Ondes EM dans un plasma

8.1 Équations de propagation des champs dans un plasma

Ce type de gaz est très courant puisqu'il représente 99% de la matière connue : les flammes, les éclairs, les aurores boréales, la haute atmosphère (ionosphère) et les nuages interstellaires ou intergalactiques sont des plasmas naturels. Les plasmas sont également utilisés dans des applications courantes comme les tubes à néon et les écrans plasmas. Enfin, en réalisant un plasma de très forte densité à très haute température, les physiciens espèrent amorcer des réactions de fusions nucléaire.

8.1.1 Modélisation

L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 50 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma : c'est un milieu totalement ionisé, caractérisé par une densité volumique d'électrons libres $n_0 = 10^{10} \cdot m^{-3}$ *et une densité volumique de cations de charge égale* $+e$ *elle aussi à* n_0 *L'ensemble est donc globalement neutre. On se propose d'étudier dans ce milieu la propagation d'ondes du type* $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \overrightarrow{E}_0 e^{j(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})}$.

8.1.2 Équations de mouvements des porteurs de charges

La densité des porteurs de charges dans un concucteur métallique est de l'ordre de $10^{28}m^{-3}$*. Cette valeur est très grande par rapport à* n_0 *de telle sorte que la force de frottement dont on tient compte dans un conducteur peut être négligée dans le plasma (le plasma est homogène, peu dense, ou dilué).*

On note $\overrightarrow{V}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *les vitesses moyennes respectives des ions de masse M et des électrons de masse m . Ces particules chargées sont soumises :*

1. *à l'action des champs électrique et magnétique de l'onde (force de Lorentz)*$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B})$.
2. *à l'action de la pesanteur, négligeable devant les forces électromagnétiques.*
3. *à l'action électromagnétique des autres particules chargées. Si le plasma est suffisamment dilué, ces interactions sont négligeables.*

Nous négligerons dans la suite la composante magnétique de la force de Lorentz. En effet, pour une OPPM $\frac{E}{B} = c$ *et, pour des particules non relativiste de charge q et de vitesse* $v \ll c$ *:*

$$\frac{f_m}{f_e} = \frac{qvB}{qE} = \frac{v}{c} \ll 1$$

Attention : Nous avons négliger l'effet du champ magnétique de l'onde. Si on applique un champ magnétique extérieur au plasma il faut en tenir compte.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à un ion et à un électron, dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$M\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = e\underline{\overrightarrow{E}} \quad \text{et} \quad m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -e\underline{\overrightarrow{E}} \tag{8.2}$$

En régime sinusoidal permanent et en utilisant la notation complexe :

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{\underline{V}}}{dt} = \frac{e}{M}\overrightarrow{\underline{E}} \Rightarrow j\omega\overrightarrow{\underline{V}} = \frac{e}{M}\overrightarrow{\underline{E}} \Rightarrow \overrightarrow{\underline{V}} = \frac{e}{j\omega M}\overrightarrow{\underline{E}} \Rightarrow \overrightarrow{\underline{V}} = -j\frac{e}{\omega M}\overrightarrow{\underline{E}} \\ \\ \dfrac{d\overrightarrow{\underline{v}}}{dt} = -\frac{e}{M}\overrightarrow{\underline{E}} \Rightarrow j\omega\overrightarrow{\underline{v}} = -\frac{e}{M}\overrightarrow{\underline{E}} \Rightarrow \overrightarrow{\underline{v}} = -\frac{e}{j\omega m}\overrightarrow{\underline{E}} \Rightarrow \overrightarrow{\underline{v}} = j\frac{e}{\omega m}\overrightarrow{\underline{E}} \end{cases}$$

La densité volumique de courant est :

$$\overrightarrow{\underline{j}} = n_0 e\overrightarrow{\underline{V}} - n_0 e\overrightarrow{\underline{v}} = -j\frac{n_0 e^2}{\omega M}\overrightarrow{\underline{E}} - j\frac{n_0 e^2}{\omega m}\overrightarrow{\underline{E}} = -j\frac{n_0 e^2}{\omega}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)\overrightarrow{\underline{E}}$$

Or $m \ll M$ *d'ou en négligeant la contribution des ions au courant :*

$$\overrightarrow{\underline{j}} = -j\frac{n_0 e^2}{\omega m}\overrightarrow{\underline{E}} = \underline{\gamma}\overrightarrow{\underline{E}}$$

On fait ainsi apparaître une conductivité complexe telle que :

$$\underline{\gamma} = -j\frac{n_0 e^2}{\omega m}$$

La conductivité est imaginaire pure, de sorte $\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{E}$ *sont déphasés de* $-\frac{\pi}{2}$*. Ces deux vecteurs sont en quadrature de phase donc la puissance volumique moyenne cédée aux charges est nul :*

$$< \mathcal{P}_v >=< \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} >= 0$$

Ce résultat est en accord avec l'hypothèse de négliger la force de frottement.

