouvement, ce qui explique son nom. Par ailleurs, cela signifie qu'en dérivant l'intégrale première du mouvement, on retrouve le résultat obtenu en appliquant le théorème de la puissance mécanique. L'intégrale première du mouvement est très utile car, en plus de fournir l'équation différentielle du mouvement, elle permet, comme nous le verrons dans des exemples, d'exprimer directement $\dot{q}^2$ en fonction de q, ce qui peut servir pour exprimer les forces telles que réaction du support ou tension d'un fil uniquement en fonction de q et non de ses dérivées temporelles.

B. Mouvement à énergie mécanique constante

1. Etude graphique

Par définition, $E_m = E_c + E_p$.

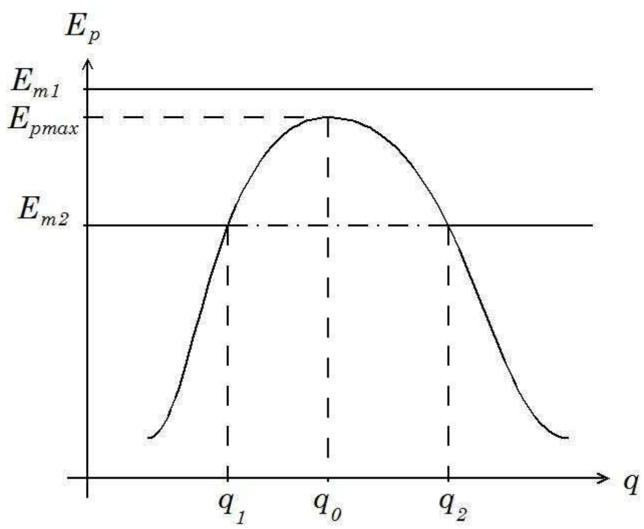
Or $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$.

Donc le mouvement n'est possible que si $E_m \geq E_p$.

Deux cas sont envisageables (éventuellement localement) : soit une barrière de potentiel, soit un puits de potentiel.

Etudions graphiquement ces deux cas :

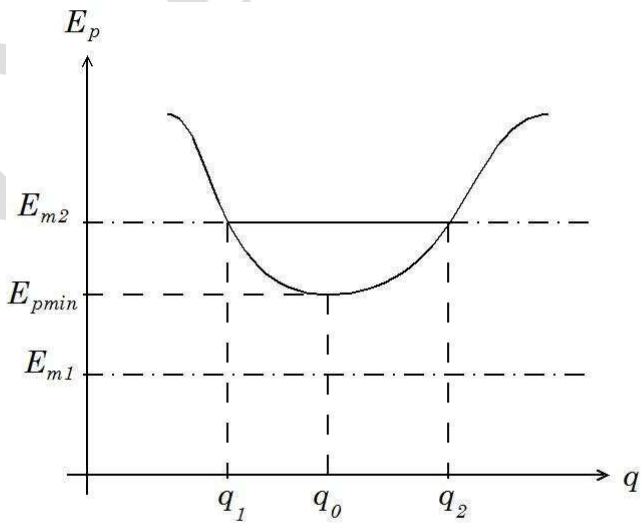
a) Barrière d'énergie potentielle



Si $E_m \geq E_{pmax}$, alors toutes les valeurs de q sont possibles (cas E_{m1}).

Si $E_m < E_{pmax}$, alors il apparait un intervalle de valeurs de q impossibles (cas E_{m2}), $]q_1, q_2[$. Le point matériel ne pourra pas franchir cette barrière d'énergie potentielle : suivant les conditions initiales, le point matériel se déplacera dans l'intervalle $q \leq q_1$ ou $q \geq q_2$. Le point matériel se trouve dans un *état libre* (ou de diffusion).

b) Puits d'énergie potentielle



Si $E_m < E_{pmin}$, alors toutes les valeurs de q sont impossibles (cas E_{m1}). Ce cas est impossible.

Si $E_m \geq E_{pmin}$, alors il apparait un intervalle de valeurs de q possibles (cas E_{m2}), $[q_1, q_2]$. Le point matériel ne pourra pas sortir de ce puits d'énergie potentielle : le point matériel se trouve dans un *état lié*.

