

**Exos résolus
PRÉPAS**

MPSI
Prépas scientifiques - 1^{re} année

COLLECTION DIRIGÉE PAR FRÉDÉRIQUE DE LA BAUME ET JULIEN CALAFELL

Physique Chimie

Tout le Cours
Illustré, avec des points méthode et des rappels mathématiques

La préparation des colles
Des fiches de questions de cours et les conseils

Des exercices
Ciblés, incontournables ou extraits de sujets de concours

Des Corrigés
Complets, clairs, assortis de nombreux conseils

NOUVEAU PROGRAMME

hachette
ÉDUCTION

partagelivrescpge.blogspot.com

Physique Chimie

Frédérique de LA BAUME

Cours privés CPGE toutes filières à Toulouse

Caroline GOUTELARD

MPSI – Lycée Pierre de Fermat de Toulouse

Hélène MOUILLERON

PC – Lycée Saliège de Toulouse

Damien TRISTANT

Laboratoire de Physique-Chimie
des Nano-objets INSA et CEMES de Toulouse

Julien CALAFELL

PCSI – Lycée Bellevue de Toulouse

Benoît CHAMPIN

Chef du département Mesures Physiques
IUT Paul Sabatier à Toulouse

Blandine DURAND

PCSI – Lycée Pierre de Fermat de Toulouse

Jean-Baptiste ROTA

PC* – Lycée Poincaré de Nancy

Denis VIVARES

BCPST2 – Lycée Ozenne de Toulouse

Avec la collaboration de :

Claire ABDERRAHMEN – PCSI – Lycée Jacques Amiot
d'Auxerre

Cyril BARSU – PCSI – Lycée Carnot de Dijon

Gilles de BOÜARD – PSI – Lycée Blaise Pascal d'Orsay

André DOMPS – PC* – Lycée Henri Poincaré de Nancy

Faïlor ELFASSI – Ingénieur ISAE-Supaero de Toulouse

Bruno LEBON – MPSI – Lycée Saint-Charles
de Saint-Pierre

Jean-Manuel LEMASQUERIER – BCPST2

– Lycée Roland Garros du Tampon

Françoise MILON – Université Paul Sabatier
de Toulouse

Denise NOGUÉ – PC* – Lycée Bellevue de Toulouse

Lionel VIGNON – PCSI – Lycée Pierre de Fermat
de Toulouse

que les auteurs remercient.

Des questions ? Des suggestions ? Contactez l'équipe d'auteurs à l'adresse suivante :
exosresolus.prepas@gmail.com

Maquette de couverture : Françoise Bouvard

Maquette intérieure : GRAPH'in-folio

Composition/mise en pages/schémas : Belle Page

© Hachette Livre, 2015, 58, rue Jean-Bleuzen, 92 178 Vanves CEDEX.

www.hachette-education.com

Photo de couverture : © Shutterstock images

ISBN : 978-2-01-290666-2

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L.122-4 et L.122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ». Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Avant-propos

À nos lecteurs,

En écrivant cet ouvrage, nous avons voulu apporter aux étudiants un outil de travail efficace et nous espérons qu'au fil des pages, ce livre les aidera à développer leur goût pour l'étude de la physique et de la chimie.

Conforme au programme de CPGE, il en aborde tous les contenus et rappelle souvent au lecteur les points sur lesquels le programme met l'accent ou les compétences explicitement exigibles qui doivent être parfaitement maîtrisées. Nous n'avons fait l'impasse sur aucune notion prérequisée, n'hésitant pas à rappeler des notions théoriquement abordées au lycée. Mais parce qu'un étudiant est aussi un futur ingénieur, un futur chercheur, voire un futur enseignant, il ne saurait apprendre sans comprendre. Parce qu'à ce niveau d'étude, la formation se doit de répondre à toutes les curiosités, il nous a semblé indispensable d'élargir parfois notre propos, toujours dans le souci de faciliter l'apprentissage des contenus.

Nous avons été confortés dans notre démarche de deux façons. D'une part, les recommandations des plus hautes autorités scientifiques nous y incitent, comme on peut le lire dans ce communiqué de l'Académie des sciences du 27 mai 2015 : « L'Académie des sciences est convaincue que les professeurs auront à cœur d'interpréter ces programmes de la manière la plus libre possible et qu'ils sauront transmettre de véritables contenus ambitieux, en les adaptant à chaque classe. »

D'autre part les sujets de concours des nouveaux programmes ont souvent introduit des notions que les candidats ont dû découvrir au moment de l'épreuve. Il ne fait aucun doute qu'il sera toujours plus facile et moins stressant de se pencher sur des notions déjà abordées, même superficiellement, que sur des concepts totalement inconnus.

Nous tenons nos étudiants en haute estime, la grande majorité d'entre eux est désireuse de progresser et disposée à fournir le travail nécessaire. Aussi, nous semble-t-il de notre devoir de leur apporter les outils nécessaires. À travers un cours concis, mais rédigé complètement, des exercices ciblés sans profusion excessive, des points méthodes pragmatiques et concrets et des corrigés parsemés de conseils, nous n'avons rien négligé du plus simple au plus complexe. Nous espérons ainsi que les élèves, quels que soient leur profil et leurs capacités, trouveront dans ce livre de quoi travailler avec efficacité. Par ailleurs, bien qu'axés sur le programme de CPGE, les contenus développés et les méthodes mises en œuvre sont ceux qui sous-tendent la plupart des cours de physique et de chimie (à l'exception de la chimie organique) des deux premières années d'enseignement supérieur scientifique, aussi sommes-nous convaincus que des étudiants d'autres horizons peuvent largement en tirer profit.

Chez tous nous espérons éveiller le plaisir de comprendre, à tous nous souhaitons une brillante réussite.

Nous ne saurions clore cet avant-propos sans un mot à nos collègues qui encouragent leurs étudiants à se constituer une bibliothèque scientifique de travail. Nous espérons que cet ouvrage fera partie de leurs recommandations et, d'avance, nous les remercions de nous faire part de tous les commentaires qui pourraient nous aider à l'améliorer.

Les auteurs

Des questions ? Des suggestions ? Contactez l'équipe d'auteurs à l'adresse suivante :
exosresolus.prepas@gmail.com

Sommaire

1. Réussir en physique-chimie	9
■ Méthodes d'apprentissage ■ Méthodes de résolution ■ Utilisation de l'ouvrage ■ Conseils.	

PARTIE 1 – SIGNAUX

2. L'oscillateur harmonique	15
■ Système masse-ressort ■ Équations différentielles ■ Équation aux dimensions ■ Energies.	
Exercices	24
Corrigés	26
3. Propagation d'ondes	29
■ Signal ■ Période, fréquence ■ Analyse spectrale ■ Onde progressive ■ Longueur d'onde.	
Exercices	37
Corrigés	38
4. Superposition d'ondes	43
■ Représentation de Fresnel ■ Interférences ■ Ondes stationnaires et modes propres d'une corde ■ Diffraction.	
Exercices	52
Corrigés	54
5. Lois de l'optique géométrique	59
■ Sources ■ Indice, dispersion ■ Réflexion ■ Réfraction ■ Objet, image ■ Stigmatisme, aplanétisme ■ Conditions de Gauss.	
Exercices	68
Corrigés	70
6. Lentilles et instruments d'optique	75
■ Objet et image réels ou virtuels ■ Foyers ■ Grandissement, grossissement ■ Miroir plan ■ Lentilles, lentilles minces	
■ Constructions ■ Lois de conjugaison ■ L'œil ■ Association de lentilles.	
Exercices	85
Corrigés	87
7. Introduction au monde quantique	93
■ Dualité onde-corpuscule ■ Effet photo-électrique ■ Relation de de Broglie ■ Fonction d'onde, probabilité de présence ■ Particules confinées dans un puits de potentiel.	
Exercices	100
Corrigés	102
8. Circuits électriques dans l'ARQS	107
■ Charge et intensité ■ Potentiel et tension ■ Caractéristique de dipôle ■ Lois des nœuds ■ Loi des mailles ■ Résistor, condensateur, bobine ■ Générateurs de Thévenin, de Norton ■ Associations série ou parallèle de dipôles.	
Exercices	121
Corrigés	122
9. Régimes transitoires	127
■ Oscillateurs ■ Excitation, réponse, régime ■ Circuits du premier ordre RC et RL ■ Circuit du second ordre RLC	
■ Oscillateur mécanique amorti ■ Analogie électro-mécanique ■ Portrait de phase.	
Exercices	144
Corrigés	147
10. Oscillations forcées	157
■ Régime sinusoïdal et résolution complexe ■ Résonances ■ Bande passante ■ Impédance ■ Méthode de Fresnel.	
Exercices	174
Corrigés	176

11. Filtrage linéaire	183
■ Moyenne, valeur efficace ■ Filtre, fonction de transfert, gain, gain en décibel ■ Diagrammes de Bode ■ Filtres du premier ordre ■ Filtres du second ordre ■ Moyenneur, déivateur, intégrateur.	
Exercices	197
Corrigés	201

PARTIE 2 – MÉCANIQUE

12. Cinématique	211
■ Référentiels ■ Systèmes de coordonnées, déplacement élémentaire ■ Vitesse, accélération ■ Mouvement rectiligne ■ Mouvement parabolique ■ Mouvement circulaire ■ Translation et rotation d'un solide.	
Exercices	223
Corrigés	225
13. Dynamique	231
■ Quantité de mouvement ■ Référentiel galiléen ■ Principe fondamental de la dynamique ■ Théorème de la résultante cinétique ■ Forces de contact, forces à distance ■ Réactions ■ Poussée d'Archimède.	
Exercices	242
Corrigés	244
14. Énergie en mécanique	257
■ Travail, puissance ■ Énergie cinétique ■ Force conservative, énergie potentielle ■ Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique ■ Théorème de l'énergie mécanique ■ Équilibre et stabilité.	
Exercices	266
Corrigés	268
15. Particules chargées dans un champ	275
■ Champ uniforme, stationnaire ■ Accélération d'une charge par un champ électrique ■ Déviation d'une charge par un champ magnétique.	
Exercices	281
Corrigés	286
16. Théorème du moment cinétique	293
■ Moment d'une force ■ Moment cinétique ■ Théorème du moment cinétique vectoriel et scalaire.	
Exercices	298
Corrigés	299
17. Mouvements à forces centrales	305
■ Centre de force ■ Invariants du mouvement ■ Loi des aires ■ Forces newtoniennes ■ Lois de Kepler ■ Satellites.	
Exercices	315
Corrigés	317
18. Mécanique du solide	325
■ Quantité de mouvement ■ Centre d'inertie ■ Moment cinétique ■ Moment d'inertie ■ Action mécanique, couple, liaison pivot ■ PFD ■ Conservation du moment cinétique ■ Théorèmes énergétiques.	
Exercices	334
Corrigés	335

PARTIE 3 – THERMODYNAMIQUE

19. Description des systèmes thermodynamiques	343
■ <i>Grandeurs et fonctions d'état ■ Température, pression, volume ■ Équilibre thermodynamique ■ Énergie interne, capacité thermique à volume constant ■ Gaz parfait, équation d'état ■ Phase condensée.</i>	
Exercices	355
Corrigés	356
20. Échanges énergétiques au cours d'une transformation	359
■ <i>Transformation (réversible, isobare, isochore, isotherme, adiabatique) ■ Diagrammes de Watt et de Clapeyron (P,V) ■ Transfert mécanique (travail) ■ Transfert thermique (chaleur) ■ Grandeurs d'échange et fonctions d'état ■ Thermostat.</i>	
Exercices	369
Corrigés	370
21. Premier principe de la thermodynamique	373
■ <i>Énergie interne microscopique et énergie macroscopique ■ Conservation de l'énergie ■ Enthalpie, capacité thermique à pression constante ■ Relation de Mayer, coefficient adiabatique ■ Détentes de Joule, loi de Joule.</i>	
Exercices	383
Corrigés	385
22. Second principe de la thermodynamique	393
■ <i>Entropie ■ Identités thermodynamiques ■ Entropie créée, échangée, bilan entropique ■ Lois de Laplace ■ Diagrammes entropiques (T,S) ■ Entropie et désordre.</i>	
Exercices	404
Corrigés	406
23. Machines thermiques	413
■ <i>Moteur, récepteur, schéma de principe ■ Diagramme de Raveau ■ Inégalité de Clausius ■ Efficacité et rendement ■ Cycles et rendements de Carnot ■ Premier principe industriel (machine à écoulement) ■ Diagramme de Mollier.</i>	
Exercices	431
Corrigés	433
24. Changements d'état du corps pur	437
■ <i>Transitions de phase ■ Diagramme (P,T), point triple, point critique ■ Diagramme (P,v), courbes de saturation ■ Isothermes d'Andrews ■ Enthalpie et entropie massiques ■ Titre molaire, massique ■ Théorèmes des moments.</i>	
Exercices	448
Corrigés	452

PARTIE 4 – ÉLECTROMAGNÉTISME

25. Champ magnétique	461
■ <i>Spectres et lignes de champ ■ Flux d'un vecteur ■ Aimants, pôles magnétiques ■ Champs créés par un courant (fil, spire, bobine, solénoïde) ■ Dipôle magnétique, moment magnétique ■ Force de Laplace, action sur une tige, sur un cadre ■ Dipôle magnétique dans un champ.</i>	
Exercices	474
Corrigés	476
26. Induction électromagnétique	483
■ <i>Loi de Lenz, loi de Faraday ■ Induction de Neumann, de Lorentz ■ Auto-induction, induction mutuelle ■ Transformateur, alternateur ■ Rails de Laplace ■ Conversion électro-mécanique ■ Haut-parleur.</i>	
Exercices	498
Corrigés	501

PARTIE 5 – TRANSFORMATIONS DE LA MATIÈRE

27. Description et évolution d'un système	511
■ États de la matière ■ Notion de phase ■ Transformations physiques, chimiques et nucléaires ■ Diagramme d'état	
■ Description d'un système ■ Loi des gaz parfaits ■ Activité chimique ■ Quotient de réaction et constante d'équilibre	
■ Prévision de l'évolution d'un système ■ Tableaux d'avancement ■ Détermination de l'état final d'un système.	
Exercices	518
Corrigés	520
28. Cinétique chimique	525
■ Méthodes expérimentales de suivi d'une réaction (conductimétrie, manométrie, etc.) ■ Vitesse de formation d'un produit, vitesse de disparition d'un réactif et vitesse de réaction ■ Loi de vitesse et ordre d'une réaction ■ Loi d'Arrhenius ■ Influence d'un catalyseur ■ Lois cinétiques : réactions d'ordre 0, 1 ou 2 ■ Détermination de l'ordre d'une réaction : méthodes intégrale, des temps de demi-réaction, différentielle et des vitesses initiales ■ Méthodes des conditions stœchiométriques ou de la dégénérescence de l'ordre.	
Exercices	535
Corrigés	537

PARTIE 6 – ARCHITECTURE DE LA MATIÈRE

29. Structure de l'atome et classification périodique	541
■ Rappels de lycée ■ Spectroscopies ■ Orbitales atomiques ■ Nombres quantiques ■ Configuration électronique fondamentale d'un atome ou d'un ion ■ Règles de remplissage : Pauli, Klechkowski et Hund ■ Électrons de cœur et de valence ■ Formation des ions ■ Structure de la classification périodique et principe de construction ■ Lien entre classification périodique et configuration électronique ■ Métaux et non métaux ■ Électronégativité ■ Propriétés redox des éléments ■ Rayons atomique et ionique.	
Exercices	548
Corrigés	550
30. Molécules – Forces intermoléculaires – Solvants	553
■ Représentations de Lewis des molécules et ions moléculaires ■ Hypervalence ■ Longueur et énergie de liaison	
■ Polarité et polarisabilité d'une molécule ■ Interactions de Van der Waals (Keesom, Debye et London) ■ Liaison hydrogène ■ Cohésion des corps purs ■ Classification des solvants : polarité, proticité et caractère dissociant.	
Exercices	561
Corrigés	563
31. Solides cristallins	567
■ Modèle du cristal parfait et modèle des sphères dures ■ Définitions fondamentales : maille, paramètres de maille, nœuds, réseau cristallin, motif, population de la maille, coordinence, masse volumique, condition de contact, compacité ■ Classification des cristaux ■ Cristaux métalliques ■ Structure CFC ■ Cristaux covalents ■ Cristaux ioniques ■ Cristaux moléculaires.	
Exercices	578
Corrigés	582

PARTIE 7 – SOLUTIONS AQUEUSES

32. Réactions d'oxydo-réduction	587
Définitions ■ Nombre d'oxydation ■ Pile électrochimique : réactions aux électrodes, pôles, fém, capacité ■ Potentiel d'oxydo-réduction ■ Électrodes de référence ■ Formule de Nernst ■ Calcul de K.	
Exercices	593
Corrigés	595
33. Réactions en solution aqueuse	599
Réactions acido-basique, d'oxydo-réduction, de complexation et de précipitation ■ Grandeurs caractéristiques : K_A , K_e , K_d , K_s ■ Calcul d'une constante d'équilibre ■ Solution saturée, solubilité ■ Diagrammes de prédominance ou d'existence ■ Prévision des espèces prédominantes et incompatibles ■ Dismutation et médiamutation.	
Exercices	608
Corrigés	611
34. Dosages	619
Dosages par étalonnage, par titrage direct, par titrage indirect et par titrage en retour ■ Relation à l'équivalence ■ Détection de l'équivalence : colorimétrie, pH-métrie, conductimétrie, potentiométrie, avec indicateur coloré ■ Titrages simultanés et successifs.	
Exercices	625
Corrigés	629
35. Diagrammes potentiel-pH (E-pH)	635
Conventions de tracé ■ Tracé d'un diagramme E-pH ■ Exploitation d'un diagramme E-pH : déterminer un E° , un pK_A ou un pK_s ■ Prévision des réactions : dismutation, réaction avec l'eau, etc.	
Exercices	642
Corrigés	646

ANNEXES

A. Base de données	651
■ Système international d'unités ■ Constantes physiques ■ Grandeurs astronomiques, atomiques, usuelles ■ Constantes d'acidité ■ Zones de virage des indicateurs colorés ■ Potentiels redox standards.	
B. Formulaire incertitudes	658
C. Questions expérimentales en chimie	660
D. Lettres grecques	663
Index des mots-clés	664
Liste des points méthodes	669
Classification périodique	671

Réussir en physique-chimie

Cet ouvrage a été pensé dans le but d'aider l'élève en CPGE, mais aussi l'étudiant en licence ou en école d'ingénieur postbac, à réussir en physique-chimie. En voici la philosophie.

I | Le cours

1. Vivre le cours

→ En général

Qu'il soit présenté au tableau ou au vidéo projecteur, assorti ou non de documents, le premier cours est celui du professeur. Il faut le suivre attentivement et prendre un maximum de notes. Nombre d'étudiants sont totalement passifs en classe et ce d'autant plus qu'ils disposent d'un polycopié « où il y a tout ».

Propriétés

La **rentabilisation** du temps passé en classe exige une attitude active :

- prendre des notes, même s'il y a un polycopié ⇒ gain de temps dans la mémorisation,
- faire les calculs en même temps que le professeur ⇒ gain de temps dans l'apprentissage,
- poser des questions, noter les réponses ⇒ gain de temps dans la compréhension.

→ Utiliser cet ouvrage

Comme tous les professeurs, nous avons fait des choix dans la façon de présenter, de regrouper, de séparer les notions abordées. Lorsqu'une notion utile figure ailleurs ou qu'un exercice constitue une illustration intéressante, un renvoi précis y fait référence.

POINT MÉTHODE

- Exploiter son cours écrit en l'annotant au fur et à mesure de sa relecture, en indiquant les points qu'il semble utile de retravailler, ou qui ont paru trop rapides, puis les rechercher dans cet ouvrage grâce :
 - ▶ au sommaire p. 4 à 8 qui recense les notions abordées, ce qui permet de les trouver rapidement,
 - ▶ à l'index p. 664 à 668 qui liste tous les termes simples ou complexes pour approfondir sa recherche.

2. S'approprier le cours

→ En général

Un cours s'apprend, c'est une évidence, pourtant la plupart des étudiants de ce niveau, en général plutôt bons élèves (sans trop d'efforts) au lycée, ne savent pas apprendre un cours. Le lire et le relire est totalement insuffisant comme l'ont montré de nombreuses études scientifiques.

Propriétés

Une **exploitation rentable** de son cours exige de :

- le réécrire : schémas complétés, plan mis en évidence, définitions et théorèmes encadrés...
- le refaire : démonstrations, schémas de principes, exercices d'application directe...
- le résumer : repérer ce qui est essentiel, faire des fiches pour ses futures révisions...

➔ Utiliser cet ouvrage

Cet ouvrage présente un cours concis, complet et rédigé pour apporter tous les éclaircissements sur ce qui « coince » (même si en classe tout semblait clair). Nous l'avons conçu comme un moyen dynamique de travailler grâce à de nombreux repères visuels.

Définitions

- Les **encadrés bleus** indiquent l'essentiel des concepts : des définitions pour maîtriser les objets d'étude et les outils, des énoncés (théorèmes ou principes) pour identifier les fondements du raisonnement, des propriétés pour comprendre le comportement des systèmes étudiés.
 - Les **termes en gras** sont essentiels : il faut connaître impérativement leur définition rigoureuse.
 - Des **tableaux récapitulatifs** résument ou réunissent les connaissances à associer pour synthétiser et trier les concepts, faire le parallèle entre les systèmes, classer et structurer les phénomènes.
 - Des **points méthodes** insistent sur les aspects délicats ou explicitent les outils à maîtriser.
- Les items sous les encadrés aident à les comprendre, précisent les situations particulières, les conditions d'application, donnent des exemples, des élargissements. Il ne faut pas en négliger la lecture.

POINT MÉTHODE

- Faire une **liste des termes en gras** du chapitre et s'entraîner à les définir. Les mots (techniques ou courants) sont les briques du raisonnement. **Rédiger** une définition signifie **s'exprimer dans un français aussi rigoureux que le sont les sciences** (à bannir définitivement : « c'est par exemple quand »).
- Lister **encadrés et points méthodes** et construire une fiche de résumé de cours personnalisée.

3. Préparer la colle

➔ En général

La colle vise à inciter l'élève à apprendre régulièrement le cours et venir en colle sans le connaître est un gâchis de temps et de moyens. Il est d'ailleurs dommage que la plaisante orthographe (khôlle) de cet avantage accordé au taupin ait évolué en un fade et négatif vocable (colle).

Propriété

La **colle** est une chance énorme et un outil de progression dont il faut profiter. Elle doit être l'occasion de vérifier rapidement que l'on connaît l'essentiel du cours, elle permet de bénéficier d'un professeur qui corrige ou précise quelques détails et de s'entraîner sur des exercices et à la pratique de l'oral.

➔ Utiliser cet ouvrage

Pour en optimiser la préparation, des encadrés verts figurent en fin de chaque chapitre.

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Certains concours pratiquent la question de cours à l'oral. Les questions proposées sont concises, adaptées à l'oral. Une trame de points à aborder engage le lecteur à poser les problèmes, organiser ses idées, enchaîner les énoncés et les résultats avec logique, en suivant ce fil conducteur. Couvrant tout le programme, ils constituent aussi un outil efficace de révision (devoir ou concours).

- Une fois le cours appris (ou si l'on croit qu'il l'est...), il faut rédiger ou présenter les réponses aux questions proposées en traquant sans pitié les zones d'ombre ou les raisonnements fumeux.

Erreurs à éviter

- Certaines erreurs sont récurrentes, nous les avons recensées pour les éviter à nos lecteurs.

Quelques «trucs» utiles

- La colle est aussi souvent l'occasion de découvrir quelques petits « trucs » de résolution ou de méthode, que le professeur n'a pas toujours pu aborder en cours (ou qu'on n'a pas jugé utile de retenir...). Faciles et pragmatiques, ces astuces sécurisent pour l'approche de certains points délicats.

J'entends et j'oublie, je vois et je me souviens, je fais et je comprends. CONFUCIUS (551-479 av. JC)

II Les exercices

1. Les différents types d'exercices

→ En général

Il faut faire des exercices, c'est évident, savoir lesquels l'est moins ! Il existe plusieurs types d'exercices qui ont tous leur utilité, à condition de savoir les identifier et de les travailler au moment opportun.

→ Utiliser cet ouvrage

Le nombre d'exercices de cet ouvrage est volontairement limité, car, classiques, originaux ou tirés des sujets de concours, ils ont pour but de soutenir le lecteur, pas de le décourager par leur multitude. Une résolution utile consistera à les rédiger « pour de vrai », de façon à s'entraîner aux conditions réelles.

Définitions

- Un **exercice d'application directe du cours** fait partie intégrante du cours et de son apprentissage (il est souvent présenté en classe par le professeur). Certains sont explicitement au programme.
- Un **exercice académique** est un incontournable, son but est de mettre en œuvre des méthodes classiques, générales et systématiques de résolution, qui s'utiliseront dans de nombreuses situations. L'énoncé est assez bref, s'appuie plutôt sur des systèmes idéaux avec peu d'applications numériques.
- Un **exercice d'entraînement** est un exercice assez répétitif dans les outils, mais qui se penche sur des situations diverses. Tous les professeurs de CPGE en distribuent de longues fiches à leurs élèves.
- Un **exercice de synthèse** est souvent plus difficile, il présente des systèmes complexes, nécessite de mettre œuvre plusieurs méthodes, voire plusieurs parties du cours.

2. Faire VRAIMENT un exercice et en tirer parti

→ En général

Nombreux sont les élèves qui enchaînent les exercices au brouillon, avec le corrigé sous les yeux, en bâclant la rédaction et la présentation. Inutile de se fatiguer, ça ne sert absolument à rien, sauf à donner l'illusion trompeuse de travailler et à perdre beaucoup de temps. Il faut en faire moins, mais il faut les faire bien : entièrement, avec les blocages sur les difficultés, les erreurs, les « tourner en rond » et autres crises d'énervernement. La finalité est le concours (ou l'examen) : il n'y aura ni corrigé, ni cahier, ni professeur, ni internet ce jour-là. Le corrigé est pour plus tard. Il faut essayer, essayer encore, et en cas de résistance, résister farouchement à la tentation du corrigé (même juste un coup d'œil), mais plutôt retravailler le point de cours associé, un exercice plus simple, puis reprendre encore l'exercice.

→ Utiliser cet ouvrage

Énoncés et corrigés sont clairement identifiés par des fonds de couleur, des renvois de pages pour aller vite à ce qu'on cherche. Souvent le cours précise un numéro d'exercice en rapport avec le point traité. Quand l'exercice a été vraiment travaillé, la lecture du corrigé devient pertinente. Il ne faut pas le survoler en ne vérifiant que les valeurs numériques. Nous avons émaillé ces corrigés de commentaires « bien comprendre » qu'il faut prendre le temps de lire, même si on pense avoir compris, car un détail important a pu être négligé, un piège évité uniquement par chance. Des méthodes de résolution y sont explicitement mises en évidence, que le lecteur pourra reproduire dans bien des exercices.

Bien comprendre

Il faut savoir identifier les difficultés classiques et apprendre à les contourner, faire des liens entre les sujets. C'est ici qu'une difficulté récurrente, classique, insidieuse, qu'il faut dompter, est expliquée.

POINT MÉTHODE

- Il ne faut pas négliger les exercices simples, tenter un exercice compliqué sans maîtriser le facile est une perte de temps qui peut décourager. Par ailleurs, si les exercices d'application directe du cours posent difficulté, c'est que le cours n'est pas acquis. Les énoncés y sont volontairement concis, on attend d'un étudiant qu'il sache présenter sans aide ce genre de problème et sa solution.
- **IMPORTANT : Aucune donnée qui figure dans la base de données (constantes fondamentales et grandeurs usuelles) p. 651 à 657 n'est rappelée dans les exercices. Il est essentiel d'en connaître un maximum, cela fait gagner du temps et donne des ordres de grandeurs pour répondre à des questions ou analyser ses résultats. Savoir identifier les grandeurs nécessaires est efficace pour dominer la résolution d'un exercice. Les rechercher, voire les connaître par cœur est particulièrement rentable.**
- Le nombre de **chiffres significatifs** dans les résultats n'est pas nécessairement celui de la donnée la moins précise, comme martelé au lycée. En effet, si la notion de chiffres significatifs est essentielle dans une mesure réelle, en exercice on n'y attache pas une importance excessive. Il n'est pas pertinent si une donnée est $P = 1$ bar de mettre tous les résultats avec un seul chiffre significatif. Inversement, on ne donnera pas les 12 décimales de la calculatrice ! On fera preuve de discernement et d'intelligence, généralement, exprimer un résultat avec 2 ou 3 chiffres sera le plus approprié.

La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information. ALBERT EINSTEIN

III Méthodes générales utiles en physique-chimie

1. Poser le problème

Trop d'élèves, bien que volontaires et travailleurs, n'ont aucune méthode pour résoudre un problème. Ils pensent que, sous prétexte de concours ou d'énoncé long, il faut aller le plus vite possible dans les calculs pour gagner du temps et faire un maximum du sujet. Même s'il ne s'agit pas de lambiner, cette stratégie est vouée à l'échec. Poser le problème, c'est s'assurer que l'énoncé a été bien lu, sans omission, c'est s'imprégner du sujet (indispensable en concours), c'est dessiner un chemin vers la solution, c'est prévoir les étapes incontournables, bref, c'est maîtriser son destin. Il est donc temps de s'approprier une (vraie) méthode de résolution.

Une petite image pour le comprendre : un alpiniste qui souhaite escalader un sommet prépare son expédition, étudie la météo, repère un trajet optimal, choisit son matériel avec soin avant de se lancer. Si un prétendant à l'escalade néglige ces précautions et fonce sur la montagne, il risque la catastrophe et n'arrivera jamais au

sommet. Il en va de même pour un exercice, l'entamer par la première formule qui tombe sous la main est une erreur aussi grave que fréquente. Dans le tableau qui suit, la démarche, qu'on pourrait appeler de l'alpiniste chevonné, apparaît clairement. Tout autre domaine de la physique ou de la chimie pourrait y être ajouté.

THÈME	ÉLECTRICITÉ	MÉCANIQUE	THERMODYNAMIQUE
Poser le problème Schéma Grandeurs utiles Valeurs numériques Notations choisies	Schéma de circuit Tensions et intensités définies sur le schéma avec notations et orientations Paramètres du circuit	Schéma du problème, axes du référentiel, base de projection, forces, données (dimensions, angles...)	Schéma du dispositif, nature des parois des enceintes, pressions, températures, volumes, ... Schéma synoptique des états successifs du système et des transformations
Cadre ou hypothèses de travail Outils	ARQS Résistances négligeables Conditions initiales Relations entre les grandeurs	Nature du référentiel, définition du système, frottements négligés, conditions initiales Vecteurs cinématiques	Réversibilité des transformations, Choix du système (fermé en général)
Appliquer une loi physique	Loi des nœuds Loi des mailles	PFD (TRC ou TMC) Théorème énergétique	1 ^{er} Principe 2 nd Principe
Calculs	Les enchaîner avec rigueur, liens logiques, sans précipitation, mais sans multiplier les étapes		
Résultats	Équations différentielles des grandeurs électriques, régimes, gains, déphasages, périodes...	Équations différentielles, équations horaires, énergies, nature des mouvements...	Travail ou chaleur échangés, rendement d'une machine, bilan énergétique ou entropique
Analyse et conclusion	L'équation ou le comportement du système est-il conforme à mes prévisions ? Puis-je le ramener à un autre système connu ? Les signes sont-ils cohérents ? Les valeurs numériques sont-elles pertinentes ? Comment tel paramètre agit-il sur le système ? Que se passe-t-il s'il varie, si je le néglige ? Puis-je comparer ce système à un autre connu ? À un exemple concret du quotidien ?		

2. Les mathématiques, langage de la physique

La physique et la chimie utilisent les mathématiques pour formuler les questions, traduire la pensée, résoudre les problèmes, structurer la description des systèmes, synthétiser les idées fondamentales ... **On ne peut pas progresser en physique-chimie sans le support des mathématiques et du calcul.** Les plus grands scientifiques l'ont répété. Le scientifique peut être amené à utiliser des concepts mathématiques très sophistiqués, voire à initier le développement de théories mathématiques inédites pour les besoins de sa cause. Bien plus modestement, au niveau des premières années d'études supérieures, les mathématiques utiles au scientifique sont clairement identifiées. Les outils mathématiques utiles au propos sont brièvement rappelés en début de chaque chapitre. Ils se déclinent en quelques domaines bien identifiés.

OUTILS MATHÉMATIQUES

- **Calcul différentiel** : dérivation, différentiation, opérateurs (gradient...), fonctions usuelles, fonctions de plusieurs variables, développements limités.
- **Calcul intégral** : primitives, intégration, équations différentielles, intégrales simples et multiples.
- **Calcul vectoriel** : produit scalaire, produit vectoriel, projection de vecteurs, bases de coordonnées.
- **Trigonométrie** : fonctions, formules utiles, cercle trigonométrique.
- **Nombres complexes** : propriétés des nombres complexes, exponentielle complexe, plan complexe.

Le physicien, comme le chimiste, fait confiance au mathématicien pour lui fournir des outils appropriés. Pour autant, leur signification ne doit pas être méconnue (par exemple : la dérivation comme moyen de comprendre les variations d'une grandeur, l'intégration comme moyen d'effectuer une somme continue). Il faut aussi comprendre que le physicien manipule des grandeurs physiques qui prennent sens dans la réalité et qu'un assouplissement de l'exigence mathématique lui est indispensable : par exemple, la pression P dans l'atmosphère peut s'étudier selon l'altitude z ou selon la température T . Parce qu'il s'agit de la même grandeur physique, le physicien écrit $P(z) = P(T)$, ce que le mathématicien récuse.

3. Se réconcilier avec le calcul

Le calcul, autrefois meilleur ami du taupin, est devenu sa bête noire, son pire ennemi, alors qu'il est notre plus grand allié, notre secours permanent vers la solution. Il n'est que technique, donc maîtrisable. Autrement plus difficile et subtile est l'analyse physique d'un problème. Les programmes tendent à dispenser les élèves du calcul, voire à leur en interdire l'accès. C'est aussi improductif que d'interdire à un basketteur professionnel de sauter ou à un musicien de lire une partition... Par ailleurs, la physique est une science qui explique la nature et les calculs doivent être rédigés, enchaînés par des liens logiques et justifiés. Nous croyons à la vertu de l'exemple, aussi proposons-nous des corrigés rédigés, avec des calculs bien lisibles et ordonnés, afin que le lecteur puisse s'en inspirer pour présenter ses copies.

4. Les bons réflexes

- ➡ **Rédaction :** La physique-chimie s'explique dans un français d'autant plus clair qu'elle est bien comprise. Les rapports des jurys de concours insistent régulièrement sur l'importance de rédiger soigneusement.
- ➡ **Schématisation :** La traduction d'un énoncé par un schéma reste le meilleur moyen de le comprendre et le point de départ le plus efficace de la résolution.
- ➡ **Notations :** Elles doivent être parlantes, et, dans le cours, nous les avons systématisées (parfois en les alourdissant) pour qu'aucune ambiguïté ne subsiste, en particulier dans l'apprentissage des formules. Dans les exercices, cependant, les notations sont variées, car on doit s'adapter à tout choix d'un énoncé.
- ➡ **Homogénéité et équations aux dimensions :** À employer sans modération ! C'est un moyen puissant de trouver des réponses, de repérer des erreurs et de les corriger.
- ➡ **Calculs d'ordres de grandeur :** Ils donnent rapidement un résultat numérique sans perdre de vue son objectif. Ils permettent de vérifier rapidement un calcul et de détecter de nombreuses erreurs.
- ➡ **Structure et rigueur :** Le raisonnement se construit grâce aux lois de la physique, dans le respect de la logique mathématique et le cadre de la rigueur scientifique.
- ➡ **Pertinence et culture générale :** Tout résultat demande à être analysé et sa pertinence, dans le cadre du problème ou au-delà, ne doit faire aucun doute. Une bonne culture scientifique est alors indispensable.

On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres.

Mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison.

HENRI POINCARÉ (1860-1912)

En conclusion

Percevoir les secrets des lois de la nature est le but de la physique. Il n'est de grand scientifique qui ne s'émerveille de la richesse intérieure qu'apporte cette recherche. C'est pourquoi, si nous n'avions qu'un seul conseil à donner au lecteur, ce serait d'être curieux de l'Univers qui l'entoure... !

L'ultime but de la science est de fournir une théorie unique qui décrive l'Univers dans son ensemble. STEPHEN HAWKING (1942-)

L'oscillateur harmonique

Les systèmes oscillants sont fréquemment rencontrés dans tous les domaines de la physique (mécanique, électricité, physique atomique, thermodynamique...). Très souvent, l'étude du comportement d'un système au voisinage d'une position d'équilibre stable conduit à une évolution de type « oscillateur harmonique » que l'on étudie dans ce chapitre à partir de l'oscillateur mécanique à une dimension, modélisé par le mouvement horizontal sans frottement d'une masse accrochée à un ressort idéal, dont les propriétés pourront facilement être étendues aux autres domaines. Par ailleurs dans ce premier chapitre, outre l'étude d'un système classique, plusieurs outils fréquemment utilisés en physique sont abordés et expliqués simplement (équation différentielle, équation aux dimensions...).

OUTILS MATHÉMATIQUES

■ **Notation d'une dérivée** : La notation f' utilisée en mathématiques pour exprimer la dérivée de la fonction f est proscrite la plupart du temps en physique, en particulier en raison du grand nombre de variables différentes utilisées. On emploie donc une notation qui ne laisse aucune ambiguïté à ce sujet :

$$\frac{df}{dx} \text{ signifie dérivée de } f(x) \text{ par rapport à } x ; \quad \frac{dx}{dt} \text{ signifie dérivée de } x(t) \text{ par rapport à } t$$

La variable t étant très fréquente, on note avec des « points » les dérivées correspondantes :

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} \quad \text{et} \quad \frac{d\dot{u}}{dt} = \ddot{u} \quad \text{la variable } t \text{ est nécessairement le temps}$$

■ **Dérivées des fonctions trigonométriques** :

$$\frac{d \cos \theta}{d \theta} = -\sin \theta \quad \text{et} \quad \frac{d \sin \theta}{d \theta} = \cos \theta$$

■ **Dérivée d'une fonction de fonction** : l'expression $(u(v(x)))' = v'(x) \times u'(v(x))$ sera plutôt écrite :

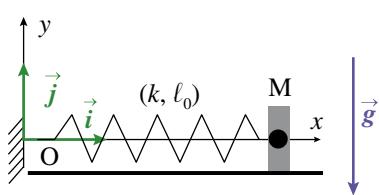
$$\frac{d[u(v(x))]}{dx} = \frac{d[u(v)]}{dv} \frac{dv(x)}{dx} \quad \text{en particulier :} \quad \frac{d(\cos[\theta(t)])}{dt} = \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} \frac{d\theta(t)}{dt} = -\dot{\theta} \sin[\theta(t)]$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{d[\cos(\omega t)]}{dt} = -\omega \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \frac{d[\sin(\omega t)]}{dt} = \omega \cos(\omega t) \quad (\omega = \text{constante})$$

I Étude dynamique

1. Description du dispositif masse + ressort

Dans tout ce chapitre, on étudie le mouvement d'un solide de petite dimension, de masse m , dont la position est repérée par le point M, en mouvement dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} galiléen. Pour simplifier, on note : $\vec{v} = \vec{v}_M^{(\mathcal{R})}$ et $\vec{a} = \vec{a}_M^{(\mathcal{R})}$ la vitesse et l'accélération de M dans \mathcal{R} .

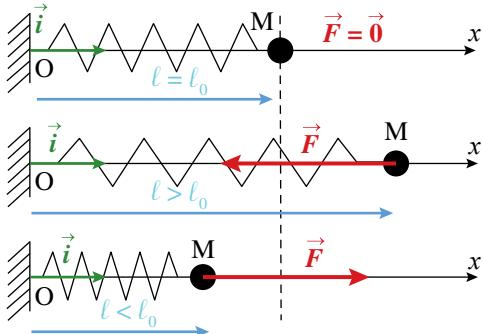


Cette masse M peut glisser sans frottement sur un plan horizontal. Elle est attachée à l'extrémité d'un ressort idéal, c'est-à-dire parfaitement élastique et sans masse, dont l'autre extrémité est fixée en un point O. Le ressort est caractérisé par sa longueur à vide notée ℓ_0 et par sa constante de raideur k (unité : N.m⁻¹) et se déforme selon l'axe (Ox). L'accélération de la pesanteur \vec{g} est uniforme, selon $-\vec{j}^1$.

1. On a noté la base selon la notation familière au lycée, des notations plus systématiques seront introduites au chapitre 12.

→ Force de rappel élastique exercée par un ressort

Pour un point matériel M accroché à un ressort idéal de longueur à vide ℓ_0 (au repos) et de constante de raideur k ($k > 0$), on comprend intuitivement et on vérifie expérimentalement que :



si $\ell = \ell_0$ la force de rappel est nulle.

si $\ell > \ell_0$ la force de rappel est selon $-\vec{i}$ et proportionnelle à l'allongement : $\Delta\ell = \ell - \ell_0$

si $\ell < \ell_0$ la force de rappel est selon $+\vec{i}$ et proportionnelle à l'allongement : $\Delta\ell = \ell_0 - \ell$

Définition

Dans tous les cas, la **force de rappel** ou **force élastique** exercée par le ressort sur M est proportionnelle à l'allongement $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ du ressort (grandeur algébrique : positive ou négative) selon la loi :

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i}$$

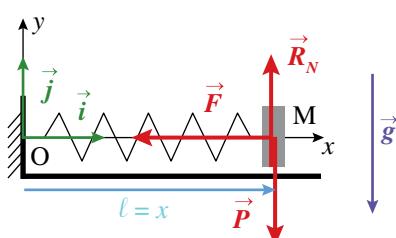
ℓ_0 est la longueur à vide du ressort, k est la **constante de raideur** du ressort qui s'exprime en N.m^{-1} .

POINT MÉTHODE

Définir l'allongement d'un ressort

- La notion d'**allongement** doit toujours être comprise au sens algébrique du terme (sa valeur peut être positive ou négative) et représente la différence entre la longueur du ressort dans un état quelconque et sa longueur à vide. Pour un ressort horizontal, la **longueur à vide** coïncide avec la longueur à l'équilibre, mais ce ne sera pas le cas pour un ressort vertical par exemple.
- Afin de s'éviter des erreurs de signes, on schématisera toujours le système avec un allongement positif, et on écrira algébriquement la force de rappel, puis on conservera cette **expression algébrique** lors de la projection de la 2^e loi de Newton.

2. Mise en équation du mouvement



Forces appliquées à M dans \mathcal{R} galiléen :

Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i} = -k(x - \ell_0)\vec{i}$

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -m\vec{g}\vec{j}$

Réaction du support : $\vec{R}_N = R_N\vec{j}$

Frottements négligés.

On applique la deuxième loi de Newton au système M dans \mathcal{R} galiléen que l'on projette ensuite dans la base (\vec{i}, \vec{j}) :

$$ma_M^{(R)} = \vec{F}_{ext} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{R}_N \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) \\ m\ddot{y} = 0 = R_N - mg \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

L'équation (1) obtenue est une équation différentielle, car elle relie une fonction (ici $x(t)$) à ses dérivées (ici $\ddot{x}(t)$). C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et second membre non nul.

Remarque : L'équation (2) montre que la réaction normale compense le poids (cas particulier d'un mouvement horizontal, dans un référentiel galiléen, sans autre force verticale).

POINT MÉTHODE

Identifier une équation différentielle

- Une **équation différentielle** (ED) est une équation dont l'inconnue est une fonction. Les termes de l'équation différentielle font apparaître les dérivées de cette fonction, ainsi que la variable dont dépend la fonction. Résoudre l'équation, c'est déterminer l'expression de cette fonction. Il faut avoir à l'esprit que la résolution revient plus ou moins implicitement à intégrer les expressions des dérivées. Or la primitive d'une fonction est toujours définie à une constante près. Ainsi la solution générale d'une équation différentielle est une famille de fonctions.
- Une équation différentielle à second membre nul est linéaire si toute combinaison **linéaire** $\alpha u + \beta v$ (α, β réels) de solutions u, v , est aussi solution. Par extension on dira qu'une équation à second membre non nul est linéaire si l'équation à second membre nul l'est.
- La **RÉSOLUTION** des équations différentielles fait l'objet de cours de mathématiques approfondis, dont le physicien utilise les résultats². La nature des solutions dépend évidemment de la nature de l'équation, donc il est essentiel face à une équation différentielle de déterminer à quelle catégorie elle appartient.
- On commencera par l'écrire sous une **forme standard**, en plaçant à gauche de l'égalité, tous les facteurs contenant la fonction ou ses dérivées, et à droite tous les autres facteurs. On ordonnera ensuite les dérivées en commençant par l'ordre le plus élevé et, généralement, on factorisera de façon que le coefficient du premier terme soit égal à 1. On donnera alors les indications suivantes : équation différentielle du n -ième ordre, linéaire ou non, à coefficients constants ou non, avec second membre non nul ou nul.

Exemple : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0$ ED du second ordre linéaire à coefficients constants et second membre non nul

$\frac{dv}{dt} + \alpha v^2 = 0$ ED du premier ordre non linéaire à coefficients constants et second membre nul

$\frac{dp}{dz} = -\mu g$ ED du premier ordre linéaire à coefficients constants et second membre non nul

- Enfin, on sera vigilant sur la **variable** dont dépend la fonction ici dans l'ordre $x(t), v(t), p(z)$

Afin d'introduire un paramètre pertinent, on détermine la dimension du facteur k/m :

$$\left[\frac{k}{m} \right] = \frac{[k]}{M} = \frac{(M.L.T^{-2}).L^{-1}}{M} = T^{-2}$$

On introduit donc le paramètre ω_0 , une pulsation, qui vaut : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et l'équation (1) se réécrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0$$

On remarque par ailleurs que ℓ_0 s'identifie ici à la position d'équilibre x_{eq} du système.

2. En particulier, l'unicité des solutions est généralement considérée comme établie.

Définitions

- On appelle **oscillateur harmonique non amorti** (ou oscillateur harmonique pur ou oscillateur harmonique libre idéal), noté OH, tout système à un degré de liberté dont l'évolution au cours du temps, en l'absence d'excitation extérieure, est régie par une équation différentielle du type :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq} \quad (\text{E})$$
- Le paramètre ω_0 dans (E) est la **pulsation propre** de l'oscillateur harmonique et x_{eq} la position d'équilibre du système. La pulsation s'exprime en rad.s⁻¹.
- Dans le cas du dispositif masse-ressort étudié ici, la pulsation propre vaut : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
- D'une façon générale en physique, le terme « harmonique » qualifie un système décrit par une grandeur dont les variations temporelles sont sinusoïdales.

POINT MÉTHODE

Utiliser une équation aux dimensions

- L'**équation aux dimensions** est un outil extrêmement commode, qui permet non seulement de déterminer l'unité d'une grandeur, mais aussi de vérifier l'homogénéité³ d'une expression, de détecter des erreurs de calcul littéral et d'introduire des paramètres caractéristiques (constante de temps par exemple) d'un système.
- On obtient la **dimension d'une grandeur** quelconque à l'aide de toute formule physique correcte, car la physique s'appuie sur des lois toutes cohérentes et homogènes. Ainsi ci-dessus, on a déterminé la dimension de la constante k , à l'aide de celle d'une force, dans la deuxième loi de Newton : $[F] = [ma] = MLT^{-2}$
- S'il a été toléré au lycée une écriture sur les unités, on s'attachera maintenant à travailler en dimension, notion qui est valable quel que soit le système d'unités. La dimension d'une grandeur s'écrit entre crochets et les dimensions présentes dans les unités de base du système international s'écrivent sans crochet. En mécanique on se ramènera généralement à trois d'entre elles : L = Longueur ; M = Masse ; T = Temps.

II Description du mouvement

1. Solution de l'équation différentielle

L'équation du mouvement $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$ a pour solution générale $x(t) = x_H(t) + x_{SP}(t)$ où $x_H(t)$ et $x_{SP}(t)$ sont respectivement :

$$x_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{la solution générale de l'équation homogène :} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x_{SP}(t) = x_{eq} = \text{constante} \quad \text{une solution particulière de l'équation complète :} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

Résultats

- Le mouvement quelconque de la masse fixée au ressort est un mouvement oscillant régi par des fonctions sinusoïdales du temps :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{eq} \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes d'intégration réelles.}$$
- Le système oscille autour de sa position d'équilibre : $X(t) = x(t) - x_{eq} = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

3. La vérification de l'homogénéité permet de corriger un nombre considérable d'erreurs de calcul. Les erreurs d'homogénéité sont pourtant tellement fréquentes dans les copies, que certains professeurs possèdent même un tampon « inhomogène » pour les indiquer !

- On vérifie aisément que l'expression ci-dessus est bien une solution de l'équation différentielle (E). En effet :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{eq} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 - \omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t) \\ \ddot{x}(t) = 0 - \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \sin(\omega_0 t) \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

Définitions

- Le mouvement de l'oscillateur harmonique peut s'écrire :

$$x(t) = x_{eq} + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{ou} \quad x(t) = x_{eq} + X_m \sin(\omega_0 t + \psi)$$
- X_m est l'**amplitude** de l'oscillation, φ ou ψ la **phase à l'origine**.

■ Les deux expressions ci-dessus, ainsi que la forme précédente, décrivent le même comportement. Selon la situation, les conditions initiales, la nature du système physique ou le but de son étude, on utilisera l'une ou l'autre forme. D'une façon générale, la première forme (somme d'un sinus et d'un cosinus) est plus commode pour déterminer les constantes d'intégration. Par contre la forme avec un seul cosinus est plus « physique », car adaptée pour connaître les caractéristiques du comportement du système (en particulier l'amplitude de l'oscillation, voir exercice n° 1 p. 24).

- On peut toujours choisir $X_m \geq 0$ (voir exercice n° 1 p. 24).

POINT MÉTHODE

Résoudre une équation différentielle

- La **solution d'une équation différentielle** à second membre non nul est la somme de la solution générale de la même équation sans second membre (équation dite homogène), appelée **solution homogène** et d'une **solution particulière** de l'équation complète que l'on recherche sous la forme du second membre (par exemple sinusoïdal si ce second membre est sinusoïdal), donc ci-dessus sous forme d'une constante puisque le second membre est constant. Le cours de mathématiques en apportera la démonstration.
- La solution générale introduit nécessairement autant de **constantes d'intégration** que d'ordre dans l'équation, donc deux (A et B ou X_m et φ ou X_m et ψ) dans le cas de l'oscillateur harmonique. Une résolution complète, dans le cadre d'un problème déterminé, passe par la détermination de ces constantes à l'aide de valeurs particulières qui seront généralement en physique les **conditions initiales** si la variable est le temps (ou les **conditions aux limites** si la variable est spatiale).

2. Prise en compte des conditions initiales

La solution de l'équation différentielle (E), du second ordre, comprend deux constantes d'intégration. Il est donc nécessaire de connaître deux conditions initiales du mouvement (C.I.), par exemple la position et la vitesse de M à la date $t = 0$, pour déterminer entièrement l'expression de $x(t)$. Si on choisit les conditions initiales suivantes : à $t = 0$ M est écarté de la position d'équilibre à l'abscisse $x_{eq} + x_1$ et lâché sans vitesse initiale, alors :

$$x(0) = x_{eq} + x_1 \quad \text{avec } x_1 > 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Soit : $x(0) = x_{eq} + A \cos(\omega_0 \cdot 0) + B \sin(\omega_0 \cdot 0) = x_{eq} + A = x_{eq} + x_1 \Rightarrow A = x_1$
 et $\dot{x}(0) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 \cdot 0) + \omega_0 B \cos(\omega_0 \cdot 0) = \omega_0 B = 0 \Rightarrow B = 0$

d'où la solution :

$$x(t) = x_{eq} + x_1 \cos(\omega_0 t)$$

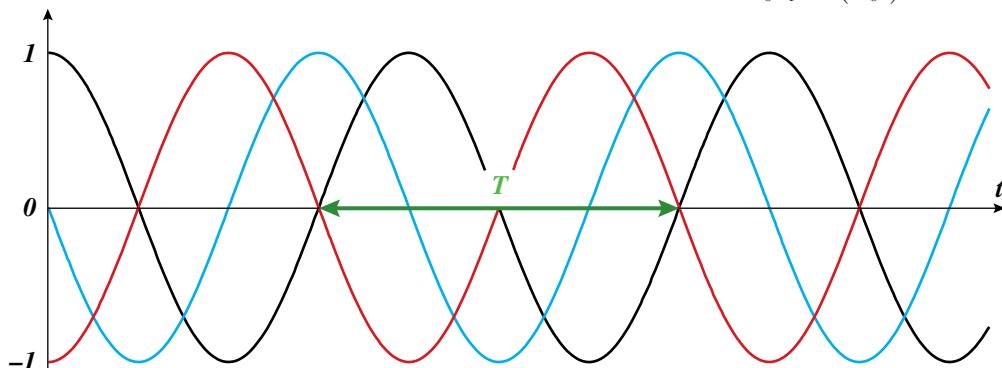
3. Description du mouvement sinusoïdal rectiligne

Si l'on conserve les conditions initiales de l'exemple du II-2. alors :

Écart à l'équilibre : $X(t) = x_1 \cos(\omega_0 t)$

Vitesse : $v(t) = \dot{x}(t) = \dot{X}(t) = -\omega_0 x_1 \sin(\omega_0 t)$

Accélération : $a(t) = \ddot{x}(t) = \ddot{X}(t) = -\omega_0^2 x_1 \cos(\omega_0 t)$



Dans le graphe ci-dessus les grandeurs ont été normalisées, c'est-à-dire transformées en grandeurs sans dimensions en les divisant par leur amplitude⁴. Ainsi elles peuvent figurer sur le même graphe, avec la même échelle. On constate alors aisément que lorsque l'écart à l'équilibre est extrémal, l'accélération l'est aussi, mais la vitesse est nulle. Lorsque l'accélération est nulle, le point passe par sa position d'équilibre tandis que la vitesse est extrémale. **Position et accélération sont en opposition de phase**, tandis que **position et vitesse sont en quadrature de phase**.

Résultats

- La solution générale de l'équation différentielle (E) : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$ d'un OH est :

$$x(t) = x_{eq} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = x_{eq} + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = x_{eq} + X_m \sin(\omega_0 t + \psi)$$

où A et B (ou X_m et φ ou X_m et ψ) sont des constantes réelles ($X_m \geq 0$) obtenues grâce aux C.I.

- Pour l'écart à l'équilibre $X(t) = x(t) - x_{eq}$ régi par (E') : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ la solution est :

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = X_m \sin(\omega_0 t + \psi).$$

Nom	Expression	Dimension	USI
Pulsation	ω_0	T^{-1}	rad.s ⁻¹
Période	$T_0 = 2\pi / \omega_0$	T	s
Fréquence	$f_0 = 1 / T_0 = \omega_0 / 2\pi$	T^{-1}	Hz
Amplitude	$X_m > 0$	L	m
Phase instantanée	$\omega_0 t + \varphi$	\emptyset	rad
Phase à l'origine	φ	\emptyset	rad

La plupart des systèmes ou des phénomènes physiques ne sont pas harmoniques, c'est-à-dire que leurs variations ne sont pas sinusoïdales. Cependant on peut montrer qu'une fonction périodique peut s'écrire

4. On représente donc respectivement X/x_1 , $v/\omega_0 x_1$ et $a/\omega_0^2 x_1$.

comme une somme de fonctions sinusoïdales⁵. L'équation harmonique constituera donc la base de nombreux phénomènes. Ce concept a d'ailleurs déjà été abordé au lycée lors de l'analyse sonore et sera développé dans les chapitres qui suivent, où les signaux sinusoïdaux seront utilisés dans l'étude des ondes, et ensuite en électrocinétique. Une bonne connaissance de l'oscillateur harmonique est donc indispensable pour aborder l'étude de signaux plus complexes.

III | Aspect énergétique

Les grandeurs énergétiques utilisées ici seront étudiées en détail dans le chapitre 14. On revient à un oscillateur dans le cas général avec :

$$x(t) = \ell(t) = x_{\text{eq}} + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad ; \quad \dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad ; \quad x_{\text{eq}} = \ell_0$$

1. Énergie cinétique

L'énergie cinétique du point matériel M, de masse m , de vitesse $\vec{v} = \vec{v}_M^{(\mathcal{R})}$ dans le référentiel \mathcal{R} galiléen est définie par :

$$E_C = \frac{1}{2} m (\vec{v}_M^{(\mathcal{R})})^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

C'est l'énergie associée au mouvement de M. Pour l'oscillateur harmonique on a :

$$E_{C,OH}(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

2. Énergie potentielle

Certaines forces, dites conservatives, sont associées à une énergie potentielle. Dans le cas de la force de rappel élastique du ressort idéal, cette énergie potentielle s'écrit :

$$E_P = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$$

On peut vérifier alors que : $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx} \vec{i}$ pour le système masse + ressort.

C'est l'énergie stockée dans le ressort du fait de sa déformation. Pour l'oscillateur harmonique, on a :

$$E_P(t) = \frac{1}{2} k (x(t) - x_{\text{eq}})^2 = \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

En utilisant : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $X(t) = x(t) - x_{\text{eq}}$ on obtient :

$$E_{P,OH}(t) = \frac{1}{2} k X^2(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

3. Energie mécanique

L'énergie mécanique E_m du point matériel M, de masse m , de vitesse $\vec{v} = \vec{v}_M^{(\mathcal{R})}$ et d'énergie potentielle E_P dans le référentiel \mathcal{R} galiléen est définie par :

$$E_m = E_C + E_P$$

5. La somme est alors discrète avec des fréquences multiples de la fréquence de la fonction étudiée, c'est l'analyse spectrale (ou analyse de Fourier). On généralise le concept à des fonctions non périodiques à l'aide d'une somme continue sous forme d'intégrale nommée transformée de Fourier.

C'est l'énergie totale du système. Pour l'oscillateur harmonique, on a :

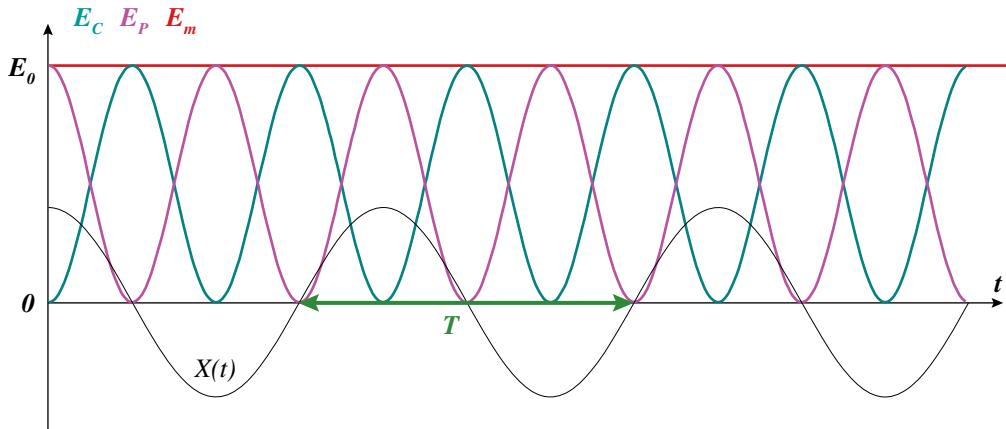
$$E_{m,OH}(t) = E_{C,OH}(t) + E_{P,OH}(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_{m,OH}(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 = \frac{1}{2}kX_m^2 = E_0$$

Résultats

- L'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique **se conserve au cours du temps**.
- La période des énergies cinétique et potentielle de l'oscillateur harmonique est la moitié de celle de ses oscillations.

Le graphe ci-dessous représente l'évolution temporelle des différentes formes d'énergies du système (avec les conditions initiales de l'exemple du II-2 : $x(t) = x_{eq} + x_1 \cos(\omega_0 t)$). Il apparaît clairement que la période des énergies cinétique et potentielle est la moitié de celle de $X(t)$ (voir exercice n° 3 p. 25).



N. B. : Dans le graphe ci-dessus, la courbe $X(t)$ a été placée pour servir de repère et donc elle est sans échelle particulière.

On verra dans le chapitre 14 de mécanique que la conservation de l'énergie mécanique est caractéristique des mouvements qui ne prennent en compte aucun phénomène dissipatif (frottements, etc.) dans leur modélisation.

4. Retour à l'équation du mouvement

On peut retrouver l'équation différentielle (E) du mouvement d'un OH à partir de la conservation de l'énergie mécanique au cours du temps. Comme elle est constante, sa dérivée par rapport au temps est nulle, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{dE_{m,OH}}{dt} &= 0 = \frac{d(E_C(t) + E_P(t))}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}k(x(t) - x_{eq})^2 \right) \\ 0 &= m\ddot{x}(t)\dot{x}(t) + k(x(t) - x_{eq})\dot{x}(t) \end{aligned}$$

Ce qui équivaut, pour $\dot{x}(t)$ non identiquement nul, à : $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}x_{eq}$ ou $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{eq}$

POINT MÉTHODE*Simplifier une équation différentielle*

- On obtient souvent des **équations différentielles** comme celle qui précède, avec une fonction en facteur, comme ici \dot{x} la dérivée de x . Il faut bien comprendre qu'il s'agit ici de fonction et non de simples nombres comme dans une équation algébrique.

On peut écrire que l'équation $\dot{x}[m\ddot{x} + k(x - x_{eq})] = 0$ a deux formes de solutions :

$\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow$ la vitesse du système est constamment nulle, il est donc immobile.

ou $m\ddot{x} + k(x - x_{eq}) = 0 \Rightarrow$ le système a le mouvement oscillant (étudié dans le chapitre).

La première solution est dite triviale et ne présente généralement pas d'intérêt. De ce fait on écrit directement la seconde, en « simplifiant » par le terme $\dot{x}(t)$, même si cette fonction peut s'annuler pour certaines valeurs de t .

VERS LA COLLE**Questions de cours**

- Dispositif masse – ressort horizontal : propriétés de la force de rappel, mise en équation du mouvement.
- Oscillateur harmonique : définition, expressions de la solution de l'équation différentielle, signification physique des différents termes, rôle des conditions initiales.
- Énergie de l'oscillateur harmonique : différentes formes d'énergie, expressions, conservation de l'énergie mécanique, équation différentielle à partir de l'énergie.

Erreurs à éviter

- La dérivée de $\sin(\theta)$ par rapport à t n'est pas $\cos(\theta)$ mais $\dot{\theta}\cos(\theta)$.
- La détermination des constantes d'intégration se fait une fois l'équation complètement résolue et pas sur la solution homogène seulement.

Quelques « trucs » utiles

- Un système oscillant oscille toujours par rapport à sa position d'équilibre, il sera donc plus commode de paramétriser le mouvement avec une variable dont l'origine est à la position d'équilibre (noté $X(t)$ dans le cours) plutôt que par rapport au support ($x(t)$).
- La forme $X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ est beaucoup plus commode pour exploiter les conditions initiales. Cependant l'utilisation de n'importe quelle forme doit conduire au final à la même expression (voir exercice n° 1 p. 24).

1 Mouvement d'un oscillateur harmonique (cours) ★

→ corrigé p. 26

On rappelle l'équation différentielle (E) vérifiée par un oscillateur harmonique : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$ avec ω_0 et $x_{\text{éq}}$ constantes strictement positives.

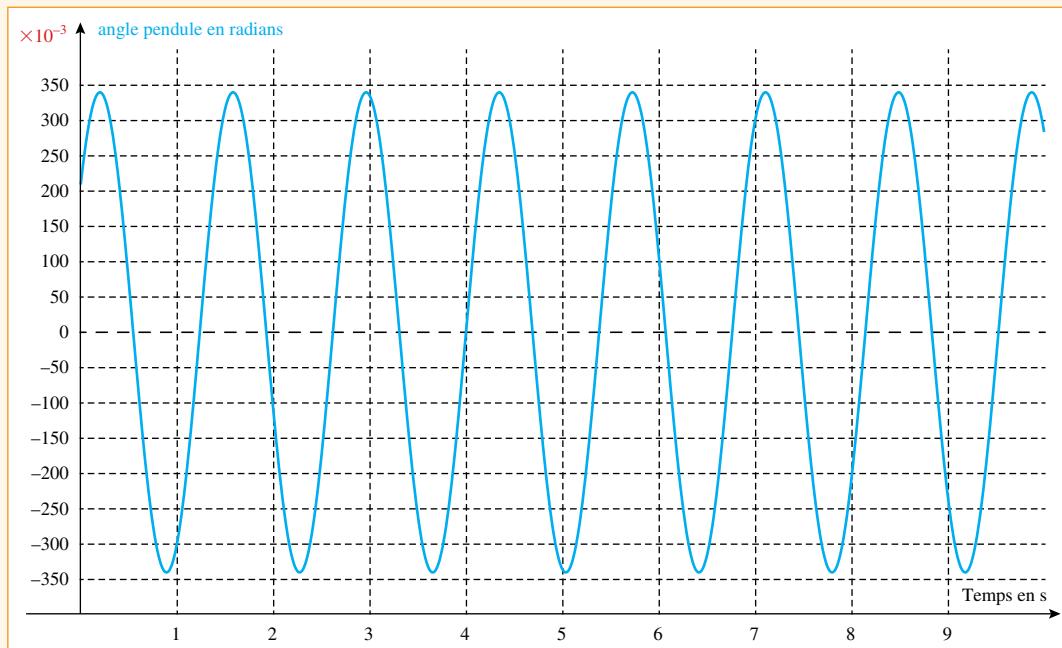
- ① Montrer que la fonction x est solution pour toute date t avec : $x(t) = x_{\text{éq}} + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Justifier qu'on peut toujours choisir $X_m > 0$ (hors cas d'équilibre).
- ② Si l'on veut utiliser un sinus à la place du cosinus, $x(t) = x_{\text{éq}} + X_m \sin(\omega_0 t + \psi)$, comment doit-on modifier la phase à l'origine ?
- ③ Montrer que la solution proposée en ① est équivalente à : $x(t) = x_{\text{éq}} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$, et donner la relation entre (A, B) et (X_m, φ).
- ④ Avec $0 < X_m < x_{\text{éq}}$, tracer la courbe représentative de $x(t)$ pour les valeurs de φ suivantes : $\varphi = 0 ; \pi/2 ; \pi ; 3\pi/2$.

2 Étude expérimentale du pendule simple ★

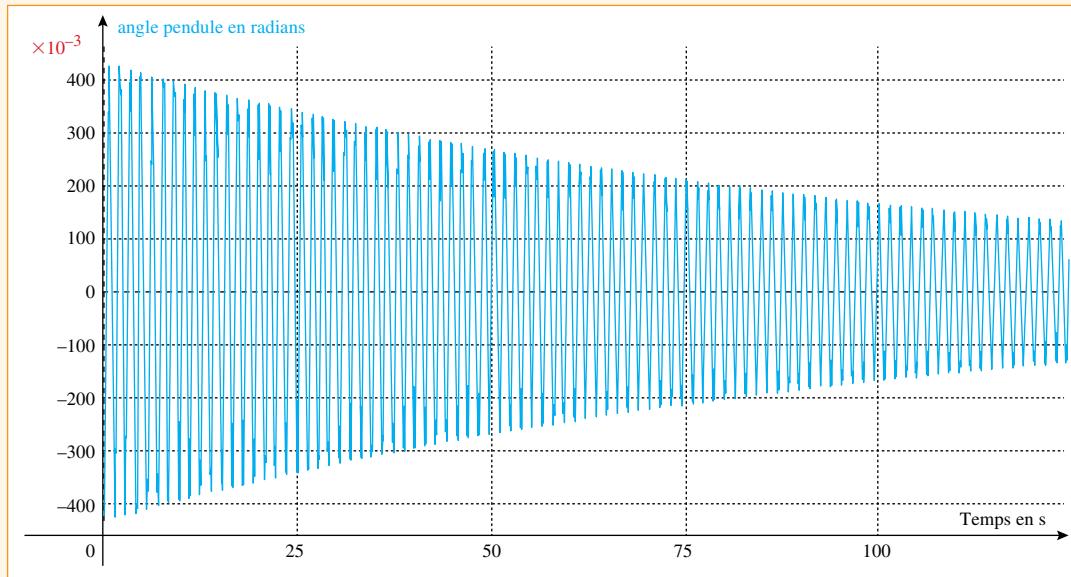
→ corrigé p. 26

Soit un pendule simple de longueur $L = 47$ cm, de masse $m = 300$ g, soumis à la pesanteur d'accélération \vec{g} uniforme (de norme $g = 9,81$ m.s⁻²).

- ① L'enregistrement ci-dessous, réalisé en travaux pratiques, représente l'évolution temporelle de l'angle (θ exprimé en radians) entre le pendule et la verticale au cours du temps (t en s). Cette courbe traduit-elle un comportement d'oscillateur harmonique ? Justifier.



- ② Par lecture graphique, déterminer : l'amplitude θ_m , la période T_0 , la fréquence f_0 , la pulsation ω_0 , la phase à l'origine φ du mouvement du pendule simple. Comparer avec la théorie : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
- ③ Si l'on reproduit l'expérience avec une durée d'acquisition plus longue (125 s au lieu de 10 s), la courbe expérimentale obtenue a l'allure suivante :



Observe-t-on encore un comportement d'oscillateur harmonique pur ? Quelle est la différence avec le premier enregistrement ? Quel phénomène physique, négligé sur une durée courte, faudrait-il prendre en compte pour exploiter correctement l'acquisition effectuée sur une durée longue ?

3 Étude énergétique du pendule simple ★★

→ corrigé p. 27

Soit un pendule simple de longueur ℓ , de masse m , soumis à la pesanteur d'accélération \vec{g} uniforme.

- ① Par analyse dimensionnelle, montrer que la pulsation d'oscillation ω_0 du pendule simple est inversement proportionnelle à la racine carrée de sa longueur et indépendante de sa masse. De quelle autre grandeur dépend-elle ? Quelle est son expression exacte ?
- ② Pour de petites oscillations, l'angle θ que fait le pendule avec la verticale vérifie l'équation différentielle (E) : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$. On impose à $t = 0$ un angle initial nul et une vitesse angulaire : $\dot{\theta}(t=0) = \omega_0 \theta_m > 0$. Déterminer l'expression de la solution $\theta(t)$ de (E) pour $t \geq 0$.
- ③ Exprimer l'énergie cinétique du pendule au cours du temps sachant que : $E_C = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$. Quelle est la période de $E_C(t)$ (indication : utiliser une formule trigonométrique avec l'angle double) ?
- ④ Exprimer l'énergie potentielle du pendule au cours du temps sachant que : $E_P = \frac{1}{2} mg\ell\theta^2$. Quelle est la période de $E_P(t)$?
- ⑤ En déduire l'énergie mécanique du pendule simple. Se conserve-t-elle au cours du temps ?

4 Électron dans un puits de potentiel ★★

→ corrigé p. 28

Un électron de masse m et de charge $q = -e$ est piégé à l'intérieur d'un dispositif électromagnétique (région vide de charges). Il peut se déplacer uniquement dans la direction (Oy) avec une énergie potentielle :

$$E_P(y) = -\frac{1}{2} \frac{qV_0}{a^2} y^2$$

Le poids est négligé, il n'y a pas de frottements. On donne : $V_0 = 2,00 \text{ V}$ et $a = 3,00 \text{ mm}$

- ① Établir l'équation différentielle du mouvement de l'électron selon l'axe (Oy).
- ② De quel type de mouvement s'agit-il ? Déterminer la fréquence des oscillations de l'électron. A.N.

1 Mouvement d'un oscillateur harmonique

→ énoncé p. 24

- ❶ Pour vérifier si la fonction proposée est bien solution de (E), on calcule ses dérivées temporelles que l'on remplace dans (E) :

$$x(t) = x_{\text{eq}} + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

donne : $\dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

et $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

ce qui conduit bien à (E) :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$$

Si $X'_m < 0$ on peut se ramener à :

$$x(t) = x_{\text{eq}} + X'_m \cos(\omega_0 t + \varphi') = x_{\text{eq}} + (-X'_m) \cos(\omega_0 t + \varphi' + \pi)$$

donc il suffit de prendre :

$$X'_m = (-X'_m) \text{ et } \varphi = \varphi' + \pi \text{ pour avoir toujours : } X_m > 0$$

- ❷ D'après la trigonométrie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = x_{\text{eq}} + X_m \sin(\omega_0 t + \psi) = x_{\text{eq}} + X_m \cos(\omega_0 t + \psi - \pi/2),$$

donc par identification avec la forme de solution vue en ❶ il vient : $\varphi = \psi - \pi/2$ ou $\psi = \varphi + \pi/2$

- ❸ Toujours à l'aide de la trigonométrie, on a pour toute date t :

$$x(t) = x_{\text{eq}} + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = x_{\text{eq}} + X_m [\cos(\varphi) \cos(\omega_0 t) - \sin(\varphi) \sin(\omega_0 t)]$$

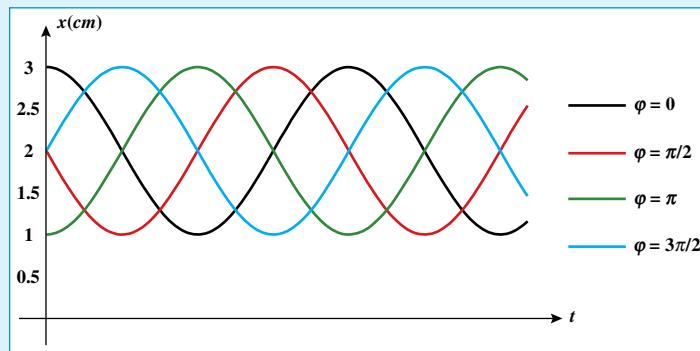
Alors :

$$\begin{cases} A = X_m \cos(\varphi) \\ B = -X_m \sin(\varphi) \end{cases}$$

ou encore, avec $A \neq 0$:

$$\begin{cases} X_m = \sqrt{A^2 + B^2} > 0 \\ \tan(\varphi) = -\frac{B}{A} \end{cases}$$

- ❹ Pour les courbes ci-dessous on a pris $X_m = 1 \text{ cm}$ et $x_{\text{eq}} = 2 \text{ cm}$. On constate que, plus la phase à l'origine φ augmente, plus les maxima se décalent vers une date antérieure : φ traduit un décalage temporel.



2 Étude expérimentale du pendule simple

→ énoncé p. 24

- ❶ La courbe peut correspondre à un oscillateur harmonique car l'évolution temporelle de l'angle θ au cours du temps semble sinusoïdale (amplitude constante et oscillations périodiques), de moyenne nulle.
- ❷ Si l'on choisit une expression de l'angle sous la forme : $\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ par lecture graphique, on obtient directement l'amplitude θ_m , la période T_0 et la phase à l'origine φ :

$$\theta_m = 0,340 \text{ rad}$$

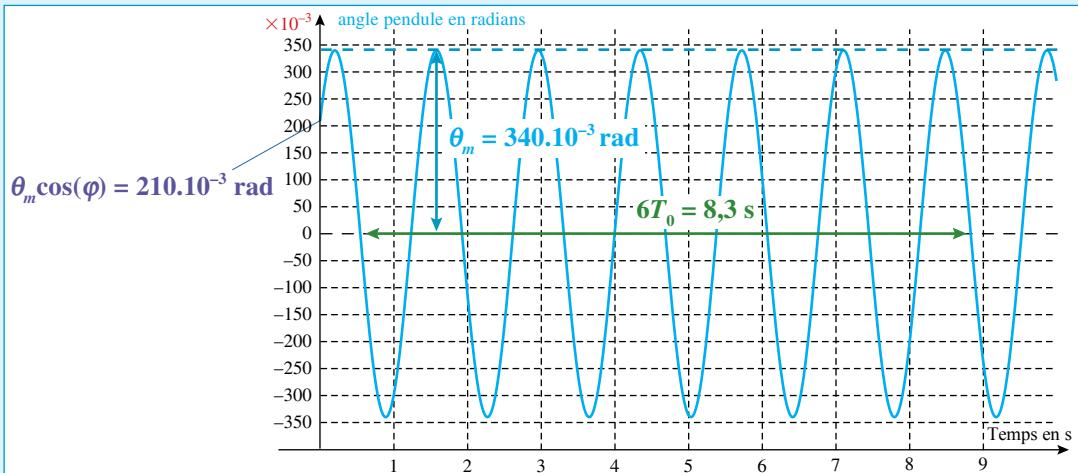
$$T_0 = 1,4 \text{ s}$$

$$\varphi = -\arccos(210/340) = -0,91 \text{ rad}$$

On calcule alors :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = 0,72 \text{ Hz}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 4,5 \text{ rad.s}^{-1}$$



La formule théorique donne : $T_0 = 1,375$ s, le résultat est donc cohérent (écart de moins de 2 %).

Bien comprendre

- Il est toujours plus précis de mesurer plusieurs périodes, et de le faire au niveau des zéros de la fonction, plus faciles à repérer précisément que les extrêmes.
- On sera attentif à l'échelle d'un graphique à exploiter (ici par exemple le facteur 10^{-3} en ordonnée).
- Pour obtenir le signe de la phase à l'origine on vérifie l'évolution de la fonction, car la valeur lue peut correspondre aussi bien à $0,91$ rad qu'à $-0,91$ rad. L'évolution ultérieure de la fonction cosinus (croît vers le maximum) permet de trancher en faveur d'une valeur négative de la phase à l'origine.

- La seconde courbe expérimentale montre un mouvement oscillant dont l'amplitude diminue au cours du temps : il ne s'agit plus d'un oscillateur harmonique pur. La différence principale avec l'enregistrement précédent est la décroissance exponentielle de l'amplitude θ_m . Pour exploiter correctement cette acquisition, il faudrait prendre en compte la présence de frottements entre le pendule et l'air (frottement de type fluide), ce qui sera étudié aux chapitres 9 et 13.

3 Étude énergétique du pendule simple

→ énoncé p. 25

- Les paramètres pertinents qui interviennent dans le mouvement d'oscillation du pendule simple sont : ℓ, m, g . Par analyse dimensionnelle on pose *a priori* :

$$\omega_0 = K \ell^a M^b g^c \text{ où } K \in \mathbb{R}, \text{ nombre sans dimension avec : } [\omega_0] = [\ell^a M^b g^c]$$

Soit : $T^{-1} = L^a M^b (L.T^{-2})^c$ ou encore : $T^{-1} = L^{a+c} M^b T^{-2c}$

Par identification : $\begin{cases} a = -1/2 \\ b = 0 \\ c = 1/2 \end{cases}$ il vient : $\omega_0 = K \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ avec $K \in \mathbb{R}$ La théorie donne $K = 1$.

Bien comprendre

Un dispositif présente toujours un nombre limité de paramètres. Les grandeurs qui vont caractériser son évolution temporelle ne peuvent dépendre que de ces paramètres. On cherche alors une relation homogène qui donne la grandeur souhaitée, ici une pulsation caractéristique, qui ne peut que s'exprimer en fonction d'une puissance quelconque de ces paramètres. Ce raisonnement a ses limites. En effet, l'expression attendue peut contenir des coefficients numériques, que la méthode ci-dessus ne permet pas de déterminer, car ils sont sans dimension.

❷ $\theta_{eq} = 0$ La forme générale de solution est : $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$, soit avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} \theta(0) = A \cos(\omega_0 \cdot 0) + B \sin(\omega_0 \cdot 0) = A = 0 \\ \dot{\theta}(0) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 \cdot 0) + \omega_0 B \cos(\omega_0 \cdot 0) = \omega_0 B = \omega_0 \theta_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \theta_m \end{cases} \Rightarrow \theta(t) = \theta_m \sin(\omega_0 t)$$

❸ L'énergie cinétique s'exprime par :

$$E_C(t) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}(t)^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \omega_0^2 \theta_m^2 \cos^2(\omega_0 t) \quad \text{Soit :} \quad E_C(t) = \frac{1}{4} m \ell^2 \omega_0^2 \theta_m^2 (1 + \cos(2\omega_0 t))$$

Sur cette deuxième forme on voit aisément que l'énergie cinétique est toujours positive, de période

$$T_{E_C} = T_0 / 2 \quad (\text{voir courbe p. 22})$$

❹ L'énergie potentielle s'écrit :

$$E_P(t) = \frac{1}{2} mg \ell \theta(t)^2 = \frac{1}{2} mg \ell \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} m \ell^2 \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$\text{Soit : } E_P(t) = \frac{1}{4} mg \ell \theta_m^2 (1 - \cos(2\omega_0 t))$$

L'énergie potentielle est toujours positive, de période : $T_{E_P} = T_{E_C} = T_0 / 2$

❺ On en déduit l'énergie mécanique :

$$E_m(t) = E_C(t) + E_P(t) = \frac{1}{2} m \ell^2 \omega_0^2 \theta_m^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))$$

$$E_m(t) = \frac{1}{2} m \ell^2 \omega_0^2 \theta_m^2 = \frac{1}{2} mg \ell \theta_m^2 = cst$$

Conformément aux propriétés de l'oscillateur harmonique pur, l'énergie mécanique est constante au cours du temps (les phénomènes dissipatifs de type frottement ne sont pas pris en compte dans la modélisation).

4 Electron dans un puits de potentiel

→ énoncé p. 25

❶ Il n'y a pas de frottement, le poids est négligé, donc seule la force électrostatique est prise en compte ici. On peut retrouver l'équation différentielle du mouvement à partir de la conservation de l'énergie mécanique au cours du temps. Comme elle est constante, sa dérivée temporelle est nulle d'où :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{d(E_C(t) + E_P(t))}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2(t) - \frac{1}{2} \frac{qV_0}{a^2} y^2(t) \right) \Rightarrow 0 = m \ddot{y}(t) \dot{y}(t) - \frac{qV_0}{a^2} y(t) \dot{y}(t)$$

Ce qui équivaut, pour $\dot{y}(t)$ non identiquement nul, à :

$$\ddot{y}(t) + \frac{eV_0}{ma^2} y(t) = 0$$

❷ L'équation ci-dessus décrit le mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation et de fréquence :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{ma^2}} = 1,98 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$$

et

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{eV_0}{ma^2}} = 3,14 \cdot 10^7 \text{ Hz}$$

À méditer

Rien n'est à craindre, tout est à comprendre.

MARIE CURIE (1867-1934)

Propagation d'ondes

L'étude des ondes a déjà été abordée au lycée, il s'agit dans ce chapitre et le suivant d'en préciser quelques notions et de les compléter. Les ondes sont des phénomènes bien connus et de natures diverses : les vagues, les ondes sismiques, les sons, la lumière... La propagation d'une onde est décrite par une fonction qui dépend de la position et du temps appelée signal. Grâce à la transformation de Fourier qui permet d'écrire toute fonction comme une somme de fonctions sinusoïdales, le comportement d'une onde quelconque peut être décrit à partir de celui d'ondes sinusoïdales. C'est pourquoi on accorde une importance particulière à ces ondes qui constituent la base de la représentation spectrale d'un signal.

I Généralités

Définition

Une **onde** est une perturbation d'un milieu, générée par une **source**, encore appelée **émetteur**, et qui se déplace (se propage) dans l'espace, sans qu'il y ait déplacement de matière en moyenne. La grandeur physique qui varie au passage de l'onde est appelée **signal** ou vibration.

- La source a un rôle primordial, elle donne un certain nombre de caractéristiques à l'onde, comme sa périodicité, son amplitude, sa nature (lumineuse, mécanique, électrique, etc.).
- Le milieu va ensuite déterminer comment évolue le phénomène, à quelle vitesse et dans quelle direction il se propage, s'il est atténué ou non.
- En général, le signal est émis par une source de petite dimension et se propage dans tout le milieu environnant. La propagation peut se faire dans les trois dimensions, par exemple, le son d'un sifflet qui s'entend dans toutes les directions, ou à deux dimensions, comme des vagues à la surface de l'eau ou à une dimension, comme la propagation de la lumière dans une fibre optique.
- On décrit normalement l'onde (le phénomène) par l'expression du signal (grandeur physique décrivant la perturbation locale) à un instant donné en un point du milieu de propagation, mais on emploie souvent abusivement le terme d'onde pour dire signal.

Définitions

- Une **onde** est **transversale** si la direction de la perturbation est perpendiculaire à sa direction de propagation.
- Une **onde** est **longitudinale** si la direction de la perturbation est parallèle à sa direction de propagation.
- Un tsunami, une impulsion donnée sur une corde sont des exemples d'ondes transversales.
- Les ondes sonores, les ondes de compression dans un ressort sont des exemples d'ondes longitudinales.
- Les ondes sismiques sont transversales (ondes S et L), longitudinales (ondes P) ou mixtes (ondes R).

Définition

La **célérité** est la vitesse de propagation de l'onde : si l'onde parcourt une distance d pendant une durée τ , alors la célérité est : $c = \frac{d}{\tau}$

- La célérité dépend de la nature de l'onde (mécanique, lumineuse, électrique) et du milieu de propagation (sa nature, sa température).

II Ondes périodiques

1. Nature de l'onde périodique

Définitions

- Une **onde périodique** est une onde qui se reproduit identique à elle-même au bout d'un certain temps T , appelé **période**. Le signal vérifie donc : $s(t+T)=s(t)$
- La **fréquence**, qui donne le nombre de phénomènes observés par unité de temps, est l'inverse de la période : $f = \frac{1}{T}$ l'unité est le Hertz (Hz).

Un milieu de propagation est dit **dispersif** si la célérité dépend de la fréquence de l'onde. Ainsi le vide n'est pas dispersif pour la lumière mais le verre ou l'eau le sont (d'où les arcs-en-ciel par exemple).

La forme d'une onde périodique peut être quelconque, mais le cas d'une onde périodique sinusoïdale est particulièrement important en raison de la transformation de Fourier (*voir page suivante*).

Définition

- Une **onde périodique sinusoïdale** est une onde dont le signal en un point du milieu peut s'écrire :

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$
- Elle a pour amplitude A , pour pulsation ω , pour phase initiale φ . On rappelle que la pulsation est liée à la période T ou à la fréquence f par les relations :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega = 2\pi f$$

2. Caractéristiques des ondes courantes

→ Ondes mécaniques

- Les ondes mécaniques (comme les vagues, les ondes sismiques, le son, etc.) ont impérativement besoin d'un milieu matériel pour se propager. Lors du passage de l'onde, la matière se déplace soit dans la direction de propagation de l'onde (onde longitudinale), soit perpendiculairement (onde transversale), puis elle reprend sa place initiale : l'onde se propage, sans qu'il y ait déplacement de matière en moyenne.
- La vitesse de propagation dépend du milieu. Par exemple, la vitesse de propagation d'une onde sur une corde dépend de la tension de la corde et de sa masse linéaire et vaut quelques mètres par seconde. Les ondes sismiques ont une célérité de plusieurs kilomètres par seconde avec des fréquences de l'ordre du Hertz.

→ Le son

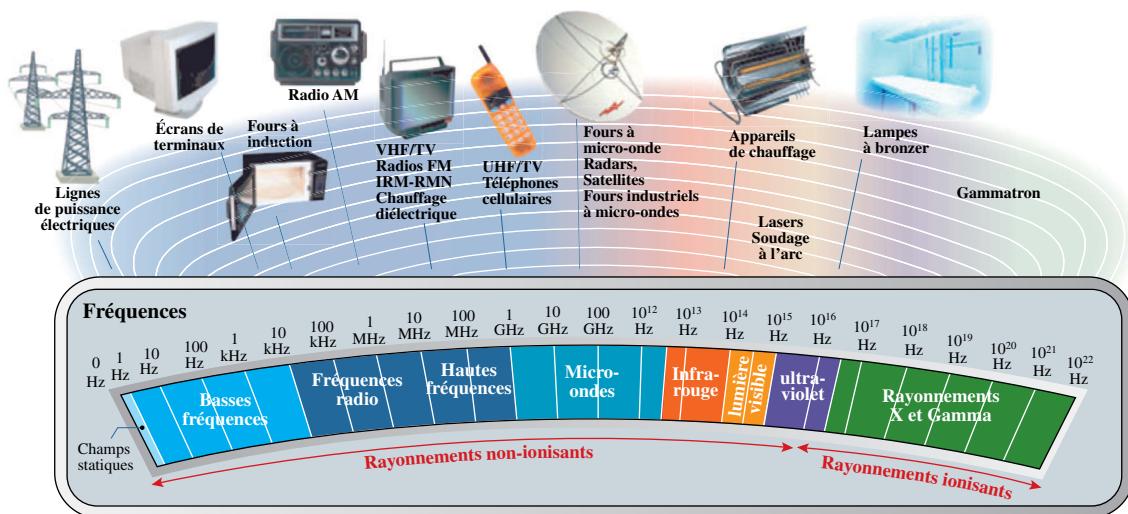
- Les ondes sonores sont un cas particulier d'ondes mécaniques, donc un son a besoin d'un milieu matériel pour se propager (pas de son dans le vide). Les ondes sonores consistent en une succession de dilatations et de compressions du milieu, ce sont des ondes longitudinales.
- La célérité des ondes sonores dépend de la nature du milieu et de sa température. La vitesse du son dans l'air à 20 °C est de 340 m.s⁻¹ ; elle est de 1 500 m.s⁻¹ dans l'eau de mer à 20 °C.
- L'oreille humaine perçoit des sons de fréquences comprises entre 20 et 20 000 Hz.
- Pour des fréquences inférieures à 20 Hz, on parle d'**infrasons** ; pour des fréquences supérieures à 20 kHz, ce sont des **ultrasons**.

→ Ondes de courant

- Les ondes électriques se traduisent par des variations de grandeurs électriques comme la tension et l'intensité électrique. En travaux pratiques d'électronique, on travaillera généralement avec des fréquences de 100 Hz à 1 000 000 Hz (= 1MHz).

→ Ondes électromagnétiques

- Les ondes électromagnétiques résultent de la propagation d'un champ électrique et d'un champ magnétique variables au cours du temps. Elles n'ont pas besoin de milieu matériel pour se propager, ainsi les ondes électromagnétiques peuvent se propager dans le vide.
- La lumière est un cas particulier d'onde électromagnétique, tout comme les ondes radio, le Wi-Fi, les ondes téléphoniques, les micro-ondes mais aussi les rayons X ou ultra-violets...
- Dans le vide, leur vitesse de propagation est celle de la lumière dans le vide, soit $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. Dans un milieu matériel, ce sera nécessairement moins.
- Le spectre électromagnétique est très étendu et les ondes électromagnétiques (EM) sont utilisées dans de multiples domaines (astronomie, médecine, télécommunications, transports, industrie...).



(source : spectre électromagnétique, INRS)

On pourra retenir que les ondes radio de la bande FM sont autour de 100 MHz, que les fréquences des téléphones, du Wi-Fi, du Bluetooth sont de quelques GHz. Pour la lumière, les fréquences sont comprises entre $4 \cdot 10^{14}$ Hz et $8 \cdot 10^{14}$ Hz.

3. Spectre d'un signal périodique

→ Analyse spectrale

Énoncé

- Théorème de Fourier :** toute fonction périodique $s(t)$ de fréquence f peut être décomposée en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f :

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)] \quad (s_0 \text{ désigne la moyenne temporelle de } s(t).)$$

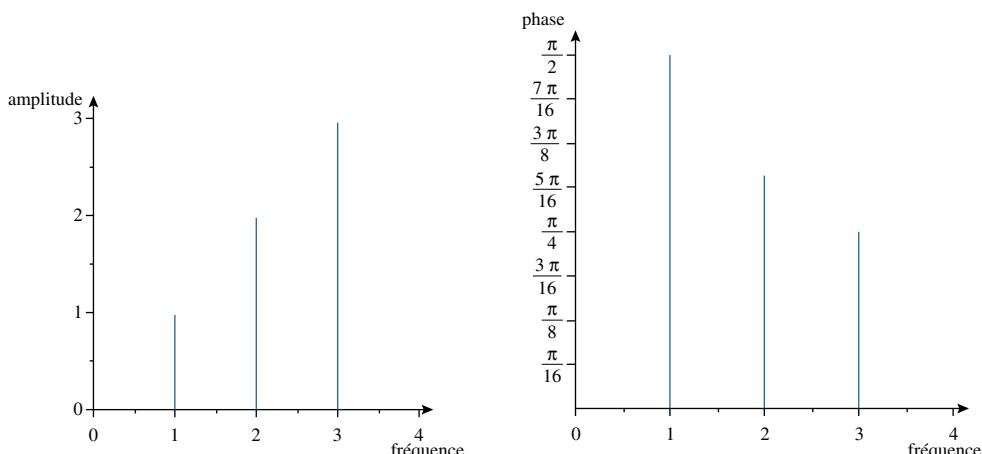
- Le terme de rang 1 ($n = 1$), donc de fréquence f , est appelé **le fondamental** ; les termes de rangs supérieurs sont les **harmoniques**.

Définitions

- L'opération qui consiste à déterminer les signaux sinusoïdaux composant un signal donné est appelée **analyse spectrale**.
- Le **spectre du signal** est l'ensemble des fréquences contenues dans le signal.

- Le résultat de l'analyse spectrale est :
 - ➡ la liste des fréquences f_n des composantes sinusoïdales contenues dans le signal,
 - ➡ l'amplitude A_n de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_n ,
 - ➡ la phase initiale φ_n de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_n .
- Souvent on se contente de préciser les amplitudes pour les différentes fréquences.
- On comprend ici le rôle central joué par les signaux sinusoïdaux et donc les ondes sinusoïdales.
- Expérimentalement, cela se fera en travaux pratiques sans difficulté avec des logiciels de traitement du signal (fonction FFT, pour Fast Fourier Transform, soit encore Transformée de Fourier Rapide).
- Exemple de signal : $s(t) = \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) + 2 \cos(4\pi t + \frac{\pi}{3}) + 3 \cos(6\pi t + \frac{\pi}{4})$

On en donne le spectre d'amplitude et le spectre de phase où les fréquences sont en Hz.

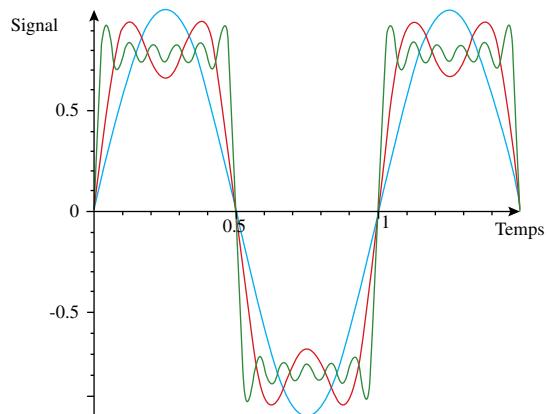
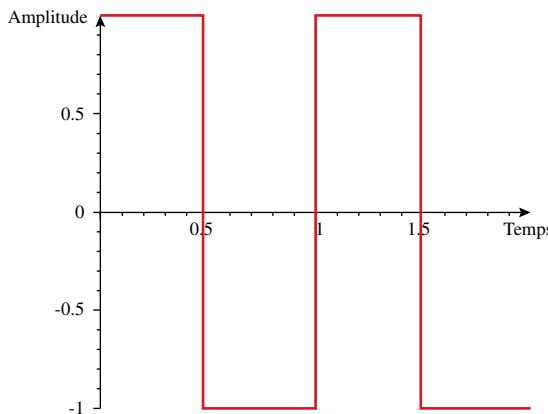


➡ Synthèse spectrale

Définition

Réaliser la **synthèse spectrale** du signal consiste à reconstruire un signal périodique en sommant le fondamental et plusieurs harmoniques.

Par exemple, considérons le signal carré suivant, d'amplitude 1 et de fréquence $f = 1$ Hz. La théorie de Fourier nous donne $s(t) = \sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi nft)$. Le graphe de droite superpose en bleu le fondamental (signal sinusoïdal de fréquence $f = 1$ Hz), puis en rouge le signal composé du fondamental et de la première harmonique non nulle, puis en vert le signal formé du fondamental et des cinq harmoniques suivantes.



- Plus nombreuses sont les harmoniques prises en compte dans la superposition et plus le signal obtenu est proche du signal réel.
- Notons qu'une **fonction non périodique** peut aussi se mettre sous la forme d'une somme de composantes sinusoïdales, mais contrairement à la fonction périodique pour laquelle cette somme est discrète (un nombre entier, éventuellement infini, de termes), celle d'une fonction non périodique est une somme continue qui s'écrit donc sous forme d'une intégrale appelée **transformée de Fourier**.

III | Ondes progressives

1. Onde progressive

Définition

On appelle **onde progressive** une onde qui se propage depuis sa source. Ce terme sera ici exclusivement employé pour une onde sans atténuation, ni déformation.

Considérons que la source en O émet le signal $f(t)$. Puisque l'onde est progressive, son expression en un point M dépend uniquement de ce signal, de la distance d de M à la source et du temps t . On écrira donc $s(M,t)$ pour exprimer la double dépendance spatiale et temporelle de l'onde. L'onde se propage à la vitesse c donc elle met le temps $\tau = \frac{d}{c}$ pour parcourir une distance $d = OM$: le signal arrivera en M avec le retard τ , c'est-à-dire que l'onde en M à t est identique à l'onde en O à $t - \tau$.

Énoncé

Une onde progressive de célérité c observée en un point M situé à la distance d de la source générant un signal $f(t)$ est de la forme mathématique :

$$s(M,t) = f\left(t - \frac{d}{c}\right)$$

2. Onde progressive unidirectionnelle

Une onde unidirectionnelle se propage suivant une direction notée (Ox) où O est la source de l'onde.

- Si l'onde se propage vers les x positifs, alors $d = x$ et le signal est une fonction de x et de t qui s'écrit :

$$s(M,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

- Si l'onde se propage vers les x négatifs, alors $d = |x| = -x$ et le signal est une fonction de x et de t qui s'écrit :

$$s(\mathbf{M}, t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Énoncé

Une onde progressive unidirectionnelle de célérité c se propageant suivant l'axe (Ox) est de la forme :

$$s(\mathbf{M}, t) = s(x, t) = f\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$$

Le signe $-$ (*resp.* $+$) correspond à une onde se propageant vers les x positifs (*resp.* négatifs).

- Si on connaît l'évolution temporelle du signal en une position donnée, par exemple à la source en $x = 0$, on connaît la fonction $f(t) = s(0, t)$. Pour obtenir l'évolution temporelle du signal en une position x quelconque, il suffit de remplacer t par $t \pm \frac{x}{c}$ (le signe dépendant du sens de propagation).
- On peut aussi connaître l'état ondulatoire du milieu à $t = 0$, le signal dépend alors de la position du point dans le milieu repéré par x et s'écrit $F(x)$. Pendant l'intervalle de temps t , l'onde parcourt la distance $d = ct$ le long de l'axe (Ox). L'état ondulatoire à l'instant t se déduit donc du signal $F(x)$ à $t = 0$ par une simple translation de la quantité $d = ct$:
 - si l'onde se propage suivant (Ox) vers les x positifs, alors le signal en x s'écrit : $s(x, t) = F(x - ct)$
 - si l'onde se propage suivant (Ox) vers les x négatifs, alors le signal en x s'écrit : $s(x, t) = F(x + ct)$

Énoncé

Une onde progressive de célérité c se propageant sur l'axe (Ox) est de la forme mathématique :

$$s(\mathbf{M}, t) = F(x \pm ct)$$

Le signe $-$ (*resp.* $+$) correspond à une onde se propageant vers les x positifs (*resp.* négatifs).

- Signalons que les expressions f et F sont équivalentes, puisqu'elles décrivent la même onde, mais f est une fonction du temps, tandis que F est une fonction de la position.
- La plupart des ondes sont multidirectionnelles, tout ce qui précède se généralise à plusieurs dimensions grâce à un traitement vectoriel de la position de \mathbf{M} .

POINT MÉTHODE

Exprimer l'onde progressive

- On obtient l'**expression de l'onde progressive** $s(x, t)$ en fonction de la position et du temps, soit en remplaçant x par $x \pm ct$ dans la fonction $F(x) = s(x, 0)$ soit en remplaçant par $t \pm \frac{x}{c}$ dans la fonction $f(t) = s(0, t)$. Le signe dépendant du sens de propagation $-$ vers les x positifs, $+$ vers les x négatifs.

3. Onde progressive périodique

Considérons une onde progressive se propageant à la vitesse c dans une direction donnée (Ox). On la suppose aussi périodique de période T (il s'agit d'une période temporelle). À un instant t , le milieu est dans un état ondulatoire donné. Pendant une durée ultérieure égale à T , l'onde se déplace de cT dans la direction de propagation et chaque point est alors de nouveau dans le même état qu'à t (signal

périodique) le milieu retrouve alors la même forme qu'à t : l'onde est invariante par translation de la quantité cT . La quantité cT correspond à une période spatiale, appelée longueur d'onde et notée λ .

Énoncé

Une **onde progressive périodique** de célérité c possède une double périodicité, c'est-à-dire une **période temporelle**, notée T , et une période spatiale (ou **longueur d'onde**), notée λ . Les deux périodes sont reliées par :

$$\lambda = cT$$

- La longueur d'onde λ se définit donc également comme la distance parcourue par l'onde pendant une période T .

4. Onde progressive unidirectionnelle sinusoïdale

Il s'agit d'un cas particulier d'onde progressive périodique où le signal émis par la source est une fonction sinusoïdale du temps. Une onde progressive unidirectionnelle sinusoïdale se propageant selon l'axe (Ox) s'écrit donc :

$$s(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right) + \varphi\right)$$

- ω est la pulsation, A l'amplitude, c la vitesse de propagation de l'onde, φ la phase initiale à l'origine.
- Souvent, pour simplifier, on prend une origine des temps de manière à avoir $\varphi = 0$ ou $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.
- L'onde se propage selon l'axe (Ox), vers les x positifs ou négatifs (ce que traduit le « \pm »).
- On a, comme pour toute fonction sinusoïdale, la relation :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega = 2\pi f$$

- On a, comme pour toute onde progressive périodique, la relation suivante : $\lambda = cT$
- Par analogie avec la pulsation ω , on introduit donc k (en rad.m^{-1}) son équivalent spatial :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ comparable à } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

k est la norme du vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_x$ où \vec{e}_x est un vecteur unitaire porté par la direction de propagation.

On a alors : $\omega \frac{x}{c} = \frac{2\pi}{T} \frac{Tx}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} x = kx$

- L'équivalent spatial de la fréquence (inverse de T) est le **nombre d'onde** σ (en m^{-1}), l'inverse de la longueur d'onde, souvent utilisé en spectroscopie.

Définition

Une **onde progressive sinusoïdale unidirectionnelle** est une onde qui s'écrit sous la forme :

$$s(x, t) = A \cos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

Le signe $-$ (*resp.* $+$) correspond à une onde se propageant vers les x positifs (*resp.* négatifs).

- À partir des expressions de k et de ω ci-dessus et la relation entre les périodes T et λ , on obtient :

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = c \quad \text{ainsi :} \quad \omega = ck$$

Questions de cours

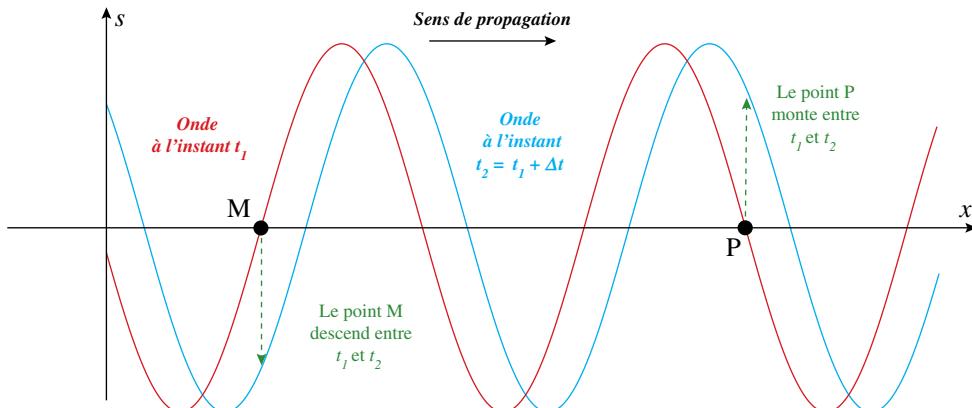
- Que signifie « faire l'analyse spectrale d'un signal » ? Que signifie « réaliser la synthèse spectrale d'un signal » ?
- Différentes expressions de l'onde progressive, de l'onde progressive unidirectionnelle.
- Définition d'une onde progressive périodique ; mise en évidence de sa double périodicité.
- Définition d'une onde progressive sinusoïdale ; mise en évidence de sa double périodicité.
- À partir de l'expression de l'onde progressive sinusoïdale, déterminer sa fréquence, sa période, sa pulsation, son vecteur d'onde.

Erreurs à éviter

- Il faut bien lire l'énoncé pour partir sur le bon modèle de l'onde : une onde progressive n'est pas forcément sinusoïdale, une onde n'est pas nécessairement périodique...
- Attention au sens de propagation (vers les x positifs ou négatifs).

Quelques « trucs » utiles

- Pour étudier l'évolution temporelle d'un point au passage de l'onde, il est souvent commode de représenter l'onde à un instant t , puis à un instant ultérieur proche, on voit alors comment évoluent les points.



- D'une façon générale, il est commode de représenter les courbes en fonction du temps en utilisant la période T comme unité de représentation et de représenter les courbes en fonction de la position x en utilisant la longueur d'onde λ comme unité de représentation, ce qui suppose de les déterminer dès le départ. La double périodicité apparaît alors clairement et permet de représenter aisément les différentes courbes. Il est également recommandé de représenter les signaux sur plus d'une période.
- Inutile d'apprendre de nombreuses formules par cœur, on retiendra par contre les 4 relations suivantes :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} ; \lambda = cT \text{ (définition de } \lambda) ; f = \frac{1}{T} \text{ (définition de la fréquence)}$$

De nombreuses autres relations peuvent être nécessaires dans les calculs, il est inutile de les apprendre par cœur, car elles se retrouvent aisément si l'on a mémorisé les 4 précédentes :

$$\omega = 2\pi f ; \omega = ck ; \lambda = \frac{c}{f} = 2\pi \frac{c}{\omega} \dots$$

EXERCICES

Conseils

L'exercice n° 1 est facile, mais nécessite de connaître ses formules de trigonométrie. Les exercices n° 2, 3 et 5 sont des applications du cours. L'exercice n° 4 illustre les différentes façons de décrire une onde progressive (fonction du temps ou fonction de la position).

1 Spectre d'un produit de fonctions sinusoïdales ★

→ corrigé p. 38

Faire l'analyse spectrale du signal $f(t) = 2 \cos(100\pi t) \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

2 Onde progressive sinusoïdale ★

→ corrigé p. 38

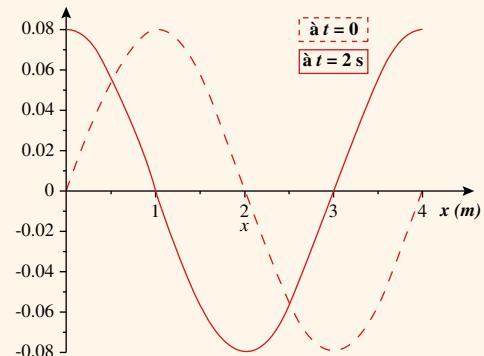
Une onde progressive sinusoïdale se déplace sur l'axe (Ox) selon les x positifs. Son amplitude est de 10 cm, la longueur d'onde est de 0,50 m et la fréquence est de 10 Hz. À $t = 0$, une particule située en $x = 0$ est à la position $y = -0,1$ m. Déterminer la fonction $y(x,t)$ qui représente l'onde.

3 Représentations d'une onde progressive sinusoïdale ★

→ corrigé p. 39

On a représenté une onde progressive unidirectionnelle sinusoïdale à deux instants. Entre les deux dates, elle s'est déplacée de 1 m vers la gauche.

- 1 Donner l'expression de $s(x,t)$ et préciser ses caractéristiques.
- 2 Représenter l'évolution temporelle du déplacement des points d'abscisse $x = 0$, $x = 1$ m et $x = 2$ m.



4 Train d'onde ★★

→ corrigé p. 40

Une onde se propage selon (Ox) positif à la vitesse $c = 3 \text{ m.s}^{-1}$ (distances en mètres, temps en secondes).

À $t = 0$, elle est décrite par : $\begin{cases} F(x) = 2 \sin(2\pi x) & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ F(x) = 0 & \text{pour } x > 1 \end{cases}$

- 1 Représenter $F(x)$.
- 2 Déterminer le signal $s(x,t)$ en x et à la date t .
- 3 Représenter $s(x,2)$ et $s(3,t)$.

5 Tuyau et marteau ★★★

→ corrigé p. 42

On dispose un microphone branché sur un oscilloscope à l'extrémité d'un long tuyau en acier de 500 m. À l'autre extrémité on donne un coup de marteau sur le tuyau. L'oscillogramme présente deux pics dont on mesure l'écart temporel : 1,38 s.

- 1 Expliquer l'observation et en déduire la vitesse du son dans l'acier.
- 2 Comment serait modifiée l'observation si l'on réalisait l'expérience dans l'eau ?

1 Spectre d'un produit de fonctions sinusoïdales

→ énoncé p. 37

Bien comprendre

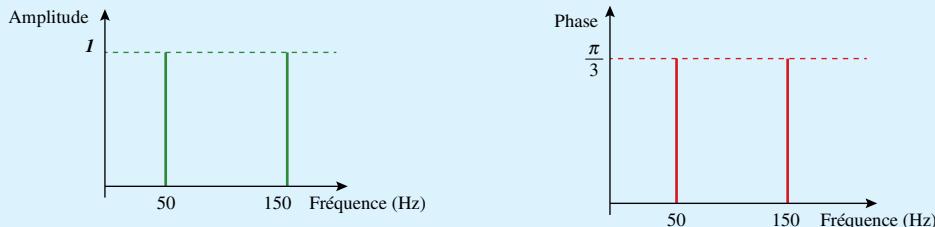
Faire l'analyse spectrale nécessite d'écrire le signal comme une somme de termes sinusoïdaux. Il suffit alors d'identifier pour chaque terme sa fréquence, son amplitude et sa phase.

Il faut écrire $f(t) = 2 \cos(100\pi t) \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ comme une somme de termes sinusoïdaux.

► Outils : Un peu de trigonométrie : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

D'où :
$$f(t) = \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(300\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$
 On rappelle : $\cos(-x) = \cos(x)$

On voit que $f(t)$ s'écrit comme la somme de deux signaux sinusoïdaux ; le premier est d'amplitude 1, de pulsation 100π et donc de fréquence $f = \frac{100\pi}{2\pi} = 50$ Hz, de phase initiale $\frac{\pi}{3}$; le second est aussi d'amplitude 1 et de phase initiale $\frac{\pi}{3}$, mais de pulsation trois fois plus grande, donc de fréquence trois fois plus grande (150 Hz). D'où les spectres en amplitude et en phase.



2 Onde progressive sinusoïdale

→ énoncé p. 37

L'onde correspond à un déplacement selon l'axe des y qui se propage suivant x . On rappelle la forme générale d'une onde progressive sinusoïdale, puis on reconnaît les différents termes :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

L'onde se déplace vers les x positifs, c'est donc la solution suivante qui convient :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

L'énoncé donne l'amplitude $A = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$. La longueur d'onde vaut $\lambda = 0,50 \text{ m}$, donc :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \text{ rad.m}^{-1}$$

La fréquence est $f = 10 \text{ Hz}$, donc : $\omega = 2\pi f = 20\pi \text{ rad.s}^{-1}$; $T = 1/f = 0,1 \text{ s}$; $c = \omega/k = 5 \text{ m.s}^{-1}$

Finalement : $y(x, t) = 0,10 \cos(20\pi t - 4\pi x + \varphi)$.

L'énoncé précise qu'à $t = 0$ et en $x = 0$, le déplacement vaut $-0,1 \text{ m}$, donc $y(0,0) = -0,1$.

D'où : $\cos \varphi = -1$ soit : $\varphi = \pi$.

D'où l'expression de la fonction $y(x, t)$ qui décrit l'onde en tenant compte de toutes ces valeurs :

$$y(x, t) = 0,10 \cos(20\pi t - 4\pi x + \pi) \quad \text{Soit encore :} \quad y(x, t) = -0,10 \cos(20\pi t - 4\pi x)$$

3 Représentation d'une onde progressive sinusoïdale

→ énoncé p. 37

- 1 L'onde est une onde sinusoïdale qui se déplace vers les x négatifs, elle est donc de la forme :

$$s(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

On lit sur la courbe qu'elle est d'amplitude 0,08 (unité non précisée), donc $A = 0,08$. Elle est périodique spatialement et sa longueur d'onde se lit sur les courbes et vaut $\lambda = 4 \text{ m}$. On en déduit

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad.m}^{-1}$$

L'onde s'est déplacée de $d = 1 \text{ m}$ en $\tau = 2$ secondes, sa célérité est donc : $c = \frac{d}{\tau} = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$

$$\text{Or : } \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = c \quad \text{Soit : } \omega = ck = 0,5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ rad.s}^{-1} \text{ et : } T = \frac{2\pi}{\omega} = 8 \text{ s}$$

$$\text{D'où : } s(x, t) = 0,08 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}x + \varphi\right)$$

Il reste à déterminer la phase initiale φ . On lit sur la courbe : $s(0, 2) = 0,08$ qui permet d'écrire :

$$0,08 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 0,08 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 1 \Leftrightarrow \sin \varphi = -1$$

On prend donc $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (d'autres valeurs comme $\frac{3\pi}{2}$ sont possibles mais ne modifient pas le résultat final).

$$\text{Finalement : } s(x, t) = 0,08 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$$

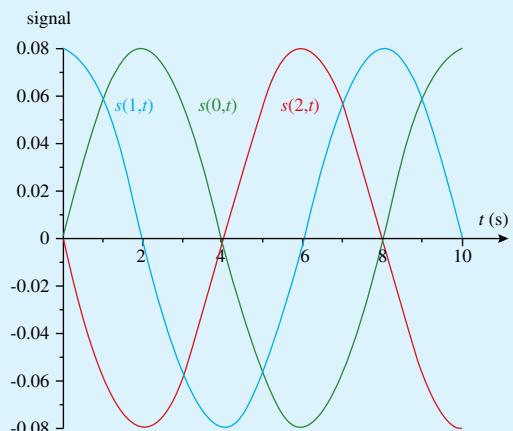
$$\text{Soit encore : } s(x, t) = 0,08 \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}x\right)$$

- 2 En particulier : $s(0, t) = 0,08 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

$$s(1, t) = 0,08 \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,08 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

$$\text{Et : } s(2, t) = 0,08 \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \pi\right) = -0,08 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

Sans surprise on constate que des points éloignés d'une demi-longueur d'onde ($x = 0$ et $x = 2 \text{ m}$) vibrent en opposition de phase au passage de l'onde.



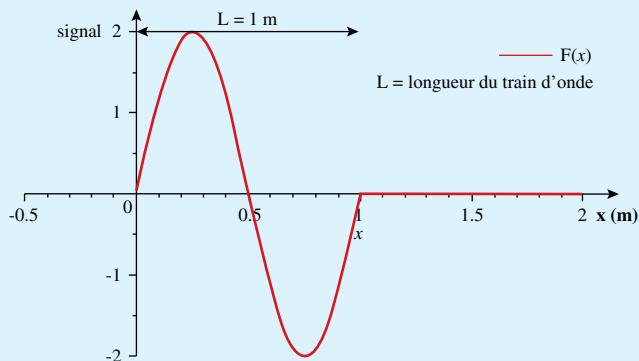
Bien comprendre

Il est important de bien distinguer la différence entre les représentations en fonction du temps qui montrent l'évolution temporelle de la position d'un point et la courbe en fonction de x qui donne une photographie de l'état physique du milieu à un instant donné. Toujours bien préciser quelle grandeur est fixée et quelle est l'abscisse du graphique.

4 Train d'onde

→ énoncé p. 37

- 1 On représente $F(x)$.



- 2 L'onde est une onde progressive qui se déplace selon l'axe (Ox), vers les x positifs. On a le choix entre la forme $s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ ou la forme $s(x,t) = F(x - ct)$. L'énoncé donne $F(x)$ à $t = 0$, la seconde forme est donc plus appropriée : $s(x,t) = F(x - ct)$.

À $t = 0$, on a un train d'onde défini par :

$$\begin{cases} F(x) = 2 \sin(2\pi x) & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ F(x) = 0 & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$

À une date t , cela se réécrit :

$$\begin{cases} F(x - ct) = 2 \sin(2\pi(x - ct)) & \text{pour } 0 \leq x - ct \leq 1 \\ F(x - ct) = 0 & \text{pour } x - ct > 1 \end{cases}$$

D'où : $\begin{cases} s(x,t) = 2 \sin(2\pi(x - ct)) & \text{pour } ct \leq x \leq 1 + ct \\ s(x,t) = 0 & \text{pour } x > 1 + ct \end{cases}$

On peut rajouter $s(x,t) = 0$ pour $x \leq ct$: la source émet un train d'onde. À $t = 0$, ce train d'onde se trouve entre $x = 0$ et $x = 1$. Puis l'onde se déplace vers la droite (les x positifs). À une date t , l'onde a parcouru la distance ct et se trouve donc entre ct et $ct + 1$. En dehors de cet intervalle, le signal est nul.

On a donc : $\begin{cases} s(x,t) = 2 \sin(2\pi(x - ct)) & \text{pour } ct \leq x \leq 1 + ct \\ s(x,t) = 0 & \text{pour } x < ct \text{ et } x > 1 + ct \end{cases}$ (les distances sont en m.)

N. B. : L'onde ici n'est pas périodique on ne parlera ni de période, ni de longueur d'onde qu'on ne confond pas avec L , la longueur du train d'onde.

Bien comprendre

Selon les exercices, l'énoncé donnera soit $F(x) = s(x,0)$, soit $f(t) = s(0,t)$. Il est impératif de déterminer $s(x,t)$. Il suffit alors de remplacer soit x par $x \pm ct$ dans l'expression de $F(x)$, soit t par $t \pm \frac{x}{c}$ dans $f(t)$. On procèdera de même dans les inégalités qui définissent les différents domaines.

- 3 Une fois l'expression de $s(x,t)$ déterminée, il suffit de remplacer x ou t par les valeurs indiquées, en prenant en compte que $c = 3 \text{ m.s}^{-1}$. Le mouvement d'un point au passage de l'onde dure donc $1/3$ s.

$$\begin{cases} s(x,2) = 2 \sin(2\pi(x-6)) & \text{pour } 6 \leq x \leq 1+6 \\ s(x,2) = 0 & \text{pour } x < 6 \text{ et } x > 1+6 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} s(x,2) = 2 \sin(2\pi x - 6\pi) & \text{pour } 6 \leq x \leq 7 \\ s(x,2) = 0 & \text{pour } x < 6 \text{ et } x > 7 \end{cases}$$

Soit encore :

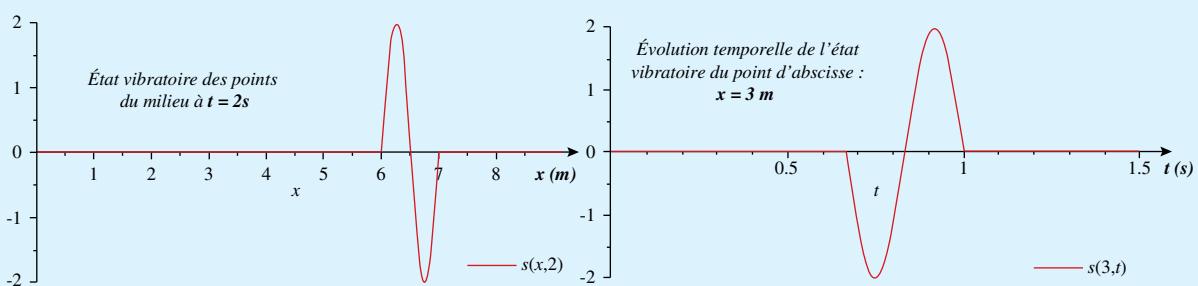
$$\begin{cases} s(x,2) = 2 \sin(2\pi x) & \text{pour } 6 \leq x \leq 7 \\ s(x,2) = 0 & \text{pour } x < 6 \text{ et } x > 7 \end{cases}$$

De même :

$$\begin{cases} s(3,t) = 2 \sin(2\pi(3-3t)) & \text{pour } 3t \leq 3 \leq 1+3t \\ s(3,t) = 0 & \text{pour } 3 < 3t \text{ et } 3 > 1+3t \\ s(3,t) = 2 \sin(6\pi - 6\pi t) & \text{pour } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \\ s(3,t) = 0 & \text{pour } t < \frac{2}{3} \text{ et } 1 < t \end{cases}$$

Soit encore :

$$\begin{cases} s(3,t) = -2 \sin(6\pi t) & \text{pour } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \\ s(3,t) = 0 & \text{pour } t < \frac{2}{3} \text{ et } 1 < t \end{cases}$$



Bien comprendre

Un bon moyen de vérifier la pertinence des courbes obtenues et de faire avancer légèrement la courbe en fonction de x pour voir comment évolue la position d'un point. On voit sur la courbe de gauche ci-dessus que lorsqu'un point est atteint par l'onde (ici $x = 7 \text{ m}$) ; une petite translation du graphe montre qu'il va descendre puis remonter et redescendre. C'est bien ce que l'on constate sur le second graphe où lorsque le point (ici d'abscisse $x = 3 \text{ m}$) est atteint par l'onde à l'instant $t = 2/3 \text{ s}$, il commence par descendre pour ensuite monter et redescendre.

5 Tuyau et marteau

→ énoncé p. 37

- 1 Le son du coup de marteau se propage dans l'air et dans l'acier du tuyau à des vitesses différentes, c'est pourquoi, il y a deux « bing » arrivant décalés à l'extrémité du tuyau.

On note t_{air} l'instant où le son s'étant propagé dans l'air arrive au micro et t_{acier} celui où il arrive après s'être propagé dans l'acier. Le son se propage plus vite dans un solide que dans un gaz, l'intervalle de temps mesuré vaut donc :

$$\Delta t = t_{\text{air}} - t_{\text{acier}} = 1,38 \text{ s}$$

On peut choisir pour origine des temps, l'instant où le marteau frappe le tuyau, on a alors, en notant d la longueur du tuyau :

$$d = v_{\text{air}} t_{\text{air}} \quad \text{et} \quad d = v_{\text{acier}} t_{\text{acier}}$$

Des trois équations précédentes, on tire la grandeur cherchée (v_{acier}) en éliminant successivement les inconnues inutiles :

$$v_{\text{acier}} = \frac{d}{t_{\text{acier}}} = \frac{d}{t_{\text{air}} - \Delta t} = \frac{d}{d/v_{\text{air}} - \Delta t}$$

$$\text{Soit : } v_{\text{acier}} = \frac{d v_{\text{air}}}{d - v_{\text{air}} \Delta t}$$

La vitesse du son dans l'air à 20 °C est 340 m.s⁻¹, d'où :

$$v_{\text{acier}} = \frac{d v_{\text{air}}}{d - v_{\text{air}} \Delta t} = 5520 \text{ m.s}^{-1}$$

- 2 Si l'ensemble est placé dans l'eau, à part le fait qu'il faille maintenant un microphone étanche, le principe de la mesure n'est pas modifié, mais les valeurs mesurées le sont. La durée de propagation dans l'acier n'a pas changé, mais celle dans l'eau est différente de celle dans l'air, car la vitesse dans l'eau à 20 °C est 1400 m.s⁻¹. L'écart entre les deux sons sera maintenant de :

$$\Delta t' = t_{\text{eau}} - t_{\text{acier}} = \frac{d}{v_{\text{eau}}} - \frac{d}{v_{\text{acier}}}$$

$$\text{Soit : } \Delta t' = d \left(\frac{1}{v_{\text{eau}}} - \frac{1}{v_{\text{acier}}} \right) = 0,27 \text{ s}$$

À méditer

Suivant le système des ondulations, la variété infinie des rayons de diverses couleurs qui composent la lumière blanche provient tout simplement de la différence de longueur des ondes lumineuses, comme les divers tons musicaux de celle des ondes sonores.

AUGUSTIN FRESNEL (1788-1827)

Superposition d'ondes

Les caractéristiques des ondes ont fait l'objet du précédent chapitre. Dans celui-ci, on étudie la superposition de plusieurs ondes, ce qui donne lieu à des phénomènes variés comme les interférences, les battements, les ondes stationnaires, la diffraction. Le programme est essentiellement construit sur les ondes mécaniques, cependant ces phénomènes ont déjà été abordés au lycée concernant la lumière. C'est pourquoi ici on évoque aussi le cas des ondes lumineuses, d'une part pour faire le lien avec des connaissances antérieures, d'autre part pour permettre au lecteur de mieux appréhender les phénomènes dans leur globalité et de mieux les comprendre.

Outils mathématiques

■ **Calcul vectoriel** : Produit scalaire de deux vecteurs : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\widehat{\vec{A}, \vec{B}})$

Norme d'un vecteur : $\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$ ou $\|\vec{A}\|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$

■ **Nombre complexe z** : $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) = |z| e^{i\theta} = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$ où $i^2 = -1$

Avec **module de z** : $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$, $\operatorname{Re}(z)$ sa partie réelle et $\operatorname{Im}(z)$ sa partie imaginaire.

■ **Éléments de trigonométrie** : $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

I Déphasage entre deux ondes sinusoïdales

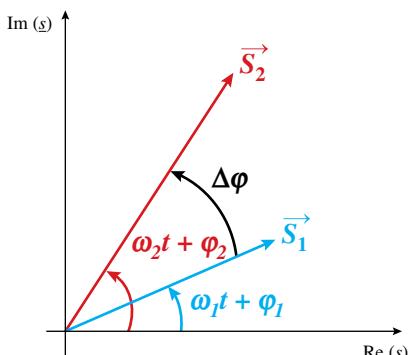
1. Signaux quelconques

Définition

Soient deux signaux sinusoïdaux $s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. On appelle **déphasage du signal s_2** par rapport au signal s_1 , la différence entre leurs phases instantanées :

$$\Delta\varphi(t) = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

On peut utiliser la **représentation de Fresnel** pour visualiser le déphasage. On rappelle que dans cette représentation, on fait correspondre à chaque signal un vecteur tournant dont la norme est égale à l'amplitude du signal associé et qui forme avec l'axe (Ox) un angle égal à la phase du signal associé. Le déphasage entre les deux signaux est alors l'angle entre les deux vecteurs auxquels ils sont associés.



2. Cas de signaux synchrones

Définition

- Des **signaux synchrones** sont des signaux de même fréquence donc de même pulsation. Le déphasage entre deux signaux synchrones est égal à la différence des phases initiales : $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.
- Des signaux synchrones sont **en phase** si le déphasage est un multiple de 2π .
- Des signaux synchrones sont **en opposition de phase** si le déphasage est un multiple impair de π .

II Interférences de deux ondes synchrones

→ Position du problème

On s'intéresse à la superposition, en un point M quelconque de l'espace, de deux ondes issues de deux sources S_1 et S_2 . Les ondes sont décrites par des signaux s_1 et s_2 , la superposition des ondes par la somme s de ces signaux, avec les notations introduites au paragraphe précédent. La phase φ_1 (resp. φ_2) traduit donc le retard de l'onde au point M par rapport à la source S_1 (resp. S_2) et par suite dépend de la distance de M à la source. Par ailleurs, la phase φ_1 (resp. φ_2) dépend aussi de la phase à la source S_1 (resp. S_2) qui n'est pas nécessairement constante dans le temps, en particulier pour une source lumineuse. **Le déphasage $\Delta\varphi$ entre deux signaux, même synchrones, peut donc dépendre du temps. On se limitera dans ce qui suit aux cas où ce déphasage est indépendant du temps**¹. Cette condition est peu contraignante dans les dispositifs interférentiels en mécanique, elle l'est par contre fortement en optique (cohérence des sources) et elle conduira, en particulier, à utiliser une seule source artificiellement séparée en deux (trous d'Young par exemple) pour obtenir des sources dont le déphasage est indépendant du temps et produire ainsi des interférences. Il est impossible (sauf procédé très sophistiqué utilisant des lasers) d'obtenir des interférences avec deux sources lumineuses distinctes, même synchrones.

1. Superposition de signaux synchrones

Superposer des signaux signifie sommer l'ensemble des signaux, et non leurs seules amplitudes. Si deux ondes synchrones (donc de même pulsation ω) représentées respectivement par $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, arrivent en un point M, alors l'onde résultante est représentée par le signal $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$. Il est commode de passer par les complexes, la grandeur physique étant la partie réelle de la grandeur complexe associée :

$$s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = \operatorname{Re}(A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}) \quad \text{et} \quad s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \operatorname{Re}(A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)})$$

On peut alors écrire pour le signal résultant, en notation complexe² :

$$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = e^{i\omega t} (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})$$

Le terme $A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}$ est un nombre complexe indépendant du temps, que l'on peut écrire sous la forme :

$$A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} = A e^{i\theta} \quad \text{Alors : } \underline{s} = e^{i\omega t} A e^{i\theta} \quad \text{Soit : } \underline{s} = A e^{i(\omega t + \theta)}$$

On en déduit le signal réel :

$$s(t) = \operatorname{Re}(\underline{s}) = A \cos(\omega t + \theta)$$

Ainsi la somme de deux signaux s_1 et s_2 synchrones est un signal de même pulsation synchrone, avec s_1 et s_2 .

1. Notons que cela ne nécessite pas que les phases de chaque signal soient indépendantes du temps, il suffit que leur différence le soit. Cependant, pour simplifier on supposera, dans ce qui suit, que les phases sont indépendantes du temps.

2. Cette méthode sera vue plus en détail au chapitre 10.

Résultats

- Le signal résultant de la superposition de deux signaux sinusoïdaux synchrones, présentant un déphasage indépendant du temps, est un signal sinusoïdal de même fréquence.
- Selon le type d'onde, les capteurs sont sensibles soit à l'amplitude de l'onde, soit plus fréquemment à l'intensité, qui est proportionnelle au carré de l'amplitude. Les propriétés de l'amplitude permettent donc de décrire l'état ondulatoire observé en un point.

2. Amplitude du signal résultant

D'après ce qui précède, l'amplitude du signal s résultant de la superposition de s_1 et s_2 est A , telle que :

$$A = |Ae^{i\theta}| = |A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}|$$

qui se développe en utilisant l'expression des exponentielles complexes :

$$A = |A_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) + A_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)| = |(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) + i(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)|$$

$$A = \sqrt{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)}$$

Soit, enfin :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

On retrouve ce résultat à l'aide de la représentation de Fresnel de la figure schématisée p. 43. Les vecteurs \vec{s}_1 et \vec{s}_2 tournent à la même vitesse angulaire ω et l'angle $\varphi_2 - \varphi_1$ reste constant, leur somme \vec{s} tourne donc aussi à la vitesse angulaire ω . Par construction :

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{s}_1 + \vec{s}_2 & \text{d'où :} & \vec{s} \cdot \vec{s} = (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \\ \vec{s} \cdot \vec{s} &= \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_2 + 2\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_2 + 2\|\vec{s}_1\| \|\vec{s}_2\| \cos(\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2}) \\ \|\vec{s}\|^2 &= \|\vec{s}_1\|^2 + \|\vec{s}_2\|^2 + 2\|\vec{s}_1\| \|\vec{s}_2\| \cos(\Delta\varphi) \end{aligned}$$

Les normes des vecteurs de Fresnel sont les amplitudes des signaux correspondants, d'où :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Delta\varphi) \quad (1)$$

Soit le même résultat que précédemment :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Delta\varphi)}$$

Énoncé

Le signal résultant de la **superposition de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence**, d'amplitudes A_1 et A_2 , et de phases initiales φ_1 et φ_2 , est un signal sinusoïdal de même fréquence et d'amplitude :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Il apparaît ici que l'amplitude du signal résultant de la superposition n'est pas la somme des amplitudes des signaux initiaux.

Si les amplitudes sont identiques, l'amplitude résultante peut aussi s'écrire :

$$A = \sqrt{A_0^2 + A_0^2 + 2A_0 A_0 \cos(\Delta\varphi)} = \sqrt{2A_0^2 (1 + \cos(\Delta\varphi))} = \sqrt{4A_0^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} = 2A_0 \left| \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right|$$

De même (1) montre que l'intensité résultante n'est pas la somme des intensités. Si c'était le cas, la superposition de deux sons serait toujours un son plus fort, de deux lumières, une lumière plus vive. Or, les expressions de l'amplitude et surtout de l'intensité montrent qu'elles peuvent s'annuler grâce

au terme en $\cos(\Delta\varphi)$. Ainsi la superposition de deux sons peut donner lieu à un silence, celle de deux lumières à de l'obscurité. Cette situation, liée au terme $\cos(\Delta\varphi)$, traduit le phénomène d'interférences.

Définitions

- Il y a **interférences** quand des ondes de même fréquence et présentant un déphasage $\Delta\varphi$ indépendant du temps se superposent.
- Le terme $2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)$ dans l'amplitude résultante de cette superposition est appelé **terme d'interférences**.

3. Étude du terme d'interférences

Le terme d'interférences dans l'amplitude du signal résultant dépend du déphasage. Deux cas particuliers sont intéressants : les **interférences constructives** correspondant à un maximum d'amplitude résultante et les **interférences destructives** correspondant à un minimum d'amplitude résultante. Par ailleurs les expressions se simplifient si les deux ondes qui interfèrent ont même amplitude, ce qui est résumé dans le tableau ci-dessous où n est un entier positif ou négatif.

INTERFÉRENCES	Constructives $A_1 \neq A_2$	Destructives $A_1 \neq A_2$	Constructives $A_1 = A_2 = A_0$	Destructives $A_1 = A_2 = A_0$
Signaux/ondes	En phase	En opposition de phase	En phase	En opposition de phase
Déphasage $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$	$\Delta\varphi = 2n\pi$	$\Delta\varphi = 2(n + \frac{1}{2})\pi = (2n + 1)\pi$	$\Delta\varphi = 2n\pi$	$\Delta\varphi = 2(n + \frac{1}{2})\pi = (2n + 1)\pi$
Terme d'interférences $2A_1A_2 \cos(\Delta\varphi)$	$2A_1A_2$	$-2A_1A_2$	$2A_0^2$	$-2A_0^2$
Amplitude du signal $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\varphi)}$	$A = A_1 + A_2$	$A = A_1 - A_2 $	$A = 2A_0$	$A = 0$

Les signaux s_1 et s_2 représentent des ondes dont les phases φ_1 et φ_2 , sont liées au retard de l'onde au point étudié M par rapport aux sources. Le déphasage $\Delta\varphi$ est donc lié à la différence de retard des ondes en M, le point où l'on étudie la superposition, et donc à la différence entre les chemins parcourus depuis chacune des sources pour atteindre M.

Définition

On appelle **différence de marche au point M**, la quantité $\delta(M) = S_1M - S_2M$ égale à la différence entre les chemins parcourus par les deux ondes depuis les sources.

- Pour des ondes sinusoïdales progressives unidirectionnelles suivant (Ox) étudiées dans le chapitre précédent, on a $\delta = x_1 - x_2$ où x_1 et x_2 sont les distances des sources au point M³.

► Cas de sources en phase

Si les sources sont en phase, alors on relie aisément le déphasage et la différence de marche⁴ :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} (d_1 - d_2) \quad \text{où } d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont les distances aux sources.}$$

3. En optique, une définition plus rigoureuse sera vue par la suite, qui tiendra compte des propriétés du milieu.

4. Si les sources ne sont pas en phase on aura : $\Delta\varphi - \Delta\varphi_{\text{entre les sources}} = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$

Les conditions d'interférences sont alors plus commodes à exprimer en fonction de la différence de marche :

Interférences constructives : $\delta = n\lambda$

$n \in \mathbb{Z}$

Interférences destructives : $\delta = (n + \frac{1}{2})\lambda$

$n \in \mathbb{Z}$

POINT MÉTHODE

Étudier le phénomène d'interférences

- L'étude des **phénomènes d'interférences** passe toujours par le calcul du déphasage et/ou de la différence de marche en un point ou dans une région de l'espace.
- Il est essentiel de savoir relier ces termes à l'amplitude ou à son carré de façon à comprendre les conditions d'**interférences constructives** (franges brillantes en optique) et d'**interférences destructives** (franges sombres en optique). Ces conditions s'exprimeront en multiples entiers de π pour le déphasage, et dans le cas de sources en phase, en multiples entiers ou demi-entiers de λ pour la différence de marche.
- Les rôles des ondes 1 et 2 sont totalement symétriques, et on peut exprimer le **déphasage** par $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ aussi bien que par $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ puisque seul compte son cosinus (fonction paire) dans l'état interférentiel. Il en va de même pour la **différence de marche**. Ici on a choisi de mettre en cohérence $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ avec $\delta = x_1 - x_2$ pour des ondes se propageant dans le sens de x positifs. Des choix opposés ne changent rien aux conclusions.

III | Ondes stationnaires

1. Superposition d'ondes progressives de sens contraires

On considère une onde progressive sinusoïdale se propageant selon l'axe (Ox), dans le sens des x positifs, représentée par le signal $s_i(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$. Une seconde onde progressive sinusoïdale se propage selon (Ox) à la même célérité, dans le sens des x négatifs, de sorte que les deux ondes ont même amplitude, même fréquence (donc même pulsation ω) et des vecteurs d'onde de même norme k . Cette deuxième onde est donc représentée par le signal $s_r(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \theta)$. L'onde résultante est représentée par le signal :

$$s(x, t) = s_r(x, t) + s_i(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \theta) + A \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

D'où :
$$s(x, t) = 2A \cos\left(\omega t + \frac{\varphi + \theta}{2}\right) \cos\left(kx + \frac{\theta - \varphi}{2}\right) = 2A \cos(\omega t + \psi_r) \cos(kx + \psi_x)$$

La fonction obtenue s'écrit comme un produit de deux fonctions sinusoïdales indépendantes, l'une fonction de t , l'autre de x : c'est une onde stationnaire.

$$s(x, t) = 2A \cos(kx + \psi_x) \cos(\omega t + \psi_r) = f(x)g(t)$$

Définition

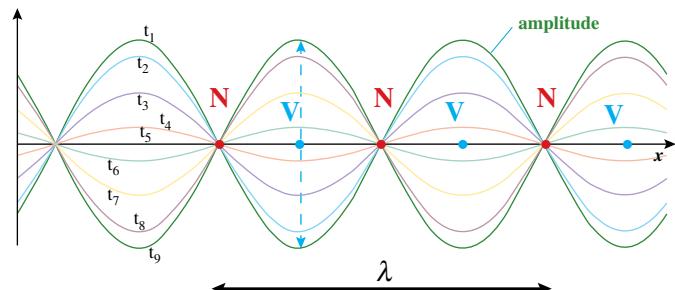
On appelle **onde stationnaire** toute onde fonction de la position x et du temps t pouvant s'écrire sous la forme $s(x, t) = f(x)g(t)$.

- L'onde obtenue $s(x, t)$ est de même pulsation ω et donc de même fréquence f que les ondes progressives initiales. Un point d'abscisse x vibre donc à cette fréquence, ce que décrit le terme $g(t)$ et avec une amplitude égale à la valeur absolue de $f(x)$, qui est une fonction sinusoïdale de x :

$$|f(x)| = 2A |\cos(kx + \psi_x)| = 2A \left| \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \psi_x\right) \right|$$

■ On schématise l'état ondulatoire en fonction de x par un signal sinusoïdal oscillant à l'intérieur des sinusoïdes $\pm A|\cos(kx + \psi_x)|$. On a représenté ici l'état vibratoire à plusieurs instants différents.

■ Les points N restent toujours immobiles ($f(x_N) = 0$), les points V ont la plus grande amplitude de vibration ($f(x_V) = \pm 2A$).



Définitions

- On appelle **nœud** N d'une onde stationnaire une position où le signal est nul à toute date.
- On appelle **fuseau** l'intervalle entre deux nœuds successifs d'une onde stationnaire.
- On appelle **ventre** V d'une onde stationnaire une position où l'amplitude des fuseaux est maximale.

Les positions des nœuds et des ventres se déterminent donc par les valeurs particulières de $f(x)$:

$$\Rightarrow \text{position d'un nœud : } \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x_N + \psi_x\right) = 0 \quad \text{donc : } \frac{2\pi}{\lambda}x_N = \frac{\pi}{2} + n\pi - \psi_x$$

$$\Rightarrow \text{position d'un ventre : } \left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x_V + \psi_x\right)\right| = 1 \quad \text{donc : } \frac{2\pi}{\lambda}x_V = n\pi - \psi_x$$

D'où⁵ : $x_{\text{Nœud}} = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} - x_0$ $x_{\text{Ventre}} = n\frac{\lambda}{2} - x_0 \quad (n \text{ entier})$

Résultats

- Deux nœuds successifs ou deux ventres successifs sont distants de $\frac{\lambda}{2}$.
- Un nœud et un ventre successifs sont distants de $\frac{\lambda}{4}$.
- Un fuseau est de longueur $\frac{\lambda}{2}$.
- Deux points d'un même fuseau vibrent en phase, deux points appartenant respectivement à deux fuseaux successifs vibrent en opposition de phase.

■ Le terme d'onde stationnaire peut paraître paradoxal, en effet il n'y a pas ici de propagation de l'onde résultante. Un point proche de M ne reproduit pas ce qu'a fait M avec un certain retard comme pour une onde progressive. Au contraire tous les points vibrent ensemble comme une vidéo au ralenti permet de le visualiser (nombreuses animations sur différents sites internet).

2. Modes propres sur une corde

La corde de Melde est une corde tendue, de longueur L dont on peut en général faire varier la masse linéique et la tension, ce qui modifie la vitesse de propagation des ondes mécaniques transversales qui peuvent s'y propager. On étudie une corde pour laquelle ces paramètres sont fixés. Ses deux extré-

5. La valeur de x_0 est liée à celle de la phase ψ_x (donc à celles de φ et θ), elle-même liée aux conditions aux limites du milieu dans lequel on étudie l'onde. On aura le plus souvent $x_0 = 0$ (tuyau sonore) ou $x_0 = \frac{\lambda}{4}$ (corde) et dans ce dernier cas, il sera plus commode d'exprimer l'onde stationnaire avec des sinus comme proposé au paragraphe suivant.

mités sont fixes, un vibreur situé en un point de la corde est source d'une onde sinusoïdale. Souvent ce vibreur est à une extrémité. On a une superposition d'ondes progressives émises par le vibreur, et d'ondes progressives réfléchies à chaque extrémité, donc des ondes se propageant dans les deux sens. En prenant simplement en compte une onde incidente et une onde réfléchie, on se trouve dans la situation du paragraphe précédent où l'on doit tenir compte des conditions aux limites, qui sont maintenant connues. Les extrémités étant fixes, elles doivent constituer des noeuds, soit avec les mêmes notations que précédemment :

$$f(x=0) = 0 \quad (1) \quad \text{et} \quad f(x=L) = 0 \quad (2)$$

soit d'après (1) : $\cos(\psi_x) = 0$ d'où : $\psi_x = \pm\frac{\pi}{2}$ (et $x_0 = \frac{\lambda}{4}$)

La phase temporelle ψ_t peut être choisie en fixant une origine des temps commode, de façon à obtenir $\psi_t = \pm\pi/2$ (on choisira le même signe que pour ψ_x). L'expression du signal résultant s'écrit alors :

$$s(x,t) = 2A \cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(kx \pm \frac{\pi}{2}\right) = 2A \sin(\omega t) \sin(kx)$$

En utilisant (2) la deuxième condition aux limites, il apparaît une condition sur k donc sur la longueur d'onde :

$$\sin(kL) = 0 \quad \text{soit :} \quad kL = n\pi$$

On obtient alors une quantification des longueurs d'onde et donc des fréquences qui fixe les valeurs possibles pour respecter les conditions aux limites, à l'aide d'un entier positif n :

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$$

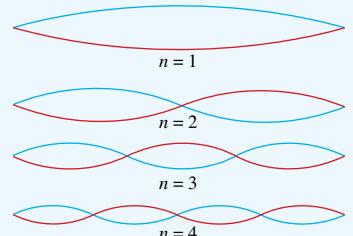
$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}$$

Définitions

- Les **modes propres** de la corde correspondent aux fréquences qui donnent lieu à des ondes stationnaires stables dans la corde.
- Les **conditions aux limites**, qui sont les conditions imposées par les bords du milieu de propagation, permettent d'établir les conditions de quantification qui fixent ces modes propres en faisant apparaître l'entier n :

→ Le premier mode obtenu pour $n = 1$ est appelé **mode fondamental** :

$$f_1 = \frac{c}{2L} \quad \text{et} \quad L = \frac{\lambda}{2} \quad \text{Sur la corde, on a un seul fuseau.}$$



→ Les autres modes sont appelés **harmoniques** et sont des multiples de la fréquence fondamentale. Le n -ième mode a pour fréquence f_n et correspond à la $(n-1)$ -ième harmonique :

$$f_n = \frac{nc}{2L} = nf_1 \quad \text{et} \quad L = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{Sur la corde on a } n \text{ fuseaux.}$$

- Le signal résultant de l'onde stationnaire pour le n -ième mode s'écrit alors :

$$s_n(x,t) = 2A \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

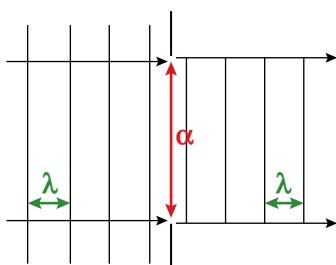
- On peut connaître ces résultats par cœur, mais il est préférable de les retrouver à partir des conditions aux limites et la visualisation d'un nombre entier de fuseaux sur la corde.
- Pour un mode donné, il n'y a pas seulement une onde incidente et une onde réfléchie, mais une superposition de nombreuses ondes (réflexions multiples à chaque extrémité). La corde entre en

résonance⁶ pour des fréquences qui correspondent aux fréquences définies ci-dessus, car toutes ces ondes se retrouvent toujours en phase avec l'onde émise par le vibreur, (ce qui permet de retrouver la condition $2L = n\lambda$).

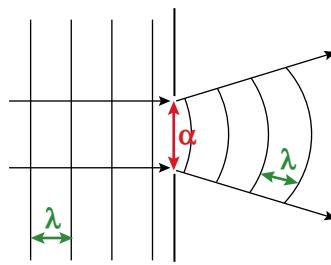
- À la résonance, les amplitudes de toutes ces ondes en phase s'ajoutent. À cause de la dissipation d'énergie par frottement, échauffement, l'amplitude finale reste évidemment finie, mais nettement plus grande que l'amplitude du signal initialement émis par le vibreur (c'est pourquoi on considère en général ce point fixe).

IV Diffraction

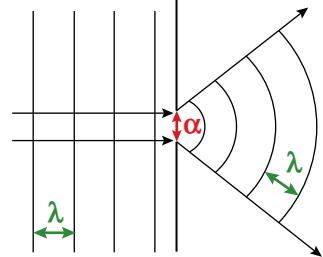
La diffraction est un phénomène typique des ondes, qui résulte de la superposition d'ondes multiples, engendrées en chaque point d'un espace où l'on constraint l'onde par un obstacle. L'onde résultante existe alors en des points du milieu qui ne devraient pas être atteints si la propagation de l'onde incidente n'était pas modifiée. Si le milieu reste le même, la longueur d'onde n'est pas modifiée.



Absence de diffraction : la direction de propagation n'est pas modifiée.
 $\alpha \gg \lambda$



Phénomène de diffraction lorsque la dimension de l'obstacle est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde.



Plus l'obstacle est petit, plus la diffraction est importante.
 $\alpha \approx \lambda$

Définitions

- On parle de **diffraction** d'une onde quand il y a modification de la propagation de cette onde lorsqu'elle rencontre un obstacle (ouverture ou objet).
- L'onde obtenue après l'obstacle est appelée **onde diffractée**.
- La diffraction devient perceptible lorsque les dimensions de l'obstacle sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde et elle est d'autant plus accentuée que l'obstacle est petit.
- La diffraction peut se produire aussi bien avec des ondes mécaniques (ondes sonores, déformations de la surface de l'eau, etc.) qu'avec des ondes électromagnétiques (lumière visible, rayons X...), voire avec des ondes de matière (faisceaux d'électrons).

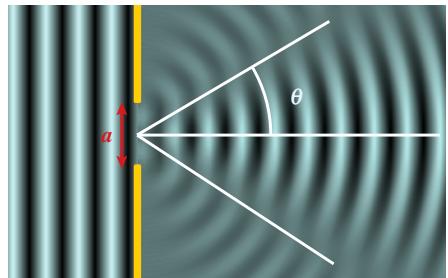
Énoncé

L'onde diffractée par un obstacle de taille a se trouve essentiellement dans un cône de demi-angle au sommet θ tel que : $\sin\theta = \frac{\lambda}{a}$.

- On peut avoir encore un signal en dehors de ce cône, mais il est d'intensité moindre, comme on le voit sur le document ci-dessous.
- Cette expression est plus générale que celle vue au lycée pour un angle faible ($\theta \simeq \lambda/a$).
- Dans le cas de la lumière, ce cône définit la tache centrale de la figure de diffraction. Si on étudie

6. Le phénomène de résonance est très fréquent en physique et dans notre quotidien. Il est étudié en électrocinétique, en mécanique au chapitre 10.

la diffraction d'un faisceau laser à travers une fente rectangulaire très fine, on se ramène à un phénomène à une dimension dans le plan perpendiculaire à la fente, qui fait apparaître sur l'écran une tache centrale très lumineuse (d'ouverture angulaire définie par la relation ci-dessus) et des taches secondaires peu lumineuses de part et d'autre, correspondant à un angle de diffraction plus important.



VERS LA COLLE

Questions de cours

- Montrer que la superposition de deux signaux sinusoïdaux synchrones présentant un déphasage indépendant du temps est un signal sinusoïdal de même fréquence et déterminer son amplitude.
- Terme d'interférence, déphasage, différence de marche. Condition d'interférences constructives, d'interférences destructives.
- Montrer que la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales synchrones, de même amplitude, se propageant en sens contraire sur un même axe donne une onde stationnaire.
- Ondes stationnaires sur la corde de Meldé, conditions aux limites et quantification des modes.
- Diffraction, conditions et propriétés.