8.1.3 Équations de Maxwell dans un plasma

On rappelle que les équations de Maxwell s'écrivent dans un milieu contenant une densité de charge volumique ρ *et une densité volumique de courant* $\overrightarrow{j}$ *:*

$$\begin{cases} div\,\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0} \\ \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{\underline{B}}(M,t)}{\partial t} \\ div\,\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = 0 \\ \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \mu_0 \left(\overrightarrow{\underline{j}}(M,t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{\underline{E}}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

Le milieu étant globalement neutre donc la densité volumique de charges totale est nulle $\rho = 0$, mais il y a une densité volumique de courant $\overrightarrow{\underline{j}} = \underline{\gamma}\overrightarrow{\underline{E}}$ Les équations de maxwell s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases} div\,\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = 0 \\ \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{\underline{B}}(M,t)}{\partial t} \\ div\,\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = 0 \\ \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \mu_0 \left(\underline{\gamma}\overrightarrow{\underline{E}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{\underline{E}}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

8.1.4 Équations de propagations des champs

Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{E}}\right) &= -\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \overrightarrow{\underline{B}}}{\partial t}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{B}}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \underline{\gamma}\overrightarrow{\underline{E}} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{\underline{E}}}{\partial t}\right) \\ &= -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{\underline{E}}}{\partial t^2} - j\omega\mu_0\underline{\gamma}\overrightarrow{\underline{E}} \\ &= -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{\underline{E}}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{n_0 e^2}{m}\overrightarrow{\underline{E}} \end{aligned}$$

En utilisant la relation d'analyse vectorielle $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{E}}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\,\overrightarrow{\underline{E}}\right) - \Delta\overrightarrow{\underline{E}} \quad \forall \quad \overrightarrow{\underline{E}}$ sachant que $div\,\overrightarrow{\underline{E}} = 0$, on obtient :

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{n_0 e^2}{m}\underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

Cette équation n'est pas une équation de D'Alembert : la présence d'un terme proportionnel à $\underline{\vec{E}}$ en fait une équation dite de Klein-Gordon. De la même manière afin d'établir l'équation ne faisant intervenir que le champ magnétique, prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\underline{\vec{B}}\right) &= \mu_0\overrightarrow{rot}\,\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}\right)\\
&= \mu_0\underline{\gamma}\,\overrightarrow{rot}\,\underline{\vec{E}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\,\underline{\vec{E}}\right)\\
&= -\mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}\right)\\
&= -\mu_0\underline{\gamma}\, j\omega\underline{\vec{B}} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\underline{\vec{B}}}{\partial t^2}\\
&= -\mu_0\frac{n_0 e^2}{m}\underline{\vec{B}} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\underline{\vec{B}}}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

Par ailleurs $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\underline{\vec{B}}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\,\underline{\vec{B}}\right) - \Delta\underline{\vec{B}} = -\Delta\underline{\vec{B}}$ car $div\overrightarrow{\ } = 0$, on obtient :

$$\Delta\underline{\vec{B}} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\underline{\vec{B}}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{n_0 e^2}{m}\underline{\vec{B}} = \vec{0}$$

8.2 Solutions des équations

8.2.1 La relation de dispersion

En injectant l'expression du champ électrique $\underline{\vec{E}}(M,t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ dans l'équation de propagation on a :

$$-k^2\underline{\vec{E}} + \mu_0\varepsilon_0\omega^2\underline{\vec{E}} - \mu_0\frac{n_0 e^2}{m}\underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

qui s'écrit aussi :

$$\left(-k^2 + \mu_0\varepsilon_0\omega^2 - \mu_0\frac{n_0e^2}{m}\right)\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{0}$$

et l'on en déduit l'équation de dispersion :

$$k^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 - \mu_0\frac{n_0e^2}{m}$$

En multipliant le troisième terme par c^2 et en utilisant la relation $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ on obtient :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0\frac{n_0e^2c^2}{mc^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\frac{n_0e^2}{m\varepsilon_0}}{c^2}$$

On pose $\omega_p^2 = \frac{n_0e^2}{m\varepsilon_0}$, appelée pulsation plasma :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Nous constatons immédiatement que ***la relation de dispersion est non linéaire donc s'il y a propagation le milieu est dispersif.***

