Réflexion sous incidence normale d'une OPPM sur un plan conducteur parfait

Table des matières

Encore une fois, comme le titre l'indique, nous allons dans ce chapitre nous intéresser à la réflexion sous incidence normale d'une OPPM sur un plan conducteur parfait.

I. Position du problème

Considérons une OPPM, polarisée selon $\overrightarrow{e_y}$, se propageant dans le vide dans le sens des x croissants dans le demi espace $x < 0$. Le demi espace $x > 0$ est occupé par un conducteur parfait.

Le champ électrique dans le vide a donc pour expression :

$$\overrightarrow{E_i} = E_{0i}\cos(\omega t - kx)\ \overrightarrow{e_y}$$

Le champ magnétique s'en déduit alors par la relation : $\overrightarrow{B_i} = \frac{\overrightarrow{e_x}\wedge\overrightarrow{E_i}}{c}$

$$\overrightarrow{B_i} = \frac{E_{0i}}{c}\cos(\omega t - kx)\ \overrightarrow{e_z}$$

Nous avons vu que ***<u>le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait</u>*** (tout comme la charge et le courant volumique).

De plus, ***<u>d'après la relation de passage, la composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée d'une surface chargée (ou non).</u>***

En conséquence, en $x = 0$, $E_{0i}\cos(\omega t) = 0$. Cette relation devant être vraie à tout instant, nous obtenons $E_{0i} = 0$, ce qui est impossible. En conséquence, l'onde incidente seule ne peut suffire à assurer la condition de passage : il existe obligatoirement une onde réfléchie sur le conducteur parfait, qui se propagera donc suivant les x décroissants (le champ étant nul à l'intérieur du conducteur parfait, il ne peut pas exister de champ transmis).

Nous allons dans un premier temps déterminer les caractéristiques de l'onde réfléchie, puis nous intéresser à l'onde résultante totale dans le vide, d'abord du point de vue structurel puis énergétique.

II. Caractéristiques de l'onde réfléchie

L'onde réfléchie sera forcément sinusoïdale de même pulsation que l'onde incidente puisque générée par celle-ci. De plus, la relation de dispersion dans le vide étant la même pour les deux ondes (qui se propagent à la même vitesse puisque dans le même milieu), le vecteur d'onde de l'onde réfléchie a même norme que celui de l'onde incidente. En revanche, sa direction n'est forcément pas la même (sinon l'onde se propagerait aussi suivant les x croissants et correspondrait à l'onde incidente) : elle doit repartir en sens opposé. Nous admettrons que l'onde réfléchie se propage selon $-\overrightarrow{e_x}$ (ce qui correspond à la loi de la réflexion de Descartes).

D'autre part, l'onde réfléchie étant, comme l'onde incidente, une OPPM, elle est obligatoirement transverse (elle est obligatoirement plane du fait de l'invariance de l'onde incidente et du plan de réflexion selon $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$) mais ne sera pas forcément polarisée comme l'onde incidente. Nous pourrons donc l'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{E_r}(M,t) = E_{0ry}\cos\left(\omega t + kx + \varphi_{ry}\right)\overrightarrow{e_y} + E_{0rz}\cos(\omega t + kx + \varphi_{rz})\,\overrightarrow{e_z}$$

Reprenons la condition de continuité de la composante tangentielle du champ électrique en $x = 0$, valable à tout instant :

$$\begin{cases} E_{0i}\cos(\omega t) + E_{0ry}\cos\left(\omega t + \varphi_{ry}\right) = 0 \\ E_{0rz}\cos(\omega t + \varphi_{rz}) = 0 \end{cases}$$

Ces relations étant vraies pour tout t, la seconde impose $E_{0rz} = 0$: l'onde réfléchie est aussi polarisée selon $\overrightarrow{e_y}$, tout comme l'onde incidente.