Erreurs à éviter

- Il ne faut pas confondre les phénomènes et un bon moyen consiste toujours à se poser la question : quelle est la variable (t , x , voire δ ou $\Delta\phi$) et de la porter systématiquement sur les graphiques.
- Ne pas confondre conditions initiales (temporelles) et conditions aux limites (spatiales).
- Lorsque les sources ne sont pas en phase, il vaut mieux écrire le déphasage et introduire ensuite la différence de marche. Si les sources sont en phase, on pourra travailler directement sur la différence de marche.

Quelques « trucs » utiles

- Bien connaître ses formules de trigonométrie s'avérera utile...
- Il est primordial de bien relever les indications données dans l'énoncé : les ondes sont-elles de même fréquence, ou de fréquences proches, de même amplitude ou non ? La célérité dépend du milieu, or les ondes à superposer sont forcément dans le même milieu, donc elles auront la même célérité.
- On doit soigneusement préciser l'écriture de l'onde en prenant en compte les données de l'énoncé. Pour les ondes progressives, il est préférable de les écrire d'abord sous la forme générale $s(M,t) = A \cos(\omega t - kSM + \theta)$ et de faire intervenir éventuellement x , si nécessaire ensuite.
- La phase à l'origine est parfois imposée, parfois on peut la choisir commodément, on cherchera toujours à rendre les expressions sinusoïdales les plus simples possibles.

Conseils

Il ne faut pas hésiter à réécrire les expressions des signaux, ne serait-ce que pour s'entraîner. Les calculs figurant dans le cours doivent être connus et refaits à l'occasion des exercices. On s'entraînera aussi à raisonner en longueur d'onde pour les distances (position, différence de marche) et en multiples de π pour les phases ou déphasages. Enfin comme dans tous les exercices, on ne négligera pas les schémas qui apportent toujours une aide précieuse.

1 Interférences d'ondes radio ★

→ corrigé p. 54

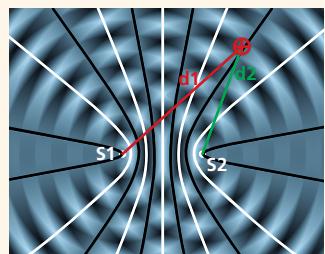
Deux sources S_1 et S_2 en phase génèrent des ondes radio sinusoïdales de longueur d'onde $\lambda = 50$ cm et de même amplitude A . S_1 est placée à l'origine de l'axe x et S_2 peut être placée n'importe où sur le demi-axe (Ox), à une distance d (< 1 mètre) de S_1 .

- ➊ Déterminer à quel(s) endroit(s) placer S_2 pour qu'il y ait interférences constructives en $x = 10$ cm.
- ➋ Même question avec des interférences destructives en $x = 10$ cm.
- ➌ On suppose que la seconde source est à la distance $d = 70$ cm de la première. Déterminer l'interfrange, c'est-à-dire la distance entre deux points successifs dans le même état interférentiel.

2 Interférences sur une cuve à ondes ★★

→ corrigé p. 54

On considère une cuve à ondes éclairée en éclairage stroboscopique. Deux pointes distantes de a frappent à la même fréquence et en phase la surface de l'eau, créant deux ondes qui se propagent. La figure est claire là où la surface de l'eau est convexe et sombre là où elle est concave ; l'amplitude des oscillations est d'autant plus grande que la figure est plus contrastée. On a représenté les courbes correspondant aux interférences constructives (en lignes claires) et destructives (en lignes noires).

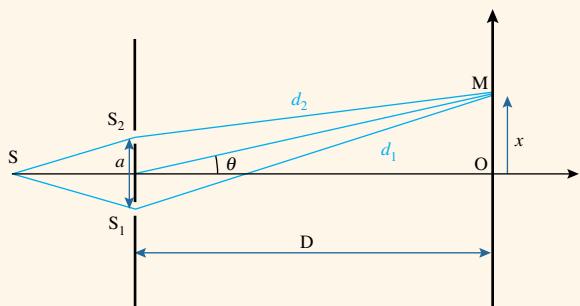


- ➊ Déterminer le déphasage en un point M entre les signaux reçus des deux sources. À quelle condition a-t-on des interférences constructives ? Destructives ?
- ➋ Sur le segment $[S_1, S_2]$, quel est l'intervalle de variation de $S_1M - S_2M$?
- ➌ Déduire de la figure la valeur du rapport a / λ .

3 Interférences lumineuses ★★★

→ corrigé p. 55

On réalise l'expérience des trous d'Young : deux trous très petits (on ne prendra pas en compte ici la diffraction) S_1 et S_2 , distants de a , éclairés par un faisceau de lumière issu de S , monochromatique de longueur d'onde λ , située sur la médiatrice des trous. Le plan de figure contient la source initiale et les sources secondaires. On observe la figure d'interférences sur un écran perpendiculaire au plan de figure, à une distance D de l'axe S_1S_2 .



- ➊ On se place en un point M de l'écran dans le plan de figure. Exprimer la différence de marche δ entre les deux ondes en M et déterminer le déphasage $\Delta\phi$.
- ➋ Donner la fréquence de l'onde résultante et son amplitude.

- ③ On rappelle que l'intensité lumineuse est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde. Déterminer l'intensité lumineuse I résultant des deux ondes en fonction de $\Delta\phi$ et de I_0 l'intensité émise par une des sources. Tracer l'allure de la fonction $I(\Delta\phi)$.
- ④ On suppose maintenant que l'écran est à grande distance des trous ($D \gg a$) et que le point M est peu éloigné de l'axe ($D \gg x$). Exprimer la différence de marche $\delta(M)$ en fonction de a , D et x .
- ⑤ À quelle condition les interférences en M sont-elles constructives ? Destructives ? En déduire la position des franges brillantes et des franges sombres puis l'expression, en fonction de D , a et λ , de l'interfrange i , c'est-à-dire la distance entre deux points successifs dans le même état interférentiel.

4 Modes propres d'une corde ★★

→ corrigé p. 57

On considère une corde fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$. Un vibreur placé en $x = 0$ crée sur la corde des ondes sinusoïdales progressives de pulsation ω . On choisit l'origine des temps de sorte que la phase initiale de cette onde en O soit nulle. Lorsqu'une telle onde se réfléchit en $x = L$, elle se propage dans le sens contraire de la précédente et se superpose à celle-ci. On suppose que son amplitude est identique à celle de l'onde incidente.

- ① Donner l'expression de l'onde résultante, compte tenu des conditions aux limites.
- ② Comparer l'onde réfléchie et l'onde incidente lors de la réflexion.
- ③ Combien de fuseaux obtient-on si la fréquence du vibreur est 50 Hz sur une corde longue de 1 m, de masse 10 g et soumise une tension de 4 N ? On pourra retrouver l'expression de la célérité par une analyse dimensionnelle.

5 Télémétrie laser ★★

→ corrigé p. 58

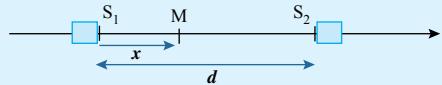
- ① Un faisceau laser est généralement considéré comme fin et cylindrique, c'est-à-dire à section constante. En pratique sa section augmente faiblement du fait de la diffraction. Quel est le diamètre du faisceau à une distance $L = 1$ m de la cavité, pour un faisceau de diamètre initial au sortir de la cavité laser $D = 3$ mm et de longueur d'onde $\lambda = 532$ nm ?
- ② On utilise un laser de même longueur d'onde pour envoyer des impulsions depuis la Terre vers la Lune. Ce laser a un diamètre initial de 1,2 cm, quel est l'élargissement angulaire θ du faisceau ?
- ③ Ce faisceau est d'abord envoyé sur un télescope, ce qui a pour effet d'élargir le faisceau et de diminuer θ d'un facteur 5, puis il est dirigé vers la Lune. Quel est le diamètre du faisceau sur la Lune ?

N. B. : Dans tous les corrigés, n désigne un entier (pas nécessairement positif).

1 Interférences d'ondes radio

→ énoncé p. 52

- ❶ Les deux sources émettent des ondes progressives de même amplitude, en phase, de même longueur d'onde λ . Ce sont des ondes radio, donc des ondes électromagnétiques, de même célérité égale à la vitesse de la lumière c , elles ont donc même fréquence et même pulsation ω . D'où les signaux :



$$\text{en } M \text{ émis par } S_1 \text{ s'écrit : } s_1(x,t) = A \cos(\omega t - k.S_1 M + \theta) = A \cos(\omega t - kx + \theta) = A \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$\text{en } M \text{ émis par } S_2 \text{ s'écrit : } s_2(x,t) = A \cos(\omega t - k.S_2 M + \theta) = A \cos(\omega t - k(d-x) + \theta) = A \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\text{avec : } \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda} \quad \text{et} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

N. B. : On notera que l'onde 1 s'écrit bien en $(\omega t - kx)$ et l'onde 2 en $(\omega t + kx)$, ce qui est cohérent avec leur sens de propagation respectif.

L'état interférentiel d'un point sur l'axe dépend de la valeur du terme d'interférences en x , donc du déphasage ou de la différence de marche :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (-k(d-x) + \theta) - (-kx + \theta) = 2kx - kd \quad \text{et} \quad \delta = 2x - d$$

Les ondes étant émises en phase, on a bien : $\Delta\varphi = k\delta$

Il y a des interférences constructives en x si le déphasage entre les deux signaux est un multiple de 2π , ou plus directement, si la différence de marche en M est un multiple de la longueur d'onde :

$$\delta = 2x - d = n\lambda \quad \text{soit : } S_1 S_2 = d = 2x - n\lambda$$

$$\text{A.N. : } S_1 S_2 = 20 + 50n \text{ (en cm) avec } d < 1 \text{ m, il vient : } S_1 S_2 = \mathbf{20 \text{ cm ou } 70 \text{ cm.}}$$

- ❷ Pour des interférences destructives en x , alors le déphasage est un multiple impair de π et la différence de marche, un multiple demi-entier (sous-entendu impair) de la longueur d'onde :

$$\delta = 2x - d = \frac{2n+1}{2}\lambda \quad \text{soit : } S_1 S_2 = d = 2x - \frac{2n+1}{2}\lambda$$

$$\text{A.N. : } S_1 S_2 = 20 - 25 + 50n \text{ (en cm) avec } d < 1 \text{ m, il vient : } S_1 S_2 = \mathbf{45 \text{ cm ou } 95 \text{ cm.}}$$

- ❸ La différence de marche en x vaut $\delta = 2x - d$ et deux points constructifs x_1 et x_2 successifs vérifient :

$$\delta_1 = 2x_1 - d = n\lambda \quad \text{et} \quad \delta_2 = 2x_2 - d = (n+1)\lambda \quad \text{soit : } i = x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{2} = \mathbf{25 \text{ cm}}$$

On obtiendrait évidemment le même résultat avec deux points destructifs successifs. L'interfrange ici ne dépend pas de la distance entre les sources, parce qu'on les étudie sur l'axe des sources. Ce ne serait pas le cas dans une autre partie de l'espace autour des sources.

2 Interférences sur une cuve à ondes

→ énoncé p. 52

- ❶ Les deux sources émettent des ondes progressives de même amplitude, de même fréquence et en phase. Ce sont des ondes mécaniques à la surface de l'eau, de même célérité v donc de même longueur d'onde λ . Les signaux en M émis respectivement par S_1 et par S_2 s'écrivent :

$$s_1(x,t) = A \cos(\omega t - k.S_1 M + \theta) = A \cos(\omega t - kd_1 + \theta) = A \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_2(x,t) = A \cos(\omega t - k.S_2 M + \theta) = A \cos(\omega t - kd_2 + \theta) = A \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\text{avec : } \omega = 2\pi f \text{ et } k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

L'état interférentiel d'un point sur l'axe dépend de la valeur du terme d'interférences en x , donc du déphasage ou de la différence de marche :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (-kd_2 + \theta) - (-kd_1 + \theta) = k(d_1 - d_2) \quad \text{et} \quad \delta = d_1 - d_2 = S_1 M - S_2 M$$

Les ondes étant émises en phase, on a bien : $\Delta\varphi = k\delta$

On a des interférences constructives en M si le déphasage entre les deux signaux est un multiple de 2π , ou plus directement, si la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde :

$$\delta_{\text{constructive}} = d_1 - d_2 = S_1 M - S_2 M = n\lambda$$

On a des interférences destructives en M si le déphasage entre les deux signaux est un multiple impair de π , ou plus directement, si la différence de marche est un multiple demi-entier de la longueur d'onde :

$$\delta_{\text{destructive}} = d_1 - d_2 = S_1 M - S_2 M = \frac{2n+1}{2}\lambda$$

N. B. : Les courbes qui peuvent s'écrire $d_1 - d_2 = \text{constante}$, où d_1 et d_2 sont les distances à deux points fixes, sont des hyperboles dont les points fixes sont les foyers, ce que représentent les lignes sur la photo.

- ② Quand M se déplace entre S_1 et S_2 , la quantité $S_1 M - S_2 M = \delta$ varie entre $-S_1 S_2$ et $S_1 S_2$. Donc **la quantité $S_1 M - S_2 M$ varie entre $-a$ et a** .
- ③ Le plus simple est de raisonner sur l'interfrange, soit la distance entre deux points successifs dans le même état interférentiel, c'est-à-dire tels que leur différence de marche diffère d'une longueur d'onde. On observe 5 interfranges entre les sources sur la photo, or la différence de marche varie de $-a$ à $+a$, donc de $2a$ sur le segment entre les sources. D'où :

$$2a = 5\lambda \quad \text{qui donne} \quad \frac{a}{\lambda} = 2,5$$

Remarque : Comme dans l'exercice précédent, on peut aussi montrer que l'interfrange entre les sources vaut une demi-longueur d'onde et retrouver le rapport ci-dessus.

3 Interférences lumineuses

→ énoncé p. 52

- ① Les deux ondes électromagnétique issues de S_1 et S_2 sont en phase car elles proviennent d'une source unique et parcourent le même chemin $SS_1 = SS_2$, on a donc deux ondes synchrones, dont le déphasage est indépendant du temps⁷. La différence de marche δ et le déphasage $\Delta\varphi$ valent :

$$\delta = S_1 M - S_2 M \quad \text{et} \quad \Delta\varphi = k\delta = k(S_1 M - S_2 M) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

- ② L'onde résultante est une onde sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude A dont l'expression a été établie dans le cours p. 45 : $A = 2A_0 \left| \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right|$

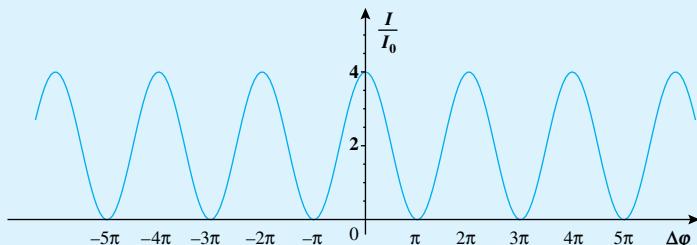
- ③ L'intensité lumineuse est proportionnelle au carré de l'amplitude A :

$$I = KA^2 = 4KA_0^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

avec K la constante de proportionnalité et I_0 l'intensité émise par une source.

On retrouve bien des maxima d'intensité (franges brillantes) pour des déphasages multiples de 2π et des minima (ici nuls) pour des déphasages multiples impairs de π . On notera qu'en moyenne l'intensité est la somme des deux intensités soit $2I_0$.

7. En réalité cela est vrai au niveau des sources et tant que la différence de marche en M reste faible, mais si la différence de marche en M augmente trop, alors les interférences ne sont plus possibles car ce déphasage dépend à nouveau du temps.



- ❸ On obtient les distances S_1M et S_2M , soit en utilisant les coordonnées des points, soit en projetant S_1 et S_2 sur (Ox) et en utilisant le théorème de Pythagore. Dans les deux cas on obtient aisément :

$$S_1M = \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} \quad \text{et} \quad S_2M = \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$$

On s'est placé dans le cas où $x \ll D$ et $a \ll D$. On peut donc utiliser les développements limités suivants :

$$S_1M = \sqrt{D^2 \left(1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{ax}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2}\right)} = D \left(1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{ax}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2}\right)^{1/2} \approx D \left(1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{ax}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2}\right)$$

$$S_2M = \sqrt{D^2 \left(1 + \frac{x^2}{D^2} - \frac{ax}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2}\right)} = D \left(1 + \frac{x^2}{D^2} - \frac{ax}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2}\right)^{1/2} \approx D \left(1 + \frac{x^2}{2D^2} - \frac{ax}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2}\right)$$

$$\text{D'où : } \delta = S_1M - S_2M \approx D \left(1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{ax}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2}\right) - D \left(1 + \frac{x^2}{2D^2} - \frac{ax}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2}\right) = D \cdot 2 \frac{ax}{2D^2}$$

Finalement : $\boxed{\delta = S_1M - S_2M \approx \frac{ax}{D}}$

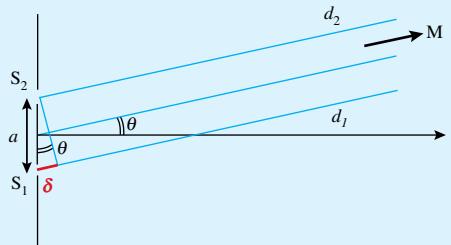
Bien comprendre

Chaque fois qu'un énoncé précise qu'une grandeur est petite devant une autre, il faut s'attendre à utiliser un développement limité. Le plus fréquemment utilisé en physique est celui de $(1+\varepsilon)^\alpha$ qui, au premier ordre, s'écrit : $(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$. On cherchera donc à mettre en évidence un rapport ε sans dimension très petit devant 1 (ici a/D et x/D) et à faire apparaître la puissance α .

Une autre méthode très rapide permet d'établir la différence de marche : M étant très éloigné, on peut considérer les droites S_1M et S_2M comme quasiment parallèles. La différence de marche vaut alors :

$$\delta = d_1 - d_2 = a \sin \theta \approx a\theta \approx a \tan \theta = a \frac{x}{D}$$

où l'on utilise aussi des développements limités $\sin \theta \approx \theta$, $\tan \theta \approx \theta$.



- ❹ On a des interférences constructives en M si la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde :

$$\delta = \frac{ax}{D} = n\lambda \quad \text{soit la position des franges brillantes : } x_{FB} = \frac{n\lambda D}{a}$$

On a des interférences destructives en M si la différence de marche est un multiple demi-entier de la longueur d'onde :

$$\delta = \frac{ax}{D} = \frac{2n+1}{2}\lambda \quad \text{soit la position des franges sombres : } x_{FS} = \frac{(n+\frac{1}{2})\lambda D}{a}$$

L'interfrange est la distance entre deux franges brillantes (ou deux franges sombres) successives : $i = \frac{\lambda D}{a}$

4 Modes propres d'une corde

→ énoncé p. 53

- 1 On considère la superposition d'une onde incidente s_i progressive et d'une onde réfléchie progressive en sens contraire s_r , de même amplitude et de même pulsation. Avec les choix de l'énoncé on a :

$$s(x,t) = s_r(x,t) + s_i(x,t) = A \cos(\omega t + kx + \theta) + A \cos(\omega t - kx)$$

D'où :

$$s(x,t) = 2A \cos\left(\omega t + \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(kx + \frac{\theta}{2}\right)$$

Les conditions aux limites imposent :

$$f(x=0) = 0 \quad (1)$$

$$\text{et : } f(x=L) = 0 \quad (2)$$

soit d'après (1) :

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

d'où : $\theta = \pi$

d'où : $s(x,t) = 2A \sin(\omega t) \sin(kx)$

d'après (2) :

$$\sin(kL) = 0$$

soit : $kL = n\pi$

D'où :

$$s(x,t) = 2A \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

On obtient donc des ondes stationnaires. Plusieurs solutions sont possibles correspondant à chaque mode propre de la corde schématisées dans le cours p. 49.

Bien comprendre

Il s'agit de la forme générale des solutions, qui prend en compte les conditions aux limites (ici, le signal est nul aux deux extrémités). Il y a une infinité de solutions, puisque la seule donnée sur n est que c'est un entier non nul. Chaque solution existe et le mode général est une superposition de toutes les solutions possibles. La solution correspondant à n donné est le mode propre de rang n .

- 2 Pour n impair en $x = L$, on a :

$$s_i(x,t) = A \cos(\omega t - kL) = A \cos(\omega t - n\pi) = -A \cos(\omega t)$$

$$s_r(x,t) = A \cos(\omega t + kL + \pi) = A \cos(\omega t + (n+1)\pi) = A \cos(\omega t)$$

Pour n pair en $x = L$, on a :

$$s_i(x,t) = A \cos(\omega t - kL) = A \cos(\omega t - n\pi) = A \cos(\omega t)$$

$$s_r(x,t) = A \cos(\omega t + kL + \pi) = A \cos(\omega t + (n+1)\pi) = -A \cos(\omega t)$$

Dans tous les cas, l'**onde réfléchie s'inverse par rapport à l'onde incidente**, ce qui est assez intuitif.

- 3 La célérité c dépend de la tension T et de la masse linéique μ (on peut retrouver l'expression par analyse dimensionnelle) et vaut :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{TL}{m}} = \sqrt{\frac{4 \times 1}{0,01}} = 20 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{d'où : } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{20}{50} = 0,4 \text{ m}$$

La condition pour obtenir des ondes stationnaires est $kL = n\pi$, soit :

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{donc : } n = \frac{2L}{\lambda} = 5$$

On a donc le 5^e mode, c'est-à-dire le 4^e harmonique, qui donne donc **5 fuseaux**, soit 6 noeuds (positions 0, 20, 40, 60, 80, 100 cm) et 5 ventres (positions 10, 30, 50, 70, 90 cm).

5 Télémétrie laser

→ énoncé p. 53

- 1 La diffraction provoque un élargissement du faisceau laser caractérisé par l'angle θ tel que :

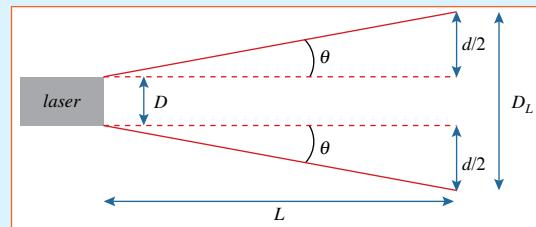
$$\sin \theta \approx \frac{\lambda}{D} \approx 2 \cdot 10^{-4}$$

Soit L la distance parcourue par le laser. On a :

$$\tan \theta = \frac{d/2}{L} \text{ d'où : } d = 2L \tan \theta$$

Comme θ est très petit, on pourra assimiler $\sin \theta$, $\tan \theta$ et θ :

$$d = 2L\theta = \frac{2L\lambda}{D} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$



Autrement dit, le nouveau diamètre est $D_L = D + d \approx 3,4 \text{ mm}$, ce qui justifie de considérer le faisceau cylindrique sur les distances habituelles.

- 2 On a la même relation que précédemment : $\theta \approx \frac{\lambda}{D} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$

- 3 À la sortie du télescope, on a : $\theta' = \frac{\theta}{5} \approx 9 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$

Le diamètre du faisceau sur la Lune est : $D_{\text{Lune}} = D + d \approx d = 2L\theta' \approx 7 \text{ km}$ $L = 384 \, 000 \text{ km}$

Pour information : Le détecteur sur la Lune (apporté par les missions Apollo) est beaucoup plus petit que la tache Laser. Au retour le faisceau s'élargit encore et de nouveau le détecteur est beaucoup plus petit que la tache Laser. Le rapport entre le nombre de photons reçus au retour et le nombre de photons émis est très faible (de l'ordre de 10^{-19} !). Ces mesures permettent néanmoins de mesurer la distance Terre-Lune avec une incroyable précision de l'ordre du cm... Seul un faisceau très intense et très peu divergent comme celui d'un Laser permet cette mesure.

À méditer

La rigueur vient à bout de l'obstacle.

LÉONARD DE VINCI (1452-1519)

Lois de l'optique géométrique

Plusieurs approches sont possibles dans l'étude du phénomène lumineux : ondulatoire (dans le cadre de l'électromagnétisme), corpusculaire (dans le cadre de la physique quantique) ou plus simplement en terme de rayons lumineux (dans le cadre de l'optique géométrique). L'optique géométrique ne prétend pas expliquer la nature de la lumière, mais simplement décrire certains aspects de son comportement. À ce titre, elle présente l'avantage d'utiliser peu de mathématiques complexes et d'avoir de multiples applications pratiques : photographie, observation astronomique, observation au microscope, phénomène de la vision...

I | Le cadre de l'optique géométrique

1. Optique géométrique/optique ondulatoire

Dans le chapitre précédent on a abordé la lumière en termes d'onde électromagnétique. La lumière dite visible est celle accessible à l'œil humain et se situe aux longueurs d'onde dans le vide comprises entre 400 et 800 nm. En raison de son caractère ondulatoire, la lumière est susceptible de diffracter, d'interférer et de se disperser, phénomènes décrits au chapitre précédent. Dans le chapitre de physique quantique, on verra que la lumière peut également être considérée comme un faisceau de particules, les photons. Ces différentes approches ont pour but de cerner la nature du phénomène lumineux. Dans ce chapitre, c'est le comportement de la lumière à une échelle macroscopique auquel on s'intéresse. La nature du phénomène lumineux passe ici au second plan, même si le vocabulaire de la physique ondulatoire reste très présent.

Définitions

- **L'optique géométrique** est l'étude des phénomènes lumineux, pour lesquels les aspects purement ondulatoires (en particulier la diffraction et les interférences) sont négligés.
- Dans ce cadre, le chemin suivi par la lumière peut être matérialisé par une courbe appelée **rayon lumineux**, que l'on orientera selon le sens réel de parcours de la lumière.
- Un **faisceau lumineux** est un ensemble de rayons lumineux.

L'approximation de l'optique géométrique consiste en particulier à négliger la diffraction sur les obstacles, ce qui suppose que les objets qui délimitent son parcours (par exemple le contour des instruments d'optique) sont de grandes dimensions devant sa longueur d'onde.

Énoncé

Principe de Fermat : La lumière suit le chemin le plus rapide pour aller d'un point à un autre.

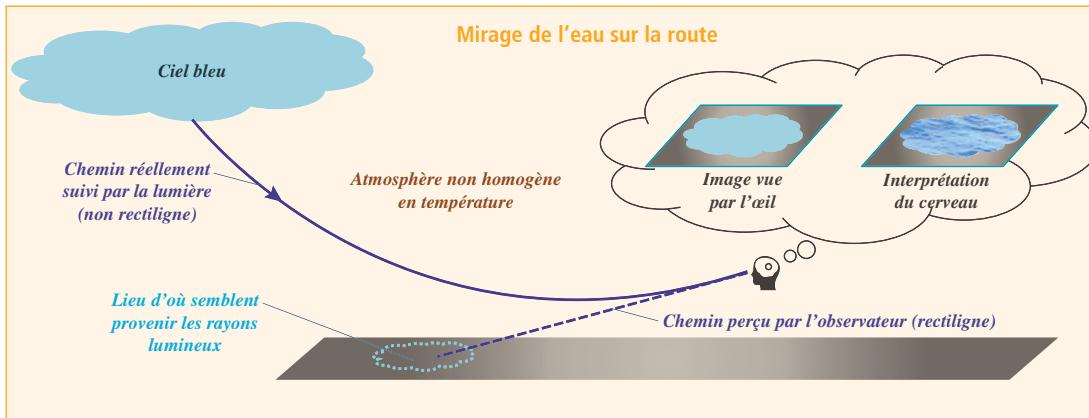
- Ce principe n'est pas au programme, mais permet de comprendre le comportement de la lumière dans bien des situations.

Propriété

Propagation rectiligne de la lumière : Dans le cadre de l'optique géométrique, la lumière se propage en ligne droite dans les milieux homogènes (c'est-à-dire dont les propriétés sont les mêmes en tout point) et isotropes (c'est-à-dire dont les propriétés sont les mêmes dans toutes les directions).

Cette propriété est une conséquence directe du principe de Fermat. Dans un milieu non homogène ou non isotrope la lumière peut toujours être étudiée en termes de rayons, mais ces derniers ne sont pas

forcément rectilignes. C'est ce qui cause le phénomène de mirage, car notre cerveau interprète systématiquement les trajets lumineux comme des lignes droites, ce qui fausse son jugement lorsque ce n'est pas le cas. On voit souvent sur la route l'image du ciel que le cerveau interprète comme ce qui lui semble le plus logique, à savoir la présence d'eau.



Énoncé

Loi du retour inverse de la lumière : la trajectoire suivie par la lumière ne dépend pas du sens de parcours de celle-ci.

- Cette loi est une conséquence du principe de Fermat : Si la lumière utilise un chemin optimal, qui minimise le temps de trajet pour aller de A en B, alors nécessairement en repassant par le même chemin en sens inverse, on minimisera aussi le temps de parcours de B à A. Il est donc nécessaire de préciser sur les schémas le sens effectivement suivi par la lumière, afin que la distinction objet/image ait un sens.
- Cette loi a des conséquences amusantes : si vous voyez l'œil de quelqu'un, alors il voit votre œil... Elle permettait aussi de répondre à la 87^e (et dernière !) question du sujet de l'ENS PC 2011 qui traitait de dispositif d'invisibilité et qui demandait de discuter la pertinence d'une cape d'invisibilité utilisée par un célèbre héros de roman. La réponse était toute simple, si le héros voit les gens extérieurs à travers sa cape, alors d'après la loi du retour inverse, ils le voient aussi... !

2. Les sources en optique

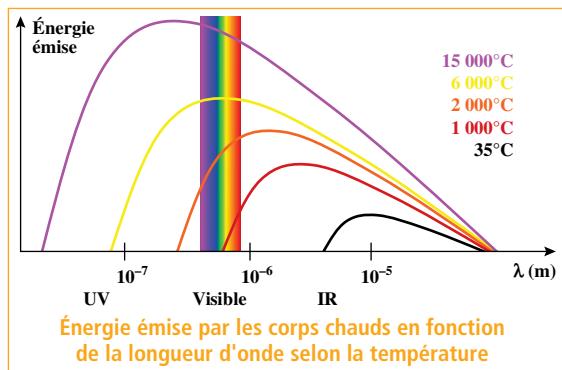
Une source est un corps qui envoie des ondes lumineuses dans l'espace qui l'environne. Une **source primaire** génère la lumière (étoile, ampoule, écran TV...), une **source secondaire** ne fait que renvoyer la lumière qu'elle reçoit (Lune, écran de projection, tableau de la salle de classe, tout un chacun...).

Définitions

- Le **spectre** d'une source est l'ensemble des fréquences qu'elle émet, autrement dit pour la lumière visible, l'ensemble des couleurs qu'elle contient.
- Une **source monochromatique** n'est composée que d'une seule fréquence (donc une seule couleur), une **source polychromatique** de plusieurs fréquences (donc plusieurs couleurs).

Sources naturelles : un corps émet des ondes électromagnétiques dans un domaine de fréquences d'autant plus large et avec une intensité d'autant plus grande que sa température est élevée (rayonnement du corps noir). Si la température dépasse les 1000 °C, il devient visible (étoiles, lave, métal en fusion...). Le spectre de fréquences émises par le Soleil est appelé spectre de la lumière blanche ou naturelle.

Sources artificielles : le filament chauffé des ampoules traditionnelles émet une lumière de spectre comparable à celui de la lumière blanche naturelle, contrairement aux ampoules dites basse consommation (versions miniatures améliorées des tubes improprement appelés au néon) et aux LED blanches dont le spectre est moins riche, donc moins agréable. Les LED de couleur semblent monochromatiques, mais leur largeur spectrale de l'ordre de 50 nm (> 10 % de la longueur d'onde) en fait plutôt des sources polychromatiques. Le LASER au contraire est très monochromatique, avec une largeur spectrale de moins de 0,001 nm (LASER He-Ne rouge à 632,8 nm utilisé en TP).



Définitions

- Une **source ponctuelle** a des dimensions très petites devant celles des systèmes optiques utilisés.
- Une **source étendue** a des dimensions non négligeables.

On utilisera souvent des raisonnements avec des sources ponctuelles monochromatiques, mais il s'agit d'un modèle idéal, toute source ayant nécessairement une étendue spatiale et spectrale.

3. Propriétés des milieux transparents

Définitions

- Un **milieu transparent** est un milieu dans lequel la lumière visible se propage sans être absorbée.
- L'**indice n** d'un milieu transparent est le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide à υ la vitesse de la lumière dans le milieu : $n = \frac{c}{\upsilon}$ (n est une grandeur sans dimension nécessairement supérieure à 1).
- Un milieu 1 est dit plus **réfringent** qu'un milieu 2 si son indice est supérieur ($n_1 > n_2$).

Quelques valeurs : $n_{\text{vide}} = 1$; $n_{\text{eau}} = 1,33$; $n_{\text{verre}} = 1,5$; $n_{\text{diamant}} = 2,42$; $n_{\text{air}} = 1,000293$

La grandeur caractéristique d'une onde est la période temporelle T (ou la fréquence) de ses vibrations. Cette dernière ne change pas lors de la propagation dans différents milieux. Il en résulte que si la vitesse de l'onde change au cours de sa propagation, alors sa longueur d'onde change

dans le vide : $\lambda_0 = cT$ et dans un milieu transparent : $\lambda = \upsilon T$

Propriété

La longueur d'onde λ dans un milieu d'indice n est liée à la longueur d'onde dans le vide λ_0 par :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Il serait donc plus pertinent de définir les ondes lumineuses monochromatiques par leur fréquence plutôt que par leur longueur d'onde, mais l'usage a cependant pris le pas sur cette considération. Lorsqu'on parle de longueur d'onde, on sous-entend toujours dans le vide, même si l'onde se propage dans un milieu.

Définition

Un milieu est **dispersif** si la vitesse de propagation de l'onde et par suite son indice dépendent de sa fréquence (donc de sa longueur d'onde dans le vide). La dispersion d'un milieu transparent est en général décrite par la **loi de Cauchy** :

$$n = A + \frac{B}{\lambda_0^2} \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ des constantes positives}$$

- Le vide et l'air ne sont pas dispersifs.
- La loi de Cauchy est une loi empirique, qui décrit bien la plupart des milieux transparents.
- L'indice dépend des conditions du milieu (température, pression, contraintes mécaniques...).
- L'indice varie avec la longueur d'onde et les couleurs de la lumière blanche vont se propager différemment dans les milieux transparents, le rouge étant plus rapide que le bleu, provoquant des phénomènes tel que l'arc-en-ciel (*voir exercice n° 4 p. 69*), la dispersion par un prisme (*voir exercice n° 3 p. 68*), l'irisation sur les bords des verres de lunettes....

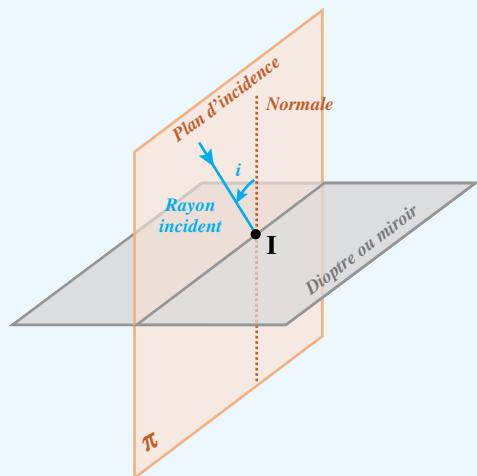
II Lois de Descartes**1. Position du problème****Définitions**

- Un **dioptre** est la surface de séparation entre deux milieux transparents de nature différente.
- Un **miroir** ou **catadioptre** est une surface recouverte d'un mince dépôt métallique réfléchissant (argent ou aluminium).

Exemples : La surface de l'eau est un dioptre plan air-eau, celle d'un verre de lunette un dioptre air-verre.

Définitions

- Un **rayon incident** est un rayon qui arrive sur un dioptre ou un miroir.
- Le **point d'incidence I** est le point du dioptre où arrive le rayon incident.
- La **normale** est la direction perpendiculaire à la surface du dioptre en un point, généralement au point d'incidence (si le dioptre n'est pas plan, on la trace à l'aide du plan tangent au dioptre).
- Le **plan d'incidence π** est le plan contenant le rayon incident et la normale au dioptre ou au miroir.
- L'**angle d'incidence i** est l'angle formé par le rayon incident et la normale au dioptre ou au miroir.
- Un **rayon émergent** est un rayon qui quitte un dioptre, après l'avoir traversé.
- Un **rayon réfléchi** est un rayon qui quitte le miroir (ou le dioptre) en restant dans le même milieu que le rayon incident.



2. Réflexion des rayons lumineux

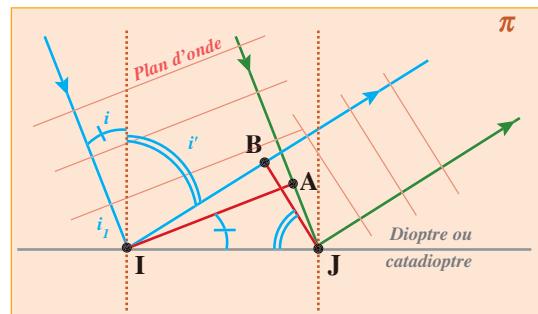
Définition

La **réflexion** consiste, à la rencontre d'une surface réfléchissante, en un brutal changement de direction de la lumière, qui reste dans le même milieu.

Une onde plane arrive sur un dioptre avec un angle d'incidence i et se réfléchit selon un angle i' *a priori* quelconque. L'onde incidente et l'onde réfléchie sont des ondes planes, les plans d'onde sont orthogonaux aux rayons. Deux rayons incidents parallèles frappent, selon le même angle d'incidence i , un dioptre plan, respectivement aux points d'incidence I et J. Chaque rayon se réfléchit selon un angle i' . Les plans d'onde correspondent à des ondes en phase, donc les points I et A sont en phase et les points B et J également, la lumière parcourt donc IB et AJ dans le même temps et à la même vitesse v , d'où :

$$AJ = v\Delta t = IB \text{ soit : } II \sin i = IJ \sin i' \\ \text{donc : } \sin i = \sin i' \text{ et finalement : } i = i'$$

En orientant les angles selon le sens positif trigonométrique, i et i' sont des signes contraires.



Énoncé

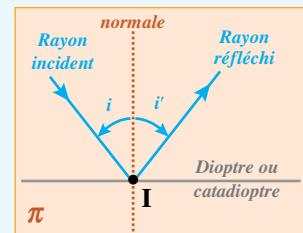
Loi de Snell-Descartes de la réflexion :

Lorsqu'un rayon incident frappe un dioptre ou un miroir et qu'il se réfléchit, il vérifie les propriétés suivantes :

- le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence
- l'angle de réflexion i' est égal et opposé à l'angle d'incidence i :

$$i' = -i$$

où les angles sont orientés de la normale vers le rayon.



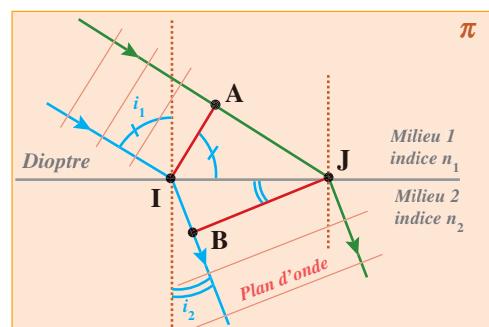
- Ce résultat simple permet de construire le chemin des rayons lumineux d'un miroir, plan ou non.

3. Réfraction des rayons lumineux

Définition

La **réfraction**, ou encore la transmission, consiste, lors de la traversée d'un dioptre, en un brusque changement de direction de la lumière qui change de milieu.

Une onde plane arrive sur un dioptre avec un angle d'incidence i_1 . Elle se réfracte à travers le dioptre et poursuit selon un angle i_2 par rapport à la normale. L'onde incidente et l'onde réfractée sont des ondes planes, les plans d'onde sont orthogonaux aux rayons. Deux rayons incidents parallèles frappent, selon le même angle d'incidence i_1 , un dioptre plan, respectivement aux points d'incidence I et J. J et B d'une part, A et I d'autre part appartiennent au même plan d'onde, la lumière effectue donc les trajets IB et AJ dans le même temps Δt , d'où, la vitesse étant différente dans chaque milieu :



$$\Delta t(\text{IB}) = \Delta t(\text{AJ})$$

donc :

$$\frac{\text{AJ}}{v_1} = \frac{\text{IB}}{v_2}$$

Soit, en multipliant par c , puis en utilisant la définition de l'indice :

$$c \frac{\text{IJ} \sin i_1}{v_1} = c \frac{\text{IJ} \sin i_2}{v_2}$$

puis :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Ici l'orientation des angles n'introduit pas de modification de signe¹.

Énoncé

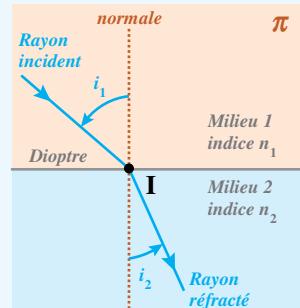
Loi de Snell-Descartes de la réfraction :

Lorsqu'un rayon incident traverse un dioptre en passant d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2 , et qu'il se réfracte, il vérifie les propriétés suivantes :

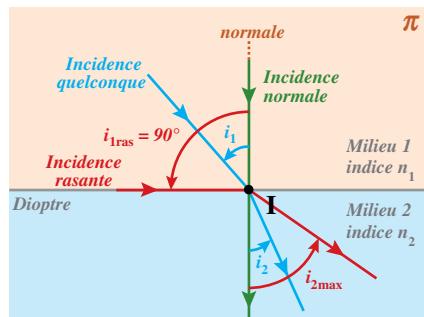
- ↳ le rayon réfracté appartient au plan d'incidence,
- ↳ l'angle de réfraction i_2 et l'angle d'incidence i_1 vérifient la relation :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

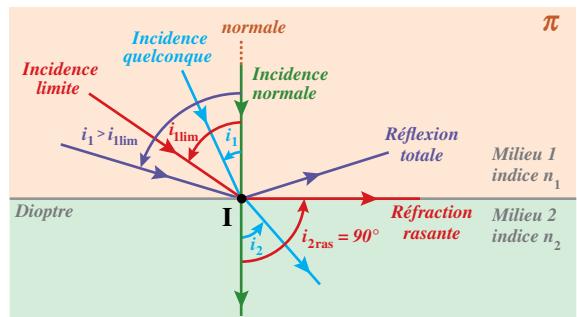
où les angles sont orientés de la normale vers le rayon.



Lorsque la réfraction n'est pas possible, c'est-à-dire pour une incidence qui dépasse celle donnant une réfraction rasante, alors il y a réflexion totale.



Réfraction dans un milieu plus réfringent : $n_2 > n_1$



Réfraction dans un milieu moins réfringent : $n_2 < n_1$

Propriété

■ Lors du passage vers un milieu plus réfringent, le rayon se rapproche de la normale, tandis que vers un milieu moins réfringent, le rayon s'éloigne de la normale.

■ La **réflexion totale** ne peut donc se produire qu'à deux conditions :

- ↳ la lumière passe vers un milieu moins réfringent,
- ↳ l'angle d'incidence est supérieur à l'angle limite correspondant à la réfraction rasante :

$$n_2 < n_1 \quad \text{et} \quad i_1 > i_{\text{lim}} \quad \text{avec : } \sin i_{\text{lim}} = \frac{n_2}{n_1}$$

1. Il serait excessif de dire qu'on a ici démontré les lois de Descartes : on a en effet admis implicitement que le rayon réfléchi ou réfracté était dans le plan d'incidence (ce qui, bien que conforme à l'observation, n'est pas une évidence), que l'onde réfléchie ou réfractée avait la même fréquence que l'onde incidente et qu'elle était également plane. Ce raisonnement permet seulement une approche des lois de Descartes, dont la démonstration rigoureuse sera du ressort du cours d'électromagnétisme de seconde année.

- En réalité la réfraction s'accompagne toujours d'une réflexion partielle, qui augmente avec l'incidence.
- Si l'on considère deux milieux A et B, avec $n_A < n_B$, alors l'angle de réfraction maximal de A vers B est égal à l'angle d'incidence limite de B vers A.
- La réflexion totale est exploitée dans la fibre optique (*voir exercice n° 2 p. 68*), le miroir sans tain...

POINT MÉTHODE

Schématiser en optique

- Il est essentiel dans les **schémas** de repérer sans erreur les angles. Une bonne méthode consiste à toujours tracer les dioptres en trait plein et les normales en pointillés, quelle que soit l'orientation du schéma. Les angles s'orientent toujours à partir de la normale (d'où l'importance de l'identifier sans erreur).
- On prendra soin de toujours **orienter** les rayons lumineux.
- On n'a pas tenu compte de la dispersion, dans les schémas ci-dessus, où les différentes couleurs ne représentent que différentes incidences pour une lumière monochromatique. Si l'on s'intéresse à la réfraction d'un rayon de lumière polychromatique, on notera qu'elle est toujours plus importante pour le bleu que pour le rouge ($n_B > n_R$), ce qui est mis à profit avec le prisme pour obtenir le spectre d'une lumière.

III Propriétés des systèmes optiques

1. Caractéristiques d'un système optique

Définitions

- Un **instrument (ou système) optique** est une suite de milieux transparents séparés par des dioptres ou des miroirs. La lumière pénètre par la face d'entrée ou face avant et ressort par la face de sortie ou face arrière. Un système ne possédant pas de miroir est dit **dioptrique**, un système possédant des miroirs est dit **catadioptrique**.
- On se limitera à des instruments qui possèdent une symétrie de révolution autour d'un axe, appelé **axe optique** de l'instrument. On pourra alors raisonner sur des schémas plans contenant cet axe et une coupe de l'instrument.
- Si un ensemble de rayons lumineux (ou leurs prolongements) se dirigeant vers l'instrument passent tous par un même point, ce dernier est un **point objet** pour l'instrument.
- Si un ensemble de rayons lumineux (ou leurs prolongements) provenant d'un instrument passent tous par un même point, ce dernier est appelé **point image** pour l'instrument.
- Un **objet (resp. image) étendu(e)** est un ensemble de points objet (resp. image).

Définitions

- Un instrument présente un **stigmatisme rigoureux** pour un couple de points (A, A'), si tout rayon issu de A passe par A' après traversée du système optique. A' est alors l'image de l'objet A par l'instrument et les points A et A' sont dits **conjugués**.
- Un instrument présente un **stigmatisme approché** pour un couple de points (A, A'), si tout rayon issu de A passe « au voisinage » de A' après traversée du système optique. Autrement dit l'image d'un point A est une petite tache et non un point.

Définitions

- Un instrument présente un **aplanétisme rigoureux** si l'image d'un objet plan et perpendiculaire à l'axe optique est également plane et perpendiculaire à l'axe optique.
- Un système présente un **aplanétisme approché** si l'image d'un objet plan et perpendiculaire à l'axe optique est « approximativement » plane et perpendiculaire à l'axe optique.
- Le stigmatisme rigoureux n'existe que dans de rares cas ; signalons le miroir plan, rigoureusement stigmatique pour tout couple objet-image, ainsi que le couple formé par un objet à l'infini et son image par un miroir parabolique, propriété exploitée dans les télescopes.

Les notions de stigmatisme et d'aplanétisme approchés sont décrites plus explicitement dans ce qui suit.

2. Conditions de Gauss

Un système optique réel se comporte suivant les lois de Descartes. On définit dans la suite des concepts (image, foyers...) et on trace des rayons lumineux (afin de déterminer des images) qui supposent que les systèmes optiques présentent certaines conditions de stigmatisme et d'aplanétisme, qui ne seront réalisées que dans le cadre des approximations de la loi de la réfraction. Cela nécessite d'imposer aux systèmes optiques des conditions d'utilisation que l'on peut formuler de différentes façons.

Définition

Un instrument est utilisé dans les **conditions de Gauss** si (les trois formulations sont équivalentes) :

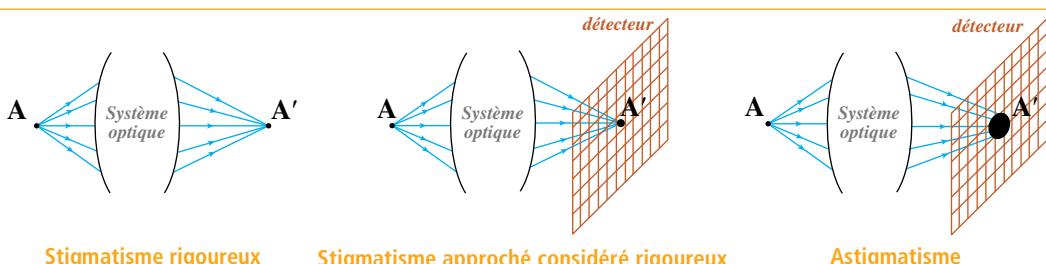
- ↳ Les rayons lumineux sont **paraxiaux**, c'est-à-dire proches de l'axe optique et peu inclinés sur l'axe optique.
- ↳ L'excentrement (distance de l'objet à l'axe) et l'ouverture (diamètre des diaphragmes limitant les faisceaux lumineux) sont petits devant le rayon de courbure des dioptres.
- ↳ Les rayons lumineux font un angle faible avec l'axe et ne frappent les systèmes optiques qu'au voisinage de leur sommet (intersection de l'axe optique avec le système).

- On notera que les bancs optiques de TP sont généralement utilisés dans ces conditions.

Propriété

Un instrument utilisé dans les conditions de Gauss présentera un aplanétisme et un stigmatisme approchés que l'on considérera comme rigoureux, tant dans les tracés que dans les calculs.

En résumé, tout système optique en général, et les lentilles minces en particulier, ne présenteront le stigmatisme et l'aplanétisme requis pour leur appliquer les constructions simples et les formules de conjugaison habituelles (*voir chapitre 6 p. 81*), qu'à la condition d'être utilisés dans les conditions de Gauss. Cela suppose que les écarts au stigmatisme et à l'aplanétisme rigoureux doivent rester dans les limites de la précision exigée par la manipulation, précision le plus souvent imposée par le pouvoir de résolution du détecteur qui est généralement constitué d'un grand nombre de petits éléments récepteurs individuels (pixels d'un capteur CCD, cellules de la rétine) de dimensions non nulles.



Si le stigmatisme n'est pas rigoureux, l'image d'un point objet est une tache. Si la dimension de la tache image est inférieure à celle de l'élément récepteur, alors le détecteur la « voit » comme un point et l'on peut considérer qu'il y a stigmatisme. Au contraire, si la tache s'étale sur plusieurs éléments, l'image sera floue, l'instrument non stigmatique. On réduira ces taches en étant plus exigeant sur les conditions de Gauss et en limitant davantage les rayons entrants dans le système optique.

Définitions

Un instrument présente des **aberrations**, s'il donne des images floues (non stigmatisme) et/ou déformées (non aplanétisme ou distorsion) par rapport à l'objet. On distingue :

- ➡ **L'aberration géométrique** qui existe en lumière monochromatique (et *a fortiori* en lumière polychromatique) et qui provient de l'écart entre le chemin réel du rayon lumineux et celui théorique idéal prévu par les formules de conjugaison.
- ➡ **L'aberration chromatique** qui n'existe qu'en lumière polychromatique et qui est due à la dispersion des rayons selon leur longueur d'onde. Autrement dit, il n'y a pas stigmatisme pour l'objet en lumière blanche, car l'image rouge ne coïncide pas avec l'image bleue, d'où une irisation de l'image globale.

En dehors des conditions de Gauss, les systèmes présentent donc des **aberrations** liées à l'écart entre les lois approchées que sont les formules de conjugaison et la loi exacte de la réfraction. L'utilisation d'un système optique en dehors des conditions de Gauss n'entrave pas seulement la simplicité des constructions sur le papier, mais également la qualité réelle des images lors de l'utilisation pratique effective des appareils optiques. On a alors le choix entre deux possibilités. Soit on se place dans les conditions de Gauss, ce qui limite les observations possibles. On peut sinon multiplier les lentilles de façon à compenser certains défauts, ce qui augmente la technicité, le prix et la complexité d'utilisation de l'appareil et ce d'autant plus qu'on travaille en HD (haute définition) qui suppose un pouvoir de résolution des détecteurs élevé, donc une exigence de stigmatisme importante.

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Cadre de l'optique géométrique : limite de l'étude, outils de description et comportement de la lumière.
- Différents types de sources lumineuses : propriétés, exemples.
- Milieux transparents : indice, variation de l'indice, loi de Cauchy.
- Lois de Descartes (réflexion et réfraction) : énoncés, schématisation.
- Conditions de la réflexion totale : démonstration et schématisation. Exemples.
- Stigmatisme, aplanétisme, rigoureux et approchés : définitions, conditions d'obtention, importance des propriétés du détecteur.

Erreurs à éviter

- Il est fréquent de confondre dioptre et normale dans un schéma, et de ce fait de mal définir les angles. On évitera cette erreur en prenant l'habitude de représenter différemment le dioptre et la normale.
- Comme toutes les définitions, celle de l'indice est à apprendre en français (rapport des vitesses) de façon à éviter le télescopage de formules apprises stupidement par cœur ($n = cV$ en chimie et $n = c/v$ en optique!) qui utilisent les mêmes notations.

Quelques « trucs » utiles

- Il importe de prendre l'habitude d'indiquer la direction des rayons lumineux, cela sera particulièrement important dans les tracés du chapitre suivant.

Conseil

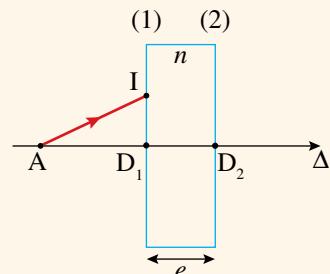
Il est fondamental en optique géométrique de faire des figures propres, sur lesquelles on tracera et orientera les rayons lumineux avec soin.

1 Lame de verre (d'après CCP MP 2015) ★

→ corrigé p. 70

Une lame de verre d'indice n et d'épaisseur e est utilisée dans les conditions de Gauss.

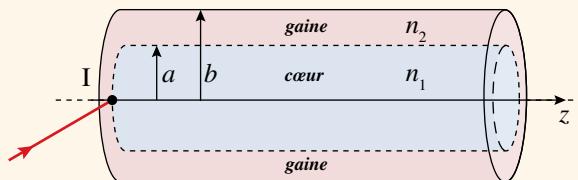
- ① Tracer le rayon réfracté au point I, on note M son intersection avec Δ . Établir une relation simple entre $\overline{AD_1}$, $\overline{MD_1}$ et n .
- ② Tracer le rayon émergent du deuxième dioptre, on note A' son intersection avec Δ . Etablir une relation simple entre $\overline{A'D_2}$, $\overline{MD_2}$ et n .
- ③ En déduire que : $\overline{AA'} = e \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Cette relation dépend-elle du rayon issu de A ? Conclure.



2 Fibre optique ★★

→ corrigé p. 70

Une fibre optique est constituée d'un cœur de rayon a d'indice n_1 entouré d'une gaine d'indice n_2 . On étudie les conditions physiques pour qu'un rayon arrivant en I avec un angle d'incidence θ_i se propage à l'intérieur de la fibre.



- ① À quelles conditions, portant à la fois sur la fibre et l'angle d'incidence, le rayon reste-t-il dans le cœur ?
- ② On appelle ouverture numérique, notée O.N., le sinus de l'angle maximal permettant la propagation. Pour une fibre optique plongée dans l'air, calculer O.N. en fonction de n_1 et n_2 , puis en fonction de n_1 et Δ , où $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$. Faire l'application numérique avec $\Delta = 10^{-2}$ et $n_1 = 1,5$.
- ③ Exprimer le temps de trajet d'un rayon d'incidence minimale et celui d'un rayon d'incidence maximale dans la fibre de longueur L . Exprimer le décalage temporel entre ces deux rayons à la sortie de la fibre. Faire l'application numérique pour une fibre de 1 km.
- ④ Quelles sont les conséquences de ce décalage sur la transmission d'une impulsion (de durée quasi nulle) émise par un faisceau d'ouverture maximale ? Quelle limite cela suppose-t-il sur un train d'impulsions ?

3 Étude du prisme (d'après Banque PT 2005) ★★★

→ corrigé p. 72

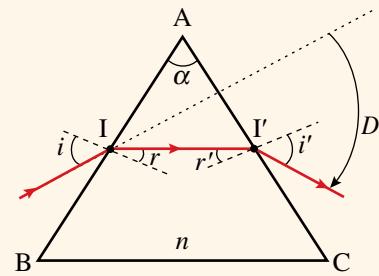
Un prisme est caractérisé par son indice n et son angle au sommet α . Un rayon lumineux arrive en I et ressort en I' selon le schéma page suivante.

- ① Établir une relation géométrique simple entre les angles r , r' et α .
- ② On appelle D l'angle dont a dévié le rayon après avoir traversé le prisme. Exprimer D en fonction de i , i' et α .

- ③ Rappeler les lois de Descartes en I et I'. En utilisant la loi de Cauchy, indiquer si la lumière violette est plus ou moins déviée que la lumière rouge.

- ④ On peut montrer que la déviation D est minimale quand $i = i'$. En déduire que pour une longueur d'onde donnée, l'indice n s'écrit en fonction de la déviation minimale D_{\min} par :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + D_{\min}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$



- ⑤ On éclaire le prisme avec une lampe à vapeur de mercure, pour laquelle on a mesuré la déviation minimale et obtenu les valeurs de n suivantes :

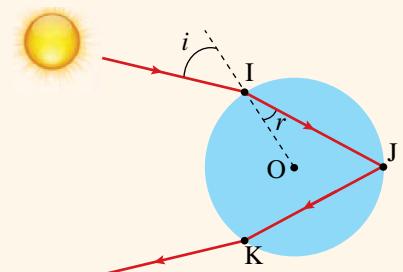
$\lambda (\mu\text{m})$	0,4047	0,4358	0,4916	0,5461	0,5770
n	1,803	1,791	1,774	1,762	1,757

Montrer que ces mesures sont cohérentes avec la loi de Cauchy et exprimer ses coefficients numériques A et B .

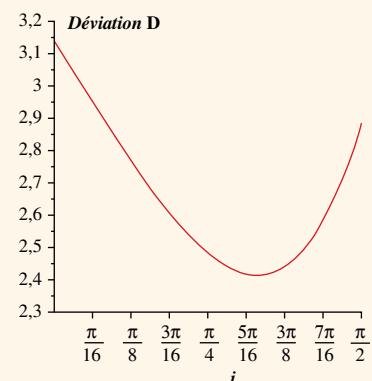
4 Observation d'un arc-en-ciel (d'après Centrale PC 2013) ★★★

→ corrigé p. 73

Pour comprendre la formation des arcs-en-ciel, on considère le devenir d'un rayon lumineux à travers une goutte d'eau d'indice $n = 1,333$, assimilée à une sphère. À chaque intersection avec un dioptre, la lumière est partiellement réfractée et partiellement réfléchie. On considère uniquement la réfraction aux points I et K et uniquement la réflexion au point J. On appelle D l'angle de déviation du rayon lumineux par la goutte. On considère dans un premier temps que la lumière est monochromatique.



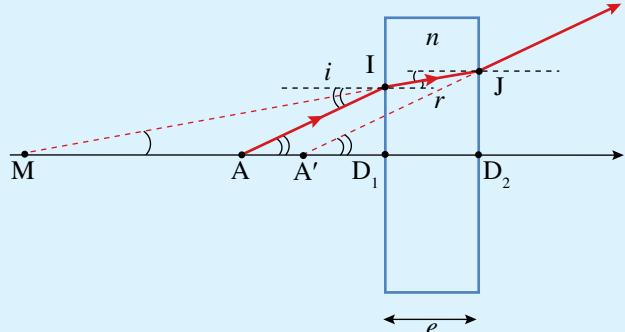
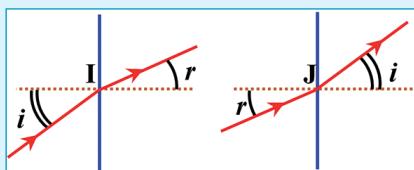
- Exprimer la déviation D en fonction de r et i , puis seulement de i .
- Quand i décrit l'intervalle $[0, \pi/2]$, la déviation D varie selon la courbe ci-contre. En considérant la fonction $D(i)$, déterminer par le calcul les coordonnées du minimum de déviation. Effectuer l'application numérique pour $n = 1,333$.
- Interpréter simplement la présence de cet extremum du point de vue de la quantité de lumière reçue par l'œil de l'observateur placé à grande distance de la goutte.
- On considère maintenant une lumière polychromatique. On peut montrer que $\frac{dD_{\min}}{dn} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{4-n^2}{n^2-1}}$ et que l'eau vérifie la loi de Cauchy. Comment varie D_{\min} en fonction l'indice n , puis en fonction de la longueur d'onde λ ?
- Le soleil envoie des rayons parallèles (source à grande distance) sur un rideau de gouttes. Lorsqu'un rayon correspond à une incidence de l'ordre de i_{\min} , tracer son rayon émergent selon la longueur d'onde (rouge ou violette) pour plusieurs gouttes. En déduire que l'observateur voit un arc-en-ciel et préciser l'ordre des couleurs.



1 Lame de verre

→ énoncé p. 68

Les conditions de Gauss limitent l'utilisation aux rayons paraxiaux, donc peu inclinés sur l'axe, permettant d'utiliser : $\sin i \approx i \approx \tan i$ et $\sin r \approx r \approx \tan r$



- ① On applique la loi de Descartes au point I : $\sin i = n \sin r \Rightarrow i \approx nr \Rightarrow \tan i \approx n \tan r$

$$\text{d'où} : \frac{\overline{D_1 I}}{\overline{A D_1}} = n \frac{\overline{D_1 I}}{\overline{M D_1}} \quad \text{soit} : \quad \frac{\overline{A D_1}}{n} = \frac{\overline{M D_1}}{\overline{D_1 I}}$$

- ② On applique la loi de Descartes au point J : $\sin i = n \sin r$ d'où : $\frac{\overline{D_2 J}}{\overline{A' D_2}} = n \frac{\overline{D_2 J}}{\overline{M D_2}}$ soit :

$$\frac{\overline{A' D_2}}{n} = \frac{\overline{M D_2}}{\overline{D_2 J}}$$

- ③ En utilisant les résultats précédents et la relation de Chasles :

$$\overline{A A'} = \overline{A D_1} + \overline{D_1 D_2} + \overline{D_2 A'} = \frac{\overline{M D_1}}{n} + e - \frac{\overline{M D_2}}{n} = e + \frac{\overline{D_2 D_1}}{n} \quad \text{soit} : \quad \overline{A A'} = e \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

Cette relation est valable quel que soit le rayon incident : tout rayon issu de A émerge donc en passant (son prolongement) par A'. A' est l'image de A.

Bien comprendre

- La relation n'est valide que dans le cadre de l'approximation de Gauss (angles petits), approximation qui permet donc de donner d'un objet ponctuel A une image ponctuelle A' et d'assurer ainsi le stigmatisme.
- On notera l'importance de la rigueur dans l'utilisation des distances algébriques.

2 Fibre optique

→ énoncé p. 68

- ① Pour que le rayon lumineux reste dans le cœur, il doit se réfléchir totalement en J. Cela n'est possible qu'à deux conditions (voir cours) :

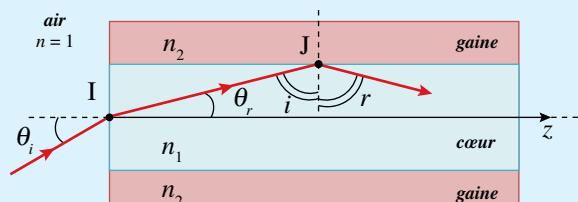
$$n_2 < n_1 \quad \text{et} \quad i > i_{\lim} \quad \text{avec} : \quad \sin i_{\lim} = \frac{n_2}{n_1}$$

La gaine doit donc être moins réfringente que le cœur. La condition sur l'angle i impose une condition sur l'angle de réfraction en I.

$$\begin{cases} \theta_r = \frac{\pi}{2} - i \\ i > i_{\lim} \end{cases} \Rightarrow \theta_r < \frac{\pi}{2} - i_{\lim} = \theta_{r\max}$$

La loi de Descartes en I induit une condition sur θ_i :

$$\begin{cases} \theta_r < \theta_{r\max} \\ n \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_r \end{cases} \Rightarrow \sin \theta_i = \frac{n_1}{n} \sin \theta_r < \frac{n_1}{n} \sin \theta_{r\max}$$



$$\text{Soit : } \sin \theta_i < \frac{n_1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{\lim}\right) \Rightarrow \sin \theta_i < \frac{n_1}{n} \cos i_{\lim}$$

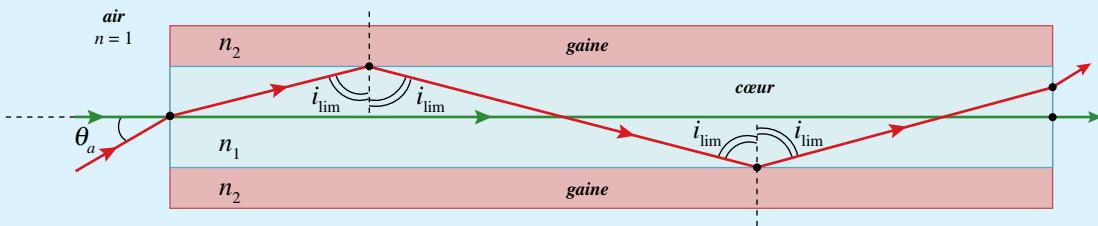
$$\text{d'où : } \sin \theta_i < \frac{n_1}{n} \sqrt{1 - \sin^2 i_{\lim}} \Rightarrow \sin \theta_i < \frac{n_1}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

L'angle d'incidence est donc limité à une valeur maximale θ_a : $\theta_i < \theta_a$ avec $\sin \theta_a = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n}$

- 2 Si la fibre est plongée dans l'air, l'ouverture numérique O.N. ($= \sin \theta_a$) vaut :

$$\text{O.N.} = \sin \theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 \sqrt{2\Delta} \quad \text{A.N. : } \theta_a = 12^\circ$$

- 3 La propagation dans la fibre se fait par une succession de réflexions totales identiques.

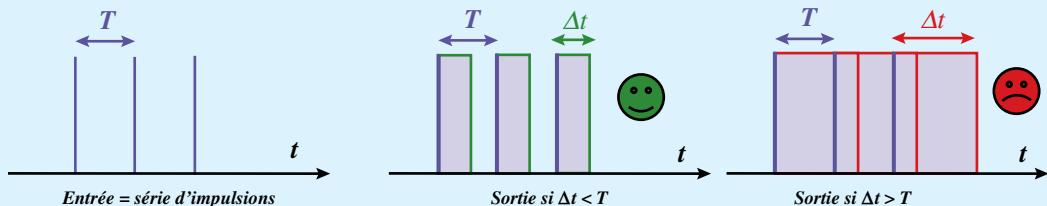


Le chemin du rayon rouge (en incidence maximale) est donc plus long que celui du rayon vert (en incidence minimale donc normale) d'un facteur $\frac{1}{\sin i_{\lim}}$. D'où la durée respective des trajets du rayon d'incidence normale t_N et du rayon d'incidence maximale t_M , où v_1 est la vitesse de la lumière dans le cœur :

$$t_N = \frac{L}{v_1} \quad \text{et} \quad t_M = \frac{L}{\sin i_{\lim} v_1} \Rightarrow \Delta t = t_M - t_N = \frac{L}{v_1} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) > 0$$

$$\text{Or : } \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{\sqrt{1-2\Delta}} = (1-2\Delta)^{-1/2} \approx 1 + \Delta \quad \text{car } \Delta \ll 1 \quad \text{D'où : } \Delta t = \frac{Ln_1\Delta}{c} = 50 \text{ ns}$$

- 4 En conséquence tous les rayons du faisceau n'arrivent pas en même temps à la sortie de la fibre. L'impulsion ressort étalement sur une durée Δt d'autant plus grande que la fibre est longue et l'ouverture numérique grande. **Pour que l'information reste exploitable, il faut que l'intervalle entre deux impulsions soit supérieur au décalage.**



Bien comprendre

L'information est une succession de bits qui forment des impulsions. La quantité de données transmises par unité de temps (débit) est limitée par les capacités de la fibre, c'est pourquoi on fabrique des fibres plus performantes, donc plus coûteuses, pour avoir la HD (Haute Définition) qui demande un débit important.

3 Étude du prisme

- 1 La somme des angles dans le triangle IAI' est égale à π . On en déduit alors que :

$$\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = \pi \quad \text{d'où : } r + r' = \alpha \quad (1)$$

- 2 Il suffit d'ajouter les angles dont tourne le rayon à chaque changement de direction :

$$D = D_I + D_{I'} = (i - r) + (i' - r') = i + i' - (r + r') \quad \text{Soit : } D = i + i' - \alpha \quad (2)$$

- 3 Au point I : $\sin i = n \sin r$ (3) et au point I' : $\sin i' = n \sin r'$ (4)

La loi de Cauchy indique que l'indice diminue si la longueur d'onde augmente selon :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes du milieu.}$$

En notant V la lumière violette et R la lumière rouge on a : $\lambda_V < \lambda_R \Rightarrow n_V > n_R$

Les deux radiations pénètrent avec la même incidence :

$$\begin{cases} i_R = i_V & \stackrel{(3)}{\Rightarrow} r_R > r_V \stackrel{(1)}{\Rightarrow} r'_R < r'_V \\ n_R < n_V \end{cases} \quad \text{Soit : } \begin{cases} r'_R < r' & \stackrel{(4)}{\Rightarrow} i_R < i_V \stackrel{(2)}{\Rightarrow} D_R < D_V \\ n_R < n_V \end{cases}$$

où l'on a indiqué la relation utilisée par le signe \Rightarrow .

La lumière est d'autant plus déviée que la longueur d'onde est faible. Par conséquent, la lumière violette (400 nm) est plus déviée que la lumière rouge (800 nm). La réfraction se fait donc comme le montre l'image ci-contre. Le prisme est utilisé pour disperser la lumière dans un spectromètre par exemple.



- 4 Au minimum de déviation, noté D_{\min} , on a :

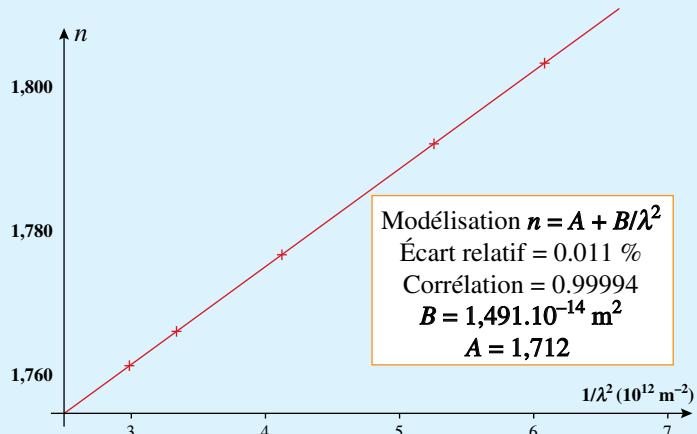
$$\begin{aligned} i = i' = i_{\min} &\stackrel{(3) \& (4)}{\Rightarrow} r = r' = r_{\min} & \Rightarrow \alpha = 2r_{\min} &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} r_{\min} = \frac{\alpha}{2} \\ &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} D_{\min} = 2i_{\min} - \alpha & \stackrel{(2)}{\Rightarrow} i_{\min} = \frac{D_{\min} + \alpha}{2} & \\ &\stackrel{(3)}{\Rightarrow} \sin\left(\frac{D_{\min} + \alpha}{2}\right) = n \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \text{soit : } n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + D_{\min}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \end{aligned}$$

- 5 À l'aide des mesures on trace

$n = f\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$. La courbe obtenue (ci-contre) est une droite affine dont on obtient la modélisation à la calculatrice ou à l'ordinateur. La régression linéaire indique une très bonne corrélation, donc un bon accord des mesures à la loi de Cauchy avec :

$$A = 1,712$$

$$B = 1,491 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$$



Bien comprendre

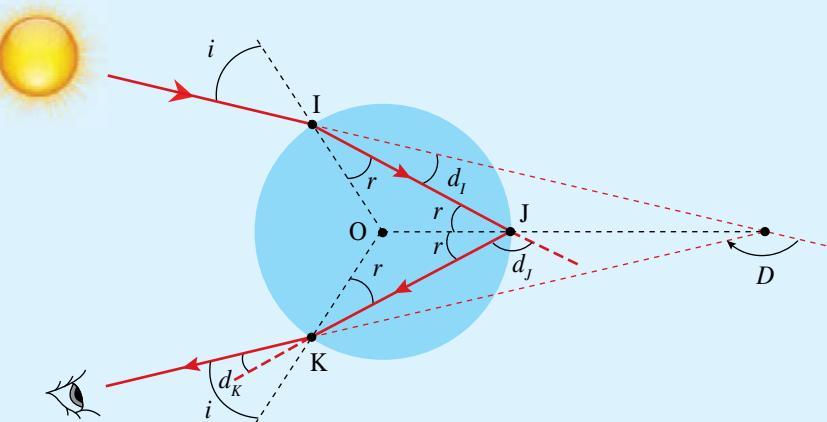
La mesure de D_{\min} est un classique de TP d'optique. Elle s'effectue avec un goniomètre qui permet une grande précision dans la mesure de l'indice selon la longueur d'onde.

4 Observation d'un arc-en-ciel

→ énoncé p. 69

- 1 Comme la goutte d'eau est parfaitement sphérique, les normales aux points d'incidences I, J et K passent toutes par le centre O de la sphère. On en déduit donc que les triangles OIJ et OJK sont isocèles en O d'où $\widehat{OIJ} = \widehat{IJO} = r$ et $\widehat{OJK} = \widehat{JKO} = r$. Au point J le rayon lumineux est réfléchi, d'où, d'après la loi de Descartes sur la réflexion, $\widehat{OJK} = \widehat{IJO} = r$, et au point K, $\widehat{JKO} = r$. D'après la loi de Descartes de la réfraction, le rayon émerge au point K selon un angle i . On peut donc déterminer la déviation D (angle dont a tourné le rayon émergent par rapport au rayon d'incidence) qui est la somme des déviations aux points I, J et K :

$$D = d_I + d_J + d_K = (i - r) + (\pi - 2r) + (i - r) \text{ d'où : } D = 2i - 4r + \pi$$



- 2 Le minimum de déviation D_{\min} correspond à l'annulation de la dérivée de $D(i)$: $\left(\frac{dD}{di}\right)_{\min} = 2 - 4 \frac{dr}{di} = 0$
En dérivant la loi de Descartes et en remplaçant dans la dérivée de D , on a :

$$\sin i = n \sin r \Rightarrow \cos i = n \cos r \frac{dr}{di}$$

puis : $\left(\frac{dD}{di}\right)_{\min} = 2 - 4 \frac{\cos i}{n \cos r} = 0 \Rightarrow n \cos r = 2 \cos i$

D'où : $n^2 \cos^2 r = 4 \cos^2 i \Rightarrow n^2 (1 - \sin^2 r) = 4 (1 - \sin^2 i) \Rightarrow n^2 - n^2 \sin^2 r = 4 - 4 \sin^2 i$

Soit en utilisant la loi de Descartes : $n^2 - 4 = \sin^2 i - 4 \sin^2 i \text{ d'où : } \sin^2 i = \frac{4 - n^2}{3}$

Si $n < 2$ ce minimum existe et vérifie :

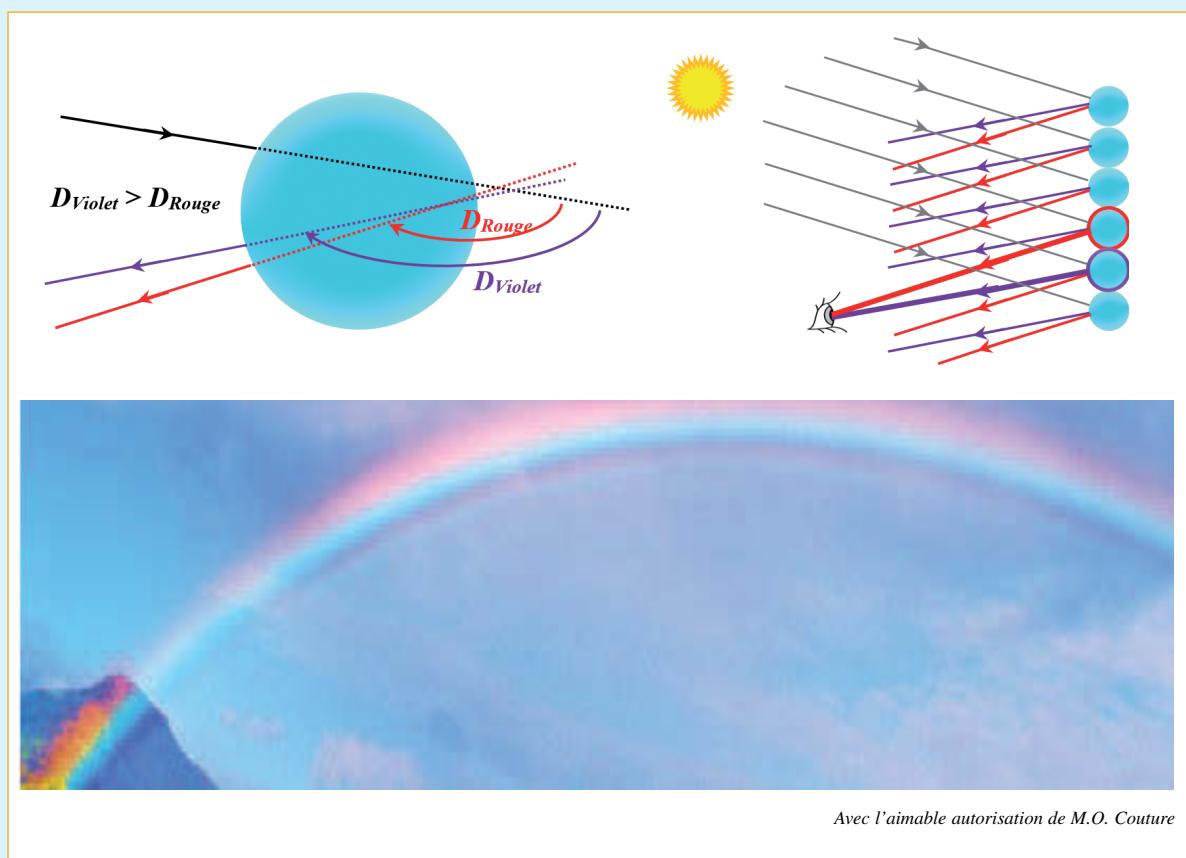
$$\sin i_{\min} = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

et

$$\sin r_{\min} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

A.N. : $i_{\min} = 59,41^\circ$ $r_{\min} = 40,23^\circ$ $D_{\min} = 2i_{\min} - 4r_{\min} + \pi = 137,92^\circ$ conforme à la courbe.

- 3 La goutte d'eau reçoit des rayons lumineux à différents angles d'incidence, la déviation de ces rayons est donc variable. D'après la courbe, au minimum de déviation D_{\min} , tous les rayons incidents ayant un angle proche de i_{\min} sont déviés de $D \approx D_{\min}$. Il y a donc plus de rayons dans cette direction, qui se traduit par une accumulation de lumière.
- 4 La dérivée de D_{\min} par rapport à n est positive, donc $D_{\min}(n)$ est croissante. Or, d'après la loi de Cauchy, $n(\lambda)$ est décroissante, d'où $D_{\min}(\lambda)$ est décroissante : $\lambda_{\text{violet}} < \lambda_{\text{rouge}} \Rightarrow D_{\min \text{ violet}} > D_{\min \text{ rouge}}$
- 5 La déviation du rayon violet est supérieure, donc il tourne davantage (*voir schéma*). L'observateur reçoit les rayons lumineux rouges issus des gouttes situées plus haut dans le ciel que celles qui envoient les rayons violets dans son œil. Il voit donc le violet en-dessous. Il y a une symétrie de révolution autour de sa position, ce qui lui permet d'observer un arc.
- N.B. :** L'angle d'incidence i_{\min} varie légèrement pour les deux couleurs, mais d'après 3, ne modifie pas le résultat simplifié ci-dessus.



À méditer

On ne peut se passer d'une méthode pour se mettre en quête de la vérité des choses.

RENÉ DESCARTES (1596-1650)

Lentilles et instruments d'optique

Les lois établies au chapitre précédent permettent ici de décrire le principe des systèmes optiques très simples que sont les lentilles. Elles constituent la base de la plupart des instruments d'optique géométrique : appareils photographiques, lunettes astronomiques, microscopes, lentilles de contact ou lunettes de vue... De nombreux domaines techniques sont mis à contribution dans la réalisation des lentilles : l'optimisation des matériaux (pureté, transparence, solidité), du surfacage (forme, polissage) ou des couches appliquées (anti-reflet, anti-UV...). Bien qu'assez ancienne, l'optique géométrique touche donc cependant à des domaines de pointe de la physique moderne.

I Formation des images

1. Nature des images

Avertissement : Dans tout ce qui suit, on se limite aux situations habituelles telles que :

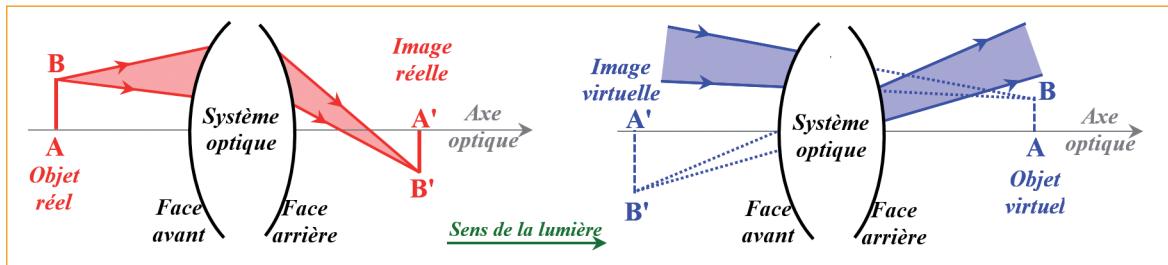
- On ne considère que des systèmes centrés, c'est-à-dire possédant un axe de symétrie de révolution. Cet axe est nécessairement orienté, orientation qui traduit le sens de propagation de la lumière, et permet de dire qu'une position est « avant » ou « après » une autre.
- Les objets seront choisis perpendiculaires à cet axe, et représentés par un segment orienté \overline{AB} .
- Les systèmes sont supposés être utilisés dans les conditions de Gauss (voir chapitre 5 p. 66), ils donnent donc de \overline{AB} une image notée $\overline{A'B'}$ stigmatique et aplanétique (donc perpendiculaire à l'axe).

Définitions

- Un point objet (resp. image) est **réel(le)** si les rayons incidents (resp. émergents ou réfléchis pour un miroir) convergent effectivement en ce point.
- Un point objet (resp. image) est **virtuel(le)** si seuls les prolongements des rayons incidents (resp. émergents ou réfléchis pour un miroir) convergent en ce point.

- Un objet placé avant la face avant d'un système dioptrique est réel, sinon, il est virtuel.
- Une image placée après la face arrière d'un système dioptrique est réelle, sinon, elle est virtuelle.

Important : On tracera par convention les rayons virtuels, c'est-à-dire les prolongements des rayons réels, en pointillés. On fera de même pour les objets et images virtuels, on réservera les traits pleins aux rayons réels. Il est important de réaliser qu'il n'y a pas de lumière se propageant le long des traits en pointillés qui servent pour les constructions géométriques, mais n'ont pas de réalité physique.



Définitions

- Le **foyer principal image** d'un système optique est le point de convergence du faisceau émergent issu d'un faisceau de rayons incidents parallèles à l'axe. On le note F' .
- Un **foyer image secondaire** d'un système optique est le point de convergence du faisceau émergent issu d'un faisceau de rayons incidents parallèles entre eux et inclinés par rapport à l'axe.
- Le **plan focal image** est le plan orthogonal à l'axe contenant les foyers images.
- Le **foyer principal objet** d'un système optique est le point de convergence d'un faisceau de rayons incidents qui émergent parallèles à l'axe. On le note F .
- Un **foyer objet secondaire** d'un système optique est le point de convergence d'un faisceau de rayons incidents qui émergent parallèles entre eux et inclinés par rapport à l'axe.
- Le **plan focal objet** est le plan orthogonal à l'axe contenant les foyers objets.
- Un système **afocal** est un système qui donne une image à l'infini d'un objet à l'infini.

- Les foyers peuvent être réels ou virtuels selon le système optique.
- Un système afocal n'a pas de foyers, il donne d'un faisceau incident de rayons parallèles entre eux, un faisceau émergent de rayons parallèles entre eux (*voir exercice n° 5 p. 86*).
- C'est parce qu'on travaille sur des systèmes centrés et dans les conditions de Gauss, que les foyers secondaires sont tous dans un même plan perpendiculaire à l'axe.

2. Dimensions des images**Définition**

Le **grandissement** γ est le rapport algébrique de la taille de l'image $\overline{A'B'}$ à celle l'objet \overline{AB} :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

- Cette définition est valable pour tout système optique, dioptrique ou catadioptrique.
- On ne peut définir le grandissement d'un instrument (sauf exception), puisqu'il varie avec la position de l'objet et peut donc prendre une infinité de valeurs pour un même instrument.

Propriétés

- Les dimensions du couple objet/image sont comptées algébriquement par rapport à l'axe. Ainsi, si l'instrument inverse le sens de l'objet (**image inverse**), le grandissement sera négatif, s'il conserve le sens, il sera positif (**image droite**). Cette considération est indépendante de la nature réelle ou virtuelle de l'image et de l'objet.
- Si l'image est plus grande que l'objet, la valeur absolue du grandissement sera supérieure à 1, si l'image est plus petite, la valeur absolue du grandissement sera inférieure à 1.

Il ne faut pas confondre le grandissement avec le grossissement. Il existe plusieurs définitions possibles du grossissement, certaines seront mieux adaptées à tel ou tel instrument. En général un énoncé précisera la définition à utiliser. Pour définir un grossissement, on introduit une situation d'observation standard de référence dite « vu à l'œil nu dans les meilleures conditions », c'est-à-dire quand cela est possible à 25 cm de l'objet (distance arbitraire pertinente avec la vision d'un œil normal, *voir III.1.*).

Définitions

- Le **grossissement** G d'un système optique est le rapport de l'angle α' sous lequel est vue l'image de l'objet à travers l'instrument sur l'angle α_0 sous lequel est vu l'objet à l'œil nu dans les meilleures conditions.
- Le **grossissement commercial** G_c est le rapport de l'angle α'_∞ sous lequel est vue l'image à l'infini à travers l'instrument sur l'angle α_0 sous lequel est vu l'objet à l'œil nu dans les meilleures conditions.
- N.B. :** « *À l'œil nu dans les meilleures conditions* » signifie à 25 cm si cela est possible (microscope, appareil photo...) ou à l'infini si l'objet ne peut pas être rapproché (lunette, télescope...).
- La **puissance** P est le rapport de l'angle α' sous lequel est vue l'image de l'objet à travers l'instrument (en radian) sur la taille de l'objet AB (en m).
- La **puissance intrinsèque** P_i est le rapport de l'angle α'_∞ sous lequel est vue l'image à l'infini à travers l'instrument (en radian) sur la taille de l'objet AB (en m).

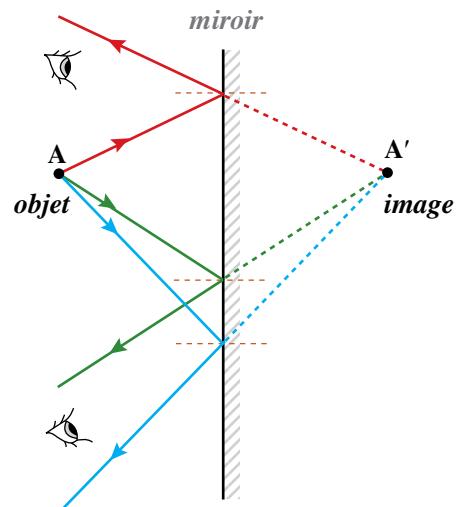
$$G = \frac{\alpha'}{\alpha_0} \quad G_c = \frac{\alpha'_\infty}{\alpha_0} \quad P = \frac{\alpha'}{AB} \quad P_i = \frac{\alpha'_\infty}{AB}$$

- Le grossissement (sans unité) dépend de la situation (et même de la définition !), tandis que le grossissement commercial est caractéristique de l'instrument, c'est celui fourni par le constructeur.
- La puissance (qui s'exprime en dioptrie ou m^{-1}) dépend de la situation d'observation, tandis que la puissance intrinsèque caractérise l'instrument.

3. Le cas simple du miroir plan

L'image d'un point par un miroir plan se construit à l'aide de la loi de Descartes de la réflexion. En traçant un faisceau de rayons incidents issus du point objet A, on obtient un faisceau de rayons réfléchis dont les prolongements se coupent exactement en un point A' symétrique de A par le plan du miroir. Quelle que soit l'inclinaison du rayon incident issu de A, le rayon réfléchi passe par A' . Le miroir plan n'a pas besoin d'être utilisé dans les conditions de Gauss.

Le programme actuel se limite au miroir plan. Cependant de nombreux instruments utilisent des miroirs sphériques ou paraboliques. On citera en particulier le télescope dans lequel le stigmatisme rigoureux du miroir parabolique pour le couple (objet à l'infini, foyer image) est mis à profit, ainsi que son grandissement différent de 1.



Propriétés

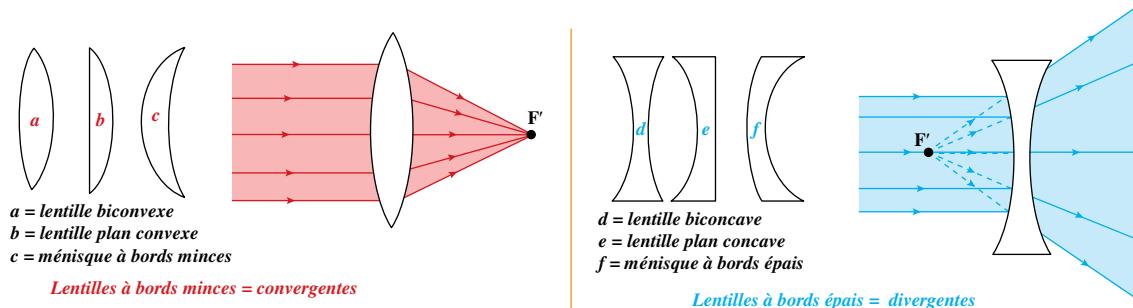
- L'image d'un point A par un miroir plan est un point A' symétrique de A par rapport à la surface du miroir.
- Le miroir présente un stigmatisme rigoureux pour tout couple de point conjugués (A, A').
- L'image d'un objet réel (resp. virtuel) par un miroir plan est virtuelle (resp. réelle).
- Le grandissement par un miroir plan est indépendant de la position de l'objet et vaut 1.
- Le miroir plan est afocal, il donne une image à l'infini d'un objet à l'infini.

II Lentilles

1. Lentilles minces

Définitions

- Une **lentille** est un milieu transparent, limité par deux dioptrres sphériques ou un dioptre sphérique et un dioptre plan.
- Une lentille est à **bords minces** (resp. à **bords épais**) lorsque son épaisseur au centre est supérieure (resp. inférieure) à celle de ses bords.
- Une **lentille convergente** est telle qu'un faisceau de rayons incidents parallèles émerge de la lentille en convergeant. Les lentilles à bords minces sont convergentes.
- Une **lentille divergente** est telle qu'un faisceau de rayons incidents parallèles émerge de la lentille en divergeant. Les lentilles à bord épais sont divergentes.



Propriétés

- Les foyers image et objet d'une lentille convergente sont réels.
- Les foyers image et objet d'une lentille divergente sont virtuels.

Définition

- Une lentille sera dite **mince**, si son épaisseur sur l'axe est petite devant les rayons de courbure des dioptrres et, dans le cas où les courbures sont dans le même sens, également petite devant la différence de ces rayons.
 - Une lentille mince est assimilée à une surface plane et est symbolisée par un trait perpendiculaire à l'axe et une double flèche orientée selon sa nature convergente (CVG) ou divergente (DVG).
-
- On peut traduire la condition de lentille mince en notant R_1 et R_2 les rayons algébriques des dioptrres (positif si le centre est avant le dioptre, négatif si le centre est après le dioptre sur l'axe optique) et e l'épaisseur de la lentille au centre par les trois conditions : $e \ll |R_1|$; $e \ll |R_2|$; $e \ll |R_1 - R_2|$
 - La schématisation d'une lentille par un trait donne à penser que la lentille se résume à un seul dioptre, ce qui est faux. Elle possède deux dioptrres que doit traverser la lumière, subissant à chaque fois les lois de Descartes. Néanmoins, les propriétés des lentilles minces autorisent cette schématisation simple qui permet de tracer convenablement la marche des rayons lumineux qui la traversent, dans le cadre de l'approximation des lentilles minces utilisées dans les conditions de Gauss.

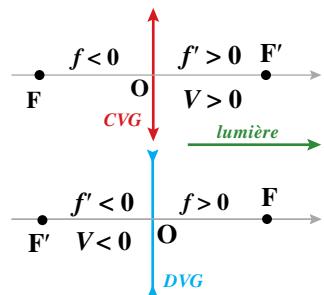
- On ne confondra pas « mince » (lentille globalement peu épaisse) et « à bords minces » (bords moins épais que le centre), une lentille peut être mince et à bord épais (DVG) ou épaisse à bords minces (CVG).

Définitions

- Le **centre optique** d'une lentille mince est le point d'intersection O du plan de la lentille et de son axe optique.
- La **distance focale image** f' d'une lentille est la distance algébrique centre optique – foyer image.
- La **distance focale objet** f d'une lentille est la distance algébrique centre optique – foyer objet.
- La **vergence** V d'une lentille est l'inverse de sa distance focale image.

$$f' = \overline{OF'} \quad f = \overline{OF} \quad V = \frac{1}{f'} \quad f \text{ et } f' \text{ sont en mètre, } V \text{ est en dioptrie (} \delta = \text{m}^{-1} \text{).}$$

L'approximation de lentille mince permet de montrer que, malgré sa forme géométrique éventuellement dissymétrique, une telle lentille est optiquement symétrique et peut donc être utilisée dans un sens ou dans l'autre. En particulier, F et F' sont symétriques par rapport à O et $f = -f'$, ce qui permet d'ailleurs de la schématiser, comme on l'a vu, par un trait. En conséquence les positions de F' et de F sont liées au sens de parcours de la lumière, qui doit impérativement être précisé sur le schéma à travers l'orientation de l'axe optique (*voir exercice 4 p. 86*).



2. Constructions

On cherche à construire géométriquement l'image d'un point par une lentille mince. Or un point étant obtenu par l'intersection de deux droites, il n'est pas nécessaire de tracer la marche de tous les rayons incidents provenant du point objet pour déterminer le point image après traversée de la lentille. Deux d'entre eux suffiront, puisqu'il y a stigmatisme, tout autre rayon issu de l'objet passe aussi par le point image après traversée de la lentille.

POINT MÉTHODE

Construire une image par une lentille mince

- Trois types de rayons obéissent à des règles qui rendent la **construction des images** facile. Selon le problème posé, on en choisira deux parmi ceux-là (le troisième pouvant servir de vérification). On n'oublie pas qu'un rayon incident passe nécessairement par le point objet.
 - ➡ **Rayon passant par O :** Un rayon incident passant par le centre optique émerge sans être dévié.
 - ➡ **Rayon incident parallèle à l'axe :** Il émerge en passant (lui ou son prolongement) par le foyer image ou, inversement, tout rayon émergent passant par le foyer image F' est issu d'un rayon incident parallèle à l'axe.
 - ➡ **Rayon émergent parallèle à l'axe :** Il est issu d'un rayon incident passant (lui ou son prolongement) par le foyer objet ou inversement, tout rayon incident passant par le foyer objet ressort parallèle à l'axe.
- Ces rayons ne peuvent servir que pour un point objet situé en dehors de l'axe optique. Mais puisque le système est aplanétique, on peut construire l'**image d'un point A de l'axe** par l'intermédiaire d'un point en dehors de l'axe B, tel que AB perpendiculaire à l'axe. L'image B' de B, obtenue par la construction décrite ci-dessus, donnera A' en abaissant la perpendiculaire à l'axe en ce point. L'**image d'un objet étendu** perpendiculaire à l'axe est obtenue à l'aide de la construction de l'image d'un seul de ses points.

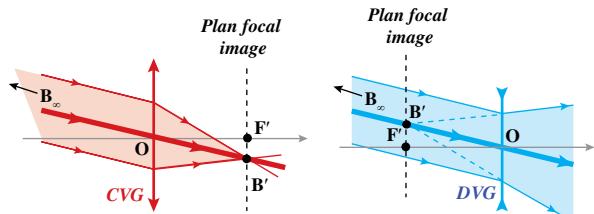
LENTEILLE	OBJET	IMAGE	GRANDISSEMENT	CONSTRUCTION
LENTEILLE CONVERGENTE	Réel Avant le foyer objet	Réelle Inversée	$\gamma < 0$	
	Réel Entre le foyer objet et la lentille	Virtuelle Droite Plus grande	$1 < \gamma$	
	Virtuel	Réelle Droite Plus petite	$0 < \gamma < 1$	
LENTEILLE DIVERGENTE	Réel	Virtuelle Droite Plus petite	$0 < \gamma < 1$	
	Virtuel Entre la lentille et le foyer objet	Réelle Droite Plus grande	$1 < \gamma$	
	Virtuel Après le foyer objet	Virtuelle Inversée	$\gamma < 0$	

Rayon passant par O Rayon incident parallèle à l'axe Rayon émergent parallèle à l'axe

POINT MÉTHODE

Construire l'image d'un point objet à l'infini

- B_∞ envoie des rayons parallèles entre eux et inclinés sur l'axe. Le rayon passant par O (non dévié) coupe le plan focal au point image B' (= foyer image secondaire). Tous les rayons émergents convergent vers ce point, réellement pour une lentille convergente, virtuellement pour une lentille divergente.



3. Formules de conjugaison

L'étude des systèmes centrés dans les conditions de Gauss permet de démontrer un certain nombre de relations avec lesquelles on peut ensuite calculer la position et la dimension de l'image, en fonction de la position et de la dimension de l'objet, selon les caractéristiques du système optique.

Énoncés

- Les points objet A et image A' vérifient les **relations de conjugaison** suivantes pour une lentille mince

$$\text{Formule de Descartes : } \frac{1}{\overline{OA}'} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{f} \quad \text{Formule de Newton : } \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f \cdot f' = -f'^2$$

- Les dimensions objet et image vérifient les **relations du grossissement** suivantes :

$$\text{Formule de Descartes: } \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad \text{Formules de Newton : } \gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

- Dans l'expression de γ de la formule de Descartes, la première partie de la relation traduit seulement la définition du grossissement, c'est la seconde partie qui constitue la relation de conjugaison.
- La présence de grandeurs algébriques dans ces formules impose un strict respect des signes des distances utilisées.
- La démonstration rigoureuse de ces formules est hors programme, par contre il est relativement aisément de les retrouver géométriquement à partir d'une construction simple objet réel-image réelle pour une lentille convergente et en utilisant les propriétés des triangles (le lecteur est invité à s'y essayer).

POINT MÉTHODE

Obtenir un grossissement unité

- Que la lentille soit convergente ou divergente, on obtient une image de même taille que l'objet, si ce dernier est situé au double de la distance focale objet. L'image est alors inversée et $\gamma = -1$. Le grossissement $\gamma = +1$ s'obtient pour un objet confondu avec la lentille, l'image l'est alors également, ce qui présente peu d'intérêt.

III Instruments

1. L'œil

L'**œil** est l'organe de la vision. Tous les éléments de l'œil sont évidemment importants, mais certains jouent un rôle prépondérant du point de vue de l'optique.

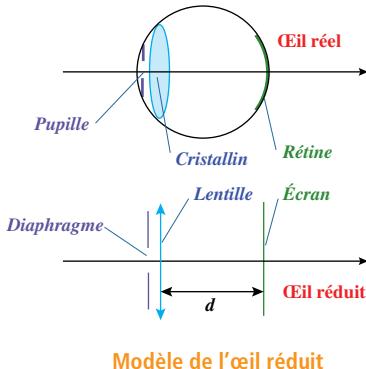
→ La **pupille** est un trou circulaire qui « dose » la quantité de lumière qui pénètre dans l'œil. Son fonctionnement est automatique en fonction de la luminosité ambiante. Son équivalent photographique est le *diaphragme*.

→ Le **cristallin** est la lentille de l'œil, il assure la mise au point grâce à sa plasticité (souplesse) qui lui permet de modifier ses courbures (donc sa focale) lors de l'accommodation. De forme biconvexe, transparent et mou, il se comporte comme une lentille convergente, son équivalent photographique est l'*objectif* qui contient des lentilles.

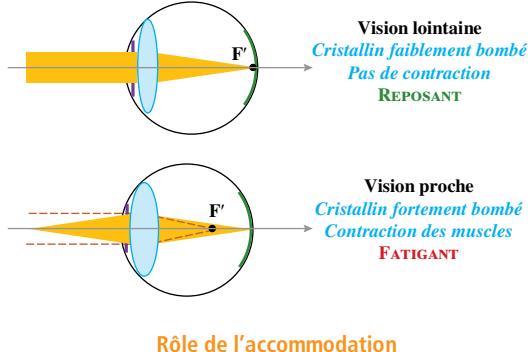
→ La **rétine** est une membrane neurosensorielle qui tapisse le fond de l'œil, c'est sur elle que doivent se former les images qui seront transmises au cerveau sous forme d'influx nerveux. Elle est l'équivalent de la *pellicule photographique* d'un appareil argentique, *du capteur CCD* sur un appareil numérique.

Définition

L'**œil réduit** est une schématisation simplifiée de l'œil, considéré uniquement du point de vue de l'optique géométrique et qui contient un diaphragme (pupille), une lentille convergente de focale variable (cristallin) et un écran (réteine). La distance lentille/écran est fixe et vaut $d = 16 \text{ mm}$.



Modèle de l'œil réduit



Rôle de l'accommodation

Définitions

- L'œil **emmétrope** est un œil qui voit normalement.
- L'œil **myope** est un œil trop convergent, l'image d'un objet à l'infini se forme en avant de la réteine. Il ne peut voir nettement à l'infini. On le corrigera avec une lentille divergente.
- L'œil **hypermétrope** est un œil insuffisamment convergent, l'image d'un objet à l'infini se forme derrière la réteine. Il doit accommoder pour voir à l'infini, ce qui est fatigant. On le corrigera avec une lentille convergente.
- L'œil totalement **presbyte** est un œil qui ne peut plus accommoder en raison de son vieillissement. On lui placera des verres à focale variable pour voir nettement sur toute la distance souhaitable en regardant de bas (objet proche) en haut (objet lointain).

Quelle que soit la situation d'observation, un œil ne voit nettement que si l'image se forme sur la réteine.

Définitions

- Le **punctum proximum** (PP) est le point le plus proche que l'œil peut voir nettement. Cela correspond au maximum d'accommodation du cristallin. Très proche pour un œil jeune, il est d'environ 25 cm à l'âge adulte et recule progressivement jusqu'à 2 m (presbytie) avec le vieillissement.
- Le **punctum remotum** (PR) est le point le plus lointain observable nettement et sans fatigue (donc sans accommodation). Pour un œil normal, il est à l'infini.
- La **plage d'accommodation** est la zone pour laquelle un œil peut voir nettement grâce à l'accommodation, elle s'étend de PP à PR.

Le punctum proximum d'un œil myope est donc plus proche de l'œil que celui d'un œil emmétrope du même âge, celui d'un hypermétrope, plus lointain. Le punctum remotum d'un œil myope est d'autant plus proche que le défaut est important, celui d'un œil hypermétrope est virtuel derrière la tête !

Propriété

Le **pouvoir de résolution de l'œil**, c'est-à-dire l'angle le plus faible sous lequel deux points sont vus discernables, est d'environ 1 minute d'arc ($1' = 3.10^{-4} \text{ rad}$).

2. Associations de lentilles

De nombreux systèmes optiques sont composés d'une succession de lentilles (microscope, lunettes astronomiques, objectif d'appareil photo...). On étudiera ces systèmes en considérant chaque lentille comme ayant pour objet l'image de la précédente et dont l'image formera donc l'objet de la suivante.

POINT MÉTHODE

Utiliser un schéma synoptique dans une association de lentilles

- Un **schéma synoptique** est souvent commode pour résoudre une question d'optique traitant d'une succession de lentilles, dans lequel on introduit les objets intermédiaires à chaque étape :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2 \xrightarrow{L_3} A'$$

- Souvent on connaît une partie des points, par exemple pour un **système afocal** formé de deux lentilles L_1 et L_2 , on sait qu'un objet à l'infini donne une image à l'infini, soit le schéma suivant :

$$A_{\infty} \xrightarrow{L_1} A_{\text{intermédiaire}} \xrightarrow{L_2} A'_{\infty}$$

Par conséquent on conclut que $A_{\text{intermédiaire}}$ est confondu avec A'_1 puisqu'il est l'image de l'infini par L_1 et qu'il est aussi confondu avec le foyer objet F_2 de L_2 puisque cette dernière en donne une image à l'infini. On en déduit $A_{\text{intermédiaire}} = F'_1 = F_2$. Un système afocal de deux lentilles doit donc être disposé de façon à ce que le foyer image de la première coïncide avec le foyer objet de la seconde, résultat valable quelle que soit la nature, convergente ou divergente, des lentilles. La lunette de Galilée (CVG + DVG) et la lunette de Kepler (CVG + CVG) sont deux exemples de systèmes afocaux.

Propriétés

La vergence V d'un système de deux lentilles minces accolées est la somme de leurs vergences :

$$V = V_1 + V_2$$

Cette formule n'est valable que si les lentilles sont accolées, c'est-à-dire si leurs centres optiques peuvent être confondus. On démontre une formule (de Gullstrand) plus générale pour des lentilles non accolées.

3. Maîtriser le virtuel

Une image réelle peut être formée sur un écran, puisque les rayons lumineux convergent réellement en ses points. Une image virtuelle ne peut pas être matérialisée sur un écran, par contre, si elle est située dans la zone d'accommodation d'un œil, elle peut constituer un objet (réel) pour l'œil et donner finalement une image réelle sur sa rétine. À travers une loupe par exemple, on voit l'image virtuelle de l'objet initial par la loupe.

Un objet réel est une source (primaire ou non) de lumière, dont sont réellement issus des rayons lumineux. Pour obtenir un objet virtuel pour un système optique (L), on utilise un autre système, par exemple une simple lentille convergente (L_0) avec laquelle on crée une image réelle A_0B_0 d'un objet réel AB. On insère ensuite (L) entre (L_0) et A_0B_0 qui devient alors l'objet virtuel de (L). Il ne s'agit pas juste d'une construction sur le papier, c'est ainsi qu'on dispose d'un objet virtuel sur le banc optique par exemple. On aura d'ailleurs intérêt à faire en sorte que A_0B_0 soit de même dimension que AB en plaçant ce dernier au double de la distance focale objet de (L_0) (voir par exemple exercice n° 5 p. 86).

Questions de cours

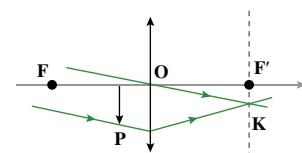
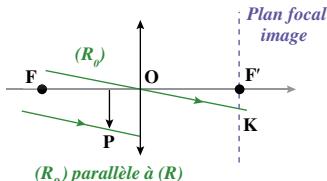
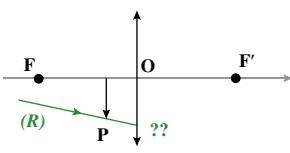
- Caractéristiques d'un système optique : foyers, plan focaux, grandissement, grossissement.
- Le miroir plan : propriétés, constructions.
- Lentilles : nature, cas des lentilles minces, nature des foyers.
- Constructions des images par une lentille mince : tracé des rayons, cas d'un objet à l'infini.
- L'œil : nature optique, rôle de l'accommodation, modèle de l'œil réduit, propriétés et défauts de l'œil.

Erreurs à éviter

- L'erreur la plus fréquente consiste à inverser le sens de la lumière sur un schéma de lentille divergente, après avoir placé le foyer F' avant la lentille. On se retrouve alors avec un schéma de lentille... convergente ! On se rappellera donc que la position de foyers est liée au sens de la lumière. Sur un schéma sur lequel on trace généralement l'axe de gauche à droite, F' se trouve à droite pour une lentille convergente et à gauche pour une divergente.
- Le non-respect de l'algébrisation dans les formules de conjugaison conduit immanquablement à des résultats erronés. On y réfléchira soigneusement ; si A est avant la lentille alors \overline{OA} est négatif.
- Les unités dans les formules de conjugaison peuvent généralement être choisies comme on le souhaite, à condition d'utiliser la même pour toutes les grandeurs (m ou cm le plus souvent). Cependant si on utilise la vergence en dioptrie, les grandeurs devront être exprimées en mètre.
- La lumière ne s'arrête pas brutalement, un rayon doit être poursuivi jusqu'à la lentille suivante, puis au-delà, jusqu'aux limites du schéma ou jusqu'à un écran éventuel.
- Un rayon n'est dévié qu'au passage par une lentille ; entre deux lentilles, son tracé est rectiligne.

Quelques « trucs » utiles

- Dans les calculs de distances à l'aide des formules de conjugaison, on a souvent intérêt à conserver les inverses pour simplifier les valeurs (on évite ainsi d'accumuler les arrondis). Par exemple, on cherche la position de l'image d'un objet situé 30 cm avant une lentille de vergence 2 δ (d'où $f' = 0,5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$)
$$\frac{1}{\overline{OA}'} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA}'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{OA}' = \left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{50} - \frac{1}{30} \right)^{-1} = \left(\frac{-2}{150} \right)^{-1} \Rightarrow \overline{OA}' = -75 \text{ cm}$$
- On se rappellera toujours que tout rayon issu de l'objet émerge en passant par l'image, ainsi même un rayon quelconque peut être tracé dès que la position de l'image a été déterminée. Cela permettra de tracer par exemple un faisceau d'extension quelconque. Inversement le fait que les rayons émergents convergent vers un point, permet de déterminer en retour l'objet dont est issue l'image.
- Il est souvent utile de matérialiser le faisceau entre deux rayons pour visualiser le parcours de la lumière.
- On utilisera avec profit la propriété des rayons venant de l'infini pour déterminer le devenir d'un rayon quelconque (R), par exemple passant par un objet intermédiaire P : on trace son parallèle (R_0) qui passe par le centre optique de la lentille, il n'est pas dévié et son point d'intersection avec le plan focal image est un point K . Les rayons (R) et (R_0) peuvent être vus comme issus d'un objet à l'infini. Ils convergent donc dans le plan focal image en K après traversée de la lentille. Attention ! K n'est pas l'image de P ! Il suffit de tracer le rayon (PO) non dévié pour s'en convaincre.



EXERCICES

Conseil

Il faut toujours faire une figure, en précisant la nature des lentilles (convergente ou divergente) et ses foyers, suffisamment grande et propre, avec des rayons tracés à la règle. On doit avoir les mêmes rayons issus de l'objet qui passent finalement par l'image ; en particulier, un rayon ne s'arrête pas entre deux lentilles sur une image intermédiaire. On peut cependant tracer des rayons de construction supplémentaires en trait fin pour construire les rayons réfractés et les images.

1 Miroir plan ★

→ corrigé p. 87

On considère un miroir plan. Un objet AB est placé devant ce miroir, parallèlement à celui-ci.

- ① Où se trouve l'image A'B' ? Donner la formule de conjugaison du miroir plan. Quel est le grandissement ? Justifier que le miroir plan est afocal.
- ② Un observateur place son œil à la distance D d'un miroir plan en forme de disque de rayon d. Etant donné que la pupille de l'œil a un diamètre très faible, on assimilera celle-ci à un point A placé sur l'axe du miroir. Quels sont les points que l'observateur peut espérer apercevoir par réflexion dans le miroir ? Préciser la valeur de l'angle qui caractérise la portion d'espace accessible à la vision appelée champ du miroir. Application numérique pour $D = 2 \text{ m}$ et $d = 15 \text{ cm}$.

2 Méthode de Bessel (cours) ★

→ corrigé p. 87

On considère une lentille convergente de distance focale image f' . On souhaite obtenir l'image sur un écran, par cette lentille, d'un objet réel éclairé (par exemple un arbre). On note D la distance entre l'objet et l'écran, tous les deux supposés orthogonaux à l'axe optique.

- ① Donner la condition que doit vérifier D pour qu'il soit possible de former une image réelle de l'objet sur l'écran. Dans le cas où cette condition est vérifiée, montrer qu'il existe, pour une distance D donnée, deux positions de la lentille telles que l'image de l'objet soit nette sur l'écran.
- ② Déterminer la distance d entre les deux positions de la lentille donnant une image nette à l'écran. Montrer alors que la mesure de D et de d permet d'obtenir la focale de la lentille (méthode de Bessel). *Cette méthode est à connaître, ses conclusions à savoir retrouver.*

3 Viseur à frontale fixe (d'après CCP MP 2015) ★★

→ corrigé p. 88

Un viseur à frontale fixe est constitué par la succession suivante : a) un objectif L_2 de centre O_2 , de distance focale $f'_2 = 50 \text{ mm}$; b) un réticule gradué perpendiculaire à l'axe de centre R_{oc} ; c) un oculaire modélisé par une lentille convergente L_1 de centre O_1 et de distance focale $f'_1 = 50 \text{ mm}$.

On règle la lunette afin d'avoir, pour l'objectif, un grandissement transversal $\gamma_{ob} = \left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \right)_{ob} = -2$

- ① Comment règle-t-on l'oculaire par rapport au réticule ?
- ② Exprimer la position $\overline{F_2A}$ de l'objet visé par rapport à l'objectif en fonction de γ_{ob} et f'_2 et la calculer.
- ③ Exprimer l'encombrement $\overline{O_2O_1}$ de la lunette en fonction de f'_1 , γ_{ob} et f'_2 et le calculer.
- ④ Effectuer un tracé de l'instrument dans cette situation d'observation et confirmer les valeurs calculées. Citer une application de ce type de viseur.

4 Système catadioptrique ★★

→ corrigé p. 89

Un système optique est formé d'une lentille mince convergente de focale 0,30 m et d'un miroir plan disposé à 0,15 m derrière la lentille. Déterminer la position de l'image que ce système donne d'un objet situé à 0,15 m en avant de la lentille.

5 Observation de Saturne (d'après Enstim 2008) ★★

→ corrigé p. 90

On observe Saturne et ses anneaux à l'aide d'une lunette afocale constituée d'une première lentille mince, l'objectif, de centre O_1 et de vergence $V_1 = 1,0 \delta$ et d'une seconde lentille mince, l'oculaire, de centre O_2 et de vergence $V_2 = -5,0 \delta$; elles sont distantes de $\overline{O_1 O_2} = 0,8 \text{ m}$. La lunette pointe vers le centre de la planète distante de $D = 1,5 \cdot 10^{12} \text{ m}$. On note α l'angle entre les rayons issus du centre de la planète et ceux issus du bord de l'anneau le plus grand, de rayon $R_A = 10^8 \text{ m}$.

- ① Calculer numériquement l'angle α .
- ② Expliquer pourquoi cette lunette est bien afocale.
- ③ On note α' l'angle entre la direction des faisceaux de rayons émergents issus du bord des anneaux et l'axe optique. Déterminer le grossissement angulaire $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ et faire l'application numérique.
- ④ Vérifier que l'utilisation de la lunette est indispensable pour distinguer les anneaux de Saturne, sachant que le pouvoir séparateur de l'œil est $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$.

Résolution de problème : une observation monstrueuse ? ★★★

→ corrigé p. 91

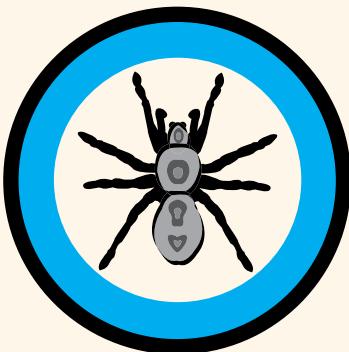
Dans une bande dessinée bien connue, un jeune reporter observe, dans le ciel nocturne, ce qui semble être une étoile aussi grosse que la Lune et se rend à l'observatoire pour en savoir plus. En se plaçant derrière l'oculaire de la grande lunette, il voit un disque lumineux qui occupe la quasi-totalité du champ et sur lequel se trouve une araignée de même dimension, qui paraît donc énorme. Ayant fait le tour de l'instrument, notre héros constate qu'une araignée se promène sur l'objectif. L'animal parti, il observe alors l'image de l'astre vu dans le ciel et apprend que c'est un astre errant fonçant sur la Terre ! Les protagonistes de l'histoire s'attendent à la fin du monde dans les heures qui suivent, mais finalement, le pire est évité car le bolide passe à « seulement » 45 000 km de la Terre.

La grande lunette de l'observatoire de Meudon (l'un des sites de l'observatoire de Paris) a été inaugurée en 1896 et reste aujourd'hui la plus grande d'Europe (3^e mondiale). D'un diamètre de 83 cm, son objectif a une focale d'environ 16 m et un oculaire de focale 4 cm. Elle permet une observation sans fatigue des objets célestes visés par l'instrument.

L'une des premières lunettes d'observation fut celle de Galilée qui observa et cartographia la Lune avec un instrument de grossissement environ égal à 4. La Lune a un diamètre apparent de 32' (angle sous lequel elle est vue depuis la Terre).

Problème à résoudre : L'observation « monstrueuse » décrite ci-dessus est-elle possible ? On donnera une première réponse qualitative, puis on effectuera les calculs nécessaires pour la justifier et la préciser.

Conseil : On aura intérêt à résoudre préalablement l'exercice n° 5 précédent.



CORRIGÉS

1 Miroir plan

→ énoncé p. 85

- 1 A'B' est l'image virtuelle, symétrique de l'objet AB par rapport au miroir plan. Comme l'objet est parallèle au miroir : $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. En notant H, le projeté orthogonal du point A sur le miroir et dans les conditions de Gauss, on obtient les relations de conjugaison suivantes :

$$\overline{HA'} = -\overline{HA} \quad \text{et} \quad \overline{HB'} = -\overline{HB}$$

Par définition, le grandissement s'écrit : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ d'où $\gamma = 1$

Le miroir plan est donc rigoureusement aplanétique et stigmatique. Les rayons lumineux parallèles à l'axe optique arrivant sur le miroir plan ressortent parallèles entre eux. Le miroir plan donne une image à l'infini d'un objet placé à l'infini, **il est donc afocal**.

- 2 Pour un observateur placé à une distance D du miroir, le champ du miroir (zone verte sur le schéma) est l'ensemble des objets visibles par réflexion sur le miroir. Il dépend de la taille et de la nature (plan, incurvé...) du miroir ainsi que de la position de l'observateur.

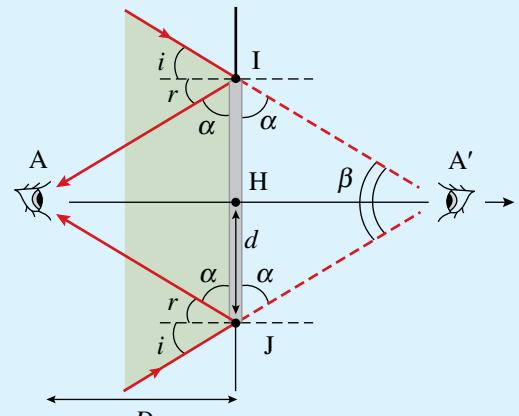
D'après la loi de Descartes en I : $i = r$

Comme l'œil est placé sur l'axe optique, le système présente une symétrie axiale et vérifie :

$$\tan \alpha = \frac{D}{d} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \arctan \left(\frac{D}{d} \right)$$

Ainsi la valeur de l'angle β , qui caractérise la portion d'espace accessible à l'observateur est :

$$\beta = \pi - 2\alpha \quad \text{d'où} : \quad \beta = \pi - 2 \arctan \left(\frac{D}{d} \right) = 8,6^\circ$$



2 Méthode de Bessel

→ énoncé p. 85

- 1 Soit $D = \overline{AA'}$, la distance entre l'objet placé au point A et l'écran placé au point A'. En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$D = \overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = \overline{OA'} - \overline{OA}$$

$$\text{d'où} \quad \overline{OA'} = D + \overline{OA} \quad (1)$$

La relation de conjugaison d'une lentille mince s'écrit :

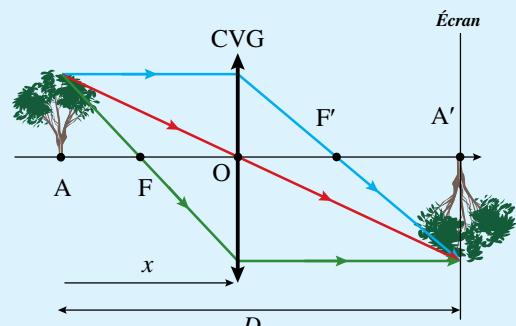
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{f' \overline{OA}}{f' + \overline{OA}} \quad (2)$$

La combinaison des équations (1) et (2) fait apparaître une équation du second degré :

$$x^2 - Dx + Df' = 0 \quad \text{avec} \quad x = \overline{AO}$$

Cette équation n'a de solution réelle que si son discriminant $\Delta = D(D - 4f') \geq 0$. Ainsi il faut obligatoirement que la distance D soit supérieure ou égale à $4f'$ pour obtenir une image réelle sur l'écran. Si cette condition est vérifiée, il existe alors deux solutions réelles (pour $\Delta > 0$), c'est-à-dire deux positions de la lentille x_1 et x_2 qui permettent de conjuguer A et A' et donc d'avoir une image réelle nette, telle que :

$$x_{1,2} = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2} \quad \text{qui n'existent que si } D \geq 4f'$$



- 2 La distance d entre les deux positions de la lentille donnant une image nette à l'écran s'écrit :

$$d = x_2 - x_1 = \sqrt{D^2 - 4Df'}$$

d'où : $f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$

3 Viseur à frontale fixe

→ énoncé p. 85

- 1 Le système optique (objectif + oculaire) forme l'image d'un objet A visé et l'oculaire forme l'image du réticule. On peut écrire les schémas synoptiques suivants :

$$A \xrightarrow{L_2} A_2 \xrightarrow{L_1} A_1 \quad \text{et} \quad R_{\text{oc}} \xrightarrow{L_1} R_1$$

On regarde avec son œil les images par l'instrument. L'intérêt du réticule est d'effectuer une mesure sur l'objet observé, son image R_1 doit donc coïncider avec A_1 celle de l'objet visé. Par ailleurs, pour une observation sans fatigue, ces images doivent être à l'infini. On en déduit que A_2 doit coïncider avec le réticule et se trouver au foyer objet de L_1 .

$$A \xrightarrow{L_2} A_2 = F_1 \xrightarrow{L_1} A_1 = A'_\infty \quad \text{et} \quad R_{\text{oc}} = F_1 \xrightarrow{L_1} R_1 = A'_\infty$$

Compte tenu de la valeur de la focale de l'oculaire, le réticule doit donc se situer 50 mm avant l'oculaire L_1 .

- 2 La relation du grandissement de Newton pour L_2 s'écrit :

$$\gamma_{ob} = \frac{\overline{F_2 O_2}}{\overline{F_2 A}} \quad \text{d'où :} \quad \overline{F_2 A} = \frac{\overline{F_2 O_2}}{\gamma_{ob}} = \frac{-f_2}{\gamma_{ob}} \quad \text{soit :} \quad \overline{F_2 A} = \frac{f'_2}{\gamma_{ob}} = -25 \text{ mm}$$

- 3 On cherche la distance entre les deux lentilles :

$$\overline{O_2 O_1} = \overline{O_2 A_2} + \overline{A_2 O_1} = \overline{O_2 A_2} + \overline{F_1 O_1} = \overline{O_2 A_2} - f_1 = \overline{O_2 A_2} + f'_1$$

Or $\overline{O_2 A_2}$ est la distance image pour le couple (A , A_2) par l'objectif L_2 . On peut donc écrire la relation de conjugaison de Descartes suivante :

$$\frac{1}{\overline{O_2 A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2 A}} = \frac{1}{f'_2}$$

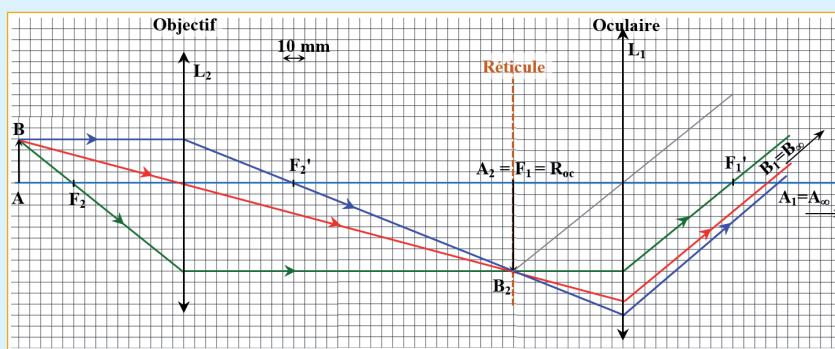
$$\overline{O_2 A_2} = \left(\frac{1}{\overline{O_2 A}} + \frac{1}{f'_2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{\overline{O_2 F_2} + \overline{F_2 A}} + \frac{1}{f'_2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{-f'_2 + f'_2 / \gamma_{ob}} + \frac{1}{f'_2} \right)^{-1}$$

$$\overline{O_2 A_2} = \left(\frac{1}{\overline{O_2 A}} + \frac{1}{f'_2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{f'_2} \left[\frac{\gamma_{ob}}{1 - \gamma_{ob}} + 1 \right] \right)^{-1} = \left(\frac{1}{f'_2 [1 - \gamma_{ob}]} \right)^{-1} = f'_2 [1 - \gamma_{ob}]$$

D'où l'encombrement de la lunette : $\overline{O_2 O_1} = \overline{O_2 A_2} + f'_1 = (1 - \gamma_{ob}) f'_2 + f'_1 = 150 + 50 = 200 \text{ mm}$

Soit un viseur de 20 cm de long, ce qui semble pertinent.

- 4 Un viseur à frontale fixe permet de voir nettement et en coïncidence avec un réticule, des objets se trouvant à une distance donnée de l'objectif (dans le cas ci-dessus à 75 mm). L'ensemble de la construction figure dans le schéma ci-dessous. On constate bien que pour un encombre-



ment de 20 cm et un objet à 75 mm du viseur, les images finales de l'objet et du réticule sont à l'infini. Ce type d'instrument peut servir à mesurer la position d'une image virtuelle.

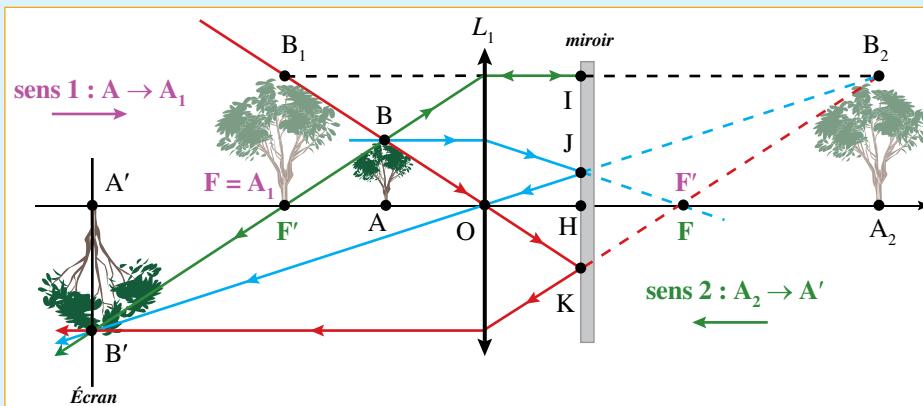
Bien comprendre

Les notations sont celles de l'énoncé original, la numérotation inhabituelle des lentilles (inverse de l'ordre dans lequel la lumière les rencontre) pourra être source de confusion. On sera donc vigilant dans ses notations, le schéma synoptique permettant de bien les poser. On se souviendra que beaucoup d'instruments sont utilisés de façon à ne pas fatiguer l'œil grâce à une image finale à l'infini, ce qui n'était pas précisé dans l'énoncé ici. Le rôle du réticule (rencontré en TP) doit être connu.

4 Système catadioptrique

→ énoncé p. 86

On utilise des images intermédiaires A_1 et A_2 pour déterminer l'image finale A' de l'objet A . Le système peut s'écrire : $A \xrightarrow[L_1 \text{ CVG}]{ } A_1 \xrightarrow{\text{Miroir}} A_2 \xrightarrow[L_1 \text{ CVG}]{ } A'$.



La résolution du problème se fait donc en 3 étapes, le passage du rayon au niveau de la lentille, puis la réflexion par le miroir et enfin le retour du rayon à travers la même lentille avec inversion du sens de la lumière. L'image A_1 de A par la lentille vérifie : $\frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{OA_1} = \left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{OA} \right)^{-1}$ d'où : $\overline{OA_1} = \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{15} \right)^{-1} = -30 \text{ cm}$

A_1 est confondu avec F , qui n'est pas une position particulière pour une image. Dans cette étape le sens de la lumière et les positions des foyers sont en rose sur ce schéma (sens 1).

L'image A_2 de A_1 par le miroir symétrique par rapport au miroir, H est leur milieu :

$$\overline{HA_2} = \overline{HA_1} = -\overline{HF} = -(\overline{HO} + \overline{OF}) = 45 \text{ cm} \quad \text{d'où : } \overline{OA_2} = \overline{OH} + \overline{HA_2} = 60 \text{ cm}$$

La lumière se propage maintenant de droite à gauche, les foyers objets/images sont inversés (sens 2 en vert sur le schéma) et A_2 se trouve au double de la distance focale objet. Dans cette position particulière, l'image A' de A_2 par L_1 est de même dimension, inverse et à même distance de la lentille :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA_2} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \overline{OA'} = \left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{OA_2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{60} \right)^{-1} = 60 \text{ cm}$$

Bien comprendre

Lorsque le rayon est réfléchi par le miroir (aux points I, J et K), il faut tenir compte de l'inversion du sens de propagation de la lumière, ce qu'on a fait sur le schéma et dans les calculs en inversant le sens de l'axe. On aurait pu garder le même sens mais en changeant les signes $\overline{OF} = -f'$ dans la formule de conjugaison.

5 Observation de Saturne

→ énoncé p. 86

- 1 La distance entre la planète et l'observateur D est largement supérieure au rayon du dernier anneau de Saturne R_A . En utilisant une relation trigonométrique et α petit on obtient :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO_1}} = \frac{R_A}{D} \approx \alpha = 6,7 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 14''$$

Les conditions de Gauss sont vérifiées, l'angle α très faible est volontairement exagéré sur le schéma pour des raisons de clarté.

- 2 Puisque l'objet AB est à l'infini, son image $A'_1B'_1$ se forme dans le plan focal (P) de la lentille convergente L_1 . Pour l'objectif L_1 l'image est réelle, mais c'est un objet virtuel pour l'oculaire L_2 . Le foyer image de la lentille L_1 coïncide avec le foyer objet de la lentille divergente L_2 , donc l'image $A'_2B'_2$ est à l'infini.

Ainsi le système est afocal puisque un objet à l'infini a une image à l'infini :

$A_\infty \rightarrow F'_1 = F_2 \rightarrow A'_\infty$. Les rayons lumineux qui arrivent parallèles ressortent parallèles.

- 3 En utilisant une relation trigonométrique pour chacun des angles très petits, on a :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_1A_1}} \approx \alpha \quad \text{et} \quad \tan \alpha' = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_2A_1}} \approx \alpha' \quad \text{avec :} \quad \overline{O_1A_1} = f'_1 = V_1^{-1} \quad \text{et} \quad \overline{O_2A_1} = f_2 = -f'_2 = -V_2^{-1}$$

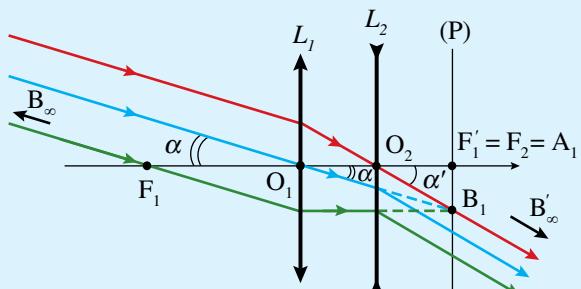
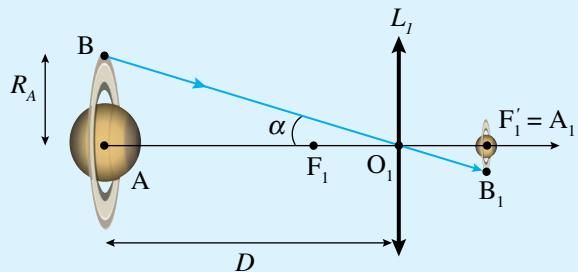
On en déduit le grossissement angulaire :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -\frac{V_2}{V_1} = 5$$

- 4 L'œil, sans instrument d'optique, ne peut distinguer deux rayons que si l'angle qui les sépare est de l'ordre de $1' = 3 \cdot 10^{-4}$ rad, ce qui est insuffisant pour distinguer les anneaux d'ouverture $\alpha = 6,7 \cdot 10^{-5}$ rad = $14''$. Par contre avec la lunette, l'angle α' est 5 fois plus grand que α , l'ouverture devient $\alpha' = 3,4 \cdot 10^{-4}$ rad, ce qui est visible pour l'œil.

Bien comprendre

- Le signe de la vergence (ou de la distance focale image) permet de connaître la nature de la lentille.
- L'image d'un objet à l'infini s'obtient à l'aide du rayon non dévié passant par O et la définition du foyer secondaire.



Résolution de problème : une observation monstrueuse ?

→ énoncé p. 86

Première approche qualitative

La grande lunette est afocale, c'est-à-dire qu'elle donne d'un objet à l'infini une image à l'infini, c'est pourquoi l'œil n'ayant pas besoin d'accommoder pour voir à l'infini peut observer les objets lointains dans la lunette sans fatigue. On colle en principe son œil sur l'oculaire pour observer, car c'est ainsi que le champ de vision est maximal (*il suffit de regarder avec des jumelles pour s'en rendre compte, plus on les éloigne de son œil et plus le champ d'observation se restreint*).

Deux aspects de l'observation décrite et schématisée dans l'énoncé peuvent être considérés : d'une part la position des images et d'autre part leurs dimensions. Les deux objets (araignée et bolide) sont vus nettement et de même taille dans la lunette. Il paraît évident, même sans calcul, qu'il est peu vraisemblable que deux objets situés à des distances aussi différentes de l'instrument puissent être vus nettement simultanément, car cela suppose que leurs images par la lunette se trouvent dans le même plan, plan qui devient pour l'œil le plan objet. Une étude quantitative des positions permet de s'en convaincre et d'établir également le grossissement pour chaque objet, afin d'établir s'ils pourraient donner des images de même dimension.

Approche quantitative, en utilisant les valeurs de la lunette de Meudon

Notons L_1 l'objectif (focale $f'_1 = 16 \text{ m}$), L_2 l'oculaire (focale $f'_2 = 4 \text{ cm}$), A_0 le point de l'araignée coïncidant avec l'axe optique et B_0 celui du bolide coïncidant avec l'axe optique (*légitime en raison du centrage apparent des images*). On note avec un indice 1 les images par L_1 et avec un indice 2, celles par L_2 . On peut proposer alors le schéma synoptique suivant :

$$A_0 \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2 \quad \text{et} \quad B_0 \xrightarrow{L_1} B_1 \xrightarrow{L_2} B_2$$

On schématisera la lunette ci-contre (sans respect d'échelle), son grossissement pour un objet à l'infini (voir exercice n° 5 page précédente) vaut :

$$G_{\infty} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -400$$

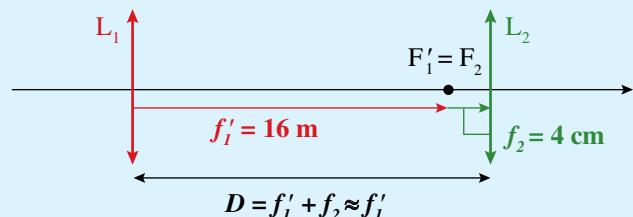


Image de l'araignée par l'instrument

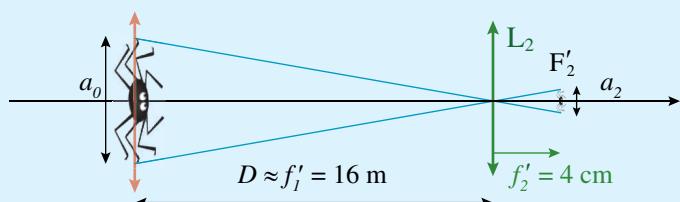
L'araignée se trouve sur la lentille objectif, elle coïncide donc avec son image par L_1 ($A_0 = A_1$) et se situe par conséquent à une distance d'environ 16 m de L_2 , soit à 400 fois sa distance focale. Autrement dit, pour L_2 , l'objet intermédiaire A_1 se trouve suffisamment loin pour être considéré à l'infini et son image A_2 est située dans le plan focal image, soit 4 cm après L_2 :

$$A_0 \xrightarrow{L_1} A_1 = A_0 \approx A_{\infty} \xrightarrow{L_2} A_2 = F'_2$$

L'image se trouve donc 4 cm après l'oculaire, or en principe on colle son œil à l'oculaire et on ne peut voir nettement que des objets situés à au moins 25 cm de son œil. L'observation de l'araignée est donc impossible. En admettant cependant qu'on se place à une trentaine de centimètres de l'oculaire, on pourrait éventuellement distinguer A_2 en accommodant au maximum. Supposons que, malgré la fatigue de l'œil, on soit dans cette situation. La construction ci-dessous (dont l'échelle n'est pas respectée) montre que l'image de l'araignée par la lunette est environ 400 fois plus petite que l'araignée réelle, même en imaginant (pour fixer les idées) une grosse araignée de 8 cm de diamètre, son image serait de 0,2 mm ... donc pas du tout impressionnante !

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{f'_2}{D} = \frac{4}{1600} = \frac{1}{400}$$

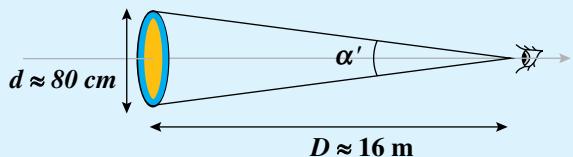
$$a_2 = \frac{a_0}{400} = \frac{8}{400} = 0,02 \text{ cm}$$



► Image du bolide par l'instrument

L'objet passe au plus près à 45 000 km, donc dans la situation d'observation, la distance est au moins $2,5 \cdot 10^6$ fois supérieure à la focale de l'objectif. On peut, par conséquent, largement le considérer comme étant à l'infini. Son image par la lunette afocale se trouve aussi à l'infini et son observation par l'œil se fait alors sans aucune accommodation. Sur l'image, le bolide occupe quasiment tout le champ de la lunette (dont le diamètre est de l'ordre de 80 cm d'après les documents). On peut donc estimer le diamètre apparent α' de l'image à environ :

$$\alpha' \approx \tan \alpha' = \frac{0,8}{16} = 0,05 \text{ rad} = 2,8^\circ = 168'$$



On a déterminé que le grossissement de la lunette pour un objet à l'infini est de 400. L'objet, réel, qui donne une image de diamètre apparent $2,8^\circ$ a un diamètre apparent à l'œil nu 400 fois plus faible, soit environ $0,4'$, ce qui correspond à un astre 80 fois plus petit que la Lune (l'énoncé rappelle que la Lune a un diamètre apparent de $32'$). Un objet qui occuperait presque tout le champ de la lunette (image de l'énoncé), serait donc à peine visible à l'œil nu dans le ciel. *A contrario*, un objet de la taille apparente de celle de la Lune devrait apparaître beaucoup plus gros à travers la lunette et seule une petite portion devrait être observée. Avec une telle lunette on observe des détails de la Lune (celle de Galilée avait un grossissement 100 fois plus faible !). Dans les deux cas, les situations sont irréalistes.

En résumé : les deux images (araignée et bolide) se forment à des positions aussi éloignées pour l'œil que le punctum proximum et le punctum remotum, donc impossibles à observer nettement simultanément. L'image de l'araignée est en réalité 400 fois plus petite que la bestiole réelle et celle du bolide 400 plus grande que l'astre, ce qui pour des objets vus à l'œil nu (araignée à 25 cm de l'œil et bolide dans le ciel) de dimensions approximativement similaires, devrait donner un astre très grand dont on ne voit qu'une petite partie et une araignée minuscule. L'image est donc tout à fait irréaliste.

Bien comprendre

Dans ce genre d'énoncé, on attend un raisonnement avant tout et il est tout à fait indiqué de faire des calculs d'ordre de grandeur et d'arrondir les valeurs utilisées et obtenues. On n'hésitera pas par ailleurs à introduire des valeurs pertinentes et « universellement » connues comme par exemple la dimension d'une araignée. Les propriétés des instruments d'optique (ici lentille, lunette et œil) peuvent être exploitées sans calcul et avec profit, comme par exemple le fait qu'une image est confondue avec son objet placé sur une lentille, les zones d'accommodations de l'œil ou les propriétés des systèmes afocaux. On a ici utilisé un résultat de l'exercice précédent, mais, dans un devoir, la valeur du grossissement pour un objet à l'infini par la lunette doit être redémontrée.

À méditer

Ne tenez pour certain que ce qui est démontré.

ISAAC NEWTON (1643-1727)

Introduction au monde quantique

Au début du xx^e siècle, les physiciens pensaient que la physique était une science classée dont presque tous les phénomènes observés à cette époque pouvaient être expliqués par le biais de la mécanique newtonienne, de l'électromagnétisme maxwellien et de la thermodynamique. La physique dite classique est déterministe, ce qui signifie que pour des conditions initiales données, il est possible, en théorie, de prédire avec certitude l'évolution temporelle et spatiale d'un système. Toutefois, cette physique est dans l'incapacité d'expliquer certaines expériences, parmi elles le spectre du rayonnement d'un corps noir et l'effet photo-électrique.

Lorsqu'en 1900 le physicien allemand Max Planck (1858-1947) introduisit pour la première fois la notion de quanta dans le cadre de l'explication du rayonnement du corps noir, il ne s'imaginait pas la révolution conceptuelle qu'il allait déclencher. Il introduit la constante h exprimant le seuil d'énergie minimum et indivisible que l'on puisse mesurer sur une particule du microcosme. Sa valeur extrêmement faible marque la séparation entre les mondes macroscopique et microscopique, de sorte que les phénomènes quantiques ont des effets négligeables sur nos observations quotidiennes. Il faudra attendre 1905, année charnière (souvent désignée par l'expression *annus mirabilis*), pour que le physicien allemand Albert Einstein (1879-1955) propose l'interprétation de l'effet photo-électrique en développant le concept de particule de lumière, appelée plus tard photon¹. Au départ purement théorique, la physique quantique a aujourd'hui de nombreuses applications pratiques : laser, IRM, led, horloge atomique, microscope à effet tunnel... D'autres sont à l'étude : ordinateur, cryptographie et téléportations quantiques.

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Linéarisation des fonctions trigonométriques : $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
- Module d'un nombre complexe : $|z|^2 = z\bar{z}$ (\bar{z} conjugué de z)

Deux concepts *a priori* antagonistes sont distingués en physique classique :

↳ Les corpuscules (par exemple les boulets de canon, les balles, les électrons) qui possèdent une trajectoire définie et qui se caractérisent par leur énergie E et leur impulsion ou quantité de mouvement \vec{p} .

↳ Les ondes (par exemple la lumière, le son, les vagues) qui sont diffractées lors de leur passage au travers d'un diaphragme dont la taille est de l'ordre de la longueur d'onde λ et peuvent interférer. Elles se caractérisent par leur fréquence que l'on note ici v (plutôt que f) et leur vecteur d'onde

$$\vec{k} \text{ où } \|\vec{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

I Dualité Onde-Corpuscule

1. La notion de photon et d'aspect corpusculaire de la lumière

En 1886, le physicien allemand Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) réalisa une expérience permettant de mettre en évidence l'émission d'électrons par un matériau métallique exposé à la lumière.

1. Le nom *photon* a été choisi en 1926 par le physico-chimiste américain Gilbert Newton Lewis (1875-1946).

Expérience 1 : Une enceinte à vide contient deux plaques de métal. L'une, la cathode, constituée du matériau étudié, est portée à un potentiel négatif par le générateur de tension et capte la lumière émise depuis l'extérieur de l'enceinte, tandis que l'autre, l'anode, est portée à un potentiel positif afin d'attirer les électrons (e^-). On utilise un galvanomètre (G), qui permet de mesurer l'intensité d'infimes courants électriques et l'on place un potentiomètre pour contrôler la tension aux bornes des deux plaques.

Observation : Le galvanomètre met en évidence un courant lorsqu'on éclaire la cathode en lumière blanche, et au contraire un courant nul lorsque celle-ci n'est pas éclairée.

Expérience 2 : on éclaire la plaque métallique en lumière monochromatique, c'est-à-dire par une onde ne comprenant qu'une seule fréquence ν (une seule couleur), et on fait varier l'intensité lumineuse I_ϕ .

Observation : Le graphe ci-contre représente le courant mesuré dans le circuit en fonction de la fréquence de l'onde monochromatique incidente pour différentes valeurs de l'intensité lumineuse. On note qu'il existe une fréquence seuil ν_s (qui dépend de la matière des plaques) en-deçà de laquelle, on n'observe pas démission d'électrons et cela, quelle que soit l'intensité lumineuse. En revanche, lorsque la fréquence de l'onde est supérieure à ν_s , une intensité électrique est mesurée par l'appareil et celle-ci est d'autant plus élevée que l'intensité lumineuse I_ϕ est grande, ce qui implique qu'à fréquence donnée le nombre d'électrons émis augmente avec l'intensité lumineuse.

Définition

L'**effet photo-électrique** est l'émission d'électrons d'un matériau métallique lorsque celui-ci est exposé à un rayonnement électromagnétique de fréquence suffisamment élevée, c'est-à-dire supérieure à une **fréquence** dite **seuil** qui ne dépend que du matériau utilisé.

C'est l'existence de la fréquence seuil qui à l'époque était inexplicable à l'aide de la théorie ondulatoire (l'électromagnétisme tel qu'il était connu). Les physiciens s'attendaient à ce que, quelle que soit la fréquence de la lumière incidente utilisée, les électrons puissent toujours être arrachés du métal pour peu qu'on augmente suffisamment l'intensité lumineuse. En s'appuyant sur l'idée de Planck, Einstein proposa une explication de ce phénomène, qui lui valut le prix Nobel de physique en 1921.

Définitions

- Quelle que soit la distance parcourue depuis son émission, la lumière se présente sous la forme de particules de masse nulle, nommées **photons** qui se déplacent à la vitesse $c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$ et transportent chacun une énergie E qui dépend de la fréquence ν de l'onde lumineuse :

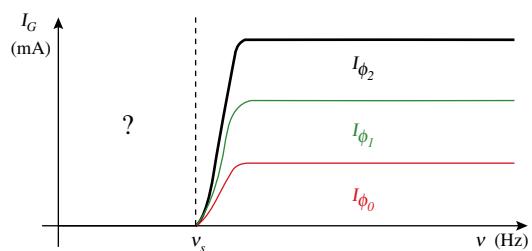
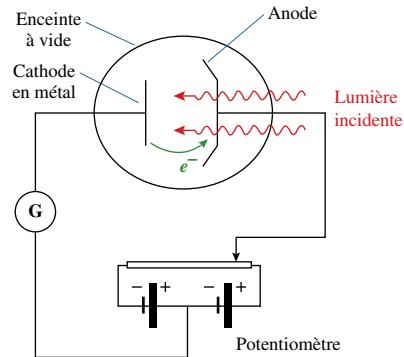
$$E = h\nu$$

où $h = 6,62606957 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

Relation de Planck-Einstein

est la constante de Planck

- Dualité onde-corpuscule :** la lumière et, plus largement, tout rayonnement électromagnétique sont dotés d'une double nature, à la fois onde et corpuscule.



- Lorsqu'un photon, appartenant au faisceau lumineux, entre en collision avec un électron situé à la surface du métal, ce dernier l'absorbe entièrement et reçoit l'énergie $h\nu$. Mais pour qu'il puisse quitter le métal, cette énergie reçue doit être au moins égale à l'énergie qui le lie au métal appelé **travail d'extraction** W_{ext} . La fréquence seuil correspond donc à un photon ayant juste l'énergie correspondante : $h\nu_s = W_{ext}$. Si le photon apporte une énergie supérieure, l'électron extrait acquiert en plus une énergie cinétique E_C égale à :

$$E_C = \frac{1}{2} m_e v^2 = h\nu - W_{ext} = h\nu - h\nu_s = h(v - v_s)$$

- Il est important de comprendre que les échanges matière (électrons) – rayonnement (photons) se font sur le modèle $1 \leftrightarrow 1$: un seul photon interagit avec un seul électron. Par conséquent, à basse fréquence ($v < v_s$), les photons incidents n'ont pas suffisamment d'énergie pour extraire les électrons, et augmenter l'intensité lumineuse revient à augmenter le nombre de photons, mais pas à les rendre plus énergétiques individuellement : aucun électron n'est arraché. Inversement, si la fréquence est suffisante ($v > v_s$), alors augmenter l'intensité lumineuse augmente le nombre de photons et donc le nombre d'électrons arrachés, et par suite l'intensité du courant détecté.
- Le photon possède donc un aspect corpusculaire même si sa masse m est nulle.
- Le fait de considérer l'énergie du rayonnement comme formée de « paquets » (= quanta) d'énergie indivisibles constitue la **quantification de l'énergie**, en ce sens qu'un échange énergétique ne peut pas prendre n'importe quelle valeur mais seulement un multiple entier de l'énergie d'un « paquet » (= quantum), la plus petite énergie que peut échanger le rayonnement.