8.2.2 Structure de l'onde PPM dans le plasma

Les équations de maxwell dans le plasma

$$div\underline{\overrightarrow{E}} = 0 \Rightarrow -j\overrightarrow{k}\cdot\underline{\overrightarrow{E}} = 0$$

le champ électrique est transverse dans le plasma.

$$div\underline{\overrightarrow{B}} = 0 \Rightarrow -j\overrightarrow{k}\cdot\underline{\overrightarrow{B}} = 0$$

le champ magnétique est transverse dans le plasma. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = -\frac{\partial\underline{\overrightarrow{B}}(M,t)}{\partial t} \Rightarrow -j\overrightarrow{k}\times\underline{\overrightarrow{E}} = -j\omega\underline{\overrightarrow{B}}$$

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \mu_0\left(\underline{\gamma}\overrightarrow{\underline{E}} + \varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{\underline{E}}}{\partial t}\right) \Rightarrow -j\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{\underline{B}} = \left(\mu_0\underline{\gamma} + j\omega\mu_0\varepsilon_0\right)\overrightarrow{\underline{E}}$$

cette équation s'écrit en remplacant $\underline{\gamma}$ par son expression :

$$-j\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{\underline{B}} = \left(\mu_0\underline{\gamma} + j\omega\mu_0\varepsilon_0\right)\overrightarrow{\underline{E}} = -j\frac{\omega_p^2-\omega^2}{\omega c^2}\overrightarrow{\underline{E}}$$

soit

$$\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{\underline{B}} = \left(\mu_0\underline{\gamma} + j\omega\mu_0\varepsilon_0\right)\overrightarrow{\underline{E}} = \frac{\omega_p^2-\omega^2}{\omega c^2}\overrightarrow{\underline{E}}$$

donc dans un plasma retenons les relations suivantes :

$$\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\underline{E}} = 0$$
$$\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\underline{B}} = 0$$
$$\overrightarrow{\underline{B}} = \frac{\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{\underline{E}}}{\omega}$$

ou $\overrightarrow{k}$ est à priori complexe.

8.2.3 Les expressions des champs électrique et magnétique

L'équation de dispersion indique que k peut être réel ou complexe en fonction des valeurs de ω.

8.2.3.1 Cas ou $\omega > \omega_p$

dans ce cas $k^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2} > 0$ donc k est réel. Les ondes sont progressives et peuvent se propager.
Le champ électrique s'écrit :

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \overrightarrow{E}_0 e^{j(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})}$$

si par exemple $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{e}_z$ et $\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = E_0 e^{j(\omega t-\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})}\overrightarrow{e}_x$ alors

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \overrightarrow{e}_x$$

Le champ magnétique s'écrit à partir de la relation de structure :

$$\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{\overrightarrow{k} \times \underline{\overrightarrow{E}}}{\omega} = \frac{kE_0}{\omega} e^{j(\omega t - kz)} \overrightarrow{e}_y = B_0 e^{j(\omega t - kz)} \overrightarrow{e}_y$$

Remarquons que :

$$B_0 = \frac{kE_0}{\omega} = \frac{E_0}{\frac{\omega}{k}} = \frac{E_0}{v_\varphi}$$

ou v_φ est la vitesse de phase de l'onde dans le plasma, qu'on peut le déterminer à partir de la relation de dispersion :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

La vitesse de phase dépend de ω . Le plasma est un milieu dispersif. La vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière c. Il n'y a ici aucun paradoxe, car une O.P.P.M. unique n'a pas de réalité physique : la vitesse de phase ne représente pas la vitesse de propagation de l'information.

1. *si $\omega \to \infty \Rightarrow v_\varphi \to c$.*
2. *si $\omega \to \omega_p \Rightarrow v_\varphi \to \infty$.*

La vitesse de groupe vaut :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \frac{c^2}{v_\varphi}$$

cette vitesse est inférieure ou égale à c :

1. *si $\omega \to \infty \Rightarrow v_\varphi \to c$.*
2. *si $\omega \to \omega_p \Rightarrow v_\varphi \to 0$.*

8.2.3.2 Cas ou $\omega < \omega_p$

Dans ce cas $k^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2} < 0$ *donc k est imaginaire pur, donc*

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = -\left(\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}\right) = \left(j\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}\right)^2 = (jk')^2 \Rightarrow \underline{k} = \pm jk' \quad (8.32)$$

avec k' réel positif. La solution $\underline{k} = jk'$ *est physiquement inacceptable car elle donne un champ divergent. Si* $\overrightarrow{\underline{k}} = -jk'\overrightarrow{e}_z$ *Le champ électrique vaut :*