D'autre part, la première relation, vérifiée pour tout instant t, ne peut être vraie que si

$$\begin{cases} \varphi_{ry} = 0 \\ E_{0i} + E_{0ry} = 0 \end{cases}$$

Donc son expression devient :

$$\boxed{\overrightarrow{E_r}(M,t) = -E_{0i}\cos(\omega t + kx)\,\overrightarrow{e_y}}$$

Le champ magnétique s'en déduit alors par la relation $\overrightarrow{B_r} = \frac{(-\overrightarrow{e_x})\wedge\overrightarrow{E_r}}{c}$ puisque l'onde réfléchie est une OPP se propageant selon $-\overrightarrow{e_x}$

$$\boxed{\overrightarrow{B_r} = \frac{E_{0i}}{c}\cos(\omega t + kx)\ \overrightarrow{e_z}}$$

Nous pouvons alors exprimer l'onde résultante dans le vide :

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_\iota} + \overrightarrow{E_r}$$

$$\vec{E} = E_{0i}\cos(\omega t - kx)\ \overrightarrow{e_y} - E_{0i}\cos(\omega t + kx)\,\overrightarrow{e_y}$$

$$\vec{E} = E_{0i}(\cos(\omega t)\cos(kx) + \sin(\omega t)\sin(kx))\ \overrightarrow{e_y} - E_{0i}(\cos(\omega t)\cos(kx) - \sin(\omega t)\sin(kx))\overrightarrow{e_y}$$

$$\boxed{\vec{E} = 2E_{0i}\sin(\omega t)\sin(kx)\ \overrightarrow{e_y}}$$

De même, $\vec{B} = \overrightarrow{B_\iota} + \overrightarrow{B_r}$ donc

$$\boxed{\vec{B} = \frac{2E_{0i}}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\ \vec{e_z}}$$

Nous constatons alors que l'onde résultante n'est pas une onde progressive puisqu'elle ne se propage pas : il s'agit d'une ***onde stationnaire***. Le champ électrique peut être écrit sous la forme

$$\vec{E} = E_m(t)\sin(kx)\ \vec{e_y}$$

Où $E_m(t)$ serait l'amplitude du champ (dépendant du temps), fonction de x.

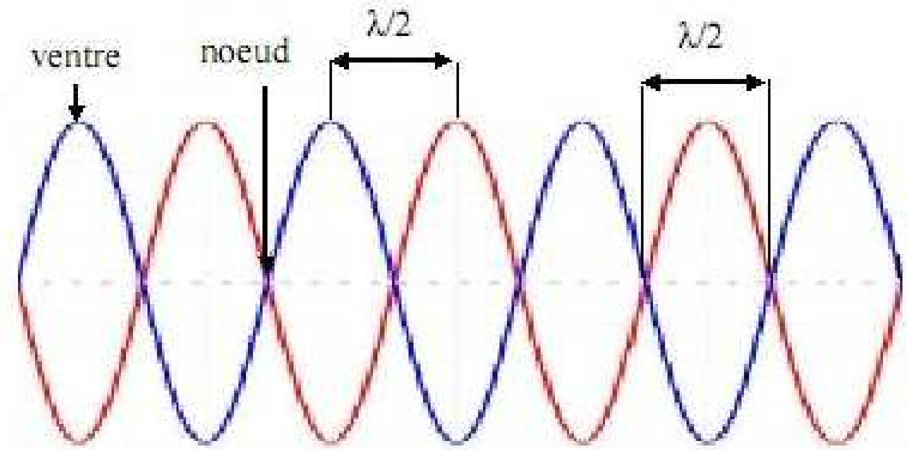
Cela signifie que, quelque soit t, les maxima, les minima et les annulations du champ électrique ont toujours lieu aux mêmes endroits (mêmes valeurs de x).

On appelle nœud du champ électrique un point de l'espace pour lequel le champ électrique est toujours nul.

On appelle ventre du champ électrique un point de l'espace pour lequel le champ électrique a une amplitude maximale à un instant donné.

Un fuseau est délimité par deux nœuds successifs.

Il est à noter que les ventres sont, tout comme les nœuds, distants de $\frac{\lambda}{2}$ où λ est la longueur d'onde.