Remarque : si $E_m = E_{pmin}$, alors $q = q_0$. Cela ne signifie pas forcément que le point matériel est immobile (il peut, par exemple, avoir un mouvement circulaire si la variable est r)

2. Equilibre et stabilité

L'énergie potentielle est une fonction de la seule variable q. Nous avons par ailleurs vu que, par définition de l'énergie potentielle, en notant $\vec{F}$ la somme de toutes les forces conservatives, $dE_p = -\vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -F(q)\,dq$, puisque l'énergie potentielle (et donc la force) ne dépend que de q. Donc $F(q) = \frac{dE_p}{dq}$ (ce qui explique que l'on dise que la force dérive d'une énergie potentielle : ce n'est pas une dérivation temporelle mais spatiale).

Soit q_0 la valeur de la variable pour laquelle le système est en équilibre.

Effectuons un développement de Taylor de la valeur algébrique de la force au voisinage de q_0 : $F(q) = F(q_0) + (q - q_0)\frac{dF}{dq}(q_0) + o\big((q - q_0)\big)$

q_0 est une position d'équilibre donc $F(q_0) = 0$. Or $F(q) = \frac{dE_p}{dq}$. Donc $\frac{dE_p}{dq}(q_0) = 0$.

q_0 est une position d'équilibre stable si, lorsque le point matériel en étant écarté, la force le ramène vers cette position d'équilibre, c'est-à-dire si elle se comporte comme une force de rappel. Or $F(q) = (q - q_0)\frac{dF}{dq}(q_0) + o\big((q - q_0)\big)$. Il faut donc que $\frac{dF}{dq}(q_0) < 0$ et, comme $F(q) = \frac{dE_p}{dq}$, il faut que $\frac{d^2E_p}{dq^2}(q_0) > 0$. Ces deux conditions signifient que, pour une position d'équilibre stable, l'énergie potentielle doit présenter un minimum local (cas du puits de potentiel). On peut procéder de manière similaire pour une position d'équilibre instable (cas de la barrière de potentiel).

En résumé,

- ***q_0 est une position d'équilibre stable si l'énergie potentielle y présente un minimum local***. Donc si :

$$\boxed{\frac{dE_p}{dq}(q_0) = 0} \quad et \quad \boxed{\frac{d^2E_p}{dq^2}(q_0) > 0}$$

- ***q_0 est une position d'équilibre instable si l'énergie potentielle y présente un maximum local (ou présente un point d'inflexion)***. Donc si :

$$\boxed{\frac{dE_p}{dq}(q_0) = 0} \quad et \quad \boxed{\frac{d^2E_p}{dq^2}(q_0) \leq 0}$$

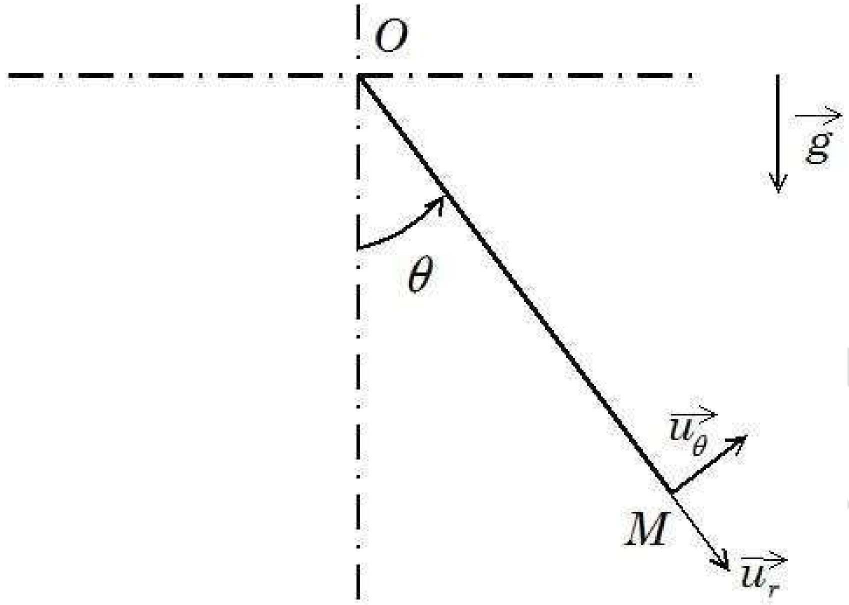
C. Exemple : pendule

1. Sans frottement

Soit un point matériel M de masse m attaché par l'intermédiaire d'un fil sans masse, inextensible de longueur ℓ (supposé tendu ici) à un point O dans le référentiel terrestre que nous supposerons galiléen. Nous négligerons par la suite tous les frottements.