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \overrightarrow{E}_0 e^{j(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})} = \overrightarrow{E}_0 e^{j(\omega t + jk'z)} = \overrightarrow{E}_0 e^{-k'z} e^{j\omega t}$$

Dans l'expression du champ électrique nous constatons que la dépendance temporelle et spatiale sont séparées. La phase ne dépend plus de l'espace, donc il n'y pas de propagation de la phase , de plus son amplitude décroit avec z . On dit qu'on a ***une onde évanescente.***
Si $\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = E_0 e^{-k'z} e^{j\omega t}\overrightarrow{e}_x$ *le champ magnétique s'écrit à partir de la relation de structure :*

$$\overrightarrow{\underline{B}} = \frac{\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{E}}{\omega} = -j\frac{k'}{\omega}\overrightarrow{e}_z \times E_0 e^{-k'z} e^{j\omega t}\overrightarrow{e}_x = \frac{k'E_0}{\omega} e^{-k'z} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}\overrightarrow{e}_y$$

Les champs électrique et magnétique sont en quadrature temporelle. La vitesse de phase $v_\varphi = 0$ *et la vitesse de groupe* $v_g = 0$.

8.2.4 Indice d'un milieu

On définit l'indice d'un milieu par :

$$\underline{n} = \frac{c}{v_\varphi} = \frac{c}{\omega}\underline{k}$$

dans le cas du plasma peu dilué on a :

$$\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

1. *si* $\omega > \omega_p \Rightarrow \underline{n}$ *est réel inférieur à 1.*
2. *si* $\omega < \omega_p \Rightarrow \underline{n}$ *est imaginaire pur .*

8.3 Étude énergétique

1. *Si* $\omega > \omega_p$, $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e}_x$ *et* $\overrightarrow{B} = \frac{kE_0}{\omega}\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e}_y$ *alors la valeur moyenne du vecteur de poynting vaut*

$$<\overrightarrow{\Pi}> = \frac{kE_0^2}{2\mu_0}\overrightarrow{e}_z$$

   Il y a propagation de l'énergie.

2. *Si* $\omega < \omega_p$, $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0 e^{-k'z}\cos(\omega t)\overrightarrow{e}_x$ *et* $\overrightarrow{B} = \frac{k'E_0}{\omega}e^{-k'z}\sin(\omega t)\overrightarrow{e}_y$ *alors la valeur moyenne du vecteur de poynting vaut zéro :*

$$<\overrightarrow{\Pi}> = \frac{k'E_0^2}{\mu_0}e^{-2k'z} < \cos(\omega t)\sin(\omega t) > \overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{0}$$

   Il n'y a pas propagation de l'énergie.

8.4 Coefficients de réflexion et de transmission

8.4.1 Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

Déterminons les amplitudes des champs réfléchi et transmis en fonction de celle du champ incident dans le cas particulier de l'incidence normale. On aura donc $i = 0$ *et d'après les lois de Descartes de l'optique géométrique les angles de réflexion r et transmission t valent* $r = 0 \quad t = 0$*. Le dioptre, situé en* $z = 0$*, a pour vecteur unitaire normal* $\overrightarrow{n}_{12} = \overrightarrow{e}_z$*. dans le milieu numéro 1 il y a du vide et dans le milieu* *numéro 2 il y a le plasma . On note le vecteur d'onde dans le vide* $\overrightarrow{k}_0$ *et le vecteur d'onde dans le plasma* $\overrightarrow{k}$. *Les vecteurs d'ondes sont :*

$$\overrightarrow{k}_i = k_0\overrightarrow{e}_z = \frac{\omega}{c}\overrightarrow{e}_z\,; \qquad \overrightarrow{k}_r = -k_0\overrightarrow{e}_z = -\frac{\omega}{c}\overrightarrow{e}_z\,; \qquad \overrightarrow{\underline{k}}_t = \underline{k}\overrightarrow{e}_z = \underline{n}\frac{\omega}{c}\overrightarrow{e}_z = \underline{n}k_0\overrightarrow{e}_z$$