En effet, si, pour un instant t quelconque, en un point M d'abscisse x, $\vec{E} = \vec{0}$, cela signifie que $\sin(kx) = 0$ donc $kx = n\pi$ avec n un entier relatif négatif (car l'onde se propage dans le demi-espace $x \leq 0$). Or $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ donc $x = n\frac{\lambda}{2}$.

De même, si, pour un instant t quelconque, en un point M d'abscisse x, $\vec{E}$ a une amplitude maximale, cela signifie que $|\sin(kx)| = 1$ donc $kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ avec n un entier relatif strictement négatif. Donc $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$.

En procédant de la même manière avec le champ magnétique, nous observons que ***les ventres du champ électrique correspondent aux nœuds du champ magnétique et réciproquement.***

Nous constatons par ailleurs que, à la surface du conducteur,

$$\forall t, \begin{cases} \vec{E}(0,t) = \vec{0} \\ \vec{B}(0,t) = \dfrac{2E_{0i}}{c}\cos(\omega t)\ \overrightarrow{e_z} \end{cases}$$

Comme le champ magnétique et le champ électrique sont nuls à l'intérieur d'un conducteur parfait, les relations de passage imposent ***une densité surfacique de charge nulle*** ($\sigma = 0$) et l'existence ***d'une densité surfacique de courant non nulle***.

Remarque 1 : le champ magnétique est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait puisque l'équation de Maxwell-Faraday s'y écrit $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$ puisque $\vec{E}$ est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait. Comme un champ constant ne peut pas représenter une onde, $\vec{B} = \vec{0}$.

Remarque 2 : la relation de passage pour le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(0^+,t) - \vec{E}(0^-,t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e_x}$$

Or $\forall t, \vec{E}(0^+,t) = \vec{E}(0^-,t) = \vec{0}$ donc $\sigma = 0$.

Remarque 3 : la relation de passage pour le champ magnétique s'écrit, dans le cas général :

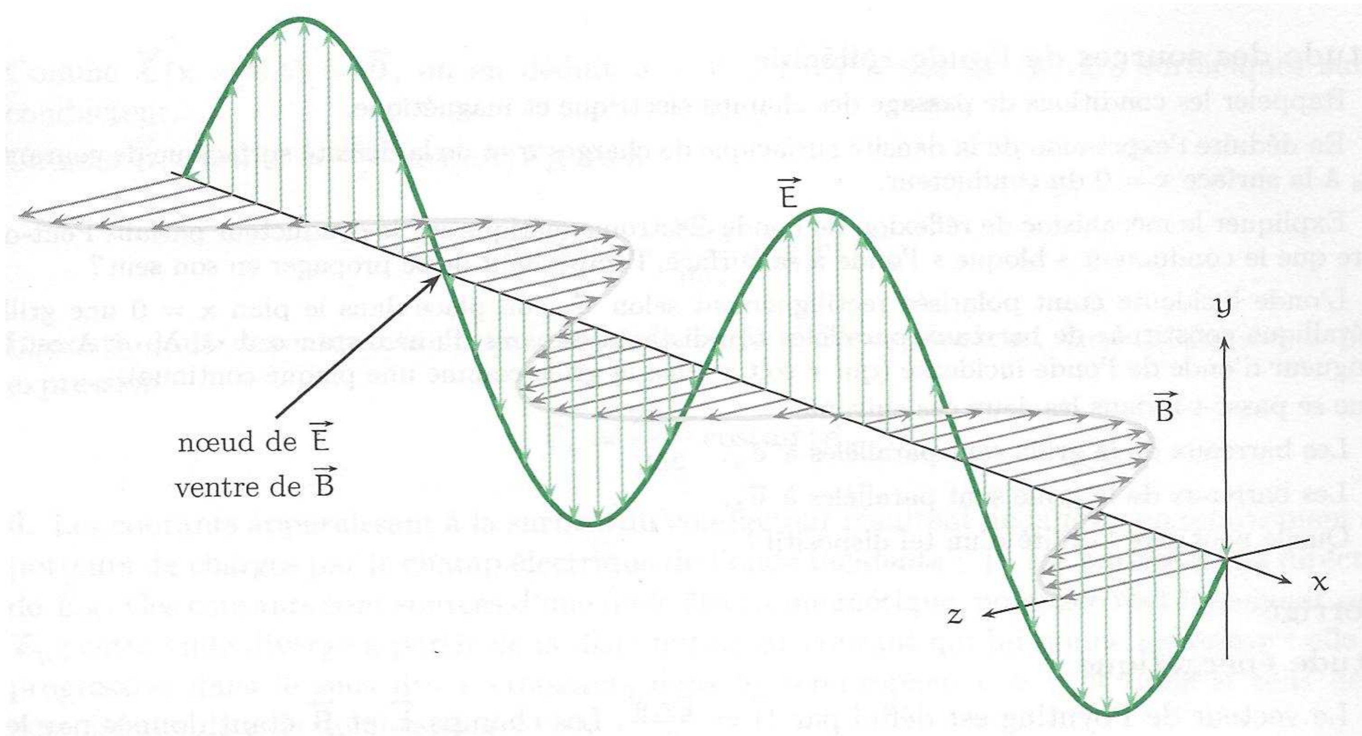
$$\boxed{\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}}}$$