2. Les ondes de matière

En 1666, la lumière avait déjà été considérée par Isaac Newton (1643-1727) comme étant constituée de particules, mais quand James Clerk Maxwell (1831-1879) démontra à l'aide de ses quatre équations que celle-ci se comportait comme une onde électromagnétique, expliquant ainsi de nombreuses expériences (diffraction, interférences...), son succès fut tel que l'idée de particules de lumière fut reléguée au second plan. En 1900, Planck introduisit le concept de quantum d'énergie, sans y croire vraiment, et comme une solution désespérée au problème du corps noir (d'où le nom de sa constante : $h = hilfe = \text{à l'aide !}$ en allemand), mais Einstein se saisit du concept et lui donna tout son sens dans son explication de l'effet photo-électrique, en considérant les quanta d'énergie comme des corpuscules de lumière. C'est alors que le physicien français Louis de Broglie (prononcer *de Breuil*) (1892-1987) proposa une idée géniale dans sa thèse soutenue en 1924 : si l'on quantifie ce que l'on pense être des ondes, n'est-il pas possible à l'inverse de rendre onde ce que l'on croit particule ?

En tant que corpuscule, le photon possède une quantité de mouvement \vec{p} qui est liée à l'onde lumineuse de vecteur d'onde \vec{k} telle que l'onde se propage selon la direction du vecteur \vec{p} avec :

$\vec{p} = \hbar \vec{k}$, où $\hbar = h / 2\pi$ est la constante de Planck réduite (prononcer *h-barre*)

Or : $k = \|\vec{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}$ d'où : $p = \|\vec{p}\| = \frac{h}{\lambda}$

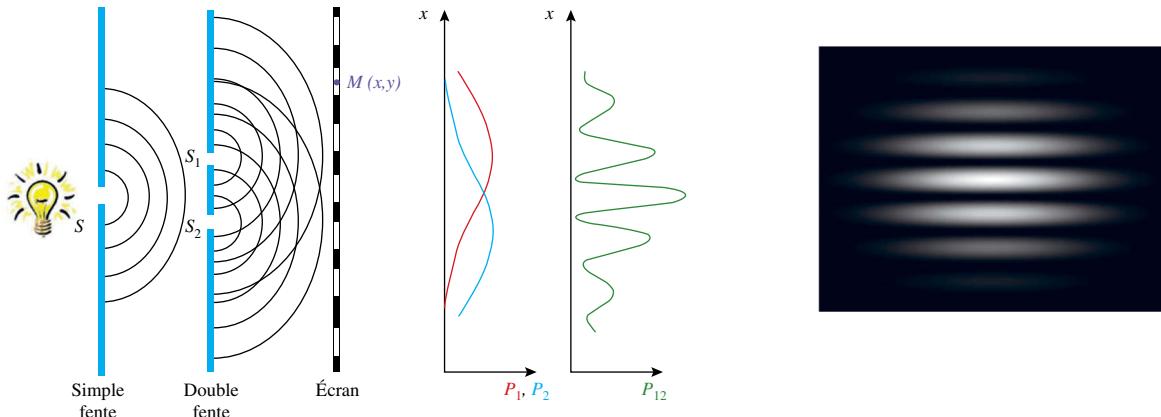
Énoncé

Toute particule de quantité de mouvement \vec{p} , possède un comportement ondulatoire et peut être décrite comme une onde monochromatique, dite **onde de matière** et possédant une longueur d'onde λ telle que : $\lambda = \frac{h}{p}$ *Relation de de Broglie*

- L'onde de matière n'est pas une onde électromagnétique.

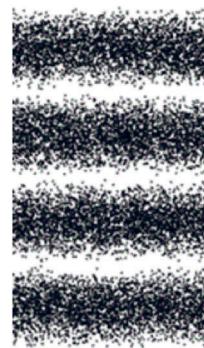
3. Expériences des fentes de Young classique et quantique

Expérience 1 : L'expérience classique des *fentes de Young* fut réalisée en 1801. Elle consiste à faire passer de la lumière à travers deux fentes percées dans une paroi rigide et d'en observer le résultat sur un écran placé à une certaine distance. On observe alors des interférences sur l'écran (voir chapitre 4 p. 44).



Observation : Si on considère l'aspect corpusculaire de la lumière, on s'attend à observer deux taches lumineuses indépendantes provenant des faisceaux de photons passant l'un par la source S_1 (distribution de probabilité P_1) et l'autre par la source S_2 (distribution de probabilité P_2), soit une distribution résultant de la somme $P_1 + P_2$. En réalité on observe la distribution de probabilité P_{12} , qui se traduit par une alternance de franges sombres et brillantes. Seule une interprétation ondulatoire rend possible la compréhension du phénomène d'interférences observé. Young en conclut que la lumière se propage sous forme ondulatoire, ce que confirme l'électromagnétisme maxwellien.

Expérience 2 : Grâce à l'avènement de la technologie, les physiciens contemporains ont réussi au cours du xx^e siècle, à réaliser l'expérience des fentes de Young en utilisant des faisceaux de particules matérielles (électrons, neutrons, atomes et molécules) afin de démontrer expérimentalement la nature ondulatoire de la matière. L'expérience est similaire à la précédente.



Observation : La figure ci-contre obtenue montre une figure d'interférences pour les faisceaux de particules, similaire à celle des interférences lumineuses.

Expérience 3 : On envoie les particules (photons ou matière) une par une sur le dispositif de Young (expérience par comptage de photons ou d'électrons).

Observation : Les impacts individuels sur l'écran sont aléatoires et finissent par dessiner aussi la même figure d'interférences qu'avec un faisceau.

Résultats

- On observe des impacts sur l'écran dans l'expérience par comptage de photons ou d'électrons qui traduisent le **comportement corpusculaire de la matière et de la lumière**.
- On ne peut pas prévoir la position de chaque impact sur l'écran, mais uniquement la probabilité d'impact en fonction de la position sur l'écran. Cette distribution de probabilité résulte d'une **approche ondulatoire** et fait apparaître les interférences.
- La **dualité onde-corpuscule** en mécanique quantique décrit la nature de la lumière et des particules, et ne fait donc plus aucun doute, que ce soit d'un point de vue théorique ou expérimental.

II | Notions de fonction d'onde et de probabilité de présence

1. La fonction d'onde

Au début du xx^e siècle, la présentation des différents problèmes évoqués au I montre que la vision qu'ont les physiciens doit être totalement remaniée et qu'il devient nécessaire de changer la manière de décrire les systèmes physiques lorsque les phénomènes quantiques apparaissent. En 1925, le physicien autrichien Erwin Schrödinger (1887-1961) prend connaissance des travaux de Louis de Broglie sur les ondes de matière et il parvient à établir une équation différentielle : l'équation de Schrödinger². Elle régit l'évolution spatiale et temporelle d'une fonction, la fonction d'onde, qui est en général à valeur complexe.

Définition

Une **fonction d'onde** $\Psi(M(\vec{r}), t)$ est un outil mathématique, définie au point M et à un instant t, sous la forme d'une grandeur complexe. Elle représente l'état d'un système quantique, par exemple l'état d'une particule, tout en prenant en compte son comportement ondulatoire.

2. La notion de probabilité en mécanique quantique

En conservant l'équation de Schrödinger, le physicien allemand Max Born (1882-1970) formule une hypothèse faisant entrer pour la première fois, en 1926, la notion de probabilité au sein de la physique quantique, ce qui remet en question le déterminisme de la physique classique. Il y stipule que la mécanique quantique est intrinsèquement probabiliste et non plus déterministe³, avec une conséquence importante : la notion de trajectoire (par exemple d'un électron dans l'atome) doit être abandonnée.

Définition

La **probabilité de présence** dP qu'une particule se situe à un instant t dans un volume élémentaire $d\tau$ autour du point $M(\vec{r})$ est définie telle que : $dP = |\Psi(M(\vec{r}), t)|^2 d\tau$

- La somme de toutes les probabilités dans un espace donné doit être égale à 1. En effet la particule doit forcément se trouver quelque part, d'où la condition dite **condition de normalisation** dans l'espace qui s'écrit de la façon suivante :

$$P = \int_{espace} dP = \int_{espace} |\Psi(M(\vec{r}), t)|^2 d\tau = 1$$

3. Retour sur l'expérience des fentes de Young

Ayant introduit la notion de fonction d'onde et de probabilité, il est possible désormais d'interpréter mathématiquement l'expérience des fentes de Young. Tout comme pour les ondes, la fonction d'onde de la particule $\Psi(M(\vec{r}), t)$ définie au point $M(\vec{r})$ de l'écran à un instant t, résulte de la superposition des fonctions d'ondes $\Psi_1(M(\vec{r}), t)$ et $\Psi_2(M(\vec{r}), t)$ correspondant respectivement au passage à travers la fente 1 et à travers la fente 2, c'est-à-dire :

$$\Psi(M(\vec{r}), t) = \Psi_1(M(\vec{r}), t) + \Psi_2(M(\vec{r}), t).$$

2. L'équation de Schrödinger sous la forme indépendante du temps t est : $\hat{H}\Psi(M(\vec{r})) = E\Psi(M(\vec{r}))$ où \hat{H} est un opérateur appelé Hamiltonien et E est la valeur propre associé à $\Psi(M(\vec{r}))$, c'est-à-dire l'énergie.
 3. Einstein réfuta toute sa vie cette approche probabiliste.

Définitions

On définit l'**intensité lumineuse** $I(M(\vec{r}), t)$ comme étant proportionnelle à la probabilité de présence en un point de l'écran noté $M(\vec{r})$ à un instant t :

$$I(M(\vec{r}), t) = \beta |\Psi(M(\vec{r}), t)|^2 = \beta \Psi(M(\vec{r}), t) \bar{\Psi}(M(\vec{r}), t)$$

où $\bar{\Psi}(M(\vec{r}), t)$ est le complexe conjugué de $\Psi(M(\vec{r}), t)$ et β est une constante.

L'intensité dans l'expérience d'Young s'écrit alors, où pour alléger on omet le facteur bêta :

$$I(M(\vec{r}), t) = (\Psi_1(M(\vec{r}), t) + \Psi_2(M(\vec{r}), t))(\bar{\Psi}_1(M(\vec{r}), t) + \bar{\Psi}_2(M(\vec{r}), t))$$

$$I(M(\vec{r}), t) = \underbrace{|\Psi_1(M(\vec{r}), t)|^2}_{I_1} + \underbrace{|\Psi_2(M(\vec{r}), t)|^2}_{I_2} + \underbrace{\Psi_1(M(\vec{r}), t) \bar{\Psi}_2(M(\vec{r}), t) + \Psi_2(M(\vec{r}), t) \bar{\Psi}_1(M(\vec{r}), t)}_{\text{Terme d'interférences}}$$

- L'intensité résultante n'est pas la somme des intensités, mais fait apparaître un terme supplémentaire qui explique la figure d'interférences, comme pour les interférences lumineuses (*voir chapitre 4 p. 45*).

III Particules confinées

Intuitivement, en plaçant une particule avec une vitesse initiale non nulle dans un espace confiné représenté par une énergie potentielle $V(x)$ nulle entre 0 et a et infinie ailleurs (en physique quantique $V(x)$ est appelé potentiel), on imagine aisément que celle-ci va effectuer des va-et-vient, du fait de son rebondissement sur les parois. Notons que pour une particule classique toutes les valeurs d'énergie sont possibles.

En physique ondulatoire, ce type de situation est analogue au cas d'ondes stationnaires pour une corde vibrante de longueur a fixée à ses deux extrémités. En effet le concept de va-et-vient se traduirait ici comme la superposition d'une onde aller et d'une onde retour de même amplitude (onde associée à la particule).

Par ailleurs, la probabilité de trouver la particule en dehors de cette zone est nulle et cela se traduit d'un point de vue de la mécanique quantique par :

$$|\psi(x)|^2 = 0 \Rightarrow \psi(x) = 0, \text{ si } (x \notin [0, a])$$

où $\psi(x)$ est la fonction d'onde qui caractérise l'état de la particule confinée. On admet de plus que $\psi(x)$ est continue, ce qui implique :

$$\psi(x=0) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x=a) = 0.$$

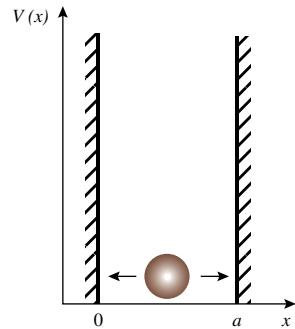
Par analogie avec la physique ondulatoire, on s'attend donc à une fonction d'onde de la forme :

$$\psi(x, t) = \psi_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{a}t\right)$$

fonction de type onde stationnaire dans la corde de Melde où le coefficient n est un entier non nul.

Les conditions aux limites imposent une relation entre la largeur a et la longueur d'onde de sorte que seules les longueurs d'onde vérifiant la relation suivante sont acceptables, à l'instar de la condition permettant des ondes stationnaires dans une corde de longueur a (*voir chapitre 4 p. 49*) :

$$\lambda_n = \frac{2a}{n}$$



Le coefficient n joue un rôle de quantification. Les solutions ne sont donc pas à valeurs continues, mais à valeurs discrètes. La relation précédente donne les valeurs acceptables de la longueur d'onde de matière associée à la particule de masse m . En mécanique quantique certaines valeurs sont tout simplement interdites. D'après la relation de de Broglie, l'impulsion associée, également quantifiée, est :

$$p_n = \frac{\hbar}{\lambda_n} = \frac{n\hbar}{2a}$$

On en déduit alors que l'énergie cinétique E_n de la particule, également quantifiée, est :

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2\hbar^2}{8ma^2} = \frac{2}{2m}\left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2$$

Soit :

$$E_n = n^2 \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi\hbar}{a} \right)^2 = n^2 E_0$$

- L'énergie de la particule confinée dans ce puits est donc quantifiée en n^2 . Ainsi seules certaines valeurs d'énergies, appelées niveaux d'énergie, sont autorisées, les valeurs entre ces niveaux sont interdites.
- Le terme *quantique* provient de la notion de quantification, où seuls sont autorisés des états et des énergies à valeurs discrètes. La quantification est en opposition avec notre vécu quotidien où tout est continu : on ne peut jamais accélérer de 0 m.s^{-1} à 20 m.s^{-1} sans passer par toutes les vitesses intermédiaires.
- L'écart entre les niveaux d'énergie (par exemple $\Delta E = E_2 - E_1$) est de plus en plus important quand n augmente. La quantification des niveaux d'énergies est liée au fait que la particule est confinée dans un certain espace (état lié). En effet, ce sont les conditions aux limites qui induisent la quantification. Si la particule n'avait pas été confinée, elle aurait pu avoir des valeurs continues d'énergie (état libre).
- Cet exemple permet d'illustrer un des fondamentaux de la mécanique quantique : un électron d'un atome est contraint de rester à proximité du noyau, son énergie est nécessairement quantifiée (mais pas en n^2).
- Une étude quantitative est réalisée dans l'exercice n° 5 p. 101 et permet de décrire parfaitement les concepts d'amplitudes de probabilités et de fonctions d'onde $\psi_n(x)$ qui sont autorisées.

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Le photon : définition, relation de Planck-Einstein et explication de l'effet photo-électrique.
- Dualité onde-corpuscule, relation de de Broglie et illustration expérimentale (fentes de Young).
- Fonction d'onde : définition, probabilité de présence et intensité lumineuse.

Quelques « trucs » utiles

- En mécanique quantique, l'utilisation de la quantité de mouvement est plus pertinente que celle de la vitesse.

1 Émission de photons ★

→ corrigé p. 102

Un LASER (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) à l'hélium-néon dont la puissance est de 500 mW émet un faisceau de lumière continu de longueur d'onde $\lambda = 633$ nm.

- ① Déterminer l'énergie E_γ de chaque photon ainsi que le nombre de photons N_γ émis par ce LASER à chaque seconde lorsque celui-ci a atteint son régime permanent de fonctionnement. Toutes les valeurs énergétiques seront exprimées en Joules puis en electronvolts, sachant que $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.
- ② Que se passe-t-il si l'on augmente la puissance du laser de 100 mW ?

2 Longueur d'onde de de Broglie ★

→ corrigé p. 102

- ① Calculer la longueur d'onde de de Broglie d'une personne de 75 kg marchant à une vitesse de 4 km/h et comparer cette valeur à la largeur d'une ouverture de porte d'environ 1,30 m. Conclure.
- ② Estimer la longueur d'onde de de Broglie pour un électron de masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ dans un faisceau où il se déplace à 10^5 m.s^{-1} . Peut-on utiliser ce faisceau d'électrons pour réaliser la diffraction sur un réseau cristallin où la distance interatomique est d'environ 1 Å (Å se lit Angström) ? $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$.

3 Comparaison de différentes cellules photoélectriques ★★

→ corrigé p. 102

Dans le tableau ci-dessous, on référence le travail d'extraction $h\nu_s$ pour différents matériaux.

- ① Déterminer la fréquence seuil ν_s et la longueur d'onde seuil λ_s pour chacun de ces métaux. Identifier le type du rayonnement lumineux monochromatique éclairant la cathode de la cellule photoélectrique, qui permet d'extraire des électrons appartenant à ces métaux.

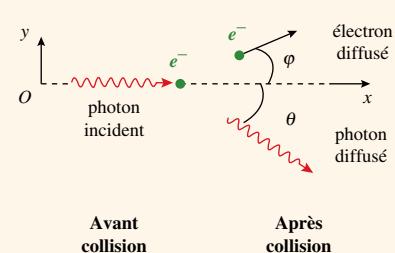
Matériau	Césium (Cs)	Rubidium (Rb)	Potassium (K)	Sodium (Na)	Lithium (Li)	Zinc (Zn)	Cuivre (Cu)	Platine (Pt)
$h\nu_s$ (eV)	1,94	2,13	2,25	2,28	2,46	3,31	4,48	5,36

- ② Sera-t-il possible d'utiliser le rayonnement lumineux seuil du césium pour extraire des électrons appartenant à une cathode de potassium ?
- ③ Exprimer, puis calculer la vitesse des électrons émis par la cathode pour une cathode de césium, lorsque qu'on l'éclaire avec un faisceau lumineux de longueur d'onde 600 nm.

4 Effet Compton ★★★

→ corrigé p. 103

Arthur H. Compton (1892-1962) découvrit qu'un rayonnement (X ou gamma) incident pouvait être diffusé par la matière (en fait par les électrons) et perdre de l'énergie, c'est-à-dire émerger avec une longueur d'onde plus grande. Pour expliquer cette observation, considérons qu'un photon de fréquence ν entre en collision avec un électron au repos de masse m_e , on note (Ox) la direction du photon incident. Suite à la collision, un photon (photon diffusé) de fréquence ν' est alors émis dans une direction qui forme un angle θ avec (Ox) et l'électron acquiert une vitesse et donc une quantité de mouvement \overrightarrow{p}_e qui forment un angle φ avec (Ox) (électron diffusé).



Avant collision

Après collision

- ① Exprimer l'énergie et la quantité de mouvement d'un photon en fonction de sa fréquence.
- ② À l'aide de la conservation (classique) de l'énergie et en supposant que la vitesse initiale de l'électron est négligeable devant celle du photon (électron au repos) établir une relation entre les fréquences des photons et la quantité de mouvement de l'électron diffusé.
- ③ Lors d'une collision, la quantité de mouvement (vectorielle) se conserve. En utilisant cette loi, établir deux relations entre v , v' , p , θ et ϕ .
- ④ En supposant $\delta v \ll v$ et en utilisant les équations obtenues précédemment, montrer que l'on a :

$$\delta v = v' - v \approx v^2 \frac{h}{m_e c^2} (\cos \theta - 1)$$

- ⑤ Justifier l'observation de Compton. Quel doit être l'angle θ du photon diffusé, pour que la vitesse de l'électron soit maximale ?

5 Particule confinée dans un puits rectangulaire infini ★★★

→ corrigé p. 105

L'un des systèmes les plus simples à étudier en mécanique quantique est le confinement d'une particule dans un puits rectangulaire infini. On se limite à l'étude des états stationnaires.

On considère une particule de masse m , décrite par sa fonction d'onde $\psi(x)$. Cette particule, libre de se mouvoir, est confinée dans un puits rectangulaire restreint à une dimension, $0 < x < a$ et où les murs sont infranchissables. Cette situation est représentée par une énergie potentielle $E_p(x)$, qui est nulle à l'intérieur du puits mais qui est infinie à l'extérieur. Soit :

$$E_p(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ +\infty & x < 0 \text{ ou } x > a \end{cases}$$

Dans le puits, l'énergie E se réduit donc à l'énergie cinétique. Dans ce cas on montre que l'équation de Schrödinger vérifiée par la fonction d'onde est la suivante :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E \psi(x)$$

- ① Préciser les conditions aux limites.
- ② Écrire l'équation différentielle en fonction du nombre d'onde $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Résoudre en donnant la forme générale des solutions et montrer que k ne peut prendre que certaines valeurs discrètes.
- ③ En déduire l'expression générale de l'énergie de la particule, puis celle des quatre premiers états quantiques.
- ④ En utilisant la normalisation de la fonction d'onde, déterminer complètement la fonction d'onde $\psi_n(x)$.
- ⑤ Tracer la fonction d'onde et la probabilité de présence de la particule dans le puits, pour les quatre premiers états d'énergie.

1 Émission de photons

→ énoncé p. 100

- 1 L'énergie d'un seul photon de fréquence ν , émis par un LASER à hélium-néon, est donnée par la relation de Planck-Einstein :

$$E_\gamma = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

A.N. : $E_\gamma = 3,14 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,96 \text{ eV}$

En mécanique quantique les énergies sont tellement faibles qu'il est toujours préférable que l'unité soit en electronvolt.

Le nombre de photons N_γ émis par ce LASER pendant une seconde, dépend de l'énergie E_{LASER} du LASER pendant la même durée $t = 1 \text{ s}$:

$$N_\gamma = \frac{E_{LASER}}{E_\gamma} = \frac{P_{LASER} \cdot t}{E_\gamma} = 1,7 \cdot 10^{18} \text{ photons}$$

- 2 Augmenter la puissance du LASER de 100 mW, influence directement l'énergie d'émission de ce dernier au cours du temps. Un laser de 600 mW émet $2 \cdot 10^{18}$ photons par seconde.

Bien comprendre

Le fait d'augmenter la puissance du LASER n'influence en aucun cas la fréquence et donc l'énergie d'un photon individuellement. On augmente seulement le nombre de photons émis par le LASER.

2 Longueur d'onde de de Broglie

→ énoncé p. 100

- 1 Lorsqu'une personne de masse $m = 75 \text{ kg}$ marche à une vitesse de $V = 4 \text{ km.h}^{-1} = 1,1 \text{ m.s}^{-1}$, elle possède une quantité de mouvement : $p = mV = 83 \text{ kg.m.s}^{-1}$

D'après la relation de de Broglie, la longueur d'onde de matière associée vaut : $\lambda = \frac{\hbar}{p} = 7,9 \cdot 10^{-36} \text{ m}$

Ainsi la longueur d'onde associée est extrêmement faible par rapport à la largeur d'ouverture de la porte de 1,30 m. Cela implique que tout comportement ondulatoire comme la diffraction est impossible à mettre en évidence pour des systèmes à ces échelles ! Notre quotidien est classique et non quantique.

- 2 La quantité de mouvement d'un électron de vitesse de $v_e = 10^5 \text{ m.s}^{-1}$, vaut : $p_e = m_e v_e = 9,1 \cdot 10^{-26} \text{ kg.m.s}^{-1}$

D'après la relation de de Broglie la longueur d'onde de matière associée vaut : $\lambda = \frac{\hbar}{p_e} = 7,3 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

Cette valeur est de l'ordre de grandeur de la distance interatomique 10^{-10} m . On peut donc aisément réaliser de la diffraction d'électrons sur un réseau cristallin avec ce faisceau.

Bien comprendre

Les phénomènes quantiques apparaissent lorsque les distances mises en jeu sont de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie, autrement dit pour des objets de dimensions inférieures à celles de l'atome.

3 Comparaison de différentes cellules photoélectriques

→ énoncé p. 100

- 1 Pour le césum le travail d'extraction (énergie nécessaire pour arracher l'électron au métal) vaut :

$$W_{ext} = 1,94 \text{ eV} = 3,11 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

D'où :

$$\nu_s = \frac{W_{ext}}{\hbar} = 4,68 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Soit la longueur d'onde seuil correspondante :

$$\lambda_s = \frac{c}{\nu_s} = 641 \text{ nm}$$

Ce rayonnement appartient au domaine du visible et correspond à une lumière orange.

Dans le tableau ci-dessous est récapitulé le travail d'extraction $W_{ext} = h\nu_s$, la fréquence seuil ν_s , la longueur d'onde seuil λ_s et la couleur d'émission monochromatique du faisceau pour chaque métal.

Matériau	Césium (Cs)	Rubidium (Rb)	Potassium (K)	Sodium (Na)	Lithium (Li)	Zinc (Zn)	Cuivre (Cu)	Platine (Pt)
$h\nu_s$ (eV)	1,94	2,13	2,25	2,28	2,46	3,31	4,48	5,36
ν_s (10^{14} Hz)	4,68	5,14	5,43	5,50	5,94	7,99	10,8	12,9
λ_s (nm)	641	584	553	545	505	376	277	232
Couleur	Orange	Jaune	Vert	Vert	Vert	UV	UV	UV

- ② La fréquence seuil correspond à des photons possédant l'énergie juste nécessaire pour arracher les électrons, c'est-à-dire d'énergie égale au travail d'extraction. Pour qu'un électron soit extrait de la cathode, il faut $\nu > \nu_s$ donc $\lambda < \lambda_s$. D'après le tableau, on a $\lambda_{s,cesium} = 641 \text{ nm} > \lambda_{s,potassium} = 553 \text{ nm}$. On ne peut pas obtenir d'effet photoélectrique avec le potassium en restant à la fréquence seuil de cézium, il faut diminuer la longueur d'onde (augmenter la fréquence) afin d'obtenir des photons suffisamment énergétiques pour arracher les électrons du potassium.
- ③ En plaçant l'origine de l'énergie potentielle électrique au niveau de la cathode, l'énergie mécanique de l'électron à l'extraction est égale à l'énergie cinétique, $E = \frac{1}{2}m_e v_e^2$, où v_e est la vitesse de l'électron au moment de son émission. Cette énergie correspond à la différence entre l'énergie du photon qui interagit avec l'électron émis sur la cathode et le travail d'extraction du matériau :

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 = h(\nu - \nu_s) \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2h(\nu - \nu_s)}{m_e}} = \sqrt{\frac{2hc}{m_e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_s} \right)} = 2,16 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

4 Effet Compton

→ énoncé p. 100

- ① D'après la relation de Planck-Einstein, l'énergie d'un photon est fonction de la fréquence ν du rayonnement auquel il appartient : $E = h\nu$.

La relation de de Broglie permet d'exprimer sa quantité de mouvement :

$$p = \frac{h\nu}{\lambda} \quad \text{où } c \text{ est la célérité de la lumière} \quad \text{Soit : } \vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{u}$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire dans la direction de propagation du rayonnement.

- ② En utilisant la conservation de l'énergie avant et après la collision :

$$E_{\text{photon incident}} + E_{\text{électron repos}} = E_{\text{photon diffusé}} + E_{\text{électron diffusé}}$$

Avant la collision l'électron est au repos, ce qui signifie que son énergie est nulle (pas d'énergie potentielle ici). Après la collision il est diffusé et possède une énergie cinétique égale à :

$$E_c = \frac{m_e v_e^2}{2} = \frac{p_e^2}{2m_e}.$$

En utilisant la relation de Planck-Einstein, nous pouvons en déduire la première équation :

$$h\nu = h\nu' + \frac{p_e^2}{2m_e} \tag{1}$$

- ③ En utilisant la conservation de la quantité de mouvement avant et après le choc :

$$\vec{p}_{\text{photon incident}} + \vec{p}_{\text{électron repos}} = \vec{p}_{\text{photon diffusé}} + \vec{p}_{\text{électron diffusé}} \quad \text{Attention cette loi est vectorielle !}$$

Sachant qu'initialement l'électron est immobile, sa vitesse initiale et donc également sa quantité de mouvement sont nulles avant le choc, la relation précédente s'écrit : $\frac{h\nu}{c}\vec{u}_{incident} + \vec{0} = \frac{h\nu'}{c}\vec{u}_{diffusé} + \vec{p}_e$

Relation vectorielle équivalente par projection au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos\theta + p_e \cos\varphi \\ 0 = -\frac{h\nu'}{c} \sin\theta + p_e \sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_e \cos\varphi = \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c} \cos\theta \\ p_e \sin\varphi = \frac{h\nu'}{c} \sin\theta \end{cases} \quad (2)$$

(3)

- ❸ En élevant au carré les équations (2) et (3) et en les additionnant, on obtient l'équation suivante :

$$p_e^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \left(\frac{h}{c}\right)^2 (v^2 + v'^2 - 2vv' \cos\theta)$$

Soit : $p_e^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2 (v^2 + v'^2 - 2vv' \cos\theta)$

En utilisant (1) : $2m_e h(v - v') = \left(\frac{h}{c}\right)^2 (v^2 + v'^2 - 2vv' \cos\theta)$

En remarquant que $v^2 + v'^2 = (v' - v)^2 + 2vv'$ l'équation précédente devient :

$$2m_e h(v - v') = \left(\frac{h}{c}\right)^2 ((v - v')^2 + 2vv'(1 - \cos\theta))$$

Or la différence entre les fréquences v et v' est faible devant v et donc devant v' :

$$v - v' \ll v \quad \text{et} \quad v - v' \ll v' \quad \text{donc} \quad (v - v')^2 \ll v'$$

En utilisant cette approximation dans l'équation précédente, on obtient :

$$\delta v = v' - v \approx -\frac{h}{m_e c^2} v^2 (1 - \cos\theta) = \frac{h}{m_e c^2} v^2 (\cos\theta - 1)$$

- ❹ L'angle θ variant de 0 à π , δv est nécessairement négatif, la fréquence du photon diffusé est inférieure à celle du photon incident, ce qui est cohérent avec l'observation d'une longueur d'onde diffusée supérieure. C'est cette expérience qui convainquit définitivement les physiciens de la nature dualiste de la lumière (en confirmant les travaux de Planck et Einstein) et Compton obtint le prix Nobel (1927) pour ses expériences et son interprétation de l'effet qui porta ensuite son nom.

Lorsque la vitesse de l'électron est à son maximum, cela implique que sa quantité de mouvement, $p_e = m_e v_e$ l'est aussi. Or dans les calculs précédents, nous avons obtenu l'équation suivante :

$$p_e^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2 (v^2 + v'^2 - 2vv' \cos\theta) \quad \text{d'où :} \quad p_e = \left(\frac{h}{c}\right) \sqrt{(v^2 + v'^2 - 2vv' \cos\theta)}$$

p_e est maximum lorsque $\cos\theta = -1$ donc $\theta = \pi$ rad. Ainsi l'électron possède une vitesse maximale lorsque le photon est rétrodiffusé ($\theta = 180^\circ$), c'est aussi dans ce cas évidemment que la variation de fréquence est la plus grande, puisque l'électron récupère un maximum d'énergie.

5 Particule confinée dans un puits rectangulaire infini

→ énoncé p. 101

- 1 La fonction d'onde $\psi(x)$ doit être continue, or elle s'annule nécessairement à l'extérieur du puits (domaine inaccessible pour la particule) donc :

$$\psi(x=0)=0 \quad \text{et} \quad \psi(x=a)=0$$

- 2 La particule est libre de se déplacer dans le puits, mais elle est dans l'impossibilité de se mouvoir à l'extérieur du puits. Seule la solution de l'équation de Schrödinger dans l'intervalle d'espace où l'énergie potentielle est nulle est pertinente. Soit une fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = E\psi(x)$$

Le système évolue dans une seule direction de l'espace, la dérivée partielle $\partial^2 / \partial x^2$ devient une simple dérivée seconde d^2 / dx^2 . En utilisant $k=\sqrt{2mE}/\hbar$, l'équation de Schrödinger devient⁴ :

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0$$

Cette équation différentielle du second ordre à coefficients constants admet pour solution :

$$\psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

où A et B sont des constantes d'intégration définies par les conditions aux limites :

$$\psi(x=0)=A=0 \quad \text{et} \quad \psi(x=a)=B \sin(ka)=0$$

Soit, puisque B est non nul pour une solution non triviale, les valeurs de k doivent être de la forme :

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

Cette équation dépend de a , la largeur du confinement du puits et d'un coefficient de quantification $n \in \mathbb{N}^*$ qui suppose l'apparition de différents états distincts, c'est-à-dire que k ne peut prendre que certaines valeurs discrètes. Par exemple, $k_1 = \pi/a$, $k_2 = 2\pi/a$, etc. La fonction d'onde $\psi_n(x)$ générale s'écrit donc :

$$\boxed{\psi_n(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$$

Bien comprendre

L'équation différentielle est identique à celle de l'oscillateur harmonique (*voir chapitre 2 p. 18*). Dans le cas de l'oscillateur la variable est le temps t , et les constantes d'intégration sont donc obtenues par les conditions initiales. Ici la variable est spatiale x (attention à ne pas mettre machinalement t dans l'expression en \sin et \cos de la solution !) et les constantes d'intégration s'obtiennent donc à l'aide des conditions aux limites.

- 3 En remplaçant le nombre d'onde k par son expression, on obtient l'expression de l'énergie :

$$k_n = \frac{n\pi}{a} = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar} \quad \Rightarrow \quad E_n = \frac{1}{2m} \left(\frac{n\pi\hbar}{a} \right)^2$$

L'énergie est donc également quantifiée par n . Seules certaines valeurs d'énergies sont permises. Ces valeurs d'énergies sont appelées valeurs propres. Cette dépendance montre que, plus le nombre quantique est élevé, plus l'énergie du système le sera aussi, soit pour les quatre premiers états quantiques :

$$E_1 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi\hbar}{a} \right)^2 < E_2 = \frac{2}{m} \left(\frac{\pi\hbar}{a} \right)^2 < E_3 = \frac{9}{2m} \left(\frac{\pi\hbar}{a} \right)^2 < E_4 = \frac{8}{m} \left(\frac{\pi\hbar}{a} \right)^2$$

4. Qui se retrouve aisément en utilisant : $k = 2\pi/\lambda$; $p = h/\lambda = m\upsilon$; $E = mv^2/2$

- 4) La densité de probabilité de trouver la particule dans ce confinement est donnée par le produit de la fonction d'onde $\psi_n(x)$ avec son complexe conjugué $\bar{\psi}_n(x)$. Etant donné que la probabilité de trouver la particule dans la boîte doit être égale à un, la somme des probabilités pour tout l'espace accessible doit être égal à un, ce que l'on appelle aussi la normalisation. La condition de normalisation est alors :

$$\int_0^a \psi_n(x) \bar{\psi}_n(x) dx = \int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = 1 \quad \Rightarrow \quad B^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = 1$$

En utilisant $2 \sin^2 x = 1 - \cos(2x)$, l'équation précédente devient :

$$\frac{B^2}{2} \int_0^a \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right) dx = 1$$

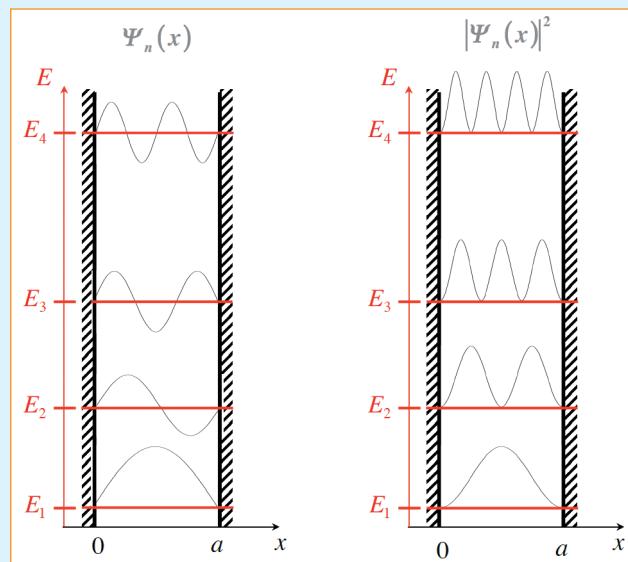
En intégrant par rapport à la variable x :

$$\frac{B^2}{2} \left[x - \frac{a}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) \right]_0^a = \frac{B^2 a}{2} = 1 \quad \text{Soit :} \quad B = \pm \sqrt{\frac{2}{a}}$$

Le signe de B est sans importance, car seul le carré de la fonction d'onde a un sens physique. D'où :

$$\boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$$

- 5) Une représentation graphique des concepts de fonction d'onde $\psi_n(x)$ et de probabilité de présence d'une particule confinée dans un puits rectangulaire infini $|\psi_n(x)|^2$, sont visibles dans la figure ci-contre. Les premiers niveaux d'énergie sont représentés par E_1 , E_2 , E_3 et E_4 . (Attention, les axes ne sont pas tracés pour la fonction d'onde et son module au carré, mais la première est symétrique autour de l'axe des abscisses, tandis que la seconde est toujours positive.)



Bien comprendre

Cet exemple permet d'illustrer un des fondamentaux de la mécanique quantique, en décrivant les amplitudes de probabilités et les fonctions d'onde $\psi_n(x)$ qui sont autorisées. Ainsi dans son état fondamental, c'est-à-dire, l'état le plus bas en énergie E_1 , la particule a une forte probabilité de se trouver au centre du puits. Son énergie est nécessairement non nulle.

À méditer

En fait, plus ce qu'il trouve le surprend, plus le physicien est content.

RICHARD FEYNMAN (1918-1988)

Circuits électriques dans l'ARQS

L'électrocinétique est l'étude des circuits parcourus par des courants électriques, c'est-à-dire des déplacements de particules chargées dans les milieux matériels. Son étude revêt une importance considérable dans la mesure où quasiment tous les appareils du quotidien et, bien au-delà, la plupart des dispositifs industriels, fonctionnent à l'énergie électrique. On rencontre également des phénomènes électriques en biologie dans les échanges cellulaires (neurones, fibres musculaires...).

I | Intensité du courant électrique

1. Charges électriques dans la matière

Définitions

- La matière est constituée d'atomes, de molécules ou d'ions. Un **atome** est composé d'un noyau chargé positivement et d'électrons, portant chacun la charge $-e$ ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, la charge élémentaire).
 - L'unité de la charge électrique est le **Coulomb** (symbole C).
 - Un atome est électriquement neutre mais peut gagner ou perdre des électrons pour former un **ion**. Un ion chargé positivement est un **cation** ; s'il est chargé négativement, c'est un **anion**.
 - Les **porteurs de charge** dans la matière sont donc les électrons et les ions.
- À l'échelle microscopique, les échanges de charge se font de manière quantifiée (des multiples¹ de e). À l'échelle macroscopique cependant ces variations paraissent continues.

2. Origine du courant électrique

Dans la matière, certaines particules chargées sont fixes et d'autres libres de se déplacer. Même si l'ensemble reste globalement neutre, le déplacement des charges génère des courants électriques. Dans les métaux, chaque atome libère un à deux électrons, qui sont libres de circuler dans l'ensemble de la structure (électrons libres). Dans les solutions aqueuses, les porteurs de charge sont les ions (pas d'électrons libres en solution) qui sont libres de se déplacer dans tout le volume du liquide. En général les gaz ne possèdent pas de charges libres mais, dans certaines conditions (élévation de la température, excitation électrique), ils peuvent s'ioniser partiellement, voire totalement, on les appelle alors des **plasmas** dans lesquels des ions (cations) et des électrons sont libres de se déplacer dans tout le volume offert au gaz.

Définitions

- Un **conducteur** est un corps dans lequel des porteurs de charge peuvent se déplacer librement.
 - Un **isolant** est un corps dans lequel il n'y a pas de charges libres.
 - Le **courant électrique** est un déplacement d'ensemble des charges libres dû à une excitation extérieure.
- Dans la matière, en raison de l'agitation thermique, les porteurs de charges sont animés d'un mouvement désordonné dont la vitesse dépend de la température (*voir chapitre 19 p. 346*). En l'absence d'excitation extérieure, le mouvement des particules reste aléatoire et la vitesse moyenne des porteurs de charge est nulle : il n'y a alors pas de courant électrique. Le courant est un mouvement d'ensemble, dans lequel la vitesse moyenne des porteurs de charge n'est pas nulle.

1. Les quarks, particules élémentaires composant les protons et neutrons, portent des charges fractions de e mais n'existent pas à l'état libre.

- Seuls les porteurs de charge mobiles peuvent se déplacer et participer au courant électrique suite à l'excitation que leur impose un champ électrique (*voir chapitre 15 p. 277*).
- Les charges positives et les charges négatives se déplacent en sens opposé, puisque la force électrique est proportionnelle à la charge, mais du point de vue du courant, les effets de ces deux mouvements ne se compensent pas mais s'ajoutent.

Définition

Le sens conventionnel du courant est le sens dans lequel se déplacent (ou se déplaceraient) les charges positives. Les charges négatives se déplacent en sens contraire.

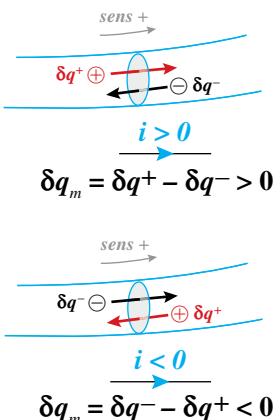
POINT MÉTHODE

Choisir un sens et une notation du courant

- Dans un exercice, on ne connaît pas à l'avance le **sens du courant**. On choisit alors arbitrairement un sens positif pour le courant. Si le courant circule effectivement dans le sens choisi, le calcul donnera un courant positif, s'il circule en sens contraire, il sera négatif. Notons que ce genre de choix est indispensable pour le courant alternatif, on ne saurait changer le sens de la représentation chaque fois que le sens réel du courant s'inverse !
- D'une façon assez générale, on note en majuscule les **grandes stationnaires** (indépendantes du temps) et en minuscule les grandes qui varient dans le temps (sauf le potentiel). On verra dans l'étude des régimes transitoires que les grandes électriques ne sont pas nécessairement stationnaires, même dans un circuit alimenté par un générateur continu. Tout ce qui suit est valable pour des **grandes variables**, même si on traitera surtout dans ce chapitre des situations stationnaires.

3. Intensité du courant électrique

Dans une portion de conducteur parcourue par un courant, des charges positives et négatives sont susceptibles de se déplacer. On s'intéresse au débit de charge, c'est-à-dire à la quantité de charge qui traverse une section du conducteur par unité de temps. Compte tenu de l'algébrisation, cette quantité s'obtient en additionnant les charges (avec leur signe) qui se déplacent dans le sens conventionnel choisi et on soustrait (en gardant leur signe) celles qui traversent dans l'autre sens. La quantité de charge qui traverse la section est donc algébrique, en cohérence avec l'algébrisation du courant. On voit que le déplacement des charges négatives est équivalent à celui de charges positives identiques, qui iraient en sens contraire. On confirme donc ici que les contributions des charges de signes opposés s'ajoutent et ne se compensent pas.



Définition

L'intensité du courant électrique est définie en un point du circuit par la quantité algébrique de charge par unité de temps qui traverse une section du conducteur dans le sens conventionnel, c'est donc un débit de charge :

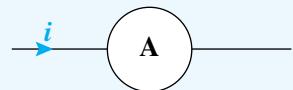
$$i = \frac{\delta q_m}{dt}$$

où δq_m est la quantité algébrique de charge qui traverse la section du circuit pendant un temps élémentaire dt . L'intensité du courant électrique s'exprime en Ampère (A).

- Si le courant est stationnaire, en notant Q_m la charge qui traverse une section du conducteur pendant un intervalle de temps Δt , l'intensité du courant électrique est : $I = \frac{Q_m}{\Delta t}$
- Par abus de langage on emploie le plus souvent le terme de courant pour signifier intensité.
- Quelques ordres de grandeur de l'intensité :
 - ↳ en TP, dans les ordinateurs ou les téléphones portables : quelques dizaines ou centaines de mA ;
 - ↳ fusibles domestiques : 10 A, 16 A ou 32 A ;
 - ↳ alimentation du TGV : 500 A ;
 - ↳ la foudre : des milliers d'Ampère.

Propriétés

- L'intensité traverse le circuit, elle est donc représentée par une flèche sur le circuit.
- On mesure l'intensité avec un **ampèremètre** qui doit être traversé par le courant et donc être placé en série.



4. Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

Quand on allume un générateur de signaux électriques dans un circuit, l'information ne parvient pas instantanément à tous les composants du circuit électrique. On admettra que cette information est une onde électromagnétique et qu'elle se propage à la vitesse de la lumière c . Le temps t mis pour se propager entre deux points du circuit, distants de L , vérifie donc : $L = ct$.

Définition

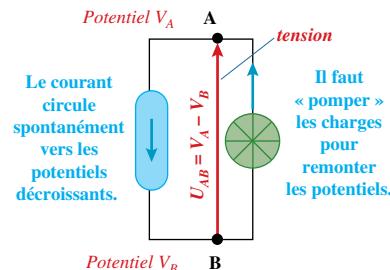
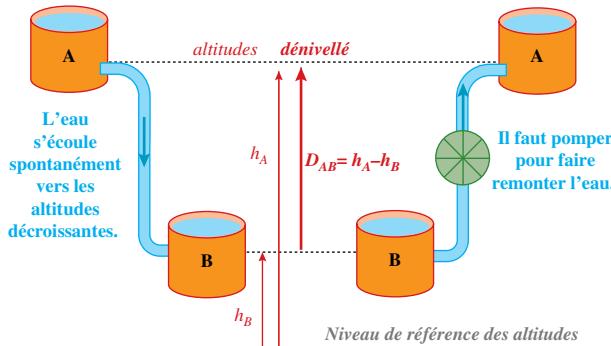
L'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) est vérifiée si le temps de propagation de l'information électrique dans tout le circuit est négligeable devant le temps caractéristique de variation du signal c'est-à-dire sa période T . Autrement dit si les dimensions du circuit L sont suffisamment petites et vérifient : $L \ll cT$ ou $f \ll \frac{c}{L}$ avec c = vitesse de la lumière f = fréquence du courant

- Pour des dimensions de l'ordre de celles des circuits de TP, ($L \approx 1$ m), il suffit que $f \ll 3.10^8$ Hz, soit encore $f \ll 300$ MHz. Sauf mention contraire, l'ARQS sera donc toujours vérifiée en cours et en TP d'électricité.
- Pour le courant du secteur ($f = 50$ Hz, $T = 20$ ms) la longueur de circuit doit vérifier $L \ll 6000$ km. Sur le réseau EDF, l'ARQS n'est pas vérifiée sur les grandes distances, mais reste valide dans une installation locale.

II | Tension électrique

1. Notion de potentiel électrique, tension électrique

Considérons une analogie hydraulique : dans une conduite d'eau horizontale entre deux récipients l'eau ne s'écoulera pas, tandis qu'un courant d'eau apparaîtra si on suréleve un des récipients par rapport à l'autre (vers le plus bas). Le récipient surélevé va finir par se vider et le courant d'eau cessera. Pour entretenir le mouvement de l'eau, une pompe doit remonter l'eau dans le récipient surélevé. C'est la différence d'altitude entre les deux récipients qui permet la circulation du courant. Les deux sens ne sont pas équivalents, le courant d'eau ne se produit spontanément que vers le bas.



De même qu'en hydraulique, on définit l'altitude d'un point de la canalisation, on définit l'état électrique d'un point du circuit par le potentiel électrique V . Si le potentiel décroît entre deux points, le courant circule spontanément. Pour que le courant remonte les potentiels, il faut « pomper » les charges à l'aide d'un générateur. L'équivalent électrique du dénivelé en hydraulique est la tension.

Définitions

La **tension électrique** u_{AB} entre deux points A et B du circuit est la **différence de potentiel** (ddp) entre ces points :

$$u_{AB} = V_A - V_B$$

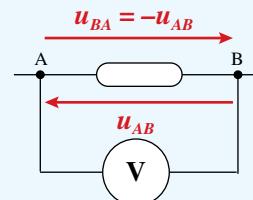
L'unité des tensions électriques, comme des potentiels, est le **Volt**, de symbole V.

- Quelques ordres de grandeur de tension électrique :

- ➡ en TP, dans les ordinateurs ou les téléphones portables : du mV à quelques V ;
- ➡ le courant du secteur pour les habitations à usage domestique délivre une tension de 230 V ;
- ➡ les lignes à haute tension sont à plusieurs dizaines de milliers de Volts, voire plusieurs centaines de milliers pour les lignes à très haute tension.

Propriétés

- La tension est algébrique : $u_{BA} = V_B - V_A = -u_{AB}$.
- La tension u_{AB} est une différence de potentiel entre deux points, elle est donc représentée dans les circuits électriques par une flèche en dehors du circuit, allant du point B vers le point A.
- On mesure la tension électrique entre deux points avec un voltmètre, qui doit donc être connecté entre ces deux points, c'est-à-dire en parallèle.



2. Référence du potentiel électrique

Dans l'analogie hydraulique, il faut définir une référence pour l'altitude zéro : niveau de la mer, sol... Ce choix n'a aucune influence sur les valeurs des dénivellés. De même, on doit définir une référence des potentiels, qui n'aura pas d'influence sur la valeur des tensions.

Définition

L'origine des potentiels est appelée **masse du circuit**. Elle est choisie arbitrairement, elle est représentée par l'un des symboles ci-contre.

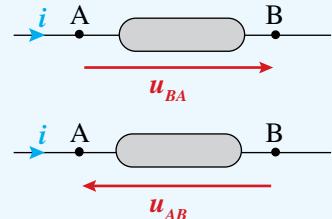


- La masse des appareils est généralement reliée à la terre par mesure de sécurité.

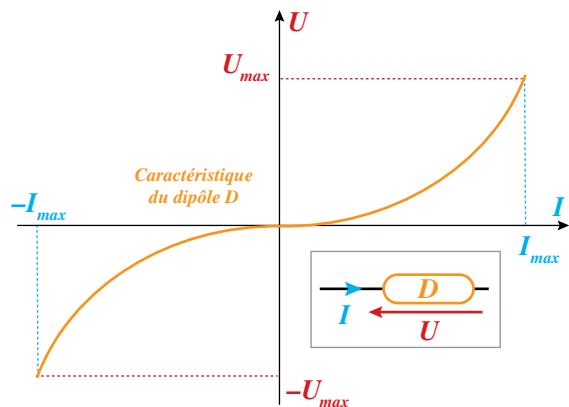
3. Convention de représentation et caractéristiques d'un dipôle

Définitions

- On appelle **dipôle** tout composant électrique relié à l'extérieur en 2 points seulement, appelés **bornes du dipôle**.
- Un dipôle est décrit en **convention générateur**, lorsqu'on représente la tension à ses bornes et l'intensité qui le parcourt par des flèches de même sens.
- Un dipôle est décrit en **convention récepteur**, lorsqu'on représente la tension à ses bornes et l'intensité qui le parcourt par des flèches de sens contraire.
- On appelle **caractéristique tension-courant** d'un dipôle la courbe donnant la tension à ses bornes en fonction de l'intensité qui le parcourt. La **caractéristique courant-tension** est la courbe inverse.



La caractéristique s'accompagne nécessairement d'un schéma (en encadré sous la courbe) qui définit les grandeurs électriques utilisées et la convention choisie. La caractéristique permet de comprendre le comportement du dipôle selon les contraintes qui lui sont appliquées, entre autres de prévoir s'il pourra être utilisé dans un circuit sans être endommagé par une tension ou une intensité trop forte par exemple (valeurs notées *max* ci-contre). Certains dipôles sont décrits par des lois mathématiques (loi d'Ohm par exemple), mais, pour la plupart, la caractéristique a une forme qui ne s'appuie pas sur une fonction mathématique simple. Par ailleurs certaines valeurs spécifiques sont très variables d'un composant à l'autre, même s'ils sont de même nature (tension seuil d'une diode par exemple), d'où l'intérêt des caractéristiques.



POINT MÉTHODE

Schématiser les circuits électriques

- La solution d'un exercice d'électricité comporte nécessairement un schéma. Il permet de préciser les **sens algébriques** choisis pour les grandeurs et les **conventions adoptées**. On peut choisir un sens ou l'autre, une convention ou l'autre, simplement les expressions des grandeurs et les calculs, en particulier les signes dans les lois de Kirchhoff établies plus loin, doivent être en cohérence avec ce qui a été choisi.
- Le schéma permet par ailleurs, de **nommer les grandeurs littérales**, c'est-à-dire les différentes tensions et intensités dans le circuit. Il conviendra de les indiquer correctement et ainsi éviter que toutes les tensions s'appellent *U* et toutes les intensités *I*, ce qui conduit à écrire des absurdités.
- Le schéma doit être lisible rapidement et doit aider à **visualiser le problème**. Il est par exemple efficace de toujours représenter les grandeurs du même type par des couleurs identiques (en particulier ne pas mettre les tensions de la même couleur que les fils, car c'est une source d'erreurs dans l'étude des circuits plus complexes). Dans ce cours, les tensions sont en rouge et les intensités en bleu et le nom de la grandeur figure systématiquement à côté de la flèche.

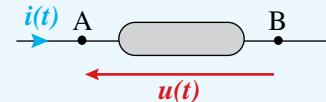
III Puissance et énergie

1. Puissance

Définition

La **puissance électrique instantanée reçue** par un dipôle dépend de la tension u à ses bornes et de l'intensité i qui le parcourt, définie en convention récepteur à l'instant t , par :

$$p(t) = u(t)i(t)$$



L'unité de la puissance est le Watt (symbole W).

- Les grandeurs électriques peuvent dépendre du temps (même en courant continu), la puissance est donc une puissance instantanée, prenant une valeur $p(t)$ à la date t . On pourra aussi définir la puissance moyenne.
- La puissance reçue est une quantité algébrique, positive si le dipôle reçoit effectivement de l'énergie, négative s'il en cède.
- Quelques ordres de grandeur :
 - ➡ un téléphone portable consomme environ 1 W ;
 - ➡ une ampoule électrique consomme quelques dizaines de W ;
 - ➡ un appareil électrique domestique consomme quelques centaines, voire quelques milliers de W ;
 - ➡ le TGV consomme 1 MW ;
 - ➡ une centrale nucléaire produit environ 1 GW.

2. Énergie

Définition

L'**énergie électrique δW** reçue par le dipôle pendant un intervalle de temps dt est : $\delta W = p(t)dt$

L'**énergie électrique W** reçue par le dipôle entre les dates t_1 et t_2 est : $W = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt$

- On sait que l'unité d'énergie est le Joule (J), mais EDF utilise pour facturer l'électricité fournie une autre unité le kilowatt.heure (kW.h). On a la relation : $1 \text{ kW.h} = 1000 \times 3\,600 = 3,6 \text{ MJ}$
- Si la puissance reçue p est constante, l'énergie reçue W par le dipôle entre les instants t_1 et t_2 est :

$$W = p(t_2 - t_1)$$

Définitions

■ Si $p(t) > 0$, le dipôle reçoit effectivement de l'énergie de la part du reste du circuit (milieu extérieur) : il se comporte comme un **récepteur**.

■ Si $p(t) < 0$, le dipôle cède de l'énergie au reste du circuit (milieu extérieur) : c'est un **générateur**.

- Un récepteur est donc tel qu'en convention récepteur u et i sont de même signe, tandis que pour un générateur c'est en convention générateur que u et i sont de même signe, ce qui explique le nom de la convention.
- Dans l'analogie hydraulique, le récepteur se laisse spontanément traverser par le courant (équivalent hydraulique du sens spontané de l'eau) et le générateur est l'équivalent de la pompe hydraulique.

IV Lois de Kirchhoff

1. Quelques définitions

Définitions

- Un **nœud** est un point de connexion électrique où sont raccordés au moins 3 fils.
- Une **branche** est une portion de circuit entre deux nœuds.
- Des composants sont **branchés en série** s'ils sont parcourus par le même courant, ils sont donc dans la même branche.
- Des composants sont **branchés en parallèle** (ou encore en dérivation) si la tension entre leurs bornes est la même, ils sont donc connectés entre les deux mêmes nœuds.
- On appelle **maille** une boucle fermée de branches.

On nomme parfois aussi « maille » une succession de tensions qui forment une boucle, même si certaines branches sont ouvertes.

2. Loi des nœuds

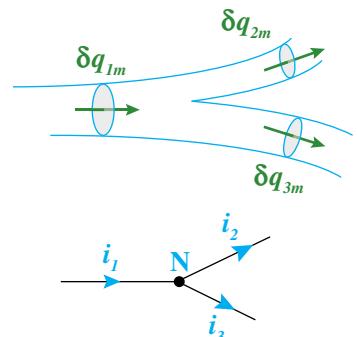
Soit un nœud N formant la connexion de 3 fils. Dans l'ARQS, toutes les charges libres se mettent en mouvement instantanément, par conséquent, il ne peut pas y avoir d'accumulation de charge en un point du circuit. Par ailleurs, la charge est une grandeur conservative. La quantité de charge qui arrive au nœud pendant le temps élémentaire dt , est donc égale à celle qui repart du nœud pendant le même temps :

$$\delta q_{1m} = \delta q_{2m} + \delta q_{3m} \quad \text{d'où :} \quad \frac{\delta q_{1m}}{dt} = \frac{\delta q_{2m}}{dt} + \frac{\delta q_{3m}}{dt}$$

Soit, d'après la définition de l'intensité :

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad \text{qui s'écrit aussi :} \quad i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

Ce résultat peut se généraliser à un nœud entre un nombre quelconque de branches.



Énoncé

Loi des nœuds : En un nœud N, point de connexion de n fils, la somme algébrique des courants arrivant au nœud est nulle :

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k i_k = 0 \quad \text{où } \varepsilon_k = +1 \text{ si le courant arrive au nœud et } \varepsilon_k = -1 \text{ si le courant repart du nœud.}$$

3. Loi des mailles

Soient 3 points A, B et C d'un circuit électrique. Entre les tensions, on peut écrire :

$$u_{AC} = V_A - V_C = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) = u_{AB} + u_{BC}$$

On appelle cette relation la **loi d'additivité des tensions** qu'on peut généraliser à un nombre quelconque de tensions successives : $u_{AB} = u_{AC} + u_{CD} + u_{DB}$

Si on applique le résultat précédent à une maille, alors la tension totale est nulle ($u_{AA} = 0$).

Énoncé

Loi des mailles : La somme algébrique des tensions sur une maille de n branches est nulle :

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k u_k = 0 \text{ où } \varepsilon_k = +1 \text{ si la tension est dans le sens de parcours de la maille et } \varepsilon_k = -1 \text{ sinon.}$$

- On choisit un sens (positif) de parcours de la maille par rapport auquel on détermine le signe de ε_k .

V | Les dipôles passifs les plus courants

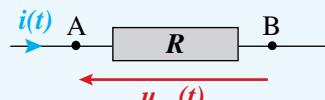
1. Conducteur ohmique

Définitions

- Un **conducteur ohmique** (ou **résistor**) est un dipôle dont la tension à ses bornes et l'intensité qui le parcourt sont proportionnelles. On le représente par un rectangle.

Il vérifie donc la **loi d'Ohm** qui en convention récepteur s'écrit :

$$u_{AB}(t) = R i(t)$$



où R est la **résistance** du dipôle exprimée en Ohm (symbole Ω)

- La **conductance** est l'inverse de la résistance : $G = \frac{1}{R}$. Elle s'exprime en Siemens (symbole S).

- Le résistor est souvent appelé résistance par abus de langage.
- Les valeurs de R en TP vont de quelques Ω à quelques centaines de $k\Omega$. La résistance interne d'un générateur est de 50Ω , celle d'un oscilloscope est supérieure à $10^6 \Omega$.
- Tous les points d'un fil de connexion sont au même potentiel (la tension à ses bornes est nulle), car sa résistance est généralement négligeable devant celle du reste du circuit.
- La loi d'Ohm est valable en régime continu, comme en régime variable.
- La caractéristique tension-courant d'un résistor est donc une droite linéaire de pente R .

→ Aspect énergétique

La puissance reçue par un résistor R est : $P(t) = u_{AB}(t)i(t) = R i^2(t)$

Le résistor est un dipôle récepteur, qui reçoit et donc consomme de l'énergie. Le résistor ne peut pas conserver cette énergie, elle est dissipée sous forme de chaleur, c'est l'**effet Joule**.

2. Condensateur parfait

Définitions

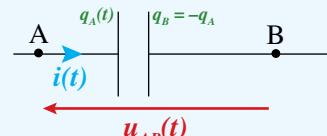
- Un **condensateur** est un dipôle formé de deux armatures conductrices en influence totale, séparées par un isolant. Le condensateur est symbolisé par deux traits parallèles et son état est caractérisé par la charge portée par l'une des armatures. L'influence totale signifie que l'autre armature porte nécessairement la charge opposée.

- La tension aux bornes du condensateur est proportionnelle à sa charge :

$$q_A(t) = C u_{AB}(t)$$

où C est la **capacité** du condensateur qui s'exprime en Farad (symbole F).

- L'intensité est le débit de charge sur l'armature correspondante, soit : $i(t) = \frac{dq_A}{dt}$



- Dans la définition de l'intensité du I.3., on considère la quantité algébrique de charge qui traverse une section, or cette quantité est celle qui vient s'accumuler (toujours algébriquement) sur le condensateur en faisant ainsi varier sa charge $q(t)$ d'une quantité identique, c'est pourquoi ici $\delta q_m = dq$ où dq est la variation de la charge $q(t)$ portée par l'armature du condensateur, pendant dt . Si q augmente, dq est positif et le courant est positif (circule réellement vers l'armature A), si q diminue, la variation est négative, une charge positive (réelle ou fictive) quitte l'armature et le courant est négatif.
- Quand le courant est nul, la charge ne varie pas, la tension aux bornes du condensateur reste constante. Si le courant est non nul, le condensateur se charge ou se décharge, sa tension varie.
- Un isolant ne permet pas le passage du courant, cependant le mouvement des charges venant se déposer sur les armatures ou quittant les armatures se traduit par un courant autour du condensateur. Avec un courant alternatif, ce mouvement s'inverse à chaque alternance du courant, qui peut ainsi exister dans le circuit malgré la présence d'un isolant.
- La capacité du condensateur exprime sa propension à stocker des charges : plus elle est grande plus la charge stockable est grande pour une tension imposée au condensateur donnée. 1 F est une très grande valeur, les capacités usuelles sont plutôt en μF , nF , pF .
- Un condensateur réel possède une résistance de fuite qui peut se symboliser comme une résistance en parallèle avec le condensateur idéal. En pratique elle est très grande et on en tiendra rarement compte.

Propriété

Les deux relations définissant le condensateur permettent d'écrire en **convention récepteur** :

$$i(t) = C \frac{du_{AB}}{dt}$$

En régime stationnaire, la tension est constante, donc le courant est nul et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

→ Aspect énergétique

En convention récepteur, la puissance reçue par un condensateur vaut :

$$P(t) = u_{AB}(t)i(t) = u_{AB} \cdot C \frac{du_{AB}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_{AB}^2 \right)$$

Propriétés

- La puissance reçue par le condensateur est : $P(t) = \frac{dE_e}{dt}$ avec $E_e = \frac{1}{2} C u_{AB}^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$
où E_e est l'énergie électromagnétique (de type electrostatique) emmagasinée dans le condensateur.
- L'énergie varie continument, donc la tension et la charge aux bornes d'un condensateur sont des grandeurs continues.

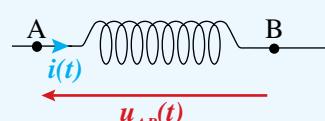
3. Bobine parfaite

Définition

Une **bobine** est un enroulement de spires conductrices qui s'oppose aux variations du courant, ce qui crée une tension à ses bornes qui vaut, en convention récepteur :

$$u_{AB}(t) = L \frac{di}{dt}$$

où L est l'**inductance** (ou **self**) de la bobine qui s'exprime en Henry (symbole H).



- La bobine ne s'oppose pas au courant, mais à ses variations. Si le courant tend à augmenter, la bobine crée une tension positive qui (compte tenu de la convention) tend à le faire diminuer et inversement.
- C'est le phénomène d'induction (*voir chapitre 26 p. 487*), qui explique le comportement de la bobine.
- On travaille en TP avec des inductances de l'ordre du mH.
- Une bobine réelle possède une résistance interne qui peut être de l'ordre de celles du circuit. On la placera en série avec une bobine idéale sur le schéma, ou on l'adjoindra à celle du circuit.

Propriété

En régime stationnaire, l'intensité est constante, donc la tension aux bornes de la bobine est nulle et la bobine se comporte comme un interrupteur fermé (ou un fil).

Aspect énergétique

En convention récepteur, la puissance reçue par une bobine vaut :

$$P(t) = u_{AB}(t)i(t) = L \frac{di}{dt} \cdot i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$$

Propriétés

- La puissance reçue par la bobine est : $P(t) = \frac{d\epsilon_m}{dt}$ avec $\epsilon_m = \frac{1}{2} L i^2$
où ϵ_m est l'énergie électromagnétique (de type magnétique) emmagasinée par la bobine.
- L'énergie varie continument, donc l'intensité qui traverse la bobine est une grandeur continue.

POINT MÉTHODE

Respecter la cohérence entre formule et schéma

- Les formules données pour les différents dipôles doivent être connues, mais surtout doivent être mémorisées avec le schéma correspondant. Dans un exercice, on peut être amené à des choix algébriques différents et on s'expose à des erreurs de signes si on applique sans réfléchir les relations. Par exemple en convention générateur, on n'a pas $u = Ri$ aux bornes du résistor, mais $u = -Ri$... C'est tout particulièrement important pour le condensateur pour lequel on définit trois grandeurs algébriques (i , q et u).

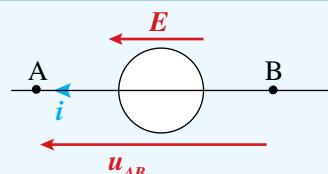
VI | Les dipôles actifs linéaires

1. Générateurs linéaires idéaux

Définition

Un **générateur de tension idéal** impose une tension constante à ses bornes, quelle que soit l'intensité qui le parcourt. Cette tension E est appelée **force électromotrice** ou **fém**.

$$u_{AB} = E = \text{constante} \quad \forall i$$

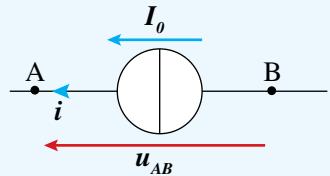


Le terme de fém est plutôt inapproprié, car, bien que la fém serve à forcer les charges à remonter les potentiels, ce n'est pas une force, mais une tension électrique.

Définition

Un **générateur de courant idéal** impose un courant d'intensité constante, quelle que soit la tension à ses bornes. Ce courant I_0 est appelé **courant électromoteur du générateur ou cém**.

$$i = I_0 = \text{constante} \quad \forall u_{AB}$$



- La représentation actuelle du générateur de courant est particulièrement inappropriée, car on y représente un courant comme une flèche de tension.
- Un générateur de tension idéal peut avoir une fém $e(t)$ variable et un générateur de courant un cém $i_0(t)$ variable, mais ces grandeurs demeureront indépendantes du circuit qu'ils alimentent. Cependant dans ce chapitre, on utilise plutôt des générateurs continus, d'où la notation en majuscule.

2. Générateurs linéaires non idéaux

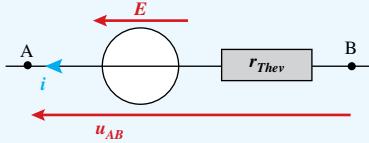
Définitions

■ Un **générateur de Thévenin** est un générateur de tension non idéal du fait de sa **résistance interne** $r_{Th\acute{e}v}$. La tension qu'il délivre diminue, quand l'intensité qu'il débite augmente :

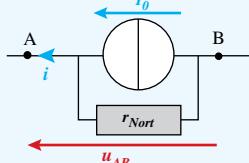
$$u_{AB} = E - r_{Th\acute{e}v} i$$

■ Un **générateur de Norton** est un générateur de courant non idéal du fait de sa **résistance interne** r_{Nort} . Le courant qu'il délivre diminue, quand la tension à ses bornes croît :

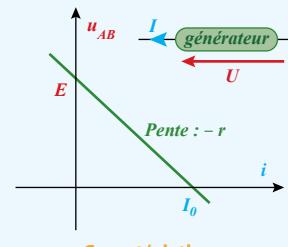
$$i = I_0 - \frac{u_{AB}}{r_{Nort}}$$



Générateur de Thévenin



Générateur de Norton



Caractéristique

- Les caractéristiques d'un générateur en convention générateur sont des droites affines de pente négative.
- Ces deux représentations d'un générateur sont équivalentes si : $r_{thev} = r_{nort} = r$ et $E = rI_0$

Deux dipôles sont équivalents si, pour une même tension à leurs bornes, ils sont parcourus par le même courant. On montre donc facilement les conditions pour que les deux représentations soient équivalentes en les écrivant symétriquement : $u_{AB} = E - r_{Th\acute{e}v} i$ et $u_{AB} = r_{Nort} I_0 - r_{Nort} i$

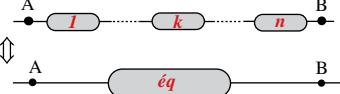
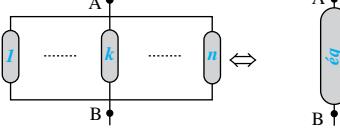
- Un générateur de Thévenin avec une résistance interne nulle est un générateur idéal de tension, un générateur de Norton avec une résistance interne nulle est un générateur idéal de courant.
- La résistance interne est généralement constante, mais il est usuel cependant de l'écrire en minuscule.
- La résistance d'entrée d'un GBF (Générateur Basse Fréquence) est de 50Ω , la résistance interne d'une pile de $1,5 \text{ V}$ de type R14 est de quelques Ω , celle d'une batterie de voiture, de quelques centièmes de Ω .
- Tout générateur réel peut se représenter au choix par un générateur de Thévenin ou un générateur de Norton.

V | Associations de dipôles

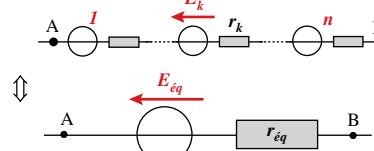
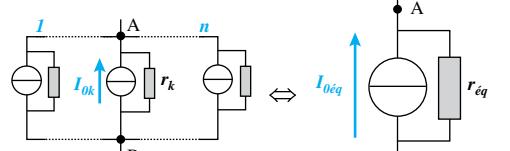
1. Dipôles équivalents

N. B. : Les démonstrations des résultats ci-dessous sont proposées dans l'exercice n° 5 p. 121.

→ Associations de dipôles passifs

Association de	Schéma association et équivalent	résistors	condensateurs	bobines
n dipôles de même nature en série	 \Leftrightarrow 	$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k$	$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$	$L_{eq} = \sum_{k=1}^n L_k$
n dipôles de même nature en parallèle	 \Leftrightarrow 	$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$	$C_{eq} = \sum_{k=1}^n C_k$	$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}$

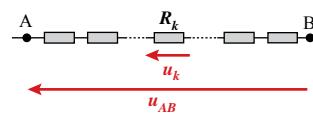
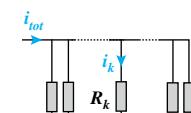
→ Associations de dipôles actifs

	n générateurs de Thévenin en série	n générateurs de Norton en parallèle
Schéma de l'association équivalent	 \Leftrightarrow 	 \Leftrightarrow 
relations	$r_{eq} = \sum_{k=1}^n r_k$ et $E_{eq} = \sum_{k=1}^n E_k$	$\frac{1}{r_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k}$ et $I_{0eq} = \sum_{k=1}^n I_{0k}$

- On associe uniquement des dipôles de même nature, tous en série (Thévenin) ou tous en parallèle (Norton). Il faudra donc remplacer les générateurs de Thévenin (resp. Norton) placés en parallèle (resp. en série) par leur équivalent Norton (resp. Thévenin) avant de les associer.

→ Tension et courant dans une association de résistors (divideurs)

Les résultats ci-dessous seront particulièrement utilisés dans les chapitres suivants, il faut non seulement les connaître, mais aussi savoir reconnaître les ponts diviseurs dans les schémas de circuit.

	Diviseur de tension	Diviseur de courant
Schéma	 <p>Attention : les résistors doivent être parcourus par le même courant.</p>	
Relations	$\frac{u_k}{u_{tot}} = \frac{R_k}{\sum R_k}$	$\frac{i_k}{i_{tot}} = \frac{1/R_k}{\sum 1/R_k}$

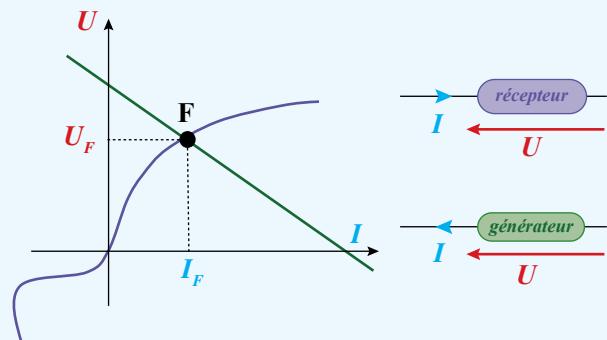
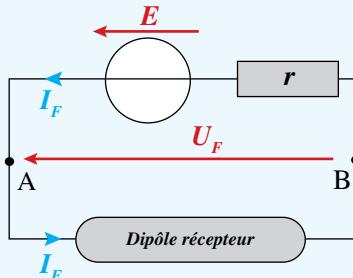
- Ces relations sont souvent présentées sur deux résistors uniquement, car c'est un cas fréquent, mais cela nuit à leur généralité.

2. Association d'un générateur linéaire et d'un dipôle passif

On réalise un circuit constitué d'un générateur et d'un dipôle récepteur. Le schéma de circuit montre qu'ils sont parcourus par la même intensité et que la même tension s'applique à leurs bornes, le générateur étant en convention générateur et le récepteur en convention récepteur. Les valeurs prises par les grandeurs électriques dans le circuit correspondent donc au point d'intersection des deux caractéristiques de ces dipôles dans les conventions appropriées.

Énoncé

On appelle **point de fonctionnement** du circuit le point d'intersection des caractéristiques des deux dipôles. Les valeurs prises par les grandeurs électriques dans le circuit sont les coordonnées du point de fonctionnement, noté F.



3. Potentiel d'un nœud d'un circuit quelconque

On cherche souvent l'intensité dans une branche de circuit ou la tension à ses bornes. On étudie ici le cas d'un circuit qui ne contient que des générateurs linéaires et des résistors. On peut montrer (*voir corrigé de l'exercice n° 5 p. 125*) que le potentiel d'un nœud s'exprime aisément à partir des caractéristiques du circuit et des potentiels à l'extrémité des branches qui arrivent au nœud.

Énoncé

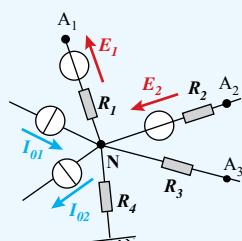
Théorème de Millman (ou **loi des nœuds en terme de potentiels**) :

Le potentiel au nœud N où arrivent m fils de bornes A_k et N, comportant chacun une résistance R_k , et une fém E_k , et n fils comportant des générateurs de courant de cem I_{0j} s'écrit :

$$V_M = \frac{\sum_{k=1}^m \frac{V_{A_k}}{R_k} + \sum_{k=1}^m \frac{\epsilon_k E_k}{R_k} + \sum_{j=1}^n \epsilon_j I_{0j}}{\sum_{k=1}^m \frac{1}{R_k}}$$

où $\epsilon_j = +1$ si le courant I_{0j} arrive au nœud, -1 sinon

et $\epsilon_k = +1$ si la fém E_k est orientée vers le nœud, -1 sinon (*exemple ci-contre*).



$$V_M = \frac{\frac{V_{A_1}}{R_1} - \frac{E_1}{R_1} + \frac{V_{A_2}}{R_2} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{V_{A_3}}{R_3} + I_{01} - I_{02}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

- Le théorème de Millman est une façon commode d'écrire la loi des nœuds (à partir de laquelle il se démontre très rapidement), qui dispense de définir la plupart des intensités du circuit et ainsi d'éviter les calculs généralement pénibles des lois de Kirchhoff. Par ailleurs, il ne nécessite qu'un seul schéma.
- Pour utiliser ce théorème on doit définir une référence des potentiels (masse), qu'on choisira la plus commode possible selon les symétries du circuit et les grandeurs cherchées.

POINT MÉTHODE*Bien démarrer en électrocinétique*

- Tout ce chapitre constitue une introduction à l'électrocinétique. Toutes les notions vues doivent être parfaitement comprises avant de progresser dans le cours. En effet toutes les lois vues dans ce chapitre seront soit exploitées directement, soit généralisées (impédance, courant alternatif...).
- Avant d'écrire toute relation entre la tension et le courant, vérifier la **convention** utilisée.
- On s'intéressera avant toute chose à l'architecture du circuit et à son éventuelle simplification : éléments présents ? Sont-ils en série ? En parallèle ? Ni l'un ni l'autre ? Symétries ? Peut-on utiliser des équivalents...
- Effectuer toujours un **schéma** soigné en indiquant toutes les grandeurs électriques et leurs notations.

VERS LA COLLE**Questions de cours**

- Courant électrique, intensité, potentiel, tension : définition, algébrisation, représentation.
- Dipôle passif, résistor, condensateur, bobine : définition, représentation, propriétés, associations.
- Dipôle actif : définition, représentation de Thévenin, de Norton, cas idéal, équivalence, associations.
- Puissance reçue par un dipôle : définition, lien avec l'énergie, signe, cas des différents dipôles courants.
- Diviseur de tension ou de courant : définitions, démontrer les relations utiles (*voir exercice n° 5 p. 121*).
- Caractéristique d'un dipôle, point de fonctionnement, exemple avec un générateur et un résistor.

Erreurs à éviter

- Les erreurs les plus courantes sont des erreurs de signe, soit par manque de définition des grandeurs algébriques sur le schéma, soit par non-respect de la cohérence entre les formules apprises et les conventions.
- Un autre type d'erreur provient de la non-distinction entre les grandeurs. La loi d'Ohm ne s'applique pas entre une tension U et une intensité I prises au hasard dans le circuit ! On adoptera des notations indicées qui lèvent toute ambiguïté.

Quelques « trucs » utiles

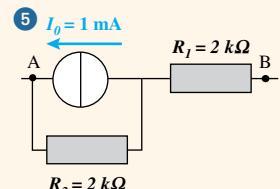
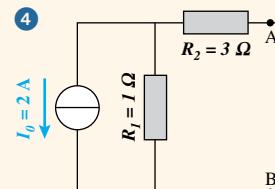
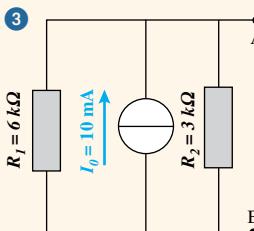
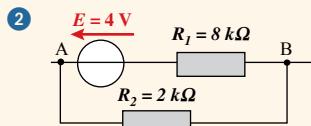
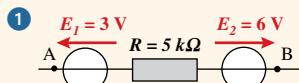
- Les exercices consisteront en général à déterminer une tension ou une intensité dans une branche. Toujours dessiner le circuit et représenter la tension étudiée ou le courant cherché.
- Les lois de Kirchhoff donnent des calculs rapidement pénibles, et nécessitent la définition de nombreuses intensités et tensions. Avant de se lancer dans ces calculs, regarder si le circuit ne se simplifie pas (association de résistances, de générateurs). Chercher si on peut obtenir rapidement la grandeur demandée à l'aide d'un diviseur (courant ou tension). Essayer si possible de se ramener à un unique générateur aux bornes du dipôle étudié. On comprendra vite à quel point le théorème de Millman est presque toujours la méthode la plus efficace et la plus élégante...
- Souvent le schéma gagne à être redessiné différemment, pour faire apparaître ses propriétés ou les montages diviseurs, ne pas hésiter à le faire et à nommer les différents noeuds pour se repérer sur le schéma initial et s'assurer que le nouveau schéma est bien identique dans son principe.

EXERCICES

1 Conversions de générateurs ★

→ corrigé p. 122

Déterminer les générateurs (Thévenin et Norton) équivalents aux dipôles AB représentés ci-dessous.

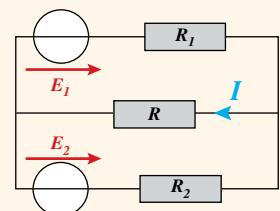


2 Étude d'un réseau ★

→ corrigé p. 123

Déterminer l'intensité I du courant traversant la branche centrale de ce réseau en utilisant :

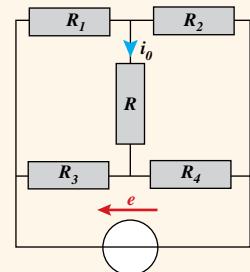
- 1 Les lois de Kirchhoff.
- 2 Des conversions de générateurs.
- 3 Le théorème de Millman.



3 Pont de Wheatstone ★★

→ corrigé p. 124

On dit que le pont de Wheatstone est équilibré, si l'intensité i_0 est nulle dans la résistance R quelle que soit la fém e . Quelle relation doivent vérifier R_1 , R_2 , R_3 et R_4 pour équilibrer le pont ?

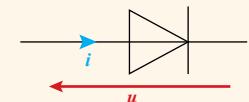


4 Point de fonctionnement ★★

→ corrigé p. 124

La caractéristique courant-tension d'une diode en convention récepteur est assez bien représentée par les équations :

$$\begin{cases} i = 0 & \text{si } u < u_s \\ i = \frac{1}{R_d}(u - u_s) & \text{si } u > u_s \end{cases}$$



avec $u_s = 0,80$ V la tension seuil et $R_d = 40$ Ω sa résistance en mode passant. Cette diode est placée en série avec une résistance R et une alimentation idéale de fém E réglable. Déterminer les coordonnées du point de fonctionnement de la diode dans ce circuit selon les valeurs de E .

5 Associations de dipôles ★★

→ corrigé p. 125

- 1 Que peut-on dire d'un générateur de tension idéal en parallèle avec une résistance ? Que peut-on dire d'un générateur idéal de courant en série avec une résistance ?
- 2 Démontrer les résultats des équivalences dans les tableaux p. 118 et les lois des ponts diviseurs.
- 3 Démontrer le théorème de Millman.

Conseils

Dans tous les cas, faire des schémas, définir les tensions et intensités utiles, faire le compte des inconnues et écrire ensuite les lois en utilisant tous les outils commodes (ponts, équivalents...).

1 Conversions de générateurs

→ énoncé p. 121

- ① Additionner algébriquement les deux fém → générateur de Thévenin → équivalent Norton
- ② Transformer (E, R_1) en Norton $(E/R_1, R_1)$ → équivalent de deux résistances (R_1, R_2) en parallèle → générateur de Norton → équivalent Thévenin
- ③ Équivalent de deux résistances (R_1, R_2) en parallèle → générateur de Norton → équivalent Thévenin
- ④ et ⑤ Transformer (I_0, R_1) en Thévenin $(R_1 I_0, R_1)$ → équivalent de deux résistances (R_1, R_2) en série → générateur de Thévenin → équivalent Norton (même circuit, seules changent les valeurs numériques).

circuit	Thévenin	Norton		
	E_T	r_T	I_N	r_N
①	$E_T = E_1 - E_2 = -3 \text{ V}$	$r_T = R = 5 \text{ k}\Omega$	$I_N = \frac{E_T}{r_T} = -0,6 \text{ mA}$	$r_N = r_T = 5 \text{ k}\Omega$
②	$E_T = r_N I_N = 0,8 \text{ V}$	$r_T = r_N = 1,6 \text{ k}\Omega$	$I_N = \frac{E}{R_1} = 0,5 \text{ mA}$	$r_N = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = 1,6 \text{ k}\Omega$
③	$E_T = r_N I_N = 20 \text{ V}$	$r_T = r_N = 2 \text{ k}\Omega$	$I_N = I_0 = 10 \text{ mA}$	$r_N = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = 2 \text{ k}\Omega$
④	$E_T = R_1 I_0 = -2 \text{ V}$	$r_T = R_1 + R_2 = 4 \Omega$	$I_N = \frac{E_T}{r_T} = -0,5 \text{ A}$	$r_N = r_T = 4 \Omega$
⑤	$E_T = R_1 I_0 = 2 \text{ V}$	$r_T = R_1 + R_2 = 4 \text{ k}\Omega$	$I_N = \frac{E_T}{r_T} = 0,5 \text{ mA}$	$r_N = r_T = 4 \text{ k}\Omega$

Bien comprendre

- Dans une branche qui contient des éléments en série (parcourus par la même intensité) l'ordre de branchement des dipôles est sans importance et on peut le modifier pour faciliter la résolution (cas 1). De même, on peut modifier l'ordre des différentes branches placées en parallèle entre les mêmes points (cas 3).
- On note qu'on doit passer en Thévenin pour simplifier une association Norton + résistance en série (cas 4) et inversement passer en Norton pour simplifier une association Thévenin + résistance en parallèle (cas 2).
- Il ne faut surtout pas associer les résistors en premier.
- Il y a toujours plusieurs façons de représenter un circuit (cas 4 et 5).
- Une valeur négative de fém ou de cém, indique que le générateur est « à l'envers » dans le dipôle, par exemple le générateur équivalent du circuit 1 fournit un courant positif de B vers A et non de A vers B.
- Un ensemble de générateurs et de résistors, quelle que soit la façon dont ils sont branchés, est équivalent à un générateur de Thévenin unique (théorème de Thévenin) et à un générateur de Norton unique (théorème de Norton).

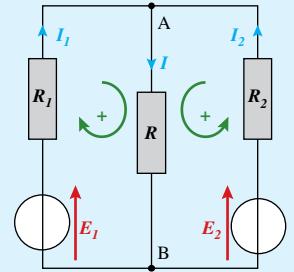
2 Étude d'un réseau

→ énoncé p. 121

- 1 Lois de Kirchhoff.** On représente le circuit et l'on introduit les intensités dans les branches.

Si l'on connaît les intensités, toutes les tensions possibles sont faciles à déterminer (fém ou lois d'Ohm), donc on a en fait 3 inconnues I , I_1 , I_2 . Il faut utiliser les lois de Kirchhoff pour obtenir un système de trois équations à trois inconnues : 2 lois des mailles (on définit un sens arbitraire, en vert sur le schéma) et 1 loi des nœuds en A (identique à celle en B). Il vient :

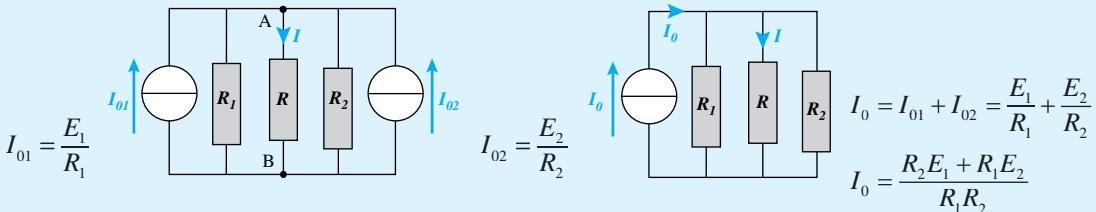
$$\begin{array}{l} \text{loi des noeuds} \\ \text{loi des mailles 1} \\ \text{loi des mailles 2} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 + I_2 = I \\ E_1 - R_1 I_1 - RI = 0 \\ E_2 - R_2 I_2 - RI = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{E_1 - RI}{R_1} \\ I_2 = \frac{E_2 - RI}{R_2} \end{array} \right.$$



En remplaçant I_1 et I_2 dans la loi des nœuds, on obtient :

$$I \left(1 + \frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2} \right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \quad \text{soit} \quad I = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

- 2 Conversion de générateurs.** On transforme les générateurs de Thévenin en générateurs de Norton, et on associe les deux générateurs idéaux de courant branchés en parallèle obtenus. La position des branches d'une dérivation est sans importance, on réunit donc les branches qui simplifient le système :



On reconnaît un diviseur de courant dans le montage final, on obtient donc :

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1/R}{\sum 1/R_k} = \frac{1/R}{1/R_1 + 1/R + 1/R_2} = \frac{R_1 R_2}{R R_2 + R_1 R_2 + R R_1}$$

Soit : $I = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 R_2} \frac{R_2 R_1}{R R_2 + R_1 R_2 + R R_1}$ d'où : $I = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$

Bien comprendre

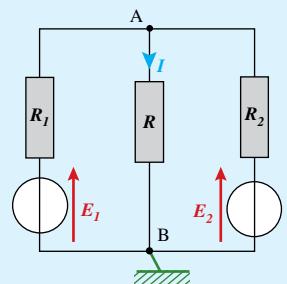
On n'a aucun intérêt ici à associer les résistances car on cherche le courant dans l'une d'elles seulement.

- 3** L'intensité I peut se déduire de la tension U_{AB} grâce à la loi d'Ohm appliquée à R . La tension est la différence de potentiel entre A et B, donc si on choisit la référence des potentiels en B (choix que la symétrie du circuit rend évident), alors, le potentiel en A vérifie :

$$I = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{V_A - V_B}{R} = \frac{V_A}{R}$$

On applique le théorème de Millman en A :

$$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R}} = \frac{E_1 R R_2 + E_2 R R_1}{R R_2 + R R_1 + R_1 R_2} \quad \text{d'où, d'après la relation précédente : } I = \frac{V_A}{R} = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R(R_2 + R_1) + R_2 R_1}$$



Bien comprendre

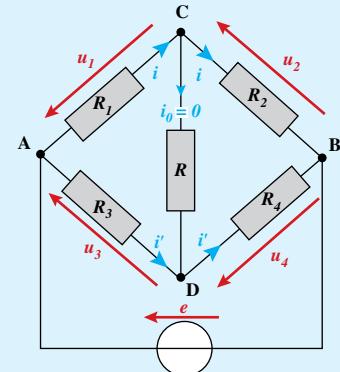
On obtient souvent avec le théorème de Millman ou les diviseurs des « échafaudages » de fractions. On les simplifiera immédiatement en multipliant numérateur et dénominateur par toutes les grandeurs présentes au dénominateur des petites fractions, par exemple ci-dessus par R , R_1 et R_2 .

3 Pont de Wheatstone

→ énoncé p. 121

Le courant est nul dans la branche CD, donc la loi des nœuds appliquée en C montre que l'intensité est la même dans R_1 et R_2 (on la note i) et de même la loi des nœuds appliquée en D montre que l'intensité est la même dans R_3 et R_4 (on la note i'). Si le courant i_0 est nul dans la résistance R , la tension à ses bornes est aussi nulle d'après la loi d'Ohm. Donc les points C et D sont au même potentiel ($V_C = V_D$). On peut donc écrire les égalités suivantes entre les tensions aux bornes des résistors (on obtient évidemment les mêmes égalités en écrivant des lois des mailles sur ACDA et BCDB) :

$$\begin{cases} u_1 = u_{AC} = u_{AD} = u_3 \\ u_2 = u_{CB} = u_{DB} = u_4 \end{cases} \text{ soit en utilisant la loi d'Ohm : } \begin{cases} R_1 i = R_3 i' \\ R_2 i = R_4 i' \end{cases}$$



En faisant le rapport des deux équations précédentes, on obtient la condition d'équilibre du pont, c'est-à-dire telle que $i_0 = 0$:

$$\frac{R_1 i}{R_2 i} = \frac{R_3 i'}{R_4 i'} \quad \text{soit :} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad \text{et finalement :} \quad R_1 R_4 = R_2 R_3$$

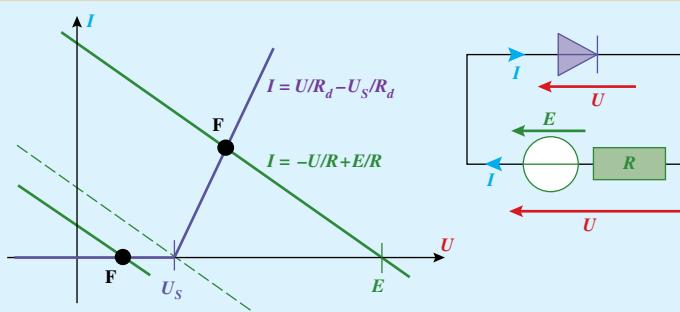
Bien comprendre

On a ici modifié le schéma du pont (sans en changer les caractéristiques), pour faire apparaître les nœuds du réseau. On constatera le choix des notations sans ambiguïté et commodes pour se repérer dans les grandeurs. Ce montage est un classique en travaux pratiques. On met un ampèremètre à la place de R , un résistor inconnu dont on veut déterminer la résistance R_1 , deux des autres résistances sont connues, par exemple R_2 et R_3 , (qu'on choisit en général égales pour simplifier) et la dernière (R_4) est une résistance réglable. On règle R_4 jusqu'à annuler le courant dans l'ampèremètre, la condition d'équilibre du pont est satisfaite et donne la valeur de la résistance inconnue : $R_1 = R_4$. On utilise aussi le principe de l'équilibre du pont de Wheatstone pour déterminer de nombreuses grandeurs électriques autres que des résistances (capacité...) et d'une façon générale des grandeurs à mesurer avec précision dont la mesure directe est délicate. Au-delà des salles de TP ces méthodes de mesures ont été longtemps utilisées dans les laboratoires ou l'industrie, elles sont souvent remplacées aujourd'hui par des méthodes électroniques.

4 Point de fonctionnement

→ énoncé p. 121

On considère le circuit comme formé de deux dipôles : d'une part la diode, d'autre part l'ensemble générateur+résistor (qui est identique à un générateur de Thévenin). On trace sur le même graphe, les caractéristiques courant-tension des dipôles avec les conventions appropriées portées sur les schémas ci-contre. Les équations des droites sont indiquées sur le schéma. La pente de la caractéristique



générateur+résistor est fixe ($-1/R$) mais sa position dépend de la valeur de E . Le point d'intersection des courbes est le point de fonctionnement, ses coordonnées donnent le courant dans le circuit et la tension aux bornes de la diode. On constate que selon la position de la caractéristique du générateur, le résultat est différent, le cas limite étant représenté en pointillé. Ce cas correspond à $E = U_s$. On a donc deux cas, la diode étant bloquante dans le premier, passante dans le second :

Si $E \leq U_s$ $I_F = 0$ et $U_F = E$

Si $E \geq U_s$ les grandeurs électriques vérifient : $\begin{cases} U_F = E - RI_F \\ I_F = \frac{U_F - U_s}{R_d} \end{cases}$ dont les solutions sont $\begin{cases} I_F = \frac{E - U_s}{R + R_d} \\ U_F = \frac{ER_d + U_s R}{R + R_d} \end{cases}$

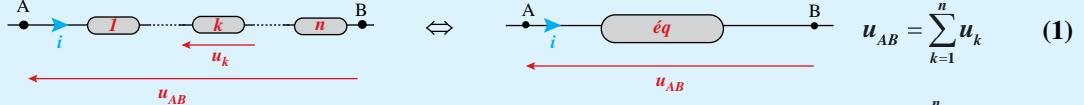
5 Associations de dipôles

→ énoncé p. 121

- 1 Un générateur idéal maintient une tension donnée entre ses bornes, quel que soit son branchement, le résistor en parallèle n'a aucune influence ni sur le générateur ni sur le reste du circuit et peut donc être éliminé. De même un générateur idéal de courant impose l'intensité dans sa branche, un résistor en série ne modifiera pas ce résultat et peut donc être retiré sans modifier les conclusions.

- 2 Deux dipôles sont équivalents, si, quelle que soit la tension identique qu'on applique à leurs bornes, ils sont traversés par la même intensité. Dans tout ce qui suit les dipôles équivalents s'entendent entre A et B. Attention, ici on utilise la convention récepteur même pour les générateurs.

→ **Associations série** : on écrit la loi d'additivité des tensions (1) dans laquelle on remplace les tensions par leurs expressions, $u_{AB}(i)$ du dipôle équivalent et $u_k(i)$ dans les dipôles composant l'association.



Résistors :

$$u_{AB} = R_{eq}i$$

et

$$u_k = R_k i$$

d'où :

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k$$

d'où l'on déduit également la relation du **pont diviseur de tension** :

$$\frac{u_k}{u_{AB}} = \frac{R_k}{R_{eq}} = \frac{R_k}{\sum R_k}$$

Bobines :

$$u_{AB} = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

et

$$u_k = L_k \frac{di}{dt}$$

d'où :

$$L_{eq} = \sum_{k=1}^n L_k$$

Condensateurs :

$$\frac{du_{AB}}{dt} = \frac{1}{C_{eq}} i$$

et

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{1}{C_k} i$$

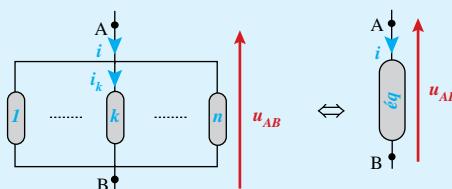
d'où :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

Générateurs de Thévenin : $u_{AB} = R_{eq}i - E_{eq}$ et $u_k = r_k i - E_k$ d'où : $r_{eq} = \sum_{k=1}^n r_k$ et $E_{eq} = \sum_{k=1}^n E_k$

→ **Associations parallèle** : on écrit la loi des noeuds (2) dans laquelle on remplace les intensités par leurs expressions, $i(u_{AB})$ du dipôle équivalent et $i_k(u_{AB})$ dans les dipôles composant l'association.

$$i = \sum_{k=1}^n i_k \quad (2)$$



Résistors :

$$i = \frac{1}{R_{eq}} u_{AB} \quad \text{et} \quad i_k = \frac{1}{R_k} u_{AB}$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

d'où l'on déduit également la loi **du diviseur de courant** :

$$\frac{i_k}{i} = \frac{u_{AB}/R_k}{u_{AB}/R_{eq}} = \frac{1/R_k}{\sum 1/R_k}$$

Bobines:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L_{eq}} u_{AB} \quad \text{et} \quad \frac{di_k}{dt} = \frac{1}{L_k} u_{AB}$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{L_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}$$

Condensateurs :

$$i = C_{eq} \frac{du_{AB}}{dt} \quad \text{et} \quad i_k = C_k \frac{du_{AB}}{dt}$$

$$\text{d'où : } C_{eq} = \sum_{k=1}^n C_k$$

Générateurs de Norton : $i = \frac{u_{AB}}{r_{eq}} - I_{0eq}$

$$\text{et} \quad i_k = \frac{u_{AB}}{r_k} - I_{0k}$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{r_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k} \text{ et } I_{0eq} = \sum_{k=1}^n I_{0k}$$

③ On raisonne sur le schéma d'exemple qui est suffisamment général pour réunir tous les cas possibles.

On écrit la loi des nœuds en N :

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + I_{01} - I_{02} = 0$$

On écrit les tensions aux bornes des branches A_kN :

$$V_{A_1} - V_N = E_1 + R_1 i_1 ; V_{A_2} - V_N = -E_2 + R_2 i_2 ; V_{A_3} - V_N = R_3 i_3 ; V_{A_4} - V_N = 0 - V_N = R_4 i_4$$

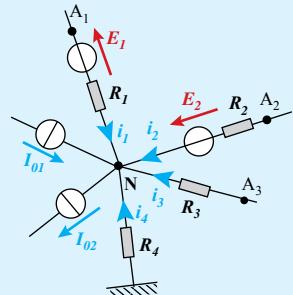
Puis on exprime les intensités correspondantes :

$$i_1 = \frac{V_{A_1} - V_N - E_1}{R_1} ; i_2 = \frac{V_{A_2} - V_N + E_2}{R_2} ; i_3 = \frac{V_{A_3} - V_N}{R_3} ; i_4 = \frac{-V_N}{R_4}$$

Et on remplace ces expressions dans la loi des nœuds :

$$\frac{V_{A_1} - V_N - E_1}{R_1} + \frac{V_{A_2} - V_N + E_2}{R_2} + \frac{V_{A_3} - V_N}{R_3} + \frac{-V_N}{R_4} + I_{01} - I_{02} = 0$$

$$\text{Soit : } V_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{V_{A_1} - E_1}{R_1} + \frac{V_{A_2} + E_2}{R_2} + \frac{V_{A_3}}{R_3} + I_{01} - I_{02}$$



D'où l'on obtient l'expression de V_N donnée dans le cours, qui se généralise à un nombre quelconque de branches arrivant au nœud.

$$V_M = \frac{\frac{V_{A_1}}{R_1} - \frac{E_1}{R_1} + \frac{V_{A_2}}{R_2} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{V_{A_3}}{R_3} + I_{01} - I_{02}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

Bien comprendre

Non seulement le théorème de Millman (ou loi des nœuds en termes de potentiel) est extrêmement efficace dans de nombreuses situations, mais il est de surcroît très facile à démontrer. Bien qu'il ne soit pas explicitement au programme, on n'hésitera donc pas à l'utiliser, quitte à en faire la démonstration auparavant. Ce théorème comme la plupart des résultats de ce chapitre se généralise aux régimes variables, en notation complexe et en remplaçant les résistances par des impédances (voir chapitres 10 et 11).

À méditer

Notre plus grande faiblesse réside dans l'abandon ; la façon la plus sûre de réussir est d'essayer une autre fois.
THOMAS EDISON (1847-1931)

Régimes transitoires

Le comportement des dipôles introduits dans le chapitre précédent est ici étudié dans le cas des régimes dits transitoires. Bien qu'essentiellement centré sur les circuits électriques, ce chapitre aborde également le cas de systèmes mécaniques car, même s'ils seront étudiés plus en détail dans les chapitres ultérieurs, leur profonde analogie avec les systèmes électriques est un outil puissant de compréhension des phénomènes physiques mis en jeu.

Outils mathématiques

■ **Équation algébrique du second degré :** $ax^2 + bx + c = 0$ a des solutions dont la nature dépend du signe du discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$). Il est parfois commode de mettre l'équation sous la forme :

$ax^2 + 2b'x + c = 0$, on parle alors de discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$

Δ et Δ' ont à l'évidence le même signe. Les solutions de l'équation s'écrivent alors (avec $i^2 = -1$) :

$$\text{Discriminants positifs : } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

$$\text{Discriminants négatifs : } x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-b' \pm i\sqrt{ac - b'^2}}{a} = \frac{-b' \pm i\sqrt{-\Delta'}}{a}$$

$$\text{Discriminants nuls : } x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-b'}{a}$$

La forme réduite est commode lorsque $a = 1$, car les solutions s'écrivent alors sans fraction.

■ **Équations différentielles** : on note $f(u)$ la fonction inconnue, solution de l'équation différentielle, et u la variable dont dépend f (il faut savoir adapter à des fonctions $q(t)$, $i(t)$, $x(t)$, $y(x)$, $\theta(t)$...).

↳ Équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants :

$$\frac{df}{du} + k_1 f = k_2 \Rightarrow f(u) = f_{\text{homogène}}(u) + f_{\text{sol.part.}}(u) = Ae^{-k_1 u} + f_{\text{cst}} \quad (\text{A une constante d'intégration, } f_{\text{cst}} = \frac{k_2}{k_1})$$

↳ Équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants :

$$a \frac{d^2 f}{du^2} + b \frac{df}{du} + cf = 0 \quad (\text{ED}) \quad \text{associée à l'équation caractéristique : } ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{EC})$$

Les solutions de (ED) sont : $X(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ si $r_1 \neq r_2$; $X(t) = (At + B)e^{r_0 t}$ si $r_1 = r_2 = r_0$

Où r_1 et r_2 sont les solutions de (EC) et A et B des constantes d'intégration. Selon que ces solutions de (EC) sont réelles ($\Delta' > 0$) ou complexes ($\Delta' < 0$), les solutions de (ED) seront des exponentielles réelles, donc fonctions hyperboliques¹ (\cosh et \sinh) ou des exponentielles complexes, donc des fonctions circulaires (\cos et \sin), car :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad ; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{avec : } \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \quad ; \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{avec : } \frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x \quad ; \quad \frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x$$

Si l'équation différentielle a un second membre, on ajoute une solution particulière à la solution précédente.

1. Les fonctions hyperboliques présentent l'avantage de donner une certaine symétrie aux solutions, ce qui facilite la mémorisation. On pourra choisir de les utiliser ou non. Notons qu'on trouve aussi l'écriture (bien plus commode) $\text{sh } x$ et $\text{ch } x$.

Rappel : La notation « point » signifie dérivée par rapport au temps t . **Exemple :** $\dot{q} = dq / dt$

I Propriétés des systèmes étudiés

1. Nature des systèmes

Définitions

- Un **système du premier ordre** est un système dont le comportement est décrit par une équation différentielle du premier ordre.
- Un **système du second ordre** est un système dont le comportement est décrit par une équation différentielle du second ordre.
- Un système est **linéaire** si son équation différentielle est linéaire.

Un système linéaire du second ordre a déjà été abordé, lors de l'étude de l'oscillateur harmonique. En physique en général (et en électricité, comme en mécanique) il est toujours essentiel de définir le système dont on étudie le comportement et l'extérieur (le reste de l'univers) qui interagit avec le système.

Définitions

- Un **oscillateur** est un système physique qui met en jeu une grandeur physique susceptible d'osciller (de varier alternativement) autour d'une valeur moyenne.
- Un **oscillateur libre** est susceptible d'osciller avec des caractéristiques (période par exemple) qui ne dépendent que de ses propriétés.
- Un **oscillateur libre idéal** (ou non amorti) n'est le siège d'aucune dissipation d'énergie, son oscillation dure indéfiniment. Un oscillateur réel est nécessairement un **oscillateur libre amorti**.
- Un **oscillateur entretenu** reçoit régulièrement un apport énergétique qui compense l'amortissement, il oscille selon ses caractéristiques propres.
- Un **oscillateur forcé** oscille à la période que lui impose un autre système.

■ Il existe des oscillateurs dans de nombreux domaines (oscillateurs chimiques ou dipôles oscillants en électromagnétisme par exemple), mais deux domaines sont particulièrement utiles et font l'objet des paragraphes III et IV de ce chapitre (oscillateurs libres), ainsi que des deux chapitres suivants (oscillateurs forcés et filtrage) : les **oscillateurs en mécanique** et les **oscillateurs en électrocinétique**.

- Notons qu'un oscillateur peut avoir un comportement ... non oscillant !
- On mettra en équation des systèmes simples (et linéaires...), mais on gardera à l'esprit que la plupart des systèmes, en particulier les systèmes mécaniques sont non linéaires. Ils sont cependant susceptibles d'entrer en vibration et donc de se comporter comme des oscillateurs, ce qui sera particulièrement utile pour comprendre le phénomène de résonance au chapitre suivant.
- Un oscillateur mécanique oscille autour d'une position d'équilibre, il sera toujours utile de se ramener à des variables qui valent zéro en cette position. Le comportement d'oscillateurs mécaniques est abordé dans ce chapitre, mais ces systèmes et leur mise en équation sont étudiés plus en profondeur dans le cours de mécanique (*voir exercices des chapitres 13 et 14*).

Définitions

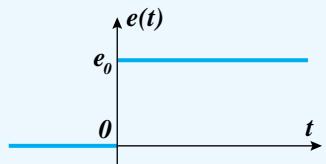
- On appelle **excitation** ou contrainte toute action de la part de l'extérieur, susceptible de modifier le comportement du système. On note $e(t)$ la grandeur qui caractérise l'excitation.
- On appelle **réponse** d'un système, le comportement qu'il adopte face à une excitation extérieure. On note $s(t)$ la grandeur qui caractérise ce comportement.

En électricité, l'excitation peut résulter de la présence d'un générateur continu ou alternatif, mais aussi de la fermeture ou de l'ouverture d'un circuit. En mécanique cela peut se traduire par la présence d'un moteur ou le déplacement d'un support par exemple.

Définition

On appelle **échelon** la variation brusque et très rapide d'une contrainte imposée au système. La fonction $e(t)$ représentant l'excitation correspond à la forme idéale représentée ci-contre.

$$e(t < 0) = 0 \quad \text{et} \quad e(t > 0) = e_0$$



2. Notion de régime

Le terme de « régime » est très souvent utilisé en électricité et en mécanique, ainsi que dans d'autres domaines de la physique. Il n'est pas toujours évident de s'y retrouver, car le mot peut caractériser soit le comportement d'un système, soit ce à quoi il est soumis de la part de l'extérieur, soit des conditions expérimentales.

Par ailleurs certains termes employés peuvent aussi prêter à confusion : on parle de **régime continu** en électricité, lorsqu'un système est tel que toutes les grandeurs électriques (tension, intensité, charge) sont indépendantes du temps, donc constantes. Au contraire, quand les grandeurs électriques varient avec le temps, on parle de **régime variable**. Cette dénomination est trompeuse, car elle n'est pas corrélée à la nature du courant dans le circuit. En effet, un système peut être soumis à un courant continu et tel que ses grandeurs électriques varient dans le temps, donc en régime variable, comme on le voit dans ce chapitre. On évitera donc ces termes dans ce qui suit.

→ Régimes liés au comportement du système

Définitions

- Un système est en **régime permanent** ou **régime établi** si les grandeurs qui le caractérisent sont soit stationnaires (constantes dans le temps), soit périodiquement variables dans le temps.
- Un système est en **régime transitoire** si les grandeurs qui le caractérisent évoluent pendant une durée déterminée.
- Un régime transitoire est observé dès que l'on modifie les contraintes appliquées au système, il a une durée limitée correspondant au temps nécessaire au système pour répondre et s'adapter à ces nouvelles contraintes.
- Un régime permanent perdure tant que le système fonctionne sans modification de ses contraintes.
- Un régime permanent comme un régime transitoire peut être caractérisé par des oscillations.
- Un régime permanent n'est pas nécessairement stationnaire, il peut varier dans le temps, c'est pourquoi l'appellation régime établi est plus pertinente, mais moins usitée.
- Un régime transitoire est souvent observé entre deux régimes permanents, mais parfois un nouveau régime transitoire a lieu alors que le précédent n'était pas terminé, suite à une nouvelle modification de l'excitation (voir IV.3.).

→ Régimes liés aux contraintes extérieures

Appelons **état zéro**, l'état du système dont les contraintes n'ont pas changé depuis longtemps (dipôle électrique hors circuit, système mécanique au repos...). Toutes les grandeurs qui le caractérisent sont nulles et donc $s = 0$. On étudie dans ce chapitre deux cas d'excitations.

Définitions

- La **réponse à un échelon** est le régime transitoire adopté par un système initialement dans son état zéro (régime permanent) lorsqu'il est soumis à un échelon.
- Le **régime libre** est le régime transitoire adopté par un système initialement dans un état permanent différent de son état zéro (suite par exemple à un échelon) lorsqu'il subit une modification de contrainte (par exemple l'annulation de l'échelon) et revient librement vers son état zéro.

Ces dénominations très différentes laissent à penser qu'il s'agit de situations complètement distinctes, alors qu'en fait il n'y a pas de différence fondamentale entre ces deux cas, puisque, dans le premier le système passe de son état zéro à un autre état permanent, tandis que dans le second cas il passe d'un état permanent à son état zéro. Les équations différentielles sont les mêmes, au second membre constant près (nul ou pas). Le comportement du système sera identique, seule la limite, donc l'état permanent atteint diffère.

► Régimes liés aux conditions expérimentales

On travaille dans tout ce qui suit dans l'**approximation des régimes quasi stationnaires** (ARQS). Le terme de régime ici ne définit pas réellement le comportement du circuit, mais le fait qu'on se limite aux situations telles que l'information se propage instantanément entre tous les points du circuit, ce qui permet de définir par exemple l'intensité comme identique tout au long d'une branche (*voir p. 108*).

3. État initial et grandeurs utiles

En mécanique, les grandeurs de description d'un système sont ses coordonnées et ses vecteurs cinématiques (vitesse, accélération). Le système mécanique étudié dans la partie III de ce chapitre est en mouvement rectiligne, seule son abscisse $x(t)$ et ses dérivées seront utilisées.

En électricité, on utilise de nombreuses grandeurs. Les plus importantes sont la charge $q(t)$ qui circule dans le circuit et l'intensité électrique $i(t)$. Cependant, il peut aussi être utile d'étudier les valeurs des tensions aux bornes des dipôles.

POINT MÉTHODE

Choisir une variable électrique

- Si le système contient un **condensateur**, on privilégiera sa **charge $q(t)$** pour établir l'équation différentielle. On en déduira l'intensité $i(t)$, puis toutes les tensions aux bornes des dipôles².
- Si le circuit ne contient pas de condensateur, alors **l'intensité $i(t)$** sera privilégiée pour établir l'équation différentielle, les tensions aux bornes des dipôles s'en déduiront.
- On rappelle pour toute la suite, qu'en convention récepteur et en utilisant la charge de l'armature où arrive le courant algébrique (*voir p. 114-115*), les tensions aux bornes des dipôles R , L et C vérifient (avec des notations évidentes) : $u_R = Ri$; $u_L = L \frac{di}{dt}$; $u_C = \frac{q}{C}$; $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$

Attention, les énoncés peuvent imposer d'autres choix d'orientation qu'il faut respecter (*voir exercice n° 4 p. 145*).

2. La tension u_C aux bornes du condensateur, bien que moins pertinente que $q(t)$, est utilisée par certains auteurs. On vérifie facilement que puisque u_C et $q(t)$ sont proportionnelles, elles vérifient les mêmes équations différentielles et présentent donc des évolutions identiques.

→ Choix des conditions initiales

L'état initial d'un système dont on étudie la réponse à une excitation, est la situation dans laquelle il se trouve juste avant le début de l'excitation, dont on suppose qu'elle démarre au temps $t = 0$. On définit cet état par la valeur de toutes les grandeurs pertinentes définissant le système. L'évolution ultérieure du système est régie par une (ou plusieurs) équation différentielle, dont la résolution fait apparaître autant de constantes d'intégration que d'ordre. La détermination des constantes d'intégration nécessite autant de conditions initiales. Pour autant, toutes les grandeurs initiales ne sont pas susceptibles d'être des conditions initiales.

POINT MÉTHODE

Étudier l'état initial et prévoir l'état final d'un régime transitoire

- Une grandeur décrivant le comportement d'un système ne peut servir de **condition initiale** nécessaire à la détermination de constantes d'intégration, que si elle est continue au démarrage de la nouvelle contrainte imposée au système. Sont toujours continues : la charge (et donc la tension aux bornes) d'un condensateur et l'intensité qui traverse une bobine.
- Dans l'étude des circuits du premier ordre, on effectuera une **étude préalable**, dans laquelle on s'attachera à préciser le régime permanent initial, compte tenu des conditions initiales : les intensités du courant dans le circuit, la charge du condensateur, l'état des générateurs (allumés, éteints), des interrupteurs (fermés ou ouverts).
- On cherchera aussi à prévoir l'**état permanent final**, vers lequel on tend. En régime établi ou permanent la charge d'un condensateur n'évolue plus, le courant dans sa branche est nécessairement nul (équivaut à un interrupteur ouvert) tandis que l'intensité qui traverse la bobine n'évolue plus et la tension à ses bornes est donc nulle (équivaut à un interrupteur fermé).

II | Circuits du premier ordre en électricité

1. Circuit RC série

Un même circuit, muni d'un interrupteur à bascule, permet d'étudier les différents régimes transitoires du circuit RC série.

Position ① : charge du condensateur (réponse à un échelon de tension)

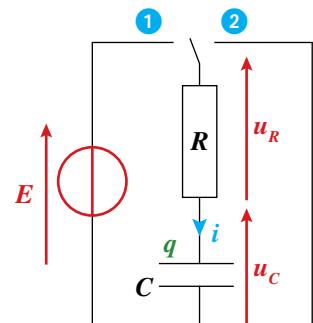
Position ② : décharge du condensateur (régime libre)

Au départ le condensateur n'est pas chargé, l'interrupteur est en position milieu, le système est dans un régime permanent (il ne se passe rien, état zéro).

→ Lorsqu'on bascule en position ①, on observe un régime transitoire. Suite à la perturbation : un courant circule, le condensateur se charge. Puis le système atteint un état permanent, qui devient l'état initial pour la suite.

→ Lorsqu'on bascule en ② un autre régime transitoire s'établit, jusqu'à atteindre un régime permanent identique à l'état de départ, car en l'absence de générateur, le dipôle RC retourne à l'état zéro.

On peut recommencer indéfiniment. L'étude expérimentale de l'observation des grandeurs électriques se fait aisément avec une carte d'acquisition sur un ordinateur ou un oscilloscope à mémoire.



	1 charge du condensateur (réponse à un échelon)	2 décharge du condensateur (régime libre)
État initial	$q(t=0^-) = 0$ et $i(t=0^-) = 0$	$q(t=0^-) = Q_0 = CE$ et $i(t=0^-) = 0$
Loi des mailles	$u_R + u_C = E$	$u_R + u_C = 0$
Équation différentielle	$R\dot{q} + \frac{q}{C} = E$ ou $\dot{q} + \frac{q}{\tau} = \frac{E}{R}$	$R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$ ou $\dot{q} + \frac{q}{\tau} = 0$
Condition initiale	$q(t=0^+) = q(t=0^-) = 0$	$q(t=0^+) = q(t=0^-) = Q_0 = CE$
Temps caractéristique	$\tau = RC$	$\tau = RC$
Solutions $q(t)$	$q(t) = CE(1 - e^{-t/\tau}) = Cu_C(t)$	$q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} = CE e^{-t/\tau} = Cu_C(t)$
Courbe $q(t)$		
Intensité $i(t)$	$i(t) = \dot{q} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \quad (i > 0)$	$i(t) = \dot{q} = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau} \quad (i < 0)$
Courbe $i(t)$		

2. Circuit RL série

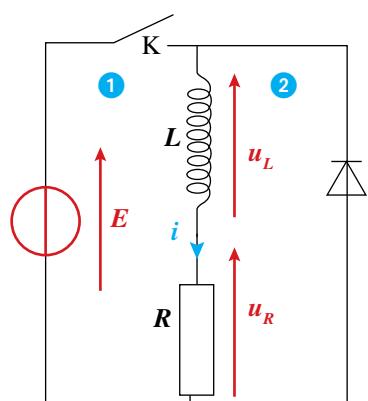
Un même circuit, muni d'un interrupteur, permet d'étudier les différents régimes transitoires du circuit RL série.

Circuit ① (K fermé) : installation du courant (réponse à un échelon de tension)

Circuit ② (K ouvert) : extinction du courant (régime libre)

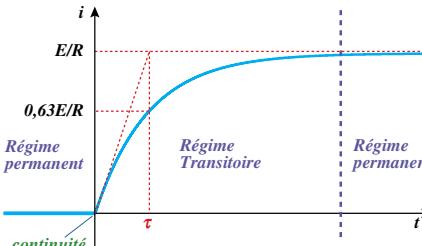
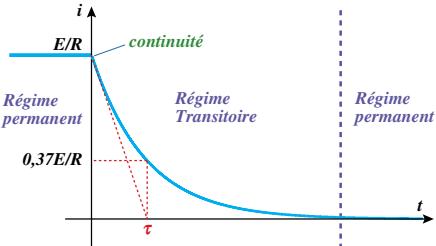
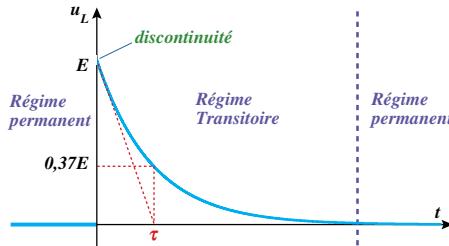
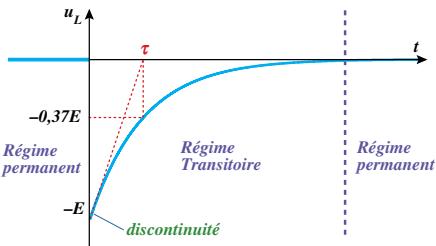
Au départ il n'y a aucun courant dans les branches du circuit, le système est dans un régime permanent (il ne se passe rien, état zéro).

→ Lorsqu'on ferme l'interrupteur, on observe un régime transitoire suite à la perturbation : le générateur tend à imposer une intensité dans la bobine qui tend à s'opposer à ce changement. Dans cette configuration la diode est bloquante, aucun courant ne peut passer dans la branche de droite qui n'a donc aucune influence sur le circuit, seule la partie ① est à considérer. Puis le système atteint un état permanent, qui devient l'état initial pour la suite.



→ On ouvre l'interrupteur. Le courant dans la bobine tend donc à s'annuler (plus de générateur) ce à quoi la bobine s'oppose. Dans cette configuration la diode est maintenant passante et se comporte comme un fil, aucun courant ne circule plus dans la branche de gauche qui ne joue plus aucun rôle. Seule ② est à considérer. Une fois le courant annulé, on retrouve l'état zéro de départ.

N. B. : Ici on ne peut pas utiliser d'interrupteur à bascule. L'intensité s'annulerait brutalement à l'ouverture, ce qui ne permettrait pas d'étudier le régime libre et provoquerait de surcroît une étincelle de rupture. La diode (dite de roue libre) évite ce problème et permet l'extinction progressive du courant.

	1 installation du courant (réponse à un échelon)	2 extinction du courant (régime libre)
État initial	$u_L(t=0^-) = 0$ et $i(t=0^-) = 0$	$u_L(t=0^-) = 0$ et $i(t=0^-) = i_0$
Loi des mailles	$u_L + u_R = E$	$u_L + u_R = 0$
Équation différentielle	$L \frac{di}{dt} + Ri = E$ ou $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$	$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$ ou $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$
Condition initiale	$i(t=0^+) = i(t=0^-) = 0$	$i(t=0^+) = i(t=0^-) = i_0 = E/R$
Temps caractéristique	$\tau = \frac{L}{R}$	$\tau = \frac{L}{R}$
Solutions $i(t)$	$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = i_0(1 - e^{-t/\tau})$	$i(t) = i_0 e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$
Courbe $i(t)$		
Tension $u_L(t)$	$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = E e^{-t/\tau} \quad (u_L > 0)$	$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -E e^{-t/\tau} \quad (u_L < 0)$
Courbe $u_L(t)$		

3. Propriétés communes aux deux systèmes RC et RL

Définition

Un **temps caractéristique**, noté τ , est une durée qui donne l'ordre de grandeur de l'échelle de temps de l'évolution d'un système.

Le temps caractéristique apparaît naturellement dans les équations différentielles, mais on peut aussi le déterminer par analyse dimensionnelle. En effet, il ne dépend que des paramètres du système. Pour les deux circuits étudiés, on cherche donc, dans le premier cas, une expression homogène à un temps ne contenant que R et C , et dans le second cas ne contenant que R et L . Il n'y a qu'une solution possible et le même temps caractéristique s'applique au régime libre ou en réponse à un échelon.

Pour tous ces systèmes, on vérifie facilement les résultats du tableau suivant, indiqués en pourcentage d'avancement par rapport à l'état permanent final (0 % début du régime transitoire, 100 % le régime permanent final est atteint).

$t = n\tau$	0	τ	2τ	5τ	10τ	∞
Avancement ($1-e^{-n}$)	0 %	63 %	86,5 %	99,3 %	99,995 %	100 %

- Le comportement permanent final étant asymptotique, il n'est en toute rigueur atteint qu'au bout d'un temps infini, cependant, on voit qu'au bout de quelques τ (selon la précision souhaitée), on peut considérer que le régime transitoire a cessé et que le nouveau régime permanent s'est installé.
- Pour les systèmes du premier ordre RC et RL, on obtient aisément τ sur l'une des courbes, comme indiqué sur les graphes des tableaux précédents, soit en traçant la tangente à l'origine qui coupe l'asymptote en $t = \tau$, soit en notant qu'au temps $t = \tau$, le système est à 63 % d'avancement vers l'état final.

POINT MÉTHODE

Résoudre une équation différentielle du premier ordre par séparation des variables

■ On utilise souvent en physique une méthode d'intégration des équations différentielles du premier ordre, facile à mettre en œuvre ici, dite « **par séparation des variables**³ », car elle consiste à séparer de chaque côté de l'égalité, la fonction inconnue à déterminer (par exemple q) et la variable dont elle dépend (ici t), puis à intégrer suivant la méthode habituelle. Si l'on applique cette méthode à la décharge du condensateur, on a :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{\tau} dt \Rightarrow \int \frac{dq}{q} = -\frac{1}{\tau} \int dt + K \quad (1) \quad \text{ou} \quad \int_{Q_0}^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t dt \quad (2)$$

qui donnent après intégration, et utilisation des conditions initiales ($q(t=0) = Q_0$) la solution habituelle :

$$(1) \Rightarrow \ln q(t) = -\frac{1}{\tau} t + K \Rightarrow q(t) = e^{-\frac{t}{\tau} + K} = A e^{-\frac{t}{\tau}} = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } K \text{ (ou } A = e^K \text{) constante d'intégration}$$

$$(2) \Rightarrow \ln \frac{q(t)}{Q_0} = -\frac{t-t_0}{\tau} \Rightarrow q(t) = Q_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad \text{avec } t_0 = 0$$

■ Si l'on utilise la forme intégrale indéfinie (1), il faut déterminer la constante d'intégration A avec les conditions initiales (ou les conditions aux limites si la variable est une grandeur spatiale). Si l'on utilise l'intégrale définie (2), il est impératif de choisir des bornes cohérentes entre les deux intégrales.

■ Ce deuxième choix n'est indiqué que si la séparation des variables s'applique à toute l'équation différentielle. S'il s'agit de l'équation homogène d'une équation avec second membre, il faudra choisir la forme indéterminée (1), terminer la résolution avec la solution particulière, puis, alors seulement, déterminer la constante d'intégration.

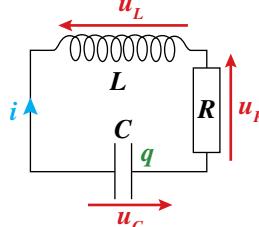
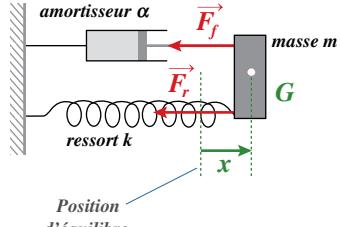
■ On connaît en général par cœur la solution de cette équation différentielle très courante. Cependant la méthode s'applique aussi à des équations plus compliquées, dont on ignore *a priori* la solution, comme par exemple des équations différentielles de cinétique chimique. C'est pourquoi il est pertinent de savoir maîtriser cette technique.

3. Le terme variable recouvre ici à la fois la fonction et la variable dont elle dépend.

III Oscillateur libre amorti

1. Mise en équation du régime libre

On étudie conjointement deux systèmes, l'un électrique, le circuit RLC série, l'autre mécanique, une masse accrochée à un ressort (qui exerce une force de rappel) et soumise à des frottements fluides. Ce dernier problème est étudié de façon détaillée dans les exercices du chapitre 13. La mise en équation du système électrique suit la même démarche que dans les circuits du premier ordre. Même si on ne propose ici qu'une présentation schématique sous forme de tableau, on notera la grande similitude quant à la méthode de résolution en électricité et en mécanique : position du problème (cadre, système, schémas, hypothèses de travail...), mise en place des outils nécessaires (grandeur utiles, conditions initiales...), application d'une loi, calcul et analyse des résultats.

SYSTÈME	Circuit RLC	Système masse-ressort-amortisseur
Schéma		
Conditions	ARQS	Référentiel galiléen
État initial	$q(t=0^-) = Q_0$ et $i(t=0^-) = 0$	$x(t=0^-) = X_0$ et $\dot{x}(t=0^-) = 0$
Loi	$u_L + u_R + u_C = 0$ (des mailles)	$m\ddot{a} = \vec{F}_f + \vec{F}_r$ (de Newton)
Équation différentielle	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$ ou $\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0$	$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$ ou $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$
ED forme 1 $\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$	$\lambda = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
ED forme 2 $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

La similitude évidente des équations différentielles se traduit par un comportement identique des deux systèmes, qu'on étudie une fois l'équation différentielle résolue. Dans la formulation 1 de l'équation différentielle, on met en évidence une **pulsation propre** ω_0 et un **facteur d'amortissement** λ . Dans la formulation 2, on retrouve **la même pulsation** ω_0 et un terme appelé **facteur de qualité** Q . Q est d'autant plus grand que l'amortissement λ est faible. En comparant les équations, on obtient aisément : $2\lambda = \frac{\omega_0}{Q}$

→ Cas particulier de l'oscillateur non amorti

Si le facteur d'amortissement λ est nul (ou le facteur de qualité infini), on retrouve en électricité le circuit LC idéal et en mécanique le système masse-ressort sans frottement. L'équation différentielle est alors celle de l'oscillateur harmonique, pour lequel la solution est de type sinusoïdal à la pulsation ω_0 , ce qui justifie son nom de pulsation propre. En l'absence d'amortissement, le système évolue donc sinusoïdalement à sa période propre T_0 et il est alors en régime permanent non stationnaire.

2. Solutions

La résolution de cette équation différentielle doit être maîtrisée, car elle intervient dans de nombreux domaines. La forme 1 de l'équation permet d'effectuer cette résolution avec un minimum de calculs et une expression des solutions facile à mémoriser. C'est pourquoi on la propose ici. On pourra toujours, une fois la solution obtenue par ce moyen, revenir aux paramètres de la forme 2 (Q et ω_0) ou aux paramètres du système R , L , C ou k , m et α .

On écrit l'équation caractéristique (EC) associée à l'équation différentielle (ED) :

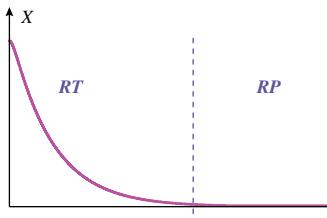
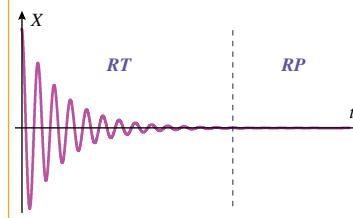
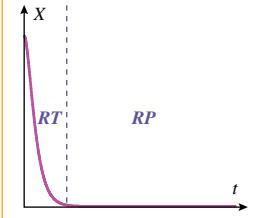
$$\ddot{X} + 2\lambda \dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad (\text{ED}) \qquad r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{EC})$$

L'équation algébrique (EC) a toujours deux solutions r_1 et r_2 , réelles ou complexes, égales ou non. Le cours de mathématiques montre que les solutions (uniques) de l'équation différentielle (ED) s'écrivent à l'aide des solutions de (EC) :

$$X(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{si } r_1 \neq r_2 \quad \text{et} \quad X(t) = (At + B)e^{r_0 t} \quad \text{si } r_1 = r_2 = r_0$$

A et B sont des constantes d'intégration (au nombre de 2 puisque l'équation différentielle est du second ordre) qui se déterminent à l'aide les conditions initiales du problème.

Selon la valeur du discriminant de (EC), les solutions sont réelles ou complexes, ce qui se traduit par des différences dans l'allure des solutions de l'équation différentielle, qui sont présentées dans le tableau ci-dessous. On a choisi volontairement de mettre l'équation sous une forme qui permet de calculer le discriminant réduit (voir outils p. 127) afin de donner des expressions des solutions les plus simples et les plus symétriques possibles. Quelle que soit la forme choisie pour la solution, il apparaît 2 constantes d'intégration (A , B ou A' , B'). On note que les différents types de solutions sont aussi appelés régimes...

Régime	Apériodique	Pseudo-périodique	Critique
Amortissement	Fort $\Rightarrow \lambda > \omega_0$	Faible $\Rightarrow \lambda < \omega_0$	Critique $\Rightarrow \lambda = \omega_0$
Facteur qualité	Petit $\Rightarrow Q < \frac{1}{2}$	Grand $\Rightarrow Q > \frac{1}{2}$	Critique $\Rightarrow Q = \frac{1}{2}$
Signe de Δ'	$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 > 0$	$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$	$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0$
Solution de (EC)	$r_{1,2} = -\lambda \pm i\omega_p$	$r_{1,2} = -\lambda \pm j\omega_p$	$r_{1,2} = r_0 = -\lambda$
Expression de ω_p	$\omega_p = \sqrt{\Delta'} = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$	$\omega_p = \sqrt{-\Delta'} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$	
Solutions de (ED)	$X(t) = e^{-\lambda t}(Ae^{i\omega_p t} + Be^{-i\omega_p t})$ $X(t) = e^{-\lambda t}[A'ch(\omega_p t) + B'sh(\omega_p t)]$	$X(t) = e^{-\lambda t}(Ae^{j\omega_p t} + Be^{-j\omega_p t})$ $X(t) = e^{-\lambda t}[A'\cos(\omega_p t) + B'\sin(\omega_p t)]$	$X(t) = e^{-\lambda t}(At + B)$
Allure de la solution RT = régime transitoire RP = régime permanent			

N. B. : En physique, on note $j^2 = -1$ pour éviter la confusion avec l'intensité du courant.

3. Propriétés des différents régimes de solutions

→ Amortissement

- Tous les régimes s'amortissent en $e^{-\lambda t}$, et au bout de quelques temps caractéristiques du système, on peut considérer $X \approx 0$. Il s'agit donc bien de régimes transitoires, le système retourne à son état d'équilibre $X(t) = 0$.
- Le régime critique n'existe pas réellement, puisqu'il correspond à un cas limite, donc à une valeur exacte des paramètres du problème. Cependant on cherche souvent à s'en rapprocher le plus possible, car c'est celui qui s'amortit le plus rapidement. Le régime critique correspond à $\Delta' = 0$, soit :

$$\lambda_{critique} = \omega_0$$

$$R_{critique} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

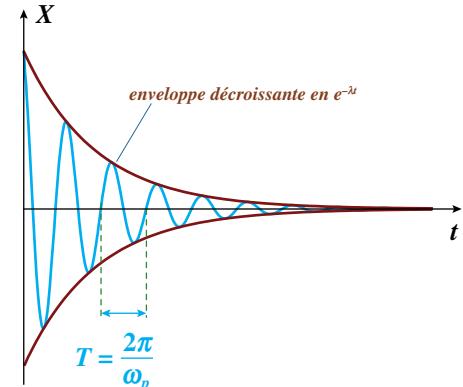
$$\alpha_{critique} = 2\sqrt{mk}$$

- Les systèmes étudiés sont des oscillateurs, mais on voit que si l'amortissement est trop fort, ils n'arrivent pas à osciller.

→ Cas du régime pseudo-périodique

Le régime pseudo-périodique se traduit par des oscillations dont l'amplitude décroît exponentiellement, la courbe est donc une sinusoïde dont l'enveloppe est exponentielle. La pseudo-période est la période de la partie périodique de la solution soit :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}} \text{ soit : } T = T_0 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$



La pseudo-période est donc supérieure à la période propre T_0 de l'oscillateur idéal (non amorti), cependant si le coefficient d'amortissement est assez faible alors on peut, en première approximation, considérer que la pseudo-période est à peu près égale à la période propre : $T \approx T_0$ (si λ faible).

→ Expressions des solutions en fonction du facteur de qualité

Il est facile de vérifier qu'en utilisant le facteur de qualité, on écrit comme suit les solutions, où, selon le cas, (A, B) ou (A', B') ou (A'', φ) est un couple de constantes d'intégration.

$$X_{ap\'eriodique}(t) = e^{-\frac{\omega}{2Q}t} \left[A \exp\left(\omega_0 t \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right) + B \exp\left(-\omega_0 t \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right) \right]$$

$$X_{critique}(t) = e^{-\frac{\omega}{2Q}t} [At + B]$$

$$X_{pseudo-p\'eriodique}(t) = e^{-\frac{\omega}{2Q}t} \left[A' \cos\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right) + B' \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right) \right] = A'' e^{-\frac{\omega}{2Q}t} \cos\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} + \varphi\right)$$

Avec une pseudo-période : $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = T_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

4. Réponse à un échelon

En électricité, on obtient l'échelon en plaçant un générateur de tension continue ($E = \text{f.e.m.}$) dans le circuit ouvert RLC série initialement dans l'état zéro (condensateur déchargé), puis on ferme l'interrupteur. En mécanique, le système étant immobile dans son état de repos, un opérateur déplace brutalement le support du ressort le long de l'axe d'une distance d_0 (algébrique). Les équations différentielles sont alors :

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L} \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}d_0$$

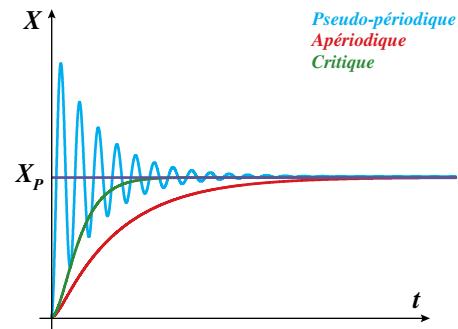
Comme pour les circuits du premier ordre, la réponse à un échelon du système se traduit par une équation différentielle identique à celle du régime libre, mais à second membre non nul et constant. Les solutions sont donc identiques aux 3 régimes libres précédents (solutions homogènes de l'équation différentielle) à une constante additive près (la solution particulière de l'équation différentielle) :

$$X(t) = X_H(t) + X_p$$

avec X_H l'un des régimes libres (pseudo-périodique, apériodique ou critique). Soit :

$$q(t) = q_H(t) + CE \quad \text{ou} \quad x(t) = x_H(t) + d_0$$

Les comportements des oscillateurs sont semblables au régime libre, avec trois régimes possibles, mais $X(t)$ tend cette fois vers une limite non nulle, un état permanent correspondant à un nouvel état d'équilibre de l'oscillateur, simplement décalé. On a placé sur les courbes ci-contre les réponses dans le cas où le système est initialement dans son état zéro ($X(t) = 0$) et qu'il subit l'échelon. On reconnaît sans difficulté les différents régimes.



5. Aspect énergétique

On obtient les équations énergétiques en multipliant l'équation différentielle par la dérivée de la fonction, c'est-à-dire en électricité par l'intensité ($i = \dot{q}$) et en mécanique par la vitesse ($v = \dot{x}$). Le terme du second membre est celui de la réponse à un échelon, dans le cas du régime libre ce terme est nul :

► Électricité : $Li \frac{di}{dt} + Ri \cdot i + \frac{q}{c} \cdot \dot{q} = Ei$ soit : $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) + Ri^2 = Ei$

Où l'on reconnaît les énergies magnétique et électrique : $\epsilon_m = \frac{1}{2} Li^2$ et $\epsilon_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

► Mécanique : $m \nu \frac{d\nu}{dt} + \alpha \nu \cdot \nu + kx \cdot \dot{x} = kd_0 \nu$ soit : $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \nu^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) + \alpha \nu^2 = kd_0 \nu$

Où l'on reconnaît les énergies cinétique et potentielle : $E_c = \frac{1}{2} m \nu^2$ et $E_p = \frac{1}{2} kx^2$

On exprime les équations en termes de puissance (énergie par unité de temps) :

RÉGIME	ÉLECTRICITÉ	MÉCANIQUE
Régime libre	$\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_J = 0$	$\mathcal{P}_c + \mathcal{P}_p + \mathcal{P}_f = 0$
Réponse à un échelon	$\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_J = \mathcal{P}_{\text{générateur}}$	$\mathcal{P}_c + \mathcal{P}_p + \mathcal{P}_f = \mathcal{P}_{\text{opérateur}}$

► **Électricité** : Lors de la réponse à un échelon, le circuit initialement dans l'état zéro ne contient pas d'énergie, le générateur fournit de l'énergie à tous les composants, le résistor en dissipe une partie. À la fin, le condensateur est chargé, il contient donc de l'énergie, plus rien n'évolue, la bobine et le résistor ne sont plus parcourus par aucun courant puisque l'intensité s'est annulée et leur énergie est nulle. Dans le

régime libre, c'est le condensateur initialement chargé qui fournit une énergie au circuit, énergie qui finit par se dissiper totalement dans la résistance, à la fin plus rien n'évolue et le condensateur est déchargé, il n'y a plus d'énergie dans le système. Notons que si l'on est en présence du régime pseudo-périodique, le condensateur et la bobine échangent en permanence de l'énergie tant que dure le régime transitoire, tandis que la résistance en prélève une partie qu'elle dissipe sous forme de chaleur.

■ **Mécanique** : Le système étant initialement au repos à l'équilibre, l'opérateur fournit de l'énergie en déplaçant le support, le système acquiert de l'énergie cinétique et potentielle élastique, le frottement dissipe de l'énergie, jusqu'à immobilisation du système. En régime libre, le ressort initialement écarté de l'équilibre libère de l'énergie dans le système qui finit par être totalement dissipée par le frottement. Comme en électricité, dans le régime pseudo-périodique, il y a échange d'énergie cinétique et potentielle jusqu'à ce que le frottement ait tout dissipé sous forme de chaleur.

Dans le système idéal libre (pas de résistance ou pas de frottement) l'échange énergétique cinétique/potentielle ou magnétique/électrostatique se poursuit indéfiniment, l'énergie totale (mécanique ou électromagnétique) restant constante.

IV Comprendre et observer le comportement des systèmes

1. Analogie électromécanique

Les paragraphes précédents montrent à quel point les deux systèmes (électrique et mécanique) sont analogues, ils sont régis par les mêmes équations différentielles et se comportent donc de la même façon. On peut dresser un tableau comparatif, d'une part en s'appuyant sur la similitude des équations et d'autre part sur la similitude des comportements. On le présente ci-dessous plutôt en régime libre, la réponse à un échelon traduit évidemment les mêmes analogies. On retrouvera les mêmes analogies en régime forcé (*voir chapitres 10 et 11*).

SYSTÈME	ÉLECTRIQUE	MÉCANIQUE	ANALOGIE
Équation différentielle	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$	$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$	$\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$
Grandeur oscillante	La charge q du condensateur tend vers 0, en oscillant si l'amortissement n'est pas trop fort.	L' élongation x du ressort tend vers 0, en oscillant si l'amortissement n'est pas trop fort.	$X : q \leftrightarrow x$
Dérivée	Les variations de la charge sont données par l' intensité : $i = \frac{dq}{dt}$	Les variations de l'élongation sont données par la vitesse : $v = \frac{dx}{dt}$	$\dot{X} : i \leftrightarrow v$
Répugnance au changement	La bobine s'oppose aux variations du courant. Cette répugnance au changement est caractérisée par L .	L' inertie s'oppose aux variations de la vitesse. Cette répugnance au changement est caractérisée par m .	bobine \Leftrightarrow inertie
Mise en oscillation	Chargé, en circuit ouvert, le condensateur est capable de mettre le système en oscillation lors de la fermeture du circuit. Il est caractérisé par sa capacité C .	Déformé et maintenu, le ressort est capable de mettre le système en oscillation lorsqu'on le lâchera. Il est caractérisé par sa constante de raideur k .	condensateur \Updownarrow ressort
Facteur d'amortissement	Le système s'amortit en raison de la présence du résistor caractérisé par sa résistance R .	Le système s'amortit en raison de la présence du frottement caractérisé par le coefficient α .	résistor \Leftrightarrow frottement

L'analogie présente un grand intérêt pour comprendre les systèmes électriques, qui sont plus difficiles à appréhender par la pensée que les systèmes mécaniques que l'on « voit ». L'analogie se traduit également au niveau des échanges énergétiques du système.

SYSTÈME	ÉLECTRIQUE	MÉCANIQUE	ANALOGIE
Stockage d'énergie	Le condensateur dispose à tout instant d'une énergie électrique . Cette énergie peut être stockée, si on bloque le condensateur dans cet état en ouvrant le circuit et vaut : $\epsilon_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$	Le ressort dispose à tout instant d'une énergie potentielle . Cette énergie peut être stockée si l'on bloque le ressort en immobilisant le système dans une position quelconque et vaut : $E_p = \frac{1}{2} kx^2$	$\epsilon_E \leftrightarrow E_p$ et $I/C \leftrightarrow k$
Énergie en fonctionnement	Lorsque le courant circule, la bobine « contient » de l' énergie magnétique . Non stockable, cette énergie s'annule en l'absence de courant et vaut : $\epsilon_M = \frac{1}{2} L I^2$	Lorsque le mobile se déplace, le solide « contient » de l' énergie cinétique . Non stockable, cette énergie s'annule en l'absence de mouvement et vaut : $E_c = \frac{1}{2} mv^2$	$\epsilon_M \leftrightarrow E_c$ et $L \leftrightarrow m$
Énergie dissipée	En cas d'amortissement, la résistance dissipe de l'énergie sous forme de chaleur (effet Joule).	En cas d'amortissement, les frottements dissipent de l'énergie sous forme de chaleur.	$R \leftrightarrow \alpha$
Échanges énergétiques	Les oscillations traduisent un échange permanent entre ϵ_E et ϵ_M	Les oscillations traduisent un échange permanent entre E_p et E_c .	$\epsilon_M \rightleftharpoons \epsilon_E$ $E_c \rightleftharpoons E_p$
Énergie susceptible d'être conservée	L' énergie électromagnétique ϵ_{em} reste constante si l'amortissement est nul et décroît sinon : $\epsilon_{em} = \epsilon_E + \epsilon_M$	L' énergie mécanique E_m reste constante si l'amortissement est nul et décroît sinon : $E_m = E_p + E_c$	$\epsilon_{em} \leftrightarrow E_m$

2. Diagramme de phase

L'espace des phases d'un système permet de représenter l'ensemble de ses variables, donc de visualiser son comportement indépendamment du temps. La notion d'espace des phases est limitée ici à des systèmes à un seul degré de liberté, c'est-à-dire complètement décrits par l'évolution d'une seule variable, comme par exemple $q(t)$ ou $x(t)$.

Définitions

- Le **plan de phase** d'un système à un seul degré de liberté $X(t)$ est le plan dont les coordonnées des points P sont $P(X(t); \dot{X}(t))$.
- Le **portrait de phase** d'un système est l'ensemble des courbes (ou **trajectoires de phase**) susceptibles d'être suivies par le système dans le plan de phase, chaque courbe correspondant à des conditions initiales différentes.

La notion est en fait plus générale et on parle d'espace des phases pour un système à plusieurs degrés de liberté, chacun déterminant deux dimensions, ainsi un point matériel évolue en toute généralité dans un espace des phases à 6 dimensions (3 variables de position et 3 dérivées). Cette notion est particulièrement utile en théorie du chaos, qui est l'une des trois grandes théories physiques du xx^e siècle (avec la relativité et la physique quantique). Cette théorie traite des systèmes hyper-sensibles aux conditions initiales, c'est-à-dire tels qu'une légère modification de ces dernières peut conduire à une évolution très différente du système⁴.

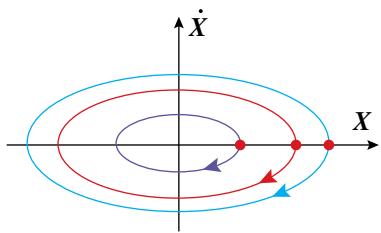
4. Bien que déterministe, l'évolution d'un tel système est très difficile à prévoir, ce qui est le cas par exemple de l'atmosphère et donc des conditions météorologiques. L'effet papillon est le concept devenu courant pour caractériser ces systèmes, mais il est souvent interprété à contresens et confondu avec un effet dominos (successions de causes à effets), ce qu'il n'est pas.

→ Cas de l'oscillateur harmonique (oscillateur idéal non amorti)

L'oscillateur harmonique vérifie : $X(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et donc

$$\dot{X}(t) = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \text{ qui conduit à : } \left(\frac{X}{X_m} \right)^2 + \left(\frac{\dot{X}}{X_m \omega_0} \right)^2 = 1$$

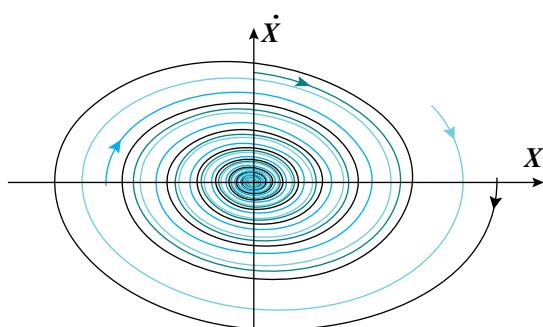
qui est l'équation d'une ellipse. Toutes les trajectoires de phase sont donc des ellipses (sur l'axe des abscisses de $-X_m$ à X_m et sur l'axe des ordonnées de $-X_m \omega_0$ à $X_m \omega_0$) donc d'autant plus grandes que l'amplitude X_m est grande. Sur une ellipse donnée, toutes les conditions initiales qui conduisent à l'amplitude X_m sont possibles, chaque point de l'ellipse étant une position initiale possible et conduisant à une valeur de φ donnée (de 0 à 2π), la plus habituelle étant $X(0) = X_0$ et $\dot{X}(0) = 0$ qui correspond au point repéré par • sur le schéma (on a alors $X_0 = X_m$ et $\varphi = 0$). On peut aussi normaliser la représentation, en choisissant comme ordonnée la grandeur \dot{X} / ω_0 , les trajectoires de phase sont alors des cercles (voir par exemple exercice n° 6 p. 146).



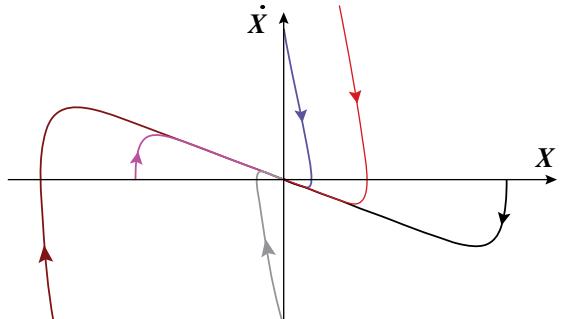
→ Cas de l'oscillateur amorti

Un portrait de phase (ensemble de trajectoires) correspond à un système donné c'est-à-dire avec un ensemble de paramètres dont les valeurs sont fixées (ω_0 et Q ou λ fixés, donc R , L , C ou k , m , α donnés).