Les champs électromagnétiques s'écrivent :

$$\overrightarrow{\underline{E}}_i = E_{0i}e^{j(\omega t-k_0z)}\overrightarrow{e}_x\,; \qquad \overrightarrow{\underline{B}}_i = \frac{\overrightarrow{k}_i\times\overrightarrow{\underline{E}}_i}{\omega} = \frac{E_{0i}}{c}e^{j(\omega t-k_0z)}\overrightarrow{e}_y = B_{0i}e^{j(\omega t-k_0z)}\overrightarrow{e}_y$$

$$\overrightarrow{\underline{E}}_r = E_{0r}e^{j(\omega t+k_0z)}\overrightarrow{e}_x\,; \qquad \overrightarrow{\underline{B}}_r = \frac{\overrightarrow{k}_r\times\overrightarrow{\underline{E}}_r}{\omega} = -\frac{E_{0r}}{c}e^{j(\omega t+k_0z)}\overrightarrow{e}_y = B_{0r}e^{j(\omega t+k_0z)}\overrightarrow{e}_y$$

$$\overrightarrow{\underline{E}}_t = E_{0t}e^{j(\omega t-\underline{k}z)}\overrightarrow{e}_x\,; \qquad \overrightarrow{\underline{B}}_t = \frac{\overrightarrow{\underline{k}}_t\times\overrightarrow{\underline{E}}_t}{\omega} = \frac{\underline{k}E_{0t}}{\omega}e^{j(\omega t-\underline{k}z)}\overrightarrow{e}_y = B_{0t}e^{j(\omega t-\underline{k}z)}\overrightarrow{e}_y \tag{8.40}$$

Il n'y a pas de courants surfaciques au niveau du dioptre c'est-à-dire en $z = 0$ *, et on peut écrire la continuité des composantes tangentielles du champ électrique et du champ magnétique :*

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad \textit{et} \quad B_{0i} + B_{0r} = B_{0t} \quad \textit{en} \quad z = 0$$

La deuxième équation s'écrit en fonction des champs électriques :

$$B_{0i} + B_{0r} = B_{0t} \Rightarrow \frac{k_0E_{0i}}{\omega} - \frac{k_0E_{0r}}{\omega} = \frac{\underline{k}E_{0t}}{\omega}$$

On obtient les deux relations suivantes :

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$$

$$k_0(E_{0i} - E_{0r}) = \underline{k}E_{0t}$$

On définit :

$$\underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \quad \textit{et} \quad \underline{t} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}}$$

respectivement les coefficients de réflexion en amplitude et de transmission en amplitude. En divisant par E_{0i} il vient :

$$1 + \underline{r} = \underline{t}\,; \qquad k_0(1 - \underline{r}) = \underline{k} \quad \underline{t}$$

d'oû :

$$\underline{r} = \frac{k_0 - \underline{k}}{k_0 + \underline{k}}\,; \qquad \underline{t} = \frac{2k_0}{k_0 + \underline{k}}$$

qu'on peut exprimer en fonction de l'indice $\underline{n}$:

$$\underline{r} = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}}\,; \qquad \underline{t} = \frac{2}{1 + \underline{n}}$$

8.4.2 Coefficients de réflexion et de transmission en puissance

Les vecteurs de poynting sont :

$$<\parallel \overrightarrow{\Pi}_i \parallel>= \frac{\parallel \overrightarrow{E}_{0i} \parallel^2}{2c\mu_0}\,; \qquad <\parallel \overrightarrow{\Pi}_r \parallel>= \frac{\parallel \overrightarrow{E}_{0r} \parallel^2}{2c\mu_0}\,; \qquad <\parallel \overrightarrow{\Pi}_t \parallel>= \underline{n}\frac{\parallel \overrightarrow{E}_{0t} \parallel^2}{2c\mu_0}$$

Les coefficients de réflexion et de transmission en puissance sont définis respectivement par :

$$R = \frac{<\parallel \overrightarrow{\Pi}_r \parallel>}{<\parallel \overrightarrow{\Pi}_i \parallel>} \quad et \quad T = \frac{<\parallel \overrightarrow{\Pi}_t \parallel>}{<\parallel \overrightarrow{\Pi}_i \parallel>}$$

En utilisant les expressions des valeurs moyennes des vecteurs de poynting :

$$R = \left(\frac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}}\right)^2 = \mid \underline{r} \mid^2$$

$$T = n\left(\frac{2}{1+\underline{n}}\right)^2 = n \mid \underline{t} \mid^2$$

Nous constatons que

$$R + T = 1$$

cette équation traduit la conservation de l'énergie.

1. *Si* $\omega < \omega_p$ *alors* $\underline{n}$ *est imaginaire donc* $R = 1$ *alors* $T = 0$ *. l'onde est totalement réfléchie.*
2. *Si* $\omega > \omega_p$ *alors* $\underline{n}$ *est réel, en posant* $x = \frac{\omega_p}{\omega}$ *on a :*

$$R = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 = \frac{2 - x^2 - 2\sqrt{1-x^2}}{2 - x^2 + 2\sqrt{1-x^2}} < 1$$

L'onde se propage dans le plasma. T se déduit de la conservation de l'énergie $T = 1 - R$.