Donc, ici, $\vec{B}(0^+,t) - \vec{B}(0^-,t) = \mu_0 \overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{e_x}$

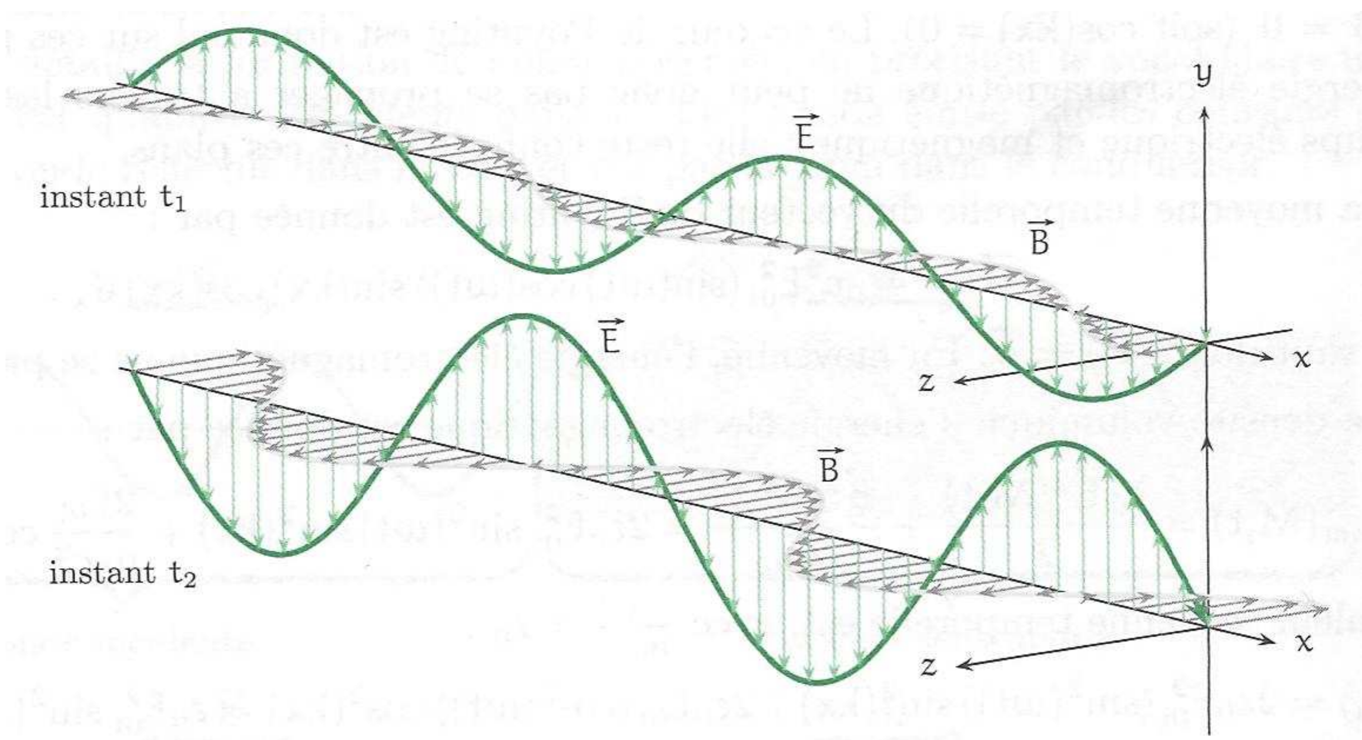
Or $\vec{B}(0^+,t) = 0$ et $\vec{B}(0^-,t) = \frac{2E_{0i}}{c}\cos(\omega t)\ \overrightarrow{e_z}$ donc $\frac{2E_{0i}}{c}\cos(\omega t)\ \overrightarrow{e_z} = -\mu_0 \overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{e_x}$.