Dans un portrait de phase d'oscillateur amorti, toutes les trajectoires ont la même allure, allure qui dépend du régime de comportement du système, donc du facteur d'amortissement ou de qualité. Pour un régime pseudo-périodique, la trajectoire est une spirale qui s'enroule autour de l'état final du système en s'en rapprochant de plus en plus. Pour un régime apériodique ou critique, la trajectoire reste dans un même demi-plan, voire dans un même quart de plan (pas d'oscillations). Le point de départ de la trajectoire de phase dépend uniquement des conditions initiales. À titre d'exercice, le lecteur est invité à déterminer quelles seraient les conditions initiales correspondant aux diverses trajectoires représentées ci-après, en imaginant comment le mouvement du ressort est initié, puis à se représenter la suite du mouvement en suivant ses propriétés sur le diagramme.



Portrait de phase d'un oscillateur peu amorti (pseudo-périodique)

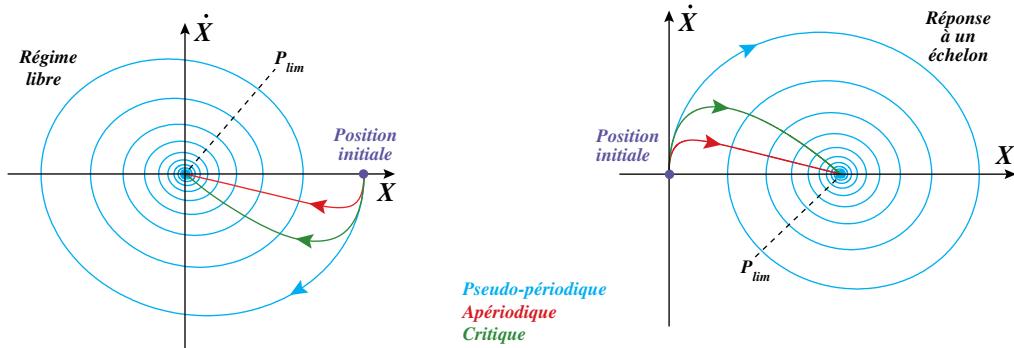


Portrait de phase d'un oscillateur très amorti (apériodique)

Dans tous les cas, la trajectoire de phase évolue vers l'état permanent qui suit le régime transitoire : $P_{\lim}(0,0)$ pour un régime libre, $P_{\lim}(X_p, 0)$ pour une réponse à un échelon.

On peut comparer les trajectoires de phase des différents régimes pour des conditions initiales identiques comme dans le schéma ci-dessous : **attention** ce type de graphe est trompeur, car il représente la superposition de trajectoires de systèmes possédant des paramètres différents (ce qui explique le croisement possible des trajectoires). On obtient des comportements très semblables pour un régime libre

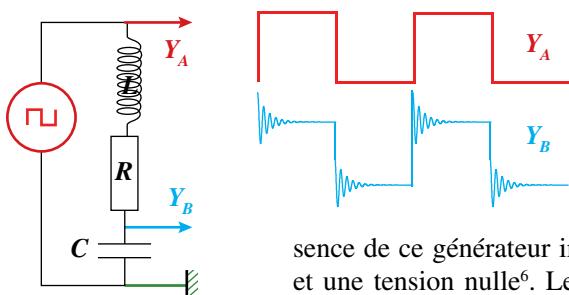
(ci-dessous avec conditions initiales $X(0) = X_0$ et $\dot{X}(0) = 0$) et pour une réponse à un échelon (ci-dessous avec $X(0) = 0$ et $\dot{X}(0) = 0$), seule la limite change.



Propriétés

- La trajectoire de phase d'un mouvement périodique est une courbe fermée dont le système effectue un tour en une période.
- Une trajectoire de phase fermée est parcourue dans le sens horaire.
- Les trajectoires de phase d'un même portrait de phase (paramètres fixés) ne peuvent pas se couper.
- Pour des conditions initiales données, il n'y a qu'une solution mathématique possible (système déterministe), donc une seule trajectoire de phase. Or sur une trajectoire de phase, n'importe quel point peut être considéré comme une position initiale. Donc un point donné ne peut se trouver que sur une seule trajectoire de phase⁵.
- Si le mouvement est périodique, le système se retrouve exactement dans le même état après une période, donc revient à son point de départ sur la trajectoire de phase, laquelle est donc nécessairement fermée. Par ailleurs, la dérivée de la grandeur X , qui est aussi l'ordonnée, est nécessairement positive sur la partie supérieure, donc X augmente, on se déplace par conséquent vers « la droite » et inversement sur la partie inférieure, ce qui donne un sens global de parcours dans le sens horaire.

3. Utilisation d'une tension créneau

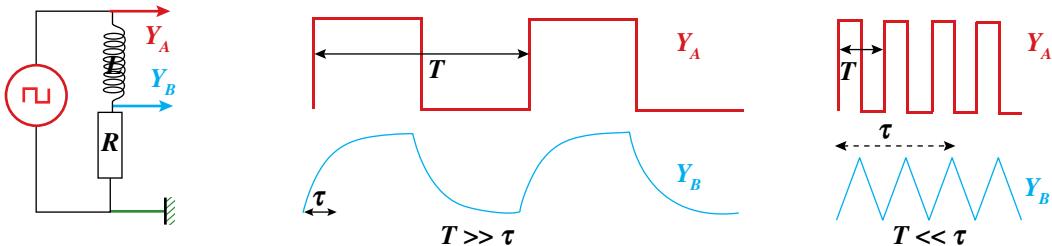


Il peut être compliqué d'observer les régimes transitoires, par nature éphémères, en particulier en électricité où leur durée peut être très courte (quelques ms par exemple). Un moyen de les visualiser est l'utilisation d'une tension d'alimentation en créneau (signal carré d'un GBF). En effet la présence de ce générateur impose au système, successivement, un échelon et une tension nulle⁶. Le système alterne donc entre un comportement

5. Il s'agit des trajectoires réellement possibles. Il existe cependant des situations limites. D'une part, les limites vers lesquelles tendent les systèmes sont des points de convergence des trajectoires (théoriquement atteintes en un temps infini pour l'oscillateur amorti). D'autre part, des situations initiales limites donnent des trajectoires de phase dites critiques qui peuvent se toucher (*voir exercice n° 6 p. 146 par exemple*).

6. Notons que l'on peut aussi voir ce type de circuit comme un RLC en régime forcé, puisqu'on impose une tension alternative.

de réponse à un échelon et de régime libre. Comme cette alternance est périodique (période du créneau) on peut visualiser le comportement du système à l'oscilloscope, qui affiche par exemple les courbes page précédente pour un RLC peu amorti (régime pseudo-périodique). On met encore aussi en évidence la similarité des deux réponses (libre et échelon).



Il est évidemment essentiel de choisir une période judicieuse du signal carré, en général de l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire ($T > \tau$ ci-dessus). Néanmoins, avec d'autres choix, on peut parfois obtenir une tension intéressante, comme par exemple avec un carré de période suffisamment courte pour que seul le début quasi linéaire de la réponse d'un circuit RL soit observable, ce qui donne une tension triangulaire ($T \ll \tau$ ci-dessus).

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Circuits du premier ordre : mise en équation, résolution, représentation graphique de l'évolution temporelle des grandeurs électriques, temps caractéristique, influence des paramètres. Cette question peut s'appliquer à un circuit RC ou un circuit RL, et dans chaque cas pour un circuit soumis à un échelon ou en régime libre.
- Oscillateur libre amorti : système électrique et système mécanique, mise en équation, résolution de l'équation différentielle, étude des différents régimes, influence des paramètres.
- Analogie électromécanique : comparaison entre les dispositifs et leur comportement (en particulier énergétique).
- Portrait de phase : définition, propriétés, cas de l'oscillateur amorti.

Erreurs à éviter

- Ne pas confondre état initial et condition initiale.

Quelques « trucs » utiles

- Ce chapitre est extrêmement riche et ouvre la porte à de nombreux développements possibles. Il est essentiel dans un premier temps de refaire toutes les démonstrations du cours en détail, de retrouver méthodiquement tous les résultats donnés schématiquement dans les tableaux, d'effectuer tous les tracés. Cela est d'autant plus vrai que l'actuel étudiant de CPGE est tout à fait novice en électricité, partie de la physique qui constitue pourtant un fondement efficace pour la présentation d'un problème, car on y utilise peu de mathématiques (à part des équations différentielles linéaires), ce qui permet de privilégier la position du problème, de réfléchir au comportement physique des systèmes, aux conditions initiales, à la prévision de l'évolution du système...)
- Étudier l'influence de tous les paramètres nécessiterait trop de développements, le lecteur est vivement engagé à étudier comment sont modifiées les courbes et les temps caractéristiques des systèmes, si l'on augmente ou diminue la résistance, la capacité, l'inductance, la f.e.m. et tous leurs équivalents en mécanique.

1 Charge et décharge d'un condensateur (d'après Enstim 2007) ★★

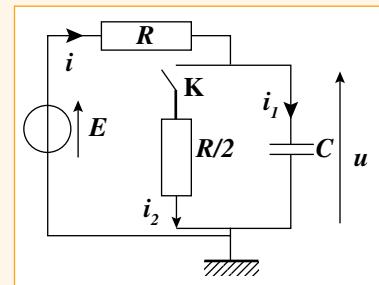
→ corrigé p. 147

On considère le montage ci-contre. Initialement le condensateur est déchargé, le générateur éteint et l'interrupteur ouvert.

- 1 L'interrupteur reste ouvert, on allume le générateur. Déterminer $u(t)$. Quelle est la constante de temps de ce circuit ? Quelle est la tension finale ? Au bout de combien de temps peut-on considérer qu'elle est atteinte ?

On suppose que la tension finale précédente est atteinte depuis longtemps et on ferme l'interrupteur. On choisit cet instant comme nouvelle origine des temps.

- 2 Montrer, en transformant le réseau, que le circuit est équivalent à un simple circuit RC en charge⁷ dont on précisera les caractéristiques. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ ainsi que la solution $u(t)$ et tracer l'allure de $u(t)$.
- 3 Quelle est la constante de temps de ce circuit ? La mettre en évidence sur la courbe.



2 Réponse à un échelon (d'après Enstim 2005) ★

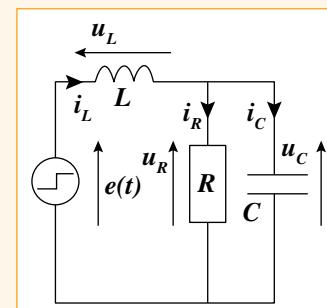
→ corrigé p. 148

On considère le circuit ci-contre alimenté par un générateur d'échelon de tension :

$$e(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \quad \text{et} \quad e(t) = E \text{ pour } t > 0$$

Jusqu'à $t = 0$, toutes les grandeurs électriques sont nulles.

- 1 Donner en les justifiant les valeurs des six grandeurs électriques u_L , u_R , u_C , i_L , i_R et i_C à la date $t = 0^+$. Quelles grandeurs présentent des discontinuités ?
- 2 Donner, en les justifiant, les valeurs des six grandeurs électriques u_L , u_R , u_C , i_L , i_R et i_C à la date $t = +\infty$.
- 3 Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur. La mettre sous une forme canonique (*présentées dans le tableau p. 135*) et exprimer les différents paramètres. On fixe L et C . À quelle condition sur la résistance a-t-on un régime pseudo-périodique ? Apériodique ? Comparer au circuit RLC série et interpréter le résultat.



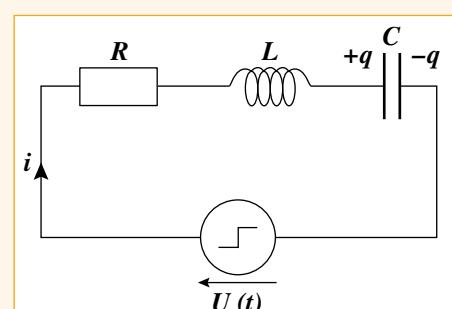
3 Étude d'un régime pseudo-périodique (extrait Enstim 2005) ★

→ corrigé p. 149

Un circuit électrique est composé d'une résistance R , d'une bobine d'inductance pure L et d'un condensateur de capacité C . Ces dipôles sont disposés en série et on soumet le circuit à un échelon de tension $U(t)$ de hauteur E tel que

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0, \\ E & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

Les choix du sens du courant i dans le circuit et de la plaque portant la charge q du condensateur sont donnés sur la figure ci-contre.



7. Cette question est formulée strictement comme dans l'énoncé initial, et de ce fait, peut induire en erreur, ce qu'on évitera en suivant scrupuleusement les questions (voir commentaire bien comprendre p. 148).

On pose $\gamma = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- ① Expliquer simplement pourquoi à $t = 0^-$, la charge q et le courant i sont nuls.
- ② Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur pour $t > 0$. Préciser, en les justifiant soigneusement, les valeurs initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée $\frac{dq}{dt}(0^+)$.

Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs de R , L et C . On suppose, dans la suite, la condition $\omega_0 > \gamma$ réalisée.

- ③ Montrer que l'expression de la charge pour $t > 0$ peut se mettre sous la forme :

$$q(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-\gamma t} + D$$

où on déterminera ω , A , B et D en fonction de C , E , ω_0 et γ .

- ④ Exprimer le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$ en fonction de C , E , ω_0 et γ .
- ⑤ Donner l'allure des courbes $q(t)$ et $i(t)$. Quelles sont leurs valeurs à la fin du régime transitoire ? Justifier par des considérations simples ces valeurs atteintes.
- ⑥ Déterminer l'énergie totale E_G fournie par le générateur ainsi que l'énergie E_{LC} emmagasinée dans la bobine et le condensateur à la fin du régime transitoire en fonction de C et E . En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime particulier dans lequel se trouve le circuit ? Interpréter le résultat paradoxal qui apparaît dans le cas limite $R \rightarrow 0$.

4 Oscillateurs couplés (d'après Mines Ponts MP 2008) ★★★

→ corrigé p. 151

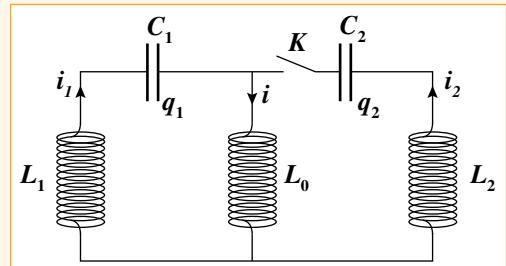
On considère le circuit schématisé ci-contre. Initialement, seul le condensateur de la branche 2 porte la charge Q_0 , le condensateur de la branche 1 est déchargé, aucun courant ne circule dans les circuits. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

- ① Établir les équations différentielles vérifiées par q_1 et q_2 en respectant les choix d'orientation de l'énoncé. Montrer que, dans le cas où $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$, elles sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} \alpha \ddot{q}_1 + \beta \ddot{q}_2 + \gamma q_1 = 0 \\ \alpha \ddot{q}_2 + \beta \ddot{q}_1 + \gamma q_2 = 0 \end{cases}$$

Où α , β et γ s'expriment en fonction de L , L_0 et C . Préciser les conditions initiales utiles.

- ② Les équations précédentes étant couplées (préciser la signification de ce terme), on introduit les variables S et D telles que $S = q_2 + q_1$ et $D = q_2 - q_1$. Montrer qu'à l'aide de combinaisons linéaires simples des deux équations différentielles, on obtient deux équations découplées en S et D , c'est-à-dire l'une portant uniquement sur S et l'autre uniquement sur D .
- ③ Résoudre les équations en S et D , puis en déduire q_1 et q_2 .
- ④ Quel dipôle est responsable du couplage ? Discuter l'allure des évolutions des charges selon que le couplage est fort, faible ou nul. Tracer les courbes $q_1(t)$ et $q_2(t)$ dans le cas d'un couplage faible.



5 Oscillations amorties (extrait ENSTIM 2010 – sans calculatrice) ★★

→ corrigé p. 154

On étudie les petits mouvements d'un point matériel M dans une gouttière cylindrique de rayon R . On repère la position de M sur le cercle à l'aide d'un angle θ par rapport à la verticale ($\theta = 0$ au point le

plus bas). Le point étant soumis uniquement à des frottements fluides de coefficient α , il a été démontré dans les questions précédentes du sujet que l'équation différentielle vérifiée par θ est la suivante : $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0$ où $g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$ est la valeur du champ de pesanteur. Initialement le mobile est dans la position la plus basse et on lui communique une vitesse V_0 horizontale.

N.B. : On verra dans le cours de mécanique qu'on a alors $V_0 = R\dot{\theta}(t=0)$

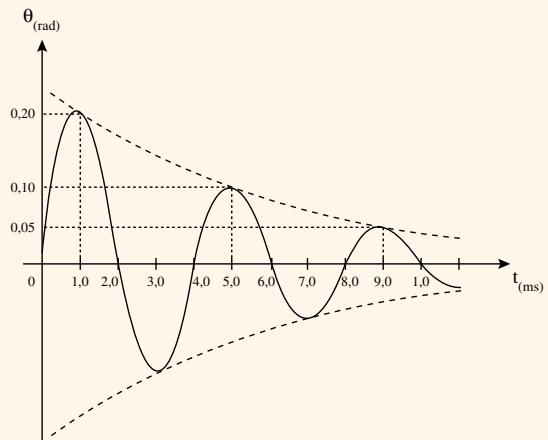
- Les grandeurs m , g et R étant fixées, donner une condition sur α pour que le mouvement soit pseudo-périodique. Cette condition étant vérifiée, exprimer $\theta(t)$ sous la forme : $\theta(t) = Ae^{-t/\tau} \sin(\Omega t)$

On justifiera soigneusement l'établissement de cette relation et on exprimera A , τ et Ω en fonction de V_0 , m , g , R et α .

- L'allure de la courbe représentative de la fonction $\theta(t)$ est donnée ci-contre. On appelle décrement logarithmique la grandeur sans dimension $\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right)$ où T désigne la pseudo-période.

Exprimer α en fonction de δ , m et T . Par lecture graphique déterminer les valeurs de T et δ . En déduire celle de α (sans omettre de préciser son unité), sachant que $m = 100 \text{ g}$. On donne : $\ln 2 = 0,7$

- Donner un ordre de grandeur du facteur de qualité. Commenter.

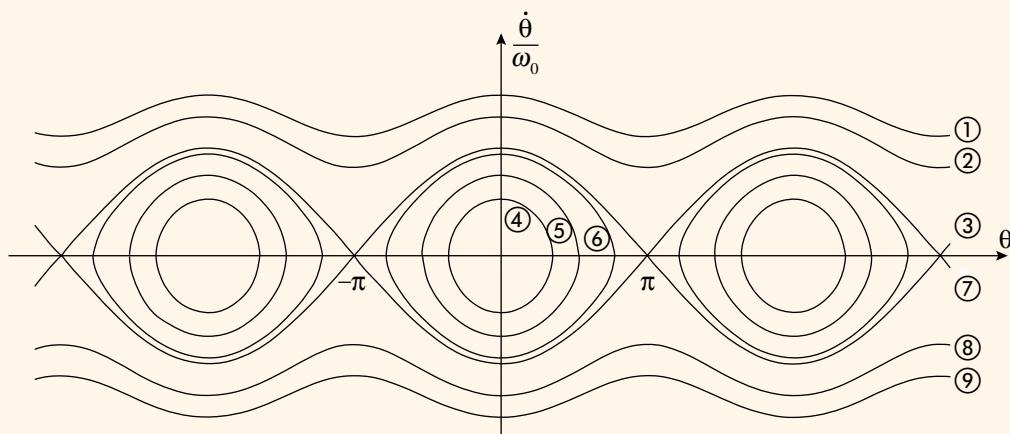


6 Portrait de phase (d'après Capes 2000) ★★★

→ corrigé p. 155

Un anneau assimilé à un point matériel M est astreint à se déplacer sans frottement sur un cerceau vertical de centre O. On note A la position la plus basse, le mouvement de M est décrit par l'angle θ entre OA et OM. Le portrait de phase de ce système figure ci-dessous. On raisonnera sur les conditions initiales suivantes : initialement M est au point le plus bas du cerceau et on lui communique à $t = 0$ la vitesse v_0 .

- Sans écrire d'équation, expliquer qualitativement comment le point peut se déplacer sur le cercle selon la valeur de v_0 et mettre en évidence l'existence d'une valeur particulière $v_{0\text{lim}}$.
- Interpréter le portrait de phase : identifier les trajectoires fermées et les trajectoires ouvertes, indiquer à quelle valeur de v_0 elles correspondent, et pour chacune, situer le point de départ et le sens de parcours. (Comparer en particulier ① et ②, ① et ⑨, ④ et ⑥). Les trajectoires ③ et ⑦ jouent un rôle particulier : justifier qu'elles aient des points communs.



CORRIGÉS

1 Charge et décharge d'un condensateur

→ énoncé p. 144

- 1 K étant ouvert, la résistance $R/2$ ne joue aucun rôle, il s'agit d'un circuit RC série, soumis à un échelon de tension. Ce cas est exactement celui du cours, en définissant $q(t)$ la charge de l'armature supérieure du schéma, soit avec les notations de l'énoncé : $i_1 = i = \dot{q}$. En appliquant la loi des mailles, il vient :

$$R\dot{q} + u = E \quad \text{soit : } RC\dot{u} + u = E \quad \text{ou} \quad \dot{u} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{RC} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

(On obtient évidemment la même équation, en remplaçant q par Cu dans l'équation du cours)

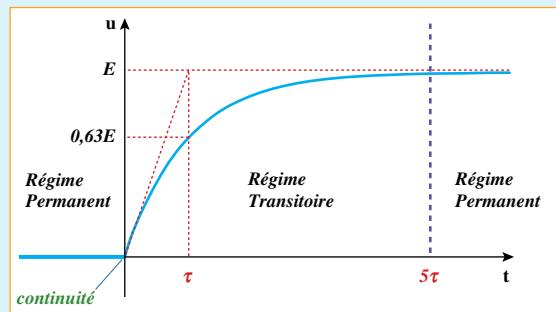
La solution est $u = u_H + u_{SP}$. La solution homogène est une exponentielle décroissante et la solution particulière est toujours recherchée selon la forme du second membre, soit ici une fonction constante, d'où :

$$u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E \quad (\text{A une constante d'intégration})$$

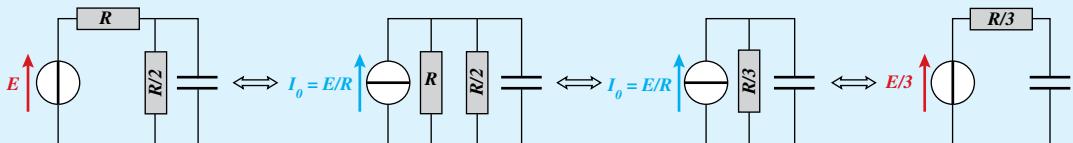
avec : à $t = 0$ $u(t) = 0$, car la tension aux bornes du condensateur initialement déchargé est continue, d'où :

$$A = -E \quad \text{et finalement : } u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

On obtient la courbe ci-contre où figure τ . La tension finale est la limite de la fonction, soit $u(t \rightarrow \infty) = E$. Cette valeur est théoriquement atteinte au bout d'un temps infini, en pratique, l'écart entre la tension $u(t)$ et sa limite devient inférieure à 1 % au bout de 5τ et inférieure à 0,005 % au bout de 10τ (voir tableau p. 134).



- 2 L'énoncé invite à appliquer des équivalences Thévenin/Norton pour se ramener à un circuit de type RC, ce que l'on résume sur les schémas ci-dessous :



On obtient un circuit RC série alimenté par un générateur. L'équation différentielle est donc dans son principe identique à celle de la question précédente et on peut la présenter de différentes façons, selon les paramètres que l'on adopte :

$$R'C'\dot{u} + u = E' \quad \text{ou} \quad \dot{u} + \frac{u}{\tau'} = \frac{E'}{\tau'} \quad \text{ou} \quad \dot{u} + \frac{3u}{RC} = \frac{E}{RC}$$

avec : $R' = R/3$; $C' = C$; $E' = E/3$; $\tau' = RC/3 = \tau/3$

En utilisant la formulation encadrée de l'équation différentielle, la solution est de la forme habituelle

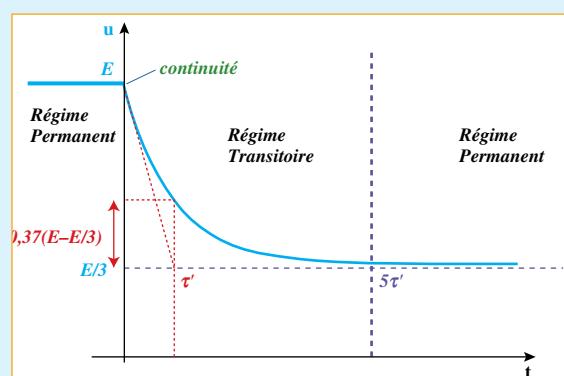
$$u = u_H + u_{SP} = Ae^{-t/\tau'} + E' = Ae^{-t/\tau'} + E/3$$

À $t = 0$, le condensateur est dans l'état final ($u = E$) de la question précédente et la tension étant continue à ses bornes :

$$u(t=0) = A + E' = E \quad \text{d'où} \quad A = E - E' = E - E/3 = 2E/3$$

$$\text{D'où la solution finale : } u(t) = \frac{E}{3} \left(1 + 2e^{-\frac{3t}{RC}} \right)$$

La courbe correspondante figure ci-contre, où l'on a placé la constante de temps $\tau' = RC/3$.



Bien comprendre

- Si l'on n'est pas vigilant ici, on appliquera au nouveau circuit le résultat habituel de la charge du condensateur (courbe croissante vers sa limite en remplaçant E par E' et R par R' dans l'expression habituelle), d'autant plus que l'énoncé parle de charge du condensateur. En fait on a bien une équation différentielle correspondant à celle de la charge, mais les conditions initiales ne sont pas celles d'un condensateur initialement déchargé, et en fait q va diminuer (il se décharge...). On évitera les écueils de ces situations en réécrivant toujours l'équation différentielle appropriée du problème, en donnant ensuite sa solution générale (avec les paramètres du problème et une constante d'intégration), puis en précisant soigneusement les conditions initiales, pour exprimer la constante d'intégration sans erreur.
- On notera que, dans tous les cas, la tangente à l'origine coupe l'asymptote à l'instant égal au temps caractéristique, et que ce dernier change, si les caractéristiques du circuit changent ($\tau \neq \tau$).

2 Réponse à un échelon

→ énoncé p. 144

- 1** Sont nécessairement continues la tension aux bornes du condensateur et l'intensité qui traverse la bobine.

Soit : $u_C(t=0^+) = u_C(t=0^-) = 0$ et $i_L(t=0^+) = i_L(t=0^-) = 0$
 Or (loi des mailles) : $u_R = u_C$ d'où : $u_R(t=0^+) = 0 = u_R(t=0^-)$ u_R est continue
 D'après la loi d'Ohm : $u_R = Ri_R$ d'où : $i_R(t=0^+) = 0 = i_R(t=0^-)$ i_R est continue
 D'après la loi des noeuds : $i_C = i_L - i_R$ d'où : $i_C(t=0^+) = 0 = i_C(t=0^-)$ i_C est continue
 D'après la loi des mailles (ELR) : $u_L + u_R = E$ d'où : $u_L(t=0^+) = E \neq u_L(t=0^-)$

La tension aux bornes de L est la seule grandeur discontinue.

- 2** Lorsque le temps est suffisamment long ($t >$ quelques τ), le régime transitoire est terminé et le régime permanent atteint. Le condensateur a atteint la charge maximale qui n'évolue plus, donc l'intensité qui est sa dérivée est nulle : $i_C(t \rightarrow \infty) = 0$. De même l'intensité dans la bobine est constante, sa dérivée est nulle, donc $u_L(t \rightarrow \infty) = 0$. Finalement la bobine se comporte alors comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert, et le circuit se réduit à un générateur et un résistor. On a donc facilement :

$$u_L(t \rightarrow \infty) = u_C(t \rightarrow \infty) = E \quad \text{et} \quad i_R(t \rightarrow \infty) = i_L(t \rightarrow \infty) = E/R$$

- 3** On écrit la loi des mailles sur ELC :

$$u_L + u_C = E \quad \text{soit} \quad L \frac{di_L}{dt} + u_C = E$$

On écrit la loi des noeuds : $i_L = i_C + i_R$ or : $u_R = Ri_R = u_C$ et $i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$

En remplaçant dans toutes les grandeurs en fonction de u_C , il vient :

$$L \frac{d}{dt}(i_C + i_R) + u_C = E \quad \text{puis} : \quad L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R} \right) + u_C = E$$

Soit finalement l'équation différentielle :

$$LC \ddot{u}_C + \frac{L}{R} \dot{u}_C + u_C = E \quad \text{que l'on écrira plutôt :} \quad \boxed{\ddot{u}_C + \frac{1}{RC} \dot{u}_C + \frac{1}{LC} u_C = \frac{E}{LC}}$$

Pour résoudre on pourra utiliser la forme : $\ddot{u}_C + 2\lambda \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$ avec : $\lambda = \frac{1}{2RC}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

Ou à l'aide du facteur de qualité⁸ : $\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$ avec : $Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

On obtient un régime pseudo-périodique si la solution homogène correspond à des solutions complexes de l'équation caractéristique associée, c'est-à-dire telle que son discriminant est négatif. On obtient un régime apériodique si les solutions de l'équation caractéristiques sont réelles, donc pour un discriminant positif.

Pseudo-périodique : $\lambda < \omega_0$ ou $R > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$; apériodique : $\lambda > \omega_0$ ou $R < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$; soit $\boxed{R_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}}$

8. Où l'on trouve ici un facteur de qualité inverse de celui du circuit RLC série, ce qui peut amener de la confusion.

où l'on identifie aisément la résistance critique R_c comme limite entre les deux régimes. Dans le circuit RLC série, l'amortissement augmente avec la résistance, et le régime apériodique (amortissement fort) correspond aux grandes valeurs de R , tandis que le régime pseudo-périodique (amortissement faible) correspond aux faibles valeurs de R . Ici au contraire, l'amortissement augmente quand R diminue (et réciproquement). Cela vient du fait que, plus la résistance est grande, plus le courant dans sa branche est faible et moins elle intervient dans le circuit. À la limite, pour une résistance infinie, le courant dans L et dans C sont identiques, la branche R n'est parcourue par aucun courant et, par suite, n'intervient plus, on se retrouve avec l'oscillateur idéal LC, donc non amorti.

3 Étude d'un régime pseudo-périodique

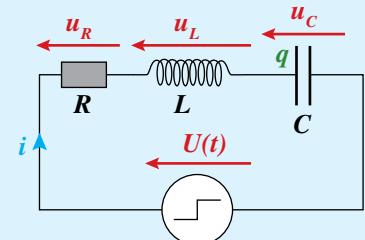
→ énoncé p. 144

1 À $t = 0$ le circuit est depuis longtemps en régime libre (circuit RLC série fermé sans aucun générateur), donc le régime permanent est atteint, le condensateur est totalement déchargé et aucun courant ne peut plus circuler dans le circuit. Toutes les grandeurs électriques sont nulles, en particulier q et i . C'est l'état zéro décrit dans le cours.

2 On écrit la loi des mailles sur le circuit :

$$\begin{aligned} u_L + u_R + u_C &= E && \text{soit :} & L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} &= E \\ \text{or : } i &= \frac{dq}{dt} = \dot{q} && \text{d'où :} & L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} &= E \\ \text{Soit : } \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} &= \frac{E}{L} && \text{qui s'écrit :} & \ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q &= \frac{E}{L} \end{aligned}$$

avec les notations de l'énoncé.



N. B. : γ de l'énoncé est identique à λ du cours. Le courant i circule dans la bobine, il est donc continu, de même que la charge du condensateur lors de la bascule de la tension du générateur (échelon). D'où :

$$q(t=0^+) = q(t=0^-) = 0 \quad \text{et} \quad i(t=0^+) = i(t=0^-) = 0 \quad \text{soit :} \quad q(t=0^+) = \dot{q}(t=0^-) = 0$$

3 La solution de l'équation différentielle est la somme d'une solution homogène q_H (équation sans second membre) et d'une solution particulière q_{SP} que l'on recherche sous la forme d'une constante, puisque le second membre est constant :

$$q(t) = q_H(t) + q_{SP}(t) \quad \text{avec :} \quad q_{SP}(t) = \text{constante} = \frac{E}{L\omega_0^2} = CE$$

L'équation différentielle homogène admet 3 types de solutions selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{de discriminant réduit :} \quad \Delta' = \gamma^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \text{car :} \quad \omega_0 > \gamma$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont donc complexes : $r_{1,2} = -\gamma \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

La solution homogène de l'équation différentielle est donc de forme générale (régime pseudo-périodique) :

$$q_H(t) = e^{-\gamma t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \quad \text{avec :} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

La solution complète de l'équation est donc : $q(t) = q_H(t) + q_{SP} = e^{-\gamma t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] + CE$

D'où : $\dot{q}(t) = -\gamma e^{-\gamma t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] + e^{-\gamma t} [-\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t)]$

A et B sont des constantes d'intégration que l'on détermine à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{aligned} q(t=0) &= A + CE = 0 && \text{d'où :} \quad A = -CE \\ \dot{q}(t=0) &= -\gamma A + B\omega = 0 && \text{d'où :} \quad B = \frac{\gamma A}{\omega} = -\frac{CE\gamma}{\omega} \end{aligned}$$

Soit finalement : $q(t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] e^{-\gamma t} + D$

$$\text{Avec :} \quad A = CE \quad B = -\frac{CE\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad D = CE \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

- 4 La dérivée de q a été calculée ci-dessus, d'où, en exprimant les différentes constantes :

$$i(t) = \dot{q}(t) = \gamma CE \left[\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \sin(\omega t) \right] e^{-\gamma t} + CE \left[\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \sin(\omega t) - \gamma \cos(\omega t) \right] e^{-\gamma t}$$

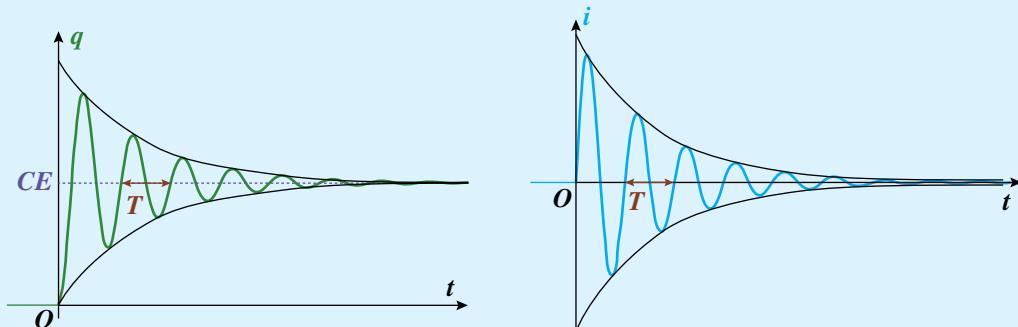
Qui se simplifie en :

$$i(t) = \dot{q}(t) = CE \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \sin(\omega t) e^{-\gamma t} = I_0 \sin(\omega t) e^{-\gamma t} \quad \text{avec : } I_0 = CE \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

- 5 On vérifie facilement que les termes exponentiels tendent vers 0 à l'infini, donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = CE \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0$$

Par ailleurs ces limites sont atteintes après un régime pseudo-sinusoidal (sinusoïde d'amplitude exponentielle décroissante, donc enveloppée par deux courbes) dont la valeur initiale est nulle. Soit les représentations ci-dessous.



Bien comprendre

- On notera d'une part la différence de limite : q tend vers une valeur non nulle et reste toujours positive, tandis que i tend vers une valeur nulle en changeant de signe alternativement. D'autre part, à l'origine, les deux grandeurs sont continues, mais q est dérivable (puisque sa dérivée i est continue), tandis que i ne l'est pas (ce qui entraîne que la tension aux bornes de la bobine n'est pas continue en 0). La tangente à l'origine est horizontale pour q mais pas pour i , comme on le voit sur le zoom ci-contre des comportements à l'origine.
- On notera également que les deux grandeurs oscillent avec la même pseudo-période mais sont déphasées.



- 6 L'énergie fournie par le générateur est la suivante :

$$E_G = \int_0^{+\infty} Ei(t) dt = E \int_0^{+\infty} \dot{q}(t) dt = E \int_0^{+\infty} \frac{dq}{dt} dt = E \int_0^{CE} dq = E[q]_0^{CE} = E(CE - 0) \quad \text{Soit : } E_G = CE^2$$

L'énergie finale dans le dipôle LC est la somme des énergies emmagasinées dans chaque dipôle, soit :

$$E_{LC} = E_L + E_C = \frac{1}{2} L i_{t \rightarrow \infty}^2 + \frac{1}{2} \frac{q_{t \rightarrow \infty}^2}{C} = 0 + \frac{(CE)^2}{2C} \quad \text{Soit : } E_{LC} = \frac{1}{2} CE^2$$

Toute l'énergie fournie par le générateur qui ne se retrouve pas emmagasinée à la fin par LC (en fait ici uniquement dans C) a été dissipée par effet Joule, soit :

$$E_{EJ} = E_G - E_{LC} = \frac{1}{2} CE^2$$

Les limites de la charge et de l'intensité sont indépendantes du régime, dans tous les cas à la fin du régime transitoire, le condensateur porte la charge CE et le courant est nul. Donc les calculs d'énergie précédents ne dépendent pas du régime. La valeur de l'énergie dissipée dans la résistance ne dépend pas de cette dernière. Si on fait tendre la résistance vers 0, il peut sembler paradoxal d'avoir toujours la même énergie dissipée par effet Joule. En fait, dans le cas d'une résistance nulle, les conclusions sur l'amortissement de la solution homogène ne sont plus valables. En effet, dans un circuit LC idéal (donc en l'absence de tout amortissement) la solution homogène ne s'amortit pas et les oscillations sinusoïdales constituent le régime permanent. De ce fait, l'énergie du générateur est partagée entre le condensateur et la bobine qui se l'échangent en permanence. Il n'y a pas de dissipation.

Bien comprendre

On pourrait même donner ici les expressions des grandeurs électriques si $R = 0$ qui montrent bien que le calcul des intégrales ou des limites des questions ❸ et ❹ ne sont plus pertinentes :

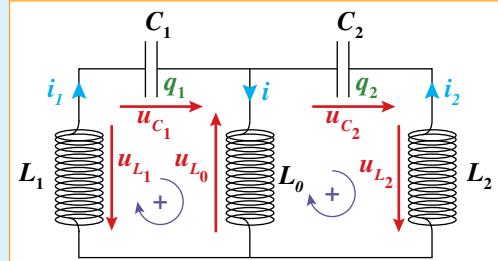
$$q(t) = q_H(t) + q_{SP} = [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)] + CE = CE(1 - \cos(\omega_0 t)) \quad \text{et} \quad i(t) = CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

4 Oscillateurs couplés

→ énoncé p. 145

- 1 Le choix des charges et des courants est imposé par l'énoncé. On peut choisir les tensions comme on le souhaite (ici en convention récepteur pour les bobines, et par rapport à la définition des charges dans les condensateurs). On a donc les relations suivantes :

$$i_1 = -\frac{dq_1}{dt} = -\dot{q}_1 \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{dq_2}{dt} = \dot{q}_2$$



$$u_{C_1} = \frac{q_1}{C_1} ; \quad u_{C_2} = \frac{q_2}{C_2} ; \quad u_{L_1} = L_1 \frac{di_1}{dt} = -L_1 \ddot{q}_1 ; \quad u_{L_2} = L_2 \frac{di_2}{dt} = L_2 \ddot{q}_2 ; \quad u_{L_0} = L_0 \frac{di}{dt}$$

Et la loi des noeuds permet d'écrire : $i = i_2 + i_1$

Bien comprendre

On n'a pas le choix d'une partie de l'orientation. Il faut savoir traiter les dipôles dans n'importe quelle orientation, on sera particulièrement vigilant sur les condensateurs qui mettent en jeu trois grandeurs algébriques. Le lecteur est invité à vérifier que (en conservant les charges qui sont les grandeurs que l'on cherche) d'autres choix d'orientation des courants et des tensions conduisent aux mêmes équations différentielles finales, même si les intermédiaires peuvent différer.

On applique la loi des mailles à chacune des mailles du circuit :

$$\begin{cases} u_{C_1} - u_{L_0} - u_{L_1} = 0 \\ u_{C_2} + u_{L_2} + u_{L_0} = 0 \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} \frac{q_1}{C_1} - L_0 \frac{di}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt} = 0 \\ \frac{q_2}{C_2} + L_0 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

Soit en remplaçant les intensités à l'aide des relations précédentes :

$$\begin{cases} \frac{q_1}{C_1} - L_0 \frac{d(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)}{dt} - L_1 \frac{d(-\dot{q}_1)}{dt} = 0 \\ \frac{q_2}{C_2} + L_0 \frac{d(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)}{dt} + L_2 \frac{d\dot{q}_2}{dt} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où :} \quad \begin{cases} \frac{q_1}{C_1} - L_0(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) + L_1 \ddot{q}_1 = 0 \\ \frac{q_2}{C_2} + L_0(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) + L_2 \ddot{q}_2 = 0 \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{cases} (L_0 + L_1)\ddot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} - L_0\ddot{q}_2 = 0 \\ (L_0 + L_2)\ddot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} - L_0\ddot{q}_1 = 0 \end{cases}$$

Soit en posant $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$

$$\begin{cases} (L_0 + L)\ddot{q}_1 + \frac{q_1}{C} - L_0\ddot{q}_2 = 0 & (1) \\ (L_0 + L)\ddot{q}_2 + \frac{q_2}{C} - L_0\ddot{q}_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

conformes à l'énoncé avec : $\alpha = L_0 + L$; $\beta = -L_0$; $\gamma = 1/C$

- 2 Le système précédent est un système d'équations couplées, c'est-à-dire telles que les deux inconnues figurent dans chaque équation. Les charges des condensateurs sont continues, de même que toutes les intensités, car chacune traverse une bobine. Tous ces grandeurs sont donc identiques en $t = 0^+$ et $t = 0^-$ d'où les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} q_1(t=0^+) = q_1(t=0^-) = 0 \\ q_2(t=0^+) = q_2(t=0^-) = Q_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} i_1(t=0^+) = i_1(t=0^-) = 0 \\ i_2(t=0^+) = i_2(t=0^-) = 0 \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} \dot{q}_1(t=0) = 0 \\ \dot{q}_2(t=0) = 0 \end{cases}$$

L'énoncé propose une méthode pour lever le couplage. Pour faire apparaître les nouvelles fonctions (S et D), il suffit de sommer et soustraire (1) et (2) :

$$\begin{cases} (L + L_0)(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_1) + \frac{q_2 + q_1}{C} - L_0(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_1) = 0 & (2)+(1) \\ (L + L_0)(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) + \frac{q_2 - q_1}{C} - L_0(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) = 0 & (2)-(1) \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} (L + L_0)\ddot{S} + \frac{S}{C} - L_0\ddot{S} = 0 \\ (L + L_0)\ddot{D} + \frac{D}{C} + L_0\ddot{D} = 0 \end{cases}$$

Puis : $\begin{cases} \ddot{S} + \frac{S}{LC} = 0 \\ \ddot{D} + \frac{D}{(L+2L_0)C} = 0 \end{cases}$ et : $\begin{cases} \ddot{S} + \omega_s^2 S = 0 \\ \ddot{D} + \omega_D^2 D = 0 \end{cases}$ avec : $\omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et $\omega_D = \sqrt{\frac{1}{(L+2L_0)C}} < \omega_s$

Les équations différentielles sont celles d'oscillateurs harmoniques, dont les solutions générales sont :

$$\begin{cases} S = A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t \\ D = A' \cos \omega_D t + B' \sin \omega_D t \end{cases}$$

A, B, A' et B' sont des constantes d'intégration, qu'on détermine à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} S(t=0) = q_2(t=0) + q_1(t=0) = Q_0 = A \\ D(t=0) = q_2(t=0) - q_1(t=0) = Q_0 = A' \end{cases}$$

En dérivant les solutions générales et en utilisant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{S} = -A\omega_s \sin \omega_s t + B\omega_s \cos \omega_s t \\ \dot{D} = -A'\omega_D \sin \omega_D t + B'\omega_D \cos \omega_D t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{S}(t=0) = \dot{q}_2(t=0) + \dot{q}_1(t=0) = 0 = B \\ \dot{D}(t=0) = \dot{q}_2(t=0) - \dot{q}_1(t=0) = 0 = B' \end{cases}$$

Finalement les solutions S et D puis les charges :

$$\begin{cases} S = Q_0 \cos \omega_s t \\ D = Q_0 \cos \omega_D t \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\begin{cases} q_2 = \frac{S+D}{2} = \frac{Q_0}{2} (\cos \omega_s t + \cos \omega_D t) \\ q_1 = \frac{S-D}{2} = \frac{Q_0}{2} (\cos \omega_s t - \cos \omega_D t) \end{cases}$$

En appliquant les formules de trigonométries habituelles :

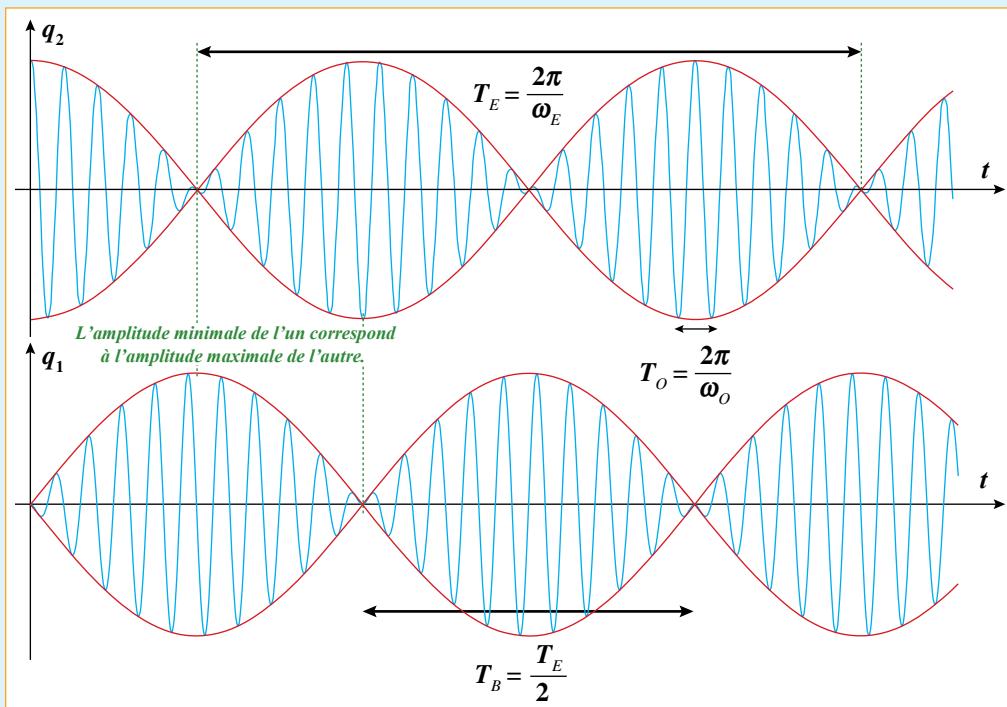
$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

On a :

$$\begin{cases} q_2 = Q_0 \cos\left(\frac{\omega_s + \omega_d}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_s - \omega_d}{2} t\right) = Q_0 \cos(\omega_o t) \cdot \cos(\omega_E t) \\ q_1 = -Q_0 \sin\left(\frac{\omega_s + \omega_d}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_s - \omega_d}{2} t\right) = -Q_0 \sin(\omega_o t) \cdot \sin(\omega_E t) \end{cases}$$

avec $\begin{cases} \omega_o = \frac{\omega_s + \omega_d}{2} \\ \omega_E = \frac{\omega_s - \omega_d}{2} \end{cases}$

- 3 Le couplage est dû à la présence de la bobine centrale** qui ne permet pas aux deux circuits LC d'osciller indépendamment l'un de l'autre. Cela transparaît dans le calcul, où l'introduction de l'autre variable dans l'équation d'un des systèmes provient du terme de tension aux bornes de L_o . Si le couplage est fort (donc si L_o est du même ordre de grandeur que L), alors les fréquences des variations des deux termes sinusoïdaux dans les solutions sont du même ordre de grandeur, ce qui ne donne pas de phénomène particulier. Par contre, si le couplage est faible ($L_o \ll L$), alors les deux pulsations ω_d et ω_s sont proches. On a alors $\omega_o \gg \omega_E$ et **les charges présentent des battements**, c'est-à-dire que chaque fonction q_i est une fonction sinusoïdale de pulsation ω_o (oscillations) dont l'amplitude varie sinusoïdalement avec une pulsation ω_E (enveloppe), comme le montrent les courbes donnant les variations temporelles ci-dessous (où l'on a choisi $\omega_o = 20 \omega_E$) et sur lesquelles sont indiquées les différentes périodes (*notons que la condition d'observation des battements n'est pas très contraignante, car avec un facteur 8 à 10 entre les fréquences, ils sont déjà clairement visibles sur les courbes*) :



Les battements ne sont pas effectués symétriquement, on voit que lorsqu'un condensateur a une amplitude de charge maximale, l'autre est minimale. Si le couplage s'annule, l'amplitude de q_2 devient constante égale à q_{o_0} et celle de q_1 est nulle. On a alors deux oscillateurs indépendants, l'oscillateur 2, ayant subi une excitation oscille, tandis que l'oscillateur 1 reste dans son état zéro. C'est donc bien le couplage qui permet la mise en oscillation de 1.

Bien comprendre

- Les systèmes couplés, en particulier les oscillateurs, sont fréquents en physique. Il s'agit de deux ou plusieurs systèmes dont le comportement individuel est influencé par celui des autres. Il existe des méthodes générales de résolution dans les cas complexes (comme celui des équations précédentes, où l'on n'a pas encore simplifié avec des condensateurs et des bobines identiques), qui passent par exemple par la détermination de valeurs propres, mais lorsque les équations présentent beaucoup de symétries entre les variables (ce qui est le cas ici, le système {(1) ; (2)} est invariant par permutation des variables q_1 et q_2) on peut souvent éviter la méthode générale. Ici on a levé le couplage à l'aide de combinaisons linéaires simples des équations. On retiendra cette méthode qu'on pourra appliquer avec profit dans d'autres domaines, en mécanique par exemple, voir exercice n° 3 p. 298.
- Notons que le déphasage des comportements (l'un d'amplitude maximale lorsque l'autre est d'amplitude minimale) est lié au choix des conditions initiales. Avec deux condensateurs initialement chargés (l'un Q_0 et l'autre $-Q_0$ par exemple), on aurait des oscillations en opposition de phase, ce que le lecteur est invité à vérifier.

5 Oscillations amorties

→ énoncé p. 145

- 1 L'équation différentielle homogène admet 3 types de solutions (voir cours) selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \text{ de discriminant réduit : } \Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 \quad \text{avec : } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m}$$

La solution de l'équation différentielle est pseudo-périodique si les racines de l'équation caractéristique sont complexes, soit pour un discriminant négatif : $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$ ou, puisque tous les paramètres sont positifs :

$$\lambda < \omega_0$$

donc :

$$\alpha < 2m\sqrt{\frac{g}{R}}$$

La condition précédente étant réalisée, les solutions de l'équation caractéristique sont $r_{1,2} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ et la solution est pseudo-périodique de forme générale :

$$\theta(t) = e^{-\lambda t} [A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)] \quad \text{avec : } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{\frac{g}{R} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$$

La solution du problème est obtenue en déterminant les constantes d'intégration A et B à l'aide des conditions initiales : $\theta(t=0) = 0 = B$, qui permet de simplifier l'écriture de $\theta(t)$ en $\theta(t) = A \sin(\Omega t) e^{-\lambda t}$ que l'on dérive :

$$\dot{\theta}(t) = A e^{-\lambda t} [-\lambda \sin(\Omega t) + \Omega \cos(\Omega t)] \quad \text{soit initialement : } \dot{\theta}(t=0) = \frac{V_0}{R} = A \Omega$$

$$\text{d'où : } A = \frac{V_0}{\Omega R} = \frac{V_0}{R} \left(\frac{g}{R} - \frac{\alpha^2}{4m^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Finalement : } \theta(t) = A \sin(\Omega t) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } A \text{ et } \Omega \text{ définis ci-dessus et } \tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{2m}{\alpha}$$

- 2 Le décrément logarithmique vaut :

$$\delta = \ln \frac{A \sin(\omega t) e^{-\frac{t}{\tau}}}{A \sin(\omega t + \omega T) e^{-\frac{t+\tau}{\tau}}} = \ln \frac{\sin(\omega t)}{\sin(\omega t + 2\pi) e^{\frac{T}{\tau}}} = \ln \left(e^{\frac{iT}{\tau}} \right) = \frac{T}{\tau} = \frac{T\alpha}{2m} \quad \text{soit : } \alpha = \frac{2m\delta}{T}$$

Le décrément logarithmique, comme son nom l'indique, mesure la façon dont la courbe exponentielle s'amortit. T étant la pseudo-période, c'est la période de la partie oscillante qui se simplifie donc aisément

dans le calcul. On lit deux pseudo-périodes entre $t = 0$ et $t = 8,0$ s, d'où : $T = 4,0$ s

On lit de même entre $t = 1,0$ s et $t = 5,0$ s : $\Delta = \ln(0,20/0,10) = \ln 2$ (nombre sans unité), d'où :

$$\alpha = \frac{2m\delta}{T} \quad \text{A.N.} \quad \alpha = \frac{2,0,1.\ln 2}{4,10^{-3}} = 35 \text{ kg.s}^{-1}$$

- ③ On obtient le facteur de qualité en comparant les formes canoniques de l'équation différentielle :

$$\frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda = \frac{2}{\tau} = \frac{2\delta}{T} \quad \text{d'où :} \quad Q = \frac{\omega_0 T}{2\delta}$$

Si on considère en première approximation que la pseudo-période est proche de la période propre (amortissement suffisamment faible, soit $Q \gg 1/2$), alors :

$$Q \approx \frac{\omega_0 T_0}{2\delta} = \frac{2\pi}{2\delta} \quad \text{soit :} \quad Q \approx \frac{\pi}{\delta} \approx \frac{3}{0,7} \approx 5 \quad \text{qui légitime } a posteriori \text{ l'approximation.}$$

6 Portrait de phase

→ énoncé p. 146

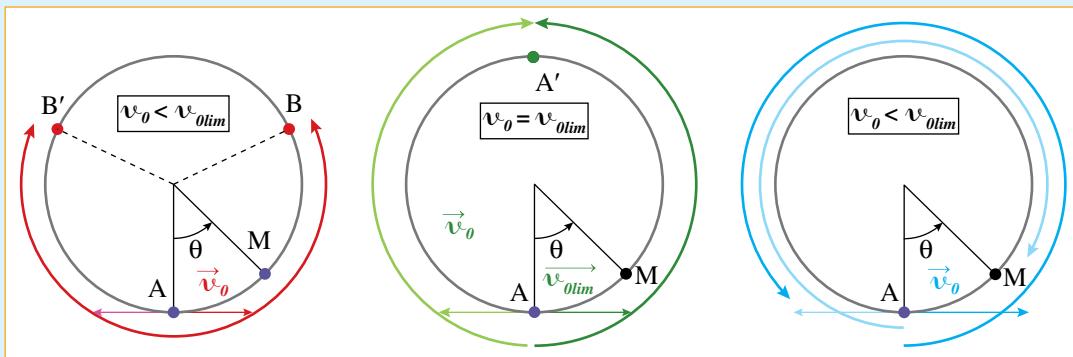
- ① Dans tous les cas, l'anneau décrit un cercle ou une portion de cercle sur le cerceau sur lequel il est astreint à demeurer.

→ Si sa vitesse initiale est faible, l'anneau remonte jusqu'à une certaine hauteur, puis redescend et remonte de l'autre côté. Il oscille donc entre deux points B et B' (en rouge ci-dessous). B et B' sont d'autant plus hauts sur le cercle que v_0 est grande.

→ Si sa vitesse initiale est assez grande, on comprend facilement que l'anneau arrive en haut (A') avec une vitesse non nulle et retombe de l'autre côté (en bleu ci-dessous), puis (en l'absence de frottement donc de dissipation d'énergie) le même mouvement se reproduit (*attention : le mouvement est le même mais mathématiquement l'angle après un tour est augmenté de 2π*). Ce type de mouvement peut se faire dans un sens ou dans l'autre (en couleur plus claire ci-dessous) selon le sens de la vitesse initiale.

→ On peut donc dire qu'il existe une valeur limite de v_0 (v_{0lim}) telle que, en deçà, l'anneau oscille entre deux positions symétriques de part et d'autre de A (θ reste borné) et au-delà l'anneau tourne indéfiniment dans un sens ou dans l'autre et donc θ tend vers l'infini.

→ Dans le cas limite où $v_0 = v_{0lim}$, l'anneau s'immobilise théoriquement lorsqu'il arrive en haut avec une vitesse nulle (en vert ci-dessous). En réalité, on n'obtient jamais une valeur exacte en physique, et si la vitesse est juste un peu plus petite que la vitesse limite, le point redescend du même côté, sinon il redescend de l'autre côté et fait un tour complet.



- ② En étudiant le portrait de phase et compte tenu de l'analyse précédente, on voit que :

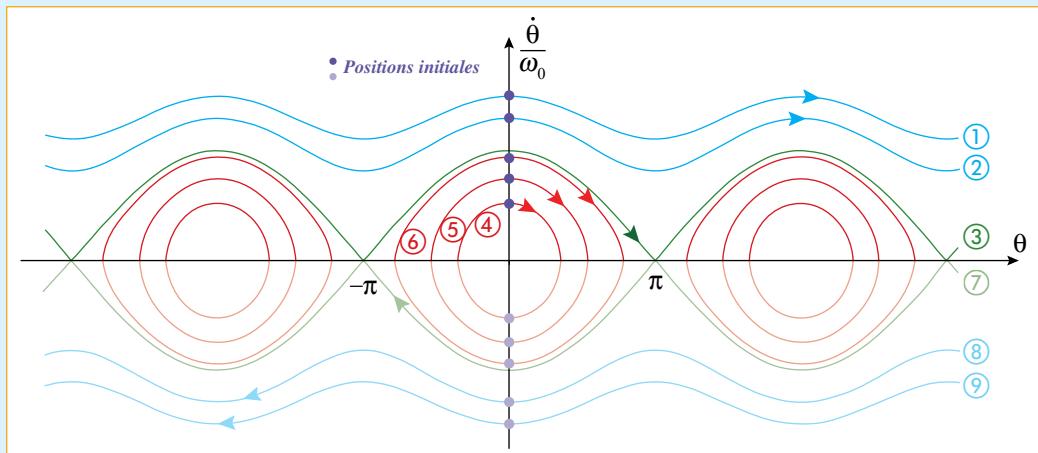
→ Les trajectoires fermées ④⑤⑥ correspondent à un mouvement périodique et donc à des oscillations entre deux positions, tandis que les trajectoires ouvertes ①②⑧⑨ correspondent au cas où le point effectue des tours complets.

→ Les trajectoires fermées sont parcourues dans le sens horaire, les trajectoires ouvertes de vitesse initiale

positive (vers la droite en A, θ évolue dans le sens trigonométrique, donc augmente, sa dérivée est positive) sont parcourues vers la droite, les trajectoires de vitesse initiale négative (vers la gauche en A, θ évolue dans le sens horaire, donc diminue, sa dérivée est négative) sont parcourues vers la gauche (*voir flèches ci-dessous*).

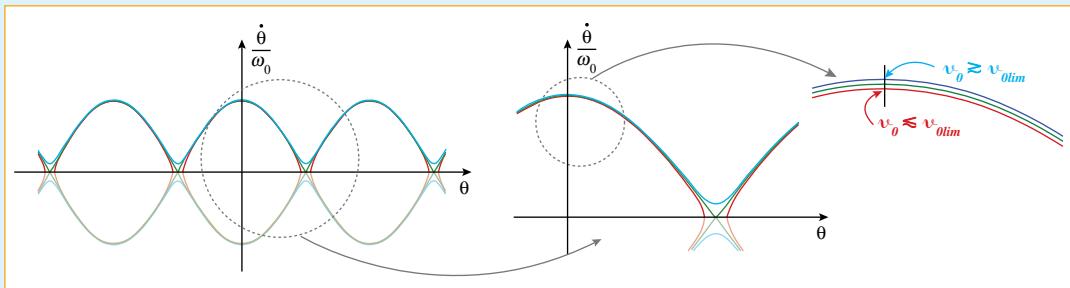
► Avec le choix des conditions initiales de l'énoncé, tous les points de départ se situent en $\dot{\theta} = 0$ sur l'axe des ordonnées. On constate bien que la valeur de la vitesse initiale des trajectoires fermées est inférieure à celle des trajectoires ouvertes et :

$$\upsilon_{0(1)} > \upsilon_{0(2)} > \upsilon_{0lim} ; \quad \upsilon_{0(5)} = -\upsilon_{0(1)} ; \quad \upsilon_{0(8)} = -\upsilon_{0(2)} ; \quad \upsilon_{0lim} > \upsilon_{0(6)} > \upsilon_{0(5)} > \upsilon_{0(4)}$$



► La trajectoire ④ est un cercle correspondant à une situation harmonique, l'équation différentielle est linéaire. On verra dans le cours de mécanique que cela correspond effectivement à la solution de l'équation différentielle pour une amplitude faible (telle qu'on pourra linéariser : $\sin\theta \approx \theta$). Si on augmente υ_0 , l'approximation devient non pertinente, c'est pourquoi la courbe ⑥ n'est plus un cercle, l'amplitude augmente et l'oscillation n'est plus harmonique (l'équation différentielle est non linéaire).

► On obtient donc des trajectoires de phase fermées, tant que $\upsilon_0 < \upsilon_{0lim}$ et ouvertes si $\upsilon_0 > \upsilon_{0lim}$. Les courbes ③ et ⑦ correspondent donc au cas limite théorique où la vitesse initiale est exactement suffisante pour arriver au sommet avec une vitesse nulle (en A'). En réalité le système suivra une trajectoire fermée (en rouge sur le schéma ci-dessus) si la vitesse est juste inférieure à la vitesse limite et une trajectoire ouverte sinon (en bleu sur le schéma). Les zooms successifs de ces cas montrent qu'une très faible différence de conditions initiales autour de la vitesse limite conduit à des évolutions nettement différentes. Le fait que les trajectoires ③ et ⑦ passent par un même point est donc dû au fait qu'elles correspondent à des cas limites théoriques.



À méditer

Ne t'inquiète pas si tu as des difficultés en maths, je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes !
ALBERT EINSTEIN (1879-1955)

Oscillations forcées

Les régimes transitoires étudiés au chapitre précédent ont mis en évidence le comportement oscillant des systèmes mécaniques et électriques et la forte analogie qu'ils présentent. Ces régimes, par nature éphémères, traduisaient la réponse des oscillateurs à de brèves perturbations de leurs contraintes. Dans ce chapitre, il s'agit maintenant d'étudier la réponse de ces mêmes oscillateurs à des contraintes permanentes, et, plus spécifiquement, des contraintes d'oscillations sinusoïdales. C'est un phénomène très courant, tant en mécanique, où de nombreuses perturbations peuvent être assimilées à des excitations sinusoïdales à toutes les échelles (ondes sismiques sur des bâtiments, excitation d'atomes par un champ électromagnétique), qu'en électronique, car les centrales électriques génèrent des courants sinusoïdaux, de sorte que la plupart des appareils domestiques et industriels fonctionnent en régime sinusoïdal. Par ailleurs, grâce à la transformée de Fourier qui permet de traiter toute contrainte comme une somme de contraintes sinusoïdales, et du fait de la linéarité des systèmes étudiés, la réponse d'un système à une contrainte quelconque pourra être obtenue à partir de l'étude des contraintes sinusoïdales.

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Module d'un nombre complexe :

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

- Module d'un quotient de nombres complexes :

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

- Argument d'un nombre complexe :

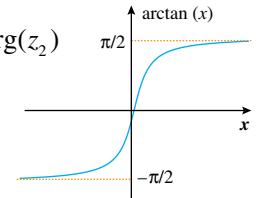
$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

- Argument d'un quotient de nombres complexes :

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

- Fonction arctangente :

$$y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y) \text{ et } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

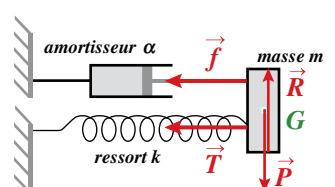


N. B. : Comme il y a un risque de confusion certain entre le « *i* » désignant l'intensité et le « *i* » désignant le nombre complexe ($i^2 = -1$), il est d'usage de noter en électricité en particulier, et en physique en général, « *i* » mathématique par la lettre « *j* ». On adopte cette notation dans tout ce qui suit : $j^2 = -1$.

I Oscillations forcées

1. Oscillateur en mécanique

On reprend l'étude d'un système de masse m assimilé à un point matériel M accroché à l'extrémité d'un ressort horizontal, en présence de frottements visqueux, dans le référentiel terrestre considéré galiléen. L'autre extrémité A du ressort n'est plus fixe, mais animée d'un



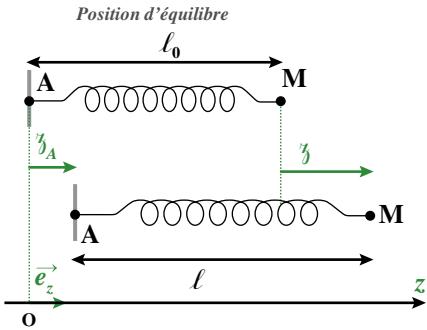
mouvement de translation. On paramètre le système, comme indiqué sur le schéma, les positions de A et M sont repérées par rapport à leur position d'équilibre (repos). Soit :

$$\overrightarrow{OM} = (\ell_0 + \zeta) \vec{e}_z \quad \vec{v} = \dot{\zeta} \vec{e}_z \quad \vec{a} = \ddot{\zeta} \vec{e}_z \quad \overrightarrow{OA} = \zeta_A(t) \vec{e}_z$$

M est soumis à son poids \vec{P} , la réaction normale du support \vec{R} , la force de frottement \vec{f} et la force de rappel exercée par le ressort \vec{T} avec :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v} \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante positive.}$$

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_z = -k(\ell_0 + \zeta - \zeta_A - \ell_0) \vec{e}_z = -k(\zeta - \zeta_A) \vec{e}_z$$



La seconde loi de Newton appliquée à M, puis sa projection sur l'axe (Oz), s'écrivent :

$$\vec{m}\vec{a} = \sum \vec{\text{forces}} = \vec{T} + \vec{f} + \vec{P} + \vec{R} \quad \text{d'où : } m\ddot{\zeta} = -k(\zeta - \zeta_A) - \alpha\dot{\zeta}$$

$$\text{Soit : } \ddot{\zeta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\zeta = \frac{k}{m}\zeta_A(t)$$

$$\text{Sous forme canonique : } \ddot{\zeta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\zeta} + \omega_0^2\zeta = \omega_0^2\zeta_A(t) \quad \text{avec : } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

On obtient une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec un second membre non nul. Si le mouvement de A est sinusoïdal :

$$\overrightarrow{OA} = \zeta_A(t) \vec{e}_z = A_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

alors :

$$\ddot{\zeta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\zeta} + \omega_0^2\zeta = \omega_0^2 A_0 \cos(\omega t)$$

2. Oscillateur en électrocinétique

On s'intéresse au circuit RLC série alimenté par un générateur qui délivre une tension variable $u_g(t)$. Afin d'établir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur, on applique la loi des mailles au circuit :

$$u_L + u_R + u_C = u_g$$

$$\text{D'où : } L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = u_g \quad \text{avec : } i = \dot{q}$$

$$\text{Soit : } L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = u_g \quad \text{puis : } \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{u_g}{L}$$

$$\text{Sous forme canonique : } \ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 C u_g(t) \quad \text{avec : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On obtient une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec un second membre non nul. Si le générateur délivre un signal sinusoïdal, alors :

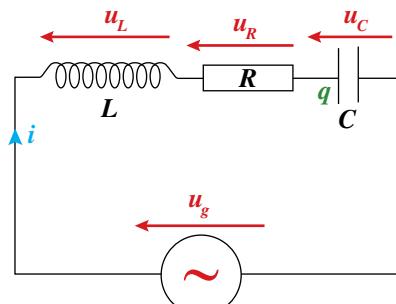
$$u_g(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

$$\text{alors : } \ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 C U_0 \cos(\omega t)$$

On obtient une équation similaire à celle obtenue en mécanique, ce qui est tout à fait attendu, en raison de la forte analogie étudiée au chapitre précédent entre les oscillateurs en mécanique et en électrocinétique.

3. Régime forcé

Les oscillateurs précédents sont tous décrits par une équation du type $\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e(t)$ dans laquelle on pourra adapter les paramètres et les grandeurs physiques en remplaçant s par x, y, z , ou un angle θ , si on a un oscillateur mécanique, ou par q, i ou une tension pour un oscillateur en électrocinétique.



Définitions

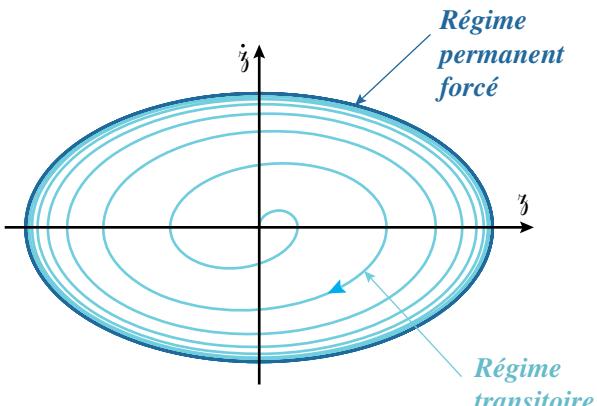
- Un **oscillateur forcé** est un oscillateur soumis à une excitation $e(t)$ variable dans le temps et permanente, son comportement étant traduit par l'équation différentielle de la forme ci-dessous, dont la solution $s(t)$ décrit le **régime forcé** adopté par l'oscillateur, autrement dit sa **réponse à l'excitation**.

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e(t) \quad \text{solutions de la forme : } s(t) = s_H(t) + s_{SP}(t)$$

- $s_H(t)$ est la solution générale de l'équation homogène, dont il a été montré qu'elle s'amortit de façon exponentielle, avec une constante de temps τ (où $\tau = Q/2\omega_0$), cette solution correspond au **régime transitoire de l'oscillateur libre amorti** vu au chapitre précédent.
- $s_{SP}(t)$ est une solution particulière de même nature que l'excitation du second membre. Au bout de quelques τ , on peut considérer le régime transitoire comme terminé, $s(t)$ se limite alors à la solution particulière $s(t) = s_{SP}(t)$. L'oscillateur a alors atteint son **régime forcé permanent**.
- Lorsque l'excitation est sinusoïdale, alors la réponse est sinusoïdale de même fréquence et le régime forcé est dit **régime forcé harmonique**.

- Dans tout ce chapitre, on supposera que le régime transitoire a une durée brève et on ne s'intéressera au système qu'une fois son régime permanent forcé atteint. On verra cependant un exercice pour lequel ce n'est pas le cas.

Le portrait de phase d'un tel système peut être assez complexe, il présente un régime transitoire qui évolue dans tous les cas vers un régime permanent sinusoïdal, identique à celui de l'oscillateur harmonique dont on sait qu'il est elliptique (fermé car périodique). Sur le portrait de phase ci-contre, on observe la réponse d'un système mécanique initialement immobile à l'équilibre, avec $Q = 5$ et forcé à sa pulsation propre ω_0 . On y distingue clairement une phase transitoire en bleu clair correspondant à un régime pseudo-périodique transitoire, suivi d'un régime forcé permanent (en bleu foncé) qui correspond à des oscillations sinusoïdales.



Remarque : Le forçage peut ne pas être sinusoïdal, mais, grâce à la décomposition de Fourier, il pourra toujours s'écrire comme une somme de fonctions sinusoïdales. Les équations étant linéaires, la réponse de l'oscillateur en régime forcé pourra être obtenue par la combinaison des réponses aux différentes fréquences (ce qui est étudié au chapitre suivant). **C'est pourquoi l'étude peut se limiter au cas sinusoïdal et rester parfaitement générale.** La solution forcée est de même pulsation et donc de même fréquence que l'excitation, par contre son amplitude et son déphasage par rapport à l'excitation vont varier avec la fréquence.

Propriétés

- Un **oscillateur forcé** en régime permanent harmonique oscille à la période imposée par l'exciteur, contrairement à un régime libre où la période ou pseudo-période est caractéristique du système.
- À une excitation de la forme $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$, la réponse est de la forme : $s(t) = S_m(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega))$

Le but de ce chapitre et du suivant est d'étudier les variations de l'amplitude et de la phase de la réponse en régime forcé permanent harmonique, en fonction de la fréquence f ou de la pulsation d'excitation ω et des paramètres de l'oscillateur (ω_0 et Q).

4. Méthode de résolution par les complexes

Définitions

- À une grandeur sinusoïdale $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe la grandeur complexe :

$$\underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t + \varphi)} = S_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \Rightarrow s(t) = \operatorname{Re}(\underline{s}(t))$$

- La **grandeur complexe associée** à $s(t)$ s'écrit :

$$\underline{s}(t) = S_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{S} e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \underline{S} = S_m e^{j\varphi} \text{ est appelée l'**amplitude complexe**.}$$

- S_m , l'amplitude de $s(t)$, est aussi le module de l'amplitude complexe associée.

- φ , la phase à l'origine de $s(t)$ est aussi l'argument de l'amplitude complexe associée :

$$S_m = |\underline{S}| = \max(s(t)) \quad \varphi = \arg(\underline{S}) = \text{phase à l'origine } (s(t))$$

- On peut remarquer que l'excitation est généralement exprimée avec une phase nulle (définissant ainsi l'origine des temps), elle s'écrit alors elle-même en notation complexe :

$$e(t) = \underline{E} e^{j\omega t} = E_0 e^{j\omega t} = E_0 [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

qui donne $\underline{E} = E_0$, une amplitude complexe réelle.

- L'expression de la grandeur $s(t)$ en notation complexe permet d'écrire les dérivées successives :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{s}}(t) &= \frac{d\underline{s}(t)}{dt} = \frac{d[S_m e^{j(\omega t + \varphi)}]}{dt} = j\omega S_m e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \underline{S} \\ \frac{d^n \underline{s}(t)}{dt^n} &= \frac{d^n [S_m e^{j(\omega t + \varphi)}]}{dt^n} = (j\omega)^n S_m e^{j(\omega t + \varphi)} = (j\omega)^n \underline{S} \end{aligned}$$

Et inversement la primitive (que l'on peut aussi réitérer) :

$$\int \underline{s}(t) dt = \int S_m e^{j(\omega t + \varphi)} dt = \frac{1}{j\omega} S_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{\underline{S}}{j\omega}$$

Propriété

- Dériver $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ revient à **multiplier par $j\omega$** son complexe associé, dériver n fois par $(j\omega)^n$.
- Intégrer $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ revient à **diviser par $j\omega$** son complexe associé, intégrer n fois par $(j\omega)^n$.

► Intérêt de la notation complexe

On rappelle qu'on cherche $s(t)$, une solution particulière de la forme du second membre, donc sinusoïdale de pulsation ω , qui vérifie :

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0^2}{Q} \dot{s} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

On traduit donc l'équation différentielle en notation complexe en associant à $s(t)$ la forme :

$$\underline{s}(t) = S_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{S} e^{j\omega t}$$

On écrit alors :

$$\ddot{\underline{s}} + \frac{\omega_0^2}{Q} \dot{\underline{s}} + \omega_0^2 \underline{s} = \omega_0^2 E_0 e^{j\omega t}$$

Soit :

$$(j\omega)^2 \underline{S} e^{j\omega t} + \frac{\omega_0^2}{Q} (j\omega) \underline{S} e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{S} e^{j\omega t} = \omega_0^2 E_0 e^{j\omega t}$$

En éliminant le terme temporel, l'équation précédente devient une équation algébrique complexe, où l'amplitude complexe est l'inconnue :

$$-\omega^2 \underline{S} + \frac{\omega_0^2}{Q} j\omega \underline{S} + \omega_0^2 \underline{S} = \omega_0^2 E_0 \quad (2)$$

Conclusion : L'intérêt de la notation apparaît évident maintenant. En séparant, dans la grandeur complexe, la partie temporelle des paramètres de phase et d'amplitude et grâce à la propriété de l'exponentielle (proportionnelle à sa dérivée), on remplace la résolution d'une équation différentielle en $s(t)$, par la résolution d'une équation algébrique (complexe) en \underline{s} beaucoup plus facile. Comme on connaît déjà la partie temporelle de la solution $s(t)$ (fonction sinusoïdale de pulsation ω), la résolution par les complexes donne toutes les autres informations concernant la solution, à savoir l'amplitude et le déphasage par rapport à l'excitation. Les méthodes de résolution des problèmes physiques par les complexes sont loin de se limiter aux oscillateurs abordés ici. On retrouve ces outils en traitement du signal, en électromagnétisme, en physique ondulatoire...

POINT MÉTHODE

Comprendre le lien entre équation différentielle et équation complexe

- Il ne faut donc jamais perdre de vue que l'**équation algébrique en notation complexe** n'est qu'un moyen mathématique commode de traduire le comportement physique réel du système, lequel est décrit par l'**équation différentielle**.
 - Il faut savoir passer d'une équation différentielle à son équation algébrique complexe associée et inversement, d'autant qu'on verra qu'on résout souvent les problèmes (en particulier en électricité), en écrivant directement l'équation complexe. Ainsi, si $x(t)$ et $y(t)$ ont pour amplitudes complexes \underline{X} et \underline{Y} :
- $$-a\omega^2 \underline{X} + jb\omega \underline{X} + c\underline{X} = \alpha \underline{Y} + j\beta \omega \underline{Y} \quad \text{signifie :} \quad a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = \alpha y + \beta \frac{dy}{dt}$$
- Inversement, on pourra dès à présent, une fois l'équation différentielle écrite, la transformer directement en équation sur l'amplitude complexe en éliminant d'office le terme temporel.
 - Par ailleurs, il ne faut pas oublier non plus que la solution complexe n'est que la partie permanente du régime forcé, c'est-à-dire la **solution particulière de l'équation différentielle**, et que toute recherche du régime transitoire ne pourra se faire qu'avec l'équation différentielle réelle.
 - Notons que s'il a été beaucoup plus pratique de déterminer les solutions des régimes transitoires (solutions de l'équation homogène) à l'aide d'une forme canonique faisant intervenir λ et ω_0 , il est plus habituel d'utiliser les paramètres Q et ω_0 dans la recherche de la solution particulière qui constitue le régime forcé permanent. On verra dans l'exercice n° 2 p. 176 que ce n'est pas cependant une obligation.

II Réponses des oscillateurs

Récapitulatif des systèmes

	Généralisation	Mécanique	Electricité
Système	Oscillateur amorti	Masse-ressort+amortisseur	RLC série
Forçage	$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$	Support oscillant : $\zeta_A(t) = A_0 \cos(\omega t)$	Générateur sinusoïdal : $u_G = U_0 \cos(\omega t)$
Réponse	$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$	élongation : $\zeta(t) = \mathcal{L}_m \cos(\omega t + \varphi)$	Charge* : $q(t) = Q_m \cos(\omega t + \varphi)$
Dérivée	$\dot{s}(t) = V_m \cos(\omega t + \psi)$	vitesse : $v(t) = \dot{\zeta} = \mathcal{V}_m \cos(\omega t + \psi)$	intensité : $i(t) = \dot{q} = I_m \cos(\omega t + \psi)$
Paramètres	ω_0 pulsation propre Q = facteur de qualité	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

* On peut préférer la tension aux bornes du condensateur qui lui est proportionnelle (voir exercice n° 4 p. 176).

1. Réponse forcée en élévation ou en charge : $s(t)$

On résout maintenant l'équation (2) :

$$-\omega^2 \underline{S} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{S} + \omega_0^2 \underline{S} = \omega_0^2 E_0 \quad \text{qui donne :} \quad \underline{S} = \frac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}} \quad \text{soit} \quad \underline{s} = \frac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}} e^{j\omega t}$$

POINT MÉTHODE

Exprimer la solution forcée

- Il est évidemment possible à partir de l'expression précédente de $\underline{s}(t)$, d'exprimer complètement le terme exponentiel, puis après un calcul sur les complexes (qui passe par la multiplication du conjugué du dénominateur) de retrouver une expression dont on extrait la partie réelle, qui donnera une solution sous la forme d'une somme de deux fonctions sinusoïdales ($s(t) = \text{Re}(\underline{s}) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$). Bien qu'il soit utile dans certains cas (voir exercice n° 3 p. 176), on évitera le plus souvent cette démarche, même si à force de ne pas exprimer que $S_m(\omega)$ et $\phi(\omega)$, on finit par perdre de vue qu'on détermine une solution temporelle oscillante dans ce type de problème.
- On cherche plutôt ici **la solution sous la forme $s(t) = S_m \cos(\omega t + \phi)$** puisqu'on s'intéresse à l'amplitude et la phase de $s(t)$. On aura facilement ces informations en se rappelant que le module d'un quotient est égal au quotient des modules et l'argument d'un quotient est égal à la différence des arguments.
- Il est souvent commode de faire apparaître une **grandeur sans dimension, notée x** . Cette grandeur sera le rapport de la pulsation à une pulsation caractéristique du problème, soit ici $\omega_0 : x = \omega/\omega_0$. Cette notation se généralisera dans le chapitre suivant, à des situations où une pulsation caractéristique (pas nécessairement une pulsation propre) apparaît toujours dans le système et ses équations. Pour ne pas alourdir inutilement l'écriture, on écrira un peu abusivement $s(\omega) = s(x)$ (voir chapitre 1 III.2. p. 14).

L'amplitude et la phase de la réponse sont respectivement le module et l'argument de l'amplitude complexe :

$$\underline{S} = S_m(\omega) e^{j\phi(\omega)} = \frac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}} = \frac{E_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

→ Propriétés de l'amplitude de la réponse

$$S_m = |\underline{S}| = \sqrt{\frac{\omega_0^2 E_0}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}} = \sqrt{\frac{E_0}{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{g(x)}} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} S_m(\omega) = \lim_{x \rightarrow 0} S_m(x) = E_0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} S_m(\omega) = \lim_{x \rightarrow \infty} S_m(x) = 0 \end{cases}$$

La fonction passe par un extremum si son dénominateur (et plus simplement la fonction $g(x)$ sous la racine) également. On vérifie l'existence d'un extremum en annulant la dérivée de ce terme par rapport à x (plus simple que ω) :

$$\frac{dg}{dx} = 0 = 2x \left(2(1-x^2) + \frac{1}{Q^2} \right) \quad \text{soit} \quad x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

La solution x_r n'existe que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et on peut vérifier qu'elle correspond à un maximum de l'amplitude. L'autre solution (la solution $x = 0$) n'a pas d'intérêt ici. La pulsation correspondante est :

$$\omega(\text{extremum}) = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

→ Propriétés de la phase de la réponse

$$\varphi = \arg \underline{S} = \arg(\omega_0^2 E_0) - \arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}\right) = -\arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}\right) = -\arg\left[j \frac{\omega_0 \omega}{Q} \left(1 - j \frac{Q}{\omega_0 \omega} (\omega_0^2 - \omega^2)\right)\right]$$

Où l'on a factorisé par la partie imaginaire de façon à obtenir une expression qui permet d'utiliser la fonction arctan, le nombre $\left(1 - j \frac{Q}{\omega_0 \omega} (\omega_0^2 - \omega^2)\right)$ étant sans ambiguïté un complexe d'argument compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, en raison de son cosinus positif. On a alors :

$$\begin{aligned} \varphi = \arg \underline{S} &= -\arg j \frac{\omega_0 \omega}{Q} - \arg\left(1 - j \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0 \omega}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(-\frac{Q}{\omega_0 \omega} (\omega_0^2 - \omega^2)\right) \\ \varphi = \arg \underline{S} &= \arctan\left(\frac{Q}{\omega_0 \omega} (\omega_0^2 - \omega^2)\right) - \frac{\pi}{2} = \arctan\left(Q\left(\frac{1}{x} - x\right)\right) - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = -\pi \end{cases} \end{aligned}$$

POINT MÉTHODE

Exprimer la phase de la solution forcée

Il est indispensable ici de connaître parfaitement la fonction arctangente pour être à l'aise dans les **expressions de la phase** et la façon commode de l'écrire (mise en facteur par la partie imaginaire). On peut cependant écrire la phase de façon implicite, si l'on préfère raisonner sur la tangente, sans utiliser la fonction réciproque. Il faudra alors préciser le signe, soit de la partie réelle, soit de la partie imaginaire de l'amplitude complexe pour lever toute ambiguïté sur φ . On écrira alors :

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{S})}{\text{Re}(\underline{S})} \quad \text{et par exemple } \cos(\varphi) > 0 \quad \text{ou} \quad \sin(\varphi) < 0 \quad \text{ou ...}$$

Dans le cas précédent par exemple, on obtiendra les mêmes conclusions qu'avec **la fonction arctan** en écrivant :

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{S})}{\text{Re}(\underline{S})} = -\frac{\text{Im}(1 - x^2 + j \frac{x}{Q})}{\text{Re}(1 - x^2 + j \frac{x}{Q})} = \frac{x}{Q(1 - x^2)} \quad \text{et} \quad \sin \varphi < 0$$

Résultats

La réponse $s(t)$ de l'oscillateur linéaire amorti à une excitation sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ est :

$$s(t) = S_m(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \text{ avec : } \begin{cases} S_m = \frac{\omega_0^2 E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{Q}{\omega_0 \omega} (\omega_0^2 - \omega^2)\right) - \frac{\pi}{2} = \arctan\left(Q\left(\frac{1}{x} - x\right)\right) - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ces résultats concernent l'élongation $\gamma(t)$ de l'oscillateur mécanique du I.1., la charge $q(t)$ de l'oscillateur électrique du I.2. ou la tension aux bornes du condensateur qui lui est proportionnelle. Ainsi que d'autres cas que l'on rencontrera dans les exercices.

2. Réponse forcée en vitesse ou en intensité : $\dot{s}(t)$

La réponse de la dérivée concerne en mécanique, la vitesse du système en translation ou la vitesse angulaire d'un système en rotation et en électricité, l'intensité. On étudie $v(t) = \dot{s}(t)$ la dérivée de $s(t)$ à l'aide de son complexe associé :

$$\underline{v} = \underline{\dot{s}} = j\omega \underline{s}$$

d'amplitude complexe : $\underline{V} = j\omega \underline{S} = \frac{j\omega \omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0 \omega}{Q}}$

soit : $\underline{V} = V_m(\omega) \cos(\omega t + \psi(\omega)) = \frac{Q\omega_0 E_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{Q\omega_0 E_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$

Résultats

La réponse $v(t) = \dot{s}(t)$ de l'oscillateur linéaire amorti à une excitation sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ est :

$$\dot{s}(t) = v(t) = V_m(\omega) \cos(\omega t + \psi(\omega)) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} V_m = \frac{Q\omega_0 E_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{Q\omega_0 E_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} \\ \psi = \arctan\left(Q\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right) = \arctan\left(Q\left(\frac{1}{x}-x\right)\right) \end{cases}$$

Les calculs sont similaires à ceux du cas précédent. Les limites de l'amplitude et de la phase sont :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} V_m(\omega) = \lim_{x \rightarrow 0} V_m(x) = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} V_m(\omega) = \lim_{x \rightarrow \infty} V_m(x) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} \psi(\omega) = \lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \pi / 2 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \psi(\omega) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = -\pi / 2 \end{cases}$$

Dans ce cas l'amplitude V_m passe nécessairement par un maximum, correspondant au minimum du dénominateur qui, compte tenu de sa forme, est obtenu pour :

$$x - \frac{1}{x} = 0 \quad \text{soit :} \quad x = 1 \quad \text{et} \quad \omega(\text{extremum}) = \omega_0$$

3. Résultats et allures des réponses

L'ensemble des résultats qui précèdent ainsi que les représentations graphiques de l'amplitude et de la phase des réponses des oscillateurs sont rassemblées pages suivantes.

Interprétation : Pour interpréter les phénomènes mis en évidence, il est plus facile de raisonner sur le système mécanique, plus « visuel ». L'analyse de la réponse en elongation montre que la fréquence d'oscillation du support A conduit à différents comportements de M :

- ➡ Si on fait osciller A très lentement (basse fréquence, $\omega \rightarrow 0$), l'extrémité M oscille en phase ($\varphi = 0$) et avec la même amplitude ($S_m = E_0$) que A et tout se passe comme si le ressort était une tige rigide.
- ➡ Si on fait osciller A très rapidement (haute fréquence, $\omega \rightarrow \infty$), M ne bouge plus (amplitude et vitesse tendent vers 0) : les oscillations sont trop rapides et la masse « ne suit plus ».
- ➡ Si on fait osciller A à une fréquence intermédiaire, M oscille avec une amplitude et un retard qui dépendent de ω et de Q .
- ➡ Pour une excitation au voisinage de la fréquence propre, le système est soumis à une fréquence qui « lui convient » et donc répond avec beaucoup d'entrain. Plus la valeur de Q est grande, c'est-à-dire moins le système est amorti et plus l'amplitude des réponses au voisinage de la fréquence propre est élevée. À la limite pour un système non amorti (pas de frottement ou pas de résistance) l'amplitude tend vers l'infini,

situation qui évidemment détruira le système avant de se produire (voir exercice n° 3 p. 176).
On peut transposer tous ces résultats au système électrique grâce aux analogies habituelles.

	Réponse en élongation ou charge (ou tension)	Réponse en vitesse ou intensité
Réponse réelle	$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$	$\dot{s}(t) = V_m \cos(\omega t + \psi)$
Amplitude complexe de la réponse	$\underline{S} = \frac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}} = \frac{E_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$	$\underline{V} = \frac{Q \omega_0 E_0}{1 + j Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{Q \omega_0 E_0}{1 + j Q \left(x - \frac{1}{x} \right)}$
Amplitude de la réponse	$S_m = \underline{S} = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q} \right)^2}}$	$V_m = \frac{Q \omega_0 E_0}{\sqrt{1+Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$
Courbes		
Abscisse du maximum (résonance)	$x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ et $\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$	$x = 1$ et $\omega = \omega_0$
Maximum d'amplitude	Le maximum n'existe que si $Q > 1/\sqrt{2}$. x_r se rapproche de la fréquence propre quand Q augmente.	Quel que soit Q , le maximum existe et correspond toujours à la fréquence propre.
Phase	$\varphi = \arg(\underline{S}) = \arctan \left(Q \left(\frac{1}{x} - x \right) \right) - \frac{\pi}{2}$	$\psi = \arg(\underline{V}) = \arctan \left(Q \left(\frac{1}{x} - x \right) \right)$
Courbes		
Maximum d'amplitude	Au maximum d'amplitude, le déphasage est d'autant plus proche de $-\pi/2$ que Q est grand.	Au maximum d'amplitude, la réponse est toujours en phase avec l'excitation.

III Résonances

1. Nature du phénomène de résonance

On a vu que la réponse à une excitation sinusoïdale, en mécanique comme en électrocinétique, est sinusoïdale de même fréquence. L'amplitude et le déphasage de la réponse dépendent de la fréquence.

Définitions

- Un système forcé présente une **résonance** si l'amplitude de sa réponse passe par un maximum pour une fréquence finie non nulle. La fréquence correspondante est appelée **fréquence de résonance**.
- On appelle **fréquences de coupure** les fréquences telles que l'amplitude de la réponse est égale à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$:

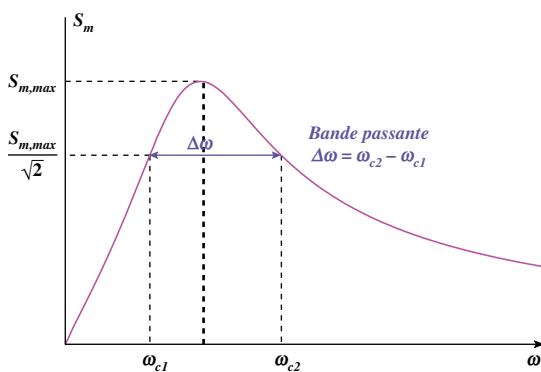
$$S_m(\omega_{coupure}) = \frac{S_{m,\max}}{\sqrt{2}}$$

- On appelle **bande passante** (BP) le domaine fréquentiel pour lequel l'amplitude de la réponse est supérieure ou égale à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$:

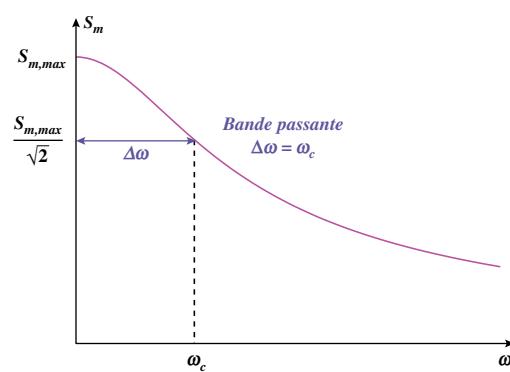
$$\omega \in BP \Leftrightarrow S_m(\omega) > \frac{S_{m,\max}}{\sqrt{2}}$$

- On appelle **acuité de la résonance**, le rapport sans dimension : $\mathcal{A} = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}$

- On peut se demander pourquoi on introduit un facteur $\sqrt{2}$ pour définir la coupure (qui n'a rien à voir avec la notion de grandeur efficace). En réalité, on comprend mieux ce terme si l'on raisonne en puissance. On dira que le système répond de façon acceptable, si la puissance est au moins égale à la moitié de la puissance maximale. Or la puissance est un terme quadratique de la réponse, et diviser la puissance par 2 revient donc à diviser l'amplitude par $\sqrt{2}$. Dans un dispositif sonore par exemple, cela signifiera qu'on considère que le son « passe » si sa puissance sonore est au moins la moitié du maximum et qu'il ne « passe pas » sinon. Ce choix d'un facteur 2 est arbitraire, mais finalement assez naturel.
- L'acuité est d'autant plus grande (pic de résonance très « pointu »), que le facteur de qualité est grand et donc que l'amortissement du système est faible.
- La présence d'une résonance suppose un pic dans l'amplitude de la réponse. La bande passante est alors un intervalle de fréquence autour de ce pic. Cependant la bande passante peut aussi être définie en l'absence de résonance, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



Bande passante en d'une résonance présence



Bande passante en l'absence de résonance

2. Bandes passantes des réponses

→ Résonance en vitesse ou intensité

$$x_1 \text{ et } x_2 \text{ les bornes de la bande passante vérifient : } V_m(x_{1,2}) = \frac{V_{m,\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{Q\omega_0 E_0}{\sqrt{2}} = \frac{Q\omega_0 E_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$$

qui donne aisément (*voir Vers la colle p. 175*) : $Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 1$ soit : $\left(x-\frac{1}{x}\right) = \pm \frac{1}{Q}$

Soit à résoudre deux équations du second degré (écrites en une seule) : $x^2 \mp \frac{x}{Q} - 1 = 0$

dont les solutions x_1 et x_2 (notées $x_{1,2}$) s'écrivent : $x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right)$

et où seules les valeurs positives ont un sens physique, soit :

$$\omega_1 = \omega_0 x_1 = \frac{\omega_0}{2} \left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 x_2 = \frac{\omega_0}{2} \left(+\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right)$$

Et finalement la bande passante et l'acuité : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$ et $\beta = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{Q}$

→ Résonance en élongation ou charge (ou tension)

Cette notion n'a de sens que si la courbe passe par un extremum. Le calcul littéral de la bande passante est lourd et sans intérêt particulier. On aura souvent intérêt à étudier la courbe expérimentalement (*voir exercice n° 4 p. 176*). x_1 et x_2 les bornes de la bande passante vérifient alors :

$$S_m(x_{1,2}) = \frac{S_{m,\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{qui n'a de sens que si :} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. Conséquences pratiques de la résonance

→ Résonance en électricité

Le phénomène de résonance en électricité s'étudie aisément à l'aide d'un oscilloscope dont la voie 1 enregistre la tension fournie par le générateur et la voie 2, la tension du condensateur ou celle du résistor (proportionnelle à l'intensité). En balayant le domaine de fréquences, on observe que la tension du générateur conserve une amplitude constante, tandis que celle de la voie 2 passe par un maximum, d'autant plus grand que la résistance du circuit est faible. On observe aussi aisément l'évolution du déphasage. On comprend qu'un tel phénomène puisse être de nature à endommager les circuits. *A contrario*, lorsqu'on veut sélectionner une fréquence particulière (table de mixage d'un enregistrement sonore ou sélection d'une émission radio par exemple), on aura intérêt à disposer d'un circuit résonant, accordé à la fréquence souhaitée de façon à ne sélectionner que les réponses intéressantes du système.

→ Résonance en mécanique

En mécanique le phénomène de résonance est présent dans de nombreux domaines, car tous les systèmes mécaniques ont des fréquences propres et répondent à une excitation par une vibration d'amplitude d'autant plus grande que le système est peu amorti et que la fréquence d'excitation est proche d'une fréquence propre. Comme en électricité, on peut, soit rechercher, soit vouloir éviter une résonance.

Résonance utile : on cherche à amplifier la réponse par une excitation proche de la fréquence propre et/ou un amortissement faible.

- Trampoline : pour monter le plus haut possible, il faut sauter à la fréquence de résonance du tremplin, c'est pourquoi le débutant peine parfois à trouver cette fréquence. Chaque athlète règle en général le dispositif de façon à accorder la fréquence de résonance du trampoline à celle des sauts qu'il souhaite réaliser.
- Four à micro-ondes : les ondes excitent les fréquences de résonance de vibration des molécules d'eau, qui acquièrent une grande énergie, ce qui se traduit par un échauffement au niveau macroscopique.

Résonance nuisible : on cherche à limiter la réponse par une excitation différente de la fréquence propre et/ou un amortissement fort.

- Les soldats ne franchissent jamais un pont au pas cadencé. En effet cette fréquence pourrait être malencontreusement celle de résonance du pont, or un pont en pierre n'est pas très élastique ! Bien que des versions divergent sur le sujet, il est possible que le pont d'Angers ait été détruit ainsi en 1850 (223 morts) de même que celui de Broughton en 1833.
- Un autre pont, suspendu celui-là, le pont de Tacoma Narrows a été détruit en 1940 lorsqu'il a subi des rafales régulières de vent à sa pulsation propre¹.
- Lorsqu'une machine à laver tourne de plus en plus vite en essorage, il n'est pas rare qu'à un moment elle se mette à vibrer violemment. En effet, la fréquence du moteur augmente régulièrement et passe à un moment par la fréquence de résonance de la machine, ce qui est accentué si le système présente un balourd, dû au déséquilibre de la masse (paquet de linge par exemple). Le même phénomène existe sur une voiture.
- Le tympan est soumis à de nombreuses vibrations sonores sur une large bande de fréquences. Il est heureusement très amorti, sinon certains sons seraient insupportables, car ils seraient ressentis très intensément.

IV Régime sinusoïdal forcé en électrocinétique

1. Impédance complexe

On considère un dipôle électrique linéaire passif D (c'est-à-dire constitué de résistors, de condensateurs, de bobines) en régime sinusoïdal forcé. Pour chaque dipôle intervenant dans D, la tension et l'intensité sont soit proportionnelles (cas de la résistance), soit liées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Les lois des noeuds et des mailles étant linéaires, l'équation entre la tension d'alimentation du circuit et l'intensité dans D sera donc également une équation différentielle linéaire à coefficients constants et par suite, en notation complexe, on obtiendra (comme pour l'oscillateur précédent) une relation de proportionnalité (complexe) entre tension d'alimentation et intensité dans le circuit.

Définitions

- On appelle **impédance (complexe) d'un dipôle linéaire passif**, le coefficient de proportionnalité entre les expressions complexes de la tension $u(t)$ à ses bornes et de l'intensité $i(t)$ qui le traverse :

$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \quad \text{Le module de } \underline{Z} \text{ s'exprime en Ohm (\Omega).}$$



- On appelle **admittance (complexe) d'un dipôle linéaire passif**, l'inverse de son impédance :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad \text{soit} \quad \underline{i} = \underline{Y} \underline{u} \quad \text{Le module de } \underline{Y} \text{ s'exprime en Siemens (S).}$$

Avec les expressions des grandeurs électriques suivantes :

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega t + \varphi_u) & \text{et} & \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \\ \text{Soit :} \quad \underline{u} &= \underline{U} e^{j\omega t} = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} & \text{et} & \quad \underline{i} = \underline{I} e^{j\omega t} = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \\ \text{On a :} \quad \underline{Z} &= |\underline{Z}| e^{j\arg(\underline{Z})} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} & \text{et} & \quad \underline{Y} = |\underline{Y}| e^{j\arg(\underline{Y})} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I_m}{U_m} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} \end{aligned}$$

1. On trouve de nombreuses vidéos spectaculaires sur internet de cet événement et d'autres phénomènes comme le bris de verre par un son le faisant entrer en résonance.

Propriétés

\underline{Z} (ou \underline{Y}) est caractéristique du dipôle et renseigne sur les liens d'amplitudes et de phases des grandeurs électriques auxquelles il est soumis.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \quad \Rightarrow \quad |\underline{Z}| = \left| \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \right| = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}_{eff}}{\underline{I}_{eff}} \quad \text{et} \quad \arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I}) = \varphi_u - \varphi_i$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \quad \Rightarrow \quad |\underline{Y}| = \left| \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \right| = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{\underline{I}_{eff}}{\underline{U}_{eff}} \quad \text{et} \quad \arg(\underline{Y}) = \arg(\underline{I}) - \arg(\underline{U}) = \varphi_i - \varphi_u$$

Il est parfois utile de travailler en mettant en évidence les parties réelles et imaginaires de ces grandeurs.

Définitions

- La **résistance R** et la **réactance X** d'un dipôle passif sont respectivement les parties réelle et imaginaire de son impédance : $\underline{Z} = R + jX$ R et X s'expriment en Ohm (Ω).
- La **conductance G** et la **susceptance B** d'un dipôle passif sont respectivement les parties réelle et imaginaire de son admittance : $\underline{Y} = G + jB$ G et B s'expriment en Siemens (S).

→ Dipôles fondamentaux

Dipôle	Résistor (résistance R)	Bobine (inductance L)	Condensateur (capacité C)
Relation en convention récepteur	$u(t) = Ri(t)$	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$
Impédance Admittance	$\underline{Z} = R \quad \underline{Y} = \frac{1}{R}$	$\underline{Z} = jL\omega \quad \underline{Y} = \frac{1}{jL\omega}$	$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} \quad \underline{Y} = jC\omega$
Déphasage de la tension par rapport à l'intensité	$\varphi_u - \varphi_i = 0$ Tension et intensité en phase	$\varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$ Tension en quadrature avance sur l'intensité	$\varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$ Tension en quadrature retard sur l'intensité
Comportement équivalent basses fréquences	Inchangé	$ \underline{Z} \rightarrow 0$ fil	$ \underline{Y} \rightarrow 0$ Interrupteur ouvert
Comportement équivalent hautes fréquences	Inchangé	$ \underline{Y} \rightarrow 0$ Interrupteur ouvert	$ \underline{Z} \rightarrow 0$ fil

Remarque : L'impédance est commode en série, l'admittance est commode en parallèle (voir exercice n° 1 p. 174).

2. Lois de l'électrocinétique

La définition de l'impédance complexe ($\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$) a exactement la même forme que la loi d'Ohm ($u = Ri$). Par ailleurs, toutes les lois de l'électrocinétique précédemment vues dans le chapitre 8 sont valables en régime variable, dans le cadre de l'ARQS, donc en particulier en régime sinusoïdal forcé. En combinant ces deux propriétés, il est facile de montrer que toutes les lois et tous les théorèmes vus au chapitre 8 sont valables en régime sinusoïdal forcé, à condition de les écrire en notation complexe et en remplaçant les résistances par des impédances. On retrouve ainsi toutes les propriétés qui suivent.

Énoncés

- Loi des nœuds :** en un nœud N, point de connexion de n fils, la somme algébrique des courants arrivant au nœud est nulle :

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \underline{I}_k = 0 \quad \text{où } \varepsilon_k = +1 \text{ si le courant arrive au nœud et } \varepsilon_k = -1 \text{ si le courant repart du nœud.}$$

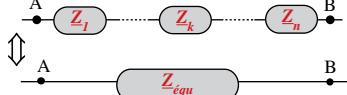
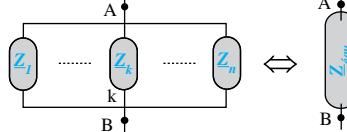
- Loi des mailles :** la somme algébrique des tensions sur une maille de n branches est nulle :

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \underline{U}_k = 0 \quad \text{où } \varepsilon_k = +1 \text{ si la tension est dans le sens de parcours de la maille et } \varepsilon_k = -1 \text{ sinon.}$$

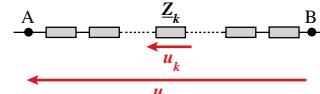
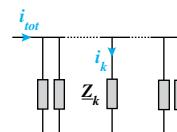
- Théorème de Millman (ou loi des nœuds en terme de potentiels) :** le potentiel au nœud N où arrivent m fils de bornes A_k et N, comportant chacun une impédance \underline{Z}_k , et une f.e.m. \underline{E}_k , et n fils comportant des générateurs de courant de c.e.m. \underline{I}_{0j} , s'écrit avec les mêmes conventions pour ε :

$$\underline{V}_M = \frac{\sum_{k=1}^m \frac{\underline{V}_{A_k}}{\underline{Z}_k} + \sum_{k=1}^m \varepsilon_k \frac{\underline{E}_k}{\underline{Z}_k} + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \underline{I}_{0j}}{\sum_{k=1}^m \frac{1}{\underline{Z}_k}}$$

→ Associations d'impédances

Association de	Schéma association et équivalent	Impédances	Admittances
<i>n</i> impédances en série		$\underline{Z}_{equ} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$	$\frac{1}{\underline{Y}_{equ}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Y}_k}$
<i>n</i> impédances en parallèle		$\frac{1}{\underline{Z}_{equ}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k}$	$\underline{Y}_{equ} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k$

→ Tension et courant dans une association d'impédances (divideurs)

	Diviseur de tension	Diviseur de courant
Schéma de l'association ↔ équivalent		
Relations	$\frac{u_k}{u_{tot}} = \frac{\underline{Z}_k}{\sum \underline{Z}_k}$	$\frac{i_k}{i_{tot}} = \frac{1/\underline{Z}_k}{\sum 1/\underline{Z}_k} \frac{\underline{Y}_k}{\sum \underline{Y}_k}$

Remarque : Bien que peu utilisée en régime variable, la conversion Thévenin/Norton est également possible.

3. Exemple du RLC série : recherche de l'intensité

→ Utilisation de l'impédance complexe

On reprend le circuit électrique du I.2. et on réunit les trois dipôles dans une impédance Z équivalente à celle de trois impédances en série :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

Le générateur délivre une tension sinusoïdale $u_g(t) = U_0 \cos(\omega t)$ et on cherche la solution de l'intensité sous une forme également sinusoïdale ($i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ solution particulière de l'équation différentielle). On écrit la loi des mailles sur les amplitudes complexes associées :

$$\underline{U}_g - \underline{Z}I = 0 \quad \text{d'où :} \quad I = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}} = \frac{U_0}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Dont on peut tirer amplitude et phase de l'intensité directement :

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)$$

Ou écrire une forme canonique à l'aide des paramètres habituels :

$$I = \frac{U_0 / R}{1 + \frac{j}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{U_0 / R}{1 + \frac{j}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega}\right)} = \frac{U_0 / R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{I_m}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

On retrouve donc évidemment les mêmes résultats que précédemment.

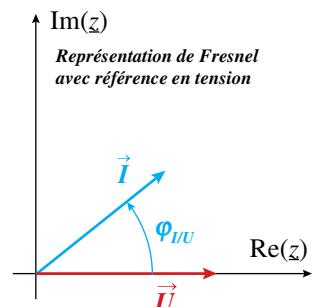
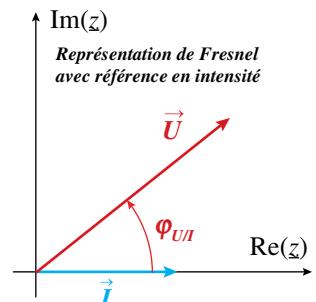
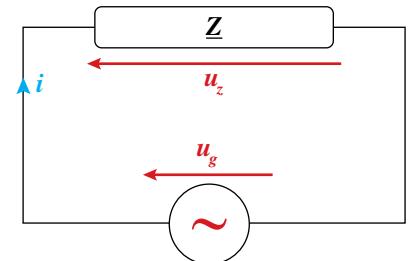
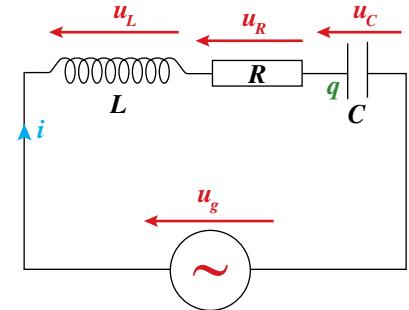
→ Représentation de Fresnel

Cette méthode a déjà été vue au chapitre 4 (voir p. 43) sur la superposition d'ondes. Elle consiste simplement à schématiser les grandeurs complexes dans le plan complexe : dans ce plan, un complexe $z = a + jb = |z|e^{j\varphi}$ est un vecteur de coordonnées cartésiennes (a, b) ou de coordonnées polaires $(|z|, \varphi)$. Il est sous-entendu que l'ensemble de la figure tourne à la vitesse angulaire ω , puisque toutes les grandeurs temporelles complexes sont obtenues à partir des amplitudes complexes, par multiplication du facteur $e^{j\omega t}$. La figure obtenue tourne donc sans se déformer. Ainsi le raisonnement et la représentation en amplitude complexe suffisent à conclure (comme pour le calcul en notation complexe, puisque c'est encore la propriété de l'exponentielle qui est ici exploitée).

Soit un dipôle d'impédance Z avec $\underline{U} = \underline{Z}I$ la relation entre les amplitudes complexes associées à l'intensité qui le traverse et à la tension à ses bornes. On peut représenter les vecteurs complexes associés à la tension et l'intensité en choisissant d'utiliser l'un ou l'autre comme référence. Dans tous les cas :

- L'angle entre un vecteur et l'axe des abscisses est le déphasage de la grandeur représentée par rapport à celle de référence.
- La norme du vecteur est l'amplitude de la grandeur représentée.

L'angle est algébrique, dans le premier schéma la tension est en avance sur l'intensité, elle est en retard dans le second.



Dipôles fondamentaux

	Résistance	Bobine	Condensateur
Impédance	$\underline{Z} = R = Re^{j0}$	$\underline{Z} = jL\omega = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$	$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} = -jC\omega = C\omega e^{-j\frac{\pi}{2}}$
Angle (\vec{I}, \vec{U})	$\varphi_{U_R/I} = 0$ Tension et intensité en phase	$\varphi_{U_L/I} = \frac{\pi}{2}$ Tension en quadrature avance sur l'intensité	$\varphi_{U_C/I} = -\frac{\pi}{2}$ Tension en quadrature retard sur l'intensité
Norme $\ \vec{U}\ $	$\ \vec{U}_R\ = RI$	$\ \vec{U}_L\ = L\omega I$	$\ \vec{U}_C\ = I/C\omega$
Représentation			

- On obtient des résultats identiques en choisissant la tension comme référence, en utilisant l'admittance. On écrit alors les déphasages I/U , qui sont évidemment opposés des déphasages U/I .
- On construit le diagramme de Fresnel en référence intensité en plaçant toutes les tensions en série et en s'appuyant sur la loi des mailles du circuit. On construit le diagramme de Fresnel en référence tension en plaçant toutes les intensités en parallèle et en s'appuyant sur la loi des nœuds du circuit.

➡ Exemple du circuit RLC série

Ainsi pour le circuit RLC série, la loi des mailles s'écrit : $u_g = u_R + u_L + u_C$

On associe à chaque tension des dipôles passifs un vecteur, le vecteur associé à la tension du générateur est la somme des trois autres vecteurs. Comme les dipôles sont en série, la grandeur commune est l'intensité que l'on choisit comme référence. On observe un triangle rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

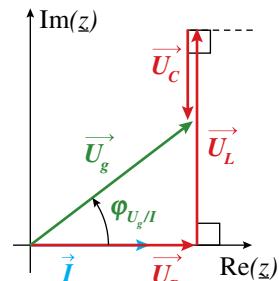
$$\|U_g\|^2 = \|\vec{U}_R\|^2 + \|\vec{U}_C + \vec{U}_L\|^2 = R^2 I^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 I^2$$

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi_{U_g/I} = \frac{\|\vec{U}_C + \vec{U}_L\|}{\|\vec{U}_R\|} = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I}{R I} = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R}$$

$$\text{D'où : } \varphi_{U_g/I} = \arctan \left(\frac{1}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) \quad \text{et donc : } \varphi_{I/U_g} = -\arctan \left(\frac{1}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right)$$

On retrouve le même résultat que précédemment.

- Cette méthode est bien adaptée aux dipôles tous en série (l'intensité est la grandeur commune et servira de référence) ou tous en parallèle (la tension est alors la grandeur commune et servira de référence).
- La méthode de Fresnel présente l'avantage de visualiser les grandeurs électriques et le rôle (en particulier déphaseur) des dipôles, cependant, comme toute méthode graphique, elle a ses limites car dès que le circuit devient compliqué, le tracé est long et les calculs géométriques fastidieux, on préférera alors



la méthode complexe directe par le calcul.

- Il faut noter que les vecteurs de Fresnel dépendent de la valeur de ω . Ainsi dans le schéma précédent, la pulsation est supérieure à la pulsation propre ($L\omega > 1/C\omega$) et l'intensité est en retard sur la tension du générateur. Dans le cas contraire, si la pulsation est inférieure à la pulsation propre ($L\omega < 1/C\omega$), alors l'intensité est en avance sur la tension du générateur. A la pulsation propre, l'intensité est en phase avec la tension du générateur. Ces résultats sont conformes à ceux obtenus précédemment par le calcul.

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Oscillateur forcé : définition, mise en équation d'un système mécanique, d'un système électrique.
- Résolution par la méthode complexe : principe, relations entre grandeur réelle et complexe associée, intérêt, lien entre équation différentielle réelle et équation algébrique complexe.
- Étude de la réponse en élévation d'un oscillateur mécanique forcé ou de la réponse en charge (tension) d'un oscillateur électrique forcé : amplitude et phase selon la fréquence, condition d'existence d'une résonance, propriétés.
- Étude de la réponse en vitesse d'un oscillateur mécanique forcé ou de la réponse en intensité d'un oscillateur électrique forcé : amplitude et phase selon la fréquence, propriétés de la résonance.
- Résonance : nature, exemples, intérêt et danger, fréquences de coupure, bande passante, acuité.
- Impédance complexe : définition, cas des dipôles de base (R, L, C), lois de l'électrocinétique, représentation de Fresnel.

Erreurs à éviter

- La multiplication des expressions d'une même grandeur comme par exemple d'une élévation (élévation réelle $s(t)$, complexe $\underline{s}(t)$), amplitude complexe de l'élévation \underline{S} , amplitude réelle S_m ...) peut conduire à des confusions si les notations ne sont pas assez précisées. On les a systématisées dans ce chapitre afin de permettre au lecteur de bien s'y retrouver. Il est essentiel de repérer et de comprendre les notations choisies par un énoncé, de s'y adapter et de s'y tenir, sous peine d'écrire des équations invalides, en particulier entre tension, intensité et impédance.

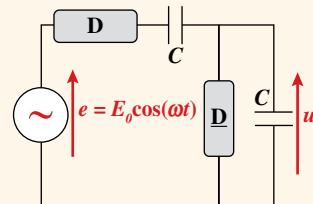
Quelques « trucs » utiles

- Dans le calcul des impédances équivalentes ou l'utilisation des diviseurs (qui seront particulièrement utiles au chapitre suivant), il est souvent pertinent de mixer des impédances pour les parties en série et des admittances pour les parties en parallèle du circuit.
- On essaiera toujours de repérer des simplifications dans les termes complexes en évitant la réduction au même dénominateur trop systématique qui conduit souvent à une expression inutilement lourde (voir exercice n° 1 p. 174).
- Il est pertinent de connaître ici les propriétés de la fonction arctan. On pourra alors facilement remarquer que les arguments φ et ψ de \underline{S} et \underline{V} sont clairement des fonctions décroissantes.
- Lors de la détermination de la bande passante de la résonance en vitesse ou intensité, il ne faut pas développer l'expression : $Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1$ qui conduirait à une équation de degré 4. On pourra écrire alors (de façon moins synthétique que dans le cours) : $Q \left(x - \frac{1}{x} \right) = +1$ ou $Q \left(x - \frac{1}{x} \right) = -1$ puis exprimer les solutions positives de chacune respectivement x_2 et x_1 .

1 Impédance et admittance ★

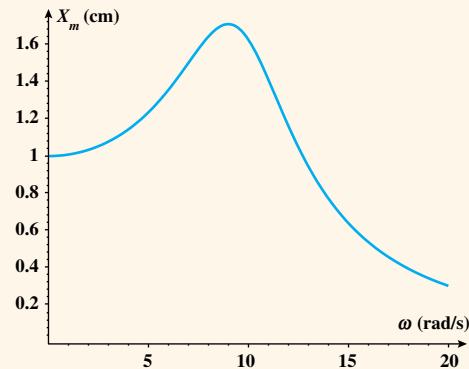
→ corrigé p. 176

Exprimer, avec un minimum de calcul, l'amplitude complexe associée à la tension u en fonction de E_0 et des paramètres du système, selon que le dipôle D représente une bobine d'inductance L ou une résistance R . On mettra en évidence une pulsation caractéristique et on introduira une grandeur sans dimension pertinente. Commenter.

**2 Étude expérimentale des caractéristiques d'un oscillateur ★★**

→ corrigé p. 176

On considère une masse m à l'extrémité M d'un ressort horizontal soumis à un régime d'oscillations forcées. Le mouvement obéit à l'équation différentielle : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$ avec $F_0 = 0,10$ N. On observe les oscillations de M, on mesure l'amplitude de son mouvement en fonction de la fréquence, ce qui donne le graphe ci-contre. On observe également un retard de phase de $\pi/2$ pour une pulsation d'excitation de $\omega_1 = 10$ rad.s⁻¹.



- Établir les expressions de l'amplitude et de la phase de l'oscillateur en fonction de la pulsation de forçage et des paramètres du système.
- En exploitant les données, déterminer les valeurs de la masse m , du coefficient de frottement visqueux α , de la constante de raideur k du ressort. Puis calculer le facteur de qualité.

3 Oscillateur forcé non amorti (d'après Centrale TSI 2002) ★★

→ corrigé p. 177

On considère un système formé d'un ressort vertical caractérisé par sa constante de raideur k et un corps M, de masse m , accroché à son extrémité inférieure. On néglige les frottements et on note ω_0 la pulsation propre de ce système. Grâce à un système bielle-manivelle on impose à l'extrémité supérieure du ressort le déplacement $X(t)e_x = a \cos(\omega t)e_x$, a et ω étant des constantes.

- L'étude dynamique montre que le déplacement x de M autour de sa position d'équilibre vérifie l'équation différentielle : $m\ddot{x} + kx = kX$. Résoudre cette équation pour une masse initialement au repos et à l'équilibre pour $\omega \neq \omega_0$.
- Mettre le résultat sous la forme du produit de deux fonctions trigonométriques dont on exprimera les pulsations ω_E et ω_S (avec $\omega_E < \omega_S$) en fonction de ω et de ω_0 . Tracer l'allure de la courbe représentant les variations de $x(t)$ en fonction du temps pour $\omega = 1,2\omega_0$.
- Si $\omega = \omega_0$, on peut adapter le résultat de la question 1 en posant $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ et en faisant tendre $\delta\omega$ vers 0 : déterminer alors $x(t)$. Tracer l'allure de la courbe $x(t)$. Commenter.

4 Étude d'un circuit électrique (d'après Banque Agro 2009) ★★

→ corrigé p. 179

Un générateur sinusoïdal alimente un circuit RLC constitué d'un condensateur de capacité $C = 0,1 \mu\text{F}$, d'une bobine réelle d'auto-inductance L et de résistance r inconnues, placés en série avec une résistance $R = 480 \Omega$. Le générateur est un GBF de résistance interne $R_g = 50 \Omega$ délivrant un signal sinusoïdal de pulsation ω et de f.e.m. $e(t) = E_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t)$. Le montage est donné ci-dessous.

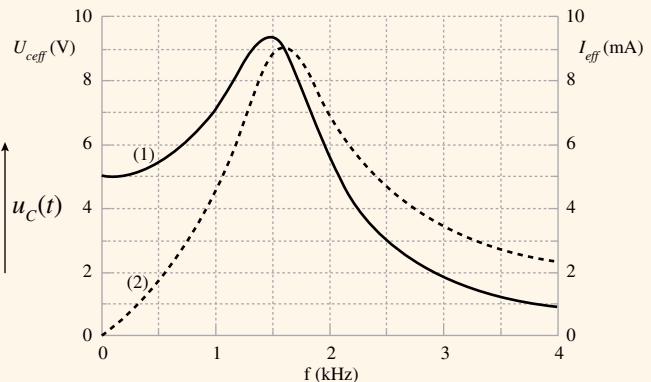
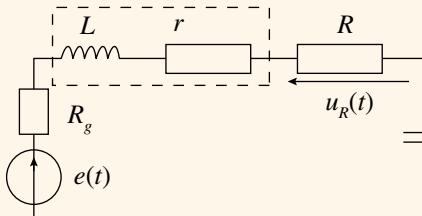
- Rappeler le comportement aux basses et hautes fréquences du condensateur et de la bobine. En déduire qualitativement le comportement de la tension u_C aux bornes du condensateur à hautes et

basses fréquences. Donner l'expression littérale de l'amplitude complexe U_c associée à la tension aux bornes du condensateur en fonction de E_{eff} , L , C , r , R_g , R et ω , puis la mettre sous une forme canonique où l'on introduira une variable x sans dimension et des paramètres pertinents.

- 2 Exprimer la tension efficace U_{eff} aux bornes du condensateur en fonction de x , E_{eff} et Q le facteur de qualité du circuit dont on donnera l'expression. Montrer que U_{eff} passe par un extremum pour une valeur de $x = x_r$ si $Q > Q_{min}$. Préciser Q_{min} et x_r . En déduire la pulsation de résonance ω_r . La comparer à ω_0 . Déterminer le maximum de U_{eff} en fonction de Q et E_{eff} .
- 3 Déterminer qualitativement le comportement du courant i dans le circuit à hautes et basse fréquences. Déterminer l'expression littérale de l'amplitude complexe I associée à l'intensité du courant traversant le circuit en fonction de E_{eff} , L , C , r , R_g , R et ω , puis la mettre sous la forme canonique suivante :

$$I = \frac{E_{eff} \sqrt{2}}{R_0 \left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]} \text{ et préciser l'expression de } R_0$$

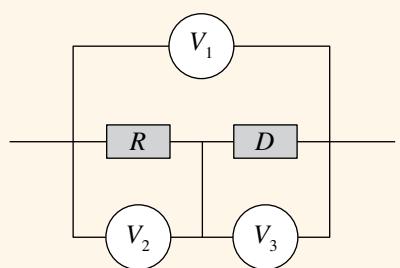
- 4 En déduire l'intensité efficace I_{eff} en fonction de R_0 , x , E_{eff} et Q et montrer qu'elle présente un extremum pour une pulsation ω'_r . Préciser ω'_r et l'intensité efficace correspondante I_{effmax} .
- 5 Déterminer littéralement les fréquences de coupure, la bande passante et la largeur de la bande passante de la résonance en intensité.
- 6 On donne ci-dessous les graphes de $I_{eff}(f)$ et $U_{eff}(f)$ où f est la fréquence du générateur. Identifier les courbes (1) et (2) et déterminer à partir de ces courbes : la tension efficace du générateur E_{eff} , l'intensité efficace maximale I_{effmax} , la fréquence propre du circuit f_0 , les fréquences de coupure et la bande passante de la résonance en intensité, puis le facteur de qualité Q du circuit. En déduire les valeurs de r et de L . Déterminer les fréquences de coupure et la bande passante de la résonance en tension.



5 Méthode des trois voltmètres ★

→ corrigé p. 181

Pour déterminer les caractéristiques d'une bobine D inconnue d'inductance L et de résistance interne r , on réalise le montage ci-dessous avec une résistance R connue, en régime sinusoïdal de pulsation ω connue, dans lequel V_1 , V_2 , V_3 sont les trois tensions efficaces mesurées par des voltmètres, branchés aux bornes respectivement de l'ensemble, de la résistance R et de la bobine. Montrer par deux méthodes (diagramme de Fresnel et méthode complexe) que les mesures permettent de déterminer r et L .



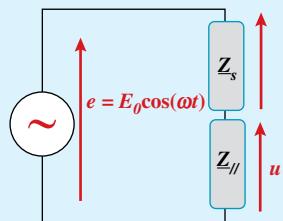
1 Impédance et admittance

→ énoncé p. 174

On utilise un diviseur de tension (mis en évidence sur le schéma ci-contre), entre deux dipôles, le premier d'impédance Z_s réunissant D et C en série, et le second Z_{\parallel} réunissant D et C en parallèle :

$$\frac{U}{E} = \frac{Z_{\parallel}}{Z_{\parallel} + Z_s} \quad \text{d'où :} \quad \frac{U}{E} = \frac{Z_{\parallel}}{Z_{\parallel} + Z_s} \times \frac{Y_{\parallel}}{Y_{\parallel}} = \frac{1}{1 + Y_{\parallel} Z_s}$$

où il est commode de faire apparaître l'admittance du dipôle en parallèle.



Bien comprendre

Il est impératif d'utiliser le diviseur de tension sur l'ensemble D + C en parallèle et non sur le seul condensateur par exemple, car les dipôles doivent être parcourus par le même courant.

Cas 1 : D = bobine

$$Z_s = Z_L + Z_C = jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad Y_{\parallel} = Y_C + Y_L = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$$

On obtient alors :

$$Y_{\parallel} Z_s = \left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega} \right) \left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) = 1 + 1 - LC\omega^2 - \frac{1}{LC\omega^2}$$

D'où : $\frac{U}{E_0} = \frac{E_0}{3 - LC\omega^2 - \frac{1}{LC\omega^2}} = \frac{E_0}{3 - x^2 - \frac{1}{x}}$ où il est pratique d'utiliser : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

On en déduit que u est toujours en phase avec e puisque son amplitude complexe est réelle.

Cas 2 : D = résistor

$$Z_s = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad Y_{\parallel} = Y_C + Y_R = jC\omega + \frac{1}{R}$$

On obtient alors :

$$Y_{\parallel} Z_s = \left(jC\omega + \frac{1}{R} \right) \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) = 1 + 1 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}$$

D'où : $\frac{U}{E_0} = \frac{E_0}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{E_0}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ où il est pratique d'utiliser $x = \frac{\omega}{\omega_1}$ avec $\omega_1 = \frac{1}{RC}$

Expression qui est proche de celle obtenue pour l'intensité d'un RLC série.

Bien comprendre

Il est souvent commode d'utiliser l'admittance d'une portion de circuit en parallèle, d'exploiter la propriété $YZ = 1$ et de ne pas se précipiter sur la réduction au même dénominateur. Par ailleurs on note ici que la pulsation intéressante pour introduire x n'est pas une pulsation propre d'oscillation.

2 Étude expérimentale des caractéristiques d'un oscillateur

→ énoncé p. 174

- ① On peut mettre l'équation différentielle sous diverses formes et utiliser ou non une forme canonique. Ici puisqu'on cherche les paramètres, il est commode de les laisser dans l'équation. On écrit l'équation algébrique vérifiée par le l'amplitude complexe X du complexe associé à $x(t)$:

$$m(j\omega)^2 \underline{X} + \alpha j\omega \underline{X} + k \underline{X} = F_0 \quad \text{soit :} \quad (-m\omega^2 + j\alpha\omega + k) \underline{X} = F_0$$

D'où : $\underline{X} = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + j\alpha\omega}$ dont l'amplitude et la phase sont respectivement :

$$X_m = |\underline{X}| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}}$$

Et : $\varphi = \arg(\underline{X}) = \arg(F_0) - \arg((k - m\omega^2) + j\alpha\omega) = 0 - \arg\left[j\alpha\omega\left(1 - j\frac{(k - m\omega^2)}{\alpha\omega}\right)\right]$

D'où : $\varphi = -\arg(j\alpha\omega) - \arg\left[1 - j\frac{(k - m\omega^2)}{\alpha\omega}\right] = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left[-\frac{(k - m\omega^2)}{\alpha\omega}\right]$

Soit : $\varphi = \arctan\left[\frac{(k - m\omega^2)}{\alpha\omega}\right] - \frac{\pi}{2}$

Il est facile de vérifier que ces grandeurs sont identiques à celles obtenues dans le cours avec la forme canonique.

2 Les données permettent d'écrire ce qui suit, où l'on identifie ω_1 à la pulsation propre :

$$\varphi(\omega = \omega_1 = 10 \text{ rad.s}^{-1}) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{d'où : } \arctan\left[\frac{(k - m\omega_1^2)}{\alpha\omega_1}\right] = 0 \quad \text{soit : } k - m\omega_1^2 = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} X_m = X_{m0} = 1 \text{ cm} = \frac{F_0}{k} \quad (2)$$

Le maximum est obtenue à une abscisse $\omega = \omega_2 = 9 \text{ rad/s}$ (lue sur la courbe). Or l'amplitude passe par un maximum lorsque l'expression sous le radical est minimale, donc sa dérivée est nulle en ω_2 :

$$\left. \frac{d((k - m\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_2} = 0 \quad \text{d'où : } 2(-2m\omega)(k - m\omega^2) + 2\alpha^2\omega = 0$$

Soit : $2\omega[\alpha^2 - 2m(k - m\omega^2)] = 0$ dont la solution pertinente correspond donc à :
 $\alpha^2 - 2m(k - m\omega_2^2) = 0$ soit $\alpha = \sqrt{2m(k - m\omega_2^2)}$ (3)

En calculant k avec (2), puis m avec (1) et enfin α avec (3), on obtient :

$$k = \frac{F_0}{X_{m0}} = 10 \text{ N.m}^{-1} \quad m = \frac{k}{\omega_1^2} = 0,1 \text{ kg} \quad \alpha = \sqrt{2m(k - m\omega_2^2)} = 0,62 \text{ kg.s}^{-1}$$

On en déduit le facteur de qualité : $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} = 1,6 > \frac{1}{\sqrt{2}}$ valeur qui correspond bien à un cas où le maximum existe.

3 Oscillateur harmonique forcé non amorti

→ énoncé p. 174

1 L'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ est : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t)$ avec $\omega_0^2 = k / m$

La solution est la somme de la solution homogène et de la solution particulière. Ici la solution homogène ne tend pas vers 0, car il n'y a pas d'amortissement, le régime forcé permanent ne se limite donc pas à la solution particulière. L'équation homogène est celle de l'oscillateur harmonique :

$x_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ où A et B sont des constantes d'intégration.

La solution particulière s'obtient avec la méthode complexe en notant \underline{x}_{sp} la grandeur complexe associée à x_{sp} :

$$\ddot{\underline{x}}_{sp} + \omega_0^2 \underline{x}_{sp} = \omega_0^2 a e^{j\omega t} \quad \text{d'où : } \underline{x}_{sp} = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{j\omega t}$$

On obtient $x_{SP}(t)$ en prenant la partie réelle :

$$x_{SP} = \operatorname{Re}(\underline{x}) = \operatorname{Re}\left[\frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))\right] \quad \text{d'où : } x_{SP} = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

Bien comprendre

On rencontre ici un des rares cas où il est pratique d'écrire directement $x(t) = \operatorname{Re}(\underline{x})$ plutôt que de chercher séparément l'amplitude et le déphasage. Par ailleurs, il est indispensable ici de résoudre complètement l'équation différentielle sans se limiter à la solution particulière.

La solution générale est de l'équation différentielle complète est donc :

$$x(t) = x_H(t) + x_{SP}(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

$$\text{Avec : } \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{\omega_0^2 a \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$$

A et B se déterminent à l'aide des conditions initiales :

$$x(t=0) = 0 = A + \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{d'où : } A = -\frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

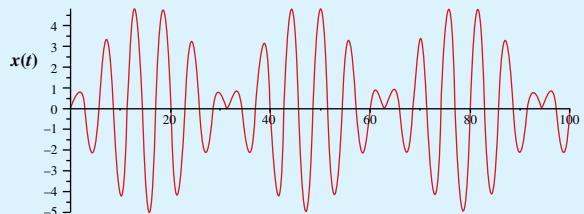
$$\dot{x}(t=0) = 0 = B\omega \quad \text{d'où : } B = 0$$

$$\text{Donc : } x(t) = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)]$$

② Rappel de trigonométrie : $\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$\text{La solution s'écrit aussi : } x(t) = \frac{2\omega_0^2 a}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right) = X_0 \sin(\omega_E t) \sin(\omega_S t)$$

Ce type de fonction a déjà été rencontré dans le chapitre sur les ondes et dans les régimes transitoires. En particulier, si les pulsations ω et ω_0 sont proches, on pourra observer des battements, avec une oscillation rapide de pulsation ω_S dans une enveloppe sinusoïdale de pulsation ω_E , ce qui est le cas avec $\omega = 1,2\omega_0$. On observe des battements de pulsation $\omega_S = 1,1\omega_0$ et d'enveloppe à la pulsation $\omega_E = 0,1\omega_0$ (la fréquence des battements étant double de celle de l'enveloppe).



③ On donne des expressions approchées des différents termes de la solution, en utilisant le fait que $\delta\omega$ tende vers 0, ce qui se traduit par :

$$\delta\omega \ll \omega_0 \quad \text{donc : } \omega_0 + \omega = \omega_0 + \omega_0 + \delta\omega \approx 2\omega_0 \quad \text{et} \quad \sin(\delta\omega t) \approx \delta\omega t$$

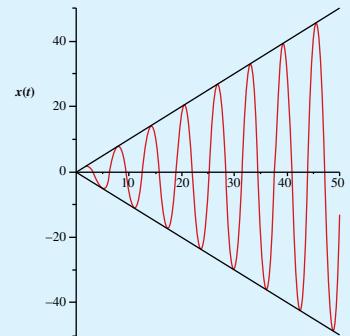
$$\frac{2\omega_0^2 a}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{2\omega_0^2 a}{(\omega_0 + \delta\omega)^2 - \omega_0^2} = \frac{2\omega_0^2 a}{2\omega_0 \delta\omega + (\delta\omega)^2} = \frac{2\omega_0^2 a}{\delta\omega(2\omega_0 + \delta\omega)} \approx \frac{2\omega_0^2 a}{\delta\omega 2\omega_0} \quad \text{soit : } \frac{2\omega_0^2 a}{\omega^2 - \omega_0^2} \approx \frac{\omega_0 a}{\delta\omega}$$

$$\sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right) \approx \sin(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) = \sin\left(\frac{\delta\omega}{2} t\right) \approx \frac{\delta\omega}{2} t$$

$$\text{Ainsi : } x(t) = \frac{2\omega_0^2 a}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) \approx \frac{\omega_0 a}{\delta\omega} \frac{\delta\omega}{2} t \sin(\omega_0 t) \quad \text{puis : } x(t) \approx \frac{\omega_0 t}{2} a \sin(\omega_0 t)$$

Cette fois, $x(t)$ est le produit d'une fonction sinusoïdale de pulsation ω_0 et d'une fonction linéaire. La courbe est donc une sinusoïde enveloppée par deux droites symétriques d'équations respectives $x = a\omega_0 t/2$ et $x = -a\omega_0 t/2$.

On remarque que l'amplitude peut devenir infiniment grande... En pratique, quand l'amplitude devient trop grande, on sort du domaine de linéarité du ressort et l'équation différentielle donnée au début de l'exercice n'est plus valable, d'autant que l'étièvement excessif va endommager le ressort. De plus sans guidage du ressort, la réponse excessive du système va entraîner rapidement des ondulations incontrôlées de l'ensemble.



4 Étude d'un circuit électrique

→ énoncé p. 174

Bien comprendre

Le générateur délivre une tension $e(t) = E_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t)$. E_{eff} est appelée la tension efficace. Une grandeur efficace est par définition la moyenne quadratique, soit la racine de la moyenne du carré de la fonction. Pour une fonction sinusoïdale c'est la tension maximale (amplitude) divisée par $\sqrt{2}$ (sans lien avec le même facteur rencontré dans la bande passante). Il est courant de travailler avec les grandeurs efficaces plutôt que maximales, en effet les appareils de mesure comme les voltmètres et les ampèremètres affichent des valeurs efficaces et non maximales, en régime variable.

- 1 Avec des notations évidentes, la loi des mailles sur le circuit (où tous les dipôles passifs sont en convention récepteur et le générateur en convention générateur) s'écrit, quelle que soit la fréquence :

$$(R_g + r + R)i + u_L + u_C = e \quad (1)$$

Aux basses fréquences, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert (il coupe le courant, $i = 0$) et la bobine se comporte comme un fil ($u_L = 0$). Soit avec (1) : $u_C (\text{BF}) = e$

Aux hautes fréquences, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert (elle coupe le courant, $i = 0$) et le condensateur se comporte comme un fil soit : $u_C (\text{HF}) = 0$

On applique la loi du diviseur de tension aux amplitudes complexes des grandeurs (resp. U_C et E) :

$$\frac{U_C}{E} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R_g + jL\omega + r + R + \frac{1}{jC\omega}}$$

soit : $\frac{U_C}{E} = \frac{1}{jC\omega(R_g + r + R) - LC\omega^2 + 1}$

$$\text{D'où : } \frac{U_C}{E} = \frac{E_{eff} \sqrt{2}}{1 - LC\omega^2 + jC\omega(R_g + r + R)} = \frac{E_{eff} \sqrt{2}}{1 - LC\omega^2 + j\sqrt{\frac{C}{L}}\sqrt{LC}\omega(R_g + r + R)}$$

Soit en introduisant les paramètres habituels :

$$\frac{U_C}{E} = \frac{E_{eff} \sqrt{2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{E_{eff} \sqrt{2}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \frac{1}{R_g + r + R} \sqrt{\frac{L}{C}}$; $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

- 2 Ici la résistance à considérer est bien celle de tout le circuit. La tension efficace aux bornes du condensateur est :

$$U_{C_{eff}} = \frac{|U_C|}{\sqrt{2}} = \frac{E_{eff}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} = \frac{E_{eff}}{\sqrt{g(x)}}$$

La tension efficace aux bornes du condensateur passe par un extremum si son dénominateur (et plus simplement $g(x)$) également, donc si la dérivée de ce terme par rapport à x s'annule (On montre facilement que cela correspond bien à un minimum de g et donc un maximum de U_{eff}) :

$$\frac{dg}{dx} = 0 = 2x \left(2(1-x^2) + \frac{1}{Q^2} \right) \quad \text{soit :} \quad x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{qui n'existe que si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = Q_{\min}$$

Si $Q > Q_{\min}$ on observe un phénomène de résonance à la pulsation :

$$\omega_r = x_r \omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0 \quad \text{et} \quad U_{\text{eff max}} = U_{\text{eff}}(x_r) = \frac{2Q^2 E_{\text{eff}}}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Si $Q < Q_{\min}$, $g'(x)$ ne s'annule que pour $x = 0$, la fonction g est strictement monotone, tout comme U_{eff} et il n'y a pas de résonance.

On vérifie que les limites de la fonction $U_{\text{eff}}(x)$ sont cohérentes avec les prévisions du début :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} U_{\text{eff}}(\omega) = \lim_{x \rightarrow 0} U_{\text{eff}}(x) = E_{\text{eff}} \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} U_{\text{eff}}(\omega) = \lim_{x \rightarrow \infty} U_{\text{eff}}(x) = 0$$

Bien comprendre

On retrouve ici les mêmes propriétés que pour l'étude faite dans le cours sur la charge, en raison de la proportionnalité des deux grandeurs ($q = Cu_C$). C'est pourquoi on parle souvent de résonance en tension même si on met la charge en équation, par opposition à la résonance en intensité qu'on étudie ensuite.

- ③ On a vu à la première question que le courant est nul à la fois aux basses fréquences (coupé par le condensateur) et aux hautes fréquences (coupé par la bobine). $\underline{i}(\text{HF}) = \mathbf{0}$ et $\underline{i}(\text{BF}) = \mathbf{0}$

Ici pour écrire l'amplitude complexe de l'intensité, on peut, soit (a) écrire directement la loi d'Ohm en impédance, soit (b) exprimer l'intensité à partir du U_C déterminée aux questions précédentes (on pourrait aussi écrire la loi des mailles en grandeurs réelles puis passer aux complexes) :

a) $\underline{Z} = \underline{Z}_{R_g} + \underline{Z}_r + \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R_g + r + R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R_g + r + R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \quad \text{et} \quad \underline{E} - \underline{Z}\underline{I} = 0$

b) $i(t) = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{d'où :} \quad \underline{I} = jC\omega \underline{U}_C = \frac{jC\omega E_{\text{eff}} \sqrt{2}}{1 - LC\omega^2 + jC\omega(R_g + r + R)}$

Dans les deux cas, il vient aisément :

$$\underline{I} = \frac{E_{\text{eff}} \sqrt{2}}{R_g + r + R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{E_{\text{eff}} \sqrt{2}}{R_g + r + R + j\sqrt{\frac{L}{C}} \left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega} \right)} = \frac{E_{\text{eff}} \sqrt{2}}{(R_g + r + R) \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]}$$

$$\boxed{\underline{I} = \frac{E_{\text{eff}} \sqrt{2}}{R_0 \left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]}}$$

avec les mêmes notations que précédemment et $R_0 = R_g + r + R$

- ④ On a : $I_{\text{eff}} = \frac{|I|}{\sqrt{2}} = \frac{E_{\text{eff}}}{R_0 \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2} \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$

Il n'est pas nécessaire ici de dériver la fonction pour obtenir le maximum. En effet I_{eff} est maximum, si le dénominateur est minimum. Or ce dernier est la somme d'un terme constant positif (=1) et d'un carré. Il sera donc minimal, si ce carré est nul, soit :

$$x - \frac{1}{x} = 0 \quad \text{d'où :} \quad x'_r = 1 \quad \text{et} \quad \omega'_r = \omega_0 \quad \text{et} \quad I_{\text{eff max}} = I_{\text{eff}}(x_r) = \frac{E_{\text{eff}}}{R_0} \quad (\text{résultat valable pour tout } Q)$$

❶ x_1 et x_2 les bornes de la bande passante vérifient : $I_{eff}(x_{1,2}) = \frac{I_{eff,max}}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \frac{I_{eff,max}}{\sqrt{2}} = \frac{I_{eff,max}}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$

qui donne aisément : $Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 1$ soit : $\left(x-\frac{1}{x}\right) = \pm \frac{1}{Q}$

Soit à résoudre deux équations du second degré (voir p. 173) : $x^2 \mp \frac{x}{Q} - 1 = 0$

dont les solutions s'écrivent : $x = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right) = \frac{1}{2Q} \left(\pm 1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2} \right)$

et où seules les valeurs positives ont un sens physique, soit :

$$\omega_1 = \omega_0 x_1 = \frac{\omega_0}{2Q} \left(-1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 x_2 = \frac{\omega_0}{2Q} \left(+1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right)$$

Les fréquences se déduisent des pulsations par un facteur 2π , identique de part et d'autre des égalités, d'où :

$$f_1 = f_0 x_1 = \frac{f_0}{2Q} \left(-1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right) \quad \text{et} \quad f_2 = f_0 x_2 = \frac{f_0}{2Q} \left(+1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right)$$

Et la bande passante en pulsation ou en fréquence : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$ $\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q}$

❷ La courbe 2 tend vers 0 pour $f \rightarrow 0$, au contraire de la courbe 1 : on en déduit que la courbe 1 renvoie à la tension U_{Ceff} et la courbe 2 à l'intensité I_{eff} . Les abscisses des maxima confirment ce choix, car on a vu que la fréquence de résonance en tension est inférieure à la fréquence de résonance en intensité ($\omega_r < \omega'_r = \omega_0$). On utilise toutes les propriétés établies dans les questions précédentes.

$$U_{Ceff}(\omega = 0) = E_{eff} \quad \text{on lit : } E_{eff} = 5 \text{ V}$$

$$I_{eff,max} = I_{eff}(\omega = \omega'_r = \omega_0) = I_{eff}(f = f'_r = f_0) \quad \text{on lit : } I_{eff,max} = 9 \text{ mA} \quad \text{et} \quad f'_r = f_0 = 1,6 \text{ kHz}$$

$$I_{eff}(f_{1,2}) = \frac{I_{eff,max}}{\sqrt{2}} = 6,4 \text{ mA} \quad \text{on lit : } f_1 = 1,2 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad f_2 = 2,1 \text{ kHz}$$

La largeur de la bande passante en intensité est :

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 900 \text{ Hz}$$

On en déduit le facteur de qualité :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 1,8$$

$$I_{eff,max} = \frac{E_{eff}}{R_0} \quad \text{d'où : } R_0 = \frac{E_{eff}}{I_{eff,max}} = 555 \Omega \quad \text{et} \quad r = R_0 - R - R_g = 25 \Omega$$

$$\omega_0^2 = 4\pi^2 f_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{d'où : } L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = 0,10 \text{ H}$$

Les fréquences de coupure en tension s'obtiennent graphiquement par :

$$U_{Ceff}(f'_{1,2}) = \frac{U_{Ceff,max}}{\sqrt{2}} = 6,6 \text{ V} \quad \text{on lit : } f'_1 = 0,9 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad f'_2 = 1,9 \text{ kHz}$$

La largeur de la bande passante en tension est :

$$\Delta f' = f'_2 - f'_1 = 1000 \text{ Hz}$$

N. B. : Plusieurs manières d'enchaîner les valeurs sont ici possibles, les successions d'arrondis et les lectures graphiques pouvant entraîner quelques écarts dans les résultats.

5 Méthode des trois voltmètres

→ énoncé p. 175

D est formée d'une résistance r et d'une bobine idéale L , donc son impédance est $Z = r + jL\omega$, r et L sont à déterminer. On note v_1 , v_2 et v_3 les tensions réelles sinusoïdales, V_1 , V_2 et V_3 leurs valeurs efficaces (lues sur les voltmètres) et \underline{V}_1 , \underline{V}_2 et \underline{V}_3 leurs amplitudes complexes. On utilise les mêmes notations pour l'intensité qui est la même dans tous les dipôles.

1^{re} méthode, avec les complexes : La tension v_2 est la tension aux bornes de la résistance, la tension v_3 est la tension aux bornes de la bobine réelle, la tension v_1 est la tension aux bornes de l'ensemble. Pour chaque dipôle on écrit la loi d'Ohm sur les impédances, puis on exprime les modules :

$$\underline{V}_k = \underline{Z}_k I \Rightarrow |\underline{V}_k| = |\underline{Z}_k| |I| \Rightarrow V_k \sqrt{2} = |Z_k| I \sqrt{2} \Rightarrow V_k = |Z_k| I$$

Avec : $\underline{Z}_2 = R$ $\underline{Z}_3 = r + jL\omega$ $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = R + r + jL\omega$

D'où : $|\underline{Z}_2| = R$ $|\underline{Z}_3| = \sqrt{r^2 + L^2\omega^2}$ $|\underline{Z}_1| = \sqrt{(R+r)^2 + L^2\omega^2}$

On en déduit le système (S) suivant, où les inconnues sont I , r et L , qui conduit au système (S') dans lequel on a éliminé I dont la valeur est sans intérêt :

$$\begin{cases} V_2 = RI \\ V_3 = \sqrt{r^2 + L^2\omega^2} I \\ V_1 = \sqrt{(R+r)^2 + L^2\omega^2} I \end{cases} \quad (\text{S})$$

$$\begin{cases} R^2 V_3^2 = (r^2 + L^2\omega^2) V_2^2 \\ R^2 V_1^2 = ((R+r)^2 + L^2\omega^2) V_2^2 \end{cases} \quad (\text{S}')$$

On obtient alors r en soustrayant les deux équations :

$$R^2 (V_1^2 - V_3^2) = ((R+r)^2 - r^2) V_2^2 \quad \text{soit :} \quad R^2 (V_1^2 - V_3^2) = (R^2 + 2rR) V_2^2$$

Puis : $\frac{V_1^2 - V_3^2}{V_2^2} = 1 + 2 \frac{r}{R}$

Et finalement :

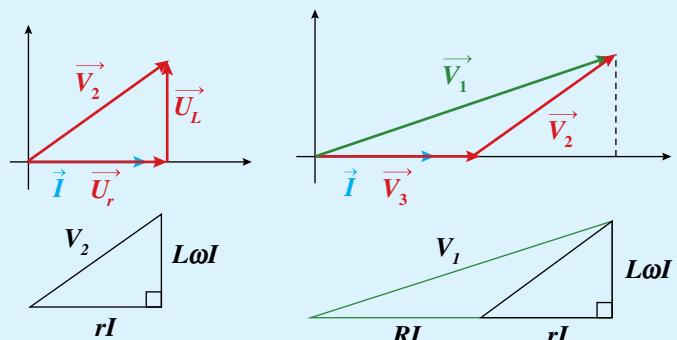
$$r = \frac{R}{2} \left(\frac{V_1^2 - V_3^2}{V_2^2} - 1 \right)$$

$$L = \frac{R}{\omega} \sqrt{\frac{V_3^2}{V_2^2} - \frac{r^2}{R^2}}$$

Puis on en déduit L à l'aide de l'une des équations :

2^{nde} méthode, avec la représentation de Fresnel : Les dipôles étant en série, la grandeur commune est l'intensité, le vecteur intensité donnera l'axe horizontal de référence. On prend en général pour norme des vecteurs, les amplitudes des grandeurs électriques, ici il est préférable de prendre plutôt les valeurs efficaces, ce qui ne change rien aux orientations des vecteurs les uns par rapport aux autres. Le schéma ci-contre met en évidence la construction et les triangles rectangles sur lesquels en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} V_2 = RI \\ V_3^2 = r^2 I^2 + L^2\omega^2 I^2 \\ V_1^2 = (R+r)^2 I^2 + L^2\omega^2 I^2 \end{cases}$$



Toutes les grandeurs considérées étant positives, ce système est équivalent à (S) ci-dessus, la résolution donne les mêmes résultats.