Le point matériel est lâché sans vitesse initiale depuis un angle θ_0.

Déterminons l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $\theta(t)$.
Compte-tenu des symétries du problème, nous utiliserons les coordonnées polaires (voir figure), le mouvement étant plan (aucune force ne s'exerce suivant $\overrightarrow{u_z}$ et la vitesse initiale n'a aucune composant suivant $\overrightarrow{u_z}$).



Comme nous négligeons les frottements, nous pouvons utiliser l'intégrale première du mouvement. En conséquence, dans l'inventaire des forces, nous n'écrirons plus leur projection mais leur travail ou l'énergie potentielle dont elle dérive.

- Système : point matériel M
- Référentiel : terrestre, supposé galiléen
- Repère : $(\overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{u_\theta},\ \overrightarrow{u_z})$
- Bilan des forces :
  - Poids : $\vec{P}$. $E_{pp} = -mg\ell\, cos(\theta) + cte$
  - Tension du fil : $\vec{T} = -T\,\overrightarrow{u_r} \perp \vec{v}$, donc de travail nul.

Le système n'est soumis qu'à des forces conservatives ou de travail nul donc l'énergie mécanique se conserve : $E_m = E_c + E_p = cte'$

Déterminons l'énergie cinétique en fonction de θ et de ses dérivées temporelles :

En coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{OM} = \ell\,\overrightarrow{u_r}$. Donc $\vec{v}(M) = \ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$. Donc $E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$.

Nous pouvons donc réécrire l'intégrale première du mouvement :

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\, cos(\theta) = cte''$$

La constante peut être déterminée par les conditions initiales $\left(\theta(0) = \theta_0 \text{ et } \dot{\theta}(0) = 0\right)$ même si ce n'est pas nécessaire pour déterminer l'équation différentielle du mouvement puisque nous allons dériver l'intégrale première du mouvement :

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\, cos(\theta) = -mg\ell\, cos(\theta_0)$$

En dérivant, on obtient :

$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\,\dot{\theta}\,sin(\theta) = 0$$

On peut diviser par $m\ell^2\dot{\theta}$ qui n'est pas constamment nul pour obtenir,

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,sin(\theta) = 0}$$

2. Avec frottements fluides

Reprenons le problème précédent mais en supposant l'existence de frottements fluides : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$. Cette force étant non conservative, l'énergie mécanique n'est plus constante. Nous allons utiliser le théorème de la puissance mécanique.

Recommençons donc :

- Système : point matériel M
- Référentiel : terrestre, supposé galiléen
- Repère : $(\overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{u_\theta},\ \overrightarrow{u_z})$
- Bilan des forces :
  - Poids : $\vec{P}$. $E_{pp} = -mg\ell\,cos(\theta) + cte$
  - Tension du fil : $\vec{T} = -T\,\overrightarrow{u_r} \perp \vec{v}$, donc de travail nul
  - Force de frottement : $\vec{f}$ de puissance $P = \vec{f}.\vec{v} = -\lambda v^2$

Le théorème de la puissance mécanique s'écrit alors : $\frac{dE_m}{dt} = P$.

Nous avons vu que $\vec{v}(M) = \ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ et $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\,cos(\theta) + cte$.

Le théorème s'écrit alors :

$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\,\dot{\theta}\,sin(\theta) = -\lambda\left(\ell\dot{\theta}\right)^2$$

On peut diviser par $m\ell^2\dot{\theta}$ qui n'est pas constamment nul pour obtenir l'équation différentielle du mouvement :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,sin(\theta) = 0}$$

Méthode pour la résolution d'un exercice de dynamique

Système : point matériel ou système

Référentiel : préciser galiléen ou non

Repère (de projection) :

- peut être défini ultérieurement en fonction des forces
- pas toujours indispensable pour les théorèmes énergétiques
- mouvement circulaire : coordonnées polaires
- sinon, fonction du problème

Bilan des forces :

- inventaire complet, en distinguant forces intérieures ou non (pour un système), réelles ou d'inertie
- expression, d'abord générale, puis en fonction des variables
- n'utiliser que les propriétés caractéristiques des forces sans anticiper les conséquences des théorèmes (notamment le PFD pour la réaction du support)
- éventuellement, les énergies potentielles dont elles dérivent ou leur puissance (ou leur travail)
- éventuellement, leur moment (pour le théorème du moment cinétique)

FAIRE UN SCHEMA !