Donc $\overrightarrow{J_s} = \frac{2E_{0i}}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\ \overrightarrow{e_y}$

Nous pouvons par ailleurs représenter alors l'allure du champ électromagnétique dans l'espace à un instant donné :



Pour mieux visualiser l'évolution au cours du temps, il est possible de représenter le champ électromagnétique à deux instants différents, t_1 et t_2 :



Intéressons-nous à présent à l'aspect énergétique…

III. Aspect énergétique

Déterminons en premier lieu le vecteur de Poynting pour $x < 0$.

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\left(2E_{0i}\sin(\omega t)\sin(kx)\ \overrightarrow{e_y}\right) \wedge \left(\frac{2E_{0i}}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\ \overrightarrow{e_z}\right)$$

$$\vec{\pi} = \frac{4E_{0i}^2}{\mu_0 c}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\cos(kx)\sin(kx)\,\overrightarrow{e_x}$$

$$\boxed{\vec{\pi} = \frac{E_{0i}^2}{\mu_0 c}\sin(2\omega t)\sin(2kx)\,\overrightarrow{e_x}}$$

Nous constatons sans surprise que ***le vecteur de Poynting est nul au niveau de tous les nœuds du champ électromagnétique.***

D'autre part, en moyenne,

$$\langle\vec{\pi}\rangle = \frac{E_{0i}^2}{\mu_0 c}\langle\sin(2\omega t)\rangle\sin(2kx)\,\overrightarrow{e_x} = \vec{0}$$

$$\langle\vec{\pi}\rangle = \vec{0}$$

En moyenne, l'énergie électromagnétique ne se propage pas.

Considérons alors l'énergie électromagnétique en elle-même. Notons w_e la densité volumique d'énergie électrique, w_m la densité volumique d'énergie magnétique et $w_{em} = w_e + w_m$.

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(2E_{0i}\sin(\omega t)\sin(kx)\right)^2 = 2\varepsilon_0 E_{0i}^2\sin^2(\omega t)\sin^2(kx)$$

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{2E_{0i}}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\right)^2 = \frac{2E_{0i}^2}{\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t)\cos^2(kx)$$

En moyenne,

$$\langle w_e\rangle = 2\varepsilon_0 E_{0i}^2\langle\sin^2(\omega t)\rangle\sin^2(kx)$$

$$\langle w_m\rangle = \frac{2E_{0i}^2}{\mu_0 c^2}\langle\cos^2(\omega t)\rangle\cos^2(kx)$$

Or $\langle\sin^2(\omega t)\rangle = \langle\cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$ donc

$$\langle w_e\rangle = \varepsilon_0 E_{0i}^2\sin^2(kx)$$

$$\langle w_m \rangle = \frac{E_{0i}^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(kx)$$

Or $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ donc

$$\boxed{\langle w \rangle = \varepsilon_0 E_{0i}^2}$$

L'énergie électromagnétique d'une onde stationnaire est, en moyenne, uniformément répartie dans l'espace.