À méditer

Les mathématiques constituent pour ainsi dire le langage à l'aide duquel une question peut être posée et résolue.

WERNER HEISENBERG (1901-1976)

Filtrage linéaire

On se propose d'étudier comment des signaux, tant électriques que mécaniques, sont modifiés à la traversée d'un système linéaire, phénomène intervenant dans de nombreuses situations : réponse d'amortisseurs de véhicules en fonction des secousses, d'un bâtiment à des ondes sismiques, sélection d'une station radio par un tuner, traitement d'un son par une table de mixage (amplificateur, égaliseur...). Dans tous ces cas, le système modifie, voire élimine une partie des propriétés du signal d'entrée, c'est pourquoi on parle de filtrage du signal.

Outils mathématiques

■ **Équivalent d'une fonction :** $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = o(g) \Leftrightarrow f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$

Exemples : $x - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{x}$; $x - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$; $\sum_{n=0}^p \alpha_n x^n \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha_0$; $\sum_{n=0}^p \alpha_n x^n \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha_p x^p$ ($\alpha_0 \neq 0 ; \alpha_p \neq 0$)

I Caractéristiques des signaux

1. Forme des signaux

La notion de signal introduite au chapitre 3 est employée également pour décrire une grandeur d'entrée d'un système (excitation) et une grandeur de sortie (réponse). Pour un circuit électrique, elle sera généralement une tension ou une intensité, pour un système mécanique un déplacement ou une vitesse.

Il a déjà été vu qu'une fonction périodique $\sigma(t)$ de fréquence f_σ s'écrit comme une somme discrète (Σ) de termes sinusoïdaux de fréquences multiples entiers de f_σ (décomposition de Fourier) et qu'une fonction quelconque s'écrit comme une somme continue de termes sinusoïdaux (transformée de Fourier), c'est l'analyse spectrale. L'étude des systèmes soumis à des signaux sinusoïdaux permettra donc de généraliser leur comportement à des signaux quelconques, périodiques ou non. On se limitera dans ce qui suit aux signaux périodiques, décomposables en somme discrète de Fourier, mais on gardera à l'esprit que les résultats peuvent se généraliser à un signal quelconque.

Propriété

Un signal périodique $\sigma(t)$ de fréquence f_σ s'écrit par **décomposition de Fourier** :

$$\forall t \quad \sigma(t) = \sigma(t + T_\sigma) \quad \text{et} \quad \sigma(t) = \sigma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_\sigma t + \varphi_n)$$

Dans ce qui suit, $\sigma(t)$ pourra être l'entrée $e(t)$ ou la sortie $s(t)$ du système.

2. Moyenne d'un signal

Définition

La **moyenne d'un signal $\sigma(t)$ de période T_σ** est : $\langle \sigma(t) \rangle = \frac{1}{T_\sigma} \int_{t_0}^{t_0 + T_\sigma} \sigma(t) dt$

- L'intégration se fait sur une période, t_0 est quelconque (on choisit souvent $t_0 = 0$, mais $t_0 = -T_\sigma/2$ pourra être commode pour une fonction paire). Si $\sigma(t)$ est un signal sinusoïdal, on a :

$$\langle \sigma(t) \rangle = \frac{1}{T_\sigma} \int_{t_0}^{t_0+T_\sigma} \sigma(t) dt = \frac{1}{T_\sigma} \int_{t_0}^{t_0+T_\sigma} A \cos(2\pi f_\sigma t + \varphi) dt = \frac{1}{T_\sigma} \int_{t_0}^{t_0+T_\sigma} A \cos\left(\frac{2\pi}{T_\sigma} t + \varphi\right) dt$$

Soit : $\langle \sigma(t) \rangle = \frac{1}{T_\sigma} A \frac{T_\sigma}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T_\sigma} t + \varphi\right) \right]_{t_0}^{t_0+T_\sigma} = \frac{A}{2\pi} [\sin(2\pi + \varphi) - \sin(\varphi)] = 0$ (On a choisi $t_0 = 0$.)

Ce résultat peut s'appliquer à tous les termes de Fourier de la décomposition d'une fonction périodique, la moyenne d'une somme étant la somme des moyennes.

Propriété

- La moyenne d'un signal sinusoïdal est nulle : $\langle A \cos(2\pi f_\sigma t + \varphi) \rangle = 0$
- La moyenne d'une fonction périodique est le terme d'ordre zéro de sa décomposition de Fourier :

$$\left\langle \sigma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_\sigma t + \varphi_n) \right\rangle = \sigma_0$$

En conséquence, la moyenne d'un signal sinusoïdal ne peut apporter aucun renseignement sur ses caractéristiques, en particulier sur son amplitude. Un autre type de moyenne est donc nécessaire.

3. Valeur efficace d'un signal

L'énergie associée à un signal est en général proportionnelle au carré de celui-ci, l'utilisation de la moyenne quadratique est donc pertinente pour décrire les propriétés du signal.

Définition

- La **valeur efficace** d'un signal périodique $\sigma(t)$ est sa moyenne quadratique, c'est-à-dire la racine carrée de la moyenne de son carré : $\sigma_{eff} = \sqrt{\langle \sigma^2(t) \rangle}$

- Les voltmètres et les ampèremètres mesurent en mode alternatif les grandeurs efficaces et en mode continu les valeurs moyennes. Si $\sigma(t)$ est un signal sinusoïdal, on vérifie (on peut choisir $t_0 = 0$) :

$$\sigma_{eff}^2 = \langle \sigma^2(t) \rangle = \frac{1}{T_\sigma} \int_{t_0}^{t_0+T_\sigma} \sigma^2(t) dt = \frac{1}{T_\sigma} \int_{t_0}^{t_0+T_\sigma} A^2 \cos^2(2\pi f_\sigma t + \varphi) dt = \frac{A^2}{2T_\sigma} \int_{t_0}^{t_0+T_\sigma} (1 + \cos[2(2\pi f_\sigma t + \varphi)]) dt$$

Soit : $\sigma_{eff}^2 = \frac{A^2}{2T_\sigma} \int_{t_0}^{t_0+T_\sigma} \left(1 + \cos\left[\frac{4\pi}{T_\sigma} t + 2\varphi\right] \right) dt = \frac{A^2}{2T_\sigma} \left[t + \frac{T_\sigma}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{T_\sigma} t + 2\varphi\right) \right]_{t_0}^{t_0+T_\sigma} = \frac{A^2}{2}$

Propriété

- La **valeur efficace** d'un signal sinusoïdal est proportionnelle à son amplitude A :

$$\sigma(t) = A \cos(2\pi f_\sigma t + \varphi) \Rightarrow \sigma_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

- Théorème de Parseval** : la valeur efficace d'une fonction périodique $\sigma(t)$ s'exprime à l'aide des coefficients de sa décomposition de Fourier :

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_\sigma t + \varphi_n) \Rightarrow \sigma_{eff}^2 = \sigma_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}$$

La démonstration du théorème de Parseval est très abordable à l'aide de formules de trigonométrie habituelles et le lecteur est invité à s'y essayer. Le calcul fait intervenir des termes en cosinus de moyenne nulle, des termes en carrés de cosinus de moyenne $\frac{1}{2}$ et des produits de cosinus qu'on ramène à une somme de cosinus, de moyenne nulle.

II Filtres

1. Fonction de transfert

Définition

- Un **filtre** est un système dont le signal de sortie (réponse) diffère du signal d'entrée (excitation).
- Un filtre est **linéaire** si l'équation différentielle traduisant l'effet du filtre et liant la sortie $s(t)$ du filtre à l'entrée $e(t)$ est linéaire.

Les notions de filtres et de propriétés des filtres seront essentiellement traitées ici dans le cadre de l'électricité. C'est en effet dans ce domaine (tout particulièrement en électronique) qu'on les utilise le plus souvent et qu'elles sont le plus facile à mettre en œuvre techniquement et expérimentalement. On gardera cependant à l'esprit que l'ensemble des concepts, des méthodes, des résultats sont valables dans d'autres domaines, en particulier la mécanique et l'optique (*voir exercices n° 5 et n° 6 p. 198-199*).

La linéarité du filtre induit une propriété essentielle qui résulte du théorème de superposition.

Énoncé

Lorsqu'un filtre **linéaire** est soumis à une entrée égale à une somme de signaux sinusoïdaux, sa réponse est la somme des réponses du filtre à chaque signal.

Un signal d'entrée peut toujours s'écrire comme une somme (discrète ou continue) de fonctions sinusoïdales, il est donc suffisant, pour étudier le comportement du filtre linéaire sur tout signal d'entrée, de connaître uniquement son effet sur une entrée purement sinusoïdale.

Définitions

- La **fonction de transfert H d'un filtre linéaire**, qui donne une réponse en sortie sinusoïdale $s(t)$ à une excitation d'entrée sinusoïdale $e(t)$, est la grandeur complexe définie par : $H = \frac{s}{e}$ où e et s sont les complexes associés respectivement à $e(t)$ et $s(t)$.
- Le **gain G du filtre** est le module de la fonction de transfert : $G = |H| = \left| \frac{s}{e} \right|$
- Le **gain en décibel du filtre** est : $G_{dB} = 20 \log G = 20 \log |H|$

■ Le Bel est une « unité » particulière qui donne le logarithme décimal d'une grandeur sans dimension, elle-même rapport d'une grandeur à une grandeur de référence du même type. Par exemple le niveau sonore en Bel est le log du rapport de l'intensité sonore sur l'intensité sonore la plus faible audible par l'oreille humaine. Pour l'exprimer en décibel, il suffit de multiplier la grandeur en Bel par 10 :

$$I_{Bel} = \log \frac{I}{I_0} \quad \text{d'où :} \quad I_{décibel} = 10I_{Bel} = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

■ La définition du gain d'un filtre comporte pourtant un facteur 20. En réalité le gain d'un filtre est défini par la puissance de sortie en référence à celle d'entrée. La puissance étant une fonction quadratique des grandeurs électriques, on obtient :

$$G_{Bel} = \log \frac{P_{sortie}}{P_{entrée}} \quad \text{d'où :} \quad G_{dB} = 10 \log \frac{P_{sortie}}{P_{entrée}} = 10 \log \frac{(U_{sortie})^2}{(U_{entrée})^2} = 20 \log \frac{U_{sortie}}{U_{entrée}} = 20 \log |H|$$

- La réponse d'un filtre donné (c'est-à-dire de paramètres fixés) et, par suite, sa fonction de transfert ne dépendent que de la pulsation (ou si l'on préfère de la fréquence) du signal d'entrée. On écrira généralement dans ce qui suit $\underline{H}(\omega)$, car on priviliege dans cette étude le comportement fréquentiel des filtres. Certains auteurs préfèrent écrire $\underline{H}(j\omega)$ pour mettre en évidence l'utilité de faire apparaître le facteur $j\omega$ dans l'expression de \underline{H} , facteur qui traduit plus explicitement le lien entre la représentation complexe et l'équation différentielle réelle. On trouvera aussi, lorsqu'on utilise la transformée de Laplace, la notation $H(p)$, où p n'est autre que le facteur $j\omega$. Toutes ces approches s'appuient sur les mêmes lois physiques et les mêmes outils mathématiques, même si elles diffèrent légèrement dans leur présentation ou leur notation et conduiront évidemment à des résultats physiques identiques.

POINT MÉTHODE

Comprendre la signification et l'intérêt de la fonction de transfert

- On peut écrire la **fondction de transfert**, ainsi que les valeurs d'entrée et de sortie, sous la forme complexe habituelle, faisant intervenir module et argument :

$$\underline{H} = |\underline{H}| e^{j\varphi} = \frac{|\underline{S}| e^{j\varphi_s}}{|\underline{E}| e^{j\varphi_e}} \text{ où l'on choisit généralement l'origine des phases de sorte que } \underline{E} = E_m$$

On a vu au chapitre précédent que la réponse d'un système linéaire soumis à une excitation sinusoïdale présentait une amplitude et une phase qui dépendent de la pulsation imposée. Par conséquent $|\underline{H}|$ et φ sont des fonctions de ω .

- Il est donc important de comprendre que les notions de filtre et de fondction de transfert ne sont qu'une généralisation de l'étude des **oscillateurs en régime forcé** vus au chapitre précédent. On a en effet :

$$\underline{H} = |\underline{H}|(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \frac{S_m(\omega)}{E_m} e^{j(\varphi_s(\omega) - \varphi_e)} \quad \text{d'où : } |\underline{H}|(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{E_m} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \varphi_s(\omega) - \varphi_e$$

→ L'amplitude de la fondction de transfert est l'amplitude de la réponse ramenée à l'amplitude d'excitation.

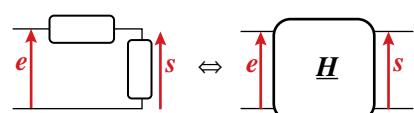
→ L'argument de la fondction de transfert est le déphasage de la réponse par rapport à l'excitation.

- La fondction de transfert du filtre permet donc d'étudier, pour toute fréquence imposée en entrée, le régime forcé du circuit, autrement dit la solution particulière en régime permanent du circuit. La fondction de transfert contient toutes les informations nécessaires, puisqu'on sait que la réponse sera une oscillation sinusoïdale de même fréquence que l'entrée. On se contente donc de donner l'amplitude de la réponse par rapport à l'entrée (le module de la fondction de transfert ou gain) et le déphasage de la réponse par rapport à l'entrée (argument de la fondction de transfert) : on dira que le **comportement fréquentiel du filtre** est entièrement déterminé par sa fondction de transfert.

- On gardera à l'esprit que l'expression de la fondction de transfert reste la traduction de l'**équation différentielle du comportement du filtre**, équation qu'on saura éventuellement retrouver. Exemple :

$$\frac{\underline{H}}{\underline{E}} = \frac{\alpha + j\beta\omega}{-a\omega^2 + jb\omega + c} \text{ signifie : } a(j\omega)^2 \underline{s} + jb\omega \underline{s} + c\underline{s} = \alpha \underline{e} + j\beta\omega \underline{e} \text{ soit : } a \frac{d^2s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + cs = \alpha e + \beta \frac{de}{dt}$$

Le filtre en électricité sera généralement mis sous la forme d'un quadrupôle, la fondction de transfert étant souvent obtenue à l'aide d'une loi de diviseur de tension. Le filtre est représenté par un rectangle portant sa fondction de transfert ou un symbole donnant son rôle. En électronique, on associe ainsi des filtres en cascade, de sorte que la sortie du filtre n devienne l'entrée du filtre $n+1$.



2. Différents types de filtres

L'intérêt d'un filtre est de donner des réponses différentes selon la fréquence d'entrée. Lorsque l'amplitude de sortie est suffisamment importante (au regard de l'amplitude d'entrée ou de la réponse maximale que l'on peut obtenir), on dira que le filtre **laisse passer** le signal. *A contrario*, si l'amplitude est faible, on dira que le filtre **ne laisse pas passer** ou **coupe** le signal. Du point de vue fréquentiel, il existe plusieurs types courants de filtres linéaires. Certains filtres ne sont pas conçus pour atténuer les signaux, mais pour modifier légèrement le gain (ou la phase) à différentes fréquences, comme les égaliseurs.

Définitions

- Un **filtre passe-bas** laisse passer les signaux sinusoïdaux de basses fréquences et coupe les signaux sinusoïdaux de hautes fréquences.
- Un **filtre passe-haut** laisse passer les signaux sinusoïdaux de hautes fréquences et coupe les signaux sinusoïdaux de basses fréquences.
- Un **filtre passe-bande** laisse passer les signaux sinusoïdaux dont la fréquence est comprise dans un intervalle (bande) de fréquences et coupe les autres.
- Un **filtre coupe-bande** coupe les signaux sinusoïdaux dont la fréquence est comprise dans un intervalle (bande) de fréquences et laisse passer les autres.
- Un **filtre toute-bande** ou **passe-tout** ou **déphasageur** n'agit pas sur l'amplitude et laisse passer tous les signaux, mais déphase le signal de sortie par rapport au signal d'entrée en fonction de sa fréquence.

« *laisse passer* » = amplifie ou atténue peu et « *coupé* » = atténue fortement

En réalité le filtre laisse évidemment tout passer, mais il est susceptible d'atténuer (plus ou moins fortement) les signaux de certaines fréquences. On pourra alors modéliser un filtre réel par un **filtre parfait** ou idéal, qui donne un sens au vocabulaire employé. Avec l'exemple schématisé, on a :

→ Le gain d'un filtre idéal ne peut prendre que deux valeurs :

$$G = 0 \text{ ou } G = H_0 = \text{constante}$$

→ Les fréquences pour lesquelles le gain est H_0 passent :

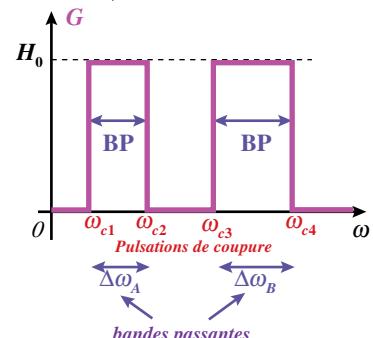
$$G(\omega) = H_0 \Rightarrow \omega \in [\omega_{c1}, \omega_{c2}] \cup [\omega_{c3}, \omega_{c4}] = \text{bande passante}$$

→ Les fréquences de coupure délimitent la bande passante :

$$\omega_{c1}, \omega_{c2}, \omega_{c3}, \omega_{c4}$$

→ Les fréquences pour lesquelles le gain est 0 ne passent pas :

$$G(\omega) = 0 \Rightarrow \omega \notin [\omega_{c1}, \omega_{c2}] \cup [\omega_{c3}, \omega_{c4}]$$



Définitions

- La **bande passante (BP)** d'un filtre est le domaine de fréquences ou de pulsations pour lesquelles :

$$G(\omega_{\in BP}) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{soit :} \quad G_{dB}(\omega_{\in BP}) \geq G_{dB\max} - 3 \text{ dB}$$

- Les **fréquences** ou les **pulsations de coupure** définissent les bornes des bandes passantes du filtre :

$$G(\omega_{coupe}) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{soit :} \quad G_{dB}(\omega_{coupe}) = G_{dB\max} - 3 \text{ dB}$$

On démontre aisément l'équivalence entre les définitions sur le gain et le gain en décibel :

$$G(\omega_{\in BP}) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow 20 \log [G(\omega_{\in BP})] \geq 20 \log \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{dB}(\omega_{\in BP}) \geq G_{dB\max} - 20 \log \sqrt{2}$$

Soit : $G_{dB}(\omega_{\in BP}) \geq G_{dB\max} - 3 \text{ dB}$ car $\log(2) \approx 0,3$

On retrouve évidemment des définitions identiques à celles vues au chapitre précédent. La justification de la bande passante à -3 dB se comprend aisément avec la remarque p. 185 et la définition du logarithme. On représente dans le tableau ci-dessous les courbes de gain en fréquence des principaux types de filtres réels et de leur modèle idéal.

Type de filtre	Filtre idéal	Filtre réel	Bandes passantes Symboles
Passe-bas			$[0 ; f_c]$
Passe-haut			$[f_c ; +\infty]$
Passe-bande			$[f_{c1} ; f_{c2}]$
Coupe-bande			$[0 ; f_{c1}] \cup [f_{c2} ; +\infty]$

III Diagrammes de Bode

1. Nécessité d'une représentation logarithmique

Dans un circuit électrique de TP alimenté par un GBF comme dans un système électronique quelconque, la fréquence du signal d'entrée peut varier dans une large gamme de fréquences (du Hertz au MHz, voire au GHz). Il devient alors difficile de représenter sur un même graphe et de façon lisible les fonctions $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$. L'échelle logarithmique permet de surmonter cette difficulté. On utilise avec profit le rapport de la pulsation d'entrée ω à une pulsation caractéristique du filtre ω_{car} , variable sans dimension notée x , déjà introduite au chapitre précédent.

Définitions

- Un **diagramme de Bode** est le tracé du gain en décibel et du déphasage de la réponse d'un filtre en fonction du logarithme décimal de la fréquence, de la pulsation ou, plus rigoureusement, de leur rapport sans dimension à une valeur caractéristique du circuit (ω_{car} ou f_{car}) :

$$G_{dB} = f(\log x) \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_{car}} = \frac{f}{f_{car}}$$

- Un **diagramme de Bode asymptotique** est un diagramme de Bode simplifié sur lequel ne figurent que les asymptotes, en particulier en zéro et en l'infini, qui traduisent le comportement à basses et à hautes fréquences du filtre.
- Une **décade** est un intervalle de la forme $[x ; 10x]$ pour une valeur positive quelconque de x , c'est-à-dire tout intervalle de fréquence $[f ; 10f]$ ou de pulsation $[\omega ; 10\omega]$ où f et ω peuvent avoir une valeur positive quelconque. Dans un diagramme de Bode, en raison de l'échelle logarithmique, une décade représente une unité sur l'axe des abscisses $[\log(x) ; \log(x) + 1]$.

- En toute rigueur, une fonction logarithme (ou exponentielle) en physique est d'argument sans dimension. Il est donc plus correct d'utiliser x , même s'il est parfois commode de visualiser les fréquences correspondantes sur l'axe des abscisses.
- Grâce à l'échelle logarithmique, les courbes réelles vont tendre rapidement vers leurs asymptotes dont le tracé est indispensable (voire suffisant pour conclure quant à la nature du filtre) sur ce genre de diagramme.

POINT MÉTHODE

Tracer un diagramme de Bode

- Pour tracer le **diagramme de Bode d'un filtre**, il faut procéder méthodiquement :
 - ➡ Prévoir la nature du filtre en étudiant son comportement basses fréquences (BF) et hautes fréquences (HF) avec des équivalents de dipôles.
 - ➡ Établir l'expression de la fonction de transfert du système : $H(\omega)$.
 - ➡ Déterminer les paramètres pertinents du système (pulsations caractéristiques, facteur de qualité).
 - ➡ Exprimer $H(\omega)$ ou de préférence $H(x)$ sous une forme canonique (voir tableaux ci-après).
 - ➡ Exprimer le gain G (module de H) et la phase φ (argument de H).
 - ➡ Exprimer le gain en décibel G_{dB} .
 - ➡ À l'aide d'un tableau, étudier les variations des fonctions et leur comportement asymptotique.
 - ➡ Placer les asymptotes sur le diagramme (papier log, semi-log ou quadrillé).
 - ➡ Tracer les courbes de gain et de phase et confirmer la prévision initiale.

- On détaille ci-dessous l'étude pour le premier filtre des tableaux ci-après.

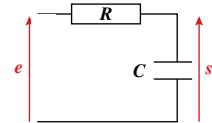
→ À hautes fréquences, le condensateur est l'équivalent d'un fil, la tension de sortie est nulle, tandis qu'à basses fréquences il est équivalent à un interrupteur ouvert et $s = e$.

→ On prévoit un filtre passe-bas.

→ On utilise la loi du diviseur de tension pour exprimer la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{car}} = \frac{1}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad \omega_{car} = \frac{1}{RC}$$

ω	0	ω_c	$+\infty$
x	0	1	$+\infty$
$\log x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$G_{dB}(x) = -10 \log(1 + x^2)$	0	-3 dB	$-\infty$
asymptote	0	-20 logx	
$\varphi = -\arctan(x)$	$\pi/2$	0	$-\pi/2$



On détermine les asymptotes en utilisant des équivalents de G_{dB} pour x tendant vers 0 ou vers l'infini :

$$(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 \Rightarrow -10 \log(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 0$$

$$(1+x^2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \Rightarrow -10 \log(1+x^2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -20 \log x$$

L'asymptote $-20 \log x$ signifie que si x est multiplié par 10 (une décade), alors $\log x$ augmente de 1 et donc G_{dB} diminue de 20. Il est alors habituel d'écrire ce comportement asymptotique sous forme -20 dB/déc et de l'indiquer sur le graphique. On trace ensuite le diagramme de Bode en plaçant les asymptotes, les points particuliers et, pour finir, les tracés des courbes. Le filtre est bien un passe-bas.

Le lecteur est invité à retrouver les fonctions de transferts des différents filtres les plus classiques, proposés dans les tableaux pages suivantes (où il suffit d'appliquer la loi du diviseur de tension et les expressions habituelles des impédances des dipôles), à proposer une forme canonique (pour les filtres complexes, plusieurs expressions sont souvent possibles), puis à en tracer les diagrammes de Bode, après une étude des fonctions G , G_{dB} et φ .

2. Quelques filtres courants

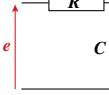
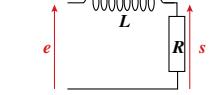
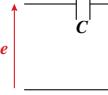
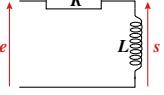
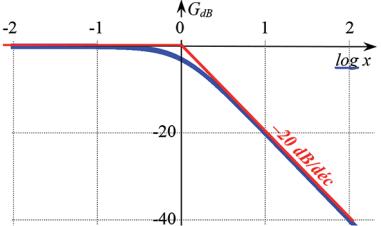
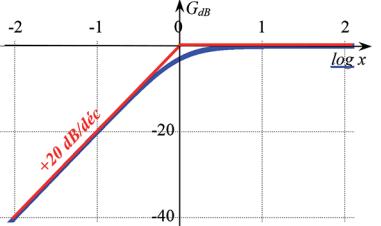
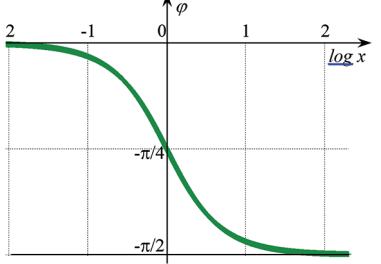
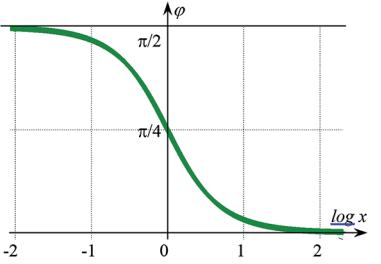
Définitions

- Un **filtre du premier ordre** est un filtre dont l'équation différentielle est du premier ordre.
- Un **filtre du second ordre** est un filtre dont l'équation différentielle est du second ordre.

On obtiendra des filtres du premier ordre (respectivement du second ordre) à l'aide de circuit RL ou RC série (respectivement RLC série) alimentés par une tension sinusoïdale et dont on étudie la tension aux bornes de l'un des dipôles. Il y a cependant de nombreux autres moyens d'obtenir des filtres, à l'aide d'associations de dipôles linéaires (*voir exercices n° 1 pont de Wien et n° 2 p. 197*).

Remarque : Dans les tableaux qui suivent, le numérateur fait apparaître un gain H_0 , qui est toujours positif pour un filtre passif (qui ne fournit pas d'énergie), mais peut être négatif pour un filtre actif (qui fournit de l'énergie). On a représenté le diagramme de Bode du gain avec $H_0 = 1$ et donc $G_{dB0} = 0$; si ce n'est pas le cas, on décale la courbe de la valeur de $G_{dB0} = 20 \log(|H_0|)$ (*voir exercice n° 4 p. 198 par exemple*). De même, la courbe de phase sera décalée de $+ \pi$ si $H_0 < 0$ (filtre actif).

➡ Filtres d'ordre 1

Nature du filtre	Passe-bas	Passe-haut
Circuits possibles	 	 
Pulsation caractéristique	$\omega_{car} = 1/RC$	$\omega_{car} = R/L$
Fonction de transfert	$H = \frac{H_0}{1+jx}$	$H = \frac{H_0}{1-j/x} = \frac{jxH_0}{1+jx}$
Gain G	$G = H = \frac{ H_0 }{\sqrt{1+x^2}}$	$G = H = \frac{ H_0 }{\sqrt{1+1/x^2}} = \frac{x H_0 }{\sqrt{1+x^2}}$
Gain en décibel	$G_{dB} = 20 \log H_0 - 10 \log(1+x^2)$	$G_{dB} = 20 \log H_0 - 10 \log(1+1/x^2)$
Asymptote BF	$G_{dB} = 20 \log H_0 $	$G_{dB} = 20 \log H_0 + 20 \log x$
Comportement BF	0	+20 dB/décade
Asymptote HF	$G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log x$	$G_{dB} = 20 \log H_0 $
Comportement HF	-20 dB/décade	0
Diagramme de Bode du gain Avec $H_0 = 1$		
Déphasage*	$\varphi = \arg(H_0) - \arctan(x)$	$\varphi = \arg(H_0) + \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$
Diagramme de Bode de la phase avec $\arg H_0 = 0$		

* Pour un filtre passif : $\arg(H_0) = 0$; pour un filtre actif : $\arg(H_0) = 0$ ou π .

➡ Filtres d'ordre 2

Nature du filtre	Passe-bas	Passe-haut
Circuit possible		
Pulsation caractéristique	$\omega_{car} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$	$\omega_{car} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$
Fonction de transfert	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + \frac{j}{Q}x}$	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \frac{1}{x^2} - \frac{j}{Q}\frac{1}{x}} = \frac{-x^2 H_0}{1 - x^2 + \frac{j}{Q}x}$
Gain G	$G = H = \frac{ H_0 }{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$	$G = H = \frac{ H_0 }{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2 x^2}}} = \frac{ H_0 x^2}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$
Gain en décibel	$G_{dB} = 20 \log H_0 - 10 \log \left[(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right]$	$G_{dB} = 20 \log H_0 - 10 \log \left[\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2 x^2} \right]$
Asymptote BF	$G_{dB} = 20 \log H_0 $	$G_{dB} = 20 \log H_0 + 40 \log x$
Comportement BF	0	+40 dB/décade
Asymptote HF	$G_{dB} = 20 \log H_0 - 40 \log x$	$G_{dB} = 20 \log H_0 $
Comportement HF	-40 dB/décade	0
Diagramme de Bode du gain Avec $H_0 = 1$ pour différentes valeurs de Q		
Déphasage*	$\varphi = \arg(H_0) - \frac{\pi}{2} - \arctan \left[Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]$	$\varphi = \arg(H_0) + \frac{\pi}{2} - \arctan \left[Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]$
Diagramme de Bode de la phase avec $\arg H_0 = 0$ pour différentes valeurs de Q		

* Pour un filtre passif : $\arg(H_0) = 0$; pour un filtre actif : $\arg(H_0) = 0$ ou π .

Nature du filtre	Passe-bande	Coupe-bande
Circuit possible		
Pulsion caractéristique	$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$	$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$
Fonction de transfert	$H = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{j \frac{x}{Q} H_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$	$H = \frac{H_0}{1 - \frac{j}{Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}} = \frac{(1 - x^2)H_0}{1 - x^2 + \frac{j}{Q}x}$
Gain G	$G = H = \frac{ H_0 }{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$	$G = H = \frac{ H_0 }{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}} = \frac{ H_0 \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$
Gain en décibel	$G_{dB} = 20 \log H_0 - 10 \log \left[1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]$	$G_{dB} = 20 \log H_0 - 10 \log \left[1 + \frac{1}{Q^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2} \right]$
Asymptote BF	$G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log x$	$G_{dB} = 20 \log H_0 $
Comportement BF	+20 dB/décade	0
Asymptote HF	$G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log Q - 20 \log x$	$G_{dB} = 20 \log H_0 $
Comportement HF	-20 dB/décade	0
Diagramme de Bode du gain Avec $H_0 = 1$ pour différentes valeurs de Q		
Déphasage*	$\varphi = \arg(H_0) - \arctan \left[Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]$	$\varphi = \arg(H_0) - \arctan \left[\frac{1}{Q} \frac{1}{1/x - x} \right]$
Diagramme de Bode de la phase avec $\arg H_0 = 0$ pour différentes valeurs de Q		

* Pour un filtre passif : $\arg(H_0) = 0$; pour un filtre actif : $\arg(H_0) = 0$ ou π .

Remarque : L'ensemble des filtres ci-dessus correspondent aux circuits étudiés en régime forcé dans le chapitre précédent. Il faut bien comprendre qu'il s'agit exactement des mêmes systèmes, dont on étudie le régime permanent forcé sinusoïdal et qui sont simplement présentés un peu différemment. Toutes les propriétés établies alors restent donc valables ici. Les propriétés de la résonance en intensité se retrouvent dans le passe bande : la fréquence de résonance f_0 est indépendante du facteur de qualité Q et la bande-passante est de largeur $\Delta f = f_0/Q$. Les propriétés de la résonance en tension se retrouvent dans le passe-bas du second ordre : selon la valeur du facteur de qualité Q , le gain peut être strictement monotone ou passer par un extremum (présence d'une résonance en tension si $Q > 1/\sqrt{2}$).

IV Propriétés des filtres linéaires

1. Grandeur de sortie

L'étude de la fonction de transfert permet de déterminer les propriétés de la tension de sortie du filtre en réponse à une tension purement sinusoïdale imposée en entrée. On a vu que, grâce à la décomposition ou la transformation de Fourier d'une part, et du fait de la linéarité du filtre d'autre part, la réponse de ce dernier à une entrée quelconque est la somme des réponses correspondant à chaque composante de la somme de Fourier de l'entrée. On peut ainsi exprimer aisément la sortie dans tous les cas.

Entrée	Sortie du filtre de fonction de transfert $H(\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$
$e(t) = E \cos(\omega_e t + \varphi) = E \cos(2\pi f_e t + \varphi_e)$	$s(t) = H(\omega_e)E \cos(\omega_e t + \varphi_e + \varphi(\omega_e))$
$e(t) = e_1(t) + e_2(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$	$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$
$e(t) = E_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + E_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$	$s(t) = H(\omega_1)E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \varphi(\omega_1)) + H(\omega_2)E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \varphi(\omega_2))$
$e(t) = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$	$s(t) = H(0)e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} H(\omega_n)E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n + \varphi(\omega_n))$
$e(t) = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(2\pi n f_e t + \varphi_n) = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega_e t + \varphi_n)$	$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} H(n\omega_e)E_n \cos(n\omega_e t + \varphi_n + \varphi(n\omega_e))$

e_0 est une valeur moyenne, que l'on peut voir comme un signal de pulsation nulle, la réponse est s_0 , réponse à une excitation constante. s_n est la réponse (sortie) à l'excitation (entrée) e_n .

2. Effet des principaux filtres

En choisissant les paramètres du filtre (valeurs des composants), on peut ajuster les fréquences de coupure et donc la position et la largeur des bandes passantes et sélectionner uniquement les fréquences de son choix, c'est-à-dire atténuer suffisamment les signaux de fréquences indésirables. En réglant ces paramètres, on peut également obtenir des effets plus spécifiques à l'aide des différents filtres déjà étudiés.

N. B. : On rappelle que l'équivalent complexe de la dérivation réelle est la multiplication par $j\omega$ et l'intégration la division par $j\omega$.

► Filtres « passe »

Les filtres vont atténuer fortement les signaux dont les fréquences sont en dehors de leur bande passante, ce qui revient à les éliminer en sortie. Ainsi un filtre passe-bas (respectivement passe-haut) va permettre d'éliminer du signal les hautes (respectivement basses) fréquences, c'est-à-dire supérieures (respectivement inférieures) à sa fréquence de coupure. Un filtre passe-bande élimine du signal les basses et les hautes fréquences, c'est-à-dire extérieures à sa bande passante, au contraire d'un filtre coupe-bande ou rejecteur de bande, qui va éliminer du signal une bande de fréquence.

➡ Caractère moyenneur

Définitions

Un filtre se comporte **en moyenneur** dans un domaine de fréquences si, dans ce domaine, la tension de sortie est proportionnelle à la moyenne de la tension d'entrée.

Exemple : La fréquence de coupure f_c d'un filtre passe-bas est choisie très faible devant la fréquence f_e du signal d'entrée (périodique non sinusoïdal) :

$$e(t) = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(2n\pi f_e t + \varphi_n) \quad \text{et} \quad f_e \gg f_c \quad \Rightarrow \quad nf_e \gg f_c \quad \Rightarrow \quad G(nf_e) \approx 0 \quad \Rightarrow \quad s(t) \approx s_0$$

Toutes les harmoniques de fréquences nf_e seront très fortement atténuerées par le filtre (elles seront « coupées ») et il ne reste que s_0 , la réponse du filtre à l'entrée continue e_0 , moyenne du signal d'entrée.

➡ Caractère déivateur

Définitions

Un filtre se comporte **en déivateur** dans un domaine de fréquences si, dans ce domaine, la tension de sortie est la dérivée de la tension d'entrée (à un coefficient multiplicateur près).

Exemple 1 : Filtre passe-haut du premier ordre utilisé en basse fréquence : $x \ll 1$, soit $\omega \ll \omega_0$

$$\underline{H} = \frac{jxH_0}{1+jx} \underset{x \ll 1}{\sim} jxH_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{H}(\omega \ll \omega_0) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = j \frac{\omega}{\omega_0} H_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{s} = \frac{H_0}{\omega_0} j\omega \underline{e} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \frac{H_0}{\omega_0} \frac{de(t)}{dt}$$

Exemple 2 : Filtre passe-bande du second ordre en basse fréquence : $x \ll 1$, soit $\omega \ll \omega_0$.

$$\underline{H} = \frac{jH_0 x / Q}{1 - x^2 + jx/Q} \underset{x \ll 1}{\sim} jx \frac{H_0}{Q} \quad \Rightarrow \quad \underline{H}(\omega \ll \omega_0) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{H_0}{Q} \quad \Rightarrow \quad \underline{s} = \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega \underline{e} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \frac{H_0}{Q\omega_0} \frac{de(t)}{dt}$$

Propriétés

- La fonction de transfert d'un filtre déivateur s'écrit : $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = aj\omega = bjx$ (a, b constantes réelles).
- Dans le domaine où ce comportement est valide, le diagramme de Bode présente une droite affine de pente +20 dB/déc.

En effet : $G_{dB} = 20 \log(|b|x) = 20 \log(x) + 20 \log(|b|)$

➡ Caractère intégrateur

Définitions

Un filtre se comporte **en intégrateur** dans un domaine de fréquences si, dans ce domaine, la tension de sortie est la primitive de la tension d'entrée (à un coefficient multiplicateur réel près).

On peut dire aussi que la tension d'entrée est la dérivée de la tension de sortie.

Exemple 1 : Filtre passe-bas du premier ordre utilisé en haute fréquence : $x \gg 1$, soit $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1+jx} \underset{x \gg 1}{\sim} \frac{H_0}{jx} \quad \Rightarrow \quad \underline{H}(\omega \gg \omega_0) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\omega_0}{j\omega} H_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{s} = H_0 \omega_0 \frac{\underline{e}}{j\omega} \quad \Rightarrow \quad s(t) = H_0 \omega_0 \int e(t) dt$$

Exemple 2 : Filtre passe-bande du second ordre utilisé en haute fréquence : $x \gg 1$, soit $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{H} = \frac{jH_0 x / Q}{1 - x^2 + jx/Q} \underset{x \gg 1}{\sim} \frac{H_0}{jxQ} \quad \Rightarrow \quad \underline{H}(\omega \gg \omega_0) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\omega_0}{j\omega} \frac{H_0}{Q} \quad \Rightarrow \quad \underline{s} = \frac{H_0 \omega_0}{Q} \frac{\underline{e}}{j\omega} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \frac{H_0 \omega_0}{Q} \int e(t) dt$$

Propriétés

- La fonction de transfert d'un filtre intégrateur s'écrit : $H = \frac{s}{e} = \frac{a}{j\omega} = \frac{b}{jx}$ (a, b constantes réelles).
- Dans le domaine où ce comportement est valide, le diagramme de Bode présente une droite affine de pente -20 dB/déc.

En effet : $G_{dB} = 20 \log(|b|/x) = -20 \log(x) + 20 \log(|b|)$

VERS LA COLLE**Questions de cours**

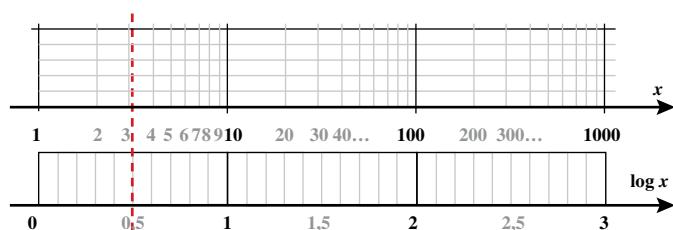
- Moyenne, valeur efficace d'un signal sinusoïdal, cas d'un signal périodique quelconque.
- Filtre linéaire : définition, représentation en quadrupôle, fonction de transfert, signification physique du module et de l'argument de la fonction de transfert, gain, gain en décibel, importance de la décomposition de Fourier et conséquence sur l'étude des filtres.
- Diagrammes de Bode, de Bode asymptotique : définition, intérêt, représentation, notion de décade.
- Filtres classiques (passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande) : définitions, allure générale des diagrammes de Bode, définitions (en terme de gain et en terme de gain en décibel) des bandes passantes et des fréquences de coupure.
- Caractères particuliers d'un filtre : passe, déphasage, moyenneur, déivateur, intégrateur. Exemples.

Erreurs à éviter

- Il est important de ne pas confondre graduation linéaire et graduation logarithmique, par exemple le « milieu » de la décade ne correspond pas au milieu de l'intervalle de fréquences.

Quelques « trucs » utiles

- On a toujours intérêt à identifier un filtre en comparaison aux filtres courants, ce qui rend l'expression canonique en x extrêmement utile à connaître.
- Sur un diagramme de Bode, il est plus lisible d'utiliser la variable en abscisse $\log x$, chaque unité correspondant à une décade et en conséquence de placer l'axe au centre d'un diagramme de Bode ($\log x = 0$ ou $x = 1$) même si on trouve aussi d'autres représentations.
- Il est souvent nécessaire de superposer sur le même graphe, les courbes d'un même filtre, mais avec des facteurs de qualité (donc des paramètres) différents, comme dans les tableaux du cours.
- Si le tracé est sur papier log on peut lire directement les abscisses x et les ordonnées G , sur papier semi-log, on peut lire directement les abscisses x , sinon sur papier simple, il faudra convertir.
Exemple : Si $\log x = 0,5$, alors $x = 10^{0,5} = 3,16$ (pointillé rouge)
- On peut tracer le diagramme asymptotique de Bode d'un filtre complexe en le décomposant en filtres plus simples (voir exercice n° 5 p. 198).



EXERCICES

1 Pour s'entraîner ★

→ corrigé p. 201

- 1 Pour chaque schéma de filtres des tableaux p. 191-193 :

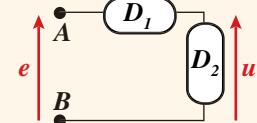
- Prévoir la nature du filtre avec des équivalents de chaque dipôle à hautes et basses fréquences.
- Établir l'expression de la fonction de transfert complexe, et identifier les paramètres caractéristiques (pulsation et éventuellement facteur de qualité) et proposer une forme canonique en fonction d'une variable x sans dimension.
- Exprimer le gain G , le gain en décibel G_{dB} et la phase ϕ .
- Éventuellement sous forme d'un tableau, déterminer les variations du gain, du gain dB et de la phase en fonction de ω , x et $\log x$ et déterminer le comportement asymptotique de G_{dB} en fonction de $\log x$.
- Tracer le diagramme de Bode de G_{dB} et de ϕ en fonction de $\log x$, après avoir placé les asymptotes.
- Confirmer la nature du filtre.

- 2 Application : on étudie le pont de Wien, qui correspond au circuit de l'exercice n° 1 p. 174 avec $D = R$. u est la tension de sortie, e celle d'entrée. Établir pour ce filtre la fonction de transfert et le rattacher à un des cas précédent, puis étudier son comportement et tracer les diagrammes de Bode du pont.

2 Constitution d'un filtre ★★

→ corrigé p. 202

On considère un dipôle AB formé de deux éléments D_1 et D_2 en série. Le dipôle AB est constitué d'une résistance R , d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur de capacité C . Les dipôles D_1 et D_2 contiennent au moins un composant. Déterminer la façon dont sont branchés ces trois composants, ainsi que leurs valeurs, compte-tenu des informations suivantes :

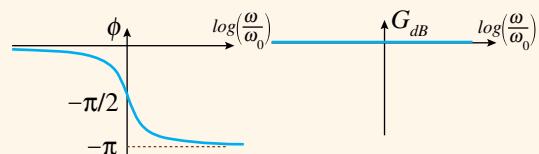


- Si le dipôle AB est alimenté en régime continu par une source de tension $E = 15$ V, il est parcouru par un courant d'intensité $I = 15$ mA.
- Si on travaille en régime sinusoïdal, la fonction de transfert montre qu'il s'agit d'un filtre passe-bande, dont le gain est maximal à la fréquence $f_0 = 1,16$ kHz et dont la bande passante est $\Delta f_{BP} = 0,34$ kHz.

3 Filtres passe-bas (extrait centrale MP 2015) ★

→ corrigé p. 203

- 1 On donne le diagramme de Bode ci-contre. Quelle est la nature du filtre ?
- 2 Des filtres passe-bas ont les caractéristiques suivantes :
- leur gain à basse fréquence est égal à 1,
 - leur pulsation de coupure à -3 dB est ω_c ,
 - l'atténuation pour $\omega_1 = 5 \omega_c$ doit être de 80 dB. Montrer que le filtre de fonction de transfert H ci-contre convient.
- Quelle valeur entière de n doit-on retenir pour satisfaire au cahier des charges des filtres ?



$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}$$

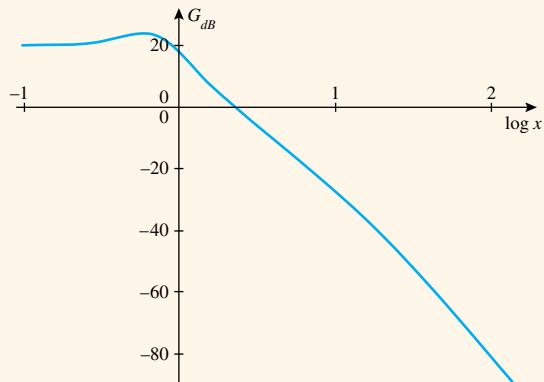
4 Ordre d'un filtre passe-bas ★★

→ corrigé p. 204

On considère un filtre passe-bas dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H = \frac{H_0}{1 + a_1 jx + a_2 (jx)^2 + \dots + a_{n-1} (jx)^{n-1} + a_n (jx)^n}$$

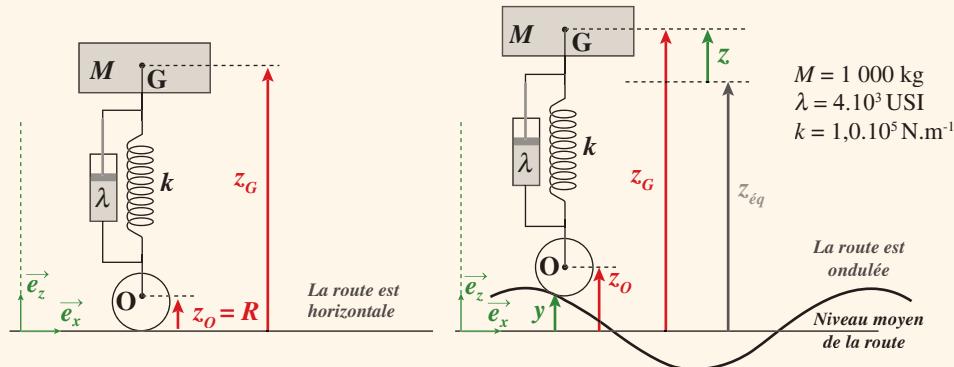
avec les coefficients a_i réels ($a_n \neq 0$) et H_0 positif (filtre passif).



- Quel est l'ordre de ce filtre ? Donner en basses fréquences et en hautes fréquences : un équivalent de H , puis du gain et du gain en décibel et en déduire le comportement asymptotique du filtre. Commenter.
- On donne le diagramme de Bode d'un de ces filtres. Déterminer n et H_0 pour ce filtre. À l'aide de l'intersection des asymptotes, déterminer le coefficient a_n de plus haut rang.

5 Véhicule explosif (ENSTIM 2006) ★★★

→ corrigé p. 205



Un véhicule est modélisé par un parallélépipède de centre d'inertie G et de masse M reposant sur une roue par l'intermédiaire d'une suspension dont l'axe OG reste toujours vertical. Le véhicule se déplace à vitesse horizontale constante v . La suspension est modélisée par un ressort de raideur k et un amortisseur fluide de constante λ , la force de frottement fluide étant proportionnelle à la vitesse relative de G par rapport à O. Sur une route horizontale, O reste à distance constante R du sol, mais sur une route ondulée de profil sinusoïdal, il se déplace verticalement tel que $z_O = R + \text{Acos}(\omega t)$. Les positions de G et de O sont repérées par z_G et z_O , leurs distances respectives au niveau moyen du sol. Après avoir déterminé la position d'équilibre z_{eq} de G, on a établi (questions précédentes du sujet original) que l'équation différentielle du mouvement est :

$$M\ddot{z}_G + \lambda\dot{z}_G + k(z_G - z_{eq}) = \lambda\dot{z}_O + k(z_O - R)$$

On note respectivement z et y les positions de G et O par rapport à leurs positions d'équilibre : $z = z_G - z_{eq}$ et $y = z_O - R$. Il est facile de vérifier que la vitesse horizontale du véhicule est liée simplement à ω par $2\pi v = L\omega$ où L est la période spatiale du profil de la route.

- Établir l'équation différentielle (E) vérifiée par $z(t)$ en fonction de $y(t)$ et des paramètres du problème. Justifier qualitativement le fait que l'on recherche la solution $z(t)$ de cette équation différentielle sous une forme sinusoïdale : $z(t) = z_{max} \cos(\omega t + \varphi)$ et expliquer pourquoi on peut considérer le véhicule comme un filtre linéaire mécanique.

- 2 En utilisant la notation complexe habituelle (z et y que l'on définira) associée à $z(t)$ et $y(t)$, établir l'équation algébrique complexe associée à (E) et montrer que la fonction de transfert de ce filtre mécanique peut s'écrire :

$$\frac{y}{z} = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_1}} = \frac{H_1}{H_2}$$

- 3 Montrer que la fonction de transfert peut se mettre sous la forme d'un rapport de deux fonctions de transfert H_1 et H_2 qui sont celles de deux filtres connus, notés F_1 et F_2 , dont on précisera les comportements asymptotiques. En déduire une expression simple du gain en décibel du filtre mécanique en fonction des gains en décibel de F_1 et F_2 .
- 4 Sur un même graphe, tracer le diagramme de Bode asymptotique de H_1 et de H_2 . En déduire le diagramme de Bode asymptotique de H , puis l'allure du diagramme de Bode du filtre mécanique constitué par le véhicule. Analyser ce diagramme en expliquant ce que signifie physiquement le gain.
- 5 Dans le film *Le Salaire de la peur*, tiré du roman éponyme, Yves Montand conduit un camion chargé de nitroglycérine, un explosif puissant et très instable, qui ne doit pas être secoué. Il passe sur une route ondulée dont il est dit qu'il doit rouler à moins de 5 km/h ou à plus de 50 km/h pour éviter l'explosion. À l'aide de ce qui précède, justifier qualitativement cette affirmation.

6 Succession de filtres détecteur pyroélectrique (d'après Centrale PC 2009) ★★★

→ corrigé p. 208

Bien que l'effet pyroélectrique soit connu depuis les travaux de Brewster (1824), il n'est exploité qu'à partir de 1970 pour équiper des capteurs très sensibles et très robustes de flux lumineux modulé (qui varie légèrement autour d'une valeur moyenne). Le principe peut se résumer ainsi : un flux lumineux (entrée) excite le matériau (un film très fin), ce qui modifie sa température, or une température variable au sein de ce type de matériau produit un courant dit de polarisation (effet pyroélectrique). Ce courant i peut être considéré comme un générateur de Norton idéal en parallèle d'un condensateur de capacité C . Pour constituer le détecteur proprement dit, on lui associe en parallèle une résistance R très élevée et on détecte la tension à ses bornes (sortie). Ainsi un flux lumineux présentant des variations sinusoïdales (autour d'une valeur moyenne) force en cascade l'ensemble du système, qui produit en sortie une tension sinusoïdale de même fréquence, dont l'amplitude dépend de la fréquence du flux lumineux. Dans les questions précédentes du sujet original on a établi les équations différentielles suivantes :

$$\tau_1 \frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{\tau_1}{c} \varphi_a(t) \quad (1) \quad ; \quad i(t) = Sp \frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

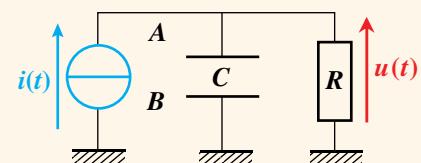
Où $\varphi_a(t) = \varphi_m \cos(\omega t)$ donne les variations du flux lumineux autour d'une valeur moyenne ϕ_0 .

$\theta(t)$ est la variation de température du film autour de sa valeur moyenne T_0 .

$i(t)$ est l'intensité du courant de polarisation qui apparaît dans le film.

S est la surface du détecteur, p un coefficient caractéristique du matériau appelé paramètre pyroélectrique, τ_1 un temps caractéristique des échanges thermiques dans le matériau avec un support thermique dont on ne détaille pas ici le rôle dans l'équation de la température du film, c est la capacité thermique du film.

Le détecteur proprement dit, noté F_3 , correspond au circuit ci-contre dans lequel l'entrée $i(t)$ est le courant de polarisation et où l'on mesure la sortie $u(t)$.



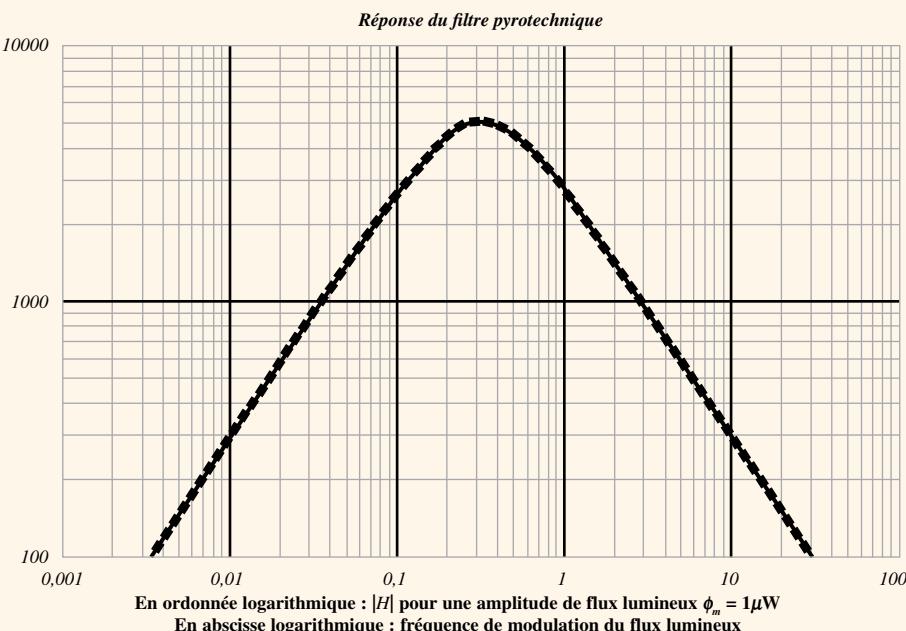
- 1 En utilisant la notation complexe habituelle pour toutes les grandeurs variables dans le temps, établir les équations algébriques complexes (1)' et (2)' associées aux équations différentielles (1) et (2).

- 2 Établir l'expression de la fonction de transfert H_3 du détecteur F_3 , dans laquelle on introduira $\tau_3 = RC$ le temps caractéristique du détecteur. Quelle est la nature de ce filtre (on pourra utiliser une forme canonique si on le souhaite) ?
- 3 Montrer que l'ensemble du système peut être considéré comme la mise en cascade de 3 filtres successifs F_1, F_2, F_3 dont on précisera pour chacun les grandeurs d'entrée et de sortie sur un schéma du dispositif.
- 4 Exprimer la fonction de transfert H_1 de F_1 à l'aide de l'équation (1)' et déterminer la nature de ce filtre (on pourra utiliser une forme canonique si on le souhaite).
- 5 Exprimer la fonction de transfert H_2 de F_2 à l'aide de l'équation (2)' et déterminer la nature de ce filtre (on pourra utiliser une forme canonique si on le souhaite).
- 6 À l'aide des résultats précédents, établir la fonction de transfert de l'ensemble du filtre et montrer qu'elle se met sous la forme (A) qui conduit à la forme canonique (B) :

$$\frac{H}{\varphi_a} = \frac{RpS}{c} \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3} \frac{1}{\frac{1}{j\omega(\tau_1 + \tau_3)} + 1 + \frac{j\omega\tau_1\tau_3}{(\tau_1 + \tau_3)}} \quad (\text{A}) \quad \frac{H}{\varphi_a} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad (\text{B}) \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$$

Exprimer H_0, f_0 et Q en fonction des paramètres du problème. Quelle est la nature du filtre complet ?

- 7 On donne ci-contre le diagramme de Bode fourni par le constructeur. Quelle fréquence donne la réponse maximale d'après le graphique ? Comparer à la valeur attendue. Déterminer H_0 sur le graphique et comparer à la valeur attendue.
- 8 Tracer les asymptotes du diagramme de Bode et déterminer leur pente. Est-ce conforme à la pente habituelle du passe-bande vu en électrocinétique ? Expliquer la différence. En utilisant l'intersection des asymptotes, déterminer graphiquement le facteur de qualité Q et comparer à la valeur attendue. Commenter.



Données : $S = 4 \text{ mm}^2$; $c = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ J.K}^{-1}$; $p = 17 \cdot 10^{-5} \text{ C.m}^2.\text{K}^{-1}$; $R = 24 \cdot 10^9 \Omega$; $\tau_1 = 0,159 \text{ s}$; $\tau_2 = 1,49 \text{ s}$

CORRIGÉS

1 Pour s'entraîner

→ énoncé p. 197

- 1 La démarche est détaillée dans le **point méthode** p. 189-190 pour le premier filtre. Quelques indications :

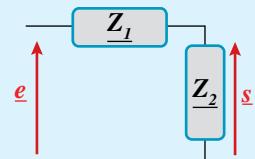
→ Pour prévoir la nature d'un filtre aux hautes et basses fréquences, on utilisera les équivalents habituels :

- Une bobine équivaut à un interrupteur ouvert à hautes fréquences et à un fil à basses fréquences.
- Un condensateur équivaut à un fil à hautes fréquences et à un interrupteur ouvert en basses fréquences.
- Un résistor garde le même comportement quelle que soit la fréquence.

→ Pour écrire la fonction de transfert, on interprétera le système en diviseur de tension, d'où : $\frac{U}{E} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$

$$\frac{U}{E} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

→ Pour faire apparaître la pulsation caractéristique, on écrit le numérateur sous la forme $(1 + \dots)$, tous les termes sont alors sans dimension et un terme de la forme $a\omega^2$ signifie que $1/a$ a la dimension d'une pulsation au carré.



→ On obtient le comportement asymptotique en proposant des équivalents (cela se fait sans difficulté, puisque toutes les fonctions utilisées sont des polynômes).

→ On trace les asymptotes en priorité, puis le diagramme après avoir déterminé le gain aux pulsations caractéristiques ($x = 1$ ou $\log x = 0$). Attention, l'étude du passe-bas ou du passe-haut du second ordre nécessite de vérifier l'existence d'un maximum, travail qui a déjà été fait dans le chapitre précédent p. 162.

→ Toutes les réponses figurent dans les tableaux p. 191-193.

- 2 Le pont de Wien est utilisé dans de nombreux montages, il faut savoir retrouver rapidement sa fonction de transfert en utilisant intelligemment impédance et admittance, comme vu à l'exercice n° 1 p. 176 et qui permet de conclure qu'il s'agit d'un passe-bande :

$$\frac{U}{E} = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

avec : $\omega_{car} = \frac{1}{RC}$; $x = \frac{\omega}{\omega_{car}}$; $H_0 = \frac{1}{3}$; $Q = \frac{1}{3}$

On étudie son comportement à l'aide du tableau ci-dessous.

ω	0	ω_c	$+\infty$
x	0	1	$+\infty$
$\log x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_{car}} - \frac{\omega_{car}}{\omega}\right)^2}}$	0	$\frac{1}{3}$	0
$G_{dB}(x) = -10 \log \left[9 + \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]$	$-\infty$	-9,54 dB	$-\infty$
asymptote	$+20 \log x$	$-20 \log x$	
$\varphi = -\arctan \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]$	$\pi/2$	0	$-\pi/2$

On détermine les asymptotes en utilisant des équivalents de G_{dB} pour x tendant vers 0 ou vers l'infini :

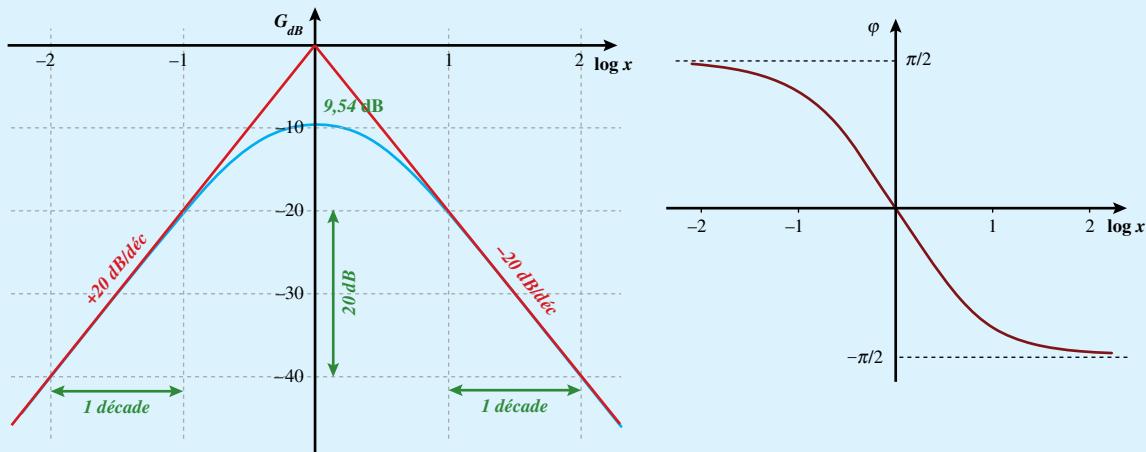
$$9 + \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^2} \Rightarrow -10 \log \left[9 + \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right] \underset{x \rightarrow 0}{\sim} +20 \log x$$

$$9 + \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \Rightarrow -10 \log \left[9 + \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -20 \log x$$

On peut alors tracer les diagrammes de Bode de ce filtre.

Bien comprendre

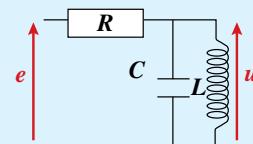
Il est particulièrement utile lorsqu'on débute dans l'étude des filtres, de tracer un tableau de variation assez complet, qui permet de bien faire le lien entre les différentes variables. On pourra l'alléger par la suite, mais il reste un moyen synthétique, clair et commode de présenter les résultats de l'étude, plutôt que d'aligner les calculs (comportement BF, comportement HF, asymptotes, maximum...).

**2 Constitution d'un filtre**

→ énoncé p. 197

D'après l'énoncé, le courant est non nul lorsque le dipôle est alimenté en continu. Or, dans ce cas, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Il ne peut donc être placé qu'en parallèle d'un autre composant qui laisse passer le courant continu (la résistance ou la bobine). Sachant que D_1 et D_2 contiennent au moins un des trois dipôles, on obtient 4 possibilités de branchement, pour lesquelles on étudie le comportement du filtre aux basses fréquences (BF) et aux hautes fréquences (HF), sachant qu'en BF le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil, et qu'en HF c'est l'inverse.

D_1	D_2	G aux BF	G aux HF
R	$C \parallel L$	0	0
$C \parallel L$	R	1	1
L	$C \parallel R$	1	0
$C \parallel R$	L	0	1



Seul le premier cas (schéma précédent) correspond donc aux critères d'un passe-bande.

On utilise le diviseur de tension en faisant apparaître l'impédance, puis l'admittance, plus commode, d'une association en parallèle sur D_2 :

$$\frac{U}{E} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} = \frac{\underline{Z}_{\parallel}}{\underline{Z}_{\parallel} + \underline{Z}_R} \times \frac{\underline{Y}_{\parallel}}{\underline{Y}_{\parallel}} = \frac{1}{1 + \underline{Y}_{\parallel} \underline{Z}_R} = \frac{1}{1 + \left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega} \right) R} \quad \text{avec : } \underline{Y}_{\parallel} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$$

Où l'on isole un même facteur pour les deux termes en ω :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jR \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)} = \frac{1}{1 + jR \sqrt{\frac{C}{L}} \left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega} \right)} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

Avec : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_0$; $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$; $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

On obtient bien la **forme canonique d'un passe-bande**. On utilise les valeurs numériques fournies pour identifier les caractéristiques des dipôles. En régime continu, le circuit se résume à un générateur branché sur le résistor, donc la loi des mailles donne :

$$E = RI \quad \text{soit :} \quad R = \frac{E}{I} = 1000 \Omega$$

Cette fonction de transfert H correspond au cas de la résonance en intensité étudiée au chapitre précédent (*voir p. 164*) dont on utilise les résultats : valeur du maximum en $x = 1$ et largeur de la bande passante en fonction de Q .

$$\text{Le gain est maximal pour } x = 1 \text{ soit } \omega = \omega_0 = 2\pi f_0, \quad \text{d'où : } \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_0 \quad \text{soit : } \sqrt{LC} = \frac{1}{2\pi f_0} \quad (1)$$

$$\text{La largeur de la bande passante vaut : } \Delta f_{BP} = \frac{f_0}{Q} \quad \text{d'où : } \Delta f_{BP} = \frac{f_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{soit : } \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R \Delta f_{BP}}{f_0} \quad (2)$$

$$\text{En multipliant et en divisant (1) et (2) on obtient : } L = \frac{R \Delta f_{BP}}{2\pi f_0^2} = 40 \text{ mH} \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{2\pi R \Delta f_{BP}} = 0,47 \mu\text{F}$$

Bien comprendre

Dans cet exercice, comme dans le premier, on voit bien le lien avec le chapitre précédent, qu'on ne doit jamais perdre de vue pour comprendre la physique qui est étudiée par les filtres. Ici le circuit n'est pas un RLC série, la résonance de type passe-bande a lieu pour une tension, alors qu'elle correspond au comportement en intensité dans le circuit série. Cependant, les propriétés des fonctions étant les mêmes, on n'hésitera pas à exploiter des résultats déjà établis (il n'est pas interdit de s'entraîner à les retrouver !).

3 Filtres passe-bas

→ énoncé p. 197

- 1 Le gain en décibel et donc le gain $G = |H|$ sont constants, ce filtre n'atténue ni n'amplifie aucune fréquence, c'est un **passe-tout**. Par contre, il induit un déphasage qui dépend de la fréquence, c'est donc un **déphaseur**.

Un filtre de fonction de transfert $H = \frac{1-jx}{1+jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ pour lequel $|H| = 1$ et $\arg(H) = -2 \arctan x$ donnerait un tel diagramme de Bode.

- 2 En utilisant x la variable sans dimension habituelle, on a :

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}} \quad \text{et donc : } G_{dB} = 20 \log |H| = -20 \log \sqrt{1+x^{2n}} = -10 \log(1+x^{2n}) \quad \text{avec : } x = \frac{\omega}{\omega_C}$$

Le cahier des charges impose :

$$G_{dB}(x \rightarrow 0) = 0 \text{ dB} \quad \text{or :} \quad G_{dB}(x \rightarrow 0) = -10 \log(1) = 0 \text{ dB}$$

$$G_{dB}(x = 1) = -3 \text{ dB} \quad \text{or :} \quad G_{dB}(x = 1) = -10 \log(2) = -3 \text{ dB}$$

Les deux premières conditions sont donc vérifiées. Pour vérifier la dernière, il faut :

$$G_{dB}(x = 5) = -80 \text{ dB} \quad \text{soit :} \quad G_{dB}(x = 5) = -10 \log(1+5^{2n}) = -80 \text{ dB}$$

Le filtre étant un passe-bas, et compte tenu du niveau d'atténuation atteint, on peut considérer que $5^{2n} \gg 1$. La condition exigée est donc telle que :

$$-10 \log(5^{2n}) = -80 \quad \text{soit :} \quad \log(5^{2n}) = 8 \Rightarrow 2n \log 5 = 8 \Rightarrow n = \frac{4}{\log 5} = 5,7$$

Pour avoir au moins 80 dB d'atténuation avec n entier il faut majorer cette valeur, donc prendre $n = 6$.

Tout le cahier des charges est alors validé. Notons que l'approximation revient à négliger 1 devant 10^8 , ce qui est légitime.

4 Ordre d'un filtre passe-bas

→ énoncé p. 198

- ❶ En transformant la fonction de transfert en équation différentielle, il apparaît que le plus haut terme de dérivation est d'ordre n correspondant au facteur $(j\omega)^n$. **Le filtre est donc d'ordre n .**

Aux basses fréquences : $\underline{H}(BF) \approx H_0$ donc : $G(BF) \approx H_0$ et $G_{dB}(BF) \approx 20 \log H_0$

L'asymptote BF est la droite horizontale :

$$G_{dB}(BF) = 20 \log H_0$$

Aux hautes fréquences : $\underline{H}(HF) \approx \frac{H_0}{a_n(jx)^n}$ donc : $G(HF) \approx \frac{H_0}{a_n x^n}$ et $G_{dB}(HF) \approx 20 \log \left(\frac{H_0}{a_n x^n} \right)$

D'où : $G_{dB}(HF) \approx 20 \log H_0 - 20 \log a_n - 20n \log x$

L'asymptote HF est la droite d'équation : $G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log a_n - 20n \log x$ de pente $-20n$ dB/déc.

L'étude asymptotique confirme la **nature passe-bas du filtre**.

- ❷ On trace sur le diagramme de Bode (*voir page suivante*) l'asymptote hautes fréquences. On mesure sa pente sur une décade, on obtient -60 dB, d'où l'on déduit que $20n = 60$ soit $n = 3$. **Le filtre est donc d'ordre 3.**
En traçant l'asymptote BF, on obtient une droite horizontale d'ordonnée 20 dB, d'où l'on déduit que :

$$20 \log H_0 = 20$$

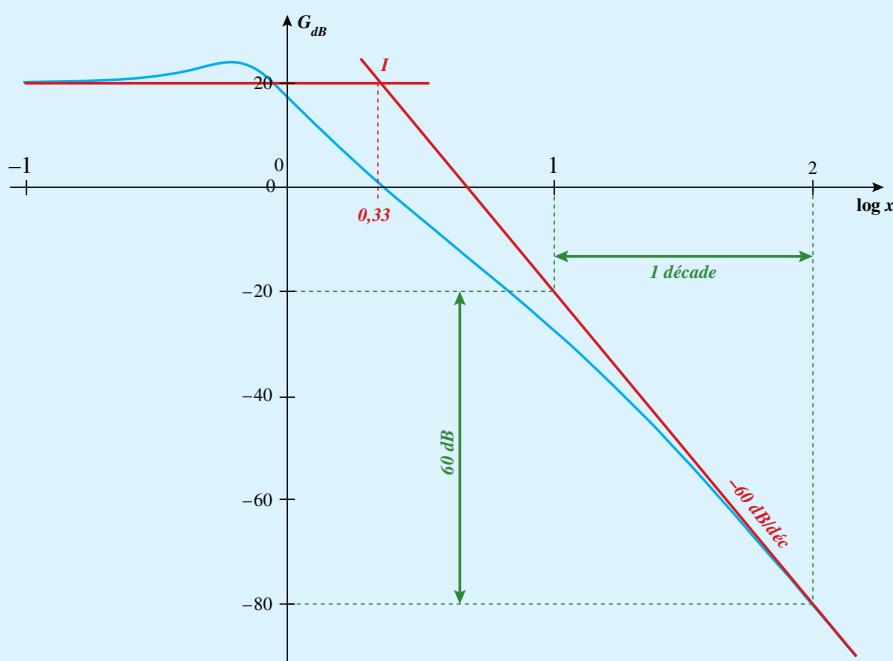
$$\text{d'où : } \log H_0 = 1$$

$$\text{soit : } H_0 = 10$$

Le point I, intersection des asymptotes a pour abscisse $\log x_I$ qui vérifie :

$$20 \log H_0 - 20 \log a_n - 20n \log x_I = 20 \log H_0 \quad \text{d'où : } \log a_n = -n \log x_I \quad \text{soit : } a_n = x_I^{-n}$$

On lit sur le diagramme : $\log x_I = 0,33$ soit $x_I = 10^{0,33} = 2,14$ et $a_3 = 2,14^{-3} = 0,10$



Bien comprendre

- En l'absence de graduation de type logarithmique (type papier log), il faut se rappeler que l'échelle est linéaire en $\log x$. De ce fait, on repère une position comme dans n'importe quel graphique, puis on obtient la variable à l'aide d'une puissance de 10 (comme dans un diagramme pH par exemple). Dans ce genre d'exploitation, il ne faut pas prétendre obtenir un résultat trop précis, car, d'une part le tracé de l'asymptote engendre des incertitudes et d'autre part, l'échelle logarithmique induit une forte incertitude lorsqu'on passe en puissance de 10.
- On note par ailleurs ici un exemple où $H_0 \neq 1$, et le décalage vers le haut qui en résulte (voir remarque p. 190).

5 Véhicule explosif

→ énoncé p. 198

- 1 En tenant compte des définitions des variables z et y (égales respectivement à z_c et z_o à une constante additive près), on obtient aisément l'équation différentielle demandée à partir de l'équation différentielle du sujet :

$$M\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = \lambda\dot{y} + ky \quad (\text{E})$$

Le véhicule est un oscillateur mécanique amorti soumis à une excitation sinusoïdale due au profil de la route, c'est un oscillateur forcé. La solution de l'équation différentielle est donc la somme d'une solution homogène qui s'amortit et d'une solution particulière. Une fois le régime transitoire terminé, il ne reste que la solution particulière. Il est pertinent de la rechercher sous la même forme que le second membre de l'équation différentielle, or ce dernier peut s'écrire :

$$\lambda\dot{y} + ky = -\lambda A\omega \sin(\omega t) + kA \cos(\omega t) = B \cos(\omega t + \psi)$$

Il est donc légitime de rechercher la solution particulière, autrement dit le régime permanent, sous la forme proposée : $z(t) = z_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$. Il s'agit bien d'un filtre, puisque la réponse $z(t)$ du système va dépendre, en amplitude et en phase, de ω la pulsation de l'excitation y . Par ailleurs **ce filtre est linéaire, car l'équation différentielle (E) est linéaire**.

- 2 Les notations complexes associées à z et y sont respectivement :

$$\underline{z} = \underline{Z}e^{j\omega t} = z_{\max} e^{j\varphi} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{y} = \underline{Y}e^{j\omega t} = A e^{j\omega t}$$

L'équation algébrique complexe associée à l'équation différentielle (E) est donc :

$$M(j\omega)^2 \underline{Z} + \lambda j\omega \underline{Z} + k \underline{Z} = \lambda j\omega \underline{Y} + k \underline{Y} \quad \text{soit} \quad (-M\omega^2 + j\omega\lambda + k) \underline{Z} = (\lambda j\omega + k) \underline{Y}$$

D'où l'on tire la fonction de transfert :

$$H = \frac{\underline{Z}}{\underline{Y}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Y}} = \frac{z_{\max} e^{j\varphi}}{A} = \frac{\lambda j\omega + k}{-M\omega^2 + j\omega\lambda + k} = \frac{1 + j\omega \frac{\lambda}{k}}{1 - \frac{M}{k}\omega^2 + j\omega \frac{\lambda}{k}} = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_1}}$$

Où l'on identifie facilement, grâce au deuxième terme du dénominateur, puis du numérateur :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\text{et} \quad \omega_2 = \frac{k}{\lambda} = 25 \text{ rad.s}^{-1}$$

Le troisième terme du numérateur permet alors d'écrire :

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{1}{Q\omega_1} = \sqrt{\frac{M}{k}} \frac{1}{Q}$$

$$\text{soit:} \quad Q = \frac{\sqrt{kM}}{\lambda} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2,5$$

Notons que la pulsation ω_1 n'est autre que la pulsation propre de l'oscillateur amorti.

- ❸ La forme proposée par l'énoncé permet de faire apparaître deux fonctions de transfert classiques :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_1}} \cdot \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}{1} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_1}} \left(\frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}} \right)^{-1} = \frac{\underline{H}_1}{\underline{H}_2}$$

Où : $\underline{H}_1 = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_1}} = \frac{1}{1 - x_1^2 + \frac{j}{Q} x_1}$ avec : $x_1 = \frac{\omega}{\omega_1}$ la variable sans dimension

Et : $\underline{H}_2 = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}} = \frac{1}{1 + j x_2}$ avec : $x_2 = \frac{\omega}{\omega_2}$ la variable sans dimension

La première fonction de transfert est celle d'un filtre passe-bas du second ordre F_1 , tandis que la seconde est celle d'un filtre passe-bas du premier ordre F_2 . On donne le comportement asymptotique de F_1 :

$$\begin{aligned} |\underline{H}_1| &= \frac{1}{\sqrt{(1-x_1^2) + x_1^2/Q^2}} \Rightarrow G_{dB1} = -20 \log \sqrt{(1-x_1^2)^2 + x_1^2/Q^2} = -10 \log((1-x_1^2)^2 + x_1^2/Q^2) \\ ((1-x_1^2)^2 + x_1^2/Q^2) &\underset{x_1 \rightarrow 0}{\sim} 1 \Rightarrow G_{dB1} = -10 \log((1-x_1^2)^2 + x_1^2/Q^2) \underset{x_1 \rightarrow 0}{\sim} 0 \\ ((1-x_1^2)^2 + x_1^2/Q^2) &\underset{x_1 \rightarrow +\infty}{\sim} x_1^4 \Rightarrow G_{dB1} = -10 \log((1-x_1^2)^2 + x_1^2/Q^2) \underset{x_1 \rightarrow +\infty}{\sim} -40 \log x_1 \end{aligned}$$

On donne le comportement asymptotique de F_2 :

$$\begin{aligned} |\underline{H}_2| &= \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \Rightarrow G_{dB2} = -20 \log \sqrt{1+x_2^2} = -10 \log(1+x_2^2) \\ (1+x_2^2) &\underset{x_2 \rightarrow 0}{\sim} 1 \Rightarrow G_{dB2} = -10 \log(1+x_2^2) \underset{x_2 \rightarrow 0}{\sim} 0 \\ (1+x_2^2) &\underset{x_2 \rightarrow +\infty}{\sim} x_2^2 \Rightarrow G_{dB2} = -10 \log(1+x_2^2) \underset{x_2 \rightarrow +\infty}{\sim} -20 \log x_2 \end{aligned}$$

Ces comportements asymptotiques confirment la nature de passe-bas des deux filtres. Le gain du filtre mécanique vérifie :

$$G_{dB} = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \left| \frac{\underline{H}_1}{\underline{H}_2} \right| = 20 \log |\underline{H}_1| - 20 \log |\underline{H}_2| \quad \text{d'où : } \boxed{G_{dB} = G_{dB1} - G_{dB2}}$$

Pour tracer correctement les diagrammes de Bode asymptotiques des filtres F_1 et F_2 , il convient de remarquer que $\omega_2 > \omega_1$.

Bien comprendre

L'emploi des variables sans dimension, qui aide à identifier les formes canoniques des filtres connus, doit être fait avec vigilance ici, car elles diffèrent pour les deux filtres et il est pertinent ici de placer les pulsations sur l'axe des abscisses, au lieu de la pulsation réduite x pour éviter les confusions. On a mis en évidence cette différence sur le diagramme en positionnant les 0 en $\log x_i$ pour chaque filtre. Pour mémoire le tracé complet des diagrammes de Bode des deux filtres figure dans les tableaux p. 191 et p. 192.

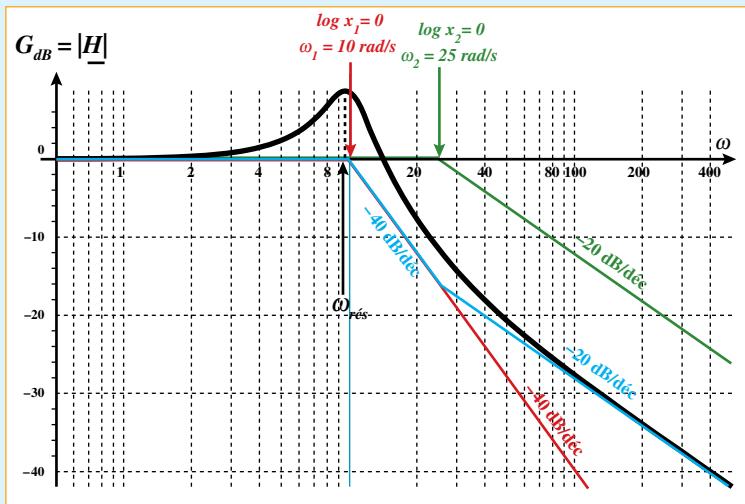
- ❹ On obtient le diagramme asymptotique de \underline{H} (en bleu sur le graphique ci-après) en « soustrayant les asymptotes » de \underline{H}_2 (en vert sur le graphique ci-après) à celles de \underline{H}_1 (en rouge sur le graphique ci-après), soit :

De 0 à ω_1 : $G_{dB\text{asymp}} = 0 - 0 = 0$ dB/déc

De ω_1 à ω_2 : $G_{dB\text{asymp}} = -40$ dB/déc - 0 = -40 dB/déc

De ω_2 à $+\infty$: $G_{dB\text{asymp}} = -40$ dB/déc - (-20 dB/déc) = -20 dB/déc

Par ailleurs on peut noter que le facteur de qualité du filtre F_1 est supérieur à $1/\sqrt{2}$, la courbe de gain passe donc par un maximum à une fréquence de résonance proche de la fréquence propre ($\omega_{\text{rés}} \approx \omega_1 = \omega_0$) comme il a été démontré au chapitre précédent sur les oscillateurs forcés p. 162. Le diagramme de Bode du filtre peut alors être tracé correctement.



Bien comprendre

En l'absence de papier log ou d'outil informatique et pour un tracé rapide, il suffit de placer les pulsations caractéristiques sur un axe en décade, puis les asymptotes et l'allure de la courbe qui épouse le tracé asymptotique, en indiquant clairement un pic de résonance aux environs de ω_1 . On note par ailleurs à nouveau le lien avec les calculs du chapitre précédent.

Le gain est le module de la fonction de transfert soit :

$$G = |\underline{H}| = \left| \frac{\underline{Z}}{\underline{Y}} \right| = \frac{z_{\max}}{A}$$

Autrement dit, G est le rapport de l'amplitude de la réponse (mouvement vertical du véhicule) à l'amplitude des oscillations de la route. On en déduit d'une part (et sans surprise) que l'amplitude des oscillations du véhicule est d'autant plus grande que celles de la route le sont aussi (plus la route est cabossée, plus on est secoué !). D'autre part, sachant que la vitesse de la voiture est proportionnelle à la pulsation imposée par l'ondulation de la route ($2\pi\nu = L\omega$), on déduit du diagramme de Bode qu'aux faibles vitesses, le véhicule oscille en suivant la route ($G = 1$ et $z_{\max} = A$), tandis qu'à grande vitesse l'amplitude tend vers 0, le véhicule ne suit plus les oscillations devenues trop rapides. Entre ces deux extrêmes, il existe une zone (résonance) où l'amplitude des oscillations du véhicule est importante (pic de résonance).

- 5 Dans la bande passante de la résonance, l'amplitude des oscillations du véhicule est élevée. Par conséquent la bande passante délimite l'intervalle de fréquence, donc l'intervalle de vitesse (qui lui est proportionnelle) qu'il faut éviter pour ne pas trop secouer la nitroglycérine. Les valeurs données dans le texte sont celles de la bande passante correspondant aux paramètres du véhicule transporteur d'explosifs¹.

1. La nitroglycérine a été stabilisée par Alfred Nobel (1833-1896) dans la dynamite où elle n'explose pas en cas de choc, mais seulement avec une mèche. Ce procédé de fabrication, découvert d'ailleurs par sérendipité, permit à Nobel, qui déposa plusieurs brevets, d'amasser une immense fortune. Afin de laisser son nom à la postérité par une image plus positive que celle d'un marchand d'armes, il légua tous ses biens à une fondation créée par testament, dans le but de récompenser des personnes ayant œuvré pour le bien de l'humanité, en particulier dans le domaine scientifique. 120 ans après sa mort, le comité Nobel continue à dispenser cette récompense, considérée par les scientifiques comme la plus prestigieuse de toutes.

- ❶ En associant respectivement à $\theta(t)$, $\phi_a(t)$ et $i(t)$ les complexes $\underline{\theta}$, $\underline{\phi}_a$ et \underline{i} on obtient les équations suivantes en utilisant le fait que la dérivation se traduit en complexe par une multiplication d'un facteur $j\omega$:

$$(1) \Rightarrow \tau_1 j\omega \underline{\theta} + \underline{\theta} = \frac{\tau_1}{c} \underline{\phi}_a \quad \text{soit : } (\tau_1 j\omega + 1) \underline{\theta} = \frac{\tau_1}{c} \underline{\phi}_a \quad (1)'$$

$$(2) \Rightarrow \underline{i} = Spj\omega \underline{\theta} \quad (2)'$$

- ❷ On utilise un diviseur de courant sur F_3 pour obtenir le courant i_R qui circule dans R :

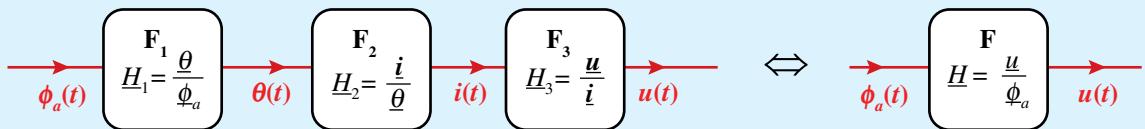
$$\frac{i_R}{i} = \frac{Y_R}{Y_R + Y_C} = \frac{1/R}{1/R + jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\tau_3\omega}$$

La fonction de transfert du détecteur F_3 s'écrit donc :

$$H_3 = \frac{u}{i} = \frac{R i_R}{i} = \frac{R}{1 + j\tau_3\omega} \quad \text{soit sous forme canonique : } H_3 = \frac{H_{30}}{1 + jx_3} \quad \text{avec } H_{30} = R \text{ et } x_3 = \tau_3\omega = \frac{\omega}{\omega_3}$$

F_3 est donc un filtre passe bas du premier ordre.

- ❸ On peut schématiser l'ensemble du système par la cascade suivante :



Chaque filtre suit une équation différentielle linéaire, chaque filtre est donc linéaire, et par suite le filtre résultant de l'ensemble du dispositif est également linéaire. C'est pourquoi il donne, suite à une entrée sinusoïdale en $\phi_a(t)$, une sortie $u(t)$ également sinusoïdale, de même fréquence, dont l'amplitude et la phase dépendent de la pulsation d'entrée. Ce qui légitime l'utilisation de la notation complexe.

- ❹ On obtient la fonction de transfert de F_1 , à l'aide de l'équation complexe (1)' établie au :

$$H_1 = \frac{\underline{\theta}}{\underline{\phi}_a} = \frac{\tau_1}{c} \frac{1}{1 + j\tau_1\omega} = \frac{H_{10}}{1 + jx_1} \quad \text{avec : } H_{10} = \frac{\tau_1}{c} \quad \text{et } x_1 = \tau_1\omega = \frac{\omega}{\omega_1}$$

F_1 est un filtre passe-bas du premier ordre.

- ❺ On obtient la fonction de transfert de F_2 , à l'aide de l'équation complexe (2)' établie au :

$$H_2 = \frac{\underline{i}}{\underline{\theta}} = Spj\omega \quad F_2 \text{ est un filtre déivateur.}$$

- ❻ La fonction de transfert du système total est le produit des fonctions de transfert des filtres en cascade :

$$H = H_1 H_2 H_3 = \frac{\underline{\theta}}{\underline{\phi}_a} \frac{\underline{i}}{\underline{\theta}} \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{u}}{\underline{\phi}_a} = \frac{\tau_1}{c} \frac{1}{1 + j\tau_1\omega} Spj\omega \frac{R}{1 + j\tau_3\omega} = \frac{RpS}{c} \tau_1 \frac{j\omega}{(1 + j\tau_1\omega)(1 + j\tau_3\omega)}$$

$$H = \frac{\underline{u}}{\underline{\phi}_a} = \frac{RpS}{c} \tau_1 \frac{j\omega}{1 + j\tau_1\omega + j\tau_3\omega + \tau_1\tau_3(j\omega)^2} = \frac{RpS}{c} \tau_1 \frac{1}{\frac{1}{j\omega} + \tau_1 + \tau_3 + \tau_1\tau_3 j\omega}$$

Où l'on obtient la forme (A) en mettant en évidence le facteur $(\tau_1 + \tau_3)$:

$$H = \frac{\underline{u}}{\underline{\phi}_a} = \frac{RpS}{c} \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3} \frac{1}{\frac{1}{j\omega(\tau_1 + \tau_3)} + 1 + \frac{\tau_1\tau_3 j\omega}{\tau_1 + \tau_3}}$$

La forme canonique est obtenue en faisant apparaître comme d'habitude le même coefficient devant ω :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{\varphi}_a} = H_0 \frac{1}{1 + \frac{j}{(\tau_1 + \tau_3)} \left(\tau_1 \tau_3 \omega - \frac{1}{\omega} \right)} = \frac{H_0}{1 + \frac{j\sqrt{\tau_1 \tau_3}}{(\tau_1 + \tau_3)} \left(\sqrt{\tau_1 \tau_3} \omega - \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_3} \omega} \right)} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

Avec :

$$H_0 = \frac{RpS}{c} \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3}$$

;

$$Q = \frac{\sqrt{\tau_1 \tau_3}}{\tau_1 + \tau_3}$$

;

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_3}} = 2\pi f_0$$

On identifie un **filtre passe-bande** par sa forme canonique, ce que confirme le diagramme de Bode.

- 7 On lit graphiquement les coordonnées du maximum :

$$f_0 = 0,32 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad H_0 = 5000 \text{ V}/\mu\text{W} = 5 \cdot 10^9 \text{ V.W}^{-1}$$

soit pour le flux d'amplitude imposée $\phi_m = 1 \mu\text{W}$: $U_{max} = 5 \text{ mV}$

Par le calcul on a obtenu des résultats qui sont cohérents avec les valeurs graphiques :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_1 \tau_3}} = 0,33 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad U_{max} = \phi_m H_0 = \phi_m \frac{RpS}{c} \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3} = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 5,1 \text{ mV}$$

- 8 Le tracé des asymptotes montre que lorsque l'ordonnée varie d'un facteur 10, c'est-à-dire d'un écart logarithmique de 1 (soit 10 dB), l'abscisse varie aussi d'un facteur 10, donc d'une décade. Si l'on ramène ce comportement aux unités Bel, on obtient donc des pentes de 10 dB/déc. Le passe-bande en électrocinétique présente des asymptotes avec des pentes à 20 dB/déc, car en électricité on ramène les filtres aux tensions alors que l'atténuation traduit le rapport des puissances (carré des tensions), ce qui explique le facteur 20 dans le gain en dB ($G_{dB} = 20 \log |H|$, voir remarque p. 185). Ici ce n'est pas le cas, on lit directement le rapport des amplitudes des grandeurs sur le diagramme du constructeur et, si on veut le traduire en unité de type Bel, on doit utiliser le facteur 10 de la définition en décibel. Avec cette définition, le comportement asymptotique du filtre passe-bande est le suivant :

$$G_{dB} = 10 \log |H| = 10 \log \frac{H_0}{\sqrt{1+Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}} = 10 \log H_0 - 5 \log \left[1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]$$

$$\text{Or : } \left[1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]_{x \rightarrow 0} \sim \frac{Q^2}{x^2} \Rightarrow G_{dB} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 10 \log H_0 - 10 \log Q + 10 \log x$$

$$\text{Et : } \left[1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]_{x \rightarrow +\infty} \sim Q^2 x^2 \Rightarrow G_{dB} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 10 \log H_0 - 10 \log Q - 10 \log x$$

Les équations des asymptotes sont donc respectivement en basses et hautes fréquences :

$$G_{dB}(\text{BF}) = 10 \log x - 10 \log (H_0/Q) \quad \text{et} \quad G_{dB}(\text{HF}) = -10 \log x - 10 \log (H_0/Q)$$

Les deux asymptotes ont bien des pentes de ± 10 dB/déc. Par ailleurs, elles ont la même ordonnée à l'origine $-10 \log (H_0/Q)$ (si on raisonne en abscisse $\log x$) et ce point K est leur intersection.

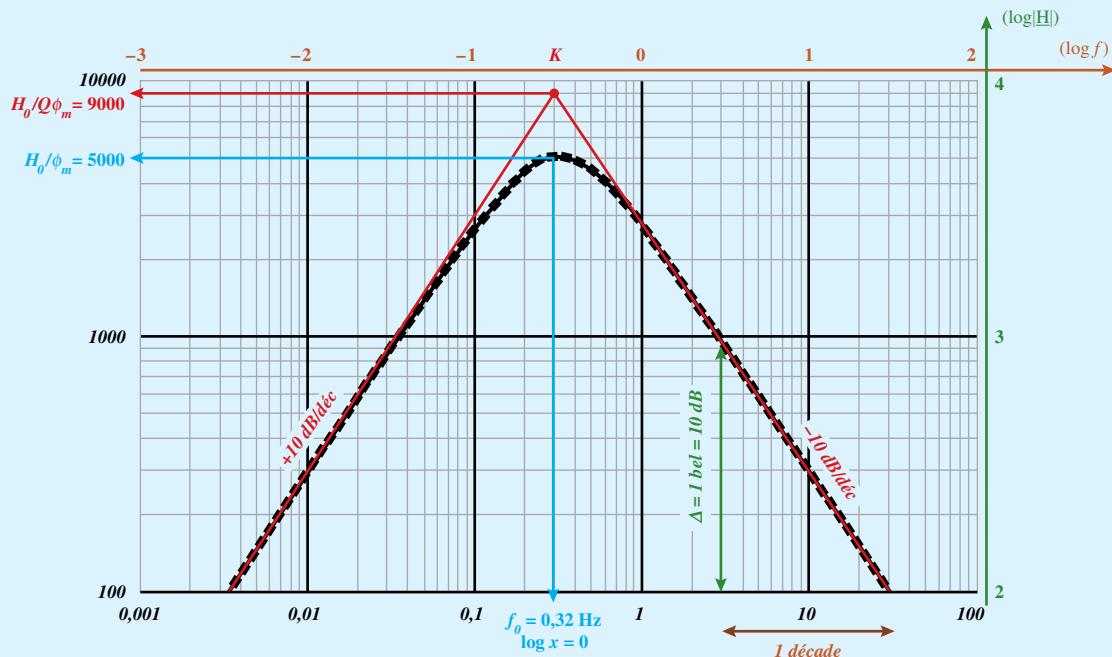
On lit sur le diagramme : $G_{dB}(K) = 10 \log (9000)$ d'où : $\frac{H_0}{Q} = 9000$

$$Q_{graphique} = 0,56$$

Par le calcul on obtient :

$$Q_{calcul} = \frac{\sqrt{\tau_1 \tau_3}}{\tau_1 + \tau_3} = 0,30$$

La valeur lue sur le graphique est deux fois plus élevée que celle attendue par le calcul (rien à voir avec le facteur 2 évoqué ci-dessus dans le gain en dB), mais reste du même ordre de grandeur. Il est probable qu'un certain nombre de phénomènes (comme des effets de bord sur le film ou des phénomènes dissipatifs) non pris en compte dans le modèle proposé sont responsables de cet écart. L'ensemble reste cependant cohérent avec l'étude menée.



Bien comprendre

- Ici on lit directement les grandeurs sur l'échelle log, mais pour une valeur entre deux graduations comme f_0 il faut passer par une mesure linéaire et convertir en puissance de 10. D'une façon générale en physique, les arguments des fonctions logarithme ou exponentielle sont sans dimension. Ici on représente en échelle logarithmique des grandeurs dimensionnées, il faut donc être vigilant dans l'utilisation (un peu abusive, mais néanmoins commode) des gains en décibel. Pour se repérer, on a placé sur le graphe les valeurs des logarithmes des grandeurs ainsi que la position $\log x = 0$, commode pour l'étude asymptotique. Un peu d'entraînement avec du papier log et avec une échelle linéaire à convertir suffit à maîtriser cette difficulté.
- On note par ailleurs dans les deux derniers exercices, l'utilisation du formalisme des filtres dans des domaines très différents (mécanique, thermique, lumière...) et très loin de se limiter à l'électrocinétique, ainsi que la mise en cascade de systèmes très divers.

À méditer

L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.
JOSEPH FOURIER (1768-1830)

Cinématique

La mécanique est un vaste domaine de la physique qui étudie les relations matière-espace-temps. Seule la mécanique classique est abordée dans les chapitres qui suivent, c'est-à-dire limitée aux objets de dimensions grandes devant l'échelle atomique (contrairement à la mécanique quantique) et animés de vitesses faibles devant la célérité de la lumière (contrairement à la mécanique relativiste). Malgré cette restriction, la mécanique classique reste une théorie très générale, à l'image de ses postulats (l'espace est euclidien, le temps est absolu) et les concepts qu'elle aborde trouvent ensuite leur utilité dans bien d'autres domaines comme l'électromagnétisme ou la thermodynamique. La cinématique concerne plus particulièrement l'étude des mouvements des systèmes, sans se préoccuper des causes qui les ont engendrés.

Outils mathématiques

- **Norme d'un vecteur :** Si un vecteur s'exprime par $\vec{A} = A_i \vec{e}_i + A_j \vec{e}_j + A_k \vec{e}_k$ dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$, alors sa norme vaut : $\|\vec{A}\| = \sqrt{A_i^2 + A_j^2 + A_k^2}$
- **Dérivation :** $\frac{d(f\vec{w})}{du} = \frac{df}{du} \vec{w} + f \frac{d\vec{w}}{du}$; $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$

I Les outils de la mécanique

1. Référentiels

Des atomes aux galaxies, tous les corps sont en mouvement les uns par rapport aux autres, donc la description du mouvement d'un système ne peut se faire que par rapport à une référence, c'est-à-dire un objet physique rigide, choisi par l'observateur.

Définition

Un **référentiel** est un objet physique (donc non ponctuel) matérialisé par un point (noté souvent O) appartenant au système physique et par trois axes (notés souvent Ox, Oy, Oz) qui lui sont liés. Par nature l'objet physique servant de référentiel est fixe dans le référentiel.

Le référentiel doit être assorti d'une **horloge** permettant de définir le temps. Un postulat de la mécanique classique suppose qu'il existe un temps absolu, indiquant de ce fait qu'une « super » horloge est accessible instantanément à tout observateur et mesurant ainsi un temps universel dans tous les référentiels. Pour cette raison on se préoccupera peu de cette question en mécanique classique, alors qu'en relativité, la notion de temps absolu disparaît totalement, et la définition d'un référentiel s'assortit nécessairement d'une horloge propre associée.

- Le choix du référentiel est toujours la première étape d'un problème de mécanique.
- L'objet physique servant à le définir a nécessairement trois dimensions, il n'est en aucun cas ponctuel !
- Le référentiel n'est pas forcément un véritable objet, il peut être l'association de plusieurs objets, ponctuels ou non, mais qui sont nécessairement fixes les uns par rapport aux autres (par exemple le référentiel géocentrique) et qui ont tous une réalité physique.

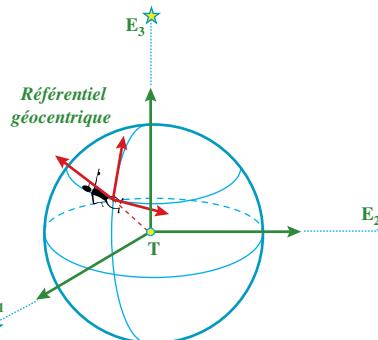
- Le choix du référentiel dépend fortement de la nature du problème étudié et de la situation de l'observateur vis-à-vis de ce problème. Le caractère galiléen du référentiel conditionne aussi le choix (*voir chapitre 13 p. 232*).

► Référentiels usuels

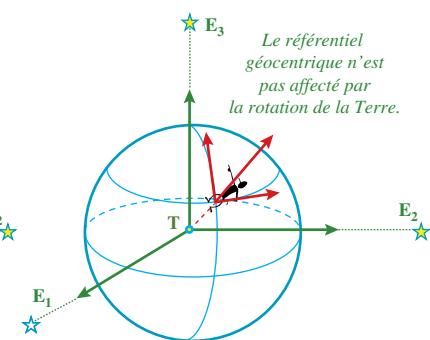
Référentiel	Définition	Propriétés
Terrestre	Lié à la Terre, il peut se représenter en un point quelconque de la planète.	Ses axes tournent en même temps que la Terre. La Terre, le laboratoire, le sol... sont fixes dans ce référentiel.
Géocentrique (ou de Kepler)	Lié au centre de la Terre et à 3 étoiles « fixes » (c'est-à-dire suffisamment lointaines pour nous paraître fixes sur la durée du problème).	L'objet physique définissant le référentiel n'est pas la Terre qui tourne dans ce référentiel (seul son centre est fixe), mais la structure formée du centre de la Terre et des 3 étoiles.
Héliocentrique	Lié au centre du Soleil et à 3 étoiles « fixes » (<i>voir ci-dessus</i>).	Le Soleil tourne dans le référentiel, seul son centre est fixe. Dans ce référentiel, la Terre tourne sur elle-même et son centre se déplace sur l'orbite terrestre.
De Copernic	Lié au centre d'inertie C du système solaire et à trois étoiles « fixes ».	Dans ce référentiel, le Soleil tourne sur lui-même et orbite autour de C, de même que toutes les planètes.



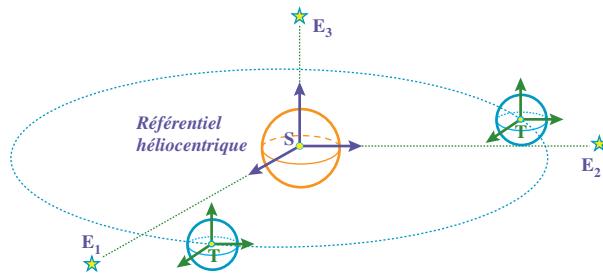
Référentiel terrestre
Le référentiel terrestre suit la Terre dans sa rotation.



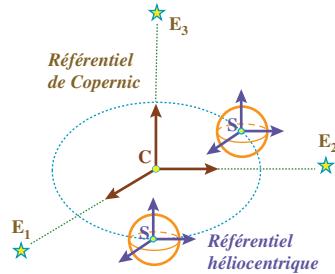
Référentiel géocentrique



Le référentiel géocentrique n'est pas affecté par la rotation de la Terre.



Le référentiel géocentrique suit la Terre dans sa révolution.
Le référentiel héliocentrique n'est pas affecté par les mouvements de la Terre ni par la rotation du Soleil.



Le référentiel héliocentrique suit le Soleil dans sa révolution.
Le référentiel de Copernic n'est pas affecté par aucun mouvement dans le système solaire.
Mais il tourne dans la galaxie...

N. B. : Le Soleil représentant 99,9 % de la masse du système solaire, C est proche de S et se situe dans le Soleil, mais sur le schéma on l'a représenté à l'extérieur pour une meilleure compréhension.

2. Repères et systèmes de coordonnées

Définitions

Un **repère** est un objet mathématique constitué d'une **base de vecteurs** et d'une **base de temps** qui permettront de décrire le comportement des systèmes étudiés à l'aide des coordonnées spatiales et temporelles. On choisit par commodité une base orthonormée et par convention une base directe.

- La base de temps est souvent implicite, car il suffit d'une origine des temps (souvent le début du mouvement étudié) et une échelle de temps (la seconde par exemple).
- L'espace qui nous est accessible ayant trois dimensions, trois coordonnées indépendantes sont nécessaires. Certaines sont des longueurs, d'autres des angles. On se ramène souvent à deux coordonnées pour les problèmes plans. On utilise essentiellement les trois systèmes de coordonnées définis ci-après.
- Toutes les coordonnées et grandeurs dérivées sont des grandeurs généralement algébriques (= positives ou négatives), bien que les schémas représentent presque toujours les cas où elles sont positives.
- La base de vecteurs est définie, comme on le voit dans le tableau ci-dessous, en cohérence avec le système de coordonnées, cohérence qui permet de mémoriser aisément les différents cas.

Système	Cartésien	Cylindrique	Sphérique
Coordonnées de M	(x, y, z) • trois longueurs • obtenues par projection de M sur les axes du référentiel	(r, θ, z) • deux longueurs et un angle • r et z obtenus par projection de M sur le plan (Oxy) et sur l'axe (Oz) • θ est l'angle entre (Ox) et la projection de OM dans le plan (Oxy)	(r, θ, φ) • une longueur et deux angles • r est la distance à l'origine • θ est l'angle entre (Oz) et \overline{OM} • φ est l'angle entre (Ox) et la projection de \overline{OM} dans le plan (Oxy).
Définir les vecteurs de la base	($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) chaque vecteur dans la direction portant la coordonnée correspondante, donc suivant la direction des axes.	• \vec{e}_r dans la direction portant la coordonnée r • \vec{e}_θ dans le plan (Oxy) où est défini θ , orthogonal à \vec{e}_r ; on passe de \vec{e}_r à \vec{e}_θ en tournant dans le sens positif de θ • \vec{e}_z porté par (Oz) comme dans les coordonnées cartésiennes	• \vec{e}_r dans la direction portant la coordonnée r • \vec{e}_θ dans le plan où est défini θ (π), orthogonal à \vec{e}_r ; on passe de \vec{e}_r à \vec{e}_θ en tournant dans le sens positif de θ • \vec{e}_φ dans le plan (Oxy) où est défini φ orienté en cohérence avec le sens positif de φ .
Remarques	Identique à la base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) utilisée au lycée	r est parfois noté ρ et \vec{e}_r noté \vec{e}_ρ pour ne pas confondre avec les coordonnées sphériques	• \vec{e}_φ doit être orthogonal à \vec{e}_r et \vec{e}_θ donc au plan π . Il est donc aussi orthogonal à (Oz) et appartient à (Oxy) • Il est aussi orthogonal à (OP), ce qui le définit complètement.
Valeurs	$x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$; $z \in \mathbb{R}$	$r \in \mathbb{R}^+$; $\theta \in [0, 2\pi[$; $z \in \mathbb{R}$	$r \in \mathbb{R}^+$; $\theta \in [0, \pi]$; $\varphi \in [0, 2\pi[$
Schéma (Coordonnées, Vecteurs de la base associée)			

- Le vecteur \vec{e}_ϕ des coordonnées sphériques est identique au vecteur \vec{e}_θ des coordonnées cylindriques.
- Certains auteurs ou sujets utilisent \vec{u} ... plutôt que \vec{e} ... pour les vecteurs unitaires. On trouve aussi la notation « chapeau » \hat{r} signifiant \vec{e}_r .
- On parle parfois de système de coordonnées cylindro-polaires. En fait les coordonnées polaires sont les coordonnées cylindriques, dans le cas d'un problème plan. On place alors le problème dans le plan (Oxy), et les coordonnées du point seront donc (r, θ) . Il suffit d'annuler tous les termes en z dans les expressions cylindriques.

POINT MÉTHODE

Représenter les axes et la base d'un système de coordonnées

- On évitera absolument de confondre **axes et vecteurs unitaires**, à la fois dans la représentation et dans la notation : ne pas noter \vec{x} ou \vec{r} les axes ou les vecteurs unitaires, car ces notations signifient $\vec{x} = x\vec{e}_x$ et $\vec{r} = r\vec{e}_r$, et on schématisera par deux flèches différentes l'axe et le vecteur unitaire porté par cet axe sur le schéma.
- Tous les vecteurs de base sont de norme 1, on essaiera donc de les représenter à peu près identiques. La base (comme tout vecteur) n'est pas liée à un point de l'espace, on la représente où l'on veut.
- Une bonne vision en 3D et en perspective est indispensable ici. Il est également pertinent de faire des schémas en projection (*voir exercices n° 2 et n° 3 p. 223 par exemple*).
- Le système de coordonnées devra être cohérent avec la nature du problème, en particulier sa géométrie et ses symétries. Il n'est pas rare d'utiliser simultanément plusieurs bases dans un même problème.
- Il est également essentiel de préciser si la base utilisée est fixe ou mobile dans le référentiel afin de dériver correctement les différents vecteurs.

3. Déplacement élémentaire $d\vec{OM}$

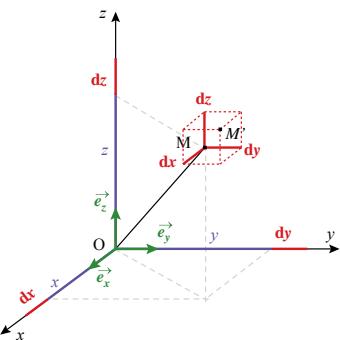
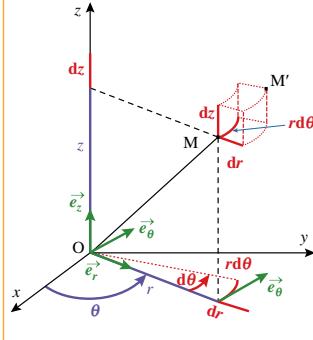
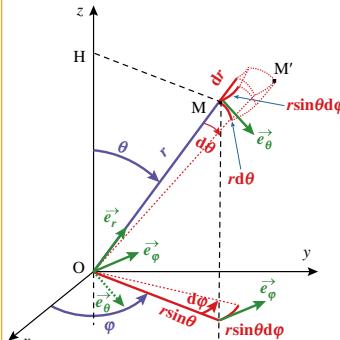
Définition

Le **déplacement élémentaire** est un vecteur représentant un déplacement infinitésimal (aussi petit que l'on veut) du point M. On l'obtient en imaginant un déplacement de M très petit dans la direction de chacun des vecteurs de la base, vers un point M' représenté sur les schémas d'où :

$$d\vec{OM} = \vec{OM}' - \vec{OM} = \vec{MM}'$$

- Lorsque le déplacement est issu de la variation d'un angle, le petit arc de cercle obtenu peut être confondu avec un petit segment dans la direction du vecteur unitaire correspondant.
- Le déplacement élémentaire peut être obtenu par le calcul en différentiant le vecteur position, ce qui suppose de connaître les dérivées des vecteurs des bases, qui sont données au paragraphe suivant.
- Les différents éléments différentiels (déplacements et volumes) définis dans le tableau suivant sont des outils omniprésents en physique et doivent être totalement maîtrisés.
- Le déplacement élémentaire est utile lorsqu'on doit intégrer une grandeur le long d'une courbe (par exemple : calcul d'un travail, d'un potentiel, d'une force de Laplace...).

Important : Il faut savoir retrouver graphiquement les expressions des **déplacements élémentaires** (ce qui suppose de maîtriser parfaitement les systèmes de coordonnées et les bases associées), mais il faut aussi les savoir par cœur !

Système	Cartésien	Cylindrique	Sphérique
Déplacement élémentaire	$d\overline{OM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}$	$d\overline{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z}$	$d\overline{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\phi\overrightarrow{e_\phi}$
Volume élémentaire	$d\tau = dx dy dz$	$d\tau = r dr d\theta dz$	$d\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$
Schéma			

- L'élément de volume $d\tau$ permet de sommer, c'est-à-dire d'intégrer des grandeurs volumiques sur un système (calcul de la masse d'un solide non homogène, par exemple).
- Tous les éléments de surface définis à partir de deux coordonnées du déplacement élémentaire (par exemple $dS = r dr d\theta$) sont susceptibles d'être utilisés pour intégrer des grandeurs surfaciques sur un système (par exemple : calcul d'une pression sur une paroi)

4. Vecteurs cinématiques

Définitions

- Les **vecteurs cinématiques** permettent de décrire complètement le mouvement d'un point dans le référentiel choisi : le **rayon vecteur** ou vecteur position : $\overline{OM}(t)$

$$\text{le vecteur vitesse : } \overline{v}(t) = \frac{d\overline{OM}}{dt} \text{ et le vecteur accélération : } \overline{a}(t) = \frac{d\overline{v}}{dt}$$

- Les **équations horaires** sont les expressions des coordonnées de \overline{OM} en fonction du temps.
- La **trajectoire** est la courbe décrite par le point au cours du temps. On obtient son (ses) équation(s) en éliminant le temps entre les équations horaires.

- \overline{v} est la dérivée par rapport au temps de \overline{OM} , il décrit donc ses variations et il est tangent à la trajectoire.
- \overline{a} est la dérivée par rapport au temps de \overline{v} , il décrit donc ses variations.
- Les vecteurs cinématiques, les équations horaires, la trajectoire et leurs propriétés dépendent évidemment du référentiel.
- Dans un référentiel donné, les expressions des vecteurs cinématiques dépendent de la base de vecteurs utilisée, mais pas leurs propriétés (un vecteur constant le sera dans toute base). De même l'équation de la trajectoire varie selon le système mais pas sa nature ni ses propriétés. Par exemple, l'équation du cercle de centre O et de rayon R s'écrit $x^2 + y^2 = R^2$ en cartésienne et $r = R$ en polaire.

→ Nature d'un mouvement

Définitions

La **nature** d'un mouvement comporte deux aspects : la **nature géométrique** qui est liée à la forme de la trajectoire et la **nature cinématique** qui est liée à la façon dont cette trajectoire est parcourue au cours du temps.

- La courbe qui porte la trajectoire n'est pas nécessairement parcourue dans sa totalité. N'importe quelle courbe peut servir à décrire un mouvement. La nature géométrique d'un mouvement peut donc être rectiligne, circulaire, parabolique, elliptique, hélicoïdale..., voire curviligne si la trajectoire est quelconque.
- La nature cinématique est parfois délicate, voire peu utile à évoquer lorsqu'elle n'est pas simple.
- Exemples de nature de mouvement : circulaire uniforme (extrémité de la trottinette d'une pendule), rectiligne sinusoïdal (point matériel suspendu à un ressort)...

Définitions

Un mouvement est **uniforme** si la **valeur** du vecteur vitesse demeure constante au cours du temps.

- Qu'un mouvement soit uniforme NE SIGNIFIE PAS que le vecteur vitesse est constant, NI que l'accélération est nulle.
- Lorsqu'un vecteur varie dans le temps, sa norme ET sa direction sont susceptibles d'être modifiées. Dans un mouvement uniforme, l'accélération est donc généralement non nulle et indique comment varie la direction de la vitesse.
- SEUL le mouvement rectiligne uniforme pour lequel la norme ET la direction de la vitesse sont constantes a une accélération nulle.

→ Expressions des vecteurs cinématiques

Exprimer les vecteurs cinématiques suppose de dériver dans les différentes bases utilisées, donc de savoir si les vecteurs de base varient ou non dans le temps lors du mouvement du point, et, dans le premier cas, de connaître leur dérivée. On montre facilement que la dérivée d'un vecteur \vec{u} de norme constante est soit nulle, soit orthogonale à \vec{u} . Les vecteurs des différentes bases étant de norme 1, ils vérifient donc cette propriété (*voir bien comprendre p. 227*).

Coordonnées	Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
Propriétés	Tous les vecteurs sont fixes	Seul le dernier vecteur de la base est fixe	Tous les vecteurs sont mobiles
Dérivées des vecteurs de la base	$\dot{\vec{e}}_x = \vec{0}$ $\dot{\vec{e}}_y = \vec{0}$ $\dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$	$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ $\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r$ $\dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$	<i>À titre indicatif</i> $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi$ $\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\phi$ $\dot{\vec{e}}_\phi = -\dot{\phi} (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta)$

Coordonnées	Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
Vecteur position	$\overline{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$	$\overline{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$	$\overline{OM} = r\vec{e}_r$
Vitesse	$\overline{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$	$\overline{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$	$\overline{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi$
Accélération	$\overline{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$	$\overline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$	Compliqué... !*

* mais peut se calculer à titre d'entraînement (*voir exercice n° 3 p. 223*).

On remarque aisément que le déplacement élémentaire et la vitesse ne diffèrent que d'un facteur dt .

II | Mouvements particuliers d'un point

1. Cas d'un mouvement à accélération constante

Ici, le mouvement est défini par son vecteur accélération et par conséquent établir toutes ses propriétés supposera d'intégrer deux fois. Deux constantes d'intégration apparaîtront qui seront à déterminer à partir de la position initiale M_0 et de la vitesse initiale v_0 du point. La résolution qui suit est tout à fait proche de ce qui a été vu au lycée sur le tir parabolique, si ce n'est que l'on intègre l'équation vectorielle avant de projeter. L'intégration se fait dans une équation différentielle vectorielle, donc, très logiquement, les deux constantes d'intégration sont également vectorielles.

Par hypothèse :

$$\vec{a} = \vec{a}_0 \quad (\text{E}_1)$$

Soit par intégration :

$$\vec{v} = \vec{a}_0 t + \vec{C}_1$$

Or à $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$, d'où :

$$\vec{v} = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0 \quad (\text{E}_2)$$

Par intégration à nouveau :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{C}_2$$

Or à $t = 0$, M est en M_0 soit $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0$ d'où : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM}_0 \quad (\text{E}_3)$

On obtient ensuite les coordonnées des différents vecteurs cinématiques en projetant les équations (E) tout en tenant compte des particularités du mouvement et des conditions initiales.

► Premier cas : l'accélération et la vitesse initiales sont colinéaires.

On choisit alors de placer un axe (par exemple (Oz)) dans la direction définie par \vec{a}_0 . D'après les équations, le vecteur vitesse et le vecteur position restent aussi portés par l'axe (Oz). Le mouvement est donc rectiligne (par exemple : chute libre verticale, particule arrivant perpendiculairement aux plaques d'un condensateur...). Dans le cas général, on obtient un mouvement uniformément varié, et dans le cas particulier d'une accélération initiale nulle, un mouvement uniforme.

Résultats

■ Mouvement à accélération constante avec :

$$\vec{a}_0 = \text{cste} \neq \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v}_0 // \vec{a}_0$$

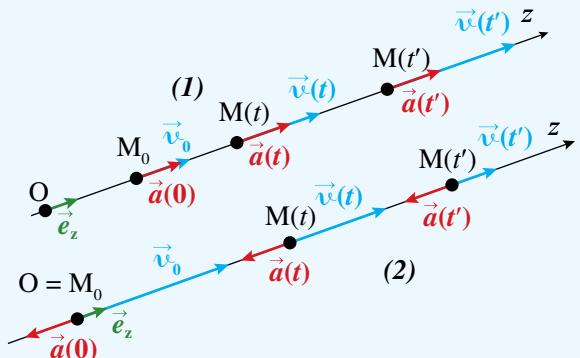
⇒ mouvement rectiligne uniformément varié

accéléré (1) ou décéléré (2)

$$\vec{a} = \ddot{z} \vec{e}_z = \vec{a}_0 \vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{z} \vec{e}_z = (\vec{a}_0 t + \vec{v}_0) \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OM} = z \vec{e}_z = (\frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + z_0) \vec{e}_z$$



■ Mouvement à accélération constante nulle :

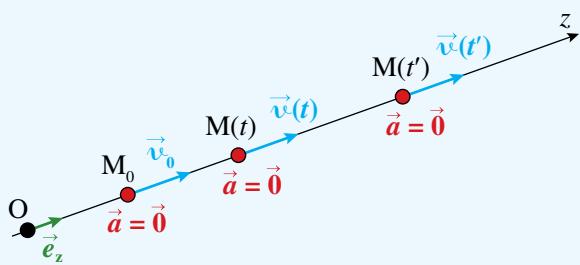
$$\vec{a}_0 = \vec{0}$$

⇒ mouvement rectiligne uniforme

$$\vec{a} = \ddot{z} \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \dot{z} \vec{e}_z = \vec{v}_0 \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OM} = z \vec{e}_z = (\vec{v}_0 t + z_0) \vec{e}_z$$



- Dans tous les cas, les grandeurs a_0, v_0 , et z_0 sont algébriques (positives ou négatives) et l'on choisit souvent l'origine de sorte que $z_0 = 0$ (c'est le cas sur le schéma (2) de l'encadré précédent).
- Le mouvement est accéléré si la vitesse et l'accélération sont de même sens, décéléré sinon.

► **Second cas : l'accélération et la vitesse initiale ne sont pas colinéaires.**

Les deux vecteurs définissent alors un plan (par exemple (Oxz), l'accélération étant portée par (Oz)). D'après les équations (E), la vitesse et le vecteur position restent dans ce plan. Les conditions initiales générales sont : le mobile se trouve initialement en M_0 et la vitesse initiale \vec{v}_0 forme un angle α avec l'axe (Ox).

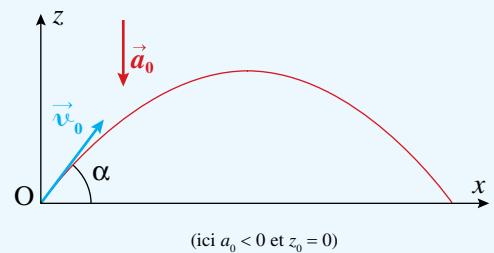
Résultats

Mouvement à accélération constante avec :

$$\vec{a}_0 = \text{cste} \neq \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{a}_0 \text{ non colinéaire à } \vec{v}_0$$

⇒ Mouvement parabolique

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{z}\vec{e}_z = \vec{a}_0\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = a_0 \end{cases} \\ \vec{v} &= \dot{x}\vec{e}_x + \dot{z}\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{z} = a_0 t + v_0 \sin \alpha \end{cases} \\ \vec{OM} &= x\vec{e}_x + z\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = v_0(\cos \alpha)t + x_0 \\ z = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0(\sin \alpha)t + z_0 \end{cases} \end{aligned}$$



L'équation cartésienne $z(x)$ de la trajectoire est obtenue en éliminant t entre les deux équations horaires $x(t)$ et $z(t)$. Soit :

$$z = \frac{a_0(x - x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + (\tan \alpha)(x - x_0) + z_0$$

L'équation cartésienne est celle d'une parabole d'axe (Oz) (direction de l'accélération).

Les caractéristiques de cette trajectoire sont étudiées en détail dans les exercices du chapitre 13.

- Dans tous les cas, les grandeurs a_0, v_0, z_0 et x_0 sont algébriques (positives ou négatives) et l'on choisit souvent l'origine de sorte que $z_0 = x_0 = 0$ (c'est le cas sur le schéma).
- La courbure de la parabole est donnée par le sens de l'accélération qui est nécessairement vers l'intérieur de la courbe.

2. Cas d'un mouvement circulaire

Dans cette situation, le mouvement est défini à partir de sa trajectoire. Cette dernière est portée par un cercle. La géométrie du mouvement conduit naturellement à utiliser les coordonnées polaires. Les expressions du vecteur position dans la base cartésienne sont également intéressantes, elles montrent que le mouvement circulaire est la composition de deux mouvements rectilignes sinusoidaux dans des directions perpendiculaires. On obtient les vecteurs cinématiques en prenant $r = R = \text{constante}$ dans les expressions générales du paragraphe I.3. On peut aussi les retrouver en partant de l'expression du rayon vecteur et en le dérivant directement.

Résultats

Mouvement circulaire

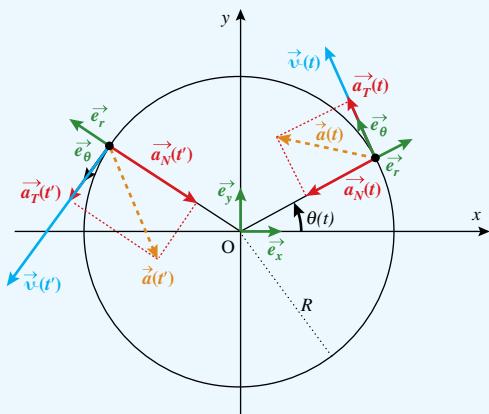
Équation de la trajectoire (centre O, rayon R)

Cartésienne : $x^2 + y^2 = R^2$

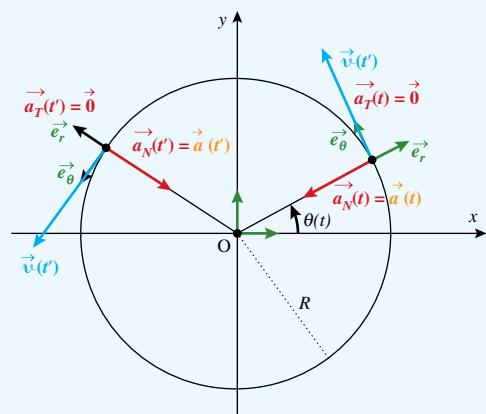
Polaire : $r = R$

Cas général

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= R\overrightarrow{e_r} = R \cos \theta \overrightarrow{e_x} + R \sin \theta \overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{v} &= R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{a} &= -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{a_N} + \overrightarrow{a_T}\end{aligned}$$

Cas uniforme $\dot{\theta} = \omega = \text{constante}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= R\overrightarrow{e_r} = R \cos(\omega t)\overrightarrow{e_x} + R \sin(\omega t)\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{v} &= R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = R\omega\overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{a} &= -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} = -R\omega^2\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{a_N}\end{aligned}$$



- Le vecteur vitesse est donc naturellement tangent au cercle et $\dot{\theta}$ est la **vitesse angulaire**. Si $\dot{\theta} = \text{constante}$, alors le mouvement est uniforme, car la norme de la vitesse est constante, mais le vecteur vitesse change de direction, il n'est pas constant et l'accélération n'est pas nulle.
- Le vecteur accélération possède deux composantes :
 - ↳ **l'accélération tangentielle** $\overrightarrow{a_T}$ influe sur la valeur de la vitesse : le point va de plus en plus vite si l'accélération tangentielle et la vitesse sont de même sens, il va de moins en moins vite s'ils sont de sens contraire.
 - ↳ **l'accélération normale** $\overrightarrow{a_N}$ influe sur la direction du vecteur vitesse : elle est nécessairement vers l'intérieur de la courbure, ce que traduit le signe toujours négatif de $-R\dot{\theta}^2$. De façon imagée, l'accélération normale « tire » sur le vecteur vitesse pour le faire tourner.
- Si le mouvement est uniforme, la valeur de la vitesse reste constante, donc l'accélération tangentielle est nulle et la valeur de l'accélération normale est constante, car la variation de la direction de la vitesse se fait identiquement tout au long du cercle.
- Notons que ces expressions ont été vues en terminale sous une forme légèrement différente, l'accélération ayant été parfois exprimée dans la base de Frenet ($\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}$) :

$$\overrightarrow{v} = \upsilon \overrightarrow{T} ; \quad \overrightarrow{a} = \frac{d\upsilon}{dt} \overrightarrow{T} + \frac{\upsilon^2}{R} \overrightarrow{N} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N} \quad \text{avec : } \overrightarrow{T} = \overrightarrow{e_\theta} ; \quad \overrightarrow{N} = -\overrightarrow{e_r} \quad \text{et} \quad \upsilon = R\dot{\theta}$$

III | Mouvements particuliers d'un solide

1. Nature du système étudié

Le choix du système et la façon dont on le considère (ponctuel, solide...) doivent être énoncés clairement au début d'un problème de mécanique.

	Système matériel	Solide	Point matériel
Dimensions	oui	oui	non
Déformable	oui	non	non
Translation	oui	oui	oui
Rotation	oui	oui	non
Remarques	Le système matériel est déformable, il ne peut donc pas servir <i>a priori</i> à définir un référentiel.	Le solide est un objet rigide qui peut donc servir à définir un référentiel.	La notion de translation n'a pas vraiment de sens pour un point, son mouvement se confond avec cette notion.
Exemple	Tout ce qui est matériel : galaxie, éponge, élastique, fluide, planète, véhicule...	Boule de billard, dé, brique...	∅ ! Le point matériel est un modèle idéal qui n'existe pas réellement mais qui permet une étude simple des problèmes de mécanique.
Souvent considéré comme tel		Véhicule, planète...	Beaucoup de systèmes ou de solides : des particules atomiques aux étoiles...

2. Translation d'un solide

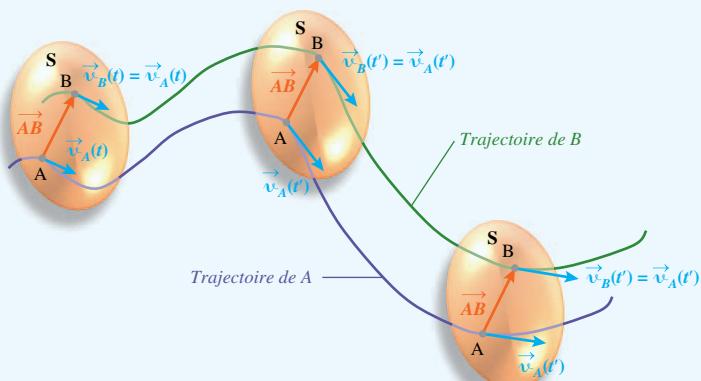
Définition

Un solide (S) est en **translation**, si, pour tout couple de points (A, B) du système, le vecteur \overline{AB} n'est pas modifié au cours du mouvement :

$$\forall (A, B) \in (S) \quad \forall t \quad \overline{AB}(t) = \overline{AB} = \text{cste}$$

Conséquence cinématique : un solide (S) est en translation si à tout instant tous ses points sont animés de la même vitesse :

$$\forall (A, B) \in (S) \quad \forall t \quad \overline{\vec{v}_A}(t) = \overline{\vec{v}_B}(t)$$



- Attention, cela ne signifie pas que la vitesse est la même à chaque instant.
- Tous les points du système en translation ont des trajectoires identiques (décalées entre elles).
- On qualifie un mouvement de translation, comme on qualifie le mouvement d'un point : d'une part selon la nature géométrique de la trajectoire des points (puisque'ils parcourent tous une courbe identique) et selon la nature cinématique (par exemple : uniforme).

Nature de la translation	Translation rectiligne	Translation circulaire	Translation quelconque
Trajectoires de deux points quelconques du solide	Droites parallèles (par exemple à la direction Ox)	Cercles de même rayon mais de centres différents	Courbes quelconques mais d'allure strictement identique
Cas uniforme, M un point quelconque du solide	$\bar{v}(M,t) = \bar{v}_0 = v_0 \bar{e}_x$	$\ \bar{v}(M,t)\ = v_0$	$\ \bar{v}(M,t)\ = v_0$
Exemples	Compartiment d'un train sur une voie en ligne droite, cube glissant sur un plan incliné, objet suspendu à un ressort, chariot de cartouches d'une imprimante jet d'encre...	Nacelle d'une grande roue	Cabine d'un téléphérique entre deux pylônes si elle ne se balance pas mais oscille verticalement par exemple

3. Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Le mouvement d'un point M quelconque d'un solide en rotation est décrit par les vecteurs cinématiques obtenus dans un mouvement circulaire. On a insisté ici sur la dépendance des termes dans le cas de la rotation autour d'un axe fixe. Certains ne dépendent que du temps et pas du point, d'autres ne dépendent que du point et pas du temps, d'autres enfin varient à la fois dans le temps et avec le point.

Définitions

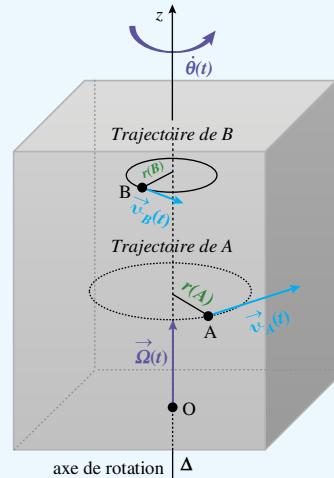
- Un solide est en **rotation autour d'un axe fixe**, s'il existe une droite Δ qui demeure fixe à la fois par rapport au référentiel et par rapport au solide. La droite Δ s'appelle **axe de rotation**.

Conséquence cinématique : tous les points du solide décrivent un cercle à la même vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ appelée aussi **vitesse de rotation**. Le cercle décrit par un point du solide a pour centre son projeté sur l'axe Δ et pour rayon sa distance à l'axe.

$$\bar{v}_A(t) = r(A)\dot{\theta}(t)\bar{e}_\theta(A,t)$$

- Le **vecteur rotation** caractérise totalement la rotation : il est colinéaire à l'axe Δ , de valeur égale à la vitesse de rotation, orienté conformément à la convention directe. On a donc, en choisissant de faire coïncider l'axe (Oz) avec l'axe Δ :

$$\bar{\Omega}(t) = \dot{\theta}(t)\bar{e}_z$$



- L'axe n'appartient pas nécessairement physiquement au solide.
- La définition et l'expression du vecteur rotation bien que fort utiles ne sont pas strictement au programme de physique, mais le vecteur rotation est défini et utilisé couramment en SI.
- Attention, la vitesse angulaire est la même pour tous les points à un instant donné, mais peut varier dans le temps.
- La géométrie du mouvement incite à utiliser les coordonnées cylindriques, l'axe Δ étant confondu avec l'axe (Oz). L'angle θ qui définit la vitesse angulaire étant l'angle des coordonnées cylindriques par rapport une référence (Ox) choisie selon le problème. θ (et donc les vecteurs \bar{e}_r et \bar{e}_θ) n'est pas forcément le même pour tous les points du solide, mais, les dérivées $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ sont les mêmes pour tous les points en raison de la rigidité du solide.
- Puisque la nature géométrique des trajectoires est automatiquement définie du fait de la rotation, seul un qualificatif cinématique peut être ajouté (par exemple : uniforme).

- De nombreux solides sont en rotation avec un axe qui n'est pas fixe : bille qui roule, toupie, gyroscope... et même la Terre, car l'orientation de l'axe des pôles varie lentement (précession des équinoxes).

Résultats

Solide en rotation autour de $\Delta = (\text{Oz})$ un axe fixe, M un point du solide

$$\overrightarrow{\text{OM}}(\text{M}, t) = r(\text{M})\overrightarrow{e_r}(\text{M}, t) + z(\text{M})\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{\nu}(\text{M}, t) = r(\text{M})\dot{\theta}(t)\overrightarrow{e_\theta}(\text{M}, t) = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{\text{OM}}$$

$$\overrightarrow{a}(\text{M}, t) = -r(\text{M})\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{e_r}(\text{M}, t) + r(\text{M})\ddot{\theta}(t)\overrightarrow{e_\theta}(\text{M}, t) = \overrightarrow{a_N}(\text{M}, t) + \overrightarrow{a_T}(\text{M}, t)$$

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Référentiel : définition, exemples, utilité.
- Système de coordonnées cylindriques : définition, base associée, déplacement élémentaire.
- Système de coordonnées sphériques : définition, base associée, déplacement élémentaire.
- Vecteurs cinématiques, équations horaires, trajectoire : définitions. Nature d'un mouvement.
- Expression des vecteurs cinématiques en coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- Mouvement à accélération constante : équations vectorielles du mouvement. Nature et propriétés des différentes trajectoires possibles.
- Mouvement circulaire : expression des vecteurs cinématiques dans la base la plus pertinente, propriétés des vecteurs cinématiques selon la nature cinématique du mouvement.
- Solide en translation : définition, propriétés, exemples.
- Solide en rotation autour d'un axe fixe : définition, propriétés, exemples.

Erreurs à éviter

- Ne pas dire que l'accélération d'un mouvement uniforme est nulle, c'est faux dans la quasi-totalité des cas.
- Ne pas affirmer que tous les points d'un solide en rotation autour d'un axe fixe ont la même vitesse. Ils ont la même vitesse angulaire, mais leur vitesse est d'autant plus grande qu'ils sont éloignés de l'axe.
- Ne pas dire que, si tous les points d'un solide décrivent un cercle, alors le solide est en rotation. En effet il peut être en translation circulaire (nacelle d'une grande roue par exemple).
- Ne pas confondre les trois coordonnées du point M avec les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{\text{OM}}$ dans la base.
- Une flèche arrondie indiquant la rotation autour d'un axe ne constitue pas le vecteur rotation...

Quelques « trucs » utiles

- On n'hésitera pas, en cas de difficulté, à se fabriquer le système d'axes en plantant des piques à brochettes dans un fruit par exemple, et en observant le dispositif sous différents angles ! En se déplaçant autour de cet assemblage, on visualise les projections planes qui sont toujours d'un grand secours pour visualiser les vecteurs du système.
- Il est parfois commode d'écrire : $2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$ dans l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques.

EXERCICES**Conseil**

On aura toujours intérêt à s'appuyer sur des schémas, en particulier des schémas plans. On pourra s'aider du point méthode p. 237 pour projeter les vecteurs.

1 Mouvement de référentiels ★

→ corrigé p. 225

Qualifier le mouvement du référentiel terrestre dans le référentiel géocentrique, celui du référentiel géocentrique dans le référentiel héliocentrique et celui du référentiel héliocentrique dans le référentiel de Copernic. Que dire du mouvement du référentiel terrestre dans le référentiel de Copernic ?

2 Dérivées des vecteurs de la base cylindrique ★

→ corrigé p. 225

- ① Exprimer les vecteurs de la base cylindrique en fonction des vecteurs de la base cartésienne.
- ② Calculer les dérivées temporelles de ces vecteurs à l'aide des expressions précédentes. En déduire l'expression de ces dérivées en fonction des vecteurs de la base cylindrique.

3 Étude du système de coordonnées sphériques ★★

→ corrigé p. 226

- ① Quelles coordonnées utilise-t-on pour repérer la position d'un avion ? Quel est le lien entre ces coordonnées et les coordonnées sphériques ?
- ② Schématiser les plans (Oxy) et (Oz,OM) et y représenter les vecteurs de la base sphérique.
- ③ Exprimer ces vecteurs en fonction de la base cartésienne.
- ④ Calculer la dérivée du vecteur \vec{e}_r dans la base cartésienne, puis l'exprimer dans la base sphérique.
- ⑤ Retrouver l'expression de la vitesse, puis du déplacement élémentaire en coordonnées sphériques établies dans le cours.

À titre d'entraînement de calcul, on peut aussi calculer les dérivées des autres vecteurs de la base sphérique et retrouver les expressions données p. 216 puis établir l'expression de l'accélération en coordonnées sphériques.

4 Mouvement hélicoïdal ★★

→ corrigé p. 227

Dans un référentiel \mathcal{R} matérialisé par (Oxyz), un point M décrit un mouvement de telle sorte que le mouvement de P, son projeté dans le plan (Oxy), est circulaire uniforme et celui de H son projeté sur (Oz) est rectiligne uniforme.

- ① Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération de ce mouvement, en coordonnées cylindriques et en coordonnées cartésiennes.
- ② En étudiant les propriétés des vecteurs cinématiques, décrire le mouvement de M. Montrer en particulier qu'il est uniforme.

5 Mouvement d'un point d'une roue ★★★

→ corrigé p. 228

Une roue de vélo de rayon R roule sans glisser sur un plan horizontal. Le centre C de la roue décrit un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_0 . On s'intéresse à un point P de la périphérie de la roue, initialement en contact avec le sol. On note T la période de révolution de P dans le référentiel du vélo.

- Établir les équations horaires et les expressions des vecteurs cinématiques du mouvement de P dans le référentiel terrestre. Caractériser le mouvement.
- En étudiant les valeurs des coordonnées du point et de sa vitesse aux instants multiples de $T/2$, représenter l'allure de la trajectoire (appelée cycloïde) de P en déterminant les propriétés des points particuliers.

6 La mission Rosetta (E3A MP 2015) ★★

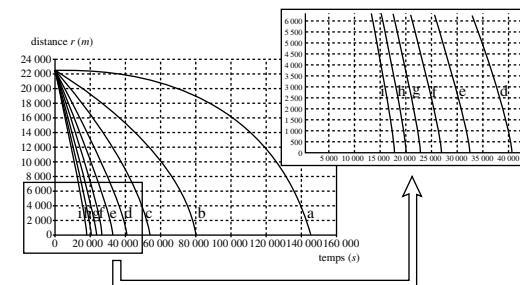
→ corrigé p. 230

Rosetta est une mission de l'Agence Spatiale Européenne (ESA) dont l'objectif principal est de recueillir des données sur la composition du noyau de la comète 67P/Churyumov-Gerasimenko et sur son comportement à l'approche du Soleil. Le 12 novembre 2014, la sonde en orbite autour de la comète a lancé Philae, un petit atterrisseur sur la comète. On étudie la chute libre de Philae (noté P) dans un référentiel \mathcal{R} dont l'origine C est centrée sur la comète et qui tourne avec elle. L'équation différentielle du mouvement de Philae a été traitée numériquement et l'évolution temporelle de sa coordonnée radiale $CP = r(t)$, la distance de Philae à C, est schématisée sur le graphique de la figure 1. Différentes trajectoires de phase sont représentées sur la figure 2, en fonction des conditions initiales du largage.

- En modélisant la comète par une sphère homogène exprimer et calculer son rayon. À quel référentiel décrit p. 212 \mathcal{R} est-il comparable ?
- Déterminer la durée τ_0 de la chute de Philae, s'il est abandonné avec une vitesse verticale nulle ? La durée réelle de la chute de Philae est $\tau \approx 7$ h. En déduire la vitesse initiale verticale communiquée à l'atterrisseur.
- Déterminer par lecture graphique, la vitesse atteinte par Philae au moment du contact avec le sol.

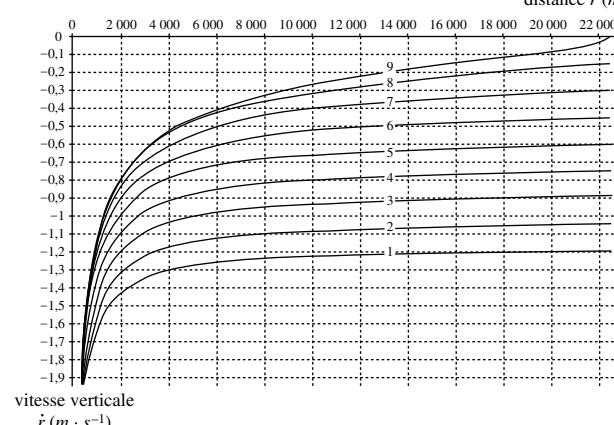
Masse et masse volumique de la comète : $m_{com} = 1,0 \cdot 10^{13}$ kg et $\mu_{com} = 400$ kg.m⁻³ ; $r_{largage} = 22,5$ km

FIGURE 1 :
Évolution
temporelle
de l'altitude
pour différentes
vitesses initiales



courbe	v_0 (m.s ⁻¹)
a	0
b	-0,15
c	-0,30
d	-0,45
e	-0,60
f	-0,75
g	-0,90
h	-1,05
i	-1,20

FIGURE 2 :
Trajectoires
de phase pour
différentes
vitesses initiales



CORRIGÉS

Conseil

En cas de difficulté pour projeter les vecteurs (écrire leurs expressions en fonction d'autres vecteurs) on pourra consulter le point méthode p. 237, où cette technique est détaillée.

1 Mouvements de référentiels

→ énoncé p. 223

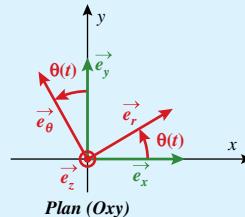
Notons \mathcal{R}_T , $\mathcal{R}_{\text{géo}}$, $\mathcal{R}_{\text{hélio}}$ et \mathcal{R}_C les référentiels terrestre, géocentrique, héliocentrique et de Copernic. Les référentiels sont des objets physiques indéformables, donc des solides. Selon le cas, il peut être plus facile de se représenter le mouvement du solide définissant le référentiel ou des axes qui le symbolisent. On peut se référer aux schémas p. 212 pour visualiser les mouvements. \mathcal{R}_T est en rotation dans $\mathcal{R}_{\text{géo}}$. L'axe de rotation est celui des pôles qui est fixe dans le référentiel géocentrique. La durée d'une rotation étant égale à celle d'un jour sidéral¹, et s'effectue à vitesse angulaire constante, ce mouvement est donc une rotation uniforme. Les axes de $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ sont à tout moment deux à deux parallèles avec ceux de $\mathcal{R}_{\text{hélio}}$, il est donc en translation. Par ailleurs le centre T de la Terre (origine de $\mathcal{R}_{\text{géo}}$) décrit (en première approximation) un cercle qui est l'orbite de la Terre avec une période d'une année sidérale² à vitesse constante (toujours en première approximation). $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ est donc en translation circulaire uniforme par rapport à $\mathcal{R}_{\text{hélio}}$. Par un raisonnement analogue, $\mathcal{R}_{\text{hélio}}$ et $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ sont en translation circulaire uniforme dans \mathcal{R}_C . Le mouvement de \mathcal{R}_T dans \mathcal{R}_C est complexe, composé d'une translation circulaire et d'une rotation.

2 Dérivées des vecteurs de la base cylindrique

→ énoncé p. 223

- 1 Les vecteurs de la base cylindrique s'expriment dans la base cartésienne comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta &= -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z\end{aligned}$$



- 2 On dérive maintenant dans la base cartésienne qui est fixe dans le référentiel, donc seul θ varie :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y \\ \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r \\ \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0} \end{cases}$$

Bien comprendre

Il faut faire attention, car on ne dérive pas les vecteurs par rapport à θ mais par rapport à t . Pour effectuer la dérivation, on peut faire appel à la dérivée d'une fonction composée ou faire apparaître, dans son calcul, la dérivée par rapport à la variable présente dans la fonction et on écrira :

Dérivée de $\cos \theta$:	\Rightarrow par rapport à θ :	$\frac{d \cos \theta}{d \theta} = -\sin \theta$
	\Rightarrow par rapport à t :	$\frac{d \cos \theta}{dt} = \frac{d \cos \theta}{d \theta} \frac{d \theta}{dt} = (-\sin \theta) \dot{\theta} = -\dot{\theta} \sin \theta$

1. La période sidérale est le temps au bout duquel le système se retrouve dans la même situation par rapport aux « étoiles fixes ». Le jour sidéral vaut 23 h 56 min 4 s alors que le jour solaire (temps pour que le Soleil soit vu au même endroit dans le ciel) vaut 24 h, car la Terre se déplace sur son orbite pendant une rotation.

2. Il en est de même pour l'année sidérale qui est cette fois plus longue de 20 minutes que l'année tropique.

3 Étude du système de coordonnées sphériques

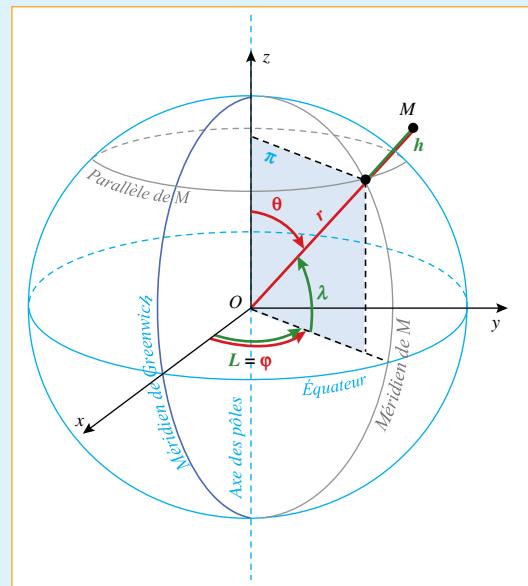
→ énoncé p. 223

- 1 Pour repérer un avion, on utilise 3 coordonnées : la latitude λ , la longitude L et l'altitude h . Ces coordonnées sont largement utilisées en navigation, sur les GPS... Il s'agit en fait du système de coordonnées sphériques avec quelques conventions différentes :

La longitude L est identique à l'angle φ repéré à partir du méridien de Greenwich (choix historique) que l'on place dans le plan (Oxz). L'angle φ est paramétré de 0 à 2π en coordonnées sphériques, sur Terre on préfère donner L de 0° à 180° Ouest et de 0° à 180° Est, ce qui revient à choisir φ de π à $-\pi$.

L'angle θ des coordonnées sphériques est parfois appelé la colatitude. En effet, θ est repéré à partir de l'axe (Oz) (axe des pôles) tandis que la latitude est comptée depuis l'équateur. Soit $\theta = -\lambda + \pi/2$. On fait varier θ de 0 à π , tandis que λ varie de 0° à 90° Nord et de 0° à 90° Sud, soit de $\pi/2$ à $-\pi/2$.

L'altitude est la distance depuis la surface de la Terre, et donc au rayon de la Terre R_T près, c'est la coordonnée r des coordonnées sphériques : $r = R_T + h$.



Bien comprendre

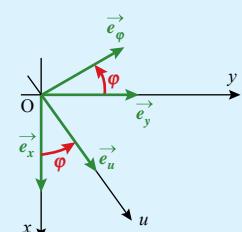
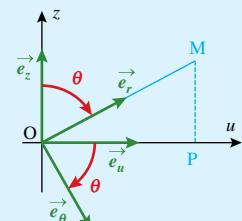
En fait le système de coordonnées sphériques est celui qui est le plus familier ! Il n'y a pas de raison d'y voir une difficulté, car quelques schémas et quelques projections de vecteurs suffisent à maîtriser cet outil qui est l'un des plus utilisés de toute la physique, la géométrie la plus fréquente rencontrée dans l'étude des systèmes physiques étant justement la géométrie sphérique. Il est donc plus que conseillé de se familiariser avec ce système de coordonnées de façon à le maîtriser parfaitement, lorsque son utilisation deviendra indispensable, plutôt que de repousser la difficulté au moment où elle sera conjuguée à d'autres... On y gagnera de surcroît de l'aisance en calcul de dérivée, en projection vectorielle et en vision 3D !