Choix du théorème :

- pour trouver une équation différentielle :
  - théorème du moment cinétique, si le système a un mouvement de rotation
  - théorème de la puissance mécanique (s'il y a des forces conservatives dont l'énergie potentielle est connue)
  - théorème de la puissance cinétique
  - principe fondamental de la dynamique (ou théorème du centre de masse)
- pour trouver une force : principe fondamental de la dynamique
- pour trouver la norme de la vitesse (ou une intégrale première du mouvement) : conservation de l'énergie mécanique (ou théorème de l'énergie mécanique en cas de forces non conservatives)
- aucune idée précise : le principe fondamentale de la dynamique (ou théorème du centre de masse)…

Utilisation du principe fondamental de la dynamique :

- écrire son expression sans remplacer les forces
- exprimer l'accélération dans le repère choisi en fonction des dérivées temporelles des coordonnées d'espace

- exprimer les forces dans le repère choisi en fonction des variables et données de l'énoncé
- projeter sur les différents vecteurs unitaires pour obtenir de 1 à 3 équations scalaires.

Utilisation des théorèmes énergétiques :

- ils ne permettent d'obtenir qu'une seule équation, scalaire, soit l'équation du mouvement (puissance), soit l'intégrale première du mouvement (énergie) mais permettent d'éviter l'utilisation des vecteurs (forces) et les projections.
- utilisation moins aisée en général avec des frottements.

Travail, puissance, énergie

Compte tenu de l'importance des notions abordées dans ce chapitre, voici un rapide récapitulatif des points les plus importants :

Travail d'une force : il est défini dans un référentiel donné. Soit δW le travail élémentaire fourni par une force $\vec{F}$ au cours d'un déplacement $d\overrightarrow{OM}$ pendant un temps dt.

Par définition, $\boxed{\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \vec{F}.\vec{v}\,dt}$.

C'est une grandeur algébrique (on dit que le travail est moteur si $\delta W>0$ et résistant sinon).

Puissance d'une force : avec les mêmes précautions, $\boxed{P = \vec{F}.\vec{v}}$

Force conservative : force $\vec{F}$ dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais seulement des positions initiale et finale du point matériel sur lequel s'applique la force.

On a alors le travail de cette force pour un déplacement d'une position 1 à une position 2 qui vaut : $W_{12} = -\left(E_p(2) - E_p(1)\right)$. On a donc $\boxed{\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -dE_p}$

Exemples d'énergie potentielle : à savoir redémontrer

- → de pesanteur : $\boxed{E_p = mgz + cte}$ si $\overrightarrow{u_z}$ est ascendant.
- → élastique : $\boxed{E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2}$
- → gravitationnelle : $\boxed{E_p = -G\frac{m\,M}{r}}$

Energie cinétique : $\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}}$ où v est la vitesse du point matériel et m sa masse.

Théorème de l'énergie cinétique : dans un référentiel galiléen, soit $\vec{F}$ la somme des forces s'appliquant à un point matériel M, de masse m, pendant un intervalle de temps dt : on peut montrer que $\boxed{dE_c = \delta W}$.

Pour un déplacement entre deux positions 1 et 2, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $\boxed{\Delta E_c = E_c(2) - E_c(1) = W_{12}}$.

Théorème de la puissance cinétique : avec les mêmes notations, $\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P = \vec{F}.\vec{v}}$

Energie mécanique : l'énergie mécanique d'un système est définie comme étant la somme de ses énergies cinétique et potentielle. $\boxed{E_m = E_c + E_p}$.

Théorème de l'énergie mécanique : dans un référentiel galiléen, $\boxed{dE_m = \delta W_{nc}}$ où δW_{nc} est la somme des travaux des forces non conservatives. Comme pour le théorème de l'énergie cinétique, on peut aussi écrire $\boxed{\Delta E_m = E_m(2) - E_m(1) = W_{nc12}}$.

Conservation de l'énergie mécanique : lorsqu'un système n'est soumis qu'à des forces conservatives ou que le travail des forces non conservatives est nul, $\delta W_{nc} = 0$ donc $dE_m = 0$ donc l'énergie mécanique est constante.

Equilibre et stabilité : lorsque le mouvement d'un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives dérivant d'une E_p peut être décrit à l'aide d'une seule coordonnée d'espace, *q(t)*, la position q_0 est position d'équilibre si $\boxed{\frac{dE_p}{dq}(q_0) = 0}$. C'est un équilibre stable si $\boxed{\frac{d^2E_p}{dq^2}(q_0) > 0}$.

Table des matières