IV. Cavités à une dimension

Considérons alors que se trouve en $x < -a$ un autre conducteur parfait.

En conséquence, en $x = -a$, le champ électrique est nul à tout instant :

$$\vec{E}(t, -a) = -2E_{0i} \sin(\omega t) \sin(ka)\ \overrightarrow{e_y}$$

Donc $\sin(ka) = 0$.

Donc $\exists n \in \mathbb{N}^* / ka = n\pi$.

Donc $\boxed{k = \frac{n\pi}{a}}$.

Ainsi, seuls certains modes vibratoires monochromatiques peuvent exister dans la cavité : on parle de <u>***modes propres***</u> de la cavité.

Les longueurs d'onde associées à ces modes propres ont alors pour expression :

$$\boxed{\lambda = \frac{2a}{n}}$$

Nous obtenons alors l'allure suivante pour l'onde stationnaire (champ électrique) :

Remarque qui clôt ce chapitre…

Annexe : conseils

Ce qu'on demande	***Ce qu'on utilise***
Etablir l'équation de propagation.	Ecrire les équations de maxwell dans le milieu considéré et appliquer $$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}) = \overrightarrow{grad}(div) - \vec{\Delta}$$
Donner l'équation de D'Alembert.	$$\Delta\vec{X} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial t^2} = \vec{0}$$ Avec $\vec{X} = \vec{E}$ ou $\vec{B}$.
Etablir la relation de dispersion.	On injecte la solution de $\vec{E}$ dans l'équation de propagation. On trouve $k = f(\omega)$.
Donner la relation de dispersion dans le vide.	$k = \frac{\omega}{c}$ avec $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$.
Montrer qu'un milieu est dispersif.	Calculer la vitesse d'une surface d'onde v_φ et montrer qu'elle dépend de ω. Pour cela, on repart de la relation de dispersion.
Montrer qu'un milieu n'est pas dispersif.	Calculer la vitesse d'une surface d'onde v_φ et montrer qu'elle ne dépend pas de ω. Pour cela, on repart de la relation de dispersion.
Montrer qu'un milieu ne laisse pas toutes les ondes se propager.	Etablir la relation de dispersion $k^2 = \cdots$ (en général du type $k^2 = \frac{\omega^2-\omega_c^2}{c^2}$). Si $k^2 > 0$ alors k est réel : propagation sans déformation. Si $k^2 < 0$ alors k est complexe et l'onde se déforme lors de sa propagation. On met en évidence une pulsation de coupure.
Déduire une info de k réel.	Il y a propagation sans déformation.
Déduire une info de k complexe.	Il y a propagation avec déformation (en général atténuation).
Montrer qu'une onde est progressive.	Montrer que, dans la fonction, espace et temps sont liés : $f(x \pm ct)$ ou $g(\omega t \pm kx)$.
Montrer qu'une onde est plane.	Montrer que sur un plan d'onde l'amplitude est uniforme (c-à-d qu'elle ne dépend pas d'une variable de l'espace).
Calculer le champ $\vec{B}$ connaissant $\vec{E}$.	2 cas possibles : - si OPPM, on utilise la relation de structure

	$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{c}$ - sinon, on utilise l'équation de Maxwell Faraday.
Calculer le vecteur de Poynting.	Appliquer la formule $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. Dans le cas d'une OPPM, $\vec{\pi}$ est dirigé suivant la direction de propagation et l'énergie véhiculée par l'onde se déplace à la même vitesse que celle-ci.
Calculer la conductivité d'un milieu type plasma.	Appliquer le pfd à un électron soumis à la force $-e\vec{E}$ et utiliser les complexes.
Déterminer la nature de l'onde réfléchie dans le cas de la réflexion d'une OPPM sur un métal parfait.	Mettre en évidence la nécessité d'une onde réfléchie et utiliser la relation de passage au niveau de l'interface vide-métal en se rappelant que $\overrightarrow{E_{métal}} = \vec{0}$.