- 2 On définit une direction (OP) où P est le projeté orthogonal de M dans le plan (Oxy). On note cette direction u , elle porte le vecteur unitaire \vec{e}_u (notons que ce vecteur n'est autre que le premier vecteur de la base cylindrique). Les schémas plans (le premier est appelé π dans le cours) permettent aisément d'écrire :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin \theta \vec{e}_u + \cos \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta &= \cos \theta \vec{e}_u - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_u &= \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y\end{aligned}$$

Puis en utilisant l'expression de \vec{e}_u dans les deux premières égalités :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y\end{aligned}$$



- 3 Dans la base cartésienne, les vecteurs sont fixes, ce qui permet de dériver les vecteurs sphériques :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_y - \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}(\cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z) + \dot{\varphi} \sin \theta (\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi}$$

Bien comprendre

La dérivée d'un vecteur de norme constante est nécessairement nulle ou orthogonale à ce vecteur (ci-dessous la démonstration). La dérivée d'un des vecteurs de la base s'exprime donc nécessairement uniquement en fonction des deux autres, ce que l'on cherche à faire apparaître pour finaliser le calcul.

$$\|\vec{u}\| = cste \Rightarrow \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = cste \Rightarrow \frac{d\vec{u} \cdot \vec{u}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} = 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{0} \text{ ou } \frac{d\vec{u}}{dt} \perp \vec{u}$$

- 4 On peut donc en déduire la vitesse en coordonnées sphériques :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \vec{r}\vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{r}\vec{e}_r + r(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi) \quad \text{soit : } \boxed{\vec{v} = \vec{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi}$$

Si l'on écrit les dérivées en faisant apparaître explicitement les éléments différentiels, en multipliant l'expression de la vitesse par dt , on retrouve le déplacement élémentaire déterminé géométriquement dans le cours :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi \quad \text{d'où : } \boxed{d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi}$$

Bien comprendre

Le théorème vu en mathématiques pour la dérivation d'un produit de fonctions (généralement retenu sous la forme $(uv)' = u'v + uv'$) est en fait plus général et s'utilise :

→ pour un produit de plus de 2 fonctions et il suffit alors de dériver une seule fonction à la fois et de recommencer autant de fois que nécessaire. Par exemple : $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

→ pour un produit d'une fonction par un vecteur comme utilisé ci-dessus : $\frac{d[f(t)\vec{u}(t)]}{dt} = \frac{df}{dt} \vec{u} + f \frac{d\vec{u}}{dt}$

→ pour un produit scalaire ou vectoriel de deux vecteurs, détaillé et utilisé dans la suite du cours.

4 Mouvement hélicoïdal

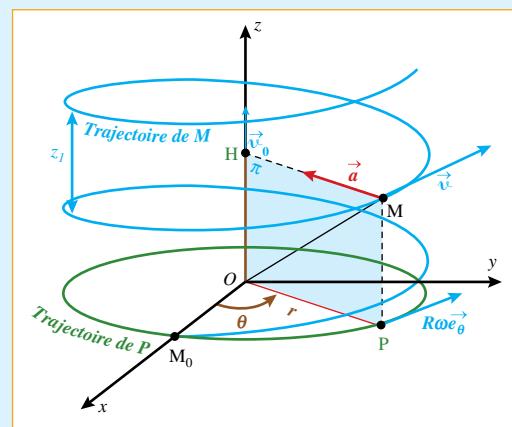
→ énoncé p. 223

- 1 La géométrie du problème conduit à travailler aisément en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \vec{r} = R \\ \theta = \omega t \\ z = v_0 t \end{cases} \quad \text{avec } \dot{\theta} = \omega = \text{cste} \quad \text{et} \quad v_0 = \text{cste}$$

On a ici choisi de placer l'origine des axes de sorte que l'origine du mouvement se trouve en M_0 ($r = R$, $\theta = 0$, $z = 0$). En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = R \cos(\omega t) \\ y = R \sin(\omega t) \\ z = v_0 t \end{cases}$$



Qui correspond bien aux mêmes conditions initiales : $M_0 (x = R, y = 0, z = 0)$. Par dérivations successives, on en déduit les vecteurs cinématiques en coordonnées cylindriques (A) et cartésiennes (B).

$$(A) \quad \begin{cases} \vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \\ \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r}\vec{e}_r - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \vec{OM} = R\vec{e}_r + v_0 t \vec{e}_z \\ \vec{v} = R\omega \vec{e}_\theta + v_0 \vec{e}_z \\ \vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_r \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} \vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \\ \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \vec{OM} = R \cos(\omega t) \vec{e}_x + R \sin(\omega t) \vec{e}_y + v_0 t \vec{e}_z \\ \vec{v} = -R\omega \sin(\omega t) \vec{e}_x + R\omega \cos(\omega t) \vec{e}_y + v_0 \vec{e}_z \\ \vec{a} = -R\omega^2 \cos(\omega t) \vec{e}_x - R\omega^2 \sin(\omega t) \vec{e}_y \end{cases}$$

- ② On note que le vecteur accélération peut s'écrire (quel que soit le système de coordonnées) :

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{OP}$$

La courbe décrite par le point M est une hélice (escalier en colimaçon) de pas constant. Le pas z_1 est la distance entre deux positions successives entre lesquelles le point effectue un tour, ce qu'il réalise en un temps t_1 tel que : $\omega t_1 = 2\pi$ soit la hauteur correspondante : $z_1 = v_0 t_1 = 2\pi v_0 / \omega = \text{constante}$

D'où : $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-R\omega)^2 \cos^2(\omega t) + (R\omega)^2 \sin^2(\omega t) + v_0^2} = \sqrt{R^2 \omega^2 + v_0^2}$ (en coordonnées cartésiennes)
 $\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2 \omega^2 + v_0^2}$ en coordonnées cylindriques

Dans tous les cas : $\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2 \omega^2 + v_0^2} = \text{cste}$, le mouvement est donc uniforme.

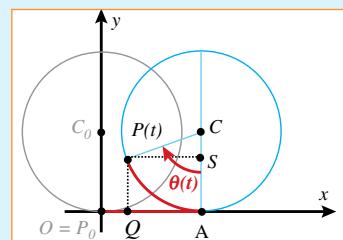
Bien comprendre

On voit ici que le choix de la base influe sur l'expression des vecteurs cinématiques, mais pas sur les propriétés du mouvement, ni sur la trajectoire.

5 Mouvement d'un point d'une roue

→ énoncé p. 223

- ① On se place dans le référentiel terrestre, la roue se déplace dans un plan vertical, on peut donc ramener l'étude des mouvements à deux dimensions dans le plan (Oxy) vertical. L'origine O est choisie en P_0 la position de P, alors au contact du sol, à $t = 0$. Si la roue ne glisse pas sur le sol, alors la distance OA est égale à l'arc de la roue décrit par le point P depuis le temps initial. A est le point de contact de la roue avec le sol ou, si l'on préfère, la projection de C sur le sol à l'instant t . Par ailleurs le mouvement de C est rectiligne uniforme. On en déduit :



$$OA = R\theta \quad \text{et} \quad C_0C(t) = v_0 t \quad \text{Or : } OA = C_0C \quad \text{D'où : } R\theta = v_0 t$$

On en déduit les expressions des équations horaires de P qui sont ses coordonnées (notations du schéma) :

$$\begin{cases} x_P = OQ = OA - QA = R\theta - R\sin\theta \\ y_P = AS = AC - SC = R - R\cos\theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \theta(t) = \frac{v_0}{R} t$$

Soit :

$$\begin{cases} x_P = R(\theta - \sin\theta) = v_0 t - R\sin(\omega t) \\ y_P = R(1 - \cos\theta) = R - R\cos(\omega t) \end{cases} \quad \text{avec : } \dot{\theta} = \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v_0}{R} = \text{cste}$$

Les vecteurs cinématiques peuvent s'écrire de différentes façons, de même que le calcul peut être mené de diverses manières. Notons que dans le référentiel de la roue, le point P est animé d'un mouvement circulaire uniforme de centre C et de rayon R à la vitesse angulaire ω . La période de son mouvement est T . On donne ici plusieurs expressions possibles des vecteurs cinématiques, selon que l'on veut exprimer les vecteurs en fonction du paramétrage du point (R, θ) ou du temps t :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= x_p \overrightarrow{e_x} + y_p \overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{v} &= \dot{x}_p \overrightarrow{e_x} + \dot{y}_p \overrightarrow{e_y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_p = R(\dot{\theta} - \dot{\theta} \cos \theta) = v_0 [1 - \cos(\omega t)] \\ \dot{y}_p = R\dot{\theta} \sin \theta = v_0 \sin(\omega t) \end{array} \right. \\ \vec{a} &= \ddot{x}_p \overrightarrow{e_x} + \ddot{y}_p \overrightarrow{e_y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_p = R(\ddot{\theta} + \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta) = R\dot{\theta}^2 \sin \theta = R\omega^2 \sin(\omega t) \\ \ddot{y}_p = R(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) = R\dot{\theta}^2 \cos \theta = R\omega^2 \cos(\omega t) \end{array} \right.\end{aligned}$$

On calcule la norme des vecteurs vitesse et accélération :

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2} = \sqrt{v_0^2 [1 - \cos(\omega t)]^2 + v_0^2 \sin^2(\omega t)} = v_0 \sqrt{2[1 - \cos(\omega t)]} = v_0 \sqrt{4 \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right)}$$

Soit : $\|\overrightarrow{v}\| = 2v_0 \left| \sin \left(\frac{\omega t}{2} \right) \right|$ La valeur de la vitesse n'est pas constante, le mouvement n'est pas uniforme.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\ddot{x}_p^2 + \ddot{y}_p^2} = \sqrt{[R\omega^2 \sin(\omega t)]^2 + [R\omega^2 \cos(\omega t)]^2} = \sqrt{[R\omega^2]^2}$$

Soit : $\|\vec{a}\| = R\omega^2 = \frac{v_0^2}{R}$ La norme de l'accélération est constante, mais pas sa direction.

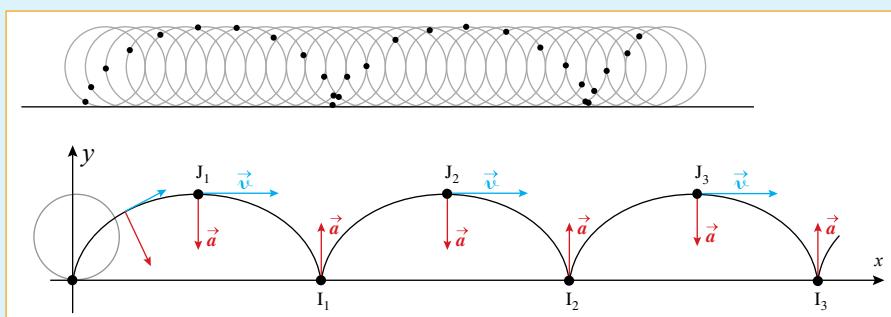
② On peut tracer la forme de la trajectoire à l'aide des résultats suivants :

P	O	J_1	I_1	J_2	I_2	J_3	I_3	...
t	0	$T/2$	T	$3T/2$	$2T$	$5T/2$	$3T$...
x_p	0	πR	$2\pi R$	$3\pi R$	$4\pi R$	$5\pi R$	$6\pi R$...
y_p	0	$2R$	0	$2R$	0	$2R$	0	...
\dot{x}_p	0	$2v_0$	0	$2v_0$	0	$2v_0$	0	...
\dot{y}_p	0	0	0	0	0	0	0	...

Lorsque P est en contact avec le sol (positions I_k), pour que la roue ne glisse pas, il est nécessairement immobile par rapport au sol, ce que confirment les expressions cinématiques : $\overrightarrow{v} = \vec{0}$ et $\vec{a} = R\omega^2 \overrightarrow{e_y}$

Lorsque P est au plus haut sur la roue (positions J_k) on obtient sans surprise une vitesse horizontale :

$$\overrightarrow{v} = 2v_0 \overrightarrow{e_x} \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\omega^2 \overrightarrow{e_y}$$



6 La mission Rosetta

→ énoncé p. 224

- ❶ Si la comète est une sphère homogène alors sa masse est liée à son volume par :

$$m_{com} = \mu_{com} V_{com} = \frac{4}{3} \pi r_{com}^3 \mu_{com} \quad r_{com}^3 = \frac{3m_{com}}{4\pi\mu_{com}} \quad \text{Soit :} \quad r_{com} = \left(\frac{3m_{com}}{4\pi\mu_{com}} \right)^{1/3} = 1814 \text{ m}$$

Le référentiel est lié à la comète, il est comparable au référentiel terrestre.

- ❷ La vitesse verticale (c'est-à-dire selon la direction CP) initiale nulle correspond à la courbe notée (a) la plus à droite du graphique. En reportant l'ordonnée $r = r_{com} = 1814 \text{ m}$ correspondant à une position en surface de la comète, on lit en abscisse : $\tau_0 \approx 145 \text{ 000 s} \approx 40 \text{ h}$.

La chute est évidemment très lente (22 km en 40 h) car l'attraction de la comète est extrêmement faible (environ 20.000 fois plus faible que sur Terre).

Si la sonde ne met que $\tau \approx 7 \text{ h} \approx 25 \text{ 200 s}$, alors on détermine la vitesse initiale en repérant sur quelle courbe se trouve le point de coordonnées ($t = 25 \text{ 200 s}$; $r = 1800 \text{ m}$). La plus proche courbe de ce point est la courbe f, dont on déduit que la vitesse initiale est $v_0 = -0,75 \text{ m.s}^{-1}$. La vitesse négative est conforme à l'orientation de l'axe vers le haut.

- ❸ En étudiant le portrait de phase, on cherche d'abord la trajectoire de phase qui correspond aux conditions initiales ($r_0 = 22 \text{ 500 m}$; $v_0 = -0,75 \text{ m.s}^{-1}$), ce point se trouve à l'extrémité de la courbe 4, qui constitue donc la trajectoire de phase suivie par Philae. On cherche sur cette courbe l'ordonnée du point d'abscisse : $r = r_{com} = 1814 \text{ m}$ et on trouve $v_{com} = -1,1 \text{ m.s}^{-1}$

Bien que cette vitesse soit très petite (environ 4 km/h), en raison de la faible gravité, l'atterrisseur a tout de même rebondi plusieurs fois sur le sol avant de se stabiliser.

Avec le lancement de Rosetta le 2 mars 2004 la fusée Ariane V a effectué une mission inhabituelle et d'une immense portée scientifique. En effet, la mission de cette sonde est d'étudier de très près et pendant une longue période la comète Churyumov-Gerasimenko. Les comètes présentent un grand intérêt car leur composition a peu évolué depuis la formation du système solaire il y a 4,6 milliards d'années. Elles sont les témoins de la naissance de notre système solaire. Leur étude permettra sans doute de répondre à des questions fondamentales sur la formation du système solaire et peut-être même sur les origines de la vie sur Terre. Le nom de Rosetta fait référence à la pierre de Rosette qui permit de traduire les hiéroglyphes et de comprendre un lointain passé. La trajectoire de la sonde Rosetta est extrêmement sophistiquée¹. En effet, aucune fusée actuelle ne dispose de la puissance nécessaire pour la lancer avec une poussée suffisante pour atteindre directement la comète. Elle a donc profité de 4 phases d'assistance gravitationnelle (accélération grâce aux planètes Terre et Mars) qui lui ont permis, après un parcours de plus de 5 milliards de km, de se mettre en orbite autour de la comète et d'y lancer Philae. La fin de la mission consiste en plus de 6 mois d'observation au sol et depuis l'espace de la comète.

À méditer

Apprendre va plus loin que connaître.

PAUL LANGEVIN (1872-1946)

1. On peut en voir des animations intéressantes sur les sites du CNES ou de l'ESA.

Dynamique

La cinématique du chapitre précédent traitait uniquement des mouvements des corps. L'objet de la dynamique est de relier les interactions entre les corps (causes) et les mouvements qui en résultent (conséquences). Si la cinématique a mis en place tous les outils de la mécanique, on aborde ici les lois physiques qui régissent les systèmes. On se limite à l'étude, dans un référentiel galiléen, du point matériel ou d'un système qui peut s'y ramener, à savoir le solide en translation. Ce chapitre est absolument essentiel et les chapitres 14, 15, 17 et dans une certaine mesure le chapitre 16, en sont des applications directes. L'étude plus générale des solides est proposée au chapitre 18. Si l'étude du cours peut sembler rapide et aisée, celle des exercices demandera plus de temps et ce travail est incontournable, tant du point de vue des savoirs, que des méthodes de résolution, car la maîtrise de l'ensemble de la mécanique et, plus largement, de la physique repose en grande partie sur ce chapitre.

OUTILS MATHÉMATIQUES

■ **Calcul vectoriel** : La projection d'un vecteur consiste à exprimer sa coordonnée sur la direction de projection. C'est une technique essentielle en mécanique, elle est détaillée et expliquée dans le point méthode p. 237.

■ **Équations différentielles** (pour les exercices) où on note $f(u)$ la fonction inconnue solution de l'équation différentielle et u la variable dont dépend f (il faut savoir adapter à des fonctions $x(t)$, $y(x)$, $\theta(t)\dots$).

► premier ordre linéaire à coefficients constants :

$$\frac{df}{du} + k_1 f = k_2 \Rightarrow f(u) = f_{\text{homogène}}(u) + f_{\text{sol.part.}}(u) = A e^{-k_1 u} + f_{\text{cst}} \quad (\text{A constante d'intégration, } f_{\text{cst}} = \frac{k_2}{k_1})$$

► second ordre linéaire à coefficients constants, dans deux cas simples :

$$\frac{d^2 f}{du^2} = a = \text{cst} \Rightarrow \frac{df}{du} = au + C \Rightarrow f(u) = \frac{1}{2} au^2 + Cu + K \quad (\text{C et K des constantes d'intégration})$$

$$\frac{d^2 f}{du^2} + \omega^2 f = 0 \Rightarrow f(u) = A \cos(\omega u) + B \sin(\omega u) \quad (\text{A et B constantes d'intégration})$$

I | Principe d'inertie

1. Grandeurs cinétiques

Définitions

■ **L'inertie** d'un système est sa « répugnance » à la modification de son mouvement, c'est-à-dire de son vecteur vitesse. L'inertie est caractérisée par la **masse** (unité le kilogramme, symbole kg).

■ **La quantité de mouvement** \vec{p} est une grandeur qui lie la masse (inertie) et la vitesse du système (mouvement).

→ point matériel de masse m et de vitesse \vec{v} : $\vec{p} = m\vec{v}$

→ système matériel de masse m , dont le centre d'inertie G est animé d'une vitesse \vec{v}_G : $\vec{p} = m\vec{v}_G$

La valeur de la quantité de mouvement n'a pas d'unité spécifique et s'exprime en kg.m.s⁻¹.

La démonstration de l'expression de la quantité de mouvement d'un système est établie au chapitre 18 p. 326. On admettra ce résultat dans un premier temps.

2. Première loi de Newton ou principe d'inertie

C'est Galilée qui le premier énonça ce principe sous une forme proche de la formulation moderne.

Énoncé

Principe d'inertie : La quantité de mouvement d'un système matériel isolé (= qui n'est soumis à aucune interaction) ou pseudo-isolé (= toutes les interactions se compensent) est constante :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

→ Référentiel galiléen

Cet énoncé permet de définir la notion de référentiel galiléen.

Définition

Un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel le principe d'inertie ci-dessus est valide.

Propriété

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est aussi galiléen.

En conséquence, si on connaît un référentiel galiléen \mathcal{R}_G , alors on en connaît une infinité, tous ceux en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_G . On rappelle que le référentiel \mathcal{R} est en translation par rapport à \mathcal{R}_G si ses axes restent à tout instant parallèles deux à deux à ceux de \mathcal{R}_G . La translation est rectiligne uniforme si tout point de \mathcal{R} décrit une droite à vitesse constante par rapport à \mathcal{R}_G .

Postulat

Postulat de la mécanique classique : il existe un référentiel galiléen.

D'après ce qui précède, il existe donc théoriquement une infinité de référentiels galiléens. Seule l'expérience (test de validité du principe d'inertie) permet de vérifier si un référentiel est galiléen. En pratique, dès que l'expérience est poursuivie pendant une durée suffisamment longue ou avec une précision suffisante, les écarts au principe d'inertie sont mis en évidence, en raison des mouvements (non rectilignes uniformes) des systèmes (donc des référentiels) les uns par rapport aux autres. Finalement, bien que le postulat semble permettre de trouver de nombreux référentiels galiléens, on n'en trouve... aucun ! Le postulat traduit en fait l'idée d'un espace absolu (comme une trame solide et invisible sur laquelle s'appuierait l'univers), de même qu'on a postulé l'existence d'un temps absolu. Mais ces deux concepts à la base de la mécanique classique se heurtent à la réalité qui les contredit et qui est prise en compte en mécanique relativiste, où temps et espace deviennent... relatifs ! La mécanique classique reste cependant une excellente approximation dans bien des domaines et à beaucoup d'échelles.

Remarque : On reste admiratif devant l'esprit aiguisé de Galilée et sa vision pertinente du mouvement. 400 ans plus tard, beaucoup pensent encore qu'il est nécessaire d'agir sur un système pour qu'il y ait mouvement. Cela est lié à l'omniprésence des frottements qui faussent le jugement. Il faut absolument réaliser que le mouvement rectiligne uniforme n'est justement possible, que parce que le système ne subit aucune interaction ou, ce qui de son point de vue est équivalent, que l'ensemble des interactions se compensent. C'est entre autres à Galilée que pense Newton quand il dit : « Si j'ai vu plus loin que les autres hommes, c'est parce que je suis monté sur les épaules des géants ».

POINT MÉTHODE*Choisir un référentiel galiléen*

- Ne pouvant trouver de référentiel réellement galiléen, on choisira donc un référentiel « suffisamment » galiléen pour le problème traité.
- Dans les exercices d'expériences simples, le référentiel terrestre conviendra, pour l'étude des satellites, le référentiel astrocentrique sera approprié.
- On ne doit pas dire : « je travaille dans un référentiel galiléen », mais « je travaille dans tel référentiel (terrestre, géocentrique...) que je considère galiléen ».

Remarque : La physique en référentiel non galiléen n'est plus au programme de première année, ce qui prive l'étudiant de comprendre pourquoi les professeurs s'acharnent à insister sur la notion de galiléen, puisque tout semble toujours l'être... Pourtant, on évolue souvent dans un référentiel non galiléen, dès que l'on prend sa voiture par exemple. Les référentiels non galiléens seront abordés en seconde année.

→ Cas d'une masse constante

Si le système est de masse constante (comme presque toujours dans les cas évoqués à ce niveau), le principe d'inertie entraîne que le vecteur vitesse du centre d'inertie d'un système (pseudo-)isolé est un vecteur constant. On énoncera alors souvent le principe d'inertie sous une forme plus directe.

Énoncé

Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie d'un système isolé (ou pseudo-isolé) de masse constante est animé d'un mouvement rectiligne uniforme : \vec{v}_G (système isolé) = \vec{cste}

II | Principe fondamental de la dynamique**1. Interactions****→ Interactions fondamentales**

L'ensemble des interactions peut être décrit par quatre interactions fondamentales, déjà évoquées au lycée, dont on rappelle ici l'essentiel.

Interaction	Gravitationnelle	Électromagnétique	Forte	Faible
Particules concernées	Toutes	Particules chargées	Quarks (donc nucléons)	Électrons, neutrinos, quarks
Portée	infinie	infinie	$\sim 10^{-15}$ m	$\sim 10^{-17}$ m
Domaine	Structures de l'univers (étoiles, galaxies...)	Partout : électricité, magnétisme, chimie, optique, élasticité, résistance des matériaux, biologie...	Cohésion des noyaux atomiques	Radioactivité

→ Interaction et force**Définition**

Un système non isolé est soumis à des interactions qui sont caractérisées par un vecteur appelé **force**.

- La notion de force a déjà été vue au lycée et sa représentation par un vecteur demeure assez intuitive, elle est toujours exercée par un système sur un autre système.

- On sera attentif à éviter les erreurs de représentation, en particulier, le point d'application de la force. Pour un solide en translation ramené à un point matériel, le problème ne se pose pas, mais il sera fondamental dans l'étude d'un système ou d'un solide, en particulier en rotation.
- On distingue pour un système, les forces :
 - ➡ extérieures = exercées par tout ce qui n'est pas le système sur le système ou partie du système.
 - ➡ intérieures = exercées par une partie du système sur une autre partie du système.
- Pour un point matériel la notion de force intérieure n'a pas de sens.

2. Deuxième loi de Newton et Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

La présence d'interactions modifie le mouvement du système, selon son inertie, c'est ce que traduit la deuxième loi de Newton, déjà utilisée au lycée.

Énoncés

- Dans un référentiel galiléen, la variation de la quantité de mouvement d'un système est liée à l'ensemble des forces extérieures qui s'exercent sur lui par :
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$
- Pour un système de masse constante on obtient aisément :
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \quad \text{ou} \quad m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$$

- Il faut bien comprendre à quel point cette loi est à la fois concise et fondamentale : elle permet en effet de déterminer les mouvements (vitesse = conséquences) en fonction des interactions (forces = causes) selon les propriétés du système (masse = inertie).
- À cette loi sont attribués de nombreux noms : deuxième loi de Newton, principe fondamental de la dynamique (PFD), théorème ou loi de la résultante cinétique (ou de la résultante dynamique), théorème ou loi du centre d'inertie... Outre cette profusion de noms qui peut dérouter, le vocabulaire peut sembler ambigu, voire contradictoire. En effet, loi, principe ou postulat sont des points de départ d'une théorie qu'on ne cherche pas à démontrer. En revanche, un théorème est théoriquement issu d'une loi par une démonstration. Il est important de lever la confusion à ce sujet qui va au-delà d'une simple question de vocabulaire.

➡ Comment appeler cette loi ?

L'apparente contradiction entre les noms utilisés peut s'expliquer si l'on comprend ce qu'est réellement le PFD, comme indiqué sur le résumé qui suit :

$$\text{PFD (torseurs)} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{TRC (vecteurs)} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{projection}_1 \text{ du TRC (algébrique)} \\ \text{projection}_2 \text{ du TRC (algébrique)} \\ \text{projection}_3 \text{ du TRC (algébrique)} \end{cases} \\ \text{TMC (vecteurs)} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{projection}_1 \text{ du TMC (algébrique)} \\ \text{projection}_2 \text{ du TMC (algébrique)} \\ \text{projection}_3 \text{ du TMC (algébrique)} \end{cases} \end{cases}$$

PFD : Principe Fondamental de la Dynamique

TRC : Théorème de la Résultante Cinétique

TMC : Théorème du Moment cinétique

■ **6 équations pour 6 degrés de liberté :** le principe fondamental de la dynamique est un énoncé qui se présente sous forme d'égalité de deux torseurs (comme vu en SI¹), égalité qui se décompose en deux égalités vectorielles, elles-mêmes équivalentes chacune à 3 égalités algébriques par projection sur les 3 directions de l'espace. Le PFD contient finalement 6 équations, indispensables à la description du lien entre interactions et mouvement, puisque en toute généralité, un système matériel a 6 degrés de liberté (3 en translation et 3 en rotation).

■ **Loi ou théorème :** On peut alors voir les deux relations vectorielles soit comme des « sous-lois » du PFD, soit comme des théorèmes directement issus de la loi (PFD). Pour un système quelconque, ces deux lois ou théorèmes vectoriels (TRC et TMC) sont indépendantes (et nécessaires) et ne se déduisent pas l'une de l'autre. Pour un point matériel (système à seulement 3 degrés de liberté), la seconde peut être ramenée à une conséquence de la première et le PFD se limite alors finalement au TRC ou deuxième loi de Newton, d'où la confusion des noms pour un point ou un solide en translation qui peut s'y ramener.

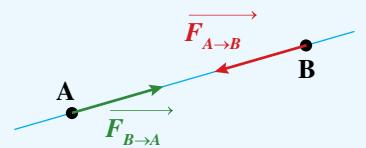
■ **Pour éviter les confusions** qui en résultent, en particulier dans l'étude des systèmes, **on utilisera dans tout ce qui suit, les dénominations Théorème de la Résultante Cinétique (en abrégé TRC) et Théorème du Moment Cinétique (en abrégé TMC), selon que l'on applique la première partie du PFD, étudiée dans ce chapitre, ou la seconde partie du PFD, étudiée au chapitre 16.** On réservera le terme PFD à l'ensemble des deux, étudié au chapitre 18. La dénomination deuxième loi de Newton, évoquée ci-dessus pour faire le lien avec le lycée, ne sera plus utilisée.

3. Troisième loi de Newton ou Théorème des actions réciproques

Énoncés

- Si un point A exerce sur un point B une force $\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}}$, alors B exerce sur A une force égale et opposée et les forces sont nécessairement portées par la droite (AB) :

$$\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}} = -\overrightarrow{F_{B \rightarrow A}}$$



- Plus généralement, la force exercée par un système S_1 sur un système S_2 est égale et opposée à celle exercée par S_2 sur S_1 :

$$\overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}} = -\overrightarrow{F_{S_2 \rightarrow S_1}}$$

Cette loi est connue sous le nom de **théorème des actions réciproques**, principe de l'action et de la réaction ou 3^e loi de Newton. Elle est une conséquence du PFD en mécanique des systèmes et dans ce cadre constitue plutôt un théorème. Si on se limite à la mécanique du point, elle sera une loi (postulat), car elle ne peut pas se démontrer dans ce cadre.

1. Il ne s'agirait pas de penser que la SI utilise des lois différentes de la physique ! Seul le formalisme ou l'approche utilisés à ce niveau apparaissent comme différents. On pourrait utiliser les outils torseurs dans un cours de mécanique des systèmes en physique (et cela se fait). Néanmoins, comme à ce niveau on se limite à des systèmes simples (solide en translation ou en rotation autour d'un axe fixe), ce formalisme serait inutilement lourd. On préfère donc aborder d'une part le TRC approprié pour l'étude d'un solide en translation ou un point matériel et d'autre part le TMC approprié pour l'étude d'un solide en rotation autour d'un axe fixe. En SI on partira plutôt du PFD général sous forme d'égalité de torseurs, dont on déduira les deux lois.

POINT MÉTHODE*Résoudre un problème de mécanique*

Contrairement à l'idée que s'en font les élèves, c'est extrêmement aisé, si l'on travaille avec méthode. Le but est presque toujours : ´tablir l'équation différentielle, la résoudre et, parfois, obtenir la trajectoire et la nature du mouvement ou déterminer les forces « annexes » (réactions, frottements, tensions...). La méthode ci-dessous, explicitement mise en oeuvre dans les corrigés, vient ´ bout de tous les exercices.

1. ´tablir le cadre de travail.

- Choisir et préciser le référentiel d'étude, indiquer son caractère galiléen ou non.
- Caractériser le(s) système(s) ´tudi (s).
- Schématiser le problème : axes du référentiel, base(s) de vecteurs utilisée(s).
- Préciser les hypothèses simplificatrices (absence de frottement, mouvement plan...).

2. Préparer les outils.

- Cinématique : expression du vecteur position, de la vitesse et de l'accélération compte tenu du problème et du choix de coordonnées. (*N. B. : Pour un système en rotation on exprimera aussi le vecteur rotation.*)
- Bilan des forces : schématisation et expression dans la base de travail.
- Indiquer les conditions initiales.

3. Choisir un point de départ : une loi physique.

- TRC ou TMC (voire les deux) ou loi ´nerg tique (*voir chapitres 14, 16 et 18*).

4. Mettre « les mains dans le cambouis » et faire tourner « la moulinette ´ calcul ».

- Projection des lois vectorielles.
- Mise en ´vidence des ´quations différentielles.
- Résolution des ´quations différentielles.
- Détermination complète de solutions (constantes d'intégration).
- Résolution d'équations algébriques (trajectoire ´ partir des ´quations horaires...).

5. Analyser et critiquer son travail.

- Interprétation physique : nature des mouvements, des trajectoires...
- Confrontation ´ l'expérience, au sens physique, aux prévisions...
- Discussion des hypothèses simplificatrices (pertinence, remise en cause...)
- Ouvertures : généralisation, poursuite du problème dans un autre cadre...

III Les forces**1. Forces ´ distances, forces de contact**

Une force traduit une interaction, elle est donc toujours exercée sur un système S ( tudi ) par un autre système S₀, parfois qualifié d'extérieur.

	Force ´ distance	Forces de contact
Position des systèmes	S et S ₀ en contact ou non	S et S ₀ sont nécessairement en contact
Exemples	Poids, gravitation, forces ´lectromagn�tiques (Lorentz)...	Frottements, tension d'un fil, réaction d'un support, force de pression, force ´lastique...
Point d'application	Au centre d'inertie	Au(x) point(s) de contact

2. Forces courantes

Nature	Expression	Description
Gravitation (voir chapitre 17)	$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$	Force entre 2 masses ponctuelles, sur le schéma de M sur m
Électrostatique (voir chapitre 15)	$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$	Force entre deux charges ponctuelles, sur le schéma de Q sur q de même signe
Électrique (voir chapitre 15)	$\vec{F} = q\vec{E}$	Force sur une particule dans un champ électrique \vec{E}
Magnétique (voir chapitre 15)	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$	Force de Lorentz sur une particule mobile dans un champ magnétique \vec{B}
Élastique (voir exercices n° 3 et n° 5)	$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$	Force de rappel exercée par un ressort sur un objet
Frottement fluide (voir exercice n° 6)	$\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ (1) $\vec{F} = -\alpha v^2 \vec{e}_r$ (2)	Force exercée par un fluide (liquide ou gaz) sur un solide se déplaçant à vitesse \vec{v} par rapport au fluide. (1) aux « faibles » vitesses (2) aux « grandes » vitesses, l'énoncé précisera l'expression à utiliser.
Réaction d'un support	$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$	Force d'un support sur un système (voir III.3)
Poussée d'Archimède	$\vec{\Pi} = -\rho_{fluide} V_{immérgé} \vec{g}$	Force d'un fluide au repos sur un solide immergé (voir III.4)

POINT MÉTHODE

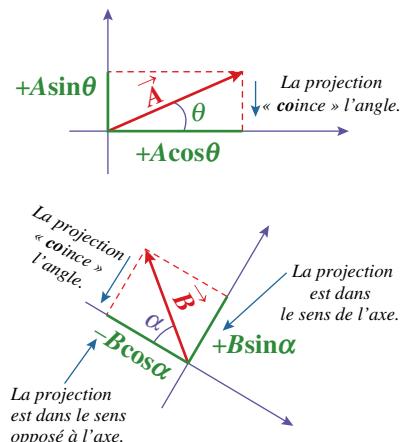
Projeter un vecteur

- Les théorèmes issus du PFD sont vectoriels. On obtient des équations algébriques en les projetant sur les axes.
- La **projection d'un vecteur** consiste à exprimer sa cordonnée selon un vecteur unitaire de l'axe sur lequel on projette. Il faut apprendre à exprimer rapidement les projections d'un vecteur, quelle que soit l'orientation du schéma ou des axes, sans revenir sans arrêt au triangle et aux expressions type « adjacent » ou « opposé » sur hypoténuse. On a toujours :

Projection = signe × norme du vecteur projeté × sin ou cos(angle)

Le signe se trouve en comparant le sens de la projection avec la direction de l'axe ou du vecteur de base, le choix du sinus ou cosinus à l'aide d'un petit moyen mnémotechnique :

Si la projection « coince » l'angle utile, on aura un cosinus, sinon un sinus (voir exercice n° 0 p. 242).



3. Forces de contact de deux solides

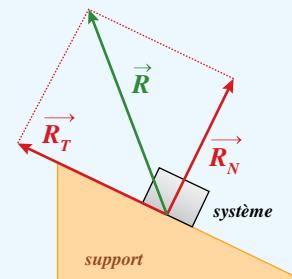
Lorsque deux solides sont en contact, ils exercent une force l'un sur l'autre. On privilégie souvent un des systèmes (S = système étudié), par rapport au second qu'on qualifie de support.

Définitions

- On appelle **réaction du support** la force \vec{R} exercée par le support sur le système, du fait de leur contact. Les caractéristiques de cette force dépendent des autres forces appliquées au système, de la nature du contact et des propriétés des solides en jeu.

Généralement le contact s'effectue sur une surface. En pratique on modélise souvent ce contact en un point unique de la surface de contact. La force de contact se décompose en deux composantes :

- La **réaction normale** \vec{R}_N , qui, comme son nom l'indique, est orthogonale à la surface du contact.
- La **réaction tangentielle** \vec{R}_T , qui est tangente à la surface de contact et qui constitue la force de frottement.



- En l'absence de frottement (ou plus exactement si on peut considérer qu'ils sont négligeables), la réaction tangentielle est nulle, et la réaction du support se limite à la réaction normale.
- La réaction n'existe qu'en présence de contact, on peut donc ainsi déterminer le moment ou le lieu où deux systèmes se séparent, en analysant l'expression de la réaction et en déterminant les conditions de son annulation (voir exemple du looping réussi p. 266).

4. La poussée d'Archimède

Lorsqu'un solide est en contact avec un fluide, ce dernier exerce une force de pression sur le solide. La notion de pression sera définie en thermodynamique (voir chapitre 19), mais il suffit ici de savoir que pour un fluide au repos donné, les forces pressantes ne dépendent que de la forme de la surface du système immergé.

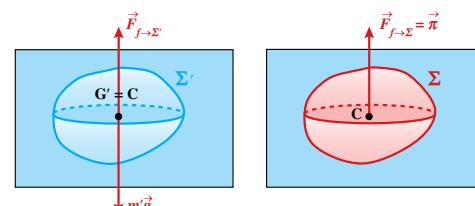
Soit un corps solide Σ totalement immergé dans un fluide au repos, la force $\vec{F}_{f \rightarrow \Sigma}$ exercée par le fluide sur Σ est donc identique à celle que subirait n'importe quel système, de même forme, placé au même endroit, par exemple le système Σ' formé de fluide occupant strictement le même espace que Σ , et donc de même volume que Σ :

$$\vec{F}_{f \rightarrow \Sigma} = \vec{F}_{f \rightarrow \Sigma'}$$

Or il est facile de calculer cette force dans le cas du système fluide Σ' de masse m' , car il est immobile, en équilibre sous l'action de son poids et des forces de pression, et par conséquent leur résultante est nulle :

$$\vec{F}_{f \rightarrow \Sigma'} + m' \vec{g} = \vec{0}$$

$$\text{d'où : } \vec{F}_{f \rightarrow \Sigma} = \vec{F}_{f \rightarrow \Sigma} = -m' \vec{g}$$



Équilibre des forces sur le fluide Σ' Poussée d'Archimède sur le solide Σ

Par ailleurs, par une application du théorème du moment cinétique à Σ' en équilibre, on peut montrer que cette force s'applique au centre d'inertie G' du système fluide Σ' . On notera alors C le point situé à l'identique dans Σ .

Théorème

La poussée d'Archimède est la résultante des forces pressantes $\vec{F}_{f \rightarrow \Sigma}$ exercée par un fluide au repos dans un référentiel galiléen sur un corps solide Σ , totalement immergé dans le fluide, soumis à un champ de pesanteur \vec{g} uniforme. Elle est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé (de masse m') et s'applique au **centre de poussée C**, qui est le centre d'inertie du fluide déplacé :

$$\vec{\Pi} = -m'\vec{g}$$

- Ce théorème est valable que le fluide soit compressible ou incompressible, homogène ou inhomogène.
- Le centre de poussée n'a aucune raison de coïncider avec le centre d'inertie du solide, ce sera cependant le cas pour un solide homogène dans un fluide homogène.
- On peut généraliser à un système non solide.
- Un corps remontera dans le fluide si la poussée d'Archimède l'emporte sur son poids et descendra sinon.

Si le système et le fluide sont homogènes, on aura intérêt à écrire les forces de pesanteur et de poussée à l'aide des masses volumiques :

Poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -m_{\text{fluide déplacé}}\vec{g} = -\mu_{\text{fluide}}V_{\text{solide}}\vec{g}$

Poids du solide : $\vec{P} = m_{\text{solide}}\vec{g} = \mu_{\text{solide}}V_{\text{solide}}\vec{g}$

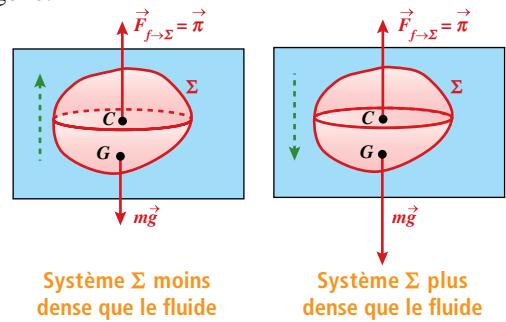
Ainsi la résultante des forces sur le solide s'écrira :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{\Pi} = \mu_{\text{solide}}V_{\text{solide}}\vec{g} - \mu_{\text{fluide}}V_{\text{solide}}\vec{g} = (\mu_{\text{solide}} - \mu_{\text{fluide}})V_{\text{solide}}\vec{g}$$

qui explique qu'un corps plus dense qu'un liquide coule, tandis qu'un moins dense remonte à la surface².

➔ Applications

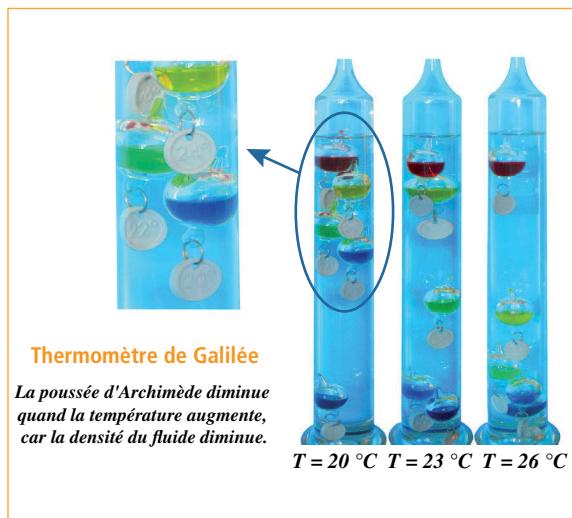
- Les bateaux, icebergs et autres objets flottants, surnagent grâce à la poussée d'Archimède. La poussée d'Archimède permet aussi aux montgolfières ou aérostats de s'élever. Le ballon est rempli d'un gaz plus léger que l'air environnant (soit de l'air chaud, soit de l'hélium³), de telle sorte que le poids du fluide déplacé (donc la poussée d'Archimède) soit supérieur au poids de la nacelle et du ballon.
- La poussée d'Archimède est également responsable de la convection de l'air dans l'atmosphère : l'air chaud, moins dense donc, monte, l'air froid, plus dense, descend, ce qui engendre les mouvements atmosphériques. Le même phénomène se produit au sein de l'eau qui chauffe dans une casserole.



2. Initialement C et G sont situés de façon *a priori* quelconque, mais alors poids et poussée d'Archimède exercent des moments, qui font tourner le solide dans une position d'équilibre stable du point de vue de la rotation, C et G sur la même verticale, C au-dessus de G, ce qui est schématisé. La suite du mouvement est alors limitée à une translation. La position G au-dessus de C est une position d'équilibre instable. Ces situations sont très faciles à vérifier dans une piscine ou ... sa baignoire, comme Archimète, dont la légende dit qu'il est sorti trempé et tout nu dans la rue en criant « eurêka ! » (j'ai trouvé) !

3. Les premiers dirigeables utilisaient de l'hydrogène (moins cher que l'hélium). Mais la nature hautement inflammable de ce gaz rendait l'aérostat très dangereux et, après la catastrophe du Zeppelin Hindenburg en 1937, ce gaz a été abandonné dans les ballons dirigeables.

■ La poussée d'Archimède fait également remonter les bulles d'une boisson gazeuse et le canard en plastique dans la baignoire. Dans l'application ci-contre appelée thermomètre de Galilée⁴, des ampoules de densités très légèrement différentes baignent dans un liquide dont la masse volumique varie avec la température (il devient moins dense en s'échauffant). Ainsi, plus la température augmente, plus la poussée d'Archimède faiblit et plus le nombre d'ampoules qui coulent augmentent. Il n'y a plus qu'à les graduer en température, la plus basse qui tend à flotter indique la température du liquide, donc de l'extérieur. La variation de densité du fluide environnant restant faible pour des variations de quelques degrés, les masses des ampoules, qui ont toutes le même volume, diffèrent de quelques milligrammes seulement.

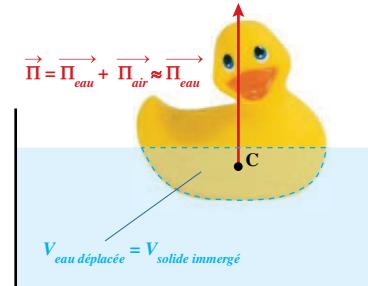


POINT MÉTHODE

Exprimer la poussée d'Archimède

- Les conditions d'application du théorème d'Archimède doivent être comprises et mémorisées. Il est indispensable que le fluide soit immobile (au repos) et entoure entièrement le solide étudié pour utiliser la poussée d'Archimède. Par contre, le fluide peut tout à fait être compressible et/ou inhomogène : par exemple l'air et l'eau autour d'un corps flottant.
- Lorsque le fluide est formé de deux zones homogènes clairement identifiées, comme l'eau et l'air autour d'un glaçon ou d'un canard en plastique par exemple, alors on pourra calculer la poussée exercée sur chaque partie séparément. Dans le cas eau/air, la poussée de l'air sera négligeable devant celle de l'eau (il est facile de se maintenir dans l'eau, alors qu'il est impossible de se maintenir dans l'air, tout simplement parce que la poussée d'Archimède de l'air est environ 1000 fois plus faible que celle de l'eau !). Le terme de volume de fluide déplacé est très parlant, il s'agira donc pour un corps totalement sous l'eau du volume du corps, mais pour un corps partiellement immergé, de la seule partie sous la surface de l'eau (*voir exercice n° 4 p. 243*) :

$$\vec{\Pi} = -m_{\text{fluide déplacé}} \vec{g} = -\mu_{\text{fluide}} V_{\text{solide immergé}} \vec{g}$$



IMPORTANT : Les exercices 1 et 2 sont des applications directes du cours, à considérer comme partie intégrante du cours et donc à apprendre comme tel. La méthode de résolution détaillée au point méthode p. 236 y est utilisée et explicitement mise en évidence. On révisera également avec profit les chapitres 2 et 9 qui traitent d'oscillateurs, lesquels sont étudiés en détail dans les exercices. On ne négligera pas non plus les méthodes et les conseils proposés au chapitre 1.

4. En hommage à Galilée qui en a conçu le principe, même si la version moderne est plus sophistiquée.

VERS LA COLLE**Questions de cours**

- Quantité de mouvement, cas d'un point matériel, d'un système quelconque. Cas d'un système isolé.
- Les lois de la dynamique.
- Forces à distance, forces de contact : définitions, exemples et expressions.
- Tir dans le champ de pesanteur sans frottement (*voir exercice n° 2 p. 242*) : position du problème, mise en équation, équations horaires, trajectoire, portée.
- Étude du pendule simple (*voir exercice n° 1 p. 242*) : définition, mise en équation du mouvement, cas des petites oscillations, solutions, nature du mouvement, diagramme des phases.
- Poussée d'Archimède : définition, expression, exemples.

Erreurs à éviter

- Ne pas dire « J'étudie le problème dans un référentiel galiléen » (*voir remarque du point méthode p. 233*).
- Ne pas dire « Le pendule simple est une masse suspendue à un fil » (*voir définition complète exercice n° 1 p. 242*).
- On peut comparer la **RÉSOLUTION D'UN EXERCICE DE MÉCANIQUE** (et même d'un exercice de physique en général) à la rénovation d'une pièce, qui suit en effet des étapes comparables à celles décrites au point méthode p. 236 : **1.** Faire place nette, délimiter les zones à peindre, **2.** Préparer les pinceaux, rouleaux et brosses, choisir les couleurs, disposer les pots de peinture (dont on évalue le volume nécessaire pour chaque couleur) **3.** Démarrer par un mur. **4.** Peindre méthodiquement mur après mur. **5.** À la fin admirer, critiquer, fignoler et ranger. Dans la résolution d'un exercice, l'erreur la plus fréquente commise par les élèves est de commencer par la 3^e, voire la 4^e étape de la résolution. C'est un peu comme vouloir repeindre une pièce en commençant par saisir un rouleau, le premier pot de peinture trouvé, de fermer les yeux et d'attaquer un mur (ou une porte, une télé, un lit...). Quels que soient l'énergie et le temps passé, le résultat sera décevant... !

Quelques « trucs » utiles

- Dans un schéma en mécanique il faut choisir des axes, directions, sens de rotation qui respectent les **CONVENTIONS D'ORIENTATION** (sens trigonométrique pour les angles, sens direct pour les bases) et toujours se ramener à un système de coordonnées connu (même si les notations ou les directions dans les schémas peuvent être différentes). Par exemple dans l'exercice n° 1, on identifie l'axe (Ox) vertical vers le bas et l'axe (Oy) horizontal vers la droite et donc les coordonnées polaires habituelles.
- On s'évitera bien des erreurs en **SCHÉMATISANT LES ANGLES TRÈS DIFFÉRENTS DE 45°**, de façon à distinguer facilement un angle et son complémentaire sur le schéma. Refaire par exemple les schémas de l'exercice n° 0 p. 242 avec un angle θ de 45° et chercher à le retrouver ailleurs dans le schéma (au niveau des forces). Recommencer avec un angle à 20° environ et comparer....
- Avant de résoudre une équation différentielle, toujours identifier la fonction inconnue et la variable dont elle dépend.
- Une connaissance solide du cours de cinématique (*voir chapitre 12*) est indispensable pour résoudre les problèmes de dynamique.
- La (re)lecture du III du chapitre 1 (*voir p. 12-14*) pourra s'avérer également très profitable.

Conseils

Les exercices n° 1 et n° 2 sont des questions de cours. Cependant ils sont volontairement posés sans schéma, de façon à encourager l'élève à poser lui-même le problème. Il est indispensable de savoir les résoudre totalement et sans aide. Les exercices n° 3, n° 4 et n° 5 sont classiques et doivent être également maîtrisés. Les exercices n° 6 et n° 7 sont plus difficiles mais constituent d'excellents entraînements au calcul.

0 Pour s'entraîner à la projection de vecteurs ★

→ corrigé p. 244

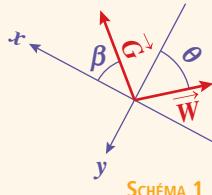


SCHÉMA 1

Déterminer les projections des vecteurs \vec{G} et \vec{W} sur les axes (Ox) et (Oy) (schéma 1) ainsi que les projections de \vec{F} et $m\vec{g}$ selon \vec{e}_r et \vec{e}_θ (schéma 2).

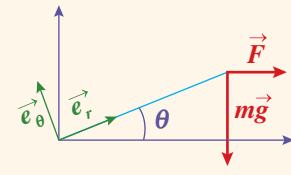


SCHÉMA 2

1 Pendule simple (cours) ★

→ corrigé p. 244

On considère un objet de masse m suspendu à un fil de longueur ℓ dont l'autre extrémité est fixe. On dira que ce système est un pendule simple si :

- Le fil est de masse négligeable ($m_{fil} \ll m$) et inextensible.
- Les dimensions de l'objet sont petites devant la longueur du fil ($d \ll \ell$), de sorte qu'on le modélisera par un point matériel.

- ① Établir l'équation différentielle du mouvement.
- ② Linéariser cette équation dans le cas des petites oscillations (définir cette expression).
- ③ Résoudre l'équation dans ce cas. Exprimer la solution pour un pendule initialement écarté de sa position d'équilibre, puis abandonné sans vitesse initiale. Commenter.
- ④ Construire le diagramme des phases.

2 Tir dans le champ de pesanteur (cours) ★

→ corrigé p. 246

Un projectile de masse m , considéré comme ponctuel, est lancé dans le champ de pesanteur (uniforme) avec une vitesse initiale \vec{v}_0 .

- ① Établir les équations différentielles du mouvement, puis les équations horaires et enfin l'équation de la trajectoire.
- ② Définir et calculer la portée, la flèche du tir. Quels sont les paramètres qui influent sur ces valeurs ?
- ③ Quelles sont les deux moyens d'atteindre une distance donnée, la valeur de la vitesse initiale étant fixée ?

3 Pendule élastique horizontal ★

→ corrigé p. 250

On considère un solide de masse m pouvant glisser sans frottement sur un plan horizontal. Il est fixé à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixe. On suppose que l'ensemble reste aligné sur une direction horizontale.

- ① Établir l'équation différentielle du mouvement et déterminer la réaction du support.
- ② Résoudre l'équation et décrire le mouvement du système. Commenter.

4 Du glaçon à l'iceberg ★**→ corrigé p. 251**

- ① Un glaçon flotte dans un verre d'eau rempli à ras bord. Le verre va-t-il déborder lors de la fonte du glaçon ?
- ② Calculer la hauteur émergée h_E d'un iceberg, assimilé à un cube d'arête a , flottant sur l'océan à la même température 0°C . Quelle est la proportion α_i de volume immergé de l'iceberg ?
Masses volumiques à 0°C : de la glace $\rho_G = 920 \text{ kg.m}^{-3}$; de l'eau de mer $\rho_M = 1025 \text{ kg.m}^{-3}$

5 Pendule élastique vertical ★★**→ corrigé p. 252**

On reprend le dispositif de l'exercice 3 mais on accroche le pendule élastique verticalement. On suppose que le mouvement reste rectiligne.

- ① Établir, puis résoudre l'équation différentielle.
- ② Déterminer complètement et schématiser la courbe de l'équation horaire du mouvement dans les trois cas suivants de conditions initiales :
 - a) On écarte m d'une distance a vers le bas et on abandonne le système sans vitesse initiale.
 - b) La masse m étant à sa position d'équilibre, on lui communique une vitesse v_1 vers le haut.
 - c) La masse m étant maintenue à une distance b au-dessus de sa position d'équilibre, on lui communique une vitesse v_2 vers le bas.
- ③ Comment est modifiée l'équation différentielle si le système est soumis à une force de frottement fluide linéaire ? Comment est modifié le mouvement ?

6 Tir avec frottement fluide ★★★**→ corrigé p. 254**

On reprend le tir de l'exercice 2. Cette fois, les frottements ne sont plus négligeables, la force de frottement étant $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$

- ① Établir les équations différentielles du mouvement.
- ② Établir les équations horaires. On pourra introduire des paramètres commodes.
- ③ Sans chercher à écrire l'équation cartésienne de la trajectoire, mais en étudiant les expressions des coordonnées de la vitesse et du vecteur position, déterminer son allure. Commenter.

7 Parabole de sûreté ★★★**→ corrigé p. 256**

On utilise ici les résultats de l'exercice 2. On souhaite atteindre un point M de coordonnées (X, Y) quelconque, la valeur de la vitesse étant fixée.

- ① Établir l'équation du second degré vérifiée par $\tan(\alpha)$ qui donne l'angle de tir pertinent pour atteindre M.
- ② En déduire une condition sur le couple de valeurs (X, Y) pour qu'une solution de tir existe.
- ③ Quelle est l'équation de la parabole de sûreté, courbe délimitant la zone qui ne peut pas être atteinte par le projectile ?

N. B. : Dans les corrigés, on note TRC le Théorème de la Résultante Cinétique (voir p. 234).

Conseils

On indique le plan de la méthode proposée p. 236 à l'aide des symboles ↗. Il est fortement recommandé de la mettre en œuvre dans tous les exercices. Lire aussi « Comment appeler cette loi » p. 234.

0 Pour s'entraîner à la projection de vecteurs

→ énoncé p. 242

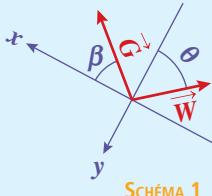


SCHÉMA 1

- ➊ $\vec{G} = G \cos \beta \vec{e}_x - G \sin \beta \vec{e}_y$
 $\vec{W} = -W \sin \theta \vec{e}_x - W \cos \theta \vec{e}_y$
- ➋ $\vec{F} = F \cos \theta \vec{e}_r - F \sin \theta \vec{e}_\theta$
 $m\vec{g} = -m g \sin \theta \vec{e}_r - m g \cos \theta \vec{e}_\theta$

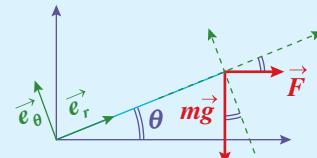


SCHÉMA 2

1 Pendule simple (cours)

→ énoncé p. 242

➊ Cadre de travail

Le **système** est le point matériel M étudié dans le **référentiel** terrestre \mathcal{R} supposé galiléen.

Le mouvement est étudié dans le plan vertical, on utilisera la **base** polaire.

Hypothèses simplificatrices :

- On néglige les frottements.
- Le fil est de masse négligeable, inextensible et reste tendu.
- Les dimensions du système permettent de l'assimiler à un point matériel⁵.

➡ Outils

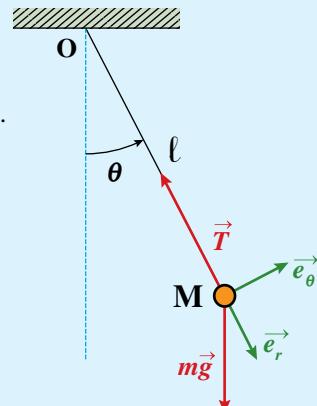
Cinématique :

$$\begin{aligned}\overline{OM} &= \ell \vec{e}_r \\ \vec{v} &= \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{a} &= -\ell \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + \ell \ddot{\theta} \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Bilan des forces :

$$\begin{aligned}\vec{T} &= -T \vec{e}_r \\ m\vec{g} &= m g \cos \theta \vec{e}_r - m g \sin \theta \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Conditions initiales : On écarte le système de l'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale.



Bien comprendre

- La position d'équilibre correspond à la position verticale du fil (résultante des forces nulles). On étudie toujours les oscillations d'un système autour de sa position d'équilibre ce qui justifie le choix des coordonnées, l'expression de $\theta(t)$ décrit totalement le mouvement.
- Par ailleurs la base de projection doit être choisie de sorte que l'une des directions soit celle du mouvement, ainsi la projection du TRC sur cette direction (ici \vec{e}_θ) aboutit à l'équation différentielle.

➡ Point de départ

On applique le TRC au système S de masse constante dans le référentiel galiléen \mathcal{R} :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{g} + \vec{T} \quad (1)$$

5. Cette précision est importante, on en comprendra la portée lors de l'étude du pendule pesant du chapitre 18 p. 334.

→ Moulinette à calcul

L'équation (1) est équivalente par projection sur la base au système suivant :

$$\begin{cases} -m\ell \dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - T \\ m\ell \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} m\ell \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases} \quad (3)$$

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\ell \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$

Bien comprendre

Il suffit, puisque les vecteurs ont été explicités clairement au préalable, de suivre l'équation (1) en remplaçant par les coordonnées de chacun des vecteurs. Sans surprise l'équation (2) (projection sur $\overrightarrow{e_\theta}$) est l'équation différentielle, l'équation (3) permet de déterminer la tension, si nécessaire.

- 2 La présence d'une fonction trigonométrique rend l'équation différentielle non linéaire. On linéarise l'équation en se plaçant dans le cas des « petites » oscillations, pour lesquelles $\sin \theta \approx \theta$.

L'équation différentielle se simplifie alors comme suit : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$

Bien comprendre

On appelle petites oscillations, les oscillations qui permettent l'approximation sur le sinus. Il n'y a pas de limite proprement dite à cette approximation, car elle dépendra uniquement de la précision que l'on souhaite. Par exemple, elle est acceptable à 1 % près pour des angles inférieurs à 15° . Attention, la précision du résultat de l'équation différentielle peut être moindre.

- 3 On retrouve alors l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique dont la solution est :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

A et B sont des constantes d'intégration que l'on détermine avec les conditions initiales. On dérive θ :

$$\dot{\theta}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\text{À } t = 0 : \theta(0) = \theta_0 = A \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(0) = 0 = B\omega_0$$

D'où l'expression de la solution : $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$

Bien comprendre

La solution générale de cette équation différentielle peut aussi s'écrire $A \cos(\omega t + \phi)$. Si cette forme permet de mettre en évidence la phase à l'origine, elle est néanmoins beaucoup moins commode pour déterminer les conditions initiales (*voir exercice n° 5*).

→ Analyse et conclusion

Le mouvement est donc circulaire (hypothèse de départ, le fil reste tendu) et sinusoïdal, car la variable de description varie sinusoïdalement. La période des oscillations ne dépend que de la longueur du fil, et pas de la masse du système. Elle ne dépend pas non plus de l'amplitude du mouvement (toujours dans le cadre de notre approximation), c'est pourquoi on parle d'**isochronisme des petites oscillations**.

- 4 Le diagramme des phases se construit en plaçant en abscisse la variable décrivant le mouvement (ici θ) et en ordonnée, sa dérivée, ici $\dot{\theta}$:

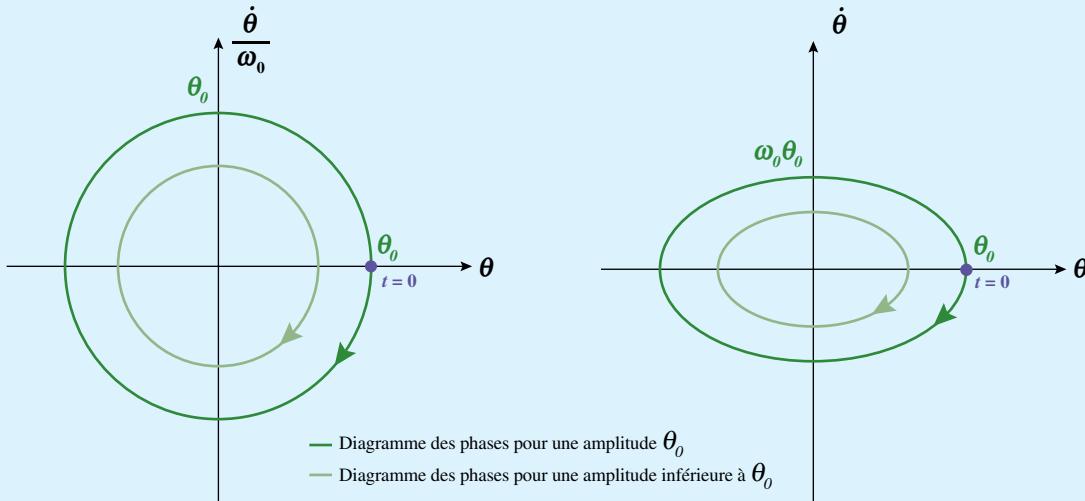
$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{d'où} \quad \dot{\theta} = -\theta_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad (3)$$

$$\text{Soit :} \quad \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = -\theta_0 \sin(\omega_0 t) \quad (4)$$

On élimine le temps en élévant les deux équations au carré et en les additionnant, (3)² + (4)² :

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 + \dot{\theta}^2 = \theta_0^2$$

Selon que l'on normalise la vitesse angulaire (choisir $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ comme ordonnée) ou non, on obtient un cercle ou une ellipse comme diagramme des phases pour des petites oscillations :



Bien comprendre

La normalisation permet d'obtenir des grandeurs de mêmes dimensions pour l'ordonnée et l'abscisse. Dans le premier cas en notant x et y les coordonnées, on identifie l'équation cartésienne d'un cercle de centre O et de rayon θ_0 , dans le second cas, une ellipse dont les axes sont ceux du repère :

Diagramme normalisé : $y^2 + x^2 = \theta_0^2$ avec $x = \theta$ et $y = \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$

Diagramme standard : $\left(\frac{y}{\omega_0 \theta_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{\theta_0}\right)^2 = 1$ avec $x = \theta$ et $y = \dot{\theta}$

Le point indique le départ du système et la flèche le sens de parcours du diagramme, qui correspond bien à une diminution initiale de l'angle avec une vitesse négative (retour vers la verticale).

2 Tir dans le champ de pesanteur (cours)

→ énoncé p. 242

1 ➔ Cadre de travail

Le **système** est le projectile M étudié dans le **référentiel** terrestre \mathcal{R} supposé galiléen.

On utilisera la **base** cartésienne.

On privilégie le plan noté (Oxy) contenant le point de départ et défini par les vecteurs particuliers \vec{v}_0 et \vec{g} , (Oy) étant un axe vertical orienté vers le haut.

Hypothèses simplificatrices :

- Les dimensions du système permettent de l'assimiler à un point matériel⁶.
- On néglige les frottements.

6. Cette précision suppose en particulier que l'on ne tient pas compte de mouvements de rotation comme celui d'une balle de tennis liftée ou coupée par exemple.

→ Outils

Cinématique :

$$\overline{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

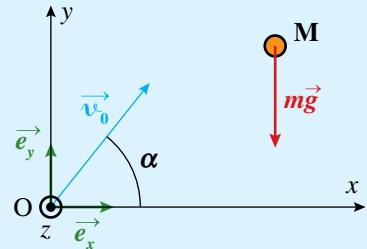
$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

Bilan des forces :

$$m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$$

Conditions initiales : Le point est en O à la vitesse \vec{v}_0 .



→ Point de départ

On applique le TRC au système M de masse constante dans le référentiel galiléen \mathcal{R} :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{g} \quad (1)$$

→ Moulinette à calcul

Méthode 1 :

L'équation (1) s'écrit :

$$\vec{a} = \vec{g} \quad (\text{E}_1)$$

Soit par intégration :

$$\vec{v} = \vec{g}t + \vec{C}_1$$

Or à $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$, d'où :

$$\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0 \quad (\text{E}_2)$$

Par intégration à nouveau :

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}.t^2 + \vec{v}_0.t + \vec{C}_2$$

Or à $t = 0$, M est en O soit $\overline{OM} = \vec{0}$ d'où :

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}_0.t^2 + \vec{v}_0.t \quad (\text{E}_3)$$

Remarque : avec un point de départ M_0 différent de l'origine on aurait : $\overline{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}.t^2 + \vec{v}_0.t + \overline{OM}_0$

On obtient les coordonnées des vecteurs vitesse et position en projetant (E₂) et (E₃) :

$$\vec{v} \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

et

$$\overline{OM} \begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t \\ z = 0 \end{cases}$$

Méthode 2 :

Par projection de (E₁) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Soit, par intégration :

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C'_1 \\ \dot{z} = C''_1 \end{cases}$$

À $t = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha = C_1 \\ \dot{y} = v_0 \sin \alpha = C'_1 \\ \dot{z} = 0 = C''_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Par intégration à nouveau

$$\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha)t + C_2 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + C'_2 \\ z = C''_2 \end{cases} \quad \text{à } t = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 = C_2 \\ y = 0 = C'_2 \\ z = 0 = C''_2 \end{cases}$$

Remarque : Si le point de départ n'est pas l'origine mais un point $M_0 (x_0, y_0, 0)$, on aura $C_2 = x_0$ et $C'_2 = y_0$

Bien comprendre

Dans la méthode 1 on intègre, puis on projette, tandis que dans la méthode 2 on projette, puis on intègre. Les deux méthodes sont également valables (et évidemment équivalentes), la première étant plus élégante. Notons que toutes les équations différentielles rencontrées dans les calculs précédents sont du même type. Elles s'intègrent donc toutes identiquement très simplement, qu'elles soient algébriques ou vectorielles. On notera qu'il apparaît une constante d'intégration à chaque étape, que l'on détermine par une condition initiale. On veillera simplement à ce que les constantes d'intégration et les conditions initiales soient vectorielles si l'on utilise la première méthode, algébriques si l'on utilise la seconde.

Les coordonnées du vecteur position constituent les équations horaires (expressions de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$).

On obtient l'équation de la trajectoire, en éliminant le temps entre les équations horaires :

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha)x$$

Remarque : Si le point de départ n'est pas O, on remplacera x par $x - x_0$ et y par $y - y_0$ dans l'équation ci-dessus pour obtenir l'équation cartésienne.

► Analyse et conclusion

Le mouvement est donc plan, dans le plan formé par les directions de la pesanteur et de la vitesse initiale contenant le point de départ. Il est de nature parabolique. Si l'on s'intéresse aux composantes du mouvement (projections du mouvement sur chaque axe) on voit que le mouvement sur (Ox) est uniforme, et uniformément varié sur (Oy) (retardé pendant la montée, accéléré pendant la descente).

Bien comprendre

- Notons qu'il n'est pas nécessaire de préciser *a priori* que le mouvement est plan, ce résultat découle des équations. On aura cependant intérêt à choisir les axes de façon à privilégier le plan que l'on prévoit pour la trajectoire, ici (Oxy).
- Les résultats restent valables si le tir se fait vers le bas ou horizontalement (largage d'une bombe par exemple) en prenant α négatif ou nul.

2 La portée est le point atteint par le projectile lorsqu'il retombe sur le sol. Ici le sol est matérialisé par l'axe (Ox). Le point P a donc pour coordonnées P ($x_p, 0$). Soit en remplaçant dans l'équation cartésienne :

$$0 = -\frac{gx_p^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha)x_p$$

$$x_p \left[-\frac{gx_p}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \right] = 0$$

L'équation précédente a deux solutions, l'une $x = 0$ correspond au point de lancement, la seconde est celle recherchée :

$$x_p = \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{g} \text{ soit : } x_p = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

La **flèche** est le point F le plus élevé atteint par le tir, c'est le sommet de la parabole. On peut déterminer les coordonnées de ce point par diverses méthodes, car il a de nombreuses propriétés :

En F : $\frac{dy}{dx} = 0$ (la courbe passe par un maximum)

ou $\frac{dy}{dt} = 0$ (y passe par un maximum)

ou $v_y = 0$ (vitesse selon (Oy) s'annule)

Avec la première, on a directement l'abscisse de la flèche, avec les deux suivantes (équivalentes), on détermine d'abord l'instant de passage, puis les coordonnées.

En dérivant l'équation cartésienne de la trajectoire par rapport à x :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha)$$

Soit : $-\frac{gx_F}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) = 0$

D'où : $x_F = \frac{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{g}$ enfin : $x_F = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{2g} = \frac{x_p}{2}$

Où l'on retrouve une propriété classique de la parabole. On en déduit :

$$y_F = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{g} \right)^2 + \tan \alpha \frac{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{g}$$

$$y_F = -\frac{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha}{g} \quad \text{soit : } y_F = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

On constate sans surprise que, pour un angle donné, les coordonnées de la flèche et de la portée sont d'autant plus grandes que la vitesse initiale est grande. L'influence de l'angle est plus subtile (voir question suivante), on peut déjà noter que la portée maximale est atteinte pour un tir à 45° (valeur maximale de $\sin 2\alpha$).

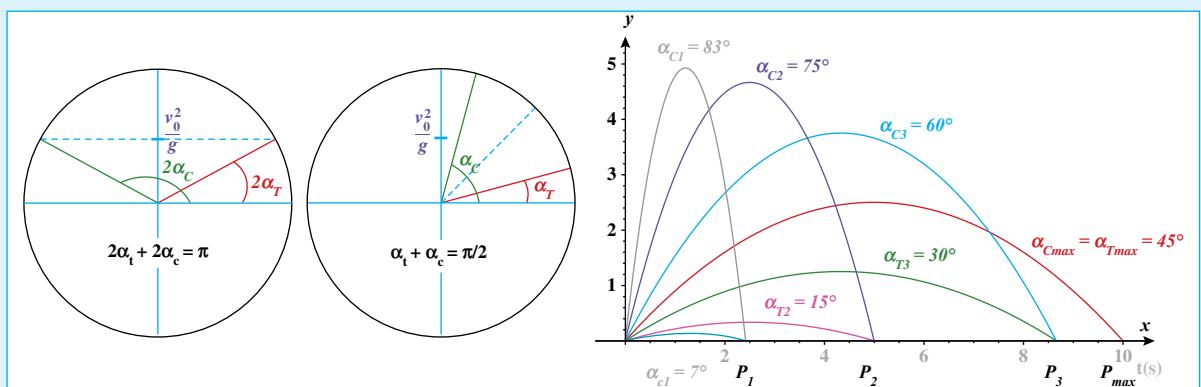
- 3 On retourne le problème en se demandant comment atteindre une portée x_p donnée pour une vitesse initiale donnée. On obtient alors l'angle approprié par :

$$\sin 2\alpha = \frac{gx_p}{v_0^2} \quad (\text{A})$$

Tout d'abord, la valeur absolue d'un sinus étant inférieure à 1, si le point est trop loin, on ne pourra pas l'atteindre. Il faut : $-1 \leq \frac{gx_p}{v_0^2} \leq 1$

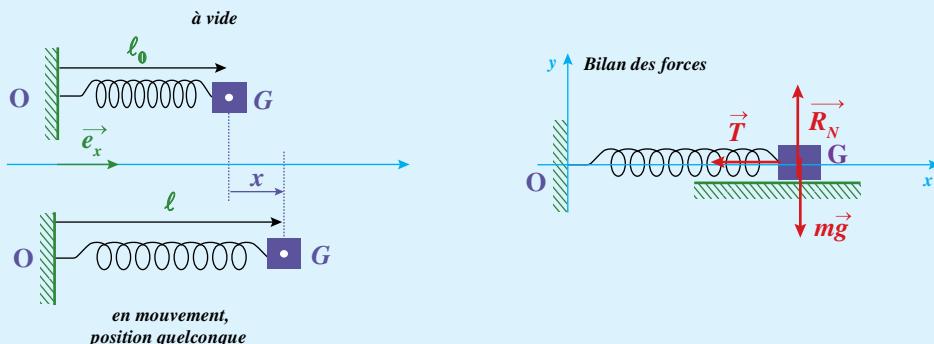
Seuls les points qui vérifient l'inégalité ci-dessous peuvent être atteints : $-\frac{v_0^2}{g} \leq x_p \leq \frac{v_0^2}{g}$

En supposant cette condition vérifiée, l'équation possède deux solutions α pour une valeur donnée de x_p . On trouve donc **deux valeurs possibles de l'angle**, ($\alpha_{T1} < \alpha_C$) symétriques par rapport à 45° . Cela signifie qu'on peut atteindre le point voulu soit par un tir d'angle inférieur à 45° (tir tendu), soit par un tir d'angle élevé (tir en cloche). Ce résultat est bien connu des canonniers et des joueurs de tennis !



On peut aussi remarquer que si on écrit l'équation (A) sous la forme : $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{gx_p}{2v_0^2}$, alors si α est la solution, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ l'est aussi.

3 Pendule élastique horizontal



► Cadre de travail

Étude dans le référentiel terrestre \mathcal{R} , considéré galiléen. On utilise la base cartésienne.

Système S : le solide M accroché au ressort.

Hypothèses simplificatrices :

- On néglige les frottements.
- Le système est en translation rectiligne donc assimilable à un point matériel.

► Outils

Cinématique :

$$\overrightarrow{OM} = \ell \vec{e}_x$$

$$\vec{v} = \dot{\ell} \vec{e}_x$$

$$\vec{a} = \ddot{\ell} \vec{e}_x$$

Bilan des forces :

$$m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$$

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$$

$$\vec{R}_N = R_N \vec{e}_y$$

Conditions initiales : non précisées

① ► Point de départ

On applique le TRC au système S de masse constante dans le référentiel galiléen \mathcal{R} :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{R}_N$$

► Moulinette à calcul

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x + \vec{R}_N$$

On pose : $\ell - \ell_0 = x$, donc $\dot{\ell} = \dot{x}$ et $\ddot{\ell} = \ddot{x}$

$$\text{d'où : } m\vec{a} = m\vec{g} - kx\vec{e}_x + \vec{R}_N$$

On projette l'équation précédente sur les deux axes :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx & (1) \\ \vec{R}_N - mg = 0 & (2) \end{cases}$$

De façon prévisible, (1) est l'équation différentielle du mouvement, (2) donne la réaction du support :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{et} \quad \vec{R}_N = mg$$

Bien comprendre

Le PFD (ici à travers le TRC) fournit toujours l'équation différentielle du mouvement. C'est pourquoi il est important de choisir une base de projection dont l'un des vecteurs est colinéaire au mouvement (ici \vec{e}_x). Les autres projections permettent de calculer les forces de contact, ici la réaction du support.

L'équation différentielle s'écrit plus classiquement :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- ❷ L'équation (3) est celle d'un oscillateur harmonique dont on connaît la solution :

$$x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où A et B (ou a et φ selon la forme choisie pour exprimer la solution) sont des constantes d'intégration que l'on détermine avec les conditions initiales (ici non précisées).

Le mouvement est donc sinusoïdal (et rectiligne). La période des oscillations vaut : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

→ Analyse et conclusion

Ce dispositif reste un modèle. En effet, on peut ici se demander comment le système reste bien en ligne, car on imagine facilement que lors de la compression du ressort, ce dernier se torde. Le mouvement devient alors assez aléatoire et en tout cas non rectiligne. Pour retrouver le comportement ci-dessus, on peut imaginer un système sur un rail à soufflerie (pour limiter les frottements au maximum) qui maintient le système sur une droite. Même avec ce dispositif il est préférable de placer un ressort de chaque côté du système. On montre que cet ensemble est équivalent à un seul ressort dont la constante de raideur est la somme de celles des deux ressorts. Par ailleurs, même avec une soufflerie, le système réel finira par s'amortir en oscillant avec une amplitude décroissante, dans un mouvement pseudo-périodique (voir exercice n° 5).

4 Du glaçon à l'iceberg

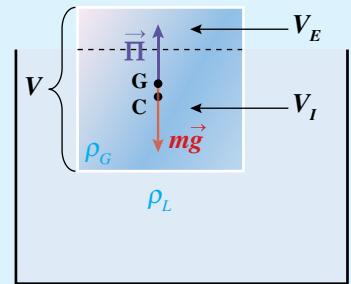
→ énoncé p. 243

- ❶ Soit m la masse du glaçon et V son volume, avec $V = V_E + V_I$ où V_E et V_I sont respectivement le volume émergé et le volume immergé. A l'équilibre, le glaçon est soumis à son poids et à la poussée d'Archimède (= poids du volume d'eau déplacé, soit V_I) qui se compensent, soit en négligeant la masse d'air déplacée par le glaçon :

$$\Pi = \rho_L V_I g = mg = \rho_G V g \quad \text{d'où :} \quad \rho_L V_I = \rho_G (V_I + V_E)$$

Lorsque le glaçon fond, toute la masse m devient liquide et occupe le volume V_L tel que :

$$V_L = \frac{m}{\rho_L} = \frac{\rho_G (V_E + V_I)}{\rho_L} = \frac{\rho_G V_I}{\rho_L} = V_I$$



Glaçon dans un verre

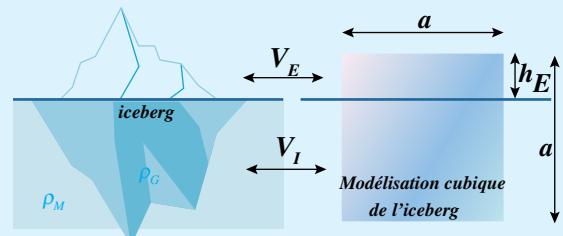
Le volume d'eau liquide formé par le glaçon est égal au volume précédemment immergé !! **Le niveau de l'eau ne changera pas lors de la fonte du glaçon** (on ne tient pas compte de l'évaporation en cas de forte chaleur, ni de la quantité d'eau bue par le lecteur...).

- ❷ Par le même raisonnement qu'au ❶ et avec les mêmes notations, la masse m' de fluide déplacé par l'iceberg est égale à sa propre masse m soit :

$$m = \rho_G V = m' = \rho_M V_I$$

Avec le modèle de forme cubique de l'iceberg :

$$\rho_G a^3 = \rho_M a^2 (a - h_E)$$



Soit : $h_E = a \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho_M} \right)$ et : $\alpha_I = \frac{a^2(a-h_E)}{a^3} = \frac{\rho_G}{\rho_M} = 90\%$ 10 % seulement d'un iceberg est visible.

5 Pendule élastique vertical

→ énoncé p. 243

Bien comprendre

On rappelle que la force exercée par un ressort est **proportionnelle à son allongement**, c'est-à-dire à la différence entre sa longueur et sa longueur à vide. Un oscillateur libre oscille toujours par rapport à sa position d'équilibre, il convient de la déterminer préalablement, mais il n'est pas nécessaire d'expliciter sa valeur, la condition d'équilibre suffit, elle permettra toujours de simplifier l'équation différentielle et met en évidence **une variable donnant la position par rapport à l'équilibre**. Pour le même oscillateur horizontal, la position d'équilibre coïncide avec la position à vide du ressort (*voir exercice n° 3*).

1 Avertissement : La mise en équation de la question 1 est identique à celle de la question 3 dans laquelle on annulerait le coefficient de frottement. On regroupe donc ici la résolution de ces deux questions. On notera que la condition d'équilibre est indépendante de la présence ou de l'absence de frottements.

► Cadre de travail

Étude dans le **référentiel** terrestre \mathcal{R} , considéré galiléen. **Système** : le solide M accroché au ressort.

Hypothèses simplificatrices :

- On néglige les frottements dans la question 1. On considère des frottements fluides dans la question 3.
- Le système est en translation rectiligne donc assimilable à un point matériel. La base cartésienne est utilisée.

► Outils

Cinématique :

$$\overrightarrow{OM} = \ell \vec{e}_x$$

$$\vec{v} = \dot{\ell} \vec{e}_x$$

$$\vec{a} = \ddot{\ell} \vec{e}_x$$

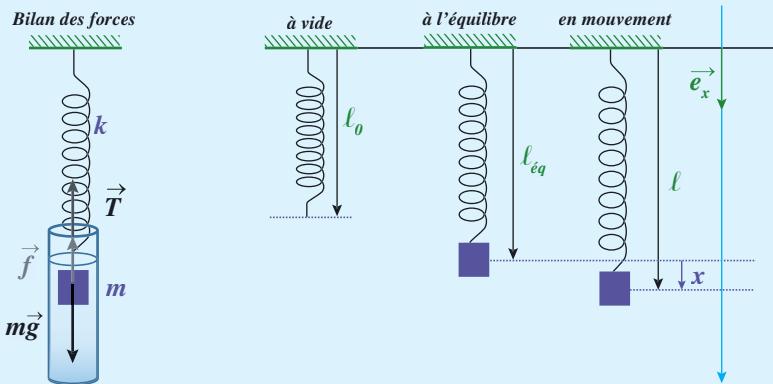
Bilan des forces :

$$m\vec{g} = mge_x$$

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x$$

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{\ell} \vec{e}_x$$

Le fluide exerce une force opposée à la vitesse (donc sur le schéma le solide descend). Le frottement est de type linéaire de coefficient α .



► Point de départ

On applique le **TRC** au système S de masse constante dans le référentiel galiléen \mathcal{R} :

$$m\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{f}$$

À l'équilibre : les frottements et l'accélération sont nuls.

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{0} \quad \text{soit :} \quad m\vec{g} - k(\ell_{eq} - \ell_0) \vec{e}_x = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{condition d'équilibre}$$

En mouvement :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{f} \quad \text{soit :} \quad m\vec{a} = m\vec{g} - k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x - a\vec{v}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k(\ell - \ell_{equ} + \ell_{equ} - \ell_0) \vec{e}_x - a\vec{v}$$

$$m\vec{a} = -k(\ell - \ell_{equ}) \vec{e}_x - a\vec{v} \quad (\text{où l'on a utilisé la condition d'équilibre})$$

On pose : $\ell - \ell_{\text{équ}} = x$, donc $\dot{\ell} = \dot{x}$ et $\ddot{\ell} = \ddot{x}$ et on projette l'équation précédente : $m\ddot{x} + a\dot{x} + kx = 0$

► Analyse et conclusion

En l'absence de frottements (question ①), l'équation différentielle est : $m\ddot{x} + kx = 0$

Soit exactement la même équation que pour le système horizontal (voir exercice n° 2), dont la solution est :

$$x = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{Et donc :} \quad \dot{x} = -A\omega_0 \cos(\omega_0 t) + B\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

Le mouvement est donc sinusoïdal de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Bien comprendre

Il est toujours aisément de faire apparaître la condition d'équilibre simplificatrice en introduisant artificiellement la longueur à l'équilibre sous la forme $-\ell_{\text{éq}} + \ell_{\text{éq}}$ dans l'équation différentielle. La variable pertinente apparaît alors naturellement. Par ailleurs, dans la solution, la forme choisie ici est toujours plus commode pour déterminer les constantes d'intégration.

② Détermination de A et B selon les conditions initiales :

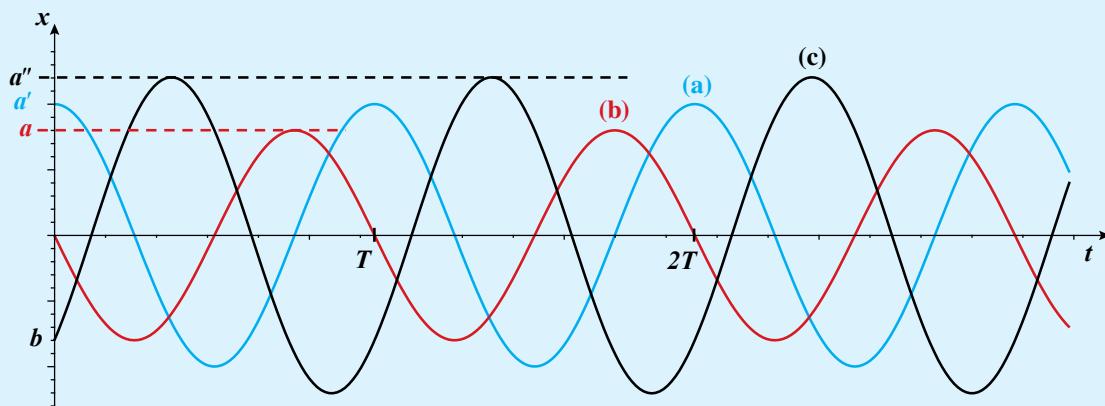
- a) $a = A$ et $0 = B\omega_0$ solution : $x = a \cos(\omega_0 t)$
- b) $0 = A$ et $-v_1 = B\omega_0$ solution : $x = -\frac{v_1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) = a' \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$ et $a' = \frac{v_1}{\omega_0}$
- c) $-b = A$ et $v_2 = B\omega_0$ solution : $x = -b \cos(\omega_0 t) + \frac{v_2}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) = a'' \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Si l'on veut tracer la courbe, il est commode de disposer de l'amplitude. Dans le dernier cas, en développant le dernier cosinus, il vient :

$$a'' \cos \varphi = -b \quad \text{et} \quad a'' \sin \varphi = \frac{v_2}{\omega_0}$$

Soit en éllevant au carré et en additionnant les deux expressions, l'amplitude a'' du mouvement :

$$a'' = \sqrt{\left(\frac{v_2}{\omega_0}\right)^2 + b^2}$$



- ③ Si l'on tient compte des frottements on retrouve l'équation différentielle classique de l'oscillateur libre amorti (circuit RLC en électricité), qui a trois types de solution selon l'importance de l'amortissement, c'est-à-dire ici selon l'importance des frottements (voir outils mathématiques p. 127).

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \quad \text{ou :} \quad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Résolution : Équation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ Discriminant réduit : $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$

Régime	Apériodique	Pseudo-périodique	Critique
Amortissement	Fort $\rightarrow \lambda > \omega_0$	Faible $\rightarrow \lambda < \omega_0$	Critique $\rightarrow \lambda = \omega_0$
Δ'	Δ' positif on note $\omega_p = \sqrt{\Delta'}$	Δ' négatif on note $\omega_p = \sqrt{-\Delta'}$	0
Solutions de l'équation caractéristique	$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\Delta'} = -\lambda \pm \omega_p$	$r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{-\Delta'} = -\lambda \pm i\omega_p$	$r_{1,2} = -\lambda$
Solution $x(t)$ (expressions possibles)	$e^{-\lambda t}(A \text{ch}(\omega_p t) + B \text{sh}(\omega_p t))$ $e^{-\lambda t}(A' e^{i\omega_p t} + B' e^{-i\omega_p t})$	$e^{-\lambda t}(A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t))$ $e^{-\lambda t}(A' e^{i\omega_p t} + B' e^{-i\omega_p t})$	$e^{-\lambda t}(At + B)$
Allure de $x(t)$			

Remarque : Le cas réel de ce pendule dans l'air correspond à de faibles frottements fluides, donc à des oscillations pseudo-périodiques, ce qu'on observe facilement.

6 Tir avec frottement fluide

→ énoncé p. 243

- ① On reprend ici exactement la même position du problème et le même paramétrage que dans l'exercice n° 2, en ajoutant simplement une force :

$$\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{x} \vec{e}_x - \lambda \dot{y} \vec{e}_y - \lambda \dot{z} \vec{e}_z$$

Le théorème de la résultante cinétique (TRC) appliqué au point matériel de masse constante dans le référentiel terrestre considéré galiléen s'écrit :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f} \quad \text{soit :} \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \lambda \vec{v} \quad \text{puis :} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\lambda}{m} \vec{v} = \vec{g}$$

où l'on introduit un paramètre homogène à un temps $\tau = \frac{m}{\lambda}$ et finalement : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = \vec{g}$ (ED)

L'équation (ED) précédente est une équation différentielle du premier ordre, linéaire, à coefficients constants et second membre non nul... et vectorielle. La fonction inconnue à déterminer est $\vec{v}(t)$.

Bien comprendre

On peut aussi exprimer les équations différentielles algébriques par projection de (ED) sur la base cartésienne : $\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} = 0$; $\ddot{y} + \frac{\dot{y}}{\tau} = -g$; $\ddot{z} = 0$. Pour résoudre, on pourra intégrer ces 3 équations différentielles et déterminer $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ ou plus élégamment (ce qui est fait ensuite) directement (ED).

- ② La solution de (ED) s'obtient comme avec une équation algébrique (voir outils mathématiques en début de chapitre), en prenant garde aux constantes d'intégration qui doivent être vectorielles :

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{homogène}} + \vec{v}_{\text{sol. part.}}$$

Où $\vec{v}_{homogène}$ est la solution homogène, c'est-à-dire de l'équation différentielle sans second membre et $\vec{v}_{sol. part.}$ la solution particulière de l'équation complète. On cherche la solution particulière de la même forme que le second membre, donc constante (vectorielle). Par analogie avec l'équation habituelle algébrique, on a donc :

$$\vec{v}_{homogène} = \vec{A}e^{-t/\tau} \quad \text{où } \vec{A} \text{ est une constante d'intégration, et } \vec{v}_{sol. part.} = \tau \vec{g}$$

Finalement la solution générale de l'équation (ED) est : $\vec{v} = \vec{v}_{homogène} + \vec{v}_{sol. part.} = \vec{A}e^{-t/\tau} + \tau \vec{g}$

À $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ d'où : $\vec{v}_0 = \vec{A} + \tau \vec{g}$ soit : $\vec{A} = \vec{v}_0 - \tau \vec{g}$ et finalement :

$$\vec{v} = (\vec{v}_0 - \tau \vec{g})e^{-t/\tau} + \tau \vec{g} \quad (1)$$

On obtient le vecteur position par intégration directe de l'expression précédente :

$$\vec{OM} = -\tau(\vec{v}_0 - \tau \vec{g})e^{-t/\tau} + \tau \vec{g}t + \vec{B} \quad \text{où } \vec{B} \text{ est une constante d'intégration.}$$

À $t = 0$, $\vec{OM} = \vec{0}$ d'où : $\vec{0} = -\tau(\vec{v}_0 - \tau \vec{g}) + \vec{B}$ soit : $\vec{B} = \tau(\vec{v}_0 - \tau \vec{g})$ et finalement :

$$\vec{OM} = \tau(\vec{v}_0 - \tau \vec{g})(1 - e^{-t/\tau}) + \tau \vec{g}t \quad (2)$$

On projette maintenant les équations (1) et (2) dans la base cartésienne :

$$(1) \Leftrightarrow \vec{v} \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos(\alpha)e^{-t/\tau} \\ \dot{y} = (v_0 \sin \alpha + \tau g)e^{-t/\tau} - \tau g \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \quad (2) \Leftrightarrow \vec{OM} \begin{cases} x = \tau v_0 \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau}) \\ y = \tau (v_0 \sin \alpha + \tau g)(1 - e^{-t/\tau}) - \tau gt \\ z = 0 \end{cases}$$

Le dernier système constitue les équations horaires du mouvement. On constate sans surprise que le mouvement est dans le plan (Oxy), c'est-à-dire le plan formé par les vecteurs \vec{v}_0 et \vec{g} .

Bien comprendre

Le lecteur est invité à vérifier que l'intégration des équations algébriques conduit évidemment au même résultat. L'une ou l'autre méthode est valable, la méthode vectorielle est plus rapide, plus élégante mais demande une bonne maîtrise des équations différentielles, la méthode algébrique est plus besogneuse et lente, mais plus facile. Il importe d'employer celle dans laquelle on se sent à l'aise avant tout, quitte à commencer par l'une pour finalement utiliser l'autre lorsqu'on a acquis de l'aisance.

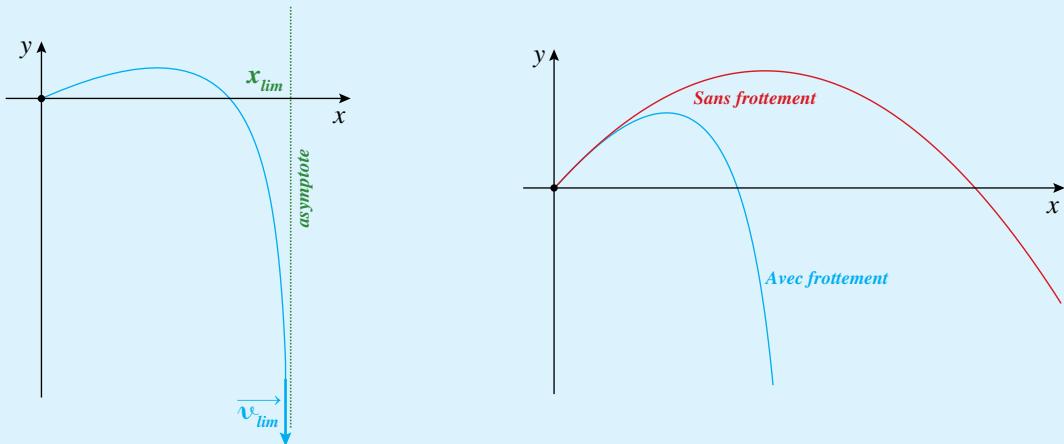
- 3 L'équation cartésienne de la trajectoire n'a pas une forme classique évidente, son équation, compliquée, n'est guère intéressante. Il est plus commode d'étudier l'évolution de chaque coordonnée en fonction du temps grâce aux équations horaires. Les résultats sont rassemblés dans le tableau.

Coordonnée	$t = 0$	valeurs	$t \rightarrow \infty$
$\dot{x} = v_0 \cos(\alpha)e^{-t/\tau}$	$v_0 \cos \alpha$	\searrow	0
$\dot{y} = (v_0 \sin \alpha + \tau g)e^{-t/\tau} - \tau g$	$v_0 \sin \alpha$	\searrow	$v_{lim} = -\tau g$
$x = \tau v_0 \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau})$	0	\nearrow	$x_{max} = \tau v_0 \cos \alpha$
$y = \tau (v_0 \sin \alpha + \tau g)(1 - e^{-t/\tau}) - \tau gt$	0	$\nearrow \searrow$	$-\infty$

- ➡ x tend vers une limite finie, et y vers une limite infinie, la trajectoire présente donc une asymptote verticale en $x = x_{max}$.
- ➡ La vitesse suivant (Ox) initialement positive décroît jusqu'à s'annuler.
- ➡ La vitesse initialement positive suivant (Oy) décroît jusqu'à une valeur limite v_{lim} négative, elle passe donc par une valeur nulle (au sommet de la trajectoire).
- ➡ La vitesse tend vers une vitesse limite verticale vers le bas : suivant (Ox), la limite est nulle et suivant (Oy) la limite est finie et négative.

On obtient les courbes en bleu ci-dessous où l'on met en évidence les propriétés de la courbe (asymptotes, vitesse limite), puis où l'on effectue une comparaison entre les trajectoires, avec ou sans frottement, tous les autres paramètres (masse, vitesse initiale, angle de tir) étant identiques par ailleurs. L'allure de la trajectoire

est proche de celle d'un volant de badminton, pour lequel le frottement de l'air n'est pas du tout négligeable devant le poids. Le sol limite évidemment la trajectoire.



7 Parabole de sûreté

→ énoncé p. 243

- 1 Pour une valeur de v_0 donnée, un point de coordonnées (X, Y) est atteint si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$Y = -\frac{gX^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha)X$$

Soit en plaçant $\tan \alpha$ comme inconnue d'une équation du second degré :

$$-\beta X^2 \tan^2 \alpha + X \tan \alpha - (\beta X^2 + Y) = 0 \quad \text{avec : } \beta = \frac{g}{2v_0^2} \text{ et } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

- 2 Il existe une solution de tir si cette équation a une solution réelle ($\tan \alpha$ pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle), soit si (X, Y) vérifie :

$$\Delta = X^2 - 4\beta X^2(Y + \beta X^2) \geq 0$$

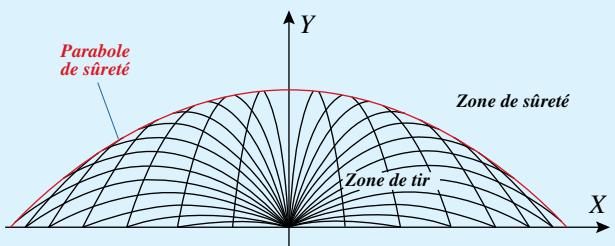
- 3 L'espace est donc séparé en deux zones, selon que Δ est positif (cible possible) ou négatif (objectif impossible à atteindre). La limite entre les deux est la courbe d'équation :

$$X^2[1 - 4\beta(Y + \beta X^2)] = 0$$

Soit la courbe d'équation :

$$Y = \frac{1}{4\beta} - \beta X^2 \quad (\text{P})$$

(P) est l'équation d'une parabole, dite de sûreté, qui s'étend d'autant plus loin du point de tir que v_0 est grand.



À méditer

Il n'est pas moins difficile de poser un problème que de le résoudre.

MAX PLANCK (1858-1947)

Énergie en mécanique

La notion d'énergie est essentielle et omniprésente en physique, et la conservation de l'énergie en est une des lois les plus fondamentales. De très nombreuses formes d'énergie sont utilisées pour décrire le fonctionnement des systèmes. On se limite dans ce chapitre à l'étude du point matériel. Des grandeurs équivalentes seront définies en mécanique du solide. Les théorèmes énergétiques sont des alternatives souvent très commodes aux lois de la dynamique, et l'étude simplement qualitative des comportements énergétiques permet souvent d'apporter des informations sur la nature des trajectoires des systèmes. Ces notions seront élargies dans le cours de thermodynamique. Par ailleurs, les enjeux énergétiques sont cruciaux pour le devenir de l'humanité, et les choix dans ce domaine devront s'appuyer sur la connaissance des lois physiques.

Outils mathématiques

- **Calcul vectoriel** : projection d'un vecteur (*voir point méthode p. 237*)

$$\text{produit scalaire de deux vecteurs : } \vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\widehat{\vec{A}, \vec{B}}) = A_i B_i + A_j B_j + A_k B_k$$

où i, j, k correspondent soit à x, y, z , soit à ρ, θ, z , soit à r, θ, φ selon le système de coordonnées¹.

- **Gradient d'une fonction** : La définition est implicite, car elle ne donne pas directement une expression du gradient. Elle est valable quel que soit le système de coordonnées choisi. L'expression en coordonnées cartésiennes ne constitue pas une définition du gradient.

↳ définition pour un point M de l'espace : $dU = \overline{\text{grad}} U(M).d\overline{OM}$

↳ expression en coordonnées cartésiennes : $\overline{\text{grad}} U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$

I | Grandeurs énergétiques

1. Travail – Puissance

Définition

- Le **travail élémentaire** d'une force \vec{f} lors d'un déplacement élémentaire $d\overline{OM}$ de son point d'application M vaut :

$$\delta W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot d\overline{OM}$$

- Le **travail** de la force le long d'un déplacement de A à B de son point d'application vaut donc :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_A^B \delta W(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\overline{OM}$$

- Le travail (ou transfert mécanique) est une grandeur énergétique, son unité est le Joule, symbole J.

1. Il est évident que \vec{A} et \vec{B} doivent être exprimés avec les mêmes vecteurs de base (dans les bases cylindriques et sphériques, ils sont variables), ce qui est le cas dans tous les exercices ici.

- Le travail est une quantité d'énergie susceptible d'être échangée par le système avec l'extérieur du fait du déplacement des forces qui lui sont appliquées. Ce travail peut être moteur (travail positif), le système gagne de l'énergie, ou résistant (travail négatif), le système perd de l'énergie.
- Le travail d'une force dépend généralement du chemin suivi et pas seulement de la position initiale et de la position finale.
- Le travail d'une force dépend du référentiel d'étude.
- Le travail d'une force constante a été défini en terminale et il ne faudrait pas considérer ce cas particulier comme une définition générale. On déduit en effet facilement de la définition ci-dessus, que si la force est constante, alors : $W_{AB}(\vec{f}_{constante}) = \vec{f}_{constante} \cdot \overline{AB}$
- Le travail n'est pas une fonction de l'état du système, c'est une quantité échangée lors d'un déplacement. Le travail élémentaire ne se note donc pas avec un d (comme une différentielle), mais avec un δ .

Définition

- La puissance d'une force \vec{f} appliquée en un point M animé d'une vitesse \vec{v} vaut :

$$\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

- Le travail et la puissance d'une force sont liés :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_A^B \mathcal{P}(\vec{f}) dt \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}(\vec{f}) = \frac{\delta W}{dt}$$

- La puissance est homogène à une énergie par unité de temps, son unité est le Watt, symbole W.

- La puissance d'une force dépend du référentiel d'étude.

→ Cas d'une force conservative

Définition

- Une force est dite **conservative** si son travail entre deux points quelconques ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement de la position initiale et de la position finale.
- Une force constante (en tout point et quel que soit le déplacement) est nécessairement conservative, mais une force conservative n'est pas nécessairement constante.
- Une force constante uniquement sur un trajet (comme par exemple la force de frottement de contact solide) n'est pas conservative.
- Une force non conservative est dite **dissipative**, comme toutes les forces de frottement.
- Sont conservatives : les forces gravitationnelles, électrostatiques, élastiques (ressort), de pesanteur...

2. Différentes formes d'énergie

Définition

L'**énergie cinétique** d'un système est l'énergie qu'il possède du fait de son inertie et de son mouvement.

L'**énergie cinétique de translation** d'un système de masse m et de centre d'inertie G (et donc en particulier celle d'un point matériel) vaut : $E_C = \frac{1}{2} m v_G^2$

- L'énergie cinétique totale d'un système est la somme des énergies cinétiques dues à ses mouvements de translation et de rotation, son expression générale dépasse le cadre du programme.

- L'énergie cinétique d'un solide due à sa rotation est définie au chapitre 18.
- L'énergie cinétique n'existe qu'en présence de mouvement, elle n'est donc pas une forme d'énergie stockable.

Définition

Le travail d'une force conservative ne dépendant que de la position initiale et de la position finale, on peut définir une fonction appelée **énergie potentielle** de la force de sorte qu'entre 2 points A et B, on ait :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{\text{conservative}}) = \int_A^B \vec{f}_{\text{conservative}} \cdot d\overline{OM} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_{p,A \rightarrow B}$$

- L'énergie potentielle est l'énergie susceptible d'être libérée par le déplacement du point d'application de la force, elle est donc stockable.
- Un système peut être soumis à plusieurs forces conservatives, son énergie potentielle est alors la somme des énergies potentielles de chaque force.
- Des définitions qui précèdent, on tire l'expression suivante qui permet de calculer l'énergie potentielle d'une force conservative quelconque :

$$E_p(\vec{f}_{\text{conservative}}) = - \int \vec{f}_{\text{conservative}} \cdot d\overline{OM} + \text{constante}$$

- Inversement on peut calculer l'expression d'une force dont on connaît l'énergie potentielle par :

$$\vec{f}_{\text{conservative}} = -\overline{\text{grad}} E_p$$

- L'énergie potentielle d'une force (conservative) est exprimée uniquement à partir de différences entre deux points, son expression est donc définie à une constante près, une référence que l'observateur choisit comme il veut, généralement de façon à simplifier les calculs en obtenant une constante nulle.

Définition

L'énergie mécanique d'un système est la somme de ses énergies cinétique et potentielle :

$$E_m = E_c + E_p$$

→ Énergie potentielle de quelques forces courantes

Force	gravitationnelle	électrostatique	élastique	pesanteur
Expression de la force	$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$	$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$	$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x$	$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
Expression de l'énergie potentielle	$E_p = -\frac{GMm}{r}$	$E_p = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$	$E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$	$E_p = mgz$
Référence la plus commode (annule la constante)	$\lim_{r \rightarrow \infty} E_p = 0$	$\lim_{r \rightarrow \infty} E_p = 0$	$E_p(\ell = \ell_0) = 0$	$E_p(z = 0) = 0$

II Théorèmes énergétiques

Avertissement : Afin d'alléger les expressions, dans ce qui suit on adoptera les notations suivantes.

L'énergie potentielle totale : $E_p = \sum_i E_p(\vec{f}_i)$ (*les forces concernées sont nécessairement conservatives.*)

La somme des travaux de toutes les forces : $W(\vec{f}) = \sum_i W(\vec{f}_i)$

La somme des travaux de forces conservatives : $W(\vec{f}_C) = \sum_i W(\vec{f}_{iC})$

La somme des travaux de forces non conservatives : $W(\vec{f}_{NC}) = \sum_i W(\vec{f}_{iNC})$

Des notations équivalentes seront utilisées sur des déplacements élémentaires ou entre deux points identifiés ainsi que dans les expressions des puissances des forces.

1. Théorème de l'énergie cinétique – de la puissance cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m constante, animé d'une vitesse \vec{v} dans un référentiel galiléen, soumis à une résultante de forces \vec{f} est : $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}$

soit par dérivation : $\frac{dE_C}{dt} = \frac{1}{2}m(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \vec{v} = \mathcal{P}(\vec{f})$ (TPC)

et : $\frac{dE_C}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \frac{d\overline{OM}}{dt}$

d'où : $dE_C = \vec{f} \cdot d\overline{OM} = \delta W(\vec{f})$

et par intégration : $\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{f})$ (TEC)

Énoncés

■ **Théorème de l'énergie cinétique (TEC)** : dans un référentiel galiléen la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des travaux de toutes les forces lors du déplacement :

↳ cas d'un déplacement élémentaire : $dE_C = \delta W(\vec{f})$

↳ cas d'un déplacement macroscopique : $\Delta E_C = W(\vec{f})$

↳ soit sur un déplacement de A à B : $E_C(B) - E_C(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{f})$

■ **Théorème de la puissance cinétique (TPC)** : dans un référentiel galiléen, la dérivée de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances de toutes les forces : $\frac{dE_C}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f})$

■ La démonstration ci-dessus des théorèmes énergétiques s'appuie sur le théorème de la résultante cinétique (donc le PFD) utilisé à la deuxième ligne de la démonstration. En conséquence, les conditions d'application des théorèmes sont les mêmes, en particulier la nécessité d'un référentiel galiléen.

■ Le théorème de l'énergie cinétique est la forme intégrale du théorème de la puissance cinétique.

2. Théorème de l'énergie mécanique

Énoncé

■ **Théorème de l'énergie mécanique (TEM)** : dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel est la somme des travaux des forces non conservatives :

$$\Delta E_m = W(\vec{f}_{NC}) \quad \text{ou} \quad dE_m = \delta W(\vec{f}_{NC})$$

Soit sur un chemin AB : $E_m(B) - E_m(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{NC})$

■ Dans un référentiel galiléen, l'énergie mécanique d'un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas est constante (sa variation est nulle sur tout déplacement).

En utilisant la définition de l'énergie mécanique puis en appliquant le théorème de l'énergie cinétique et la définition de l'énergie potentielle, on démontre aisément le théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_m = \Delta E_C + \Delta E_P = W(\vec{f}) - W(\vec{f}_C) = W(\vec{f}_{NC})$$

- Tous ces théorèmes énergétiques traduisent, sous des formes diverses, la conservation de l'énergie.

POINT MÉTHODE

Résoudre un problème de mécanique à l'aide d'un théorème énergétique

- L'ensemble de la méthode de résolution décrite p. 236 reste valable si l'on utilise une loi énergétique pour la résolution d'un problème de mécanique.
- Lorsque l'énoncé demande une vitesse, il est souvent plus efficace d'utiliser un théorème énergétique.
- Les théorèmes énergétiques conduisent à des équations différentielles d'ordre 1, théoriquement plus faciles à intégrer que les équations d'ordre 2 obtenues par le PFD. En pratique, il n'est pas rare qu'on dérive les équations du premier ordre en équations du second ordre pour faciliter la résolution.
- Les théorèmes énergétiques ne font pas apparaître les forces qui ne travaillent pas, ce qui permet souvent d'obtenir l'équation différentielle qui régit le mouvement plus rapidement qu'avec le PFD. On ne pourra pas cependant se passer du PFD, lorsque ces forces sont à déterminer.

III Équilibre d'un système à un degré de liberté

1. Condition d'équilibre

Définition

Un **système** est à **l'équilibre** s'il est immobile dans le référentiel d'étude. Pour un point matériel, cela se traduit par une vitesse et une accélération nulles, donc : $\vec{f} = \vec{0}$.

Définition

Un système est à **un degré de liberté** si l'évolution d'une seule variable (en fonction du temps) suffit à décrire son mouvement.

Un solide assimilable à un point matériel fixé à un ressort (variable $x(t)$), une perle enfilée sur un anneau circulaire (variable $\theta(t)$) sont des exemples de systèmes à un seul degré de liberté.

Pour comprendre les propriétés des équilibres, on décrira le système par un mouvement rectiligne sur un axe d'abscisse x , soumis à une résultante de forces **conservative**, qui ne dépend que de x et dirigée suivant l'axe du mouvement. La résultante des forces s'écrit alors $\vec{f} = f(x)\vec{e}_x$ et la définition de l'énergie potentielle $\vec{f} = -\nabla E_P$ conduisent à : $f(x) = -\frac{dE_P}{dx} = -E'_P(x)$

En exercice, on généralisera le résultat à des cas plus complexes, en transposant ce qui suit sur une trajectoire non rectiligne, avec une variable différente et une résultante de force tangente à la trajectoire.

Avertissement : Dans tout ce qui suit, on utilise exceptionnellement et pour alléger la notation familiale en mathématique ' pour la dérivée et " pour la dérivée seconde **par rapport à x** , la variable de description du système à un degré de liberté. Par ailleurs on notera x_0 une position d'équilibre plus habituelle que x_{eq} dans les développements limités.

Résultats

- À l'équilibre, la résultante des forces est nulle : $f(x_0) = 0$
- À l'équilibre l'énergie potentielle passe par un extremum, car sa dérivée est nulle : $E'_P(x_0) = 0$

2. Stabilité de l'équilibre**Définitions**

Un **équilibre** est dit **stable** si le point matériel écarté « légèrement » de cette position y revient spontanément. Inversement, si l'écart du point le conduit à s'éloigner de la position d'équilibre, alors cette dernière est **instable**.

- Le point matériel revient à l'équilibre ou s'en écarte, du fait de la résultante des forces qu'il subit hors équilibre.
- Le point revient à l'équilibre stable généralement en oscillant autour de cette position.
- « légèrement » signifie sur des variations petites de la variable de description (ici x) au regard des grandeurs caractéristiques du système.

→ **Comportement à proximité de l'équilibre**

Pour étudier la stabilité, on effectue un développement limité au premier ordre de la valeur algébrique de la force en x_0 , la position d'équilibre, développement justifié par l'étude d'un « léger » écart par rapport à l'équilibre ($|x - x_0| \ll x_0$). On écrit alors (voir p. 265) :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0} = (x - x_0) f'(x_0) \quad \text{car } f(x_0) = 0$$

On obtient alors deux situations possibles, selon le signe de la dérivée de la force en x_0 .

1^{er} cas : Si $f'(x_0) > 0$, les forces tendent à éloigner le point de sa position d'équilibre,

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow \text{L'équilibre est INSTABLE.}$

FORCE	$\vec{f}(x < x_0)$		x_0	$\vec{f}(x > x_0)$		x
$x - x_0$	-				+	
$f'(x_0)$	+				+	
$f(x) = (x - x_0).f'(x_0)$	-				+	

2nd cas : Si $f'(x_0) < 0$, les forces tendent à ramener le point vers sa position d'équilibre,

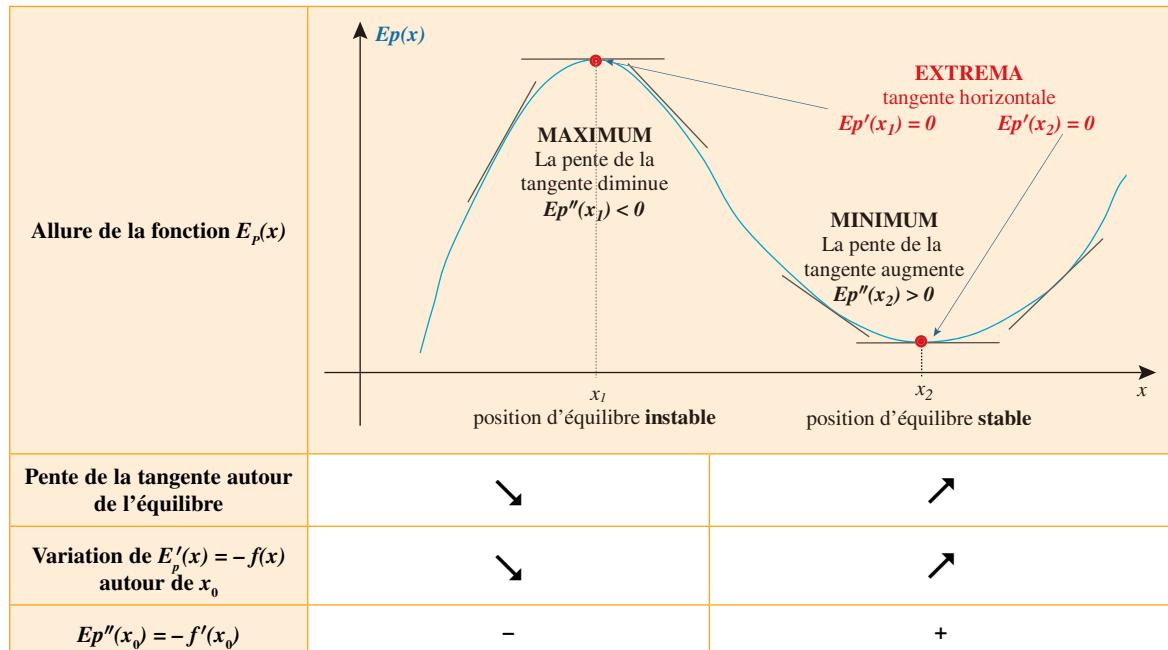
$f'(x_0) < 0 \Rightarrow \text{L'équilibre est STABLE.}$

FORCE	$\vec{f}(x < x_0)$		x_0	$\vec{f}(x > x_0)$		x
$x - x_0$	-				+	
$f'(x_0)$	-				-	
$f(x) = (x - x_0).f'(x_0)$	+				-	

Or la dérivée de la force est l'opposée de la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

$$f(x) = -E'_p(x) \Rightarrow f'(x) = -E''_p(x)$$

et le signe de la dérivée seconde d'une fonction (dérivée de la dérivée) indique le sens de variation de la dérivée de la fonction. Une dérivée seconde positive indique une dérivée croissante, donc une tangente dont la pente augmente autour du point considéré (passage par un minimum). Inversement, une dérivée seconde négative indique une dérivée décroissante, donc une tangente dont la pente diminue autour du point considéré (passage par un maximum), ce que résument le schéma et le tableau ci-dessous :



➡ En résumé

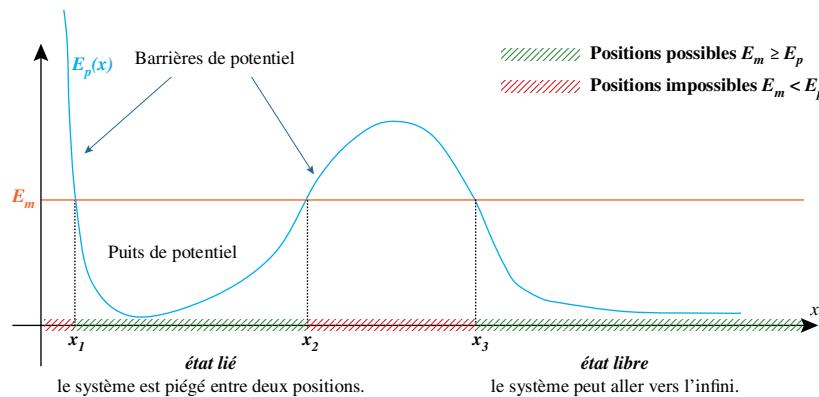
	$E_p(x_0)$	$E'_p(x_0)$	$E''_p(x_0)$	$f(x \neq x_0)$	$f(x_0)$	$f'(x_0)$
ÉQUILIBRE EN x_0	extremum	0			0	
STABLE en x_0	minimum	0	+	ramène vers x_0	0	-
INSTABLE en x_0	maximum	0	-	éloigne de x_0	0	+

3. Notion de barrière et de puits de potentiel

L'énergie cinétique d'un point matériel est nécessairement positive. L'énergie mécanique est la somme des énergies potentielle et cinétique, elle est donc nécessairement supérieure à l'énergie potentielle :

$$E_m = E_C + E_p \quad \text{et} \quad E_C \geq 0 \quad \Rightarrow \quad E_m \geq E_p$$

Un système soumis uniquement à des forces conservatives a une énergie mécanique constante. Si l'on trace sur un même graphe la courbe $E_p(x)$ et l'énergie mécanique (qui est une droite horizontale), la condition précédente impose que les seules positions acceptables du système correspondent aux cas où la droite est au-dessus de la courbe. En fonction de sa position initiale, seuls certains domaines restent accessibles à la particule :



Définitions

- **Puits de potentiel** : Si le point est initialement entre x_1 et x_2 , alors son énergie totale ne lui permet que d'évoluer entre ces deux positions. Le système est « piégé » dans un puits de potentiel, on dit qu'il est dans un **état lié**.
- **Barrière de potentiel** : Si le point est initialement entre x_1 et x_2 , il ne peut franchir les barrières de potentiel situées en ces points.
- Si le point est initialement entre x_3 et l'infini, il peut évoluer de x_3 à une position de plus en plus éloignée. Un système dans cette situation est dans un **état libre** (ou de diffusion).

N. B. : En x_3 se trouve aussi une barrière de potentiel, empêchant le système initialement au-delà de x_3 d'évoluer vers des positions inférieures.

■ Une barrière de potentiel ne peut être franchie en mécanique classique que si l'on apporte au système une énergie supplémentaire, suffisante pour que son énergie mécanique devienne supérieure au sommet de la barrière. En mécanique quantique, l'effet tunnel permet de franchir ce genre de barrière.

→ Mouvement dans un puits

Le minimum d'un puits de potentiel est une position d'équilibre stable. Si le point est légèrement écarté de cette position, on peut lui appliquer le TRC :

$$m\vec{a} = \vec{f} \quad \text{soit par projection} \quad m\ddot{x} = f(x)$$

Soit, avec le développement limité de la force vu ci-dessus, dans lequel on a vu que $f'(x_0)$ est négatif (position stable) :

$$m\ddot{x} = (x - x_0)f'(x_0)$$

$$\text{d'où : } \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{avec} \quad X = x - x_0 \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{-f'(x_0)}{m}}$$

■ Cette équation différentielle est celle de l'oscillateur harmonique, le point oscille donc sinusoïdalement autour de l'équilibre, l'amplitude des oscillations étant d'autant plus grande que l'on a éloigné le point de l'équilibre.

■ L'équation différentielle obtenue ci-dessus n'est qu'une approximation au premier ordre, en réalité des effets non linéaires sont susceptibles d'intervenir aux ordres supérieurs et les oscillations ne seront pas strictement sinusoïdales.

VERS LA COLLE**Questions de cours**

- Travail d'une force : définition (déplacement élémentaire, déplacement quelconque), signe du travail. Cas particulier d'une force constante, cas d'une force conservative. Puissance d'une force, définition.
- Différentes formes d'énergie en mécanique : définitions, expressions, propriétés.
- Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique, énoncés, démonstration.
- Théorème de l'énergie mécanique, énoncé, démonstration.
- Conditions d'équilibre d'un point matériel, conditions de stabilité de l'équilibre (un degré de liberté).
- Montrer comment la courbe d'énergie potentielle permet de déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité pour un système à un degré de liberté.
- Montrer qu'un point dans un puits de potentiel décrit des mouvements d'oscillations harmoniques en première approximation.
- État libre, état lié d'une particule : définitions, détermination à l'aide de l'énergie potentielle.

Erreurs à éviter

- Le travail n'est généralement pas le produit scalaire de la force par le déplacement (cas particulier d'une force constante), formule qui ne servira en aucun cas à définir le travail.
- Toute la mise en place d'une résolution (référentiel, système, forces...) est souvent omise sous prétexte que l'on utilise un théorème énergétique, ce qui est une erreur. La même rigueur est nécessaire.
- On ne doit pas dire « je choisis une constante nulle pour l'énergie potentielle ». On choisit une valeur de référence de l'énergie potentielle qui détermine la valeur de la constante (souvent pour qu'elle soit nulle, mais pas nécessairement, voir exercice n° 5 p. 267 par exemple).
- L'énergie potentielle est indépendante de la trajectoire pour calculer E_p , le déplacement élémentaire $d\overline{OM}$ doit être exprimé sous sa forme générale, il ne faut surtout pas se placer dans un cas particulier de mouvement ou de trajectoire.
- Le signe de l'énergie potentielle de pesanteur est lié au sens choisi pour l'axe vertical (Oz). S'il est vers le haut $Ep = mgz$ (choix ici) et $Ep = -mgz$ si l'axe est vers le bas.

Quelques « trucs » utiles

- La définition de l'énergie potentielle provient du travail de la force conservative, mais cette étape n'est plus nécessaire ensuite pour déterminer l'énergie potentielle. L'expression $E_p(\vec{f}) = - \int \vec{f} \cdot d\overline{OM} + C$ peut être utilisée directement pour calculer rapidement l'énergie potentielle d'une force. Attention à ne pas oublier la constante !
- L'étude de l'équilibre peut se faire soit à partir de l'expression de l'énergie potentielle, soit à partir de l'expression de la résultante des forces selon la direction du mouvement. Si cette dernière est accessible, inutile de passer par l'énergie potentielle, l'étude de f (équilibre) et f' (stabilité) suffit. L'énergie potentielle est déterminée en intégrant la force, puis l'équilibre en dérivant une fois, la stabilité en dérivant deux fois, donc finalement en intégrant pour dériver ensuite, ce qui est inutile. On privilégiera l'utilisation de l'énergie lorsque l'énoncé amène à la déterminer, souvent l'étude de l'équilibre à l'aide de la force est cependant plus rapide.
- Lorsqu'on écrit un développement limité en physique, on fixe toujours l'ordre auquel on se limite et on néglige tous les termes d'ordre supérieur, raison pour laquelle on n'écrit pas le « o » en fin de somme. Ainsi on écrit par exemple au premier ordre :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \quad \text{et} \quad (1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$$

Conseils

Les théorèmes énergétiques sont des alternatives aux théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique. L'exercice n° 2 met en évidence cette situation. On profitera de ces exercices pour vérifier que l'on sait présenter avec rigueur un exercice de mécanique, selon la méthode déjà mise en pratique au chapitre précédent.

1 Skieur ★

→ corrigé p. 268

Un skieur de masse $m = 75 \text{ kg}$, assimilable à un point matériel, glisse en ligne droite sur une pente rectiligne verglacée (piste de vitesse dite de kilomètre lancé), sur une dénivellation $h = 500 \text{ m}$, la pente étant de 30%. Parti sans vitesse initiale du point O, il arrive en A avec une vitesse v_A .

A.N. : on pourra prendre $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

- ① Exprimer, puis calculer v_A , dans l'hypothèse de frottements négligeables.
- ② En réalité, le skieur arrive avec une vitesse de 220 km/h, en déduire la valeur de la force de frottement exercée par la piste, dans l'hypothèse où elle est constante pendant tout le mouvement. Quelle force, sans doute importante, a-t-elle été négligée ici ?

2 Utiliser les théorèmes énergétiques ★

→ corrigé p. 269

- ① Reprendre l'énoncé de l'exercice n° 1 p. 242 et établir l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique.
- ② Reprendre l'énoncé de l'exercice n° 3 p. 242 et établir l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique, puis à l'aide du théorème de la puissance cinétique.
- ③ Reprendre l'énoncé de l'exercice n° 5 p. 243 dans le cas où le système est soumis à un frottement fluide et établir l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème de la puissance cinétique.

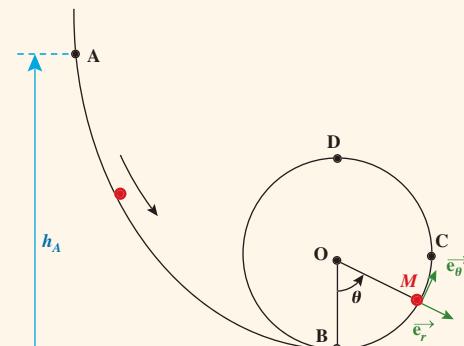
Conclusion : quel est l'intérêt des théorèmes énergétiques ? Quelle est leur limite ?

3 Looping réussi ? ★★

→ corrigé p. 270

Un objet assimilable à un point matériel glisse sans frottement le long d'une rampe pour aller ensuite dans une gouttière circulaire de rayon R . On le lâche sans vitesse initiale d'un point A situé à une hauteur h_A du niveau le plus bas de la gouttière B. Le repérage de la position du point sur la gouttière est indiqué sur le schéma.

- ① Déterminer l'expression de la vitesse de l'objet en un point M quelconque de la gouttière. On pourra se contenter d'une expression reliant la vitesse angulaire à l'angle θ .
- ② À partir de quelle valeur $h_A = h_1$ l'objet peut-il effectuer un looping réussi ?
- ③ En dessous de quelle valeur $h_A = h_2$ l'objet effectue-t-il des oscillations dans la gouttière ?
- ④ Que se passe-t-il si la valeur de h_A est comprise entre h_2 et h_1 ?



4 Pendule rigide ★★

→ corrigé p. 271

Un pendule rigide, formé d'une tige de masse négligeable et d'une masselotte de masse m , est mobile à l'aide d'une liaison parfaite (pas de frottements) autour d'un axe horizontal.

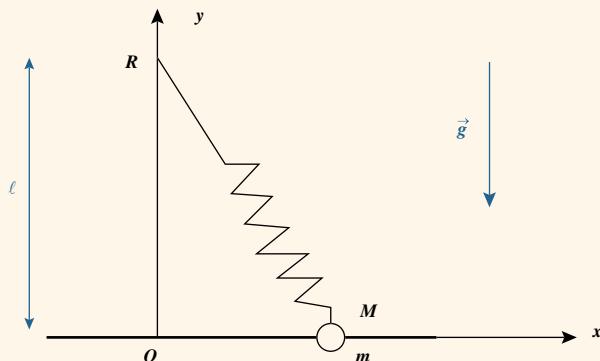
- ① À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle du mouvement de la masselotte.
- ② Le système est à un seul degré de liberté : préciser la variable pertinente et la direction du mouvement. En déduire l'expression de la composante de la force dans la direction du mouvement.
- ③ Déterminer les positions d'équilibre et étudier leur stabilité à l'aide de l'expression obtenue à la question précédente. Schématiser ces positions et la résultante des forces qui s'applique au système lorsqu'on l'écarte légèrement de l'équilibre. Ces schémas confirment-ils les résultats précédents ?
- ④ Tracer la courbe d'énergie potentielle du système et retrouver les résultats précédents.

5 Ressort assujetti à une tige (d'après CCP TSI 2000)★★★

→ corrigé p. 272

On s'intéresse au système mécanique suivant : un point matériel M de masse m est fixé à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k . La masse m peut coulisser sans frottement horizontalement sur une tige. On repère la position de M sur la tige par son abscisse x , O étant situé à la verticale du point d'attache R du ressort. La distance entre la tige et le point d'attache est $OR = \ell$.

- ① Déterminer qualitativement les positions d'équilibre du système, ainsi que leur stabilité, selon que $\ell < \ell_0$ ou $\ell > \ell_0$.
- ② Exprimer l'énergie potentielle élastique de M dans une position quelconque en fonction de x , ℓ , ℓ_0 et k . On choisira $E_p(x=0)=0$.
- ③ Déterminer par le calcul les abscisses des positions d'équilibre et la stabilité de chacune, selon que $\ell < \ell_0$ ou $\ell > \ell_0$. Comparer avec la question ①.
- ④ Tracer sur un même graphe la courbe donnant les abscisses des positions d'équilibres en fonction de ℓ . Tracer avec des couleurs différentes la courbe des positions stables et celle des positions instables.



1 Skieur

→ énoncé p. 266

1 Cadre de travail

Le **système** est le skieur dont on étudie le mouvement dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen, qu'on matérialise par un système d'axes, dont l'un suivant la ligne de plus grande pente (direction du mouvement). On utilise la base cartésienne.

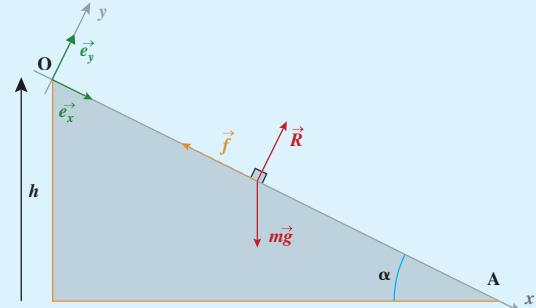
Hypothèses simplificatrices :

- On néglige d'abord les frottements, donc la réaction du sol est normale au support.
- On assimile le skieur à un point matériel².

2 Outils

Cinématique : $\overline{OM} = x\vec{e}_x \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$

Bilan des forces : $\vec{R} = R\vec{e}_y$
 $m\vec{g} = mgsin\theta\vec{e}_x - mgcos\theta\vec{e}_y$



Conditions initiales : système en O sans vitesse initiale.

3 Point de départ

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre O et A dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\Delta E_C = E_C(A) - E_C(O) = W_{OA}(m\vec{g}) + W_{OA}(\vec{R})$$

4 Moulinette à calcul

La réaction reste toujours orthogonale au déplacement, son travail est donc nul, et le poids est une force constante, d'où :

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_O^2 = m\vec{g} \cdot \overrightarrow{OA} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 = mgL \sin \alpha \quad \text{avec} \quad \sin \alpha = \frac{h}{L} = 0,30 \quad (\text{soit } \alpha = 17^\circ)$$

D'où : $\vec{v}_A = \sqrt{2gL \sin \alpha} = \sqrt{2gh} = 100 \text{ m.s}^{-1} = 360 \text{ km/h}$

On pourrait aussi utiliser le théorème de l'énergie mécanique : $E_m(A) = E_m(O)$

- 2 La présence de frottements conduit à tenir compte d'une force supplémentaire \vec{f} à déterminer. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta E_C = E_C(A) - E_C(O) = W_{OA}(m\vec{g}) + W_{OA}(\vec{R}) + W_{OA}(\vec{f})$$

Soit : $\frac{1}{2}m\vec{v}_A'^2 = mgL \sin \alpha - fL \quad \text{d'où}$

$$f = \frac{mgh - \frac{1}{2}m\vec{v}_A'^2}{L} = m \sin \alpha \left(g - \frac{\vec{v}_A'^2}{2h} \right) = 170 \text{ N}$$

5 Analyse et conclusion

Dans ce mouvement, l'énergie potentielle de pesanteur est convertie en énergie cinétique. La vitesse atteinte avec frottements est (sans surprise) inférieure à celle du mouvement sans frottement, le travail du frottement est résistant. À cette vitesse **les frottements de l'air ne sont pas négligeables** et la force de frottement du sol est certainement plus faible. (pour information : Le record est de plus de 250 km/h !)

2. Une brève expérience sur des skis suffit à comprendre que cette simplification ne correspond pas à une situation réelle dans laquelle les moments des forces, la mise en rotation du système (et sa déformabilité !) rendent le mouvement réel beaucoup plus complexe que dans cet exercice académique.

2 Utiliser les théorèmes énergétiques

→ énoncé p. 266

Les parties « cadre de travail » et « outils » déjà indiquées dans le chapitre précédent ne sont pas reprises.

- 1 Pendule simple** (position du problème p. 244) : on détermine l'expression des énergies utiles :

$$E_C = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$$

$$E_P = mgz_M + cste = mgl(1 - \cos\theta) \quad \text{où l'on choisit } E_P(A) = 0$$

→ Point de départ

On applique le théorème de l'énergie mécanique (référentiel \mathcal{R} galiléen) au système S , le poids est conservatif et la tension ne travaille pas, d'où :

$$E_m = E_C + E_P = \text{constante}$$

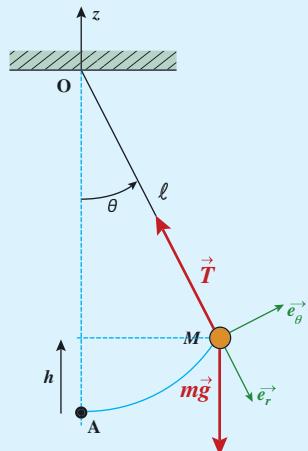
→ Moulinette à calcul

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) = \text{cste}$$

En dérivant l'expression précédente par rapport au temps, il vient :

$$m\ell^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

Soit en simplifiant : $\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$, puis $\ell\ddot{\theta} + g\theta = 0$ pour les petites oscillations. On retrouve la même équation différentielle que p. 245.



- 2 Pendule élastique horizontal** (position du problème p. 250) : On peut utiliser le même changement de variable $x = \ell - \ell_0$ dès le début ou à la fin lorsqu'on obtient l'équation différentielle. On détermine l'expression des énergies utiles :

$$E_C = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\dot{\ell}^2$$

$$E_{P, \text{élastique}} = - \int -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x \cdot d\overline{OM} + C = \int k(\ell - \ell_0)d\ell + C = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + C$$

On choisit $E_{P, \text{élastique}}(\ell = \ell_0) = 0$, soit $C = 0$.

L'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas, le mouvement étant horizontal, on choisit donc de placer la référence de l'énergie potentielle de pesanteur dans le plan du mouvement, elle est donc nulle pendant tout le mouvement et l'énergie potentielle totale se limite à l'expression ci-dessus.

→ Point de départ (TPC)

On applique le théorème de la puissance cinétique (référentiel \mathcal{R} galiléen) au système S , d'où :

$$\frac{dE_C}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}) + \mathcal{P}(m\vec{g}) + \mathcal{P}(\vec{R}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

→ Moulinette à calcul

$$m\ddot{\ell} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x \cdot \dot{\ell}\vec{e}_x$$

Soit : $m\ddot{\ell} + k\dot{\ell}(\ell - \ell_0) = 0$

Soit en simplifiant : $m\ddot{\ell} + k(\ell - \ell_0) = 0$, la même équation différentielle que précédemment.

→ Point de départ (TEM)

On applique le théorème de l'énergie mécanique (référentiel \mathcal{R} galiléen) au système S , la force élastique est conservative et la réaction et le poids ne travaillent pas, d'où :

$$E_m = E_C + E_P = \text{constante}$$

→ Moulinette à calcul

$$\frac{1}{2}m\dot{\ell}^2 + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \text{cste}$$

En dérivant par rapport au temps, il vient :

$$m\ddot{\ell} + k\dot{\ell}(\ell - \ell_0) = 0$$

Soit en simplifiant : $m\ddot{\ell} + k(\ell - \ell_0) = 0$

3 Pendule élastique vertical avec frottement (position du problème p. 252)

Énergie cinétique : $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{\ell}^2$

On applique le théorème de la puissance cinétique (référentiel \mathcal{R}_T galiléen) au système S, d'où :

$$\begin{aligned}\frac{dE_C}{dt} &= \mathcal{P}(\vec{T}) + \mathcal{P}(m\vec{g}) + \mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{T} \cdot \vec{v} + m\vec{g} \cdot \vec{v} - \alpha \vec{v} \cdot \vec{v} \\ m\ddot{\ell} &= -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + m\vec{g} \cdot \vec{e}_x - \alpha \vec{v} \cdot \vec{e}_x\end{aligned}$$

Soit : $m\ddot{\ell} = -k(\ell - \ell_0) + mg - \alpha \ell$ après simplification par \vec{e}_x qui n'est pas identiquement nul.

Là encore pour obtenir l'équation différentielle la plus pertinente, il faut la condition d'équilibre. En ce point, en l'absence de mouvement, les théorèmes énergétiques sont inopérants. Il faut théoriquement utiliser le TRC pour obtenir la condition d'équilibre. Cependant l'équation différentielle obtenue ci-dessus n'étant autre que le TRC, on peut l'utiliser pour obtenir la condition d'équilibre en prenant une valeur nulle pour $\dot{\ell}$ et $\ddot{\ell}$, puis, comme dans le chapitre précédent, utiliser cette condition dans l'équation précédente à l'aide du changement de variable $x = \ell - \ell_{eq}$. On obtient alors l'équation classique $m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0$.

Bien comprendre

Conclusion : Les théorèmes énergétiques sont très commodes pour obtenir rapidement une équation différentielle ou une vitesse en un point particulier de la trajectoire. Les forces qui ne travaillent pas n'interviennent pas dans la mise en équation, qui est donc plus simple. Néanmoins, ils ne permettent pas toujours de résoudre complètement le problème, en particulier quand certaines forces utiles ne travaillent pas, quand le système n'est pas en mouvement... Par ailleurs ils ne permettent pas non plus de déterminer les réactions des supports ou les tensions des fils. Notons qu'on peut toujours simplifier l'équation différentielle par \dot{x} ou $\dot{\theta}$ qui n'est pas identiquement nul (solution triviale sans intérêt).

3 Looping réussi ?

→ énoncé p. 266

- ① On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le système est l'objet assimilé à un point matériel. On utilise les coordonnées polaires (proposées par l'énoncé) dans la gouttière pour exprimer les vecteurs cinématiques et l'énergie cinétique en M :

$$\vec{OM} = R\vec{e}_r ; \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta ; \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta ; \quad E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

En utilisant le théorème de l'énergie cinétique (*ce choix de théorème s'impose puisqu'on cherche une vitesse*) entre le point de départ A et la position M quelconque, le point n'étant soumis qu'à son poids et à la réaction du support (qui est nécessairement dirigée vers l'intérieur du cercle) :

$$E_C(M) - E_C(A) = W_{AM}(m\vec{g}) + W_{AM}(\vec{N}) \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - 0 = mg(h_A - h_M) + 0$$

car, en l'absence de frottements, la réaction est normale au déplacement et donc ne travaille pas.

$$R^2\dot{\theta}^2 = 2g[h_A - R(1 - \cos\theta)] \tag{1}$$

- ② Le looping est réussi si le point reste en contact avec la gouttière pendant tout son trajet, donc à condition que la réaction ne s'annule pas. Or seul le PFD permet de déterminer la réaction, puisqu'elle ne travaille pas :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \text{ soit par projection dans la base polaire : } \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = mg \cos\theta - N \\ mR\ddot{\theta} = -mg \sin\theta \end{cases} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

On remarque sans surprise que l'équation différentielle du mouvement (3) pourrait aussi être obtenue en dérivant le TEC (1). L'équation (2) permet d'exprimer la réaction de la gouttière :

$$N = mg \cos\theta + mR\dot{\theta}^2 = mg[\cos\theta + 2\frac{h_A}{R} - 2(1 - \cos\theta)] = mg(2\frac{h_A}{R} + 3\cos\theta - 2)$$

L'expression précédente est minimale en $\theta = \pi$ (c'est-à-dire évidemment en haut du cercle, au point D), il suffit donc que N reste positive et ne s'annule pas en cette position pour réussir le looping :

$$N(\theta = \pi) > 0 \quad \text{soit} \quad (2\frac{h_A}{R} - 3 - 2) > 0 \quad \text{finalement } h_A > \frac{5}{2}R = h_1$$

Il ne suffit pas que la vitesse ne s'annule pas pour que le looping soit réussi ! Pour le comprendre, supposons que l'on impose seulement que la vitesse ne s'annule pas (dans ce cas il suffit que la hauteur h_A soit supérieure à $2R$), alors, c'est au point le plus haut que la limite d'une vitesse nulle est atteinte. Il est facile de comprendre qu'arriver en haut de la gouttière avec une vitesse nulle entraîne une chute verticale ! En réalité, avec cette limite, la réaction s'annule bien avant (en θ tel que $\cos\theta = -2/3$).

Bien comprendre

On retiendra que le contact entre un système et son support cesse, quand la réaction normale du support de ce dernier sur le système s'annule.

- 3 Pour que le système effectue des oscillations, il doit rester en contact avec la gouttière. Donc il faut que lorsque la vitesse s'annule, il rebrousse chemin en restant en contact avec la gouttière, c'est-à-dire que la réaction ne doit pas s'annuler. Pour une valeur quelconque de h_A , la vitesse s'annule en θ_V et la réaction en θ_N tels que :

$$\cos\theta_V = 1 - \frac{h_A}{R} \quad \text{et} \quad \cos\theta_N = \frac{2}{3}(1 - \frac{h_A}{R})$$

La fonction cosinus étant décroissante entre 0 et π , la vitesse s'annule avant la réaction si :

$$\cos\theta_V > \cos\theta_N, \quad \text{soit si : } h_A \leq R = h_2$$

On vérifie facilement que si $h_A < R$, la vitesse s'annule avant la réaction, permettant les oscillations. Dans le cas contraire, la réaction s'annule avant la vitesse, ce qui conforte le raisonnement de la question précédente. (Lorsque $h_A = R = h_2$, on est dans le cas limite où vitesse et réaction s'annulent en C, les oscillations sont encore possibles.)

- 4 Si la hauteur h_A est comprise dans l'intervalle $[h_2, h_1]$, alors le système n'a pas assez d'énergie pour effectuer le looping, mais suffisamment pour dépasser la position $\theta = \pi/2$. Dans ce cas il remonte sur la gouttière entre C et D, mais la réaction s'annule en un point P (alors que la vitesse est toujours non nulle), avant d'atteindre le sommet et **le système tombe alors selon une trajectoire parabolique** (soumis uniquement à son poids) dont la vitesse initiale est tangente au cercle en P.

4 Pendule rigide

→ énoncé p. 267

1 ↗ Cadre de travail

Étude dans le **référentiel** terrestre \mathbb{R} , considéré galiléen du **système** masselotte au bout de la tige.

Hypothèses simplificatrices : la masse de la tige est négligeable et la masselotte est assimilée à un point matériel. Le **schéma** est identique à celui du pendule simple p. 269.

↗ Outils

Cinématique : $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{e}_r$
 $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Bilan des forces : $m\vec{g} = mg\cos\theta\vec{e}_r - mg\sin\theta\vec{e}_\theta$
 $T = -T\vec{e}_r$

Expression des **énergies** utiles :

$$E_C = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 ; E_P = mgz_M + C = mgl(1 - \cos\theta) \quad \text{où l'on a choisi } E_P(A) = 0$$

↗ Point de départ

On applique le théorème de l'énergie mécanique (référentiel \mathbb{R} galiléen) au système S, le poids est conservatif et la tension ne travaille pas, d'où :

$$E_m = E_C + E_P = cste$$

► Moulinette à calcul

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta) = \text{cste} \quad \text{En dérivant, il vient : } m\ell^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

Soit en simplifiant $\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$ dans laquelle on ne fait pas d'approximation sur l'angle puisqu'on va étudier toutes les possibilités de position (*cette équation s'obtient encore plus rapidement par le TRC*).

② ► Analyse et conclusion

L'ensemble du mouvement peut être décrit à l'aide de la seule variable θ , il s'agit donc d'un mouvement à un seul degré de liberté. Le déplacement se fait dans la direction du vecteur \vec{e}_θ . La composante de force pertinente pour l'étude de l'équilibre est donc celle suivant \vec{e}_θ : $f(\theta) = -mg\sin\theta$

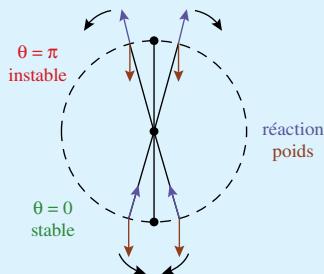
- ③ Positions d'équilibre : $f(\theta) = -mg\sin\theta = 0$ soit $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$

Stabilité : $f'(\theta) = \frac{df}{d\theta} = -mg\cos\theta$ d'où : $f'(\theta = 0) = -mg < 0$ et $f'(\theta = \pi) = mg > 0$

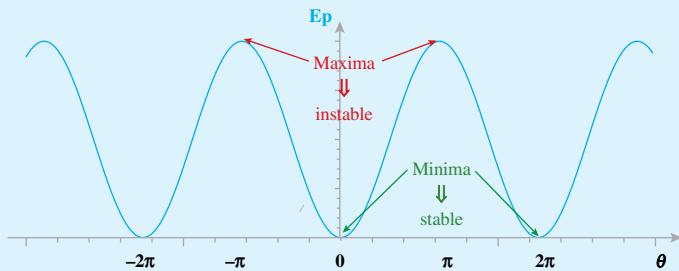
La position d'équilibre basse en $\theta = 0$ est stable tandis que la position haute en $\theta = \pi$ est instable.

Ce résultat est tout à fait intuitif et se vérifie aisément sur un schéma où l'on représente les forces qui s'exercent lorsqu'on écarte le système de l'équilibre (ci-dessous).

- ④ La courbe d'énergie potentielle donne les mêmes résultats, en effet la fonction $E_p(\theta) = mg\ell(1-\cos\theta)$ passe par un minimum en 0 ($E_p(0) = 0$) et par un maximum en π ($E_p(\pi) = 2mg\ell$). On retrouve ensuite l'alternance des **positions stables (multiples pairs de π) en bas et instables en haut (multiples impairs de π)**, lorsque le système effectue plusieurs tours dans un sens ou un autre.



Position d'équilibre et stabilité



Courbe d'énergie potentielle

Bien comprendre

Dans cet exemple on voit facilement que l'étude de la force permet rapidement d'étudier l'équilibre. On constate sans surprise que la dérivée de l'énergie potentielle suivant θ est l'opposé de la force (au facteur ℓ près).

5 Ressort assujetti à une tige

→ énoncé p. 267

- ① On étudie la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle se déplace uniquement sur l'axe horizontal, son mouvement est à un seul degré de liberté x . Elle est soumise à 3 forces : son poids vertical vers le bas, la réaction du support qui, en l'absence de frottement, est verticale (orthogonale au déplacement), la force de rappel du ressort qui est dans l'alignement du ressort, vers le ressort si celui-ci est tendu (de longueur supérieure à ℓ_0) et en sens contraire si le ressort est comprimé (longueur inférieure à ℓ_0).

N. B. : La réaction peut être vers le haut ou vers le bas, selon l'importance de la force de rappel par rapport au poids du système. Sur les schémas elle est représentée vers le haut, les conclusions ne changent pas dans le cas contraire.

Le système ne peut être à l'équilibre que dans des positions qui permettent une résultante de forces nulle. On voit clairement sur le schéma 1 que seules deux possibilités sont à considérer : la force de rappel est verticale ou la force de rappel est nulle. Dans tous les autres cas la force de rappel ne peut être compensée par les autres forces qui sont toutes verticales.

SCHÉMA 1 : Forces qui s'exercent sur la masse selon la situation du ressort

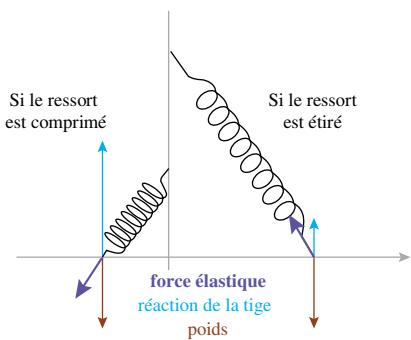
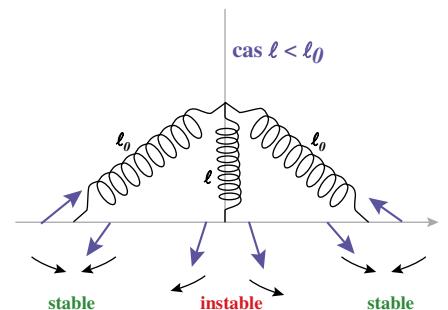
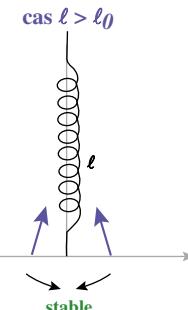


SCHÉMA 2 : Effet de la force lorsqu'on écarte la masse de l'équilibre, seule la composante horizontale agit sur le mouvement (les autres forces ne sont pas représentées, elles n'influent pas sur le mouvement)



Cas où $\ell > \ell_0$: le ressort est toujours tendu et la force de rappel ne peut jamais s'annuler, donc **la seule position d'équilibre est en $x = 0$** . Si on écarte le système de cette position, les forces tendent à le ramener vers O, donc **la position est stable**.

Cas où $\ell < \ell_0$: le ressort est soit comprimé, soit tendu, il existe donc une position où le ressort a la longueur ℓ_0 . Pour cette position la tension est nulle et l'équilibre est possible pour une valeur de x telle que $\ell_0^2 = \ell^2 + x_{eq}^2$. (Soit **deux positions symétriques de part et d'autre de O**). On voit clairement que si le point est éloigné de cette position d'équilibre, les forces tendent à le ramener, **l'équilibre est stable**. La position **O est toujours une position d'équilibre**, mais cette fois le ressort y est comprimé, donc si l'on s'écarte de ce point les forces tendent à éloigner le système de O, **cette position est donc instable**.

- 2 L'énergie potentielle élastique est proportionnelle au carré de l'allongement :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(L(x) - \ell_0)^2 + C$$

où $L(x)$ est la longueur du ressort quand le point est en x , soit $L(x) = \sqrt{\ell^2 + x^2}$.

On choisit d'annuler l'énergie potentielle en O, ce qui impose le choix de la constante :

$$E_p(x=0) = \frac{1}{2}k(L(0) - \ell_0)^2 + C = 0 \quad \text{soit :} \quad C = -\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

D'où : $E_p(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{\ell^2 + x^2} - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$

- 3 Les positions d'équilibre correspondent aux extrema de la fonction $E_p(x)$, qu'il convient donc de dériver :

$$E_p' = \frac{dE_p}{dx} = \frac{k}{2} \cdot 2[(\ell^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} - \ell_0] \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x(\ell^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = kx \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell^2 + x^2}} \right)$$

Le calcul de la dérivée a été détaillé, on utilise ici deux fois (une première fois pour le terme entre crochets, une seconde fois pour la racine) le résultat mathématique de la dérivée de la puissance d'une fonction :

$$\frac{d(f^n)}{dx} = n \frac{df}{dx} f^{n-1}$$

Les valeurs de x qui annulent la dérivée et qui sont donc des positions d'équilibre sont :

→ $x = 0$, qui existe quelle que soit la valeur de ℓ .

$$\rightarrow x \text{ solution de : } \sqrt{\ell^2 + x^2} = \ell_0$$

soit $x_{1,2} = \pm\sqrt{\ell_0^2 - \ell^2}$ solutions (2 positions symétriques par rapport à O) qui n'existent que si $\ell < \ell_0$.

Pour étudier la stabilité de ces positions d'équilibre, il convient de dériver à nouveau pour obtenir la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

$$E''_P = \frac{d^2 E_P}{dx^2} = k \cdot \left[\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell^2 + x^2}} \right) + x \frac{\ell_0 x (\ell^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(\ell^2 + x^2)} \right] = k \left[1 + \frac{\ell_0 x^2 - \ell_0 (\ell^2 + x^2)}{(\ell^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = k \left[1 - \frac{\ell_0 \ell^2}{(\ell^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

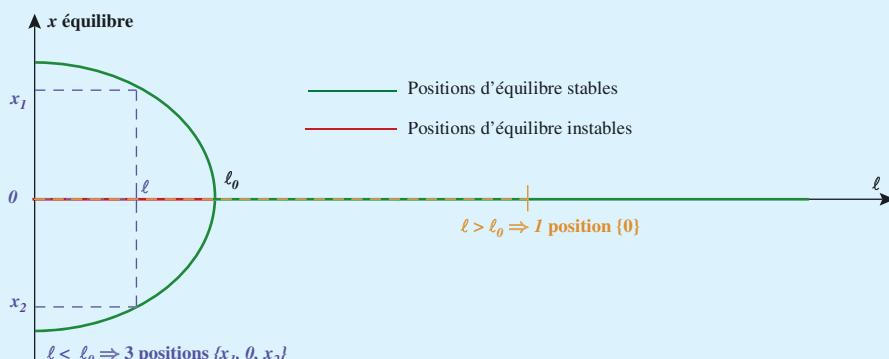
Dont les signes aux positions d'équilibre vérifient :

$$E''_P(x=0) = k \left[1 - \frac{\ell_0 \ell^2}{(\ell^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = k \left[1 - \frac{\ell_0}{\ell} \right] \text{ qui est positif si } \ell > \ell_0 \text{ et négatif si } \ell < \ell_0$$

$$E''_P(x=x_{1,2}) = k \left[1 - \frac{\ell_0 \ell^2}{(\ell_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = k \left[1 - \frac{\ell^2}{\ell_0^2} \right] \text{ qui est positif car ces positions n'existent que pour } \ell < \ell_0$$

En conclusion on trouve une seule position stable ($x = 0$) si $\ell > \ell_0$, mais deux positions stables (x_1 et x_2) et une position instable ($x = 0$) si $\ell < \ell_0$, ce qui confirme l'étude qualitative de la question ①.

- ④ La courbe $x_{équilibre}(\ell)$ (dite en fourche) est la suivante :



À méditer

Comprendre un problème physique, c'est être capable d'en voir la solution sans résoudre d'équation.
PAUL DIRAC (1902-1984)

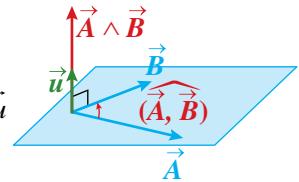
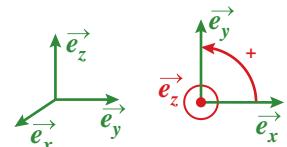
Particules chargées dans un champ

L'étude des mouvements des particules chargées dans les champs électromagnétiques, dont les applications pratiques sont nombreuses, est un problème de mécanique du point matériel où sont mis en œuvre les résultats de cinématique et les théorèmes de dynamique étudiés dans les trois chapitres précédents. On se limitera ici à des champs uniformes et stationnaires. Par ailleurs on ne traitera que le cas des vitesses classiques (très faibles devant celle de la lumière). On pourra cependant constater dans un exercice que, dans les grands accélérateurs et collisionneurs, le traitement relativiste est indispensable.

Outils mathématiques

■ **Trièdre direct** : de même que le sens trigonométrique est choisi par convention comme sens positif pour orienter le plan, l'orientation de l'espace fait l'objet d'une convention. Il existe de nombreux moyens mnémotechniques (peu élégants) utilisant les doigts d'une main pour le visualiser. On retiendra plutôt que si le trièdre $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est direct, alors lorsque la rotation de \vec{A} vers \vec{B} est vue dans le sens trigonométrique, \vec{C} pointe vers soi. Les bases des systèmes de coordonnées sont toujours directes, la vision familière du trièdre de la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ suffit donc à visualiser le sens direct. Par ailleurs toute permutation circulaire dans un trièdre direct est aussi directe ($(\vec{e}_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ par exemple).

■ **Produit vectoriel**: $\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin(\widehat{\vec{A}, \vec{B}}) \vec{u}$



Le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est orthogonal aux deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} et le trièdre $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$ est direct.

I Position du problème

1. Notion de champ

Les physiciens utilisent le concept de champ pour créer un intermédiaire entre les causes et les effets des interactions. Par exemple deux objets massiques A et B exercent l'un sur l'autre une interaction gravitationnelle. On peut s'intéresser à la force exercée par l'objet A sur l'objet B, il est souvent plus commode de décrire d'une part le rôle de A et d'autre part l'effet subi par B. On utilise alors la notion de champ gravitationnel. Ainsi on peut déterminer le champ gravitationnel créé par A, indépendamment de tout effet sur un autre objet. On peut aussi étudier le comportement d'un système B placé dans un champ gravitationnel sans se préoccuper du système qui l'a engendré. Le champ est alors un objet mathématique qui décrit les propriétés de l'espace en tout point, du fait de la présence de la source (dans notre exemple A). Dans ce chapitre, on étudie les effets des champs électriques et magnétiques sans se préoccuper de leur origine. Les valeurs prises par un champ vectoriel ou scalaire en un point de l'espace dépendent en général de la position du point et du temps (et évidemment de la source de champ).

Définitions

- Un **champ uniforme** est un champ dont les caractéristiques sont les mêmes en tout point de l'espace considéré : $\forall (M, P) \in \text{espace considéré et } \forall t : \vec{C}(M, t) = \vec{C}(P, t)$
- Un **champ stationnaire** est un champ dont les caractéristiques sont indépendantes du temps : $\forall M \in \text{espace considéré et } \forall (t, t') : \vec{C}(M, t) = \vec{C}(M, t')$

- On ne confondra pas ces deux notions et on évitera le terme champ constant qui prête à confusion pour une grandeur qui dépend de plusieurs variables.
- Pour un champ vectoriel, les caractéristiques s'entendent comme direction, sens et norme.
- Le champ électrique noté \vec{E} est engendré par des charges électriques, son expression en fonction des sources et ses propriétés seront étudiées en deuxième année. Sa valeur E s'exprime en $V.m^{-1}$.
- Le champ magnétique noté \vec{B} est généré par des charges électriques en mouvement (dans des circuits ou dans des aimants). Sa valeur B s'exprime en Tesla (T). Il est abordé en fin de première année (*voir chapitre 25*) et étudié plus en profondeur en seconde année.
- Un champ électrique uniforme et stationnaire peut être créé entre les plaques d'un condensateur plan soumis à une tension constante. Un champ magnétique uniforme et stationnaire peut être généré dans un solénoïde infini (longue bobine de fil conducteur) parcouru par un courant d'intensité constante ou dans l'entrefer d'un aimant de géométrie appropriée (*voir p. 465 et 467*).

2. La force de Lorentz**Définition**

Une particule de charge q , se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un référentiel \mathcal{R} , placée dans un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} , subit une force dite **force de Lorentz** qui vaut :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

- La force de Lorentz se répartit en deux termes dus respectivement à chacun des champs. Si la particule n'est soumise qu'à un champ électrique, seul le premier terme intervient : $\vec{F} = q\vec{E}$; de même si la particule n'est soumise qu'à un champ magnétique : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.
- La force électrique est colinéaire au champ électrique, tandis que la force magnétique est orthogonale au champ magnétique.
- Le poids (*a fortiori* l'interaction gravitationnelle entre charges) est toujours négligeable devant la force de Lorentz (*voir exercice n° 1 p. 281*).

La puissance de la force de Lorentz exercée sur une particule en mouvement vaut :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} + \vec{0} \quad \text{car la force magnétique est orthogonale à la vitesse.}$$

Résultats

- Seul un champ électrique peut fournir de l'énergie à une particule, car la force magnétique, toujours orthogonale au mouvement, ne travaille pas.
- La **force électrique** peut mettre en mouvement une particule au repos, mais pas la force magnétique qui est nulle si la vitesse est nulle.
- La **force magnétique** peut dévier une trajectoire donc modifier la direction de la vitesse, mais ne peut modifier l'énergie cinétique de la particule, donc la valeur de sa vitesse.

II | Particule chargée dans un champ électrique

1. Trajectoire

Soit une charge ponctuelle q de masse m constante, animée d'une vitesse \vec{v}_0 , qui pénètre dans une zone où règne un champ électrique uniforme et stationnaire \vec{E} . On étudie son mouvement dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On applique le théorème de la résultante cinétique (TRC) à la particule :

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E} \quad \text{d'où :} \quad \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = \text{cste}$$

Le mouvement d'un point d'accélération constante a été décrit au chapitre 12 (*voir p. 217-218*). On peut donc distinguer deux types de trajectoires selon les conditions initiales (*voir calcul détaillé dans l'exercice n° 2 p. 281*).

Résultats

Une particule chargée qui pénètre dans un champ électrique uniforme et stationnaire peut adopter deux types de mouvements :

- Si la particule est initialement au repos ou si sa vitesse initiale est colinéaire au champ, alors le mouvement sera **rectiligne uniformément varié**. Le mouvement pourra être :
 - ➡ **Accéléré** si : – la charge est initialement au repos ;
– la charge est positive avec une vitesse initiale dans le même sens que le champ ;
– la charge est négative avec une vitesse initiale en sens contraire du champ.
 - ➡ **Déceléré** si : – la charge est négative avec une vitesse initiale dans le même sens que le champ ;
– la charge est positive avec une vitesse initiale en sens contraire du champ.
- Si la vitesse de la particule n'est pas colinéaire au champ, alors le mouvement sera **parabolique** avec des équations comparables à celle du tir dans le champ de pesanteur. Le sens de la courbure de la trajectoire dépend du signe de la charge et de l'orientation de la vitesse initiale par rapport au champ électrique.

2. Aspect énergétique

En appliquant à la particule le théorème de l'énergie cinétique entre deux points A et B de sa trajectoire, il vient :

$$\Delta E_{C,A \rightarrow B} = E_C(B) - E_C(A) = \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{OM}$$

$$\boxed{\Delta E_{C,A \rightarrow B} = q(V_B - V_A) = qU_{AB}}$$

On admettra ici l'expression du potentiel électrique V exprimé à partir du champ électrique, qui sera défini en seconde année. On a déjà utilisé au lycée ce résultat dans un cas particulier : la tension aux bornes d'un condensateur plan est liée au champ électrique dans l'espace interconducteur (de largeur d) par $U = Ed$. On retiendra que la variation d'énergie cinétique de la particule est proportionnelle à la tension appliquée sur son trajet. Cette expression permet de définir l'électron-Volt.

Définition

Un **électron-Volt** est l'énergie acquise par un électron qui subit une différence de potentiel de 1 Volt :

$$1 \text{ eV} = e.U = 1,6 \cdot 10^{-19} \times 1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

En physique des particules on utilise les multiples keV (10^3 eV), MeV (10^6 eV), GeV (10^9 eV)...

POINT MÉTHODE

Étudier le mouvement d'une particule dans un champ électrique

- L'étude du mouvement d'une particule dans un champ électrique uniforme répond aux mêmes exigences que tout exercice de dynamique et donc se construira selon la méthode générale développée p. 236. En particulier on précisera le référentiel, le système, on choisira avec pertinence les axes (en fonction de la direction du champ et de la direction de la vitesse initiale), on ne négligera pas le schéma.
- La schématisation de la trajectoire obtenue par le calcul après résolution sera un moyen de vérifier la cohérence avec le mouvement attendu (en particulier le sens de courbure de la trajectoire) et donc de détecter d'éventuelles erreurs de signe.

3. Applications

- Dans les tubes cathodiques des oscilloscopes analogiques, des électrons (donc des particules de charges négatives) subissent un premier champ électrique pour être accélérés et focalisés afin de créer le faisceau. Ensuite ces particules passent entre deux séries de plaques parallèles (horizontales et verticales), entre lesquelles on applique des tensions, généralement variables dans le temps. Même si ces oscilloscopes sont remplacés de plus en plus par des oscilloscopes numériques, il est important d'avoir compris le principe de l'oscilloscope cathodique (ce que propose l'exercice n° 2 p. 281) pour savoir manipuler le modèle numérique, puisque ce dernier reproduit son fonctionnement avec de l'électronique. Faute de connaître ce principe, on risque une interprétation erronée dans la lecture de l'écran numérique.
- L'accélération des particules dans les accélérateurs (du type de ceux exploités au CERN par exemple) résulte de l'effet de champs électriques. Si les plus anciens fonctionnent avec des hautes tensions entre des plaques comme dans le tube cathodique, les énergies considérables que les expériences actuelles exigent sont maintenant obtenues avec des procédés plus sophistiqués, mais dont le principe reste le même : augmenter l'énergie des particules, donc les accélérer à l'aide d'un champ électrique. Les accélérateurs sont exploités pour la recherche scientifique (comme lors de la découverte du boson de Higgs en juillet 2012 au CERN), mais aussi pour des applications pratiques par exemple dans le domaine médical.

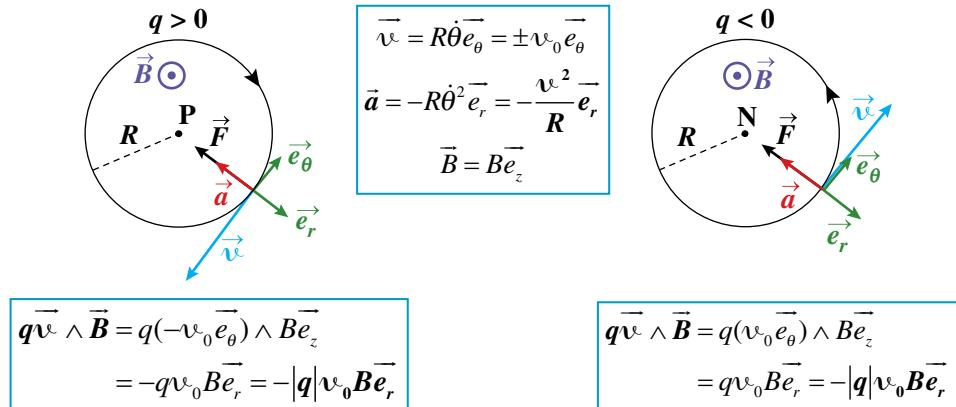
III Particule chargée dans un champ magnétique

1. Propriétés du mouvement dans un cas simple

Soit une particule de charge q considérée ponctuelle de masse m constante qui pénètre dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et stationnaire \vec{B} , avec une vitesse initiale orthogonale au champ et de norme v_0 . On admet ici que le mouvement est circulaire uniforme dans le plan orthogonal au champ contenant le point d'entrée de la particule. On note R le rayon de la trajectoire.

Dans ce cas particulier et avec cette supposition, la vitesse, qui est nécessairement tangente au cercle trajectoire, reste toujours orthogonale au champ. La force de Lorentz est orthogonale au champ et à la vitesse, elle est donc normale au cercle, nécessairement vers l'intérieur de la courbure et sa valeur se calcule aisément. L'accélération n'a qu'une composante normale (*voir chapitre 12 p. 219*). Le théorème de la résultante cinétique (TRC) appliqué à la particule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, se traduit par une seule projection sur la direction radiale :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a} \Rightarrow |q|\|\vec{v}\|B = m\frac{\vec{v}^2}{R} \quad \text{soit } R = \frac{mv_0}{|q|B} \quad \text{avec } \|\vec{v}\| = v_0 = \text{cste}$$

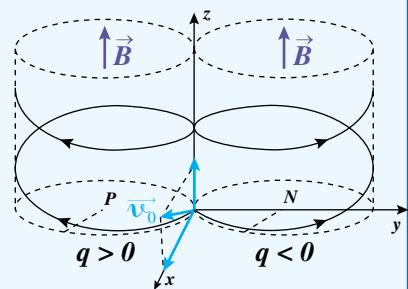


Le sens de la trajectoire circulaire dépend du signe de la charge. Les charges positives tourneront dans le sens horaire autour du champ alors que les charges négatives tourneront dans le sens trigonométrique.

2. Trajectoire dans le cas général¹

Résultats

- La force magnétique ne travaillant pas, le **mouvement d'une particule dans un champ magnétique est nécessairement uniforme**.
- Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire est la composition d'un mouvement rectiligne uniforme dans la direction du champ et d'un mouvement circulaire uniforme dans un plan orthogonal au champ. Ce mouvement est donc **hélicoïdal uniforme**, l'orientation de l'hélice dépend des orientations respectives de la vitesse initiale par rapport au champ et du signe de la charge.



On retiendra deux cas particuliers intéressants :

- Si la vitesse initiale est colinéaire au champ, le mouvement est rectiligne uniforme suivant \vec{B} .
- Si la vitesse initiale est orthogonale au champ, le mouvement est circulaire uniforme dans un plan orthogonal au champ contenant la position initiale de la particule (cas du paragraphe précédent).

3. Applications

- Dans les anciennes télévisions à tube cathodique (aujourd'hui remplacées par des écrans plats), si le faisceau d'électrons était produit et accéléré par un champ électrique, il était en revanche dévié pour former les images par différents champs magnétiques.
- Le spectromètre de masse est un dispositif qui permet de séparer des particules de rapport q/m différents. Injectées dans un domaine où règne un champ magnétique uniforme et orthogonal à leur vitesse initiale, elles décrivent toutes des cercles dont le rayon est proportionnel à ce rapport q/m . Après un demi-cercle, les particules émergent selon des trajectoires séparées. Les atomes ou molécules étudiés doivent évidemment être préalablement ionisés (des particules neutres sont insensibles au champ) et leur vitesse calibrée. Ce procédé peut être utilisé pour séparer des isotopes qui auront été chargés identiquement, mais dont les masses sont différentes. On donne également ce nom à un appareil plus complet qui intègre en sortie du

1. Voir avertissement exercice n° 3 p. 282.

séparateur, des dispositifs qui analysent les différentes espèces qui ont été séparées. Cet outil d'analyse sophistiqué est connu du public par son utilisation intempestive dans les séries policières.

- Les effets des champs magnétiques sur les particules sont aussi exploités dans les accélérateurs et collisionneurs de particules. Les champs magnétiques font circuler les faisceaux de particules dans de grands anneaux. Ces dispositifs permettent de stocker des particules en attente de collision, de les faire passer de façon répétée dans les zones d'accélération pour augmenter leur énergie ou de finaliser l'expérience en générant des collisions de faisceaux parfaitement focalisés et orientés.
- La nature hélicoïdale de la trajectoire dans un champ uniforme et stationnaire se généralise pour un champ non uniforme. On peut montrer que les particules s'enroulent en hélices autour des lignes de champ (notion vue au lycée). C'est ainsi que les particules du rayonnement cosmique qui sont dangereuses pour la vie, sont déviées par le champ magnétique terrestre et canalisées vers les pôles (*voir p. 464*), où elles interagissent avec la haute atmosphère formant les aurores boréales ou australes (*voir photo p. 285*).

VERS LA COLLE

Questions de cours

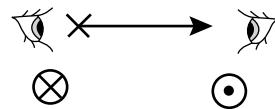
- Force de Lorentz : expression, propriété, ordre de grandeur.
- Aspect énergétique du mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ou magnétique, définition de l'électron-Volt.
- Trajectoire d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et stationnaire : position du problème, équations horaires, nature de la trajectoire selon les conditions initiales.
- Propriétés du mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, rayon de la trajectoire circulaire d'un mouvement uniforme de vitesse initiale orthogonale au champ.
- Applications dans différents domaines.

Erreurs à éviter

- Les principales erreurs sont généralement des erreurs de signes, en particulier à cause de celui de la charge et dans le calcul des produits vectoriels.
- Ne pas confondre les représentations de la tension (scalaire) et du champ électrique (vectoriel) qui est orienté vers les potentiels décroissants. Donc pour une tension positive, la flèche de la tension et celle du vecteur champ électrique sont de sens contraire.

Quelques « trucs » utiles

- La représentation en 3D n'est pas toujours la plus lisible, surtout quand un plan est privilégié comme par exemple le plan orthogonal au champ magnétique. On préférera alors une représentation plane et on utilisera la convention ci-contre, liée à la façon dont l'œil voit le vecteur, pour schématiser les vecteurs orthogonaux au plan de figure : à gauche le vecteur pointe vers la feuille, à droite le vecteur pointe vers le lecteur. Attention cette représentation n'a pas de sens en 3D !
- Les vis sont en général des systèmes qui traduisent une orientation directe de l'espace : lorsque l'on dévisse, on tourne dans le sens trigonométrique et la vis vient vers soi, inversement, lorsque l'on visse, on tourne dans le sens inverse du sens trigonométrique et la vis s'enfonce vers la feuille. On peut raisonner de même avec un tire-bouchon, des robinets....
- L'utilisation des énergies en eV (et multiples) sera privilégiée, en particulier dans les exemples concernant les accélérateurs.



EXERCICES**Conseils**

Les trois premiers exercices sont presque des questions de cours sur les mouvements de particules. L'exercice n° 2 utilise le support de l'oscilloscope pour concrétiser le problème, mais l'étude des trajectoires se transpose aisément dans n'importe quel système de champ électrique stationnaire uniforme et la résolution doit en être parfaitement maîtrisée. Si le calcul de la trajectoire hélicoïdale de l'exercice n° 3 n'est plus au programme des compétences exigibles, il reste accessible et présente l'intérêt de mettre en œuvre une technique de résolution classique et fort utile à connaître. Par ailleurs il apportera aux étudiants exigeants la satisfaction intellectuelle de la démonstration et donc de la compréhension. Les exercices suivants mettent en œuvre diverses applications pratiques des mouvements de particules dans les champs et les limites classiques des dispositifs.

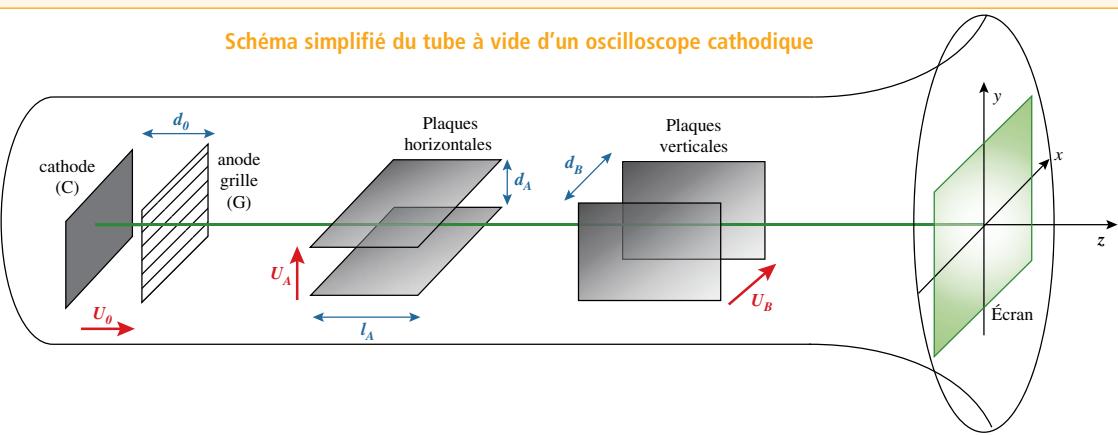
Avertissement : Les valeurs des caractéristiques des particules et des constantes fondamentales sont à chercher dans la base de données (ou, mieux, à connaître par cœur...).

1 Ordres de grandeur ★**→ corrigé p. 286**

Calculer la force électrique exercée sur un électron dans un condensateur plan de 5 cm d'épaisseur soumis à une tension de 5 V et la force magnétique exercée par le champ magnétique terrestre (de l'ordre de $4 \cdot 10^{-5}$ T) s'il est animé d'une vitesse d'un millième de la vitesse de la lumière. Comparer ces forces au poids. Conclure.

2 L'oscilloscope cathodique ★★**→ corrigé p. 286**

Schéma simplifié du tube à vide d'un oscilloscope cathodique



On donne un schéma simplifié ci-dessus du tube cathodique d'un oscilloscope analogique, les électrons sont émis par un métal chauffé appelé cathode (C), avec une vitesse assez faible pour être négligée. Les électrons sont soumis en sortie de cathode à un champ électrique suivant (Oz) généré par la différence de potentiel entre la cathode et l'anode (grille G). Les électrons traversent la grille et passent alors entre les plaques horizontales, puis entre les plaques verticales, qui peuvent être soumises à différents types de tensions. Ils subissent de ce fait des déviations, puis vont terminer leur trajectoire en un point de l'écran où ils interagissent avec un matériau fluorescent qui s'illumine lors du choc. On négligera tous les effets de bord. On note U_0 , U_A et U_B les tensions appliquées et d_0 , d_A et d_B les distances entre les divers systèmes de plaques. Le vide règne dans l'ensemble du tube.

- Préciser l'orientation des champs électriques qui règnent dans les différentes zones du tube et expliquer qualitativement les différents mouvements de l'électron depuis la cathode jusqu'à l'écran.

- ② Établir les équations du mouvement de l'électron entre C et G et calculer la valeur de sa vitesse après la grille. En l'absence de tension entre les plaques suivantes, où se situe l'impact de l'électron ?
- ③ Une tension constante est appliquée entre les plaques horizontales. Établir les équations horaires du mouvement de l'électron, puis l'équation de sa trajectoire pendant qu'il se trouve entre les plaques et déterminer la nature du mouvement. Si l'électron continue jusqu'à l'écran sans subir d'autre champ, montrer que la déviation du faisceau par rapport à l'impact déterminé en ② est proportionnelle à la tension entre les plaques. *On pourra admettre ou vérifier que la tangente à la trajectoire au point de sortie passe par le centre des plaques.*
- ④ Une tension en dents de scie est généralement appliquée entre les plaques verticales. En supposant dans un premier temps la tension nulle entre les plaques horizontales, expliquer qualitativement le mouvement du faisceau sur l'écran et en déduire que cela permet de générer une base de temps. Expliquer comment l'oscilloscope permet de visualiser les variations des tensions en fonction du temps.



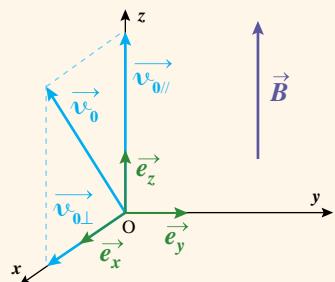
3 Mouvement dans un champ magnétique ★★★

→ corrigé p. 288

Avertissement : Le programme n'exige pas l'étude du mouvement général d'une particule dans un champ magnétique, ni même son résultat. Seule est demandée la détermination du rayon de la trajectoire pour une vitesse initiale orthogonale au champ et en faisant l'hypothèse d'un mouvement circulaire uniforme, ce qui est présenté dans le paragraphe III.1. du cours.

Cette exigence minimaliste n'interdit pas d'aller plus loin ! En effet la détermination rigoureuse de la trajectoire et de la nature du mouvement est tout à fait accessible et n'utilise que des outils mathématiques connus. Par ailleurs elle présente l'intérêt de mettre en pratique un calcul de produit vectoriel, de manipuler des équations différentielles basiques et surtout d'utiliser une technique de résolution par les complexes qui est à la fois élégante et très utile en physique. De surcroît, elle met en œuvre la méthode de résolution générale d'un problème de mécanique du point, déjà travaillée dans les chapitres précédents. Pour ces raisons, elle fait l'objet de cet exercice, les résultats ayant été résumés au III.2. du cours.

Une particule de masse m et de charge q (que l'on pourra dans un premier temps supposer positive sans nuire à la généralité de la démonstration) pénètre en un point O, avec une vitesse \vec{v}_0 , dans une zone où règne un champ magnétique uniforme et stationnaire. On se place dans le référentiel du laboratoire, l'orientation de la vitesse et du champ sont quelconques, on choisit donc de placer une direction (Oz) suivant le champ et l'axe (Ox), de sorte que la vitesse initiale se trouve dans le plan (Oxz). L'orientation de la vitesse initiale joue un rôle important dans la trajectoire, on notera $\vec{v}_{0//}$ sa composante colinéaire au champ et $\vec{v}_{0\perp}$ sa composante orthogonale, comme indiqué sur le schéma.



- ① Établir les équations différentielles du mouvement.

- ② Résoudre celle qui permet d'établir l'équation horaire $z(t)$ et conclure.

Les deux autres équations forment un système couplé S. La résolution de ce système peut se faire de diverses façons, une méthode très efficace et très classique en physique utilise une variable complexe

définie par² : $\xi = x + iy$. On pourra noter $\zeta = \dot{\xi} = \dot{x} + i\dot{y}$, qui est également une fonction complexe du temps.

- ③ À l'aide d'une combinaison linéaire (complexe) des équations du système S , établir une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant et second membre nul vérifiée par ζ . Résoudre cette équation (*la résolution est identique à celle de l'équation différentielle réelle, à la différence que les constantes utilisées sont complexes*) et exprimer la solution complète à l'aide des conditions initiales.
- ④ En déduire une expression des coordonnées de la vitesse, puis les équations horaires du mouvement. Comment doit-on modifier le résultat avec une charge négative ?
- ⑤ Montrer que la projection du mouvement dans le plan (Oxy) est circulaire uniforme et décrire le mouvement complet. Justifier l'allure des trajectoires proposées p. 279. Comment est la trajectoire par rapport aux lignes de champ ? Vérifier aussi les trajectoires pour les deux cas particuliers d'orientation de la vitesse initiale par rapport au champ.

4 Expérience de Thomson ★

→ corrigé p. 289

En 1897 J.J. Thomson voulait mesurer le rapport e/m pour l'électron. La déviation par un champ magnétique ou électrique dépend de ce rapport, mais également de la vitesse initiale des particules qui n'est pas forcément connue. Il imagina alors le dispositif suivant : un faisceau d'électrons que l'on suppose monocinétique de vitesse v_0 (inconnue) arrive dans une zone où règnent simultanément un champ électrique et un champ magnétique. On fixe la valeur du champ magnétique et on fait varier le champ électrique jusqu'à ce qu'il n'y ait pas de déviation du faisceau. Schématiser les directions des champs pour que ce résultat soit possible et montrer que l'on peut alors en déduire la valeur de la vitesse des particules.

5 Principe du cyclotron ★★

→ corrigé p. 290

<p>Schéma d'un cyclotron</p> <p>Champ magnétique Champ électrique changeant alternativement de sens</p> <p>Entre les dés, le champ électrique change de sens à chaque passage de la particule.</p>	<p>Vue de dessus du cyclotron</p> <p>Dés</p> <p>Champ magnétique</p> <p>E</p> <p>B</p> <p>d</p>	<p>Données numériques dans les accélérateurs de type cyclotron et dérivés (applications médicales)</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; padding: 5px;">Champ magnétique</td> <td style="width: 50%; padding: 5px;">$B = 1 \text{ T}$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Tension entre les dés</td> <td style="padding: 5px;">$U = 1 \text{ kV}$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Énergie finale des protons</td> <td style="padding: 5px;">1 à 30 MeV</td> </tr> </table> <p>Source : site de l'université du Mans</p>	Champ magnétique	$B = 1 \text{ T}$	Tension entre les dés	$U = 1 \text{ kV}$	Énergie finale des protons	1 à 30 MeV
Champ magnétique	$B = 1 \text{ T}$							
Tension entre les dés	$U = 1 \text{ kV}$							
Énergie finale des protons	1 à 30 MeV							

Le cyclotron est un accélérateur circulaire de particules inventé par Lawrence en 1931. Dans une enceinte où règne un vide poussé, on place deux cavités métalliques en forme de demi-cylindres (en raison de leur forme on les appelle des Dés) séparées par un petit intervalle. Un champ magnétique uniforme est appli-

2. De même qu'une équation vectorielle équivaut à 3 équations scalaires (coordonnées du vecteur), l'utilisation d'une inconnue complexe permet de transformer un système de deux équations à deux inconnues réelles en une équation à une inconnue complexe. Ici les deux inconnues sont la partie réelle et la partie imaginaire, en électrocinétique les inconnues seront plutôt le module (amplitude du signal) et l'argument (phase du signal) de l'inconnue complexe.

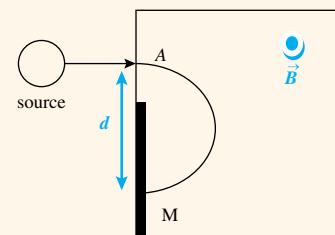
qué dans les Dés, perpendiculairement au plan du dispositif. Un canon permet d'injecter au voisinage du centre du dispositif des ions de charge q , de masse m (en général des protons). Une tension U est appliquée entre les Dés, de façon à générer un champ électrique uniforme, toujours dans le même sens que la vitesse d'arrivée de la particule (la tension change de sens après chaque demi-cercle parcouru dans un Dé). A chaque demi-tour, le rayon de rotation augmente et la particule décrit finalement une sorte de spirale. Après un grand nombre de tours, la particule sort du cyclotron. Les successeurs du cyclotron, le synchrocyclotron et le synchrotron permettent de prendre en compte les effets relativistes des particules lorsqu'elles atteignent des énergies qui dépassent le cadre classique.

- ① Exprimer l'énergie acquise par le proton en un tour. Combien de tours doit effectuer le proton pour acquérir les énergies de sortie attendues ?
- ② Exprimer le rayon de la trajectoire de la particule dans un Dé, en fonction de sa vitesse d'entrée dans le Dé. Justifier l'allure de la trajectoire en spirale.
- ③ Déterminer le temps mis par la particule pour effectuer un demi-cercle dans un Dé. En supposant que le temps de traversée du champ électrique est négligeable devant cette valeur, en déduire que les variations du champ électrique doivent être périodiques et préciser cette période pour des protons.
- ④ Quelle est la vitesse de sortie des protons dans l'hypothèse classique ? Conclure.

6 Spectrographe de masse (extrait CCP PSI 2012) ★★

→ corrigé p. 291

Une source émet des ions de même charge $+q$ mais de masses m différentes. Les ions n'ont pas tous la même vitesse. Ces ions pénètrent en A dans une zone où règne un champ magnétique uniforme comme représenté sur la figure. Le champ magnétique dévie la trajectoire des ions et ces ions viennent percuter une plaque d'enregistrement (symbolisée par le trait épais) au point M situé à une distance d du point A .



- ① Exprimer la distance d en fonction de la masse m de l'ion, de la charge q , de la norme du champ magnétique B et de la vitesse V de l'ion. Montrer qu'il est impossible de trier les particules selon leur masse uniquement.

Pour palier ce problème, la source est constituée d'un four ionisant duquel sortent des ions de même charge $+q$ à des vitesses quasi nulles. Puis, on accélère les ions à l'aide d'un dispositif formé de deux grilles parallèles entre lesquelles on applique une tension $U > 0$ placée dans le bon sens.

- ② Exprimer la vitesse des ions en sortie de ce dispositif.
- ③ Calculer alors le rapport d_1/d_2 pour deux ions de masses respectives m_1 et m_2 .

7 Aspects relativistes ★★

→ corrigé p. 291

- ① Déterminer la masse du proton en unités SI d'après les données ci-dessous.
- ② Comparer la vitesse obtenue par un calcul classique et par un calcul relativiste pour un proton dans le Linac 2 et compléter le tableau du document 2 (*voir page suivante*).
- ③ Que vaut l'énergie totale d'une particule ? Commenter la progression linéaire approximative observable sur la courbe de Livingston. En imaginant des progrès technologiques qui se poursuivraient avec la même progression, quand pourra-t-on construire des accélérateurs où la vitesse des particules atteindrait c ?
- ④ Exprimer le rayon de la trajectoire d'une particule classique dans un champ magnétique en fonction de sa quantité de mouvement. Lorsque la particule est relativiste, on montre que cette expression reste valable mais avec une définition relativiste de la quantité de mouvement : $p = \gamma m v$. Expliquer alors

qualitativement pourquoi la variation du champ électrique dans le cyclotron ne peut plus être périodique si le champ magnétique reste stationnaire (*voir résultat de l'exercice n° 5 p. 283*).

DOCUMENT 1

Le rapport newtonien classique entre vitesse et énergie cinétique ($E_c = mv^2/2$) ne fonctionne que pour des vitesses largement inférieures à celles de la lumière. Pour des particules se déplaçant à une vitesse proche de celle de la lumière, il convient d'utiliser l'équation de la relativité restreinte d'Einstein $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ où c représente la vitesse de la lumière, m la masse de la particule au repos et où γ est reliée à la vitesse par : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ avec $\beta = \frac{v}{c}$

DOCUMENT 2 : Relation entre l'énergie cinétique et la vitesse d'un proton dans les accélérateurs du CERN

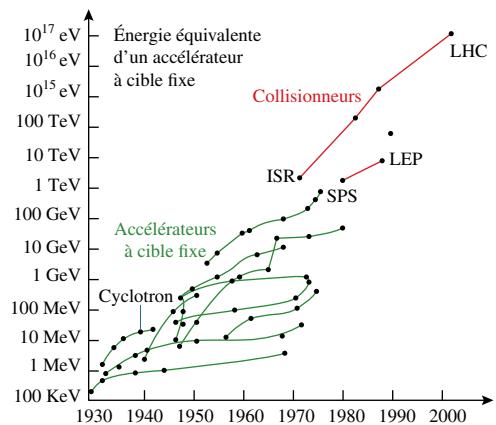
La masse au repos du proton est $0,938 \text{ GeV}/c^2$.

Energie cinétique	Vitesse (en %c)	accélérateur
50 MeV		Linac 2
1,4 GeV	91,6	Booster PS
25 GeV	99,93	PS
450 GeV	99,9998	SPS
7 TeV	99,999991	LHC

DOCUMENT 3 : Diagramme de Livingston

Ce diagramme indique l'énergie atteinte par les faisceaux de particules dans les accélérateurs au fil des ans.

Sources : documents 1 et 2 : guide du LHC édité par le CERN
<http://multimedia-gallery.web.cern.ch/multimedia-gallery/Brochures.aspx> ;
document 3 : Pour la science Dossier hors série « Cent ans de particules... Où va la physique ? » n°85 octobre-décembre 2014.



Les aurores boréales résultent de l'interaction entre la haute atmosphère et les particules chargées du rayonnement cosmique, piégées par le champ magnétique terrestre.

Avec l'aimable autorisation de M. O. Couture

Conseils

Ces exercices sont des applications des chapitres de mécanique précédents. On y retrouve donc les méthodes de résolution déjà étudiées. Si la présentation est moins détaillée que dans les chapitres précédents, on y retrouve toutes les règles que le lecteur est invité à mettre en œuvre avec rigueur et clarté (schémas, définitions du référentiel, du système, des conditions initiales, énoncé des lois utilisées, résolutions des équations différentielles, analyse des résultats...).

1 Ordres de grandeur

→ énoncé p. 281

Les forces électriques et magnétiques valent respectivement :

$$F_E = eE = e \frac{U}{d} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 5}{5 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-17} \text{ N} \quad ; \quad F_B = eBv = 1,6 \cdot 10^{-19} \times 4 \cdot 10^{-5} \times 3 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^{-18} \text{ N}$$

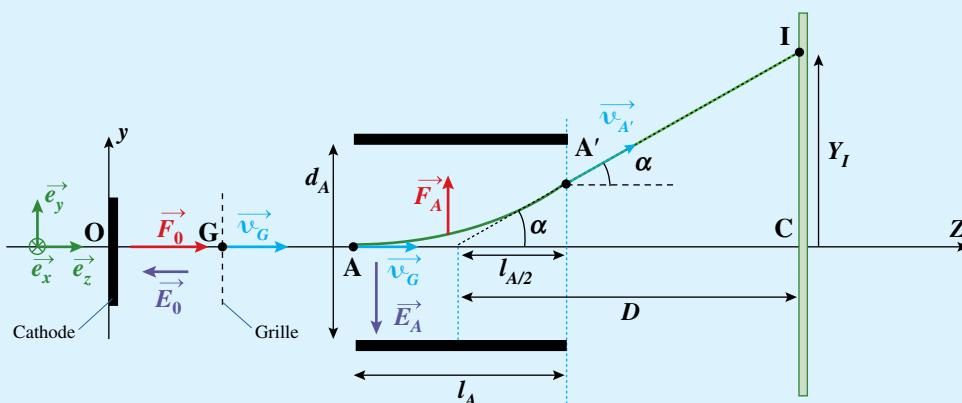
Le poids de l'électron vaut : $P = mg = 9 \cdot 10^{-31} \times 9,8 = 9 \cdot 10^{-30} \text{ N}$

Même dans des champs faibles à des vitesses faibles, les forces électromagnétiques sont très largement supérieures au poids des particules qui sera toujours négligé dans les calculs de trajectoires.

2 L'oscilloscope cathodique

→ énoncé p. 281

On suppose que le champ est uniforme entre chaque dispositif de plaques et qu'il s'annule brutalement en dehors, ce qui revient à négliger les effets de bord. À chaque système de plaques, on étudie le mouvement de l'électron dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on utilisera les coordonnées cartésiennes. Il n'est soumis qu'à la force électrique (poids négligeable). Les notations utilisées sont indiquées sur le schéma ci-dessous où ne figure pas le dernier système de plaques.



- ① Entre la cathode et l'anode, règne un champ électrique orienté suivant (Oz) et de sens négatif, pour accélérer des électrons de charge négative. La tension U_0 définie par le schéma de l'énoncé est donc nécessairement positive (le champ est orienté vers les potentiels décroissants). Entre les plaques, le champ est orthogonal aux plaques, donc suivant l'axe y entre les plaques horizontales et suivant l'axe x entre les plaques verticales. Pour des tensions positives U_A et U_B les champs sont en sens contraires des axes. L'électron est de charge négative, il subit une force opposée aux champs. Il est donc accéléré sur une trajectoire rectiligne entre l'anode et la cathode, puis il est dévié verticalement (vers le haut pour une tension positive) suivant l'axe y entre les plaques horizontales. L'électron pénètre entre les plaques verticales avec une vitesse collinaire aux plaques (les précédents champs ne l'ayant pas dévié suivant l'axe x). Il est alors dévié horizontalement suivant l'axe x (dans ce sens si la tension U_B est positive) entre les plaques verticales. Entre deux systèmes de plaques, l'électron n'est soumis à aucune force, il est donc animé d'un mouvement rectiligne.

uniforme dans la direction de sa vitesse de sortie du système de plaques précédent.

- ② On applique le théorème de la résultante cinétique à l'électron (PFD) :

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$$

Soit, par projection sur (Oz) et en tenant compte du signe de la charge ($q = -e$) et du sens du champ :

$$eE = m\ddot{z} \quad \text{puis} \quad \ddot{z} = \frac{eE}{m} = \frac{eU_0}{md_0} = \text{cste}$$

$$\text{En intégrant : } \dot{z} = \frac{eU_0}{md_0}t + \dot{z}_0 = \frac{eU_0}{md_0}t \quad \text{puis} \quad z = \frac{eU_0}{2md_0}t^2 + z_0 = \frac{eU_0}{2md_0}t^2$$

Équation horaire d'un **mouvement rectiligne uniformément accéléré suivant l'axe (Oz)**.

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre O et G :

$$\Delta E_C = E_C(G) - E_C(O) = \frac{1}{2}mv_G^2 = W_{O \rightarrow G}(q\vec{E}) = q\vec{E} \cdot \vec{OG} = eEd_0$$

$$\text{Soit : } v_G = \sqrt{\frac{2eEd_0}{m}} = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$

N. B : On peut aussi utiliser les équations horaires et éliminer t entre z et sa dérivée.

En l'absence d'autres champs, l'électron va impacter l'écran en son centre C.

- ③ On choisit une nouvelle origine des temps : l'instant où l'électron arrive en A. On applique le théorème de la résultante cinétique (PFD) :

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$$

soit par projection sur (Oyz) en tenant compte du signe de la charge et du sens du champ :

$$\begin{cases} eE = m\ddot{y} \\ 0 = m\ddot{z} \end{cases} \quad \text{d'où :} \quad \begin{cases} \ddot{y} = \frac{eE_A}{m} = \frac{eU_A}{d_A m} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$\text{en intégrant : } \begin{cases} \dot{y} = \frac{eU_A}{d_A m}t \\ \dot{z} = v_G \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = \frac{eU_A}{2d_A m}t^2 \\ z = v_G t + OA \end{cases} \quad \text{où l'on a tenu compte des conditions initiales.}$$

On en déduit l'équation de la trajectoire en éliminant le temps entre les équations horaires :

$$y = \frac{eU_A}{2d_A m v_G^2} (z - OA)^2$$

qui est celle d'une **parabole de sommet** A et dont la courbure est précisée sur le schéma.

L'électron sort des plaques au point A', tel que :

$$z_{A'} = OA + l_A \quad \text{d'où :} \quad t_{A'} = \frac{l_A}{v_G} \quad \text{et} \quad y_{A'} = \frac{eU_A l_A^2}{2d_A m v_G^2}$$

Le mouvement ultérieur est rectiligne uniforme dans une direction qui fait un angle α avec l'horizontale. On vérifie aisément l'indication de l'énoncé (propriété générale d'une parabole) :

$$\tan \alpha = \frac{Y_I}{D} = \frac{2y_{A'}}{l_{A'}} = \frac{\dot{y}(A')}{\dot{z}(A')} = \frac{eU_A l_A}{d_A m v_G^2} = \frac{U_A l_A}{d_A 2U_0} \quad \text{soit} \quad Y_I = \frac{DU_A l_A}{2d_A U_0} = kU_A$$

qui montre que, k ne dépendant que de paramètres internes de l'oscilloscope, la **déviation** Y_I sur l'écran est proportionnelle à la tension appliquée aux plaques.

- ❸ On a vu qu'entre les plaques horizontales, la déviation dans une direction orthogonale est proportionnelle à la tension. On obtiendra le même résultat avec la déviation horizontale par rapport à la tension entre les plaques verticales. Si la tension varie comme celle de l'énoncé, alors la déviation augmentera de façon proportionnelle au temps et reviendra ensuite brutalement à la valeur minimale puis recommencera. Cela se traduira par un mouvement régulier à vitesse constante du faisceau horizontalement sur l'écran suivi d'un retour rapide au début de l'écran. Si on combine les deux systèmes de plaques **on aura alors à l'écran l'étalement des valeurs de la tension U_A** en fonction du temps. On peut ensuite jouer sur les différents paramètres pour obtenir divers fonctionnalités : amplification de la tension U_A pour dilater la déviation verticale, augmentation de la période de la tension en dents de scie pour un balayage plus rapide, temps de latence entre les dents de scie pour la synchronisation...

3 Mouvement dans un champ magnétique

→ énoncé p. 282

- ❶ On applique le théorème de la résultante cinétique (PFD) à la particule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen (*la position du problème est faite dans l'énoncé*) :

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a}$$

On exprime aisément les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération en cartésiennes, et on écrit l'expression précédente sous une forme commode de représentation des vecteurs par leurs coordonnées :

$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = m\vec{a}$$

D'où :

$$\begin{cases} qB\dot{y} = m\ddot{x} \\ -qB\dot{x} = m\ddot{y} \\ 0 = m\ddot{z} \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \omega\dot{y} = 0 & (1) \\ \ddot{y} + \omega\dot{x} = 0 & (2) \\ \ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$$

avec $\omega = \frac{qB}{m}$

- ❷ Il s'agit d'un système de 3 équations différentielles dont les inconnues sont $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ les équations horaires du mouvement. Les équations (1) et (2) sont couplées, car les deux inconnues x et y figurent dans (1) et (2). L'équation (3) se résout aisément, indépendamment des deux premières.

$$\dot{z} = cste = \dot{z}(t=0) = v_{0z} \quad \text{puis} \quad z = v_{0z}t + z_0 = v_{0z}t \quad (\text{à } t=0, \text{ la particule est en O})$$

Le mouvement selon (Oz) est donc un mouvement rectiligne uniforme.

- ❸ Le système S, (1) et (2), est alors équivalent à l'équation suivante obtenue en additionnant (1) et i(2) :

$$\ddot{x} + i\ddot{y} + \omega(i\dot{x} - \dot{y}) = 0 \quad \text{soit} : \quad \ddot{x} + i\ddot{y} + i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) = 0 \quad (\text{on rappelle } i^2 = -1)$$

Finalement en utilisant les variables complexes proposées par l'énoncé :

$$\ddot{\xi} + i\omega\dot{\xi} = 0 \quad \text{soit} \quad \dot{\xi} + i\omega\xi = 0$$

Équation différentielle du premier ordre à coefficients constants (complexes) dont on connaît bien la solution (que l'on peut retrouver par séparation des variables) :

$$\xi = Ce^{-i\omega t}$$

avec C une constante d'intégration (*a priori* complexe) que l'on détermine par les conditions initiales :

$$\text{À } t=0 : \quad \xi = \dot{\xi}_{t=0} + i\dot{y}_{t=0} = v_{0\perp} = C$$

$$\text{D'où :} \quad \xi = v_{0\perp} e^{-i\omega t} = v_{0\perp} [\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t)] = v_{0\perp} [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] = \dot{x} + i\dot{y}$$

- ❹ Puis³ : $\dot{x} = v_{0\perp} \cos(\omega t)$ et $\dot{y} = -v_{0\perp} \sin(\omega t)$

3. On pourrait poursuivre en complexe : $\dot{\xi} = \zeta = v_{0\perp} e^{-i\omega t}$ d'où $\zeta = -\frac{v_{0\perp}}{i\omega} e^{-i\omega t} + K = i \frac{v_{0\perp}}{\omega} e^{-i\omega t} + K = i \frac{v_{0\perp}}{\omega} (e^{-i\omega t} - 1)$ car $\xi(t=0) = 0$, qui donne finalement : $\xi = x + iy = i \frac{v_{0\perp}}{\omega} [\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t) - 1] = \frac{v_{0\perp}}{\omega} [\sin(\omega t) + i(\cos(\omega t) - 1)]$

Qui s'intègre aisément en :

$$x = \frac{v_{0\perp}}{\omega} \sin(\omega t) + K_1 \quad \text{et} \quad y = \frac{v_{0\perp}}{\omega} \cos(\omega t) + K_2$$

Où K_1 et K_2 sont des constantes d'intégration, que l'on détermine avec les conditions initiales (à $t = 0$, on a $x = y = 0$). Les équations horaires sont donc :

$$\begin{cases} x = R \sin(\omega t) \\ y = R(\cos(\omega t) - 1) \\ z = v_{0\parallel} t \end{cases}$$

avec $R = \frac{v_{0\perp}}{\omega} = \frac{mv_{0\perp}}{qB}$ où $q > 0$

Si la charge est négative, tout ce qui précède reste valable à condition de poser $\omega = \frac{|q|B}{m}$ et de remplacer ω par $-\omega$ et R par $-R$ dans les équations horaires obtenues ci-dessus, on obtient alors :

$$\begin{cases} x = R \sin(\omega t) \\ y = R(1 - \cos(\omega t)) \\ z = v_{0\parallel} t \end{cases} \quad \text{avec } R = \frac{v_{0\perp}}{\omega} = \frac{mv_{0\perp}}{|q|B} \quad \text{et} \quad \dot{x} = v_{0\perp} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \dot{y} = v_{0\perp} \sin(\omega t)$$

- 6** Dans les équations horaires précédentes il est facile de reconnaître **un mouvement circulaire uniforme dans le plan (Oxy)** :

Si $q > 0$: $x^2 + (y + R)^2 = R^2 \sin^2(\omega t) + R^2 \cos^2(\omega t)$

Soit : $x^2 + (y + R)^2 = R^2$ l'équation cartésienne d'un cercle de centre P (0, -R) et de rayon R

Si $q < 0$: $x^2 + (y - R)^2 = R^2 \sin^2(\omega t) + R^2 \cos^2(\omega t)$

Soit : $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ l'équation cartésienne d'un cercle de centre N (0, R) et de rayon R

On vérifie aisément par ailleurs que, quel que soit le signe de q :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{v_{0\perp}^2 (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) + v_{0\parallel}^2} = \sqrt{v_{0\perp}^2 + v_{0\parallel}^2} = v_0 = \text{cste}$$

Le mouvement est donc uniforme comme l'étude énergétique le prévoit. Le mouvement complet est la composition d'un mouvement rectiligne uniforme selon l'axe du champ et circulaire uniforme dans un plan perpendiculaire. Il s'agit donc du **mouvement hélicoïdal uniforme** schématisé p. 279 pour les deux signes possibles de la charge. Les lignes de champ sont des droites parallèles à (Oz) et la trajectoire s'enroule autour de ces lignes. On retrouve par ailleurs les cas particuliers vus dans le cours :

- a) si la vitesse initiale est colinéaire au champ, alors $v_{0\perp} = 0$ et $x(t) = y(t) = 0$, le mouvement est rectiligne uniforme suivant (Oz) à la vitesse $v_0 = v_{0\parallel}$
 b) si la vitesse initiale est orthogonale au champ, alors $v_{0\parallel} = 0$ et $v_0 = v_{0\perp}$, le mouvement est circulaire uniforme et on retrouve dans les équations ci-dessus les deux trajectoires circulaires qui diffèrent selon le signe de la charge, comme indiqué sur le schéma p. 279.

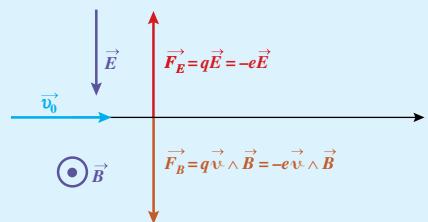
Bien comprendre

Outre l'aspect technique de cette démonstration, qu'il est utile de maîtriser, on notera aussi son intérêt physique dans la mise en évidence rigoureuse de la trajectoire hélicoïdale, qui permet une généralisation de mouvement autour de lignes de champs complexes (dans la magnétosphère terrestre par exemple).

4 Expérience de Thomson

→ énoncé p. 283

La déviation, lorsqu'elle existe, est due soit à la force magnétique, soit à la force électrique, soit ici à la résultante des deux. Pour qu'il n'y ait pas de déviation, il faut que la résultante des forces soit nulle, donc que la force électrique compense la force magnétique. Les deux forces doivent donc être colinéaires et opposées. La force magnétique étant orthogonale au déplacement, il doit en



être de même pour la force électrique, ce qui fixe la direction des champs. La résultante des forces est nulle, le mouvement est donc rectiligne uniforme $\vec{v} = \vec{v}_0$. Compte tenu des orientations, il vient facilement :

$$eE = e\vec{v}_0 B \quad \text{soit : } \vec{v}_0 = \frac{\vec{E}}{B}$$

Remarquons que, puisque la vitesse à l'issue de la zone des champs est identique à celle de l'entrée, si un faisceau d'électrons non monocinétique (dans un faisceau monocinétique, toutes les particules ont la même vitesse) arrive sur la zone de champ, seuls ceux ayant la vitesse E/B auront une trajectoire rectiligne, tous les autres seront déviés. Wien en 1898 utilisa ce principe pour filtrer des électrons et sélectionner ceux d'une vitesse donnée. *On notera au passage la dimension du rapport E/B , homogène à une vitesse.*

5 Principe du cyclotron

→ énoncé p. 283

- 1 Seul le champ électrique peut communiquer de l'énergie, le champ magnétique ne peut que dévier la particule sans lui communiquer d'énergie, car la force magnétique, orthogonale au déplacement, ne travaille pas. Lorsque la particule passe dans la zone de champ électrique, celui-ci est toujours orienté dans un sens qui la fait accélérer (*voir schéma*), elle acquiert une énergie liée à la tension sur son trajet, et ce, deux fois en un tour. La tension étant constante, l'énergie acquise en un tour vaut :

$$E_1 = 2qU = 2eU \quad \text{soit : } E_1 = 2 \text{ keV}$$

L'énergie de sortie E_n est donnée dans le document entre 1 et 30 MeV, soit un nombre de tours n qui vaut

$$n = \frac{E_n}{E_1} \quad \text{soit : } \mathbf{500 \text{ tours} < n < 15 \,000 \text{ tours}}$$

Bien comprendre

On a ici intérêt, comme souvent, à utiliser l'électron-Volt comme unité d'énergie, d'autant plus pratique que le proton a la charge élémentaire. La valeur de la tension accélératrice (ici 1 kV) donne donc directement l'énergie acquise lors d'un passage dans le champ électrique.

- 2 Le rayon d'un demi-cercle est celui de la trajectoire circulaire uniforme d'une particule arrivant avec une vitesse orthogonale (de norme v_i) à un champ magnétique uniforme et stationnaire établie p. 279 (ou plus généralement dans l'exercice n° 3) :

$$R_i = \frac{v_i}{\omega} = \frac{mv_i}{qB} \quad (\text{Notons que } \omega = \frac{qB}{m} \text{ est appelée pulsation cyclotron.})$$

Ce rayon est proportionnel à la vitesse d'entrée dans le Dé, or à chaque passage dans la zone entre les Dés la vitesse augmente grâce au champ électrique, donc le rayon augmente à chaque passage. On peut noter par ailleurs, que l'orientation du champ entraîne bien une force cohérente avec la courbure dans le sens indiqué sur le schéma à chaque arrivée dans un Dé. La particule subit donc une succession de mouvements rectilignes uniformément accélérés entre les Dés (accélération par le champ électrique) alternés avec des mouvements circulaires uniformes sur des demi-cercles de rayons croissants. La trajectoire a donc une forme en spirale.

- 3 Le mouvement étant uniforme, le temps de parcours se calcule à l'aide du périmètre du demi-cercle et de la vitesse de parcours :

$$t_i = \frac{\pi R_i}{v_i} = \frac{\pi m v_i}{qB v_i} = \frac{\pi m}{qB}$$

On note que ce temps ne dépend pas de la vitesse, donc tous les demi-cercles sont parcourus en un temps identique. On voit donc que, si on néglige le temps de parcours entre les Dés, il suffit d'alterner le champ

électrique suivant une demi-période égale à t_r . Soit une période du champ électrique :

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ s} = 66 \text{ ns}$$

Soit un temps pour une spirale complète des protons les plus énergétiques (15000 tours) d'environ 1 ms.

- ④ On obtient les vitesses des protons à l'aide de la définition classique de l'énergie cinétique :

$$E_C(S) = \frac{1}{2}mv_s^2 \quad \text{d'où : } v_s = \sqrt{\frac{2E_{C(J)}}{m}} = \sqrt{\frac{2eE_{C(eV)}}{m}} \text{ soit : } 1,4 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1} < v_s < 7,6 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

La valeur inférieure reste classique en première approximation (inférieure au dixième de c), mais la valeur maximale est clairement relativiste et nécessite de prendre en compte ces effets dans l'accélérateur, d'où les versions ultérieures des cyclotrons (*voir exercice n° 7*).

6 Spectrographe de masse

→ énoncé p. 284

- ① La trajectoire est celle d'une charge pénétrant dans un champ magnétique uniforme et stationnaire avec une vitesse orthogonale au champ. On a montré dans ce cas (*voir exercice n° 3*) que la trajectoire est circulaire uniforme (*c'est également cette démonstration qui est demandée préalablement dans le sujet dont est extrait cet exercice*). Par construction M et A sont diamétralement opposés, d est donc le diamètre du cercle dont on a établi l'expression du rayon dans l'exercice n° 3 (ou dans le cours en admettant le mouvement circulaire uniforme) :

$$d = 2R = 2 \frac{mv}{qB}$$

On peut avoir des ions de masses différentes qui arrivent au même point (par exemple un ion 1 et un ion 2 deux fois plus massique mais deux fois plus lent). **On ne peut donc pas les séparer.**

- ② On applique le théorème de l'énergie cinétique entre la sortie du four et la sortie du dispositif accélérant :

$$\Delta E_C = E_C(A) - E_C(F) = \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{F \rightarrow A}(q\vec{E}) = q\vec{E} \cdot \vec{AF} = qEl = qU$$

Soit :

$$v_A = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

- ③ La distance d vaut donc :

$$d = 2 \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}} \quad \text{d'où : } \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

Cette fois la distance d ne dépend que de constantes, les ions ayant tous la même charge, et, bien que les ions n'aient pas tous la même vitesse, on peut les séparer. Les ions les plus lourds arriveront plus bas sur le détecteur.

7 Aspects relativistes

→ énoncé p. 284

- ① La masse du proton est donnée sous forme d'énergie par c^2 , ce qui signifie que son énergie de masse vaut 0,938 GeV. On retrouve la valeur connue de la masse du proton :

$$E = mc^2 \quad \text{d'où} \quad m_{(kg)} = \frac{E_{(J)}}{c^2} = \frac{eE_{(eV)}}{c^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,938 \cdot 10^9}{(3,00 \cdot 10^8)^2} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

- ❷ Considérons que la particule reste classique si sa vitesse ne dépasse pas un dixième de celle de la lumière.
Si l'on adopte un calcul classique pour les protons du Linac 2 on obtient :

$$\nu = \sqrt{\frac{2E_{C(J)}}{m_{(kg)}}} = \sqrt{\frac{2eE_{C(eV)}}{em_{(eV/c^2)} / c^2}} \quad \text{d'où : } \frac{\nu}{c} = \sqrt{\frac{2E_{C(eV)}}{m_{eV/c^2}}} = \sqrt{\frac{2 \times 50.10^6}{0,938.10^9}} = 0,33 > 0,1$$

valeur qui sort du cadre classique. On doit donc calculer la vitesse avec l'expression relativiste du doc.1 :

$$\gamma = 1 - \frac{2E_{C(J)}}{m_{(kg)}c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{avec le rapport de la vitesse à celle de la lumière } \beta :$$

$$\beta = \frac{\nu}{c} = \sqrt{1 - \left(1 + \frac{E_{C(J)}}{m_{(kg)}c^2}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(1 + \frac{E_{C(eV)}}{m_{(eV/c^2)}}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(1 + \frac{50.10^6}{0,938.10^9}\right)^2} = 0,314$$

La valeur manquante du tableau est donc 31,4 %. L'écart entre les calculs relativiste et classique est d'environ 4 %, suffisant pour justifier un traitement relativiste.

Conseils

Les unités énergétiques en eV et les unités de masse en eV/c^2 sont beaucoup plus commodes à utiliser ici, même si un retour aux unités SI est toujours possible. On les indique en indice dans les calculs.

- ❸ L'énergie totale de la particule est la somme de son énergie cinétique et de son énergie de masse :

$$E = E_C + E_m = (\gamma - 1)mc^2 + mc^2 = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{soit : } \beta = \frac{\nu}{c} = \sqrt{1 - \frac{mc^2}{E}}$$

Lorsque la vitesse de la particule augmente, β augmente et l'énergie augmente également. Lorsque la vitesse tend vers c alors l'énergie tend vers l'infini. Une énergie infinie est impossible à obtenir, ce qui signifie qu'une particule massique ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière. Seule une particule de masse nulle comme le photon peut atteindre cette vitesse (mais pas la dépasser !). La progression est linéaire sur le graphique, mais celui-ci est en ordonnée logarithmique, c'est-à-dire que les intervalles ne sont pas identiques, car on passe d'une graduation à la suivante en multipliant par 10, la progression est donc en réalité exponentielle. Mais même avec une telle progression des accélérateurs (sauf à attendre un temps infini...), **on ne pourra pas obtenir des vitesses supérieures à c** car cette limite est une limite physique et non technique.

- ❹ Les rayons classiques et relativistes valent respectivement :

$$R_{\text{classique}} = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} \quad R_{\text{relativiste}} = \frac{\gamma mv}{qB}$$

Avec une approche classique on a montré dans l'exercice n° 5 que le temps de parcours dans un Dé de cyclotron est indépendant de la vitesse, ce qui permet une inversion périodique du champ électrique. Mais dans une approche relativiste, le coefficient γ dans l'expression du rayon induit un temps de parcours qui dépend de la vitesse de la particule, le champ électrique ne peut donc plus être périodique, il faut le synchroniser avec la particule (synchrocyclotron). *En pratique, on augmente aussi le champ magnétique au fur et à mesure et on maintient une trajectoire de rayon constant (et non en spirale) qui permet de conserver plus longtemps la particule dans l'anneau et également de tenir compte des effets relativistes.*

À méditer

L'esprit humain ne se contente pas d'admirer, il veut aussi comprendre.

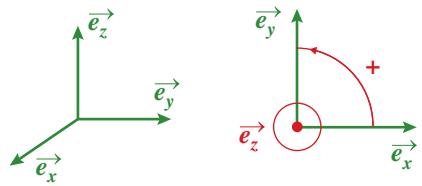
HUBERT REEVES (1932-)

Théorème du moment cinétique

En mécanique du point, le théorème du moment cinétique est une alternative commode au théorème de la résultante cinétique (dont il est issu) dans le cas où le point matériel tourne autour d'un point ou d'un axe. En mécanique des systèmes, il fait partie intégrante du principe fondamental de la dynamique dans lequel il complète le théorème de la résultante cinétique et, dans ce cadre, sera étudié au chapitre 18.

OUTILS MATHÉMATIQUES

■ **Trièdre direct** : de même que le sens trigonométrique est choisi par convention comme sens positif pour orienter le plan, l'orientation de l'espace fait l'objet d'une convention. Il existe de nombreux moyens mnémotechniques (peu élégants) utilisant les doigts d'une main pour le visualiser. On retiendra plutôt que si le trièdre $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est direct, alors lorsque la rotation de \vec{A} vers \vec{B} est vue dans le sens trigonométrique, \vec{C} pointe vers soi.



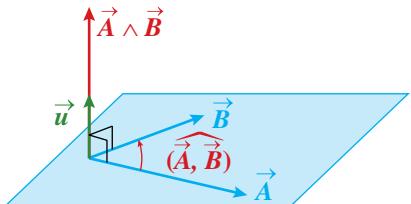
Les bases des systèmes de coordonnées sont toujours directes, la vision familière du trièdre de la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ suffit donc à visualiser le sens direct. Par ailleurs toute permutation circulaire dans un trièdre direct est aussi directe $((\vec{e}_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y))$ par exemple).

■ **Produit vectoriel** : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin(\widehat{\vec{A}, \vec{B}}) \vec{u}$

► Le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est orthogonal aux vecteurs \vec{A} et \vec{B} et le trièdre $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$ est direct.

► Le produit vectoriel est anticommutatif : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

► Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul.



■ **Dérivée d'un produit vectoriel** : les produits de vecteurs (scalaire, vectoriel) se dérivent comme les produits de fonctions (attention, l'ordre des vecteurs n'est pas indifférent pour le produit vectoriel) :

$$\frac{d(\vec{A} \wedge \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{dt}$$

■ **Produit mixte** : le produit mixte est une opération de trois vecteurs dont le résultat est un scalaire et qui est obtenu par un produit vectoriel suivi d'un produit scalaire. Le produit mixte est invariant par permutation circulaire et anti-commutatif :

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad \text{et} \quad (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{C}, \vec{A}, \vec{B}) = (\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}) = -(\vec{B}, \vec{A}, \vec{C})$$

■ **Trigonométrie** : $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$; $\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

I | Concept de moment

1. Moment d'une force

Il est facile de constater que la même force appliquée à un système peut conduire à des effets différents, selon la position de son point d'application. Il suffit de réaliser l'expérience suivante pour en prendre conscience : considérons une porte banale pouvant tourner autour de ses gonds et une force qu'on lui applique perpendiculairement à son plan. Pour une même force (norme, direction et sens) on constate aisément que plus le point d'application de la force est éloigné des gonds et plus la porte tourne facilement. Le point d'application de la force a donc une importance qui n'a pas été exploitée jusqu'à présent et qui va conduire à définir le concept de moment.

Pour un point matériel, il est évident qu'il n'existe qu'un seul point d'application... le point lui-même ! Mais du fait que le point matériel se déplace par rapport au référentiel, la notion de moment reste pertinente pour constituer un outil de résolution des problèmes et conduire à un théorème qui pourra, à l'instar des théorèmes énergétiques, remplacer efficacement le théorème de la résultante cinétique. Dans le chapitre 18 on verra que pour un système, ces notions sont complémentaires et conjointement nécessaires.

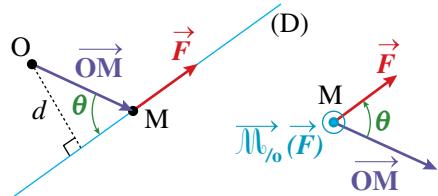
Définition

Le moment par rapport à un point O de la force \vec{F} exercée sur le point M est le vecteur défini par :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

La valeur du moment n'a pas d'unité spécifique et s'exprime en N.m (= kg.m².s⁻²).

On constate immédiatement que le moment est nul si la force est nulle, si le point O est confondu avec M ou si la force est portée par la droite (OM). Supposons qu'aucune de ces conditions n'est réalisée, les deux vecteurs définissent alors nécessairement un plan qui est choisi comme plan de figure. Avec les notations portées sur cette figure (ci-contre), on a :



$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \|\overrightarrow{OM}\| \|\vec{F}\| \sin \theta \vec{e}_z = OM \sin \theta \cdot F \vec{e}_z \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = dF \vec{e}_z}$$

La grandeur d , appelée aussi **bras de levier** de la force, est la distance minimale de O (point où l'on calcule le moment) à la droite (D) portant la force, droite qui passe nécessairement par M.

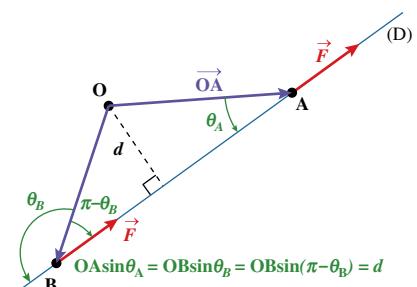
■ Le bras de levier est la distance qui importe dans le calcul du moment, en effet, quelle que soit la position de M sur la droite (D), le moment de la force sera le même.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{M en A}}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{M en B}}) = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F} = dF \vec{e}_z$$

■ La norme du moment de la force est donc d'autant plus importante que la valeur de la force est grande et que le bras de levier d est grand.

■ On confirme avec cette expression que si O appartient à la droite support de la force, le moment est nul.

■ Dans l'exemple de la porte, on voit que le moment par rapport à un point du gond de la force orthogonale à la porte est bien plus grand près de la poignée (bras de levier plus grand) que vers les gonds, propriété qui sera exploitée dans le chapitre 18.



$$OA \sin \theta_A = OB \sin \theta_B = OB \sin(\pi - \theta_B) = d$$

2. Moment cinétique

Définition

Le **moment cinétique** par rapport à un point O d'un point matériel de masse m , situé au point M et animé d'une vitesse \vec{v} est le moment par rapport à O de sa quantité de mouvement :

$$\overline{L}_{/O}(M) = \overline{OM} \wedge \vec{p} = \overline{OM} \wedge m\vec{v}$$

La valeur du moment cinétique n'a pas d'unité spécifique et s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (= N.m.s)

- Le moment cinétique dépend du référentiel.
- Le moment cinétique était auparavant noté $\overline{\sigma}_{/O}(M)$, notation utilisée par certains énoncés.
- Physiquement, le moment cinétique indique dans quelle mesure et dans quel sens le point M tourne autour de O, ce qui se conçoit en étudiant l'influence conjointe de la position du point par rapport à O, de l'orientation de la vitesse et de sa valeur. En particulier un point qui se déplace sur la droite (OM) a un moment cinétique nul, car il ne tourne pas autour de O.

3. Moment vectoriel et moment scalaire d'un vecteur

En réalité, on peut définir le moment de n'importe quel type de vecteur par rapport à un point avec la même relation que précédemment. Un torseur, objet mathématique utilisé en SI (qui pourrait tout aussi

bien être utilisé dans le formalisme du cours de mécanique en physique) et noté en général $\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overline{M}_{/O}(\vec{R}) \end{Bmatrix}$

est formé des deux vecteurs que sont \vec{R} un vecteur de nature quelconque appelé résultante et $\overline{M}_{/O}(\vec{R})$ son moment par rapport à O. Selon la nature de la résultante, on parlera de torseur cinétique (quantité de mouvement, moment cinétique), de torseur de force (force, moment de la force), de torseur dynamique...

Le vecteur moment est orthogonal au plan formé par la résultante et par le vecteur \overline{OM} . Il met en évidence une rotation et, en particulier, son sens, grâce à l'orientation induite par le produit vectoriel.

Définition

Le **moment par rapport à un axe Δ** , auquel appartient le point O, de la force \vec{F} exercée sur le point M est le **scalaire** défini par : $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = \overline{M}_{/O}(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta = (\overline{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta$ où $O \in \Delta$

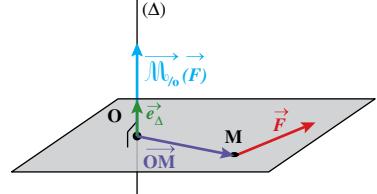
- Le moment scalaire ne dépend pas du point utilisé. Soient O et O' sur l'axe Δ :

$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = \overline{M}_{/O}(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta = (\overline{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta = [(\overline{OO'} + \overline{O'M}) \wedge \vec{F}] \cdot \vec{e}_\Delta = [\overline{OO'} \wedge \vec{F} + \overline{O'M} \wedge \vec{F}] \cdot \vec{e}_\Delta$$

D'où : $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = (\overline{OO'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta + (\overline{O'M} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta = (\vec{e}_\Delta \wedge \overline{OO'}) \cdot \vec{F} + \overline{M}_{/O'}(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta$

Où l'on a utilisé la propriété d'invariance par permutation circulaire du produit mixte rappelée en début de chapitre (voir p. 293). Le premier terme de la somme obtenue est nul (produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires) et par suite on obtient :

$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = \overline{M}_{/O \in \Delta}(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta = \overline{M}_{/O' \in \Delta}(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta \quad \forall (O, O') \in \Delta$$



- Si l'axe est orthogonal au plan formé par \overline{OM} et \vec{F} , alors le moment par rapport à l'axe est la valeur algébrique du moment par rapport à O.

- Un moment scalaire positif indique une rotation de sens direct par rapport à l'orientation choisie sur l'axe, un moment scalaire négatif indique une rotation dans le sens indirect.

II | Théorème du moment cinétique pour un point matériel

1. Démonstration et énoncé

Soit un point matériel M étudié dans un référentiel \mathcal{R} galiléen et soumis à des forces \vec{F}_i . On dérive par rapport au temps l'expression du moment cinétique par rapport à un point fixe O :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{/O}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{OM} \wedge \vec{p}) = \frac{d\overline{OM}}{dt} \wedge \vec{p} + \overline{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \overline{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Le premier terme de la somme est nul (produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires). On utilise le théorème de la résultante cinétique appliquée à M dans \mathcal{R} galiléen dans le second terme, il vient :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{/O}}{dt} = \overline{OM} \wedge \sum \vec{F}_i = \sum \overline{OM} \wedge \vec{F}_i = \sum \overline{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}_i)$$

Énoncé

Théorème du moment cinétique (TMC) : la dérivée du moment cinétique par rapport à un **point fixe O** d'un point matériel dans un référentiel galiléen est égale à la somme des moments par rapport à O des forces qui lui sont appliquées : $\frac{d\overrightarrow{L}_{/O}}{dt} = \sum \overline{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}_i)$

- Le théorème sous cette forme ne s'applique que dans un référentiel galiléen.
- Le point O doit être fixe dans le référentiel, car dans la démonstration il sert à définir le rayon vecteur et la vitesse dans le référentiel.
- On peut également donner une version faible du théorème sous forme scalaire, qui pourra être utilisée pour un mouvement autour d'un axe fixe Δ : $\frac{d\overrightarrow{L}_{/\Delta}}{dt} = \sum \overline{\mathcal{M}}_{/\Delta}(\vec{F}_i)$

POINT MÉTHODE

Utiliser le TMC

- **L'utilisation du TMC** n'est pertinente que si le point matériel « tourne » autour d'un point fixe ou d'un axe. Il n'aura aucun intérêt pour étudier par exemple le glissement d'un cube sur un plan incliné. On l'appliquera en un point qui permet d'éliminer les forces peu intéressantes (tension d'un fil, réaction d'un support). Inversement si ces forces sont essentielles à la résolution, le TMC ne sera pas suffisant.
- Le programme est limité à des cas simples où le **théorème scalaire** s'applique (mouvement autour d'un axe fixe). L'utilisation de cette version scalaire conduit cependant souvent les élèves à des bricolages de signes et de projections plus ou moins maîtrisés, et davantage guidés par le résultat qu'on souhaite obtenir, que par un raisonnement rigoureux. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, l'application vectorielle du théorème, plus méthodique et rigoureuse, est tout à fait aisée, pour peu qu'on écrive clairement les vecteurs dans la base directe choisie. On a donc tout intérêt à privilégier le théorème sous sa forme vectorielle, l'équation scalaire sur l'axe en découlant ensuite de façon évidente (*voir exercices*).

2. Utilisation

- La démonstration du paragraphe précédent montre que pour un point matériel le théorème du moment cinétique découle du théorème de la résultante cinétique (PFD) (*voir p. 234*), comme les théorèmes énergétiques.

- Comme les théorèmes énergétiques, le théorème du moment cinétique permet souvent d'obtenir l'équation différentielle plus rapidement, mais est moins riche que le théorème de la résultante cinétique. En effet, certaines forces n'apparaîtront pas dans l'équation (et c'est l'intérêt du théorème !), car elles ont un moment nul. Elles ne pourront donc pas être calculées par ce biais (*voir exercices n° 1 et n° 2 p. 298*).
- Dans certains mouvements, on montrera que le moment cinétique est une constante du mouvement, propriété qui aura de fructueuses conséquences (*mouvement à force centrale, voir chapitre 17*).

VERS LA COLLE

Questions de cours

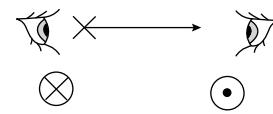
- Moment par rapport à un point d'un vecteur quelconque, moment d'une force et notion de bras de levier, moment cinétique : définitions, schématisation, exemples.
- Moment par rapport à un axe, indépendance du point de l'axe.
- Théorème du moment cinétique : démonstration, énoncé, conditions d'utilisation.

Erreurs à éviter

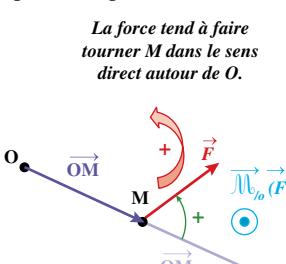
- L'utilisation du TMC suppose des calculs vectoriels en trois dimensions et un choix des axes irréfléchi peut conduire à des erreurs de signes et d'orientation. Une orientation rigoureuse et pertinente de l'espace est indispensable de façon à toujours se ramener aux systèmes de coordonnées connus, où les produits vectoriels sont faciles à écrire, la base étant directe (*voir commentaires des exercices*).
- L'orientation des angles doit suivre la même logique rigoureuse, sous peine d'erreurs de signes.

Quelques « trucs » utiles

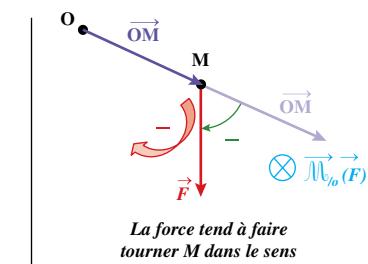
- La plupart des cas traités correspondront à des problèmes plans et les moments (de forces et cinétiques) seront orthogonaux à ce plan. On aura souvent intérêt à utiliser une représentation 2 D, les moments étant schématisés comme sur le schéma (*vu au chapitre 15 p. 280*).



La force tend à faire tourner M dans le sens direct autour de O.



La force tend à faire tourner M dans le sens indirect autour de O.


- Il est toujours pertinent, ayant effectué un calcul vectoriel rigoureux, de vérifier le signe du moment d'une force par rapport à l'orientation de l'axe qui le porte. S'il est positif, la force tend à faire tourner dans le sens direct correspondant (*voir bien comprendre de l'exercice n° 1 p. 299*).

- Comme toujours en mécanique (mais particulièrement lors de l'utilisation du TMC), il est vraiment important d'appuyer ses calculs sur un schéma dans lequel on aura représenté les grandeurs (en particulier les angles) dans des situations positives, les calculs seront alors valables même pour les cas négatifs. Un non-respect de cette logique peut conduire à de multiples erreurs de signe.
- Le produit vectoriel des vecteurs de base se calcule facilement : en suivant l'ordre de la base il est positif, il est négatif dans le sens inverse :

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z} & \text{et} \quad \overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_x} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e_y} \quad (x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow y) \\ \overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_x} = -\overrightarrow{e_z} & \text{et} \quad \overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_z} = -\overrightarrow{e_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_y} = -\overrightarrow{e_x} \quad (x \leftarrow y \leftarrow z \leftarrow x \leftarrow y) \end{array}$$

On raisonnera de même avec les bases cylindrique ($\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}$) ou sphérique ($\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\phi}$).

Conseils

L'utilisation méthodique du théorème du moment cinétique doit s'appuyer comme dans les chapitres précédents sur une présentation rigoureuse du problème (référentiel, système, cinématique...). On prendra un soin tout particulier à choisir et représenter les axes, la base de projection et les angles en respectant l'orientation directe de l'espace. L'utilisation du théorème vectoriel est alors aisée.

1 Pendule simple/pendule rigide ★

→ corrigé p. 299

Reprendre l'exercice n° 1 p. 242 et le résoudre à l'aide du moment cinétique. Les autres exercices du chapitre 13 peuvent-ils être résolus avec le TMC ?

2 Looping ★★

→ corrigé p. 300

Reprendre l'exercice n° 3 p. 266 et établir l'équation différentielle, puis l'expression de la vitesse angulaire à l'aide du TMC. Peut-on déterminer les conditions d'un looping réussi à l'aide de ce seul théorème ?

3 Pendules couplés ★★★

→ corrigé p. 300

Deux pendules simples de même masse m et même longueur ℓ sont reliés au niveau des masses ponctuelles, par un ressort horizontal de raideur k de longueur à vide ℓ_0 . Au repos les pendules sont verticaux. En maintenant le pendule 1, on écarte le pendule 2 d'un angle θ_0 et on les lâche sans vitesse initiale. On note θ_1 et θ_2 les angles des pendules avec la verticale, on les suppose petits. On note y_1 et y_2 les déplacements horizontaux des masses par rapport à la position verticale.

Conseil : Étudier les deux pendules comme deux systèmes distincts.

- ① Quelle est la longueur du ressort à l'équilibre ? À l'aide de l'hypothèse concernant l'amplitude des mouvements, proposer des approximations sur les fonctions trigonométriques des angles et une relation simple entre y_i et θ_i ($i = 1$ ou 2).
- ② Établir les équations différentielles des mouvements des masses (en $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$) en appliquant le TMC à chacune d'elles séparément. Comment s'appelle ce type de système d'équations ?
- ③ Résoudre les équations, décrire les mouvements, tracer $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ et les comparer.

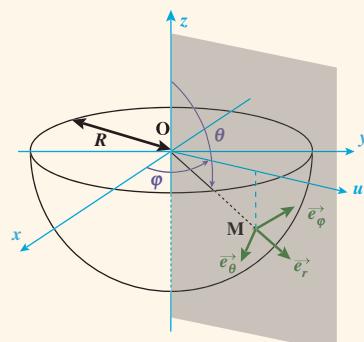
4 Bille dans une sphère creuse ★★★

→ corrigé p. 303

On considère le mouvement d'un point matériel M de masse m , dans une cuvette hémisphérique de rayon R et de centre O , le plan horizontal (Oxy) délimite la sphère qui se trouve au-dessous, on note (Oz) l'axe vertical orienté vers le haut, on travaille en coordonnées sphériques. À $t = 0$, on lance la masse à la surface (intérieure) de la cuvette en un point de départ tel que $\theta = \theta_0$ et $\varphi = 0$ et avec $\dot{\theta} = 0$ et $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$.

- ① Donner l'expression du vecteur vitesse en t quelconque, en supposant que le mobile reste en permanence sur la sphère. En déduire l'expression du moment cinétique du mobile.
- ② En appliquant le théorème du moment cinétique, établir qu'une projection du moment cinétique sur un axe à déterminer est constante. En déduire que la quantité $\dot{\varphi} \sin^2 \theta$ est une constante du mouvement que l'on déterminera. Quelles conséquences sur le mouvement de la masse peut-on en déduire ?

Conseil : On aura intérêt à tracer un schéma plan dans (Ouz) et on utilisera une propriété de \vec{e}_φ .



CORRIGÉS

Conseils

Plusieurs exercices reprennent des problèmes posés dans les chapitres 13 et 14. Le lecteur est invité à en profiter pour mettre en œuvre la méthode de résolution d'un problème de dynamique (voir p. 236). Ces solutions ayant déjà fait l'objet de longs développements dans les chapitres concernés, la résolution est ici plus allégée. Par ailleurs tous les produits vectoriels de moment seront écrits dans la base directe appropriée, ainsi on effectuera les calculs sans risque d'erreur (voir quelques « trucs » p. 297).

1 Pendule simple/pendule rigide

→ énoncé p. 298

► Outils (cadre de travail identique à la résolution p. 244)

On rappelle les outils nécessaires à l'application du TMC :

Cinématique : $\overline{OM} = \ell \vec{e}_r$ et $\vec{v} = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

Bilan des forces : $\vec{T} = -T \vec{e}_r$; $\vec{mg} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$

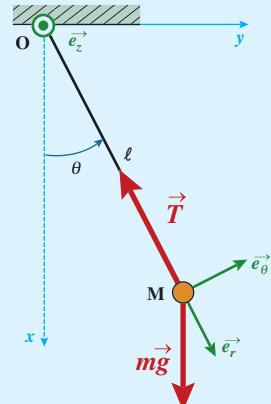
Moment cinétique : $\overline{L}_{/O} = \overline{OM} \wedge m \vec{v} = \ell \vec{e}_r \wedge m \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta = m \ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$

Remarque : Le mouvement est plan, mais le moment cinétique est orthogonal au plan du mouvement, trois directions sont donc nécessaires.

► Point de départ (loi physique)

On applique le théorème du moment cinétique en O à la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{d\overline{L}_{/O}}{dt} = \overline{M}_{/O}(\vec{T}) + \overline{M}_{/O}(\vec{mg})$$



► Moulinette à calcul

$$\frac{d\overline{L}_{/O}}{dt} = \overline{OM} \wedge \vec{T} + \overline{OM} \wedge \vec{mg} = \ell \vec{e}_r \wedge (-T \vec{e}_r) + \ell \vec{e}_r \wedge (mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$$\frac{d\overline{L}_{/O}}{dt} = -mg \ell \sin \theta \vec{e}_z$$

Bien comprendre

Il est pertinent à ce niveau de vérifier la cohérence des calculs de moments : le calcul donne un moment nul pour la tension, ce qui est cohérent avec une force dont la direction passe par O. Le moment du poids est négatif pour un angle positif, ce qui est cohérent avec le fait que dans ce cas le poids tend à faire tourner le pendule selon le sens négatif (inverse du sens trigonométrique).

D'après l'expression de $\overline{L}_{/O}$: $\frac{d\overline{L}_{/O}}{dt} = m \ell^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z$ D'où : $m \ell^2 \ddot{\theta} = -mg \ell \sin \theta$

On obtient donc finalement l'équation différentielle ci-dessous, identique à celle obtenue par d'autres théorèmes (voir p. 266 et p. 270) :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 \quad \text{pour les oscillations de faible amplitude.}$$

La suite de la résolution et de l'analyse du problème est identique (voir p. 245) aux corrigés déjà présentés. Les autres exercices concernent des mouvements où le système ne tourne pas autour d'un point ou d'un axe, situations qui ne se traitent pas avec le TMC.

Bien comprendre

On note un choix de la base cylindrique (directe !) qui apparaît aisément en prenant l'axe (Ox) vertical vers le bas et (Oy) horizontal vers la droite. Il n'est pas indispensable de les indiquer, mais ils aident à comprendre le choix pertinent de la base.

2 Looping

On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le système est l'objet assimilé à un point matériel. On utilise les coordonnées cylindriques, c'est-à-dire qu'aux vecteurs utilisés p. 270 on adjoint le vecteur \vec{e}_z perpendiculaire au plan de figure.

N. B. : On notera des choix conformes aux conseils donnés p. 297 sur les signes et l'orientation.

Les expressions des grandeurs utiles sont les suivantes :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r \quad ; \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

et : $\overrightarrow{L_{/O}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = R\vec{e}_r \wedge mR\dot{\theta}\vec{e}_\theta = mR^2\dot{\theta}\vec{e}_z \quad (1)$

On applique le théorème du moment cinétique à la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{d\overrightarrow{L_{/O}}}{dt} = \overrightarrow{M_{/O}}(\vec{N}) + \overrightarrow{M_{/O}}(m\vec{g}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{N} + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = R\vec{e}_r \wedge (-N\vec{e}_r) + R\vec{e}_r \wedge (mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta) = -mgR \sin \theta \vec{e}_z$$

Or en dérivant (1), il vient :

$$\frac{d\overrightarrow{L_{/O}}}{dt} = mR^2\ddot{\theta}\vec{e}_z \text{ d'où : } mR^2\ddot{\theta} = -mgR \sin \theta$$

et finalement l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$

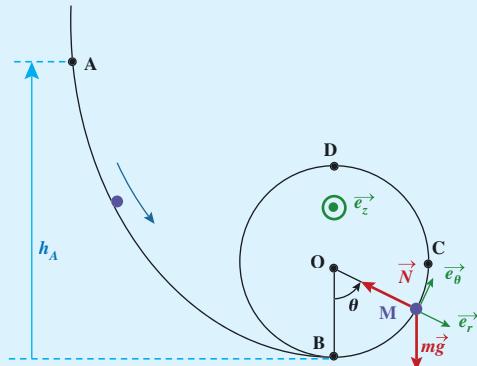
En multipliant l'équation par $\dot{\theta}$ on obtient : $\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\dot{\theta} \sin \theta = 0$

Soit : $\frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = \frac{g}{R} \frac{d \cos \theta}{dt}$ et en intégrant : $\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{R} \cos \theta + \text{constante}$

L'expression complète de la vitesse (détermination de la constante) passe par un théorème énergétique, car il est nécessaire de connaître la vitesse initiale en arrivant dans la gouttière, c'est-à-dire en B, ce qui se détermine par exemple avec un TEC entre A et B.

Les conditions du looping réussi (réaction non nulle) nécessitent d'utiliser le théorème de la résultante cinétique, le seul qui permette d'exprimer la réaction normale du support.

Le problème ne peut donc pas se résoudre totalement à l'aide du seul TMC.



3 Pendules couplés

1 À l'équilibre les pendules étant verticaux, ils ne sont soumis à aucune force de la part du ressort, ce dernier est donc non tendu, sa longueur est alors ℓ_0 comme indiqué sur le schéma. On note les grandeurs avec un indice i pouvant valoir 1 ou 2, le raisonnement étant identique pour les deux masses. Les angles étant petits, on peut écrire :

$$\sin \theta_i \approx \theta_i \quad \text{et} \quad \cos \theta_i \approx 1$$

$$\text{ainsi que : } y_i = \ell \sin \theta_i \approx \ell \theta_i$$

Les déplacements y_i sont donc quasiment horizontaux (voir schéma page suivante).

2 Cinématique : $\overrightarrow{O_i M_i} = \ell \vec{e}_{r_i}$; $\vec{v}_i = \ell \dot{\theta}_i \vec{e}_{\theta_i}$

Moment cinétique : $\overrightarrow{L_{/O_i}}(M_i) = \overrightarrow{O_i M_i} \wedge m\vec{v}_i = \ell \vec{e}_{r_i} \wedge m\ell \dot{\theta}_i \vec{e}_{\theta_i} = m\ell^2 \dot{\theta}_i \vec{e}_z$ et $\frac{d\overrightarrow{L_{/O_i}}(M_i)}{dt} = m\ell^2 \ddot{\theta}_i \vec{e}_z$

Bilan des forces :

$$\begin{aligned}\vec{T}_i &= -T_i \vec{e}_n \\ \vec{m}g &= mg(\cos \theta_i \vec{e}_n - \sin \theta_i \vec{e}_{\theta i})\end{aligned}$$

Cas de la force de rappel élastique : la force de rappel est proportionnelle à l'allongement, c'est-à-dire la différence entre la longueur du ressort L et sa longueur à vide ℓ_0 . Sur le schéma on voit que la longueur du ressort est :

$$L = (\ell_0 + y_2 - y_1)$$

D'où \vec{F}_2 exercée par le ressort sur M_2 :

$$\vec{F}_2 = -k(\ell_0 + y_2 - y_1 - \ell_0) \vec{e}_y =$$

$$-k(y_2 - y_1) \vec{e}_y$$

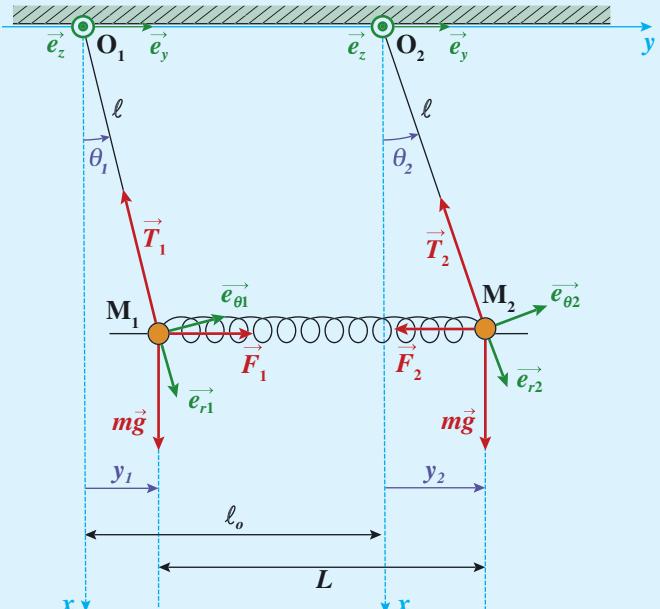
$$\text{et } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -k(y_1 - y_2) \vec{e}_y$$

Donc \vec{F}_i exercée par le ressort sur M_i :

$$\vec{F}_i = -k(y_i - y_j) \vec{e}_y =$$

$$-k(y_i - y_j)(\cos \theta_i \vec{e}_{\theta i} + \sin \theta_i \vec{e}_n)$$

(avec $j = 2$ si $i = 1$ et inversement)

**Bien comprendre**

L'expression de la force élastique pose souvent un problème de signe, qu'on élimine par une approche vectorielle méthodique. Ici la représentation classique (orientation positive du ressort), vue dans les chapitres précédents (*voir p. 250 par exemple*) apparaît pour le mobile 2. On l'écrira donc prioritairement pour ce mobile et on prendra l'opposé de la force pour le second mobile. Pour se rassurer, on pourra vérifier que pour des valeurs simples, la force a bien la direction attendue (exemple pour $y_2 > 0$ et $y_1 = 0$, la force est négative, donc vers la gauche du schéma, ce qui est cohérent). Il est risqué de s'appuyer sur le schéma pour obtenir les signes, car selon les valeurs respectives des déplacements qu'on aura dessinés, tous les cas de figure sont possibles. On explicitera donc méthodiquement la longueur du ressort ($L = \ell_0 + y_2 - y_1$) pour écrire le vecteur et on utilisera l'expression algébrique dans les calculs.

On applique le théorème du moment cinétique en O_i au point M_i dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_{/oi}(M_i)}{dt} = \vec{M}_{/oi}(\vec{T}_i) + \vec{M}_{/oi}(m\vec{g}) + \vec{M}_{/oi}(\vec{F}_i)$$

$$\frac{d\vec{L}_{/oi}}{dt} = \vec{O}_i \vec{M}_i \wedge \vec{T}_i + \vec{O}_i \vec{M}_i \wedge m\vec{g} + \vec{O}_i \vec{M}_i \wedge \vec{F}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_{/oi}}{dt} = \ell \vec{e}_{ri} \wedge (-T \vec{e}_n) + \ell \vec{e}_{ri} \wedge (mg \cos \theta_i \vec{e}_n - mg \sin \theta_i \vec{e}_{\theta i}) + \ell \vec{e}_{ri} \wedge [-k(y_i - y_j)(\sin \theta_i \vec{e}_n + \cos \theta_i \vec{e}_{\theta i})]$$

$$\frac{d\vec{L}_{/oi}}{dt} = \vec{0} - mg \ell \sin \theta_i \vec{e}_z - k \ell (y_i - y_j) \cos \theta_i \vec{e}_z$$

Soit en tenant compte des approximations proposées à la première question :

$$m \ell^2 \ddot{\theta}_i \vec{e}_z = -mg \ell \theta_i \vec{e}_z - k \ell^2 (\theta_i - \theta_j) \vec{e}_z$$

Expression vectorielle portée uniquement par le vecteur \vec{e}_z et qui se projette donc aisément :

$$m \ell^2 \ddot{\theta}_i = -mg \ell \theta_i - k \ell^2 (\theta_i - \theta_j) \quad \text{soit :} \quad m \ell \ddot{\theta}_i + mg \theta_i + k \ell \theta_i = k \ell \theta_j$$

En écrivant à présent les équations des deux masses, on obtient le système :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} \right) \theta_1 = \frac{k}{m} \theta_2 & (1) \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} \right) \theta_2 = \frac{k}{m} \theta_1 & (2) \end{cases}$$

Ce système est un **système couplé**, car dans chaque équation figurent les deux inconnues $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

- ❸ On lève le couplage en donnant un système équivalent au précédent, formé de deux combinaisons linéaires indépendantes des équations, ici la somme (1)+(2) et la différence (2)-(1) :

$$\begin{cases} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} \right) (\theta_1 + \theta_2) = \frac{k}{m} (\theta_2 + \theta_1) \\ (\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1) + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} \right) (\theta_2 - \theta_1) = \frac{k}{m} (\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad \text{Soit :} \quad \begin{cases} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \frac{g}{\ell} (\theta_1 + \theta_2) = 0 \\ (\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1) + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m} \right) (\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

En introduisant deux nouvelles variables égales à la somme et à la différence des angles, on obtient un système découpé :

$$\begin{cases} \ddot{S} + \frac{g}{\ell} S = 0 \\ \ddot{D} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m} \right) D = 0 \end{cases} \quad \text{avec : } S = (\theta_1 + \theta_2) \quad \text{et} \quad D = (\theta_2 - \theta_1)$$

Les équations sont celles d'oscillateurs harmoniques, dont les solutions générales sont :

$$\begin{cases} S = A \cos(\omega_s t) + B \sin(\omega_s t) \\ D = A' \cos(\omega_D t) + B' \sin(\omega_D t) \end{cases} \quad \text{avec : } \omega_s = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{et} \quad \omega_D = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}} > \omega_s$$

A, B, A' et B' sont des constantes d'intégration déterminées à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} S(t=0) = \theta_2(t=0) + \theta_1(t=0) = \theta_0 = A \\ D(t=0) = \theta_2(t=0) - \theta_1(t=0) = \theta_0 = A' \end{cases}$$

En dérivant les solutions générales et en utilisant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{S} = -A\omega_s \sin(\omega_s t) + B\omega_s \cos(\omega_s t) \\ \dot{D} = -A'\omega_D \sin(\omega_D t) + B'\omega_D \cos(\omega_D t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{S}(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) + \dot{\theta}_1(t=0) = 0 = B \\ \dot{D}(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) - \dot{\theta}_1(t=0) = 0 = B' \end{cases}$$

Finalement les solutions S et D puis les angles :

$$\begin{cases} S = \theta_0 \cos(\omega_s t) \\ D = \theta_0 \cos(\omega_D t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \theta_2 = \frac{S+D}{2} = \frac{\theta_0}{2} (\cos(\omega_s t) + \cos(\omega_D t)) \\ \theta_1 = \frac{S-D}{2} = \frac{\theta_0}{2} (\cos(\omega_s t) - \cos(\omega_D t)) \end{cases}$$

En appliquant les formules de trigonométrie habituelles :

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_0 \cos\left(\frac{\omega_s + \omega_D}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_s - \omega_D}{2} t\right) = \theta_0 \cos(\omega_o t) \cos(\omega_E t) \\ \theta_1 = -\theta_0 \sin\left(\frac{\omega_s + \omega_D}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_s - \omega_D}{2} t\right) = \theta_0 \sin(\omega_o t) \sin(\omega_E t) \end{cases} \quad \text{avec}^1 \quad \begin{cases} \omega_o = \frac{\omega_s + \omega_D}{2} \\ \omega_E = \frac{\omega_D - \omega_s}{2} \end{cases}$$

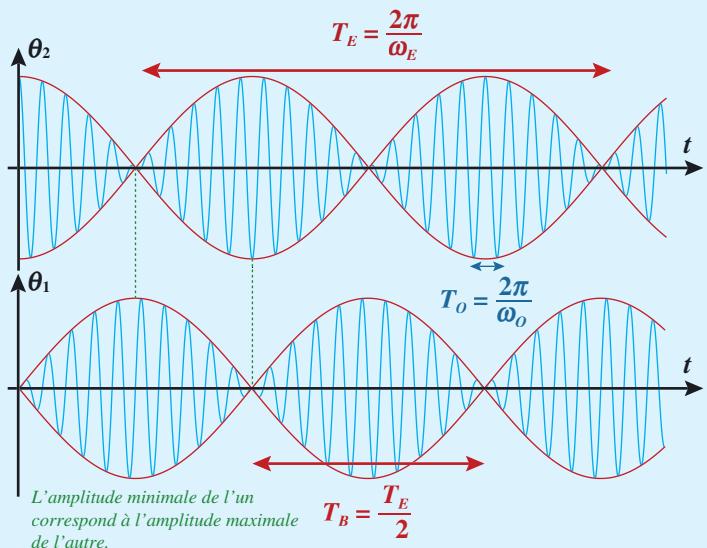
1. Mathématiquement le terme ωt peut être négatif. Physiquement, on ne peut définir des pulsations négatives.

$\omega_o > \omega_E$ donc chaque fonction θ_i est une fonction sinusoïdale de pulsation ω_o (oscillations) dont l'amplitude varie sinusoïdalement avec une pulsation ω_E (enveloppe). On dit alors que **les mobiles effectuent des battements**, comme le montrent les courbes donnant les variations temporelles des angles, où sont indiquées les différentes périodes (voir schéma ci-contre).

Les battements ne sont pas effectués symétriquement, on voit que lorsqu'un mobile a une amplitude d'oscillation maximale, l'autre est minimale.

Bien comprendre

Les systèmes couplés, en particulier les oscillateurs, sont fréquents en physique. Il s'agit de deux ou plusieurs systèmes dont le comportement individuel est influencé par celui des autres. Ici le couplage est dû à la présence du ressort qui ne permet pas aux pendules d'osciller indépendamment l'un de l'autre. Cela transparaît d'ailleurs dans le calcul, où l'introduction de l'autre variable dans l'équation d'un des systèmes provient du terme de rappel de la force élastique. Il existe des méthodes générales de résolution dans les cas complexes, qui passent par exemple par la détermination de valeurs propres, mais lorsque les équations présentent beaucoup de symétries entre les variables (ce qui est le cas ici : (1) et (2) sont invariantes par permutation des variables θ_1 et θ_2) on peut souvent éviter la méthode générale. Ici on a levé le couplage à l'aide de combinaisons linéaires simples des équations. On retiendra cette méthode qu'on pourra appliquer avec profit dans d'autres domaines, en électrocinétique par exemple (voir chapitre 9, exercice n° 4 p. 145).



4 Bille dans une sphère creuse

→ énoncé p. 298

- 1 La vitesse d'un point en coordonnées sphériques s'écrit (voir chapitre 12 p. 216) :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

Dans le cas de ce mouvement, le point reste sur la sphère, donc $r = R = cst$. La vitesse se simplifie en :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + R\dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\phi$$

Le moment cinétique vaut :

$$\vec{L}_{/O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{Re}_r \wedge m(R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + R\dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\phi)$$

D'où : $\boxed{\vec{L}_{/O} = mR^2\dot{\theta}\vec{e}_\phi - mR^2\dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\theta}$

- 2 Le système est soumis à deux forces, son poids (vertical) et la réaction de la cuvette qui, en l'absence de frottement, est normale à la surface de contact. On obtient la dérivée du moment cinétique à l'aide du TMC appliqué au point M dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

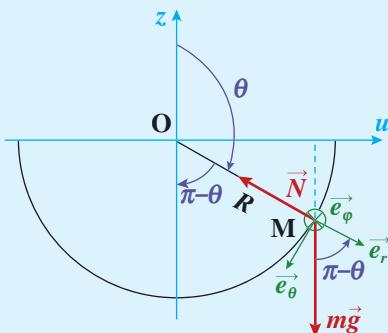
$$\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \vec{M}_{/O}(\vec{N}) + \vec{M}_{/O}(m\vec{g})$$

$$\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{N} + \vec{OM} \wedge m\vec{g}$$

$$\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = R\vec{e}_r \wedge (-N\vec{e}_r) + R\vec{e}_r \wedge (-mg \cos \theta \vec{e}_r + mg \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$$\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = mgR \sin \theta \vec{e}_\phi \quad (1)$$

Le plan de figure est vertical, le vecteur \vec{e}_ϕ est orthogonal à ce plan, donc horizontal et orthogonal à Oz .



Bien comprendre

Chaque fois qu'on évoque une grandeur (*a priori* variable) qui reste constante, on doit penser à utiliser la nullité de sa dérivée. Ici, on cherche une constante dans le moment cinétique, donc on détermine sa dérivée à travers le TMC. Par ailleurs il faut être très prudent ici sur l'écriture des vecteurs et de leur projection, étant donné la position du mobile dans un quadrant « négatif ». On pourra soit repérer les angles comme ci-dessus, soit faire un schéma fictif dans le quadrant x et z positifs pour écrire les forces. On obtiendra les mêmes expressions, ce que le lecteur est invité à vérifier.

Par définition le vecteur \vec{e}_ϕ est toujours orthogonal à (Oz) (*voir chapitre 12*), par conséquent la dérivée du moment cinétique n'a pas de composante suivant (Oz) . Or si on exprime le moment cinétique en coordonnées cartésiennes, on aura :

$$\vec{L}_{/O} = L_x \vec{e}_x + L_y \vec{e}_y + L_z \vec{e}_z \quad \text{et sa dérivée :} \quad \frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \frac{dL_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dL_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dL_z}{dt} \vec{e}_z$$

Par conséquent d'après le TMC :

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \quad \text{d'où :} \quad L_z = \text{constante}$$

L_z est la composante suivant (Oz) du moment cinétique, c'est à dire sa projection sur cette direction, que l'on peut calculer par :

$$L_z = \vec{L}_{/O} \cdot \vec{e}_z = (mR^2 \dot{\theta} \vec{e}_\phi - mR^2 \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = 0 + mR^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta \quad (\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_z = 0 \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = -\sin \theta)$$

On en déduit :

$$L_z = mR^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta = \text{constante} \quad \text{d'où :} \quad \dot{\phi} \sin^2 \theta = \text{constante} = \dot{\phi}_0 \sin^2 \theta_0$$

Dans la demi-sphère, l'angle θ varie de $\pi/2$ (sur le bord) à π (en bas), et $\sin \theta$ varie donc de 1 à 0. $\sin \theta$ diminue quand le mobile descend, donc pour garder constante la grandeur ci-dessus, il faut que $\dot{\phi}$ augmente quand le mobile descend. Or $\dot{\phi}$ est la vitesse angulaire horizontale (autour de Oz), donc **plus le mobile descend, plus il tourne vite autour de l'axe vertical**, ce qui est conforme à l'expérience que l'on peut faire avec une bille dans un saladier par exemple.

Remarque : Dans le cas de la bille il y a nécessairement des frottements, sinon elle ne pourrait pas rouler, mais son comportement concernant l'augmentation de la vitesse angulaire quand elle descend dans le fond de la cuvette reste comparable.

Bien comprendre

Il n'est pas rare qu'il soit utile de travailler dans plusieurs systèmes de coordonnées simultanément pour interpréter des mouvements. Cela suppose de tous les connaître parfaitement bien, de savoir les visualiser, les identifier et passer de l'un à l'autre. Et ces outils ne sont pas spécifiques à la mécanique, on les retrouve dans tous les domaines, électromagnétisme, thermodynamique, mécanique des fluides...

Mouvements à forces centrales

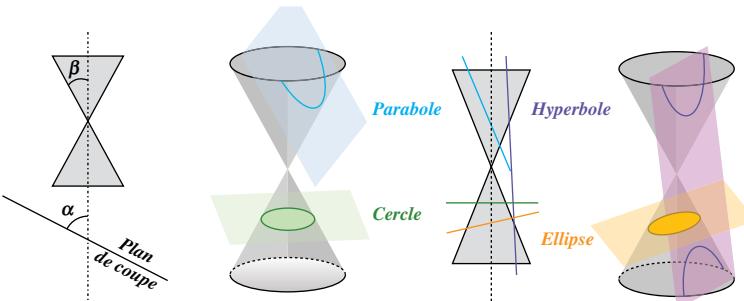
L'étude des forces centrales n'introduit pas de concepts réellement nouveaux, mais constitue une application des théorèmes de la dynamique (résultante cinétique, moment cinétique, lois énergétiques). Cette étude inclut le cas particulièrement intéressant des forces newtonniennes, dont la gravitation, qui mène à l'étude des satellites. Il est important de noter cependant que les forces centrales ne se limitent pas aux forces newtonniennes. Bien qu'en ce qui concerne l'étude de ces dernières, le programme soit limité à la trajectoire circulaire et à quelques résultats des autres trajectoires, ce thème toujours d'actualité peut faire l'objet de nombreux sujets de concours utilisant des développements plus ou moins poussés. À ce titre, un certain nombre d'aspects complémentaires sont traités dans la partie cours et des démonstrations plus générales dans la partie exercices afin de constituer une approche plus globale et donc plus intéressante, tant dans le contenu que dans les outils mis en œuvre.

OUTILS MATHÉMATIQUES

■ **Coniques** : Une conique est une courbe plane obtenue par l'intersection d'un plan avec un cône (d'où son nom !). La courbe obtenue par la coupe diffère suivant les valeurs respectives de l'angle β (angle au sommet du cône) et de l'angle α (angle entre le plan et l'axe du cône). Attention, mathématiquement un cône est « double » comme un sablier :

- ↳ $\alpha < \beta$: hyperbole = courbe formée de deux branches d'extension infinie
- ↳ $\alpha > \beta$: ellipse = courbe fermée d'extension finie (si $\alpha = \pi/2$ cercle)
- ↳ $\alpha = \beta$: parabole = courbe formée d'une seule branche d'extension infinie

Ces courbes peuvent être aussi définies par leur équation en coordonnées cartésiennes, polaires ou par les distances aux foyers. Chacune de ces définitions fait apparaître des grandeurs essentielles qu'on rencontre même dans la littérature non spécialisée comme l'excentricité e .



Conique	Excentricité
Hyperbole	$e > 1$
Parabole	$e = 1$
Ellipse	$0 < e < 1$
Cercle	$e = 0$

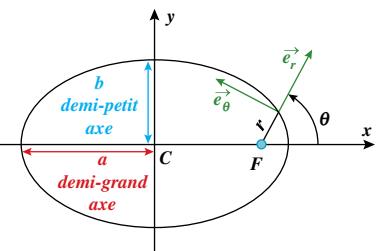
■ **Ellipse** : équation cartésienne (origine en C) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{équation polaire (origine en F)} :$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Relations utiles : surface $S = \pi ab$; paramètre (p) et axes : $pa = b^2$



I Propriétés des mouvements à forces centrales

1. Définition

Définition

La force \vec{F} appliquée au point matériel M est une **force centrale** s'il existe un **point fixe A** du référentiel pour lequel \overline{AM} est colinéaire à la force, quelle que soit la position de M. A est appelé **centre de force**.

■ Par commodité on choisit généralement de placer l'origine du repère au centre de force ($O = A$), ce qui sera appliqué dans la suite : \vec{F} colinéaire à \overline{OM}

■ **Important :** On ne traitera dans ce qui suit que les forces centrales telles que :

→ La valeur de la force ne dépend que de la distance $r = OM$

→ La force est conservative et dérive donc d'une énergie potentielle, elle-même fonction uniquement de r :

$$\vec{F} = F(r) \vec{e}_r \quad \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p(r) \quad (\vec{e}_r \text{ le vecteur unitaire suivant } \overline{OM})$$

Par ailleurs, il sera également implicite que le point matériel est étudié dans un référentiel galiléen et n'est soumis qu'à une force (ou une résultante de force) centrale. On dira alors qu'il en résulte un **mouvement à force centrale ou à accélération centrale** puisque, d'après le théorème de la résultante cinétique (TRC), l'accélération est colinéaire à la force, donc ici au vecteur position. Sont des exemples de forces centrales :

→ la force de gravitation exercée par une étoile sur une planète, par une planète sur un satellite...

→ la force électrique exercée par un noyau sur un électron, par un proton sur un autre proton...

→ la force élastique exercée par un ressort sur un objet fixé à une de ses extrémités.

2. Premier invariant du mouvement : le moment cinétique

On applique le théorème du moment cinétique (TMC) en O au point matériel M dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

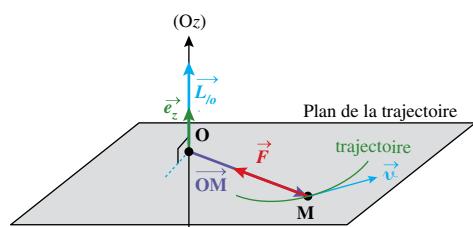
$$\frac{d\overrightarrow{L}_{/O}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}) = \overline{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \text{car } \overline{OM} \text{ et } \vec{F} \text{ sont colinéaires, puisque la force est centrale.}$$

Propriété 1

Si un point M est soumis uniquement à une force centrale, son moment cinétique par rapport au centre de force O est une constante (vectorielle). La valeur et la direction du moment cinétique sont déterminées par les conditions initiales. On dit que $\overrightarrow{L}_{/O}$ est un **invariant du mouvement** :

$$\overrightarrow{L}_{/O}(M(t)) = \text{constante} = \overrightarrow{L}_{/O}(M(t=0))$$

Le moment cinétique, puisqu'il est constant, définit une direction fixe, qui est nécessairement orthogonale aux vecteurs dont il est le produit vectoriel, c'est-à-dire \overline{OM} et \vec{v} et, par suite, également à \vec{a} . On en déduit que, puisque tous les vecteurs cinématiques sont, à tout instant, orthogonaux à une direction fixe, ils sont tous dans un même plan, qui de surcroît contient le centre de force O. La trajectoire est donc plane.



Propriété 2

Un **mouvement à force centrale est nécessairement plan**. Le plan qui contient la trajectoire contient aussi le centre de force et il est orthogonal au moment cinétique.

La direction du moment cinétique étant privilégiée, il est naturel de se placer en coordonnées cylindriques en choisissant l'axe (Oz) suivant $\overrightarrow{L_{/O}}(M)$. Les vecteurs cinématiques du mouvement du point dans un plan orthogonal à cet axe pourront alors être exprimés par les seules coordonnées polaires. Le moment cinétique vaut :

$$\overrightarrow{L_{/O}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{e}_r \wedge m(r\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = \text{constante}$$

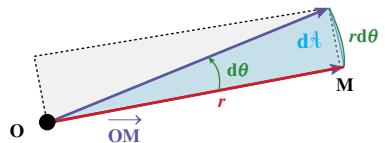
La grandeur L est donc une constante, mais la masse du système étant généralement constante, on choisit plutôt d'introduire une nouvelle constante notée C .

Propriété 3

Dans un mouvement à force centrale, où l'on repère la position de M en coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire, la grandeur $r\dot{\theta}^2 = C$ est une constante, appelée **constante des aires**.

La surface balayé $d\mathcal{A}$ par le vecteur position pendant un intervalle de temps dt est, au premier ordre, la moitié de la surface d'un rectangle de cotés r et $rd\theta$ et peut donc s'exprimer ainsi :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r \cdot rd\theta = \frac{r^2 d\theta}{2}$$



La **vitesse aréolaire**, ou vitesse de balayage du vecteur position, est définie comme l'aire balayée par unité de temps, soit :

$$v_{\text{aréolaire}} = \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{C}{2} = \text{constante}$$

Propriété 4

Loi des aires : dans un mouvement à force centrale, la vitesse aréolaire est constante.

On comprend *a posteriori* le nom donné à la constante des aires C .

3. Second invariant du mouvement : l'énergie mécanique

La force est conservative, donc l'énergie mécanique se conserve (théorème de l'énergie mécanique).

Propriété 5

Dans un mouvement à force centrale conservative, l'**énergie mécanique est un invariant du mouvement** : $E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + E_P(r) = \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 + E_P(r_0) = \text{constante}$

En utilisant l'expression de la constante des aires, l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + E_P(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_P(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_P(r)$$

Soit :

$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad \text{avec :} \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_P(r)$$

Où l'on sépare explicitement le terme qui dépend de r , appelé **énergie potentielle effective** $U_{\text{eff}}(r)$.

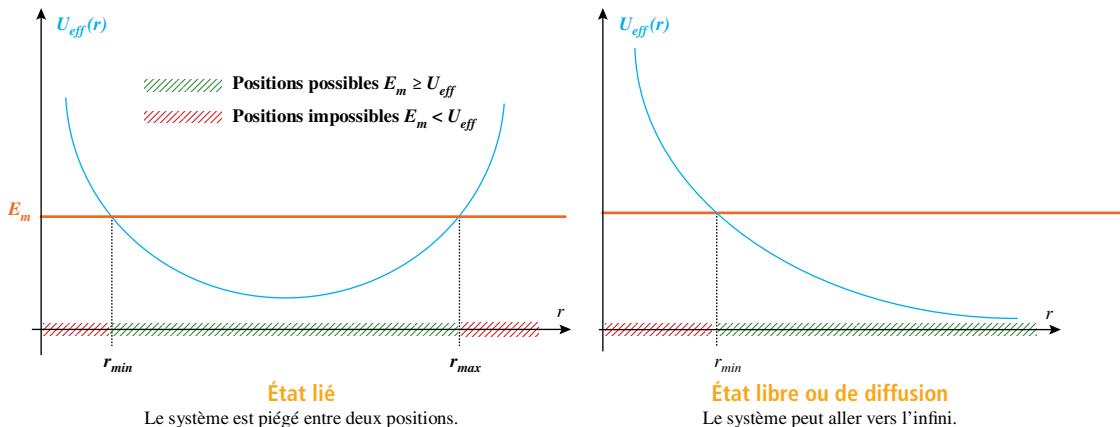
Or :

$$\frac{1}{2}mr^2 \geq 0$$

d'où :

$$E_m \geq U_{\text{eff}}(r)$$

On déduit de l'inégalité précédente des renseignements sur la nature de la trajectoire, à partir de l'allure de la courbe de l'énergie potentielle effective. On distinguera le cas des états liés pour laquelle la distance au centre de force reste limitée et celui des états libres ou de diffusion pour lesquels cette distance peut augmenter indéfiniment.



Cette approche a déjà été utilisée dans le chapitre sur l'énergie (*voir p. 263-264*), de façon plus grossière. En effet, l'utilisation de l'énergie potentielle effective donne davantage de renseignements que la seule énergie potentielle, car l'inégalité est plus exigeante. On notera qu'en mécanique classique, les états libres comme les états liés sont quelconques et non quantifiés. En mécanique quantique les états liés sont nécessairement quantifiés (*voir chapitre 7 p. 99*).

POINT MÉTHODE

Exploiter les invariants d'un mouvement

■ Dans l'étude d'un mouvement à force centrale, la plupart des questions se résoudront en écrivant les **invariants du mouvement** : moment cinétique (ou constante des aires) et énergie mécanique. Toujours garder leurs expressions à portée de vue, en haut de sa feuille de brouillon !

Il y a plusieurs façons de les exploiter :

→ On écrit qu'entre deux positions sur la trajectoire ces grandeurs sont identiques :

$$E_m(A) = E_m(B) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{L}_{IO}(A) = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v}_A = \overrightarrow{L}_{IO}(B) = \overrightarrow{OB} \wedge m\vec{v}_B$$

→ On écrit que la grandeur est constante, donc sa dérivée nulle :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{L}_{IO}}{dt} = \vec{0}$$

→ On écrit qu'en un point quelconque, l'invariant a la même valeur qu'au temps initial (indice ₀) :

$$E_m = E_{m0} = \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 + E_p(r_0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{L}_{IO}(M) = \overrightarrow{L}_{IO}(M_0) = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\vec{v}_0$$

■ Les invariants du mouvement s'entendent pour une trajectoire donnée, c'est-à-dire des conditions initiales données. Par exemple en tout point de la trajectoire de l'ISS, le moment cinétique et l'énergie mécanique sont constants. Mais l'énergie mécanique et le moment cinétique d'un satellite sur son orbite basse initiale et ceux du même satellite sur son orbite haute définitive sont différents.

II | Forces centrales newtoniennes

1. Caractéristiques

Définition

Une **force newtonienne** est une force centrale de centre O dont la valeur est inversement proportionnelle au carré de la distance OM :

$$\vec{F}_{\text{newtonienne}} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad \overline{\text{OM}} = r \vec{e}_r$$

- Le vecteur \vec{e}_r ci-dessus s'entend comme celui des coordonnées sphériques, le point M pouvant *a priori* évoluer dans tout l'espace. Lorsqu'on se ramène au plan de la trajectoire, il se confond avec le vecteur du même nom de la base polaire.
- Les forces newtoniennes peuvent être répulsives ou attractives, selon le signe de la constante k . On peut également choisir d'écrire $-k$ dans l'expression de la force newtonienne. Ce choix est sans importance en soi, mais conditionne également le signe dans l'expression de l'énergie potentielle (*voir p. 311*).

Force	gravitation	électrostatique	électrostatique
$\mathbf{O} \rightarrow \mathbf{M}$	Étoile (M_0) → planète (m) Planète (M_0) → satellite (m)	Particule charge Q → particule charge q Charges de signes opposés	Particule charge Q → particule charge q Charges de même signe
k	$-GM_0 m < 0$	$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} < 0$	$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} > 0$
nature	$\vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{GM_0 m}{r^2} \vec{e}_r$ 	$\vec{F}_{\text{elec}} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ 	$\vec{F}_{\text{elec}} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

2. Lois de Kepler

Tycho Brahe (1546-1601) était un astronome danois qui a réalisé une quantité impressionnante d'observations du ciel en général et des planètes en particulier, à l'aide d'instruments de mesures sans lentilles (des sextants par exemple), dont beaucoup étaient de sa fabrication. Vers la fin de sa vie mouvementée, il fit appel au jeune Allemand Johannes Kepler (1571-1630) qui commençait à être connu dans les milieux savants pour ses compétences en mathématiques. Tous deux sont d'un caractère affirmé et, très conscients de leur valeur personnelle, s'opposent violement. Pourtant leur complémentarité (le premier, très fin observateur peu porté sur le calcul et le second, myope et très doué en mathématiques) aura raison de leur différend et, sur son lit de mort, Tycho Brahe demande à Kepler d'exploiter au mieux ses mesures. Kepler mettra plus de dix ans pour aboutir, mais entre 1609 et 1618, en pleine révolution copernicienne et alors que les tenants du géocentrisme combattaient ardemment ceux de l'héliocentrisme, il publiera ses résultats qui tranchent définitivement en faveur de l'héliocentrisme et qui sont aujourd'hui toujours connus sous le nom des trois lois de Kepler. On reste admiratif devant le travail de calcul titanique accompli par Kepler (en l'absence de toute calculatrice évidemment) à partir de la phénoménale série de valeurs angulaires de positions des planètes fournie par Tycho Brahe. En effet, les mouvements des planètes autour du Soleil, vus depuis la Terre, elle-même en mouvement sur elle-même et autour du

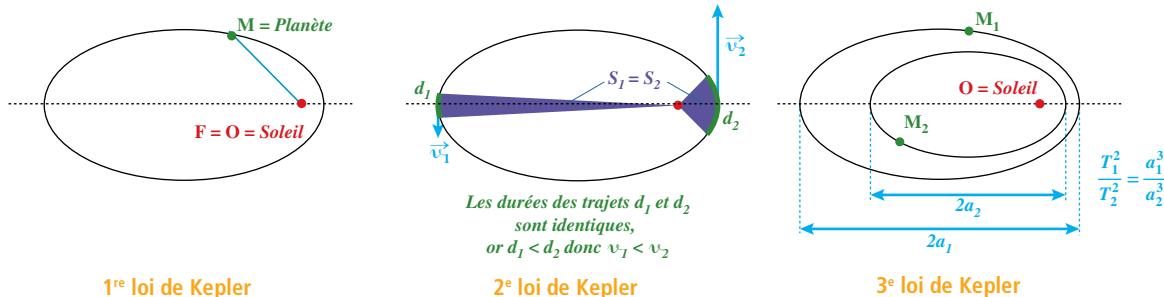
Soleil, sont très complexes. La concision de la synthèse que Kepler en tire et qui, aujourd’hui encore, constitue la base de tout lancement de satellite, force le respect¹.

Enoncés

1^{re} loi de Kepler : Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil est un foyer.

2^e loi de Kepler : L’aire balayée par unité de temps par le rayon Soleil-planète est constante.

3^e loi de Kepler : Le carré de la période de révolution T des planètes est proportionnel au cube du demi-grand axe a de la trajectoire : $\frac{a^3}{T^2} = \text{constante}$ et Newton montrera : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_{\text{Soleil}}}{4\pi^2}$



- Les lois de Kepler se généralisent à toute trajectoire fermée d’un système soumis à une force newtonienne attractive. Le Soleil sera remplacé par le centre attracteur (gravitationnel ou électrostatique), la planète par le système en orbite.
- Les lois de Kepler se démontrent à partir des lois de Newton de la dynamique (PFD) et de l’expression de la force de gravitation, également établie par Newton, ce qui est proposé dans l’exercice n° 2. Ce sont bien cependant les travaux empiriques de Kepler qui ont en partie inspiré Newton. La 2^e loi de Kepler n’est d’ailleurs autre que la loi des aires démontrée au I.2. à partir du théorème du moment cinétique.
- De la 2^e loi, on déduit que la vitesse sur la trajectoire est d’autant plus grande qu’on est proche du centre attracteur.
- La 3^e loi permet d’obtenir une valeur de la masse du centre attracteur (le Soleil par exemple) à travers l’étude des trajectoires de ses satellites (*voir exercice n° 1 p. 315*).

III Étude des trajectoires

1. Nature des trajectoires

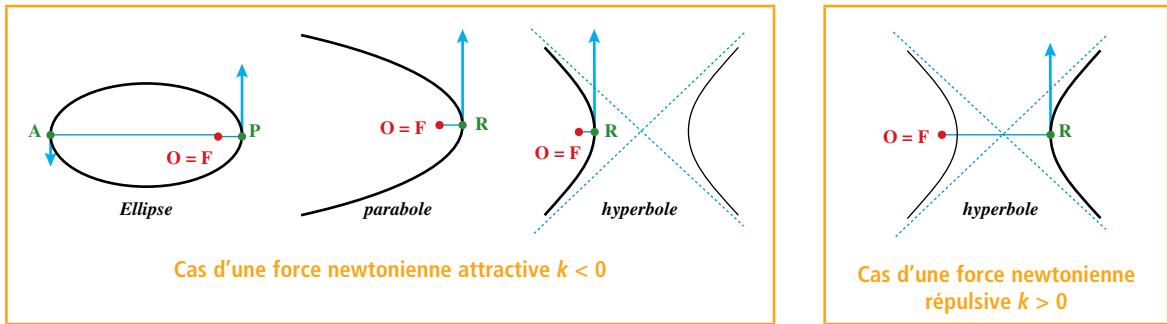
La trajectoire elliptique des systèmes satellisés observée par Kepler (planètes autour du Soleil par exemple) n’est qu’un cas particulier.

Enoncé

On montre que la trajectoire d’un point matériel soumis à une force newtonienne est portée par **une conique dont le centre attracteur occupe toujours un foyer**.

- La démonstration est proposée dans l’exercice n° 2 p. 315.

1. La précision des mesures était juste dans la bonne fourchette : suffisante pour déterminer les lois (mécanique classique), mais insuffisante pour faire apparaître les écarts à ces lois qui seront, 300 ans plus tard, expliqués par Einstein en relativité.



Propriétés

- Les points suivants occupent une position particulière :
 - ➡ Ellipse : P **périastre** et A **apoastre** respectivement le point le plus proche et le point le plus lointain du centre attracteur.
 - ➡ Hyperbole et parabole : R point à la **distance minimale d'approche** du centre attracteur.
- En tous ces points (et en ces points seulement) et en tout point d'une trajectoire circulaire, le vecteur vitesse est orthogonal au vecteur position.
- Cette propriété permet, entre autres, un calcul aisément du moment cinétique (*voir exercice n° 3 p. 315*).
- Si l'astre est la Terre, P et A sont appelés respectivement le **périgée** et l'**apogée** (de *gē* = la Terre) et si l'astre est le Soleil, on parle de **périhélie** et d'**aphélie** (de *hēlios* = le Soleil).

2. Approche énergétique

L'expression de l'énergie potentielle dans le cas d'une force newtonienne est la suivante :

$$E_p = -\int \vec{F} \cdot d\vec{OM} + cte = -\int \frac{k}{r^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi) + cte = -\int \frac{k}{r^2} dr + cte$$

D'où : $E_p = \frac{k}{r} + cte$ et l'on choisit généralement de fixer l'origine des potentiels à l'infini soit :

Propriété

L'énergie potentielle d'une force newtonienne \vec{F} vaut :

$$E_p = \frac{k}{r} \quad \text{si} \quad \vec{F} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{où l'on choisit } E_p(r \rightarrow \infty) = 0$$

POINT MÉTHODE

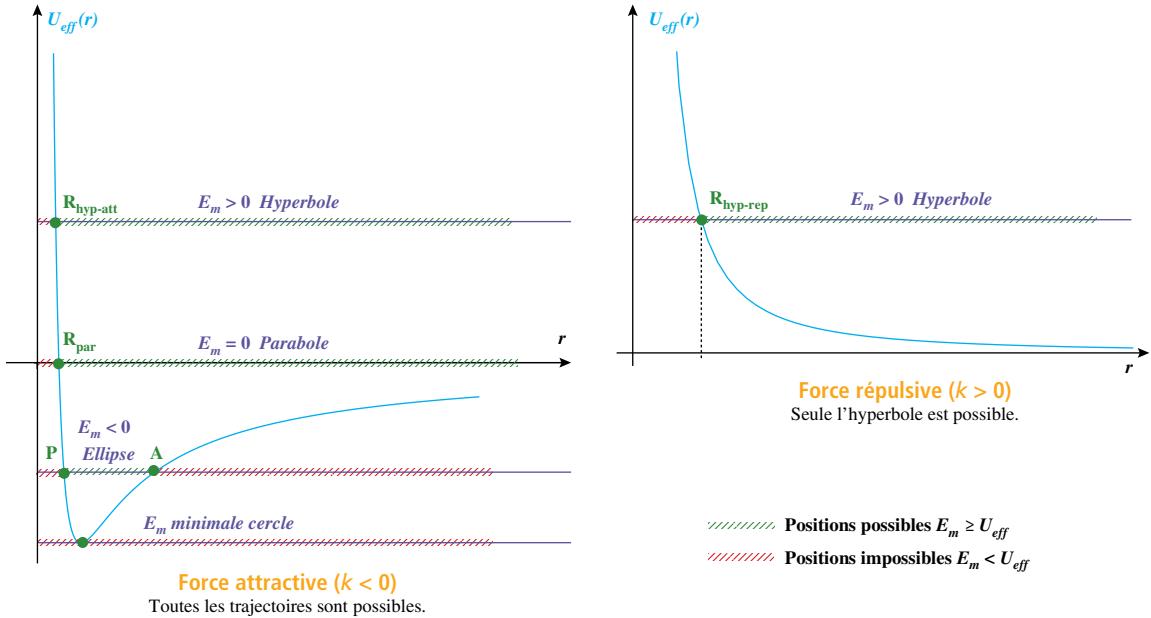
Exprimer l'énergie potentielle

- On évitera de retenir l'expression de l'énergie potentielle par cœur et on la retrouvera plutôt rapidement à partir de l'expression de la force, car, selon le choix de l'écriture de la force (+ k ou $-k$), l'expression de l'énergie potentielle pourra être en + k ou $-k$, or l'un ou l'autre choix peuvent figurer dans un énoncé.
- On sera également prudent dans ce calcul de l'énergie potentielle qui est une grandeur totalement indépendante de la trajectoire. Ainsi, il convient de la calculer en toute généralité, sans hypothèse sur la position qui est quelconque, et donc en coordonnées sphériques.

De l'expression de l'énergie potentielle, on déduit celle de l'énergie mécanique et de l'énergie potentielle effective, définie au I.3. (voir p. 307) :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{v}^2 + \frac{k}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \frac{k}{r} \quad \text{et} \quad U_{eff}(r) = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} + \frac{k}{r}$$

La nature des trajectoires apparaît clairement sur les courbes d'énergie effective (même si cette approche ne constitue pas une démonstration).



→ Énergie de la trajectoire elliptique

Aux points particuliers que sont le périastre P et l'apoastre A, l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective ($\dot{r} = 0$) et a la même valeur (invariant du mouvement) pour les deux points :

$$\begin{cases} E_m(P) = E_m = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r_P^2} + \frac{k}{r_P} \\ E_m(A) = E_m = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r_A^2} + \frac{k}{r_A} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 2r_P^2 \left(E_m - \frac{k}{r_P} \right) = mC^2 \\ 2r_A^2 \left(E_m - \frac{k}{r_A} \right) = mC^2 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} 2r_P^2 E_m - 2kr_P = mC^2 \\ 2r_A^2 E_m - 2kr_A = mC^2 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre les équations précédentes, on a :

$$2(r_A^2 - r_P^2)E_m - 2k(r_A - r_P) = 0 \quad \text{puis :} \quad 2(r_A - r_P)[(r_A + r_P)E_m - k] = 0$$

et en utilisant une propriété de l'ellipse ($r_P + r_A = 2a$), il vient :

$$2(r_A - r_P)[2aE_m - k] = 0$$

On en déduit que sur une trajectoire strictement elliptique ($r_A \neq r_P$), l'énergie mécanique vaut :

$$E_m(\text{ellipse}) = \frac{k}{2a} \quad (k \text{ est nécessairement négatif})$$

Soit pour un satellite de masse m en orbite autour d'un centre attracteur de masse M_0 :

$$E_m(\text{ellipse}) = -\frac{GmM_0}{2a}$$

→ Vitesses cosmiques

Lorsque le système est lié et se trouve à une distance r de son centre attracteur, il doit acquérir de l'énergie pour s'en échapper. Pour cela il doit au minimum « atteindre l'infini » avec une vitesse nulle, c'est-à-dire accéder à la trajectoire parabolique, dont l'énergie mécanique est nulle. On en déduit la vitesse nécessaire à acquérir pour se libérer de l'attraction, pour un point à une distance r donnée :

$$E_m(\text{parabolique}) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_0}{r} = 0 \quad \text{d'où :} \quad v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM_0}{r}}$$

Définitions

On définit trois vitesses particulières, dites **vitesses cosmiques**, pour un astre de rayon R_0 :

Première vitesse cosmique = vitesse d'une trajectoire circulaire au « ras » de la surface de l'astre.

Deuxième vitesse cosmique = vitesse de libération à la surface de l'astre.

Troisième vitesse cosmique = vitesse de libération du système solaire à partir de la surface de l'astre.

$$v_{\text{cosmique } 1} = \sqrt{\frac{GM_0}{R_0}} \quad v_{\text{cosmique } 2} = \sqrt{\frac{2GM_0}{R_0}} = \sqrt{2}v_{\text{cosmique } 1}$$

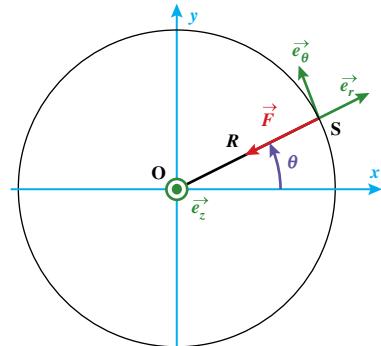
Sur Terre : $v_{\text{cosmique } 1} = 7,9 \text{ km.s}^{-1}$ $v_{\text{cosmique } 2} = 11,2 \text{ km.s}^{-1}$ $v_{\text{cosmique } 3} = 13,8 \text{ km.s}^{-1}$

3. Cas particulier du mouvement circulaire

Le mouvement d'un satellite en orbite circulaire a déjà été étudié au lycée. Il peut s'agir d'un satellite autour d'une planète, d'une planète autour d'une étoile... Il faut noter que le cercle n'est qu'un cas particulier d'ellipse. On étudie le système S de masse m , dont on suppose l'orbite circulaire de rayon R autour d'un astre O de masse M_O , dans le référentiel astrocentrique supposé galiléen. On applique le théorème de la résultante cinétique :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = -\frac{GmM_O}{r^2}\vec{e}_r$$

soit par projection sur la base polaire : $\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -\frac{GmM_O}{R^2} & (1) \\ mR\ddot{\theta} = 0 & (2) \end{cases}$



→ de (2) on déduit que $\dot{\theta} = \text{constante}$, donc le mouvement est nécessairement uniforme.

→ de (1) on tire l'expression de la vitesse sur la trajectoire : $v = R\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM_O}{R}}$

Propriétés

- Le mouvement d'un satellite sur une trajectoire circulaire est nécessairement uniforme.
- La vitesse sur une trajectoire circulaire est d'autant plus grande que le rayon est faible.
- La vitesse de satellisation est indépendante de la masse du système, ce qui permet de positionner plusieurs satellites sur la même orbite (et heureusement pour les satellites géostationnaires !).

$$v(\text{ cercle }) = \sqrt{\frac{GM_O}{R}} = \text{constante}$$

- On peut retrouver le fait que la trajectoire circulaire est nécessairement uniforme :
 - ➡ Par application de la loi des aires : deux arcs de mêmes angles sont parcourus en un même temps, puisqu'ils balayent la même surface. Cela étant vrai quelles que soient la position et la dimension de l'arc sur la trajectoire, on en déduit que la vitesse est la même en tout point du cercle.
 - ➡ Par un raisonnement énergétique : l'énergie mécanique est constante, or elle est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Cette dernière est une fonction de r , grandeur ici constante. Donc toutes les énergies (mécanique, potentielle et cinétique) sont nécessairement constantes sur cette trajectoire. La vitesse est alors constante.

$$E_c(\text{ cercle}) = \frac{1}{2} \frac{GmM_0}{R} = cst$$

$$E_p(\text{ cercle}) = -\frac{GmM_0}{R} = cst$$

$$E_m(\text{ cercle}) = -\frac{1}{2} \frac{GmM_0}{R} = -E_c = \frac{E_p}{2}$$

- On peut établir une version « faible » de la 3^e loi de Kepler pour des trajectoires circulaires. Le mouvement étant uniforme la distance parcourue sur un tour est liée à T la période de révolution par :

$$2\pi R = vT = T \sqrt{\frac{GM_o}{r}} \quad \text{soit en élévant le tout au carré : } \quad 4\pi^2 R^2 = \frac{GM_o}{R} T^2 \quad \text{puis : } \quad \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_o}{4\pi^2}$$

Qui se généralise en remplaçant le rayon par le demi-grand axe de l'ellipse (*la démonstration rigoureuse est proposée dans l'exercice n° 2 p. 315*).

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Force centrale : définition, propriétés du mouvement, invariants du mouvement.
- Énergie effective, état libre, état lié.
- Force newtonienne : définition, exemples, étude énergétique et trajectoires, vitesses cosmiques.
- Lois de Kepler : énoncés, conséquences, énergie de la trajectoire elliptique, points remarquables.
- Cas du mouvement circulaire : étude et propriétés, 3^e loi de Kepler.

Erreurs à éviter

- L'expression de l'énergie potentielle doit être calculée de façon générale et non en tenant compte d'une trajectoire particulière.
- Le centre attracteur n'est pas au centre de l'ellipse, mais en son foyer.
- Une force centrale n'est pas une force dirigée vers l'origine du repère, mais vers un point fixe qu'on choisit de ce fait comme origine.
- Une force centrale n'est pas nécessairement newtonienne (*voir exercice n° 4 p. 315*).
- Ne pas confondre altitude d'un satellite et rayon de sa trajectoire dans les calculs.

Quelques « trucs » utiles

- L'utilisation des invariants permet toujours de résoudre les problèmes (*voir en particulier exercice n° 3 p. 315*).
- C'est parce qu'on choisit généralement l'énergie potentielle nulle à l'infini que la trajectoire parabolique a une énergie nulle, la trajectoire elliptique une énergie négative et la trajectoire hyperbolique une énergie positive. Un autre choix décalerait les courbes d'énergie de la valeur de référence.

EXERCICES

1 Quelques satellites ★

→ corrigé p. 317

- 1 Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire. En déduire la période de révolution de l'ISS qui gravite à 400 km d'altitude. $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_T = 6400 \text{ km}$.
- 2 Les périodes et rayons des trajectoires (circulaires) des satellites galiléens de Jupiter figurent dans le tableau ci-contre. En déduire la masse de Jupiter.

	Io	Europe	Ganymède	Callisto
Rayon (km)	421 800	671 100	1 070 400	1 882 700
période	42 h 29 min	85 h 14 min	171 h 43 min	400 h 32 min

2 Trajectoires non circulaires et lois de Kepler ★★

→ corrigé p. 317

- 1 Exprimer les vecteurs cinématiques en coordonnées polaires pour un mouvement à force centrale.
- 2 On cherche à éliminer le temps de ces expressions. En utilisant la constante des aires C d'une part et en introduisant la variable plus commode $u = 1/r$, montrer que la vitesse peut s'écrire : $\vec{v} = -C \frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + C u \vec{e}_\theta$ (B₁)
- 3 Établir de la même façon l'expression (B₂) de l'accélération en fonction de u , ses dérivées et C .
- 4 En utilisant (B₂), établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $u(\theta)$ pour un système de masse m soumis uniquement à la force gravitationnelle d'un centre attracteur de masse M .
- 5 Résoudre cette équation et montrer que l'on obtient l'équation polaire d'une conique
- 6 En utilisant la loi des aires et les propriétés de l'ellipse, démontrer la 3^e loi de Kepler.

3 Orbite de transfert ★★

→ corrigés p. 319

On désire transférer un satellite d'une orbite circulaire basse de rayon R_1 sur une orbite circulaire haute de rayon R_2 . Pour cela, et à l'aide d'un bref allumage de réacteur, on modifie brutalement la valeur de la vitesse en un point M₁ de la trajectoire basse, sans modifier sa direction. On note v_1 et v_2 les vitesses des trajectoires circulaires, v'_1 la vitesse modifiée en M₁.

- 1 Sachant qu'on opérera une manœuvre identique lorsque le satellite atteindra l'orbite haute en M₂, déterminer sans calcul l'allure de l'orbite de transfert et la schématiser. Exprimer v'_1 et v'_2 .
- 2 Établir à l'aide des invariants du mouvement, deux relations simples entre v'_1 la vitesse à conférer en M₁ et v'_2 la vitesse atteinte lors du raccordement en M₂.
- 3 En déduire les expressions de v'_1 et v'_2 . Faudra-t-il accélérer ou ralentir en M₂? Commenter.

4 Mobile accroché à un ressort (d'après Enstim 2002) ★★★

→ corrigé p. 321

Un palet M de masse m , accroché à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 , de raideur k , et dont l'autre extrémité est fixée en O, peut se mouvoir sans frottement dans le plan horizontal (Oxy) (table à coussin d'air par exemple). On considère deux situations initiales : a) À $t = 0$, le ressort est maintenu dans la direction (Ox), la masse écartée d'une longueur $\ell_1 = 1,2 \ell_0$, puis l'ensemble est lâché sans vitesse initiale. b) À $t = 0$, position initiale : $\overline{OM}_0 = \ell_2 \vec{e}_x$ et vitesse initiale $\overline{v}_0 = \ell_2 \omega_2 \vec{e}_y$.

- 1 Montrer que le moment cinétique par rapport à O est constant et donner sa valeur dans chacun des cas a) et b). En déduire la nature du mouvement a) et établir son équation horaire.
- 2 L'énergie mécanique est-elle constante ? L'exprimer en introduisant l'énergie potentielle effective $U_{\text{eff}}(r)$. Tracer $U_{\text{eff}}(r)$ et en déduire les positions possibles du mobile selon les conditions initiales.
- 3 Discuter la possibilité d'un mouvement circulaire.

Résolution de problème : Construire une étoile noire ? ★★★

→ corrigé p. 323

DOCUMENT 1 : L'Étoile Noire ou Étoile de la Mort

Dans l'épisode IV de la saga « Star Wars » de George Lucas, sorti en 1977, Dark Vador, commandant de l'Étoile Noire (une immense base spatiale de la dimension d'une petite lune), détruit en une seconde et à l'aide d'une impulsion laser, la planète habitée Aldorande, laquelle vole en éclats qui se dispersent dans l'espace. Les héros détruiront cette base, mais, dans l'épisode VI, une autre base encore plus grande est construite. Dans un article consacré à la « physique de Star Wars » le chercheur en astrophysique français Roland Lehoucq, en se basant sur les situations des films et sur des critères de planétologie, évalue le rayon de la seconde Étoile Noire à 375 km.

En novembre 2012 une pétition signée par 35 000 personnes a été adressée au gouvernement américain pour obtenir des fonds et des ressources afin de commencer la construction d'une base identique en 2016 (en raison d'une loi récente, ces signataires sont en droit d'attendre une réponse argumentée des experts du gouvernement américain). Le responsable de la section science et espace du bureau du budget de la Maison Blanche a répondu quelques semaines plus tard par la négative, en avançant des critères économiques et, plus particulièrement, une estimation du coût de l'opération s'élargissant à 850 000 000 000 000 000 dollars.

DOCUMENT 2 : Laser et puissance

Le laser le plus puissant jamais fabriqué est en cours de réalisation à Saclay (France), c'est un laser à impulsions ultra-courtes (15 fs), qui porte le nom d'Apollon. Il n'a pas pour but de détruire des planètes, ni qui ce soit, mais d'étudier l'interaction matière/rayonnement dans des conditions extrêmes de température et de pression. La France est actuellement très largement leader sur le marché des lasers de très haute puissance.

Quelques valeurs de puissance :

Laser Apollon (puissance crête)	Réacteur nucléaire	Puissance émise par le Soleil
10 PW	1,5 GW	4.10 ²⁶ W

DOCUMENT 3 : L'acier

L'acier est un alliage de fer et de carbone. La quantité de carbone dépasse rarement 2 %. Quelques additifs, chrome, nickel, molybdène, silicium par exemple, peuvent être ajoutés (qui ne dépassent pas quelques %) pour former différents aciers de propriétés adaptées aux divers besoins. La plupart des bâtiments ont une structure en acier. Quelques valeurs concernant l'acier sont rapportées dans le tableau suivant.

Masse volumique	Prix de l'acier sur le marché mondial (2015)	Production annuelle mondiale (2015)
8000 à 9000 kg.m ⁻³ selon les alliages	500 dollars/tonne	1,8 milliard de tonnes

Données complémentaires :

L'énergie potentielle de cohésion gravitationnelle d'une sphère homogène de masse M et de rayon R est l'énergie de constitution de la sphère qu'on « fabrique », en amenant successivement depuis l'infini des éléments de masse qu'on ajoute progressivement. On peut montrer que cette énergie vaut : $E_p = -\frac{3GM^2}{5R}$

Vitesse de libération à la surface d'une planète de masse M et de rayon R : $v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$
Consommation annuelle d'énergie sur Terre : $5,5 \cdot 10^{20}$ J/an.

N. B. : D'autres données pertinentes figurant dans la base de données p. 651-657 peuvent être exploitées.

Problème à résoudre : Peut-on envisager de construire l'Étoile Noire en termes de puissance de tir, de coût de fabrication et de durée de construction ?

CORRIGÉS

Conseils

Les exercices n° 1 et n° 3 sont basiques et classiques, l'exercice n° 2 permet de démontrer les résultats généraux et le n° 4 présente une force centrale non newtonienne. Les forces étant centrales, on aboutit généralement aux résultats en utilisant les lois de Kepler et les invariants du mouvement. Les règles de présentation d'un exercice de mécanique sont toujours à mettre en œuvre naturellement.

1 Quelques satellites

→ énoncé p. 315

- 1 On utilise ici la 3^e loi de Kepler appliquée aux satellites autour de la Terre. Un satellite géostationnaire reste toujours à la verticale du même point de la Terre, sa période est donc de 24 heures :

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{4\pi^2} T^2} = \left(\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6,0 \cdot 10^{24} \times [24 \times 3600]^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 4,2 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Soit un rayon d'environ 42 000 km, ce qui correspond à une altitude d'environ 36 000 km (*ordre de grandeur à connaître*). En appliquant la 3^e loi entre l'ISS et le satellite géostationnaire on obtient :

$$\frac{R_{ISS}^3}{R_{GS}^3} = \frac{T_{ISS}^2}{T_{GS}^2} \quad \text{soit :} \quad T_{ISS} = T_{GS} \sqrt{\frac{R_{ISS}^3}{R_{GS}^3}} = 24 \sqrt{\frac{(6400 + 400)^3}{42000^3}} = 1,6 \text{ h} = 1 \text{ h } 36 \text{ min}$$

L'ISS effectue une orbite en environ une heure et demi, ce qui n'est pas étonnant, car elle est beaucoup plus proche de la Terre que le satellite géostationnaire.

- 2 On trace à la calculatrice (ou l'ordinateur) la courbe $a^3 = f(T^2)$ avec les 4 couples de valeurs du tableau. On obtient un excellent accord de modèle linéaire et le coefficient directeur de la droite vaut :

$$\alpha = 3,21 \cdot 10^{15} \text{ m}^3 \text{s}^{-2} \quad \text{avec} \quad a^3 = \alpha T^2$$

On en déduit, d'après la 3^e loi de Kepler, la masse (correcte) de Jupiter :

$$\alpha = \frac{GM_J}{4\pi^2} \quad \text{d'où :} \quad M_J = \frac{4\pi^2 k}{G} = 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

2 Trajectoires non circulaires et lois de Kepler

→ énoncé p. 315

- 1 Les vecteurs cinématiques en coordonnées polaires sont les suivants (*voir chapitre 12 p. 216*) :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e}_r ; \quad \overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta ; \quad \overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e}_r + \underbrace{(2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}_{=0}\overrightarrow{e}_\theta$$

Dans le cas d'un mouvement à force centrale, l'accélération est aussi centrale, donc radiale, ce qui signifie que sa composante orthoradiale est nulle (*notons que l'on peut aussi retrouver ce résultat en écrivant que la dérivée de la constante des aires C est nulle*).

- 2 On cherche à éliminer le temps, on introduit donc explicitement la dérivée par rapport à t dans la première coordonnée de la vitesse :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \quad \text{où l'on a utilisé :} \quad C = r^2 \dot{\theta}$$

On utilise la variable u proposée dans l'énoncé :

$$\dot{r} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -C \frac{du}{d\theta} \quad \text{car :} \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{d(1/r)}{d\theta} = \frac{d(1/r)}{dr} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

La seconde coordonnée s'obtient aisément :

$$r\dot{\theta} = r \frac{C}{r^2} = Cu \quad \text{et finalement :} \quad \overrightarrow{v} = -C \frac{du}{d\theta} \overrightarrow{e}_r + Cu \overrightarrow{e}_\theta \quad (\mathbf{B}_1)$$

- ③ Le plus simple consiste à utiliser ce qui précède :

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left(-C \frac{du}{d\theta} \right) \frac{C}{r^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

$$r \ddot{\theta}^2 = r \left(\frac{C}{r^2} \right)^2 = C^2 u^3$$

et finalement :

$$\vec{a} = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r \quad (\text{B}_2)$$

- ④ On applique le théorème de la résultante cinétique au point matériel de masse m soumis uniquement à la force de gravitation exercée par l'astre de masse M dans le référentiel astrocentrique supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{F} = -\frac{GmM}{r^2} \vec{e}_r$$

Soit, en utilisant ce qui précède et la variable u dans l'expression (B₂) :

$$m\vec{a} = -mC^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r = -GmMu^2 \vec{e}_r : \Rightarrow C^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r = GM \vec{e}_r$$

Après simplification et projection sur la direction radiale, on obtient l'équation différentielle (polaire) du mouvement :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}$$

- ⑤ L'équation est celle de l'oscillateur harmonique avec un second membre non nul. La solution est donc :

$$u = u_{homogIne} + u_{sol.part.} = A \cos(\theta + \varphi) + \frac{GM}{C^2}$$

Où l'on fera attention de respecter la variable (u est fonction de θ et non de t) et on notera que la constante habituellement appelée ω_0 est ici égale à 1 dans l'équation différentielle. La solution $u(\theta)$ conduit à l'expression de $r(\theta)$ l'équation polaire de la trajectoire :

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{GM}{C^2} + A \cos(\theta + \varphi)} = \frac{C^2/GM}{1 + (AC^2/GM) \cos(\theta + \varphi)}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \varphi)} \quad \text{avec :} \quad p = \frac{C^2}{GM} \quad \text{et} \quad e = \frac{AC^2}{GM}$$

La courbe obtenue est donc une conique. A et φ sont des constantes d'intégration, donc elles dépendent des conditions initiales. Or l'excentricité e dépend de ces conditions. Ainsi la nature de la conique qui est directement liée à la valeur de e (voir outils mathématiques p. 305) est déterminée par les conditions du lancement, ce qui n'est pas surprenant, car cohérent avec les considérations énergétiques. Le paramètre p dépend aussi des conditions initiales, car la constante C en dépend. De même φ dépend des conditions initiales et donnera l'orientation des axes de la trajectoire, qui dépendent de la direction du lancement. On peut toujours changer les axes de façon à obtenir $\varphi = 0$.

Bien comprendre

En général en mécanique, on travaille sur une équation différentielle dont les inconnues sont les expressions des coordonnées en fonction du temps et dont la résolution fournit donc les équations horaires. On obtient ensuite l'équation de la trajectoire en éliminant le temps entre ces expressions. Ici, à l'aide des relations (B₁) et (B₂), appelées formules de Binet, on élimine d'abord le temps de l'équation différentielle qui devient une équation différentielle entre les coordonnées, dont l'intégration fournit directement l'équation de la trajectoire. Dans ce type de mouvement en effet, les équations horaires sont souvent peu utiles. Il existe d'autres méthodes classiques pour obtenir l'équation de la trajectoire (vecteur excentricité, méthode de Runge-Lenz...) qu'on pourra rencontrer dans les problèmes. Notons que l'on a ici démontré que la trajectoire est une conique (et par suite la 1^{re} loi de Kepler), que la démonstration est valable pour toute force newtonienne et qu'elle ne fait appel qu'à des outils connus.

- 6 La vitesse aréolaire, par définition égale à la surface balayée par unité de temps, est liée à la constante C . Comme cette vitesse est constante, on peut écrire qu'elle est égale au rapport de l'aire balayée par la durée du balayage (comme pour un mouvement uniforme). Donc en particulier le rapport de la surface totale S de l'ellipse par une durée égale à T , la période de révolution du satellite :

$$\mathbf{v}_{\text{aréolaire}} = \frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} \quad \text{d'où : } A = \frac{C}{2}t \quad \text{et en particulier : } S_{\text{ellipse}} = \frac{C}{2}T$$

En élevant au carré, puis en utilisant les propriétés de l'ellipse et l'expression obtenue dans la question précédente pour le paramètre p , il vient:

$$S_{\text{ellipse}}^2 = \frac{C^2}{4}T^2 \quad \text{d'où : } (\pi ab)^2 = \frac{C^2}{4}T^2 = \frac{pGM}{4}T^2$$

$$\text{Or : } b^2 = ap \quad \text{d'où : } \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Où a et T sont respectivement le demi-grand axe et la période de révolution d'un satellite autour d'un centre attracteur de masse M . On a démontré la 3^e loi de Kepler (en toute généralité, pas uniquement sur le cercle).

Bien comprendre

Finalement le théorème du moment cinétique a permis de démontrer la 2^e loi de Kepler (cours) et le théorème de la résultante cinétique les deux autres (ci-dessus). Les lois de Kepler, au départ empiriques (issues sans démonstrations de mesures sur quelques planètes) sont donc des conséquences des lois de la dynamique et, à ce titre, valables pour tous les corps en orbite du fait d'une force newtonienne.

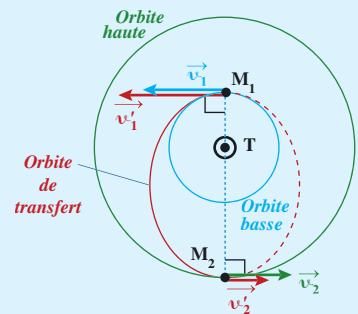
3 Orbite de transfert

→ énoncé p. 315

- 1 Sur la trajectoire circulaire basse, la vitesse est en tout point tangente au cercle, donc au vecteur position \vec{TM}_1 . Si l'on modifie l'énergie (en accélérant) on modifie la trajectoire qui sera nécessairement une conique. Le but n'étant pas d'échapper à l'attraction de la Terre, on obtiendra forcément une ellipse. La direction de la vitesse en M_1 n'est pas modifiée, on sera donc en un point particulier de l'ellipse où la vitesse est orthogonale au rayon vecteur. En M_2 on réitère le même type de manœuvre pour se retrouver sur une trajectoire circulaire, la vitesse doit donc être orthogonale au rayon vecteur également. Entre M_1 et M_2 le satellite parcourt une ellipse, or les deux seuls points où la vitesse est orthogonale au vecteur position sont le périhélie et l'aphélie. M_1 étant plus proche, c'est le périhélie et M_2 l'aphélie. La trajectoire de transfert a donc l'allure donnée sur le schéma.

Les vitesses (nécessairement constantes) sur les trajectoires circulaires sont (voir cours p. 313) :

$$\mathbf{v}_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_1}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_2}}$$



- 2 Le moment cinétique et l'énergie mécanique sont des invariants du mouvement, dont les expressions générales en un point de la trajectoire elliptique sont :

$$\overrightarrow{L}_{/T} = \overrightarrow{TM} \wedge m\vec{v}' \quad \text{et} \quad E_m = E_C + E_p = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 - \frac{GmM_T}{r}$$

Où l'on peut détailler le calcul de l'énergie potentielle dans lequel on choisit une référence d'énergie nulle à l'infini. (On rappelle qu'ici O = T, le centre attracteur de la force centrale) :

$$E_p = - \int \vec{F} \cdot d\vec{OM} + cte = - \int \frac{-GmM_T}{r^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + rd\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi) + cte = - \int \frac{-GmM_T}{r^2} dr + cte = - \frac{GmM_T}{r}$$

Bien comprendre

Les invariants le sont sur une orbite donnée, ici l'ellipse de transfert. Ces grandeurs sont différentes des valeurs prises sur les trajectoires circulaires, qui sont elles-mêmes constantes, tant que le mobile reste sur la même trajectoire.

On écrit que le moment cinétique est identique en M_1 et en M_2 (position où \overline{TM} et $\vec{\omega}$ sont orthogonaux) :

$$\begin{cases} \overline{L_{IT}}(M_1) = \overline{TM}_1 \wedge m\vec{\omega}'_1 = R_1 \vec{e}_{r1} \wedge m\vec{\omega}'_1 \vec{e}_{\theta 1} = mR_1 \omega'_1 \vec{e}_z \\ \overline{L_{IT}}(M_2) = \overline{TM}_2 \wedge m\vec{\omega}'_2 = R_2 \vec{e}_{r2} \wedge m\vec{\omega}'_2 \vec{e}_{\theta 2} = mR_2 \omega'_2 \vec{e}_z \end{cases} \quad \text{d'où :} \quad R_1 \omega'_1 = R_2 \omega'_2$$

On écrit que l'énergie mécanique a la même valeur en M_1 et en M_2 :

$$E_m(M_1) = \frac{1}{2} m \omega'^2_1 - \frac{GM_T}{R_1} = \frac{1}{2} m \omega'^2_2 - \frac{GM_T}{R_2} = E_m(M_2)$$

Soit le système d'équations permettant d'obtenir les vitesses aux points M_1 et M_2 :

$$\begin{cases} R_1 \omega'_1 = R_2 \omega'_2 & (1) \\ \omega'^2_1 - \omega'^2_2 = \frac{2GM_T}{R_1} - \frac{2GM_T}{R_2} & (2) \end{cases}$$

③ On obtient l'une des vitesses en fonction de l'autre dans (1) qu'on remplace dans (2) :

$$\begin{aligned} \omega'^2_1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \omega'^2_2 &= 2GM_T \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) & \text{d'où :} & \omega'^2_1 \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2}\right) = 2GM_T \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \\ \omega'^2_1 \frac{R_2 + R_1}{R_2} &= 2GM_T \frac{1}{R_1} & \text{et finalement :} & \omega'^2_1 = \frac{2GM_T R_2}{R_1 (R_2 + R_1)} \end{aligned}$$

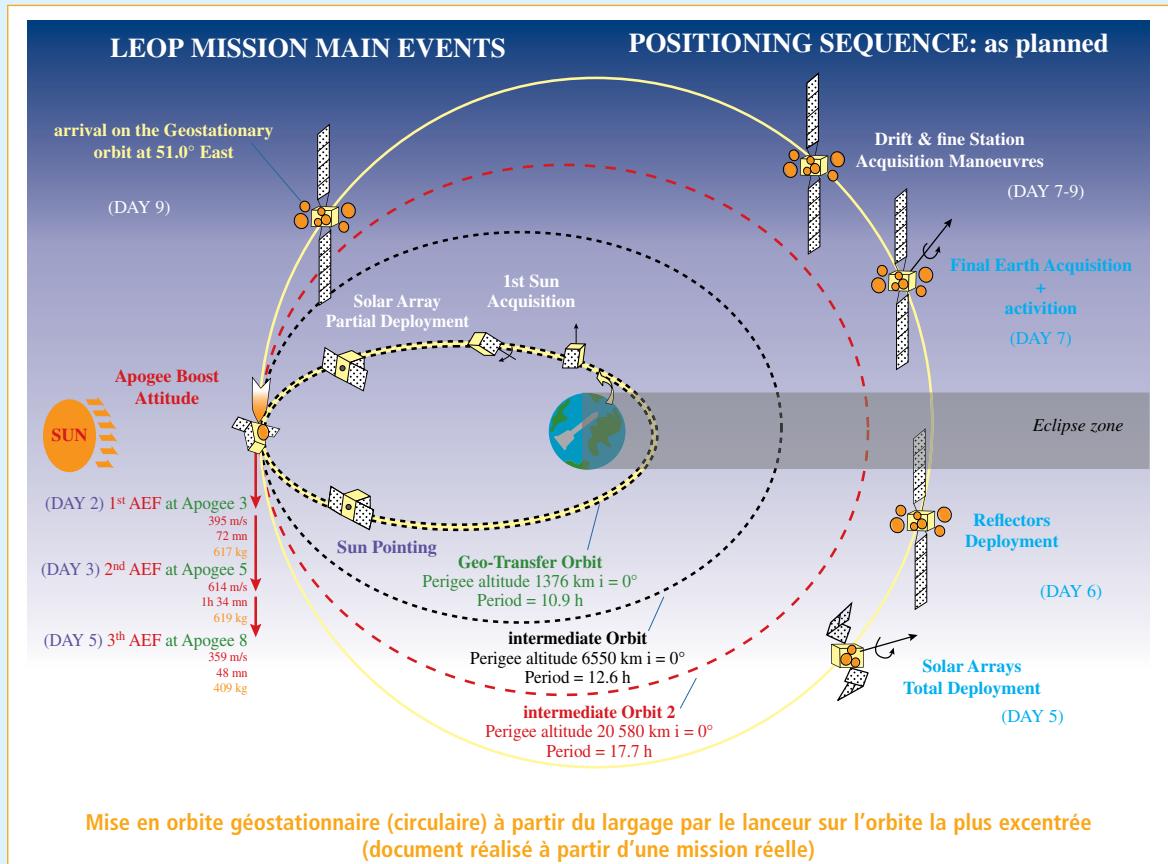
Les équations (1) et (2) étant invariantes par permutation entre les grandeurs indiquées 1 et celles indiquées 2, on obtient la seconde vitesse en inversant les rôles des indices soit finalement

$$\omega'_1 = \sqrt{\frac{2GM_T R_2}{R_1 (R_2 + R_1)}} = \omega_1 \sqrt{\frac{2R_2}{(R_2 + R_1)}} > \omega_1 \quad \text{et} \quad \omega'_2 = \sqrt{\frac{2GM_T R_1}{R_2 (R_1 + R_2)}} = \omega_2 \sqrt{\frac{2R_1}{(R_1 + R_2)}} < \omega_2$$

Les valeurs des vitesses montrent qu'il faut effectivement accélérer en M_1 ($\omega'_1 > \omega_1$) pour passer sur l'orbite elliptique et qu'il faut également accélérer à nouveau en M_2 ($\omega'_2 < \omega_2$) pour passer sur l'orbite circulaire haute.

Bien comprendre

La vitesse finale sur la trajectoire circulaire de l'orbite haute est inférieure à la vitesse initiale sur la trajectoire circulaire de l'orbite basse ($\omega_2 < \omega_1$), pourtant il faut accélérer deux fois pour atteindre cette orbite. En fait sur l'orbite elliptique, le système gagne beaucoup d'énergie potentielle et son énergie cinétique décroît fortement, plus qu'il ne faut, d'où l'accélération nécessaire en M_2 . La plupart des satellites sont ainsi montés en orbite finale à partir d'une orbite basse où ils sont déposés par le lanceur (fusée). En général la manœuvre s'étale sur plusieurs révolutions, une petite accélération à chaque passage à l'apogée (grâce au moteur d'apogée) finit par circulariser la trajectoire comme sur l'exemple de l'illustration page suivante.



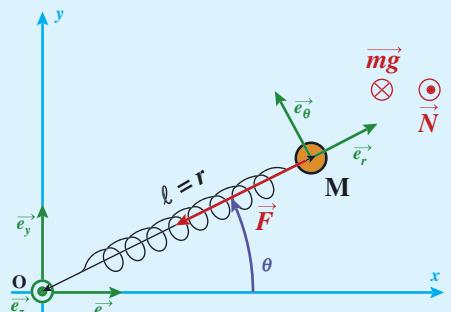
4 Mobile accroché à un ressort

→ énoncé p. 315

- 1 Le mobile est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le système est astreint par le support à se déplacer dans le plan horizontal, dans lequel on utilise les coordonnées polaires.

Cinématique : $\overrightarrow{OM} = \ell \overrightarrow{e_r}$; $\vec{v} = \ell \overrightarrow{e_r} + \ell \dot{\theta} \overrightarrow{e_\theta}$
 $\vec{a} = (\ddot{\ell} - \ell \dot{\theta}^2) \overrightarrow{e_r} + (\cancel{2\ell \dot{\theta}} + \ell \ddot{\theta}) \overrightarrow{e_\theta}$

Bilan des forces : $\overrightarrow{N} = N \overrightarrow{e_z}$; $\vec{mg} = -m g \overrightarrow{e_z}$
 $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0) \overrightarrow{e_r}$



N. B. : Sur le schéma, les forces orthogonales au plan ont été dessinées à côté de M pour une meilleure lecture.

Le théorème de la résultante cinétique : $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{mg}$ se projette sur (Oz) en : $\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$

La résultante des forces se limite donc à la force élastique, orientée suivant (OM) en tout point, ce qui implique que le mouvement est à force centrale de centre O. Le moment cinétique est donc constant (*démonstration dans le cours à savoir refaire*) et s'exprime comme suit (avec $r = \ell$) :

$$\overrightarrow{L_{IO}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \ell \overrightarrow{e_r} \wedge m(\ell \overrightarrow{e_r} + \ell \dot{\theta} \overrightarrow{e_\theta}) = m\ell^2 \dot{\theta} \overrightarrow{e_z} = mC \overrightarrow{e_z} \quad (1)$$

La valeur du moment cinétique se détermine en un point quelconque de la trajectoire, par exemple à la position initiale :

$$\text{a) } \overline{L_{/Oa}}(M) = \overline{\vec{OM}_0} \wedge m\vec{v}_0 = \ell_1 \vec{e}_x \wedge \vec{0} = \vec{0}$$

soit : $C = 0$

$$\text{b) } \overline{L_{/Ob}}(M) = \overline{\vec{OM}_0} \wedge m\vec{v}_0 = \ell_2 \vec{e}_x \wedge m\ell_2 \omega_2 \vec{e}_y = m\ell_2^2 \omega_2 \vec{e}_z$$

soit : $C = \ell_2^2 \omega_2$

Dans le cas a) :

$$m\ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \vec{0}$$

d'où :

$$\dot{\theta} = 0$$

d'où : $\theta = \text{cste} = \theta(t=0) = 0$

Le mobile reste sur l'axe (Ox) et son mouvement est nécessairement rectiligne.

On obtient l'équation différentielle du mouvement avec le théorème de la résultante cinétique :

$$\vec{ma} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x$$

$$\text{d'où : } m\ddot{\ell} = -k(\ell - \ell_0) \quad \text{Soit : } \ddot{\ell} + \omega_0^2 \ell = 0 \quad \text{avec : } X = \ell - \ell_0 \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

On reconnaît un oscillateur harmonique classique dont les conditions initiales sont :

$$X(t=0) = 1,2\ell_0 - \ell_0 = 0,2\ell_0 \quad \text{et} \quad \dot{X}(t=0) = 0 \text{ est :}$$

La solution s'écrit donc :

$$X = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t = 0,2\ell_0 \cos \omega_0 t \quad \text{d'où : } \boxed{\ell = \ell_0(1 + 0,2 \cos \omega_0 t)}$$

Soit un mouvement rectiligne sinusoïdal entre les deux positions du ressort $0,8\ell_0$ et $1,2\ell_0$

Bien comprendre

À ce stade du cours de mécanique, il faut savoir poser un problème et le résoudre dans son intégralité sans attendre des questions détaillées de l'énoncé et en exploitant tous les théorèmes connus.

- 2) La résultante des forces est la force élastique qui est une force conservative. L'énergie mécanique est donc un invariant du mouvement. L'énergie potentielle se calcule comme suit ($r = \ell$) :

$$E_p = - \int \vec{F} \cdot d\overline{OM} + cte = - \int -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_r \cdot (d\ell \vec{e}_r + \ell d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z) + cte = \frac{1}{2}(\ell - \ell_0)^2 + cte$$

On choisit la référence de l'énergie potentielle lorsque le ressort est à sa longueur à vide (force nulle), ce qui annule la constante. L'énergie mécanique vaut :

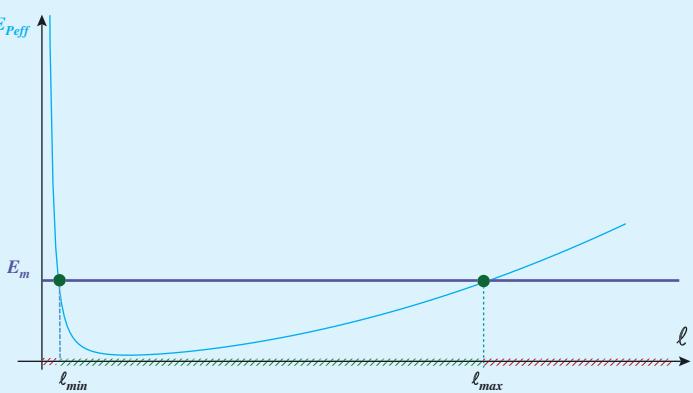
$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(\ell) = \frac{1}{2}m(\dot{\ell}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}m\dot{\ell}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\ell}^2 + \frac{1}{2}U_{\text{Eff}}(\ell) \quad (2)$$

avec :

$$U_{\text{Eff}}(\ell) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

L'énergie potentielle effective forme un puits de potentiel car elle tend vers l'infini en 0 et en l'infini. On obtient le tracé ci-contre. Quelle que soit l'énergie mécanique du mobile, il sera dans un état lié ce qui signifie qu'il évolue entre deux positions extrêmes (comme établi pour a)). Ce résultat est indépendant des conditions initiales.



- 3) Pour un mouvement circulaire, la vitesse doit être en tout point orthogonale au rayon vecteur, donc en particulier à l'instant initial du lancement (comme en b) par exemple). Le rayon de la trajectoire est tel

que : $r = \ell = \text{constante} = \ell(t=0) = \ell_0$, D'après le premier invariant, (1) on en déduit que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est aussi constante, donc que le mouvement est nécessairement uniforme. L'énergie mécanique est le second invariant du mouvement, donc sa dérivée est nulle. Par ailleurs sur une trajectoire circulaire, le terme $\frac{1}{2}m\dot{\ell}^2$ est nul. En utilisant toutes ces conditions, il vient :

$$\frac{dE_m}{d\ell} = \frac{d}{d\ell} \left(\frac{1}{2}m \frac{C^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 \right) = -m \frac{C^2}{\ell^3} + k(\ell - \ell_0) = 0 \quad \text{avec : } C = \ell_0^2 \omega_0$$

$$\left(\frac{dE_m}{d\ell} \right)_{\ell=\ell_0} = -m \frac{(\ell_0^2 \omega_0)^2}{\ell_0^3} + k(\ell_0 - \ell_0) = 0 \quad \text{d'où : } \ell_0 = \frac{\ell_0}{1 - \frac{\omega_0^2}{\ell_0^2}} \quad (3) \quad \text{avec : } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Pour que cette relation ait un sens, ℓ_0 doit être positif, d'où la condition supplémentaire : $\omega_0 < \omega_0$. En définitive, pour obtenir un mouvement circulaire il faut que le lancement se fasse avec une vitesse initiale orthogonale à la direction du ressort, que la vitesse de lancement soit suffisamment faible ($\omega_0 < \omega_0$) et que la vitesse de lancement et la longueur du ressort initiale vérifient la relation (3).

Bien comprendre

- Notons qu'un invariant peut être dérivé par rapport à une variable quelconque du problème (ici $r = \ell$) et pas nécessairement par rapport au temps.
- La trajectoire circulaire correspond au cas où l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective et prend la valeur minimale. C'est donc aussi le minimum de l'énergie effective.
- Cette question ouverte nécessite de bien maîtriser le sujet des forces centrales ainsi que la notion d'invariant. Il faut noter cependant que ce problème reste assez théorique, en effet un tel dispositif est très instable, le ressort ne restant pas rectiligne dans la pratique.

Résolution de problème : Construire une Étoile Noire ?

→ énoncé p. 316

Puissance de tir

On choisit pour la planète Aldorande les mêmes caractéristiques que celles de la Terre pour faire le calcul ($M = 6.10^{24}$ kg, $R = 6400$ km). Évaluer la puissance de tir consiste à déterminer la puissance du laser ayant détruit Aldorande. Il faut donc estimer l'énergie E_{tir} nécessaire à la destruction de la planète et à la dispersion de ses débris dans l'espace. Cette énergie doit compenser l'énergie E_p de cohésion gravitationnelle de la planète. Si elle est exactement opposée, alors on réalise l'opération contraire de celle décrite dans la définition de l'énergie potentielle gravitationnelle de la sphère : on détruit la sphère et les débris partent jusqu'à l'infini où ils arrivent avec une vitesse nulle. Cela signifie, entre autres, que la vitesse des débris au moment de la destruction sera la vitesse de libération, soit une valeur d'environ 10 km/s (voir cours ou refaire le calcul). Il faut donc fournir l'énergie suivante :

$$E_{tir} = -E_p = \frac{3GM^2}{5R} = 2.10^{32} \text{ J} \quad \text{Soit une puissance pour un tir d'une durée de 1 s égal à : } P_{tir} = 2.10^{32} \text{ W}$$

On peut comparer cette valeur aux diverses données. En termes énergétiques, l'énergie du tir correspond à la consommation mondiale (actuelle) pendant 4.10^{11} ans, soit pendant 400 milliards d'années dans un univers qui en a moins de 15 milliards et sur une planète dont l'espérance de vie est environ 5 milliards d'années.... L'énergie du tir est aussi comparable à l'énergie totale émise par le Soleil (pas seulement la partie infime qui arrive sur Terre) pendant presque une semaine : d'après les données le Soleil émet 2.10^{26} J par seconde, il émet donc 2.10^{32} J en un peu moins de 6 jours. On peut aussi faire tourner 3 millions de réacteurs nucléaires pendant un milliard d'années... Bref c'est un peu long et coûteux...

En terme de puissance, le Laser Apollon a une puissance de 10 PW = 10^{16} W. Celui de l'Étoile Noire doit être 2.10^{16} fois plus puissant qu'Apollon. Cela équivaut à dire que tous les habitants de la Terre devraient utiliser simultanément chacun environ deux à trois millions de lasers Apollon pour atteindre la puissance du tir de l'Étoile Noire...

N. B. : La conclusion de Roland Lehoucq dans son article est encore plus pessimiste.

Cette valeur gigantesque n'est qu'un minimum car, dans cette hypothèse, les débris de la planète se répandront dans l'espace à une vitesse proche d'une dizaine de kilomètres par seconde. Il faudra donc attendre des heures avant de constater les effets de la frappe. C'est bien connu, Dark Vador est impatient. Les jolis effets pyrotechniques qu'il aime à contempler depuis son destroyer interstellaire ne peuvent être obtenus que si son turbo-laser fournit une énergie supplémentaire, nécessaire pour assurer aux débris une expansion rapide. En visionnant le film image par image, la vitesse d'expansion des parties externes de la planète peut être estimée : elle est proche de 10 000 kilomètres par seconde. L'énergie nécessaire pour cette violente explosion est un million de fois plus grande que la valeur fixée précédemment. La puissance que doit fournir le générateur principal de l'Etoile de la Mort pour produire une telle énergie en quelques jours est tout simplement phénoménale : plusieurs millions de fois supérieure à la puissance lumineuse que rayonne le Soleil. D'où peut bien venir une telle puissance ? Inutile de penser à des réactions chimiques, comme la combustion, ou aux réactions de fission nucléaire comme celles qui alimentent les centrales EDF. Même les réactions de fusion thermonucléaire qui se déroulent au cœur des étoiles ont un rendement trop faible pour les basses œuvres de l'Empire. Si les étoiles sont si brillantes, c'est avant tout parce qu'elles sont très grosses. Une étoile un million de fois plus brillante que le Soleil a une masse environ 50 fois supérieure, trop importante pour la faire tenir dans l'Etoile de la Mort... La seule solution « raisonnable » au regard de la physique connue serait que l'Etoile de la Mort extraie son énergie d'un trou noir en rotation rapide. C'est dire si les ingénieurs de l'Empire sont vraiment forts...

Source : <http://www.futura-sciences.com/magazines/matiere/infos/dossiers/d/physique-secrets-star-wars-631/page/4/>

Coût et durée de construction de l'Étoile Noire

On suppose la base constituée essentiellement d'une structure en acier. Cependant ce n'est pas de l'acier massif et on peut évaluer à 10 % le volume de la structure par rapport à celui des espaces habitables. La densité de ces derniers étant négligeable devant celle de l'acier, la densité moyenne peut être choisie à un dixième de celle de l'acier. La forme sphérique de la base (rayon r) permet d'estimer son volume :

$$V_{\text{Étoile Noire}} = \frac{4\pi r^3}{3} \quad \text{soit une masse d'acier : } m_{\text{acier}} = \frac{\rho_{\text{acier}}}{10} V_{\text{Étoile Noire}} = \frac{\rho_{\text{acier}}}{10} \frac{4\pi r^3}{3} = 2.10^{19} \text{ kg}$$

En conséquence la masse d'acier nécessaire est de 10^7 fois la production mondiale annuelle, ce qui nécessite de mobiliser la totalité de l'industrie pendant 10 millions d'années pour un coût de production (au taux actuel) d'environ 10^{19} dollars. Même en ne construisant que la première version de l'Étoile Noire (un peu plus petite) et même en imaginant un substantiel rabais de l'industrie de l'acier pour une commande aussi importante, si l'on ajoute ce coût à celui de l'assemblage, des équipements (forcément très sophistiqués) et de l'aménagement (nécessairement high tech) intérieur, on obtient vraisemblablement une valeur encore très supérieure au prix déjà faramineux avancé par la Maison Blanche ($8,5.10^{17}$ dollars). On sait cependant que l'Empire a mis à sac moult planètes et on comprend maintenant pourquoi...

Bien comprendre

- Dans ce type d'énoncé, on attend avant tout un raisonnement et il est tout à fait indiqué de faire des calculs d'ordre de grandeur et d'arrondir sans hésiter les valeurs utilisées et obtenues. On a gardé ici un chiffre significatif pour permettre au lecteur de mieux comprendre les calculs, mais on pourrait se contenter de puissances de 10. Même avec des facteurs 10 ou 100 dans les valeurs ci-dessus, on arrivera à des conclusions du même type.
- On n'est par ailleurs pas obligé de faire toutes les comparaisons énergétiques proposées ici, l'une d'entre elles suffira à comprendre l'énormité de l'énergie nécessaire... et le caractère irréalisable du projet !
- Il n'est enfin pas toujours facile de savoir ce qu'attend un énoncé de ce genre, et on se guidera à l'aide des données qui induisent des voies de réflexion.

À méditer

Les phénomènes que l'on peut observer dans la nature sont si variés, et les trésors que cachent les cieux si grands, que l'esprit humain aura de quoi se nourrir pour l'éternité.

JOHANNES KEPLER (1571-1630)

Mécanique du solide

La mécanique des systèmes matériels est souvent présentée comme une généralisation de la mécanique du point, pour d'évidentes raisons de progression de la difficulté de l'étude. En réalité, c'est plutôt la mécanique du point qui est un cas particulier de la mécanique des systèmes matériels. Le programme concerne essentiellement les mouvements des solides (systèmes indéformables), ce qui nécessite une approche par le calcul intégral, puisque la matière des objets au niveau macroscopique est le plus souvent continue et s'étend dans trois dimensions. Cependant une présentation s'appuyant sur les systèmes discrets permet d'aborder plus facilement les différents concepts et de bien comprendre leurs expressions pour des solides continus. C'est pourquoi ces deux approches sont systématiquement proposées en parallèle ici, tant dans les définitions que dans les énoncés des lois. La mécanique des systèmes matériels (au sein de laquelle la mécanique du solide occupe une place importante) recouvre un vaste champ d'étude, puisqu'elle doit pouvoir établir les propriétés des mouvements de tous les objets physiques possibles, soumis à toutes les interactions envisageables. Bien que les lois physiques abordées dans ce chapitre soient tout à fait générales, on se limitera dans les exercices à l'étude des solides en translation ou en rotation autour d'un axe fixe. On gardera cependant à l'esprit, que ces lois trouveront des applications pour des systèmes bien plus complexes et souvent dans d'autres domaines comme la thermodynamique, la mécanique des fluides ou l'électromagnétisme.

Outils mathématiques

- Somme discrète et somme continue :** Une somme discrète est l'addition d'une série (éventuellement infinie) de termes que l'on peut compter et s'écrit à l'aide du symbole Σ . Une somme continue s'exprime à l'aide d'une intégrale, symbolisée par un signe \int dont la forme d'un grand S allongé signifie somme. À ce titre il est plus pertinent de dire « somme de a à b de $f(x)$ » plutôt que « intégrale de a à b de $f(x)$ ».
- Barycentre :** Le barycentre des N points M_i affectés respectivement des coefficients α_i est le point B défini par :
$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \overrightarrow{BM_i} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \forall O \text{ un point de l'espace} \quad \overrightarrow{OB} = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^N \alpha_i}$$

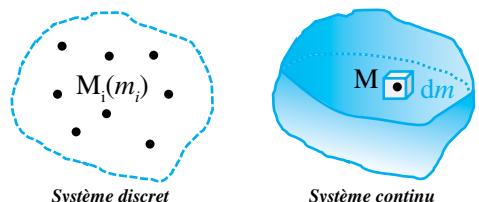
→ Préambule

- Un **système matériel discret** est un ensemble de N points matériels M_i de masse m_i . Dans ce qui suit, afin d'alléger les notations, on omettra le domaine sur lequel s'effectuent les sommes, car il est toujours sous-entendu qu'il s'agit de l'ensemble du système considéré et on notera :

$$\sum \text{grandeur}_i = \sum_{i=1}^N \text{grandeur}_i$$

- Un **système matériel continu** est un ensemble d'éléments volumiques de masse dm dont la position est indiquée par M . Pour un système continu s'étendant dans les 3 directions de l'espace (x, y, z), on notera :

$$\iiint \text{grandeur}(M) dm = \iiint_{\text{système}} \text{grandeur}(M) dm$$



■ On rappelle qu'un **système matériel** est déformable, qu'un **solide** est indéformable et un **point matériel** sans dimension (voir définitions détaillées p. 220). Même si elle présente l'intérêt de mettre l'accent sur cette propriété essentielle, l'expression solide indéformable est donc un pléonasme. Sauf en ce qui concerne la conservation du moment cinétique étudiée au paragraphe II.3., seul le cas du solide, un système généralement continu, est au programme de MPSI. On exprime cependant tout ce qui suit à la fois pour les systèmes discrets et pour les systèmes continus, car l'utilisation d'un système discret permet une première approche simple du solide continu. La notation avec un triple signe somme ne doit pas effrayer, il s'agit de mettre en évidence que le système a 3 dimensions et, qu'à ce titre, toute grandeur physique dépend de 3 variables d'espace sur lesquelles il faut effectuer la somme. Par ailleurs, il ne sera pas fait de calculs détaillés de ces intégrales cette année.

Remarque importante : Il est intéressant de noter qu'à l'exception notable des théorèmes énergétiques, qui ne sont valables que pour le solide, tous les autres énoncés tels qu'ils sont proposés ici, sont valables pour des systèmes matériels quelconques (donc en particulier déformables). Pour en montrer toute la portée, dans ce cours, on écrira (**solide***) quand les concepts énoncés pour un solide peuvent se généraliser aux systèmes matériels. Le lecteur pourra choisir de l'ignorer ou de s'y intéresser.

I Grandeurs cinétiques

1. Quantité de mouvement

Définitions

- La **masse d'un système** est la somme des masses de ses composants :

$$m = \sum m_i \quad (\text{système discret}) \quad \text{ou} \quad m = \iiint dm \quad (\text{système continu})$$

- Le **centre d'inertie G** d'un solide* est le barycentre de ses éléments, chacun affecté de sa masse :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum m_i \overrightarrow{OM}_i \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \iiint \overrightarrow{OM} dm$$

- La **quantité de mouvement** d'un solide* est la somme des quantités de mouvement de ses composants : $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$

$$\text{ou} \quad \vec{p} = \iiint d\vec{p} = \iiint \vec{v}(M) dm$$

La quantité de mouvement d'un solide* se calcule à partir de ses composants et de la définition du barycentre, soit pour un système discret (on pourrait le démontrer de même pour un système continu) :

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \frac{d\overrightarrow{OM}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum m_i \overrightarrow{OM}_i \right) = \frac{d(m\overrightarrow{OG})}{dt} = m\overrightarrow{v}_G$$

Résultat

La **quantité de mouvement d'un solide*** est celle qu'il aurait si toute sa masse était ramenée en son centre d'inertie G : $\vec{p} = m\overrightarrow{v}_G$

2. Moment cinétique

Définition

Le **moment cinétique par rapport à un point A**, d'un solide* S de masse m , est la somme des moments cinétiques de ses composants.

$$\overrightarrow{L_{/A}}(S) = \sum \overrightarrow{L_{/A}}(M_i) = \sum \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \overrightarrow{v}_i \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{L_{/A}}(S) = \iiint d\overrightarrow{L_{/A}} = \iiint \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v}(M) dm$$

Définition

Le **moment cinétique par rapport à un axe Δ** d'un solide* S de masse m est la projection sur l'axe Δ de son moment cinétique par rapport à un point A quelconque appartenant à l'axe :

$$L_{\Delta}(S) = \overrightarrow{L_{/\Delta \in \Delta}}(S) \cdot \vec{e}_{\Delta}$$

- Le moment cinétique dans le cas général ne se simplifie pas, contrairement à la quantité de mouvement.

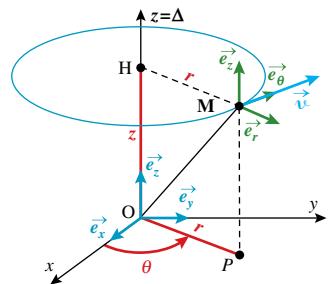
→ Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit un point matériel M de masse m décrivant un cercle dans un plan orthogonal à un axe Δ . Les coordonnées cylindriques sont appropriées comme le montre le schéma. Le moment cinétique de M par rapport à un point O quelconque de l'axe s'écrit alors :

$$\overrightarrow{L_{/\Delta}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}(M) = m(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{v}$$

$$\overrightarrow{L_{/\Delta}}(M) = m(z \vec{e}_z + r \vec{e}_r) \wedge r \dot{\theta} \vec{e}_{\theta} = m r \dot{\theta} (-z \vec{e}_r + r \vec{e}_z)$$

D'où : $L_{/\Delta}(M) = \overrightarrow{L_{/\Delta}}(M) \cdot \vec{e}_z = m r^2 \dot{\theta}$



Dans cette expression, r est la distance du point M à l'axe Δ et $\dot{\theta}$, la vitesse angulaire du point sur sa trajectoire circulaire. On a vu dans le chapitre de cinématique, qu'un solide en rotation autour d'un axe fixe est tel que tous ses points ont un mouvement circulaire de même vitesse angulaire Ω dans un plan orthogonal à l'axe. On montre que, dans ce cas, on peut généraliser le résultat précédent, en sommant sur l'ensemble des éléments du système l'expression obtenue pour un point isolé.

Résultat

- Le **moment cinétique, par rapport à un axe Δ** , d'un solide S en rotation autour de ce même axe, avec une vitesse angulaire Ω vaut :

$$L_{\Delta}(S) = J_{\Delta} \Omega = J_{\Delta} \dot{\theta} \quad (\text{où } \theta \text{ est l'angle paramétrant la rotation})$$

- J_{Δ} est appelé **moment d'inertie** du solide par rapport à l'axe Δ et vaut :

$$J_{\Delta}(S) = \sum m_i H_i M_i^2 = \sum m_i r_i^2 \quad \text{ou} \quad J_{\Delta}(S) = \iiint r^2(M) dm$$

Où H_i est le projeté orthogonal de M_i sur l'axe, r_i la distance de M_i à l'axe (système discret) et r la distance de M à l'axe (système continu). J_{Δ} s'exprime en kg.m^2 .

POINT MÉTHODE

Exprimer la vitesse angulaire

- La vitesse angulaire d'un point autour d'un axe est la dérivée de l'angle qui mesure sa position dans un plan orthogonal à l'axe. Il en est de même pour la vitesse de rotation d'un solide autour d'un axe, le vecteur rotation ayant comme valeur la vitesse angulaire, elle-même égale à la dérivée de l'angle qui paramètre la position du solide par rapport à une position de référence (en général la position initiale). Cet angle ne s'appelle pas nécessairement θ et la vitesse angulaire n'est pas nécessairement $\dot{\theta}$! L'angle peut être noté φ ou α , la vitesse angulaire sera alors $\dot{\varphi}$ ou $\dot{\alpha}$. Si, dans la partie cours, on utilise systématiquement θ , d'autres notations ont été volontairement choisies dans les exercices.

L'expression générale du moment cinétique vectoriel d'un solide en rotation est complexe et fait appel au calcul matriciel. Cependant, dans certains cas simples, on peut facilement le calculer. Si un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ et que ce dernier est un axe de symétrie du solide ou que le plan perpendiculaire à l'axe et contenant A, un point de l'axe, est un plan de symétrie du solide, alors le moment cinétique par rapport à A a une expression simple, cohérente avec le résultat précédent.

$$\overline{L}_{/\Delta \in \Delta}(S) = J_{\Delta} \overrightarrow{\Omega} = J_{\Delta} \dot{\theta} \overrightarrow{e_{\Delta}}$$

► Quelques moments d'inertie

Les expressions ci-dessous sont valables uniquement pour des solides homogènes dont on exprime le moment d'inertie par rapport à un axe particulier. La masse totale du solide est notée m .

Système	Point	Cylindre	Sphère	Tige
Schéma				
Moment d'inertie	$J_{\Delta} = mr^2$	$J_{\Delta}(\text{cylindre plein}) = \frac{1}{2}mR^2$ $J_{\Delta}(\text{cylindre creux}) = mR^2$	$J_{\Delta}(\text{sphère pleine}) = \frac{2}{5}mR^2$ $J_{\Delta}(\text{sphère creuse}) = \frac{2}{3}mR^2$	$J_{\Delta} = \frac{1}{12}mL^2$ $J_{\Delta'} = \frac{1}{3}mL^2$
Condition		Δ est l'axe du cylindre.	Δ passe par le centre de la sphère.	Δ est orthogonal à la tige et passe par son centre.

3. Énergie

Définition

L'**énergie cinétique** d'un solide* S de masse m est la somme des énergies cinétiques de ses composants :

$$E_c(S) = \sum E_{ci} = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 \quad \text{ou} \quad E_c(S) = \iiint dE_c = \iiint \frac{1}{2}v^2(M) dm$$

Les autres formes d'énergies (potentielles et mécanique) s'obtiennent aussi par généralisation des définitions du chapitre 14 et il en va de même des théorèmes concernant l'énergie. Cependant, leurs expressions peuvent être compliquées, en particulier du fait de l'existence de forces internes au système. On retiendra donc uniquement à ce niveau le cas simple de l'énergie potentielle de pesanteur d'un système dans un champ uniforme.

Résultat

L'énergie potentielle de pesanteur dans un champ uniforme \vec{g} d'un solide* de masse m est celle qu'aurait le centre d'inertie G, où serait concentrée toute la masse du système : $E_p = mgz_G$ avec $\vec{g} = -g\vec{e}_z$

- Le champ de pesanteur pourra être considéré uniforme si les dimensions du solide sont suffisamment faibles pour que \vec{g} soit le même en tout point du système, ce qui n'est guère contraignant et donc largement vérifié au niveau des systèmes du laboratoire ou de la vie courante. Comme habituellement, l'expression (signe) de E_p dépend du sens de l'axe (Oz), choisi ici vers le haut.

→ Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Dans ce cas, tous les points sont animés d'une vitesse qui s'exprime en fonction de la vitesse de rotation :

$$E_C = \sum E_{Ci} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (r_i \Omega)^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \Omega^2 = \frac{1}{2} J_{\Delta} \Omega^2$$

Résultat

L'énergie cinétique d'un solide en rotation à la vitesse Ω autour d'un axe fixe Δ est :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \Omega^2 = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 \quad (\text{si } \theta \text{ est l'angle de paramétrage du mouvement})$$

II | Dynamique du solide

1. Actions mécaniques

Pour un point matériel M, l'interaction avec le milieu extérieur peut toujours se caractériser par une force appliquée en M. On peut ensuite calculer le moment de cette force par rapport à un point fixe A quelconque. La détermination du mouvement de M s'appuiera soit sur le théorème de la résultante cinétique, soit sur le théorème du moment cinétique qui en est une conséquence en mécanique du point.

Pour un système matériel, et en particulier pour un solide, S, l'interaction avec le milieu extérieur peut être plus complexe, du fait que chaque élément du système peut subir des forces, ces dernières ayant alors des points d'application différents du centre d'inertie G, et dont l'ensemble ne peut pas nécessairement se réduire à une seule force appliquée en G. Par ailleurs le système est susceptible d'être aussi le siège d'interactions entre ses composants. Il existe cependant certaines interactions qui se modélisent aisément et auxquelles on se limitera ici.

Définition

Un solide* soumis à une interaction (extérieure ou intérieure) subit une **action mécanique**, qui comprend une **résultante** et un **moment** (que l'on peut éventuellement réunir en un torseur).

→ Le poids

Résultat

L'action mécanique sur un solide* d'un champ de pesanteur uniforme se ramène à une force unique, le poids qu'aurait le centre d'inertie où serait concentrée toute la masse du système.

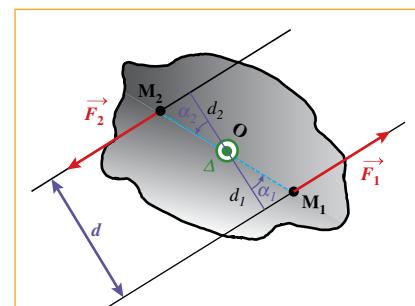
→ Les couples

Définition

Un **couple** est une action mécanique dont la résultante est nulle et qui se réduit donc à un moment.

- Un couple n'a pas d'effet sur le mouvement du centre d'inertie, puisque sa résultante est nulle, mais aura tendance à faire tourner le système.

- Un cas simple est celui de deux forces égales et opposées appliquée en deux points différents d'un système, par exemple symétriquement par rapport à l'axe de rotation et dont les directions sont perpendiculaires à l'axe. Même si un couple n'est cependant généralement pas le fait de deux forces uniquement,



cet exemple permet d'en comprendre le principe. On a alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}_1) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}_2) &= \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_2 \\ &= OM_1 \sin \alpha_1 \vec{F} e_z + OM_2 \sin \alpha_2 \vec{F} e_z = (d_1 + d_2) \vec{F} e_z\end{aligned}$$

L'action mécanique de l'ensemble est bien un couple, puisqu'elle se réduit à un moment :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}_1) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}_2) = \vec{F} d \vec{e}_z = \Gamma \vec{e}_z \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/\Delta}(\vec{F}_1) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/\Delta}(\vec{F}_2) = \vec{F} d = \Gamma$$

On pourra vérifier que si les deux forces doivent être de même valeur (résultante nulle), il n'est pas nécessaire qu'elles s'appliquent symétriquement comme sur le schéma. On pourra choisir des distances d_1 et d_2 différentes et des angles α_1 et α_2 différents et retrouver la même expression du couple.

► La liaison pivot

Le contact entre solides, en particulier entre le système et son support, peut générer des actions mécaniques extrêmement complexes, dont l'étude dépasse largement le cadre de ce cours. Seul le cas de la liaison pivot sera étudié ici.

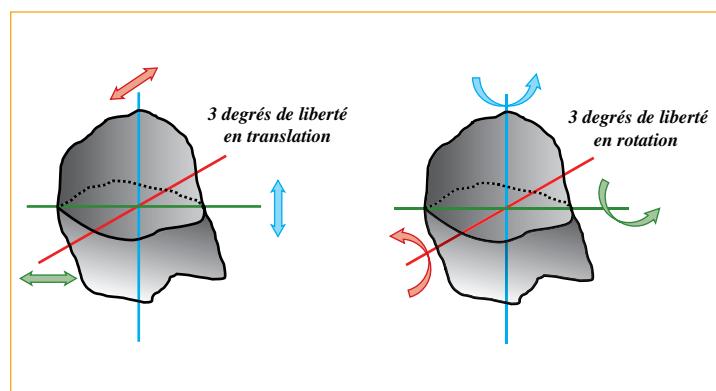
Définitions

- Une **liaison pivot** est réalisée lorsque le support n'autorise au solide qu'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. La liaison se traduit par une action mécanique (une résultante et un moment exercés sur le système).
- Une **liaison pivot idéale** est telle que le moment de cette action est nul.

- Un exemple facile à visualiser : schématiquement, l'axe d'une grande roue repose dans un cylindre creux, le support, qui bloque tout autre mouvement que la rotation autour de l'axe de la roue. Le support exerce sur la roue une résultante qui la maintient en position verticale et un moment dû aux frottements. Si on suppose les frottements négligeables, alors la liaison pivot est idéale.
- D'une façon générale, supposer la liaison pivot idéale revient à négliger les frottements du support sur le système et donc aussi la dissipation d'énergie qui en résulte.

2. Principe fondamental de la dynamique

Un solide, et *a fortiori* un système matériel, est en toute généralité un système à 6 degrés de liberté : 3 pour la translation et 3 pour la rotation. De ce fait, la loi physique qui permet de déterminer la totalité du mouvement du système en fonction des actions qu'il subit, contient nécessairement 6 équations algébriques. Ces 6 équations peuvent être réunies en une seule sous forme d'une relation entre le torseur dynamique et celui des actions mécaniques (ce qui s'écrit couramment en SI), mais dans ce cours on l'écrira plutôt sous forme de deux expressions vectorielles (chacune représentant 3 équations algébriques). Ces deux formes d'énoncés sont évidemment équivalentes (*voir aussi comment appeler cette loi p. 234-235*). Notons que pour un système matériel, la déformation s'ajoute au problème qui peut devenir extrêmement complexe à mettre en équation.



Énoncé

Le **principe fondamental de la dynamique (PFD)** est une loi physique permettant de relier les caractéristiques du mouvement d'un solide* (quantité de mouvement et moment cinétique) et les interactions qu'il subit (résultantes et moments des actions mécaniques) qui causent ce mouvement. Dans un référentiel galiléen, il est équivalent au système formé par les deux théorèmes suivants :

Théorème de la résultante cinétique (TRC) : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$

Théorème du moment cinétique (TMC) : $\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext/O}$ (O fixe dans le référentiel)

- Il est extrêmement avantageux que seules les actions extérieures soient à considérer dans le PFD, cela suppose (on peut le montrer) que les actions intérieures se compensent dans leur effet sur le mouvement.

Énoncé

Pour un **solide en rotation autour d'un axe fixe Δ** , le théorème du moment cinétique peut s'écrire sous sa forme scalaire : $\frac{dL_{/\Delta}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_{i,ext})$

POINT MÉTHODE*Étudier le mouvement du solide*

- Le programme reste très limité en ce qui concerne la dynamique du solide à ce niveau. En effet on se restreint à deux cas simples, dont la mise en équation est également simple.

→ **Solide en translation** : le système n'a que 3 degrés de liberté et le plus souvent 2 (trajectoire plane) voire 1 (trajectoire simple : cercle, droite...). Ce système se ramène à un point matériel et son étude n'est pas différente de ce qui a été vu précédemment (*voir exercices des chapitres 13 et 14 par exemple*). La résolution se fera en général à l'aide du TRC (ou d'un théorème énergétique).

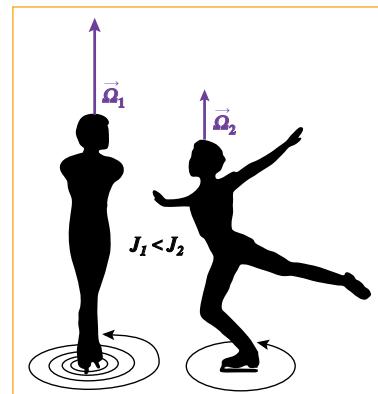
→ **Solide en rotation autour d'un axe fixe** : le système n'a qu'un seul degré de liberté, le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à cet axe suffira à déterminer les caractéristiques du mouvement. Étant astreint à ce mouvement, le système est en liaison pivot avec son support. On considérera généralement à ce niveau qu'elle est idéale. De ce fait, l'action mécanique due à la liaison n'apparaîtra pas dans l'équation, puisque la résultante est appliquée sur l'axe et que le moment est nul. Cela ne dispense pas de représenter la résultante sur le schéma (*voir exercice n° 1 p. 334 par exemple*) d'autant qu'elle peut avoir un rôle essentiel (*voir exercice n° 4 p. 334*). Si la liaison n'est pas idéale, on se limitera de toute façon à un couple de frottement dont on donnera la valeur et qui viendra s'ajouter aux autres moments du système dans l'équation.

3. Conservation du moment cinétique**Énoncé**

Dans un référentiel galiléen, le moment cinétique par rapport à un point O fixe dans le référentiel, d'un système matériel isolé (soumis à aucune interaction extérieure), ou d'un système matériel pseudo-isolé (l'ensemble des actions mécaniques extérieures se compensent), se conserve (est constant) :

Conservation du moment cinétique d'un système (pseudo-)isolé : $\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \vec{0}$ donc $\vec{L}_{/O} = \text{cste}$

■ Un système matériel soumis à aucun moment extérieur conserve son moment cinétique. Soit un tel système, en rotation autour d'un axe fixe Δ , à la vitesse Ω , son moment d'inertie étant J_Δ . Si le système modifie J_Δ en le multipliant par un facteur k , alors la vitesse angulaire sera divisée par le même facteur k . Les patineurs artistiques utilisent ce résultat : une fois mis en rotation, ils se replient sur eux-mêmes pour diminuer leur moment d'inertie par rapport à l'axe vertical de rotation et ils se mettent à tourner beaucoup plus vite. De même, pour ralentir, ils ouvrent les bras, augmentant J_Δ et donc diminuant leur vitesse angulaire. Les satellites utilisent aussi cette loi de conservation lors du déploiement de leurs panneaux solaires. L'expérience sur tabouret tournant au laboratoire met facilement en évidence ce principe.



■ Les exemples précédents s'appuient sur des systèmes matériels déformables. Cependant, dans une configuration donnée, ces systèmes peuvent être considérés comme des solides. On comprend alors que le moment d'inertie d'un solide est étroitement lié à la répartition des masses par rapport à l'axe de rotation. Plus la masse est éloignée de l'axe, plus le moment d'inertie est grand et plus il est difficile de mettre en mouvement, d'accélérer ou de freiner le solide. Le moment d'inertie J_Δ caractérise donc l'**inertie du solide** par rapport à la rotation autour de l'axe Δ , car le système « répugne » d'autant plus à une modification de son mouvement que J_Δ est grand.

III Énergétique du solide

1. Puissance et travail

Le travail et la puissance reçus par un système, du fait des actions mécaniques qu'il subit, s'expriment comme des généralisations des mêmes grandeurs définies pour le point matériel. Si l'on montre que la résultante et le moment des actions intérieures d'un système sont nuls (comme indiqué au II.2.), il n'en est pas de même pour leur travail (et donc leur puissance). En effet dans un système déformable, même si l'action exercée par un élément A du système sur un autre élément B est égale et opposée à celle exercée par B sur A, les déplacements de A et B peuvent être quelconques et sans lien simple entre eux. Il n'y a alors aucune raison que le travail de $\overrightarrow{F_{B \rightarrow A}}$ du fait du déplacement de A et celui de $\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}}$ du fait du déplacement de B donnent un total nul. On peut cependant démontrer que c'est le cas pour un solide. On admettra ce résultat, qui repose sur le fait que les mouvements des points d'un solide sont liés, la distance entre eux restant toujours constante.

Définitions

■ Le **travail** et la **puissance** des actions d'un solide résultent uniquement des actions extérieures subies par le système, car le travail et la puissance des actions intérieures d'un solide sont nulles :

$$\mathcal{P}(\text{solide}) = \mathcal{P}(\text{actions extérieures})$$

■ **Puissance d'une force** appliquée à un solide en translation : $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_G$

■ **Puissance d'un moment** appliquée à un solide en rotation autour d'un axe fixe : $\mathcal{P} = \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\Omega}$

2. Théorèmes énergétiques

Les théorèmes énergétiques se généralisent à un solide. On se limitera au théorème de l'énergie ou de la puissance cinétique à ce niveau.

Énoncés

- **Théorème de l'énergie cinétique pour un solide** : dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide est la somme des travaux de toutes les actions extérieures :

$$\Delta E_C = W(\text{solide}) = W(\text{actions extérieures})$$

- **Théorème de la puissance cinétique pour un solide** : dans un référentiel galiléen, la dérivée de l'énergie cinétique d'un solide est la somme des puissances de toutes les actions extérieures :

$$\frac{dE_C}{dt} = \mathcal{P}(\text{solide}) = \mathcal{P}(\text{actions extérieures})$$

- L'intérêt des théorèmes énergétiques est toujours le même : certaines actions ne figurent pas dans les équations, du fait de leur puissance nulle car elles ne travaillent pas.
- Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, la liaison pivot induit en général un travail non nul du fait de son moment, mais on se limitera ici à des liaisons parfaites, donc de moment nul et par suite qui ne travaillent pas.
- Un cas intéressant est celui du roulement sans glissement, car, comme on l'a vu dans l'exercice n° 5 p. 223, le point en contact avec le sol est immobile, les forces de contact s'appliquent en ce point et donc, bien que présentant un frottement (sinon le roulement serait impossible !) elles ne travaillent pas.
- Il est particulièrement avantageux de ne pas avoir à considérer le travail des forces intérieures pour un solide, ce serait nécessaire pour un système déformable.

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Quantité de mouvement, moment cinétique, énergie cinétique d'un solide : définitions, cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.
- Principe fondamental de la dynamique des systèmes : énoncé, cas particuliers.
- Théorème de la puissance cinétique ou de l'énergie cinétique pour un solide.
- Conservation du moment cinétique, conditions et applications.
- Pendule pesant : définition, schématisation, mise en équation (*voir exercice n° 1 p. 334*).

Erreurs à éviter

- Il a déjà été insisté sur l'importance du paramétrage des systèmes et sur les choix des orientations (angles, bases...) et des erreurs qui peuvent en découler (*voir chapitre 16 p. 297*).
- La vitesse angulaire dans un problème n'est pas forcément $\dot{\theta}$. On prendra soin de bien écrire le vecteur rotation, car il présente l'intérêt de définir l'axe de rotation et la vitesse angulaire (voir en exercices). En particulier, on n'écrira pas que le vecteur rotation est une flèche tournante.

Quelques « trucs » utiles

- On ne saurait trop répéter l'importance de la méthode de résolution en mécanique. On relira donc et on mettra en application les conseils de la fiche méthode p. 236 qui reste tout à fait valable ici.

Conseil

La position du problème et son paramétrage sont essentiels à la résolution, un problème correctement posé et paramétré est à moitié résolu. S'exercer à poser le problème est indispensable à la compréhension du cours et à l'acquisition de la méthode de résolution, d'où l'absence de paramétrages dans les énoncés. Le n° 3 est un exercice classique qui met en œuvre l'ensemble des méthodes de résolution.

1 Pendule pesant (question de cours) ★[→ corrigé p. 335](#)

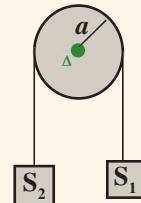
Soit un solide S de forme quelconque, de masse m , retenu par un axe horizontal Δ exerçant sur le solide une liaison pivot parfaite. On note J_Δ le moment d'inertie de S par rapport à Δ . Établir l'équation différentielle du mouvement par le PFD, puis par le théorème de la puissance cinétique. La résoudre dans le cas des « petites » oscillations et pour un pendule initialement écarté d'un angle θ_0 et lâché sans vitesse initiale. Retrouver la période des petites oscillations du pendule simple.

2 Pendule de torsion ★★[→ corrigé p. 336](#)

Un pendule de torsion est une tige rigide horizontale suspendue en son centre à un fil vertical formant l'axe Δ , susceptible d'exercer un couple dit de rappel sur la tige, proportionnel à l'angle α dont est tordu le fil : $\Gamma_\Delta = -C\alpha$ où C est une constante positive. Établir l'équation différentielle du mouvement de la tige et la résoudre. Commenter. Retrouver ce résultat par un théorème énergétique.

3 Machine d'Atwood ★★★[→ corrigé p. 338](#)

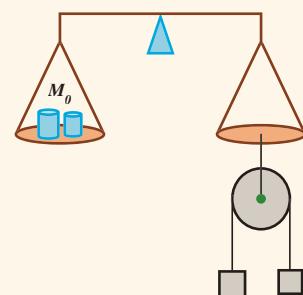
La machine d'Atwood sous sa forme la plus élémentaire est constituée de deux solides S_1 et S_2 suspendus à un fil placé dans la gorge d'une poulie. On supposera que le fil est inextensible et de masse négligeable (sous-entendue devant les masses des solides), et qu'il ne glisse pas dans la poulie. Cette dernière pourra être assimilée à un cylindre plein d'axe horizontal Δ de rayon a et de masse m_0 . La liaison entre la poulie et son support est une liaison pivot idéale.



- ① Après avoir paramétré soigneusement le système et tenu compte des hypothèses, établir les 3 équations des mouvements de chaque partie du système.
- ② Après avoir justifié les relations entre les différents déplacements des systèmes, établir une équation différentielle sur la variable décrivant le mouvement de la poulie uniquement. En déduire la nature des mouvements des systèmes. Commenter.
- ③ Exprimer les tensions des fils. *N. B. : Des variantes de ce système sont proposées dans le corrigé.*

4 Balance de Poggendorff ★★★[→ corrigé p. 341](#)

On reprend le système précédent. Dans un premier temps on bloque le mouvement de la poulie et on suspend l'ensemble au plateau d'une balance par un câble accroché à l'axe de la poulie. On réalise l'équilibre de la balance en déposant une masse M_0 sur l'autre plateau. On libère ensuite la poulie qui peut maintenant effectuer les mouvements décrits dans l'exercice précédent et on assure l'équilibre de la balance.



- ① Donner l'expression de la masse M_0 en fonction des masses du système.
- ② Lorsqu'on libère la poulie, faudra-t-il ajouter, retirer ou ne rien toucher sur l'autre plateau pour maintenir l'équilibre de la balance ?

CORRIGÉS

Conseil

On met encore ici en évidence la démarche de résolution d'un exercice de mécanique, selon la fiche méthode p. 236 toujours parfaitement appropriée ici. Cette méthode est explicitement mise en évidence dans les 3 premiers exercices. Le dernier exercice étant un prolongement du précédent, on a allégé la présentation.

Avertissement : On a choisi dans ces corrigés de noter les forces avec leur norme, par exemple $\vec{T}_a = T_a \vec{e}_y$ ou $\vec{T}_b = -T_b \vec{e}_y$ avec T_a et T_b positifs. Cela suppose qu'on n'a aucun doute sur le sens de la force, ce qui est le cas dans tous les exercices suivants. Si on n'obtient pas des valeurs positives pour T_a et T_b à la fin des calculs, c'est que l'on a fait une erreur de calcul ou d'évaluation du sens de la force. On aurait pu, ce qui est toujours valable et même indispensable lorsque le sens de la force n'est pas *a priori* connu (contact de roulement par exemple), noter les forces de façon algébrique. On aurait alors écrit : $\vec{T}_a = \vec{T}_a \vec{e}_y$ et $\vec{T}_b = \vec{T}_b \vec{e}_y$ avec $\vec{T}_a > 0$ et $\vec{T}_b < 0$. Cette dernière approche peut toujours être utilisée dans ce qui suit, les résultats concernant les accélérations, les équations différentielles et la nature des mouvements en seront inchangés.

1 Pendule pesant

→ énoncé p. 334

► Cadre

Position du problème : On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen et matérialisé par les axes (Ox), (Oy), (Oz).

Le système est le solide, en raison de la liaison pivot il est en rotation autour de l'axe fixe horizontal Δ . On néglige les frottements.

Paramétrage : On choisit l'axe (Oz) confondu avec Δ . Le centre d'inertie G décrit donc un cercle dans un plan vertical orthogonal à l'axe. Le point O est choisi sur l'axe dans ce plan. À l'équilibre, (OG) est nécessairement vertical et définit la direction (Ox) qui sert à repérer la position du mobile. Ce système étant à un seul degré de liberté, l'angle θ suffit à décrire son mouvement. On utilise la base cylindrique.

► Outils

Bilan des actions : la liaison pivot étant idéale, le moment exercé par le support sur le système est nul et l'action mécanique de contact se réduit à une résultante de force \vec{R} dont le point d'application est sur l'axe et dont la direction importe peu ici, car son moment est nul.

Le poids est appliqué en G : $\vec{mg} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$

Et son moment en O vaut : $\vec{\mathcal{M}}_{O \rightarrow \Delta}(\vec{mg}) = \vec{OG} \wedge \vec{mg} = a \vec{e}_r \wedge (mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta) = -mga \sin \theta \vec{e}_z$

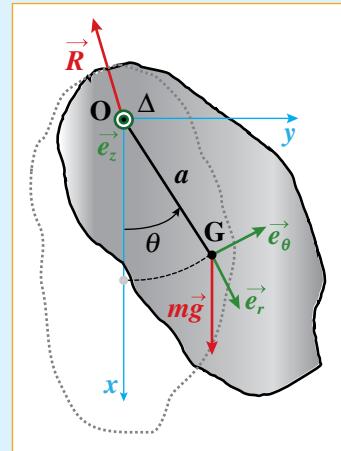
Le seul moment non nul par rapport à l'axe de rotation est donc : $\vec{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{mg}) = -mga \sin \theta$

Cinématique : Le vecteur rotation est porté par l'axe de rotation et vaut : $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$

Le système est en rotation autour de Δ , son moment cinétique vaut : $L_\Delta = J_\Delta \vec{\Omega} = J_\Delta \dot{\theta} \vec{e}_z$

Centre d'inertie : $\vec{OG} = a \vec{e}_r$ et $\vec{v}_G = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

► Schéma



► Point de départ (loi physique)

TMC (PFD)

On applique le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe de rotation Δ au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{R}) + \vec{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{mg})$$

TPC

On applique le théorème de la puissance cinétique au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{R}) + \mathcal{P}(\vec{mg})$$

► Moulinette à calcul

$$J_{\Delta} \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -mga \sin \theta$$

d'où : $J_{\Delta} \ddot{\theta} + mga \sin \theta = 0$

l'équation différentielle du mouvement.

$$\frac{d(\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2)}{dt} = 0 + mg \cdot \overline{v}_G \quad (\text{pivot idéal})$$

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = (mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_{\theta}) \cdot a \dot{\theta} \vec{e}_{\theta}$$

$$J_{\Delta} \dot{\theta} \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \cdot a \dot{\theta}$$

D'où : $J_{\Delta} \ddot{\theta} + mga \sin \theta = 0$

On obtient évidemment la même équation avec les deux méthodes.

Pour des petites oscillations, on a : $\sin \theta \approx \theta$ et l'équation se linéarise en :

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J_{\Delta}} \theta = 0$$

soit : $\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$ avec : $\omega = \sqrt{\frac{mga}{J_{\Delta}}}$

Il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique dont les solutions sont sinusoïdales :

$$\theta = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$$

où A et B sont des constantes d'intégration que l'on détermine à l'aide de conditions initiales.

$$\theta(t=0) = \theta_0 = A$$

$$\dot{\theta}(t=0) = 0 = B$$

Soit finalement $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$

► Analyse

Le pendule oscille avec une période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mga}}$

Un pendule simple est tel que la masse est ponctuelle en G et OG = a = ℓ. Le moment d'inertie du pendule simple (point matériel) par rapport à l'axe est donc :

$$J_{\Delta}(G) = m\ell^2 \quad \text{donc d'après le résultat précédent la période vaut : } T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2}{m g \ell}}$$

On retrouve bien la période du pendule simple calculée précédemment : $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

Bien comprendre

Dans l'équation de la puissance cinétique il est légitime de simplifier par $\dot{\theta}$, car :

$$\dot{\theta}(\ddot{\theta} + \omega_0^2) = 0 \Leftrightarrow (\ddot{\theta} + \omega_0^2) = 0 \text{ ou } \dot{\theta} = 0 \text{ (solution triviale sans intérêt, voir p. 23)}$$

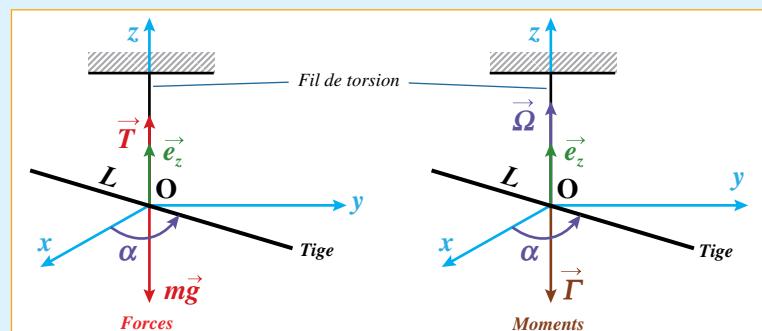
2 Pendule de torsion

→ énoncé p. 334

► Cadre

On travaille dans le **référentiel** terrestre supposé galiléen et matérialisé par les axes (Ox), (Oy), (Oz) où O est le point de l'axe du fil de torsion confondu avec G le centre d'inertie de la barre.

Le **système** est un solide, la barre horizontale suspendue au fil de torsion.



On choisit (Oz) l'axe du fil de torsion qui est aussi l'axe de rotation du système. Le mouvement de la tige est une rotation d'axe fixe, la tige reste dans le plan horizontal dans lequel on repère sa position par un angle α .

→ Outils

On choisit la base cylindrique pour exprimer les vecteurs.

Bilan des actions : Le système est soumis : à son poids $m\vec{g}$
à la réaction du fil \vec{R}
au couple de rappel $\vec{\Gamma}$ du fil de torsion.

Seul le dernier a un moment non nul, puisque $m\vec{g}$ et \vec{R} sont appliqués en un point de l'axe.

Cinématique : Le vecteur rotation est porté par l'axe de rotation et vaut $\vec{\Omega} = \dot{\alpha}\vec{e}_z$
Le moment cinétique du système par rapport à Δ vaut donc¹ : $L_\Delta = J_\Delta \vec{\Omega} = J_\Delta \dot{\alpha} \vec{e}_z$

→ Point de départ (loi physique)

TMC (PFD)

On applique le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe de rotation Δ au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen :

$$\frac{dL_{/\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{/\Delta}(m\vec{g}) + \Gamma_\Delta$$

TPC

On applique le théorème de la puissance cinétique au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen :

$$\frac{dE_C}{dt} = \mathcal{P}(\vec{R}) + \mathcal{P}(m\vec{g}) + \mathcal{P}(\vec{\Gamma})$$

→ Moulinette à calcul

$$J_\Delta \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{\Gamma}_\Delta$$

$$\text{d'où : } \frac{mL^2}{12} \ddot{\alpha} + C\alpha = 0$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\alpha}^2\right)}{dt} = \vec{R} \cdot \vec{v}_G + m\vec{g} \cdot \vec{v}_G + \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\frac{1}{2} J_\Delta \frac{d\dot{\alpha}^2}{dt} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z \cdot \dot{\alpha} \vec{e}_z$$

$$J_\Delta \dot{\alpha} \ddot{\alpha} = -C\alpha \dot{\alpha}$$

$$\text{D'où : } \frac{mL^2}{12} \ddot{\alpha} + C\alpha = 0 \quad (\text{voir p. 23})$$

On obtient évidemment la même équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\alpha} + \frac{12C}{mL^2} \alpha = 0 \quad \text{soit : } \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0 \quad \text{avec : } \omega = \sqrt{\frac{12C}{mL^2}}$$

Il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique dont la solution est une fonction sinusoïdale :

$$\alpha = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

La détermination complète suppose de connaître les conditions initiales. Si on les prend semblables à celles de l'exercice précédent, la solution finale est : $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t)$

→ Analyse

Le pendule oscille avec une période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{12C}}$$

Les oscillations sont celles de l'oscillateur harmonique, quelle que soit l'amplitude (à condition de ne pas dépasser la limite d'élasticité du fil de torsion !) qui peut même dépasser 2π , puisque le système peut effectuer plusieurs tours entre chaque inversion de sens de rotation.

1. Ici, l'axe de rotation est un axe de symétrie du système et le moment cinétique en O vaut $\vec{L}_{/O} = J_\Delta \vec{\Omega}$

Bien comprendre

Ce dispositif a servi à l'expérience historique de Cavendish en 1798 pour mesurer la force gravitationnelle entre 2 boules de plomb, dont l'une placée au bout de la tige du pendule. Le pendule était alors en équilibre sous l'action du moment de la force gravitationnelle et du couple de torsion. Une valeur très faible de l'angle put être mesurée, ce qui permit de déterminer la constante de gravitation G avec une très bonne précision.

3 Machine d'Atwood

→ énoncé p. 334

1 Cadre

Position du problème : On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen et matérialisé par les axes (Ox) , (Oy) , (Oz) .

Le **système** constitué par l'ensemble du dispositif qui est déformable. On le sépare donc en trois sous-systèmes qui sont des solides :

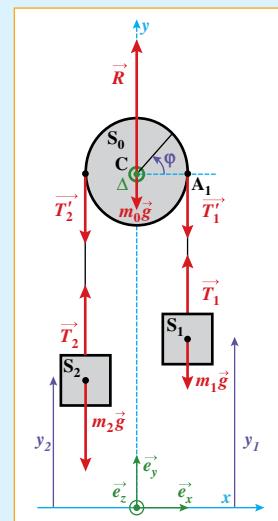
S_1 de masse m_1 en translation rectiligne suivant (Oy)

S_2 de masse m_2 en translation rectiligne suivant (Oy)

S_0 de masse m_0 en rotation autour de l'axe fixe $\Delta = (Oz)$

Paramétrage : Chacun de ces solides a un mouvement à un seul degré de liberté, chacun d'eux sera donc décrit par une seule coordonnée. La position verticale pour les solides en translation, l'angle pour la poulie (respectivement y_1 , y_2 , φ). On utilise la **base** cartésienne.

On néglige les frottements.

Outils**Système S_0** **Schéma**

Bilan des actions : Le solide est soumis à 4 actions.

La liaison pivot étant idéale, le moment par rapport à Δ exercé par le support sur le système est nul et l'action mécanique de contact se réduit à une résultante de force \bar{R} dont le point d'application est sur l'axe.

Le poids $m_0\vec{g}$ est appliqué en C, un point de l'axe, son moment est nul.

Les tensions exercées par les fils, T_1' et T_2' dont les moments sont :

$$\overline{\mathcal{M}}_{/\infty \in \Delta}(\overrightarrow{T_1}) = \overrightarrow{CA_1} \wedge \overrightarrow{T_1} = a\vec{e}_x \wedge (-T_1'\vec{e}_y) = -aT_1'\vec{e}_z \quad \text{d'où :}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_{/\infty \in \Delta}(\overrightarrow{T_2}) = \overrightarrow{CA_2} \wedge \overrightarrow{T_2} = -a\vec{e}_x \wedge (-T_2'\vec{e}_y) = aT_2'\vec{e}_z \quad \text{d'où :}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_{\Delta}(\overrightarrow{T_1}) = -aT_1'$$

$$\overline{\mathcal{M}}_{\Delta}(\overrightarrow{T_2}) = aT_2'$$

Cinématique : Le vecteur rotation est porté par l'axe de rotation et vaut :

$$\overrightarrow{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z$$

Le système est en rotation autour de Δ , son moment cinétique par rapport à l'axe vaut : $L_{\Delta} = J_{\Delta}\Omega = J_{\Delta}\dot{\varphi}$ où $J_{\Delta} = \frac{1}{2}m_0a^2$ (voir tableau p. 328) la poulie étant considérée comme un cylindre plein homogène.

Bien comprendre

Il est pertinent à ce niveau de vérifier la cohérence des calculs de moments : la tension T_1' tend à faire tourner la poulie dans le sens des angles φ négatifs et la tension T_2' dans le sens des angles positifs, d'où le signe des moments, cohérent avec le paramétrage choisi. On note également que l'utilisation d'un TMC scalaire (ci-dessous) n'empêche nullement un calcul vectoriel des moments des forces, toujours plus efficace.

Systèmes S_1 et S_2

Bilan des actions : Chaque système est soumis à son poids et la tension du fil :

$$\text{Pour } S_1 : \quad m_1 \vec{g} = -m_1 g \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{T}_1 = T_1 \vec{e}_y$$

$$\text{Pour } S_2 : \quad m_2 \vec{g} = -m_2 g \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{T}_2 = T_2 \vec{e}_y$$

Cinématique : L'ensemble des vecteurs cinématiques est porté par (Oy), les vitesses et accélérations sont :

$$\text{Pour } S_1 : \quad \vec{v}_1 = \dot{y}_1 \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{a}_1 = \ddot{y}_1 \vec{e}_y$$

$$\text{Pour } S_1 : \quad \vec{v}_2 = \dot{y}_2 \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{a}_2 = \ddot{y}_2 \vec{e}_y$$

Le fil

On a fait l'hypothèse d'un fil inextensible et sans masse, les valeurs des tensions à ses extrémités sont égales.

$$T_1 = T_1' \quad (E_{T_1}) \quad \text{et} \quad T_2 = T_2' \quad (E_{T_2})$$

Bien comprendre

- Une démonstration rigoureuse du résultat précédent serait d'étudier le système formé par une portion verticale de fil soumis à des forces égales et opposées à celles appliquées aux systèmes, puis à lui appliquer un TRC. On voit alors que le résultat précédent, souvent utilisé comme s'il était évident, n'est valable que si le fil est de masse nulle et inextensible.
- Par contre il ne faudrait pas écrire que les tensions de part et d'autre de la poulie ont même valeur ! On va voir ci-dessous que le TMC appliqué à la poulie montre que c'est faux.

→ Point de départ (loi physique)

S_0 : On applique le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe de rotation à S_0 solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen :

$$\frac{dL_{/\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{/\Delta}(m_0 \vec{g}) + \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{T}_1') + \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{T}_2') \quad (E_0)$$

S_1 : On applique le théorème de la résultante cinétique à S_1 solide en translation dans un référentiel galiléen :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{T}_1 + m_1 \vec{g} \quad \text{soit, la masse étant constante :} \quad m_1 \vec{a}_1 = \vec{T}_1 + m_1 \vec{g} \quad (E_1)$$

S_2 : On applique le théorème de la résultante cinétique à S_2 solide en translation dans un référentiel galiléen :

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{T}_2 + m_2 \vec{g} \quad \text{soit, la masse étant constante :} \quad m_2 \vec{a}_2 = \vec{T}_2 + m_2 \vec{g} \quad (E_2)$$

→ Moulinette à calcul

$$(E_0) \Rightarrow J_{\Delta} \frac{d\dot{\phi}}{dt} = -aT_1' + aT_2' \quad \text{d'où :} \quad \frac{m_0 a^2}{2} \ddot{\phi} = -aT_1' + aT_2'$$

$$(E_1) \Rightarrow m_1 \ddot{y}_1 = T_1 - m_1 g$$

$$(E_2) \Rightarrow m_2 \ddot{y}_2 = T_2 - m_2 g$$

Soit en tenant compte des relations (E_{T_1}) et (E_{T_2}) entre les tensions :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_0 a \ddot{\phi} = -T_1 + T_2 & (\mathbf{E}'_0) \\ m_1 \ddot{y}_1 = T_1 - m_1 g & (\mathbf{E}'_1) \\ m_2 \ddot{y}_2 = T_2 - m_2 g & (\mathbf{E}'_2) \end{cases}$$

Bien comprendre

On note en particulier que les tensions de part et d'autre de la poulie ne sont pas égales (sauf si la poulie est immobile ou sans masse). C'est même parce qu'elles sont différentes que la poulie se met à tourner.

- ❷ Si le fil ne glisse pas sur la poulie et qu'il est inextensible, alors chaque fois que la poulie tourne d'un angle φ , tous les points du fil se déplacent d'une longueur $a\varphi$. Compte tenu de l'orientation choisie et en prenant comme référence de l'angle la position initiale, on en déduit :

$$\begin{array}{lll} y_1 - y_{10} = a\varphi & \text{d'où :} & \ddot{y}_1 = a\ddot{\varphi} \quad (E_{NG1}) \\ y_2 - y_{20} = -a\varphi & \text{d'où :} & \ddot{y}_2 = -a\ddot{\varphi} \quad (E_{NG2}) \end{array} \quad (\text{avec } y_{10} \text{ position initiale de } S_1) \quad (\text{avec } y_{20} \text{ position initiale de } S_2)$$

Bien comprendre

On note sans surprise que les deux équations précédentes entraînent que $y_1 = -y_2$. Par ailleurs les positions initiales des systèmes sont sans grand intérêt pour la suite et ne sont pas caractérisées.

Elles seraient utiles si l'on écrivait complètement les équations horaires des mouvements des systèmes, ce qu'on ne fait pas dans ce qui suit où la seule valeur des accélérations nous permet de conclure.

En utilisant les relations de non glissement (E_{NG1}) et (E_{NG2}) dans (E'_1) et (E'_2), on exprime les tensions en fonction de la dérivée seconde de φ , que l'on remplace ensuite dans l'équation (E'_0). Soit :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_0a\ddot{\varphi} = -T_1 + T_2 \\ T_1 = m_1a\ddot{\varphi} + m_1g \\ T_2 = -m_2a\ddot{\varphi} + m_2g \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}m_0a\ddot{\varphi} = -(m_1a\ddot{\varphi} + m_1g) + (-m_2a\ddot{\varphi} + m_2g)$$

Soit : $(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)a\ddot{\varphi} = (m_2 - m_1)g$

Finalement :

$$\ddot{\varphi} = \frac{(m_2 - m_1)g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)} \quad \text{d'où :} \quad \ddot{y}_1 = \frac{(m_2 - m_1)g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)} \quad \text{et} \quad \ddot{y}_2 = \frac{(m_1 - m_2)g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)}$$

Analyse

Toutes les accélérations sont constantes, les mouvements des masses sont donc **des translations rectilignes uniformément variées**, et la poulie a un **mouvement de rotation uniformément varié** autour de Δ .

On constate logiquement que si $m_2 > m_1$, alors S_1 a une accélération positive et S_2 négative, autrement dit S_1 monte et S_2 descend ce qui est cohérent.

Bien comprendre

Dans tous les systèmes de ce type on obtient toujours une expression avec une somme de masse au dénominateur des accélérations. Si on trouve un signe « - », cela indique qu'on a fait une erreur, car cela rendrait possible une accélération infinie pour certaines valeurs des masses, ce qui n'a évidemment pas de sens. De même le signe du numérateur doit être cohérent avec les masses des systèmes : le plus lourd entraîne le plus léger.

- ❸ Les expressions des tensions sont :

$$\begin{cases} T_1 = T'_1 = m_1 \frac{(m_2 - m_1)g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)} + m_1g \\ T_2 = T'_2 = -m_2 \frac{(m_2 - m_1)g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)} + m_2g \end{cases}$$

Les expressions précédentes sont les plus commodes à utiliser dans l'exercice suivant. On peut également écrire les tensions sous une autre forme pour les comparer plus aisément :

$$\begin{cases} T_1 = T'_1 = m_1 \frac{(m_2 - m_1)g + (\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)} = m_1 \frac{(2m_2 + \frac{1}{2}m_0)g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)} \\ T_2 = T'_2 = m_2 \frac{(m_1 - m_2)g + (\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)} = m_2 \frac{(2m_1 + \frac{1}{2}m_0)g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)} \end{cases}$$

Qui confirme que les tensions ne sont pas égales de part et d'autre de la poulie.

Bien comprendre

La machine d'Atwood est un exercice académique qui permet de mettre en œuvre l'ensemble des méthodes de base en mécanique des systèmes effectuant des mouvements simples. La mise en place de la résolution est un excellent entraînement. On note au départ 7 inconnues dans le système : les 3 accélérations et les 4 tensions. On a donc écrit 7 équations : un TMC et deux TRC (équations (E_0) (E_1) (E_2)), deux équations tenant compte de la nature du fil (équations (E_{T1}) , (E_{T2})) et deux équations concernant le non glissement du fil (équations (E_{NG1}) et (E_{NG2})). On progresse alors méthodiquement en choisissant d'exprimer l'une des accélérations, ici l'accélération angulaire de la poulie, toutes les grandeurs inconnues s'en déduiront.

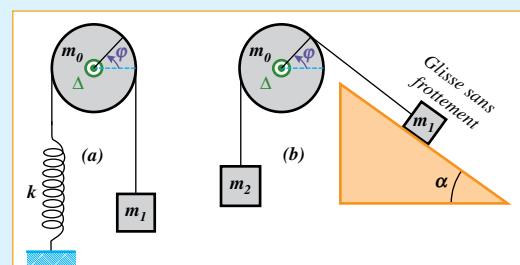
Variantes : Le lecteur pourra s'exercer sur des variantes de ce système schématisées ci-dessous où les données sont similaires à celles de l'exercice 3 :

a) Conseil : Écrire la condition d'équilibre de l'ensemble du système, puis établir l'équation différentielle pour un déplacement du système S_1 autour de sa position d'équilibre. **Résultat :** Le système oscille avec une période :

$$T = 2\pi \sqrt{\left(m_1 + \frac{m_0}{2}\right) \cdot \frac{1}{k}}$$

b) Résultat :

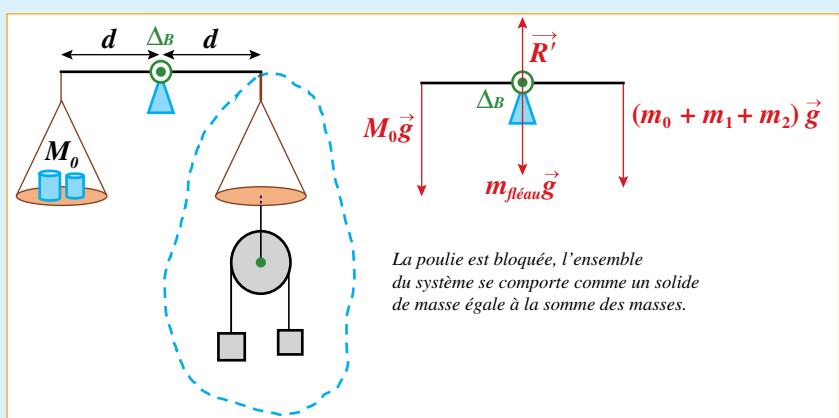
$$\ddot{\varphi} = \frac{(m_2 - m_1 \sin \alpha)g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)a}$$



4 Balance de Poggendorff

→ énoncé p. 334

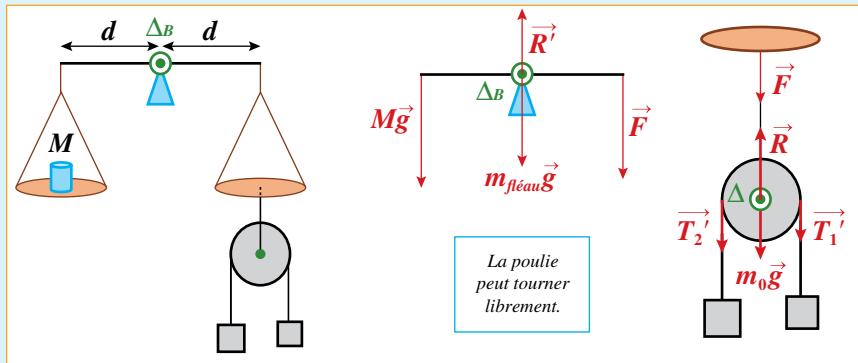
Remarque : Les deux plateaux étant identiques, leurs effets sur la balance se compensent et l'on peut raisonner comme s'ils étaient de masse nulle et se comportaient tels de simples fils de liaison entre le fléau de la balance et les masses déposées ou suspendues.



- 1 Lorsque la poulie est bloquée, l'ensemble de la machine d'Atwood se comporte comme un solide immobile. On peut le ramener à un point matériel de masse égale à la somme des masses du système ($m_1 + m_2 + m_0$). On sait par expérience que dans ce cas, l'équilibre s'obtient si la masse M_0 déposée sur l'autre plateau lui est égale.

Il n'est cependant pas inintéressant, en particulier pour mieux comprendre la question suivante, de le montrer en considérant le fléau de la balance comme un solide en rotation autour de l'axe Δ_B grâce à une liaison pivot parfaite. Le fléau est soumis à 4 forces : son poids, la réaction de son support et les forces exercées par les plateaux qui sont égales aux poids des masses qui y sont posées ou fixées. La balance est en équilibre si la somme des moments est nulle. Les moments du poids et de la réaction sont nuls car ces forces s'appliquent sur l'axe, les moments dus aux poids sur les plateaux doivent donc se compenser. Or, les deux plateaux étant placés symétriquement à l'axe, cela se produit lorsque les deux moments sont opposés et donc les deux forces égales et, par suite, les deux masses égales : $M_0 = m_0 + m_1 + m_2$

- 2 Si on libère la poulie, la machine d'Atwood se comporte comme étudié dans l'exercice précédent. Pour que la balance reste en équilibre, il faut que la force appliquée au plateau de droite par la machine d'Atwood soit égale au poids de la masse déposée sur le plateau de gauche, selon le même raisonnement que dans la question précédente (les moments sur le fléau se compensent). Cette force est égale et opposée à la force de tension du fil qui maintient la poulie (fil inextensible et sans masse). Or cette force n'est autre que la force \vec{R} de l'exercice précédent, d'où : $\vec{F} = -\vec{R}$



La balance étant en équilibre, le centre C de la poulie est immobile, donc le théorème de la résultante cinétique appliqué à la poulie s'écrit :

$$\vec{R} + m_0 \vec{g} + \vec{T}_1' + \vec{T}_2' = \vec{0}$$

Toutes les forces étant portées par (Oy) :

$$R - m_0 g - T_1' - T_2' = 0 \quad \text{soit} : \quad R = m_0 g + T_1' + T_2'$$

En utilisant les expressions des tensions obtenues dans l'exercice précédent :

$$R = m_0 g + m_1 \frac{(m_2 - m_1)g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)} + m_1 g - m_2 \frac{(m_2 - m_1)g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)} + m_2 g$$

$$\text{Soit : } R = m_0 g + m_1 g + m_2 g + \frac{(m_1 - m_2)(m_2 - m_1)g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)}$$

$$\text{et finalement : } R = M_0 g - \frac{(m_2 - m_1)^2 g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)} = M_0 g - \Delta M g = F$$

Or l'équilibre de la balance impose :

$$F = Mg \quad \text{d'où :} \quad M = M_0 - \Delta M < M_0 \quad \text{car :} \quad \Delta M = \frac{(m_2 - m_1)^2 g}{(\frac{1}{2}m_0 + m_1 + m_2)} > 0$$

La force exercée sur le plateau de droite est donc plus faible que si la machine d'Atwood est bloquée, il faut donc enlever la masse ΔM du plateau de gauche pour maintenir l'équilibre. Il faut noter que ce résultat (pas immédiatement intuitif) reste valable quelles que soient les valeurs respectives des masses de la machine d'Atwood, car ΔM est toujours positif. Que ce soit S_1 ou S_2 qui descende, dans tous les cas, il faut alléger le plateau de gauche pour maintenir l'équilibre.

Bien comprendre

On note dans cet exercice que la prise en compte de la réaction de l'axe de la poulie (qui se confond ici avec la tension du fil qui suspend cet axe au support) est essentielle pour résoudre le problème. On voit aussi que, bien que la poulie soit en rotation autour d'un axe fixe, c'est l'écriture du TRC qui permet de résoudre le problème. L'ensemble du PFD (TRC + TMC) est nécessaire pour étudier un système.

À méditer

Un problème sans solution est un problème mal posé.

ALBERT EINSTEIN (1879-1955)

Description des systèmes thermodynamiques

La thermodynamique est une théorie phénoménologique, c'est-à-dire qu'elle tire ses principes de l'expérience. Sa grande force réside en ce qu'elle permet d'étudier l'évolution d'un système à partir de ses propriétés macroscopiques sans faire appel à la structure de la matière.

Ce chapitre met en place les bases de la thermodynamique en introduisant de façon macroscopique la description d'un système. À ce titre, il contient un grand nombre de concepts nouveaux et de définitions. L'immersion dans le monde de la thermodynamique est toujours surprenante, voire déroutante, c'est pourquoi il est fortement conseillé d'étudier en profondeur les concepts introduits, puis de se poser des questions sur la nature des systèmes et de réfléchir à la façon dont ils évoluent à la fois localement et globalement.

Outils mathématiques

■ **Fonction de plusieurs variables** : Pour une fonction f de plusieurs variables x , y et z , on introduit la notion de dérivée partielle, qui se calcule comme une dérivée habituelle par rapport à l'une des variables et en considérant les autres comme constantes. On utilise alors la notation suivante qui se lit « d rond f sur d rond x » :

$$\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \right)_{y,z} \text{ est la dérivée partielle de } f \text{ par rapport à } x \text{ (sous-entendu à } y \text{ et } z \text{ constants).}$$

I Les outils de description de la thermodynamique

1. Les différentes échelles d'étude

Le choix de l'échelle utilisée en thermodynamique doit permettre un traitement mathématique par le calcul différentiel sur des éléments de volumes très petits, mais cependant suffisamment grands pour contenir un très grand nombre de particules, de sorte que les grandeurs physiques (pression, température...), liées à un effet de groupe des molécules, soient définies localement, tout en leur permettant d'évoluer d'un état à un autre.

Définitions

- **L'échelle macroscopique** correspond au domaine où les longueurs sont naturellement observables. Sa dimension caractéristique est de l'ordre du millimètre jusqu'à des tailles plus importantes.
- **L'échelle microscopique** correspond au domaine des particules (atomes, molécules), typiquement la taille des atomes. Sa dimension caractéristique est de l'ordre de l'Ångström ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$). À cette échelle la matière est discontinue et une approche quantique est obligatoire.
- **L'échelle mésoscopique** est un domaine intermédiaire entre celui de la particule et celui de la mole. Sa dimension caractéristique, comprise entre les deux précédentes, est de l'ordre du micromètre.

L'échelle mésoscopique est adéquate pour étudier un système thermodynamique, même si le fait de considérer un faible volume est contraignant vis-à-vis des instruments de mesure. L'échelle mésoscopique est aussi utilisée en mécanique des fluides (élément de volume du fluide) et en électromagnétisme (élément de volume de la distribution de charge ou de courant).

Définitions

- Le **nombre d'Avogadro**, noté \mathcal{N}_A , correspond au nombre d'atomes contenus dans 12 g de matière constituée seulement de carbone $^{12}_6\text{C}$.
- La **quantité de matière** d'un corps, notée n , est le rapport entre N le nombre d'entités élémentaires (atomes, molécules, ions, électrons...) qu'il contient et le nombre d'Avogadro. Elle s'exprime en mole (symbole mol) : $n = \frac{N}{\mathcal{N}_A}$ et $\mathcal{N}_A = 6,02214129 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Pour caractériser ce que contient le système au niveau macroscopique, on utilisera sa quantité de matière ou sa masse, que l'on relie facilement à l'aide de la masse molaire notée M .

2. Système et milieu extérieur

La définition précise du système (et par suite de l'extérieur) est essentielle en thermodynamique où l'on s'intéresse à son évolution, en particulier du fait de ses échanges (ou de son absence d'échanges) avec l'extérieur. L'environnement peut en effet affecter les propriétés du système, par exemple sa température ou sa pression. Dans une expérience réalisée avec soin, ces influences pourront être contrôlées et mesurées.

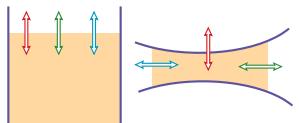
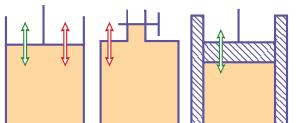
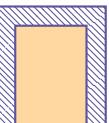
Définition

Un **système thermodynamique** est un système macroscopique composé d'un grand nombre d'objets microscopiques (atomes ou molécules). Toutes les autres parties de l'univers, dont les propriétés ne sont pas d'intérêt immédiat, constituent **l'environnement** ou milieu extérieur.

L'étude d'un système thermodynamique nécessite donc que l'on précise les échanges qu'il peut (ou pas) réaliser avec le milieu extérieur. Ces échanges qui font l'objet du chapitre suivant peuvent être de deux types : les **échanges de matière** et les **échanges d'énergie**. On distingue deux formes de grandeurs d'échanges énergétiques : le **transfert thermique** (ou chaleur Q) et le **transfert mécanique** (ou travail W).

Définitions

- Une paroi **diathermane** ou **diatherme** permet un transfert thermique idéal, schéma : 
- Une paroi **athermane** ou **calorifugée** empêche tout transfert thermique, schéma : 

SYSTÈME	OUVERT	FERMÉ	ISOLÉ
Échange de matière	Oui	Non	Non
Échange d'énergie	Oui	Oui	Non
Exemples de systèmes	Gaz s'écoulant dans une conduite Eau chauffée dans une casserole Air dans une turbine d'avion Mélange air/essence dans un piston de moteur voiture Chauffe-eau avec robinet ouvert	Gaz dans un récipient aux parois mobiles et diathermanes, ou aux parois mobiles et calorifugées ou aux parois rigides et diathermanes Fluide réfrigérant d'un climatiseur Chauffe-eau avec robinets fermés	Gaz dans un récipient fermé aux parois calorifugées et indéformables Thermos de café Hélium liquide dans un cryostat
Exemples de schématisation Q W n			

3. État du système

Définitions

- Un **état thermodynamique** définit les conditions dans lesquelles se trouve un système thermodynamique.
- Un **état d'équilibre** est un état thermodynamique stationnaire, c'est-à-dire qui n'évolue plus tant que les contraintes extérieures ne sont pas modifiées.
- Les états d'équilibre jouent un rôle très important, car ce sont les seuls états pour lesquels les grandeurs d'état, comme la pression et la température, sont définies et mesurables.
- L'équilibre thermodynamique se caractérise par deux contraintes dont les implications seront étudiées plus loin : le système est en **équilibre thermique** et le système est en **équilibre mécanique**.

Définitions

- Les **grandeurs d'état** sont des quantités macroscopiques mesurables associées au système (température, pression, volume, quantité de matière...). Elles sont définies expérimentalement.
- Une **équation d'état** est une relation entre les grandeurs d'état d'un système à l'équilibre.
- Une **fonction d'état** est une fonction qui ne dépend que des grandeurs d'état du système.
- Si P , V et T sont des grandeurs d'état d'un système à l'équilibre, l'équation d'état peut s'écrire sous la forme $f(P,V,T) = 0$. L'exemple le plus simple est l'équation d'état du gaz parfait (*voir III*).
- Les fonctions d'état généralement étudiées sont : l'énergie interne U (*définie au paragraphe suivant*), l'enthalpie H (*définie au chapitre 21*), l'entropie S (*définie au chapitre 22*), l'énergie libre F et l'enthalpie libre G (non utilisées en première année) d'un système thermodynamique.
- Au cours d'une transformation, la variation d'une fonction d'état ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement de l'état initial et de l'état final (*voir chapitre 20 p. 362*).

Les grandeurs d'état sont aussi appelées paramètres d'état ou variables d'état. Les paramètres sont plutôt des constantes d'un problème contrairement aux variables. L'expression « grandeurs d'état » a été préférée ici, car elle reste plus générale et englobe tous les cas de figure.

Définitions

On distingue deux types de grandeurs d'état :

- Les **grandeur intensives** sont définies en chaque point d'un système et ne sont pas proportionnelles à la quantité de matière considérée.
- Les **grandeur extensives** sont liées aux dimensions du système et sont proportionnelles à la quantité de matière considérée.

POINT MÉTHODE

Différencier les grandeurs extensives et intensives

- On retiendra de façon simple que des **grandeur extensives** s'ajoutent lors de la réunion de deux systèmes, contrairement aux **grandeur intensives**. Par exemple, si on verse dans un récipient une bouteille d'eau et une bouteille de lait, toutes deux à température ambiante, le volume final sera la somme des volumes initiaux des liquides, de même pour la masse finale, mais la température ne sera pas la somme des températures, elle sera égale à la température initiale de chacun. De même, si les liquides sont pris à des températures différentes, les volumes et les masses s'ajouteront du fait du mélange, mais la température finale ne sera pas la somme (ni même *a priori* la moyenne) des températures initiales.

- Sont donc extensives : le volume, la quantité de matière, la masse, le nombre de particules, la longueur.
- Sont donc intensives : la température, la pression, la masse molaire, la concentration, le volume molaire.

→ État physique du système

Les 3 états classiques de la matière (solide, liquide et gaz) ont été définis au lycée. On associe souvent deux de ces états selon la propriété que l'on veut mettre en évidence ou que l'on utilise. Le terme **phase condensée** concerne les états où les molécules sont très proches les unes des autres, à savoir solide et liquide et le terme **fluide** met en évidence la possibilité de s'écouler et concerne les liquides et les gaz.

II | Les grandeurs de base en thermodynamique

1. La température

Définition

La **température**, notée T , est une grandeur intensive qui mesure l'agitation thermique d'un système. Plus la température est élevée et plus la vitesse moyenne des constituants est grande. L'unité de température est le Kelvin (K).

- La température se mesure à travers le comportement des gaz à faible pression (thermomètre à gaz). On parle alors de **température thermodynamique** ou de **température absolue**. C'est une grandeur mesurable. Cela signifie qu'effectuer un rapport de températures absolues est pertinent. On utilise couramment des températures dites repérables (avec un thermomètre), c'est-à-dire pour lesquelles effectuer des rapports n'a pas de sens. Par exemple la température en degré Celsius définie ci-dessous :

$$\theta_{^{\circ}\text{Celsius}} = T_{\text{Kelvin}} - 273,15 \approx T_{\text{Kelvin}} - 273$$

→ Équilibre thermique

Définition

Un système en **équilibre thermique** a une température uniforme qui n'évolue pas.

- Un système en équilibre thermodynamique est nécessairement en équilibre thermique.
- Deux systèmes en équilibre thermique l'un par rapport à l'autre sont à la même température.

- Un système ouvert ou fermé (qui n'est pas dans une enceinte calorifugée) à l'équilibre thermique a une température égale à la température extérieure.
- Un système isolé à l'équilibre thermique n'est pas nécessairement en équilibre thermique avec le milieu extérieur, c'est-à-dire que sa température peut être différente de la température extérieure.

2. La pression

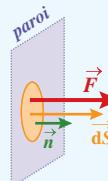
Définition

La **pression** P est une grandeur scalaire positive intensive définie comme la force par unité de surface exercée par un système sur une paroi :

$$d\vec{F} = P d\vec{S} = P dS \vec{n}$$

où \vec{n} est le **vecteur unitaire**, orthogonal à la surface élémentaire dS .

L'unité de pression est le Pascal noté Pa.

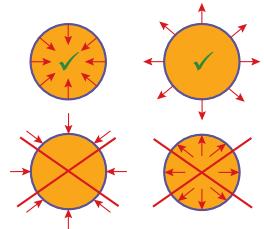


- On peut définir la pression au sein d'un système de la même façon en imaginant une paroi fictive, c'est-à-dire un élément de surface situé à l'intérieur du système à l'endroit où l'on cherche la pression.
- La pression au sein d'un système à l'équilibre résulte de deux phénomènes :
 - ↳ Les chocs des constituants entre eux : c'est la **pression moléculaire** notée P_m .
 - ↳ Les chocs des constituants sur les parois d'un récipient : c'est la **pression cinétique** notée P_c .
- De façon qualitative, on peut facilement comprendre que les parois qui enferment un gaz vont subir d'autant plus de chocs de la part des molécules que le gaz sera confiné, donc la pression cinétique d'autant plus élevée. Il est également assez intuitif que les interactions entre molécules (attractions ou répulsions) vont influer sur la pression globale au sein du gaz.

POINT MÉTHODE

Représenter et exprimer les forces de pressions

- On rencontre trop souvent une **représentation** erronée des **forces de pression** qui doivent être représentées comme toutes les autres forces par une flèche partant de leur point d'application. L'argument expliquant qu'on représente la pression n'est pas recevable, cette dernière n'étant pas un vecteur, c'est la force qui en est un. On prendra donc soin de faire un schéma correct comme ci-contre, les schémas erronés introduisant une confusion qui nuit à la rigueur que l'on déploie, en particulier en mécanique.



- On utilise de nombreuses **unités pour la pression**, dont il est utile de connaître les conversions. On citera le bar, l'atmosphère, le Torr et la hauteur de mercure :

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \quad ; \quad 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mm de Hg} = 760 \text{ Torr}$$

- La hauteur de mercure est liée à la mesure de la pression avec un certain type de baromètre. Autrefois exprimée en millibars, la pression dans les bulletins météorologiques est maintenant donnée en hectopascal, car $1 \text{ hPa} = 1 \text{ mbar}$.

→ Équilibre mécanique

Définition

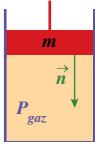
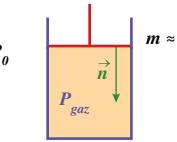
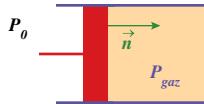
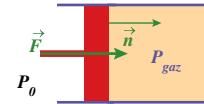
Un système est en **équilibre mécanique** si la pression est uniforme et n'évolue pas.

Un système en équilibre thermodynamique est nécessairement en équilibre mécanique.

- Un système ouvert n'est pas nécessairement en équilibre thermodynamique global, mais sera souvent considéré en équilibre mécanique et thermique local, par exemple un gaz s'écoulant dans une tuyère.
- Un système fermé ou isolé à l'équilibre mécanique n'est pas nécessairement à la même pression que l'extérieur : si les parois sont rigides, ces dernières peuvent supporter l'écart de pression entre le milieu et l'extérieur (carlingue d'un avion à haute altitude par exemple). Si les parois sont mobiles, la résultante des forces sur ces parois doit être nulle, ce qui ne se traduit pas non plus nécessairement par l'égalité des pressions. Dans tous les cas on écrira que la force exercée par le gaz sur un piston mobile compense à l'équilibre la force exercée par l'extérieur sur le piston.

$$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{gaz} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{F}_{gaz} = -P_{gaz} S \vec{n}$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire orienté vers l'intérieur de l'enceinte.

❶ l'enceinte est placée à la verticale.		❷ l'enceinte est placée à l'horizontale.	
Piston de masse m	Piston de masse négligeable	Piston seul	Piston soumis à une force
$\vec{F}_{ext} = (P_0 S + mg)\vec{n}$	$\vec{F}_{ext} = P_0 S \vec{n}$	$\vec{F}_{ext} = P_0 S \vec{n}$	$\vec{F}_{ext} = (P_0 S + F) \vec{n}$
$P_{gaz} = P_0 + \frac{mg}{S}$	$P_{gaz} = P_0$	$P_{gaz} = P_0$	$P_{gaz} = P_0 + \frac{F}{S}$
			

3. Le volume

Définition

Le **volume** d'un objet, noté V , est une grandeur extensive qui mesure son extension dans les trois directions de l'espace en un même temps. L'unité de volume est le mètre cube (m^3). On définit aussi :

le **volume massique** : $v = \frac{V_{\text{système}}}{m_{\text{système}}}$ en $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

le **volume molaire** : $V_m = \frac{V_{\text{système}}}{n_{\text{système}}}$ en $\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$

- Le volume massique est l'inverse de la masse volumique.
- Le volume molaire utilisé en chimie sera calculé à partir du modèle du gaz parfait défini au paragraphe suivant et sera identique pour tout gaz assimilé à un gaz parfait (voir exercice n° 1 p. 355).
- On retiendra que le volume molaire d'un solide est de l'ordre de quelques cm^3/mol . Un gaz est compressible, aussi le volume molaire d'un gaz dépend de la pression et de la température. Aux conditions normales de température et pression (0 °C et 1 atm), il vaut 22,4 $\text{L} \cdot \text{mol}^{-1}$.

POINT MÉTHODE

Convertir les unités volumiques

- On utilise fréquemment les **grammes** et les **litres** plutôt que les unités du système international.

On retiendra : $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$; $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$; $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$

Pour s'en souvenir, on visualisera une brique de lait de 1 L dont on peut approximer les dimensions comme un cube de 1 dm (= 10 cm) de côté.

- Il est impératif de savoir **convertir** sans hésitation les grandeurs dérivées :

Masse volumique : $1 \text{ kg.L}^{-1} = 10^3 \text{ kg.m}^{-3} = 10^3 \text{ g.dm}^{-3}$; Volume massique : $1 \text{ L} \cdot \text{kg}^{-1} = 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

Masse molaire : $1 \text{ g.mol}^{-1} = 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$; Volume molaire : $1 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} = 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$

4. L'énergie interne

L'énergie totale d'un système thermodynamique résulte de son état interne et de ses interactions avec le milieu extérieur. On dissocie généralement ces deux composantes en parlant respectivement **d'énergie microscopique** et **d'énergie macroscopique**.

Définition

L'énergie interne d'un système, notée U , est son énergie d'origine microscopique, à savoir la somme des énergies cinétiques microscopiques (agitation thermique) et potentielles microscopiques (interactions interatomiques et intermoléculaires) de ses constituants. Son unité est le Joule, symbole J.

- L'énergie macroscopique est l'énergie mécanique habituelle déjà définie dans les chapitres de la partie mécanique et réunit l'énergie cinétique macroscopique (fluide en mouvement dans une canalisation par exemple) et son énergie potentielle macroscopique (de pesanteur par exemple).
- On travaillera souvent avec des systèmes globalement immobiles, donc d'énergie cinétique macroscopique nulle et de dimensions suffisamment faibles pour que l'énergie potentielle puisse être considérée également comme constante et uniforme dans le système et donc prise pour référence afin de l'annuler. Ainsi l'énergie d'un système thermodynamique au repos se limitera à son énergie interne.
- L'énergie interne d'un fluide est une fonction d'état extensive qui ne dépend que de trois paramètres d'état T , P et V . Or ces trois paramètres sont liés entre eux par l'équation d'état du système, donc l'énergie interne ne s'exprime qu'en fonction de deux paramètres indépendants : $U = U(T, V)$

Cette dépendance se conçoit intuitivement : si le volume V d'un système est modifié, la distance entre les particules est modifiée, ce qui modifie les énergies potentielles d'interaction. Si la température est modifiée, l'énergie cinétique moyenne des molécules est modifiée.

- L'énergie interne est une fonction d'état, sa variation lors d'une transformation ne dépend que de l'état initial et de l'état final. Elle est indépendante du chemin suivi.

5. La capacité thermique à volume constant

Définitions

- La **capacité thermique à volume constant**, notée C_V , est une grandeur extensive définie comme l'énergie à apporter à un système pour augmenter sa température d'un Kelvin, quand l'expérience est réalisée à volume constant. Elle s'exprime donc comme la dérivée partielle de l'énergie interne par rapport à la température à volume constant :

$$C_V = \left(\frac{\partial U(T, V)}{\partial T} \right)_V \quad \text{Son unité est le Joule par Kelvin, noté J.K}^{-1}$$

- Pour un système homogène, on définit également la **capacité thermique massique à volume constant**, notée c_V , et la **capacité thermique molaire à volume constant**, notée $C_{V,m}$, toutes deux intensives, s'exprimant respectivement en $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et $\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, telles que :

$$c_V = \frac{C_V}{m} \quad \text{et} \quad C_{V,m} = \frac{C_V}{n} \quad \text{d'où} \quad C_V = nC_{V,m} = mc_V$$

où m et n représentent respectivement la masse et la quantité de matière du système.

N. B. : Les notations et les termes ont évolué, on a donné ci-dessus le vocabulaire actuel et les notations en vigueur. La notation en minuscule est standard en thermodynamique pour toutes les grandeurs massiques, elle est particulièrement utilisée dans un système ouvert ou diphasé. On pourra cependant rencontrer dans la littérature, voire dans les sujets, l'ancienne dénomination de « capacité calorifique molaire (notée C_v) » à la place de capacité thermique molaire $C_{v,m}$ ou de « chaleur massique » pour capacité thermique massique. La vigilance est donc de mise dans la lecture des énoncés.

III Le modèle du gaz parfait

1. Le gaz parfait monoatomique

Un gaz monoatomique est composé d'atomes non associés en molécules comme tous les gaz rares (hélium, néon, argon...). Un mélange de gaz monoatomiques pourra également être considéré comme un gaz monoatomique.

Définition

Un **gaz parfait monoatomique** est un modèle idéal de gaz monoatomique qui vérifie deux conditions :

- ↳ Les atomes sont de très petites tailles par rapport à la distance qui les sépare et peuvent être assimilés à des points matériels.
- ↳ Les atomes n'ont aucune interaction entre eux.

Lorsque le gaz est en équilibre, ses variables d'état sont liées par l'équation d'état : $PV = nRT$ où R est une constante appelée **constante des gaz parfaits** : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

- La première hypothèse entraîne qu'étant ponctuels, les atomes ne peuvent avoir de mouvement de rotation. De ce fait, ils ne possèdent que trois degrés de liberté : ce sont les déplacements dans les trois directions de l'espace.
- La seconde hypothèse est vérifiée lorsque les atomes sont éloignés les uns des autres, elle consiste donc à négliger l'interaction entre deux atomes proches.
- Attention aux unités, dans l'équation d'état du gaz parfait, la pression P doit être en Pascal, le volume V en m^3 , la quantité de matière n en moles et la température T en Kelvin (et surtout pas en degré Celsius !).
- On pourra aussi introduire le nombre N d'entités élémentaires du gaz :

$$\begin{cases} PV = nRT \\ n = N / \mathcal{N}_A \end{cases} \Rightarrow PV = \frac{N}{\mathcal{N}_A} RT = N \frac{R}{\mathcal{N}_A} T = Nk_B T$$

Où k_B est la constante de Boltzmann, $k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

2. Le gaz parfait polyatomique

Bien qu'étant simpliste, le modèle du gaz parfait monoatomique est souvent utilisé pour résoudre des problèmes de dynamique des fluides. Dans ce modèle, seul compte le mouvement de translation des atomes pour déterminer l'énergie cinétique du gaz, puisque des points matériels n'ont pas d'autres mouvements possibles. Dans le cas d'un gaz parfait polyatomique, il faut également prendre en compte les mouvements de rotation et de vibration des molécules.

Les constituants d'un gaz polyatomique sont des molécules composées d'au minimum deux atomes. On y trouve par exemple, les gaz diatomiques : H_2 , O_2 , N_2 , CO ..., les gaz triatomiques : CO_2 , H_2O , O_3 ...

Définition

Un **gaz parfait polyatomique** est un modèle idéal de gaz qui vérifie deux conditions :

- ↳ Les molécules sont de très petite taille par rapport à la distance qui les sépare : elles seront assimilées à des points matériels du point de vue du volume qu'elles occupent, mais pas du point de vue énergétique car leurs mouvements de rotation et de vibration doivent être pris en compte.
- ↳ Les molécules n'ont aucune interaction entre elles.

Les résultats expérimentaux montrent que l'équation d'état $PV = nRT$ reste valable pour un gaz parfait polyatomique.

3. Énergie interne et capacité thermique à volume constant

L'énergie interne U d'un système thermodynamique est la somme des énergies cinétique et potentielle (interactions particule-particule) d'origine microscopique. Dans le cas des gaz parfaits monoatomiques, elle se limite aux énergies cinétiques de translation, les interactions étant par hypothèse inexistantes. Ces énergies cinétiques dépendent uniquement de la température (c'est le phénomène d'agitation thermique), donc l'énergie interne du gaz parfait monoatomique donné ne dépend que de la température. On peut généraliser ce résultat aux gaz parfaits polyatomiques.

Propriété

- L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température : $U = U(T)$
- On peut définir les énergies internes molaires, U_m , et massiques, u .
- On dit d'un gaz dont l'énergie interne ne dépend que de la température qu'il obéit à la première loi de Joule : $U_m = U_m(T)$.

La capacité thermique à volume constant C_V s'écrit alors :

$$C_V(GP) = \left(\frac{\partial U(T, V)}{\partial T} \right)_V = \frac{dU(T)}{dT}$$

Dans le cas général, C_V dépend de la température et la variation d'énergie interne vérifie :

$$dU = C_V dT \quad \text{et donc} \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2}(GP) = \int_{T_1}^{T_2} C_V(T) dT$$

On supposera souvent que C_V est constant, on aura alors : $\Delta U_{1 \rightarrow 2}(GP) = C_V(T_2 - T_1)$

→ Cas du gaz parfait monoatomique

On peut montrer que l'énergie interne et l'énergie interne molaire du gaz parfait monoatomique sont :

$$U(\text{GP monoatomique}) = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} Nk_B T \quad \text{et} \quad U_m(\text{GP monoatomique}) = \frac{3}{2} RT$$

La capacité thermique et la capacité thermique molaire à volume constant du gaz parfait monoatomique, valent donc respectivement :

$$C_V(\text{GP monoatomique}) = \frac{dU(T)}{dT} = \frac{3}{2} nR \quad \text{et} \quad C_{V,m}(\text{GP monoatomique}) = \frac{C_V}{n} = \frac{3}{2} R$$

→ Cas du gaz parfait diatomique

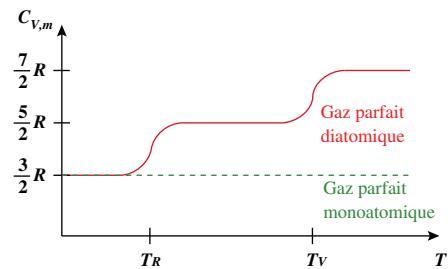
On a vu que l'énergie interne du gaz parfait monoatomique composé de N atomes s'écrit $3Nk_B T/2$. Or dans un tel gaz, les molécules ont trois degrés de liberté correspondant aux trois coordonnées de sa position, on associe donc le facteur $Nk_B T/2$ à chaque degré de liberté. En plus de ces trois degrés de liberté de translation selon les axes (Ox), (Oy) et (Oz), une molécule diatomique possède deux degrés de liberté de rotation, selon les deux directions perpendiculaires à son axe, soit cinq degrés de liberté au total. Si en plus la liaison entre les deux atomes n'est pas rigide, on admettra qu'il faut rajouter deux degrés de liberté pour décrire les vibrations des atomes selon l'axe de la molécule, soit finalement sept degrés de liberté. Cette augmentation du nombre de degrés de liberté entraîne une différence entre l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique et celle du gaz parfait diatomique.

Les degrés de liberté d'un gaz diatomique dépendent de la température, car les mouvements de rotation et de vibration ne se produisent qu'à partir de certaines températures. On note T_R et T_V les températures seuils respectivement de translation et de rotation des molécules diatomiques.

	Mouvements observés	Degrés de liberté	U_m	$C_{v,m}$
$T < T_R$	Translation	3	$\frac{3}{2}RT$	$\frac{3}{2}R$
$T_R < T < T_V$	Translation + Rotation	5	$\frac{5}{2}RT$	$\frac{5}{2}R$
$T_V < T$	Translation + Rotation + Vibration	7	$\frac{7}{2}RT$	$\frac{7}{2}R$

N.B. : On obtient évidemment les grandeurs du système en multipliant par le nombre de moles du système.

■ Si l'on trace sur un graphe la capacité thermique à volume constant en fonction de la température, on remarque donc trois paliers de valeurs équidistantes suivant la température du système pour un gaz parfait diatomique, tandis que pour un gaz parfait monoatomique, C_V reste constante quelle que soit la valeur de la température.



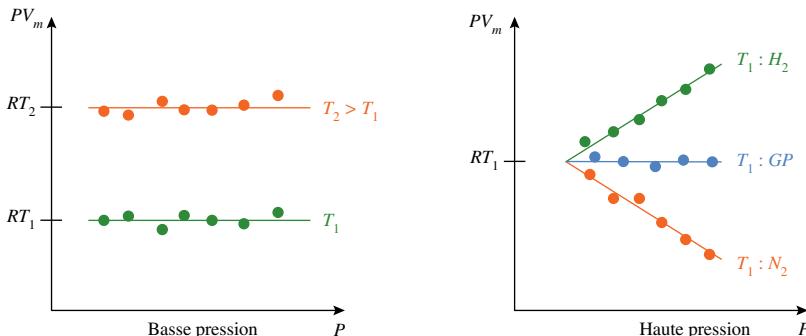
■ Pour les gaz usuels (comme l'air ou ses composants) les valeurs de T_R sont de l'ordre de quelques Kelvins à quelques dizaines de Kelvins (toujours inférieures à 100 K) et les valeurs de T_V sont de l'ordre de plusieurs milliers de Kelvins (toujours supérieures à 1000 K). Sauf indication contraire, on se placera donc la plupart du temps dans la zone intermédiaire pour les expressions de U et C_V .

& Du gaz réel au gaz parfait

Le modèle du gaz parfait est utilisé dans de nombreuses approches thermodynamiques, il convient de déterminer dans quelle mesure les gaz réels se comportent comme tel.

Expérience : Un cylindre, aux parois diathermiques et fermé par un piston, contient du gaz. En enfonçant progressivement le piston, la pression P à l'intérieur du cylindre augmente, tandis que son volume et donc aussi son volume molaire V_m diminuent. Le processus est réalisé lentement pour que le gaz soit à tout instant en équilibre thermique $T = T_{ext} = \text{constante}$. Pour comparer les gaz réels au gaz parfait, on trace un diagramme d'Amagat, $PV_m(P)$, à basse et haute pression. Dans un diagramme d'Amagat, les isothermes (évolutions des gaz à température constante) du gaz parfait sont des droites parallèles à l'axe des abscisses car $PV_m = RT = \text{constante}$.

Observation : Les tracés de tous les gaz réels à basse pression, quelle que soit la température et quelle que soit leur atomicité, suivent ceux du gaz parfait. Par contre, à haute pression, les courbes représentant les caractéristiques des gaz réels s'écartent notablement de la droite horizontale du gaz parfait.



Résultat

Quelle que soit la température, le modèle du gaz parfait décrit d'autant mieux le gaz réel que la pression est faible : $\lim_{P \rightarrow 0} PV_m = RT$ avec V_m le volume molaire

- Il faut noter également que c'est par cette limite à la pression nulle que la température thermodynamique (définie au II.1.) est mesurée.
- Il existe plusieurs modèles pour décrire un gaz réel, l'un des plus connus est le modèle du **gaz de Van der Waals**. Son équation d'état et son énergie interne (monoatomique et diatomique) sont :

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT \quad ; \quad U_{\text{monoatomique}} = \frac{3}{2} nRT - \frac{n^2 a}{V} \quad ; \quad U_{\text{diatomique}} = \frac{5}{2} nRT - \frac{n^2 a}{V}$$

L'équation d'état fait intervenir deux termes correctifs par rapport au gaz parfait, qui tiennent compte de la réalité du gaz par rapport au modèle, a et b sont des constantes qui dépendent du gaz :

- $\frac{n^2 a}{V^2}$ lié aux interactions des molécules entre elles, c'est la **pression de cohésion**.
- nb lié aux dimensions non nulles des molécules, c'est le **covolume**.

IV Le modèle de la phase condensée

Le modèle des phases condensées incompressibles et indilatables est utile pour étudier de façon simplifiée les liquides et les solides.

Définitions

- L'augmentation du volume d'un corps, à pression constante, due à une augmentation de la température s'appelle la **dilatation**. Pour quantifier la tendance d'un corps à se dilater, on définit le **coefficient de dilatation isobare** :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad \text{dont l'unité est le K}^{-1}.$$

- La diminution du volume d'un corps, à température constante, due à une augmentation de la pression s'appelle la **compressibilité**. Pour quantifier la tendance du volume d'un corps à diminuer quand la pression augmente, on définit le **coefficient de compressibilité isotherme** :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad \text{dont l'unité est le Pa}^{-1}.$$

Dans le cas général l'énergie interne U ne dépend que de deux paramètres thermodynamiques, la température et le volume, c'est-à-dire $U = U(T, V)$. Une phase condensée, incompressible ($\chi_T = 0$) et indilatable ($\alpha = 0$) est de volume constant quelles que soient les variations de pression ou de température, ce qui implique que son énergie interne ne dépend plus que de la température.

Résultat

L'énergie interne molaire d'une **phase condensée incompressible et indilatable** ne dépend que de sa température : $U_m = U_m(T)$ et $dU_m = C_{V,m} dT$

→ Approximation des phases condensées peu compressibles et peu dilatables

Certains liquides, tels que les fluides corporels (sang, salive) sont faiblement compressibles et très peu dilatables. En se plaçant au voisinage d'un état de référence représenté par le couple thermodynamique (P_0, T_0) on peut, en première approximation, utiliser l'équation d'état des liquides peu compressibles et peu dilatables :

$$V(P, T) = V(P_0, T_0) [1 + \alpha_0(T - T_0) - \chi_{T_0}(P - P_0)]$$

Où α_0 et χ_{T_0} sont respectivement les coefficients de dilatation isobare et de compressibilité isotherme du liquide dans l'état de référence.

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Échelle de description d'un système en thermodynamique.
- Système thermodynamique : définition, grandeurs, équations et fonctions d'état.
- Grandeurs extensives et intensives : définition, exemples.
- Modèle du gaz parfait : définition, équation d'état, différences liées à l'atomicité.
- Énergie interne et capacité thermique à volume constant : définitions, cas d'un gaz parfait mono et diatomique.
- Propriétés d'une phase incompressible et indilatable, approximation peu dilatable et peu compressible.
- Comparaison d'un gaz réel au modèle du gaz parfait.

Erreurs à éviter

- Les grandeurs intensives ne s'additionnent pas (T et P en particulier).
- Attention aux unités, on utilise toujours le m^3 pour le volume, le Kelvin pour la température et le Pascal pour la pression dans l'équation d'état du gaz parfait car R n'est pas sans dimension.
- Ne pas mettre le symbole « ° » (degré) lorsque la température est en Kelvin.
- On échappera à bien des erreurs de calculs et on pourra s'éviter bien des conversions en faisant apparaître des rapports de grandeurs constantes dans les transformations. On pourra alors utiliser toutes les unités hors système, en particulier si elles figurent dans l'énoncé, sauf pour les températures pour lesquelles on ne fera QUE des rapports en Kelvin (voir exercices n° 1 et n° 2 p. 355 en particulier) !

Quelques « trucs » utiles

- Il y a beaucoup de définitions et de concepts nouveaux dans ce chapitre, tous essentiels pour la suite. Les connaître et les comprendre est indispensable pour être à l'aise dans l'étude de la thermodynamique.
- D'un point de vue pratique, la présentation d'un exercice suit toujours les mêmes règles et la schématisation des systèmes est toujours utile. Bien définir l'état initial et l'état final, le plus complètement possible et repérer les grandeurs qui ne changent pas, avant d'aborder la résolution par un calcul, afin d'éviter de tourner en rond.

Conseil

Dans tous les exercices P_0 désigne la pression atmosphérique : $P_0 = 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

1 Exploitation de l'équation d'état ★

→ corrigé p. 356

- ① Déterminer la masse volumique de l'air (assimilé à un gaz parfait) à P_0 et 25°C . $M_{\text{air}} = 29,0 \text{ g.mol}^{-1}$.
- ② Déterminer le volume molaire du gaz parfait à P_0 et à 0°C , puis à 25°C .
- ③ Une bouteille en acier, munie d'un détendeur, contient un volume $V_i = 60 \text{ L}$ d'air comprimé à la pression $P_i = 4,0 \text{ atm}$. En ouvrant le détendeur à P_0 , quel volume d'air peut-on extraire ?

2 Grandeurs et fonctions d'état ★

→ corrigé p. 356

On considère 3 dispositifs expérimentaux A, B et C qui contiennent de l'hélium.

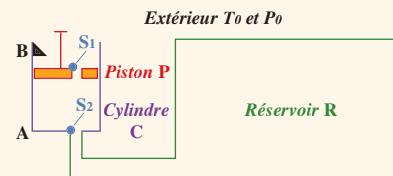
- A est une enceinte hermétiquement fermée aux parois rigides.
- B est une enceinte thermostatée (c'est-à-dire dans laquelle la température est régulée de façon à ne pas varier) fermée par un piston hermétique mais qui peut coulisser.
- C est une enceinte rigide, thermostatée, reliée à une bouteille d'hélium par un robinet.
- Initialement dans tous les récipients le gaz parfait occupe un volume de 246 L , à P_0 et 27°C .

- ① Déterminer la quantité de matière d'hélium présente dans chacune des enceintes.
- ② On veut doubler la pression dans chaque enceinte. Que vaudront alors les grandeurs d'état ? Comment réaliser chaque opération ?
- ③ Que vaut l'énergie interne initiale et finale dans chaque enceinte ?

3 Pompe à vide (d'après Enstim 2009) ★★

→ corrigé p. 357

Le schéma représente, en coupe, un réservoir R, un cylindre C de parois diathermanes, et un piston P dont la course est limitée par le fond A (le volume du cylindre est alors nul) et la cale B (le volume du cylindre vaut alors V_B). Le système est muni de deux soupapes : S_1 permet le passage du gaz uniquement de C vers l'extérieur et S_2 uniquement de R vers C, et ce, dès que la différence de pression entre les parties inférieure et supérieure de la soupape est positive. Le cylindre est relié, par un tube de volume négligeable devant les autres volumes du système, au réservoir R de volume V_o , très supérieur à V_B , contenant de l'air, supposé gaz parfait, dans lequel on souhaite « faire le vide ».



- ① Dans l'état initial, le piston est en B, le cylindre et le réservoir contiennent de l'air à P_0 et à T_0 . On pousse le piston jusqu'en A et on le ramène en B assez lentement pour que la température reste T_0 . Expliquer les différents transferts de gaz au cours de cet aller-retour. Exprimer la pression P_1 dans R quand le piston revient en B.
- ② Si les transferts de gaz s'effectuent de la même façon, exprimer la pression P_2 après un deuxième aller-retour du piston, puis P_n après le n ème aller-retour. Quelle est la limite de P_n quand $n \rightarrow \infty$?
- ③ En réalité, quand le piston est en A, le volume V_A entre le piston et le fond n'est pas strictement nul. La limite théorique précédente ne peut pas être atteinte. Pourquoi ? Déterminer la véritable limite théorique de cette pompe à vide. Pourquoi appelle-t-on V_A le « volume nuisible » ?

Conseil

Peu d'exercices dans ce chapitre où l'apprentissage des définitions et des démonstrations du cours est une priorité.

1 Exploitation de l'équation d'état

→ énoncé p. 355

- ① Par définition, la masse volumique ρ est le rapport de la masse du système par son volume. On introduit la quantité de matière et on utilise l'équation d'état du gaz parfait, la masse volumique de l'air s'exprime :

$$\rho = \frac{m_{\text{air}}}{V_{\text{air}}} = \frac{n_{\text{air}} M_{\text{air}}}{V_{\text{air}}} = \frac{PV_{\text{air}} M_{\text{air}}}{RTV_{\text{air}}} \quad \text{soit :} \quad \boxed{\rho = \frac{PM_{\text{air}}}{RT}}$$

$$\text{A.N. : } \rho = \frac{1,013 \cdot 10^5 \times 29,0 \cdot 10^{-3}}{8,314 \times 298} \quad \boxed{\rho = 1,19 \text{ kg.m}^{-3}}$$

- ② Par définition, le volume molaire V_m est le rapport du volume sur la quantité de matière du gaz parfait :

$$V_m = \frac{V}{n} = \frac{RT}{P}$$

$$\text{A.N. à } T = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K et } P = P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa :} \quad V_m = 2,24 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} = 22,4 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{à } T = 25^\circ\text{C} = 298 \text{ K et } P = P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa :} \quad V_m = 2,45 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} = 24,5 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Plus la température augmente, plus le volume molaire d'un gaz parfait augmente.

- ③ Initialement la bouteille contient un volume V_i à la pression P_i à la température T_0 . En ouvrant le détendeur, n moles du gaz contenu dans la bouteille vont s'échapper dans l'air extérieur et atteindre l'équilibre thermodynamique jusqu'à ce que les pressions interne et externe de la bouteille soient égales à $P_f = P_0$ (équilibre mécanique) et l'équilibre thermique est atteint ($T_f = T_0$). L'équation d'état du gaz parfait donne :

$$\begin{cases} PV_i = nRT_0 \\ P_f V_f = nRT_0 \end{cases} \quad \text{soit : } \quad P_i V_i = P_f V_f \quad \text{puis :} \quad \boxed{V_f = V_i \frac{P_i}{P_f}} \quad V_f = 60 \times \frac{4,0}{1} = 240 \text{ L}$$

En augmentant la pression, il est possible de faire contenir un très grand volume de gaz dans une bouteille de plus faible contenance.

Bien comprendre

- En thermodynamique, on s'intéresse toujours à l'état initial et à l'état final d'un système à l'équilibre. On ne s'occupe jamais des états intermédiaires.
- Par ailleurs on a toujours intérêt dans les calculs, à faire apparaître des rapports de grandeurs de façon à utiliser les unités de son choix (ici les litres et les atmosphères) en particulier celles de l'énoncé. Cette méthode est mise en pratique dans l'exercice suivant.
- Attention : la température doit impérativement être en Kelvin dans un rapport !

2 Grandeur et fonctions d'état

→ énoncé p. 355

- ① En utilisant l'équation d'état, les 3 systèmes ayant les mêmes grandeurs d'état :

$$n_{A0} = n_{B0} = n_{C0} = n_0 = \frac{P_0 V_0}{RT_0} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \times 0,246}{8,314 \times 300} = 10,0 \text{ mol}$$

- ② Dans la première enceinte, le volume et la quantité de matière restent nécessairement constants, le seul moyen d'augmenter la pression est d'augmenter aussi la température : $\frac{P_0}{T_0} = \frac{2P_0}{T_A}$ d'où $\boxed{T_A = 2T_0 = 600 \text{ K}}$

Il faut chauffer le système par exemple en plongeant l'enceinte dans un environnement à 600 K (327 °C). Dans la deuxième enceinte, la température et la quantité de matière restent nécessairement constantes, le seul moyen d'augmenter la pression est de diminuer le volume : $P_0 V_0 = 2P_0 V_B$ d'où $V_B = V_0/2 = 123 \text{ L}$

Il faut appuyer sur le piston de façon à diminuer le volume de moitié.

Dans la troisième enceinte, le volume et la température sont constants, le seul moyen d'augmenter la pression est d'augmenter la quantité de matière : $\frac{n_0}{P_0} = \frac{n_C}{2P_0}$ d'où $n_C = 2n_0 = 20,0 \text{ mol}$

Il faut pomper pour injecter de l'hélium dans l'enceinte.

- ❸ L'énergie interne molaire ne dépend que de la température, l'énergie interne du système dépend évidemment aussi de sa quantité de matière. L'hélium est monoatomique, donc :

$$U_0 = \frac{3}{2} n_0 R T_0 = \frac{3 \times 10,0 \times 8,314 \times 300}{2} = 3,74 \cdot 10^4 \text{ J} = 37,4 \text{ kJ} \quad (\text{même état initial pour A, B et C})$$

$$U_A = \frac{3}{2} n_0 R T_A = \frac{3}{2} n_0 R 2T_0 = 2U_0 = 74,8 \text{ kJ} \quad ; \quad U_B = \frac{3}{2} n_0 R T_B = \frac{3}{2} n_0 R T_0 = U_0 = 37,4 \text{ kJ}$$

$$U_C = \frac{3}{2} n_0 R T_C = \frac{3}{2} 2n_0 R T_0 = 2U_0 = 74,8 \text{ kJ}$$

3 Pompe à vide

→ énoncé p. 355

- ❶ Lorsque le piston descend, il tend à augmenter la pression dans le cylindre, donc elle est supérieure aux deux autres, S_1 s'ouvre et S_2 se ferme, l'air du cylindre est expulsé dehors. Pendant ce temps la pression du réservoir ne change pas (S_2 fermée) et reste égale à P_0 . Lorsque le piston remonte, la pression dans le cylindre tend à diminuer (le volume augmente), donc S_1 se ferme et S_2 s'ouvre, permettant à une partie de l'air du réservoir de remplir le cylindre. Cet air sera donc chassé dehors lors de la prochaine descente, puis la remontée remplira à nouveau le cylindre et ainsi de suite. On espère ainsi pomper tout l'air vers l'extérieur.

Pendant la montée la quantité d'air emprisonnée dans l'ensemble de la machine est constante (S_1 fermée) et son volume passe de V_0 à $V_0 + V_B$, tandis que la pression passe de P_0 à P_1 , la quantité de matière et la température étant constantes, on obtient :

$$P_0 V_0 = P_1 (V_0 + V_B) \quad \text{soit :} \quad P_1 = P_0 \frac{V_0}{V_0 + V_B}$$

- ❷ De la même façon, lors du second aller-retour, la quantité d'air emprisonnée dans l'ensemble de la machine est constante (S_1 fermée) et son volume passe de V_0 à $V_0 + V_B$, tandis que la pression passe de P_1 à P_2 , la quantité de matière et la température étant constantes, on obtient :

$$P_1 V_0 = P_2 (V_0 + V_B) \quad \text{soit :} \quad P_2 = P_1 \frac{V_0}{V_0 + V_B} = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_B} \right)^2$$

En réitérant n fois, on obtient donc la pression :

$$P_n = P_{n-1} \frac{V_0}{V_0 + V_B} = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_B} \right)^n \quad \text{d'où :} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0 \quad \text{car} \quad \frac{V_0}{V_0 + V_B} < 1$$

- ❸ En raison d'un volume V_A non nul, on atteint une situation limite, telle que le pompage ne change plus rien et les soupapes ne s'ouvrent plus : la quantité d'air emprisonnée dans le cylindre passe alors de V_A à V_B pendant la montée sans que S_2 ne s'ouvre (et encore moins S_1), ce qui signifie que la pression du réservoir est inférieure à celle du cylindre jusqu'en position haute, de même pendant la descente S_2 ne s'ouvre pas (et *a fortiori* S_1), ce qui signifie que la pression atmosphérique reste supérieure à celle du cylindre jusqu'en position basse. On a donc la situation limite de l'air emprisonné dans le cylindre

En position haute : pression P_{lim} et volume V_B ; en position basse : pression P_0 et volume V_A , d'où :

$$P_{\lim} V_B = P_0 V_A$$

soit :

$$P_{\lim} = P_0 \frac{V_A}{V_B}$$

On retrouve bien une limite nulle si V_A est nul. V_A limite la performance de la pompe d'où son nom.

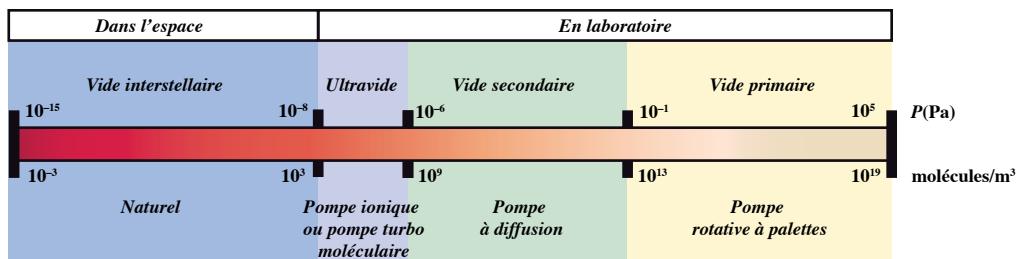
Bien comprendre

- En réalité une telle pompe, même avec un volume V_A nul, ne pourrait donner un vide parfait (pression nulle) car des fuites autour du piston sont impossibles à éliminer complètement, sous peine de ne plus coulisser ! Sans compter le nombre d'aller-retour infini pour atteindre la limite théorique...

POUR EN SAVOIR PLUS

Le **vide** représente théoriquement l'absence totale de matière, mais le vide absolu n'existe pas, même au plus profond de l'espace intergalactique, et le terme désigne l'état d'un gaz raréfié, caractérisé par une pression très inférieure à la pression atmosphérique. Pour diminuer la pression, on utilise des pompes. Une pompe primaire fonctionne dès la pression atmosphérique, une pompe secondaire nécessite un vide moyen pour s'amorcer. La première pompe à vide (pompe à air) fut inventée en 1654 par l'inventeur allemand Otto von Guericke. C'est l'industrie des lampes qui contribua fortement au développement de la technique du vide. Actuellement, le vide est nécessaire pour trois raisons principales, aussi bien dans l'industrie que dans les laboratoires de recherche : augmenter la durée de vie d'un échantillon, empêcher le transfert thermique dans l'air entre deux parois (conserver un aliment chaud ou froid, ou un gaz liquéfié) et limiter les obstacles sur le trajet d'un faisceau de particules (par exemple dans un accélérateur).

Source : Société française du vide http://vide.org/publications/pages_techniques_fr



	Pression P (en Pa)	Pression (en P_0)	Densité de particules (en nombre/m³)
Atmosphère normale	10 ⁵ Pa	P_0	10 ²⁵
Vide primaire	10 ² Pa	10 ⁻³ P_0	10 ²²
Vide moyen	10 ⁻¹ à 10 ² Pa	10 ⁻⁶ à 10 ⁻³ P_0	10 ¹⁹ à 10 ²²
Vide secondaire	10 ⁻⁵ à 10 ⁻¹ Pa	10 ⁻¹⁰ à 10 ⁻⁶ P_0	10 ¹⁵ à 10 ¹⁹
Ultra-vide	10 ⁻¹⁰ à 10 ⁻⁵ Pa	10 ⁻¹⁵ à 10 ⁻¹⁰ P_0	10 ¹⁰ à 10 ¹⁵
Ultra ultra-vide	< 10 ⁻¹⁰ Pa	< 10 ⁻¹⁵ P_0	< 10 ¹⁰

À méditer

La thermodynamique est un sujet curieux. La première fois qu'on l'aborde, on ne le comprend pas du tout. La deuxième fois, on pense qu'on le comprend, sauf l'un ou l'autre point. La troisième fois, on sait qu'on ne le comprend pas, mais à ce stade on y est tellement habitué qu'on ne s'en préoccupe plus.

ARNOLD SOMMERFELD (1868-1951)

Échanges énergétiques au cours d'une transformation

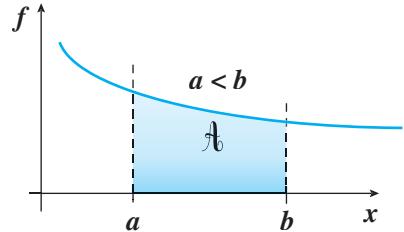
Une étude énergétique a pour but de mettre en évidence des échanges d'énergie entre un système et le milieu extérieur. En thermodynamique on distingue deux types d'échanges, le transfert mécanique (le travail des forces, souvent limité à celui des forces de pression) et le transfert thermique (la chaleur). Ces transferts ont lieu lorsque le système thermodynamique subit des transformations dues aux contraintes imposées par le milieu extérieur. Pour pouvoir quantifier ces échanges et les exprimer en fonction des paramètres thermodynamiques, il est nécessaire d'étudier les propriétés des différentes transformations.

Outils mathématiques

Aire sous une courbe :

L'intégrale d'une fonction est liée à l'aire sous la courbe par :

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx = A$$



I Les transformations thermodynamiques

1. La transformation réversible – la transformation dite quasi statique

Définitions

Une **transformation thermodynamique** est un processus au cours duquel un système thermodynamique, sous l'action d'une perturbation extérieure, passe d'un état d'équilibre initial à un état d'équilibre final compatible avec les nouvelles contraintes extérieures. L'état d'équilibre suppose l'état d'équilibre mécanique et thermique.

- La **transformation dite quasi statique** est une transformation au cours de laquelle chaque état intermédiaire entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final est un état d'équilibre.
- La **transformation réversible** est une transformation au cours de laquelle chaque état intermédiaire entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final est un état d'équilibre infinitésimale une contrainte extérieure, on peut inverser le sens d'évolution de la transformation. La transformation inverse suit alors la même succession d'états que le chemin direct.
- Dans une transformation réversible, les paramètres d'état, par exemple T , P , et V , sont définis à chaque instant et varient continûment.
- La transformation réversible est un modèle idéal qui n'a pas de réalité physique puisqu'entre des états d'équilibre infinitésimale voisin, il n'y a pas d'évolution. Cependant ce modèle de transformation est extrêmement utile, car il permet de modéliser des transformations théoriques sur lesquelles la variation des fonctions d'état est facile à calculer (*voir point méthode p. 362*).

■ L'expression « quasi statique » fait débat, certains auteurs la confondent avec le terme réversible, d'autres en réfutent totalement la pertinence. Sauf dans le paragraphe ci-dessous, où le caractère quasi statique permet de se faire une idée concrète de la transformation réversible qui doit (mais pas uniquement) être suffisamment lente pour qu'il n'y ait pas création d'inhomogénéités, le terme de quasi statique ne sera plus utilisé par la suite. Seule la notion sans ambiguïté de transformation réversible sera considérée.

Exemple : À l'état initial, un gaz est contenu dans un cylindre vertical fermé par un piston sans masse et mobile sans frottements. On pose sur le piston des masselottes jusqu'à une masse totale égale à m . À tout instant, dans un état intermédiaire le système est à l'équilibre, car la perturbation créée est trop faible pour produire des inhomogénéités : c'est une transformation quasi statique. On peut imaginer que les masses déposées sont infinitésimales (dm aussi petites que l'on veut) et l'on peut donc, à toute étape, retirer dm et revenir strictement à l'état précédent. L'état du gaz ne dépend alors que de la masse totale présente sur le piston et non du sens d'évolution de la transformation : c'est une transformation réversible.

Contre-exemple : On lâche brutalement sur le piston une masse m , les particules de gaz proches du piston sont comprimées subitement, tandis que les molécules au fond du cylindre sont encore à la pression initiale P_0 . Par la suite, la perturbation se propage de proche en proche grâce aux chocs entre molécules et aux transferts d'énergie cinétique au cours de ces chocs. La pression devient alors homogène. Au cours de la transformation, la pression n'est pas définie, le système est fortement inhomogène et hors équilibre : la transformation n'est donc pas quasi statique et *a fortiori* pas réversible.

■ Le phénomène d'irréversibilité sera étudié au chapitre 22. Il résulte d'une évolution spontanée à sens unique des systèmes physiques : diffusion thermique du « chaud » vers le « froid », déplacement des particules du « plus » au « moins » concentré, dissipation énergétique liée aux frottements...

2. Les transformations particulières

Les transformations thermodynamiques réelles et complexes peuvent être décomposées en une succession de transformations élémentaires permettant ainsi de faire des calculs de transferts d'énergie mécanique et thermique. Certaines de ces transformations sont nécessairement réversibles.

Définitions

- Une transformation est **isobare** si la pression du système est définie à chaque instant et est constante au cours de l'évolution (exemple : on chauffe lentement un gaz contenu dans un cylindre fermé par un piston mobile, le gaz se dilate et reste à la pression extérieure imposée par le piston).
- Une transformation est **isochore** si la surface qui délimite le système n'est pas déformée au cours de son évolution. Le volume est donc constant (exemple : gaz chauffé dans un récipient rigide).
- Une transformation est **isotherme** si la température du système est définie à chaque instant et est constante au cours de l'évolution (exemple : on comprime tout doucement le gaz contenu dans un récipient muni de parois diathermanes, le gaz qui aurait tendance à s'échauffer reste à la température atmosphérique en dégageant de l'énergie thermique vers le milieu extérieur).
- Une transformation est **adiabatique** si le système n'échange pas d'énergie thermique avec le milieu extérieur (la compression adiabatique d'un gaz l'échauffe, la détente adiabatique le refroidit).

- Une transformation adiabatique idéale suppose des parois diathermanes ou parfaitement calorifugées, parfois improprement appelées parois adiabatiques.
- Une transformation isotherme est nécessairement réversible, la transformation réelle qui s'en rapproche le plus est donc forcément très lente pour que l'équilibre thermique se produise à chaque instant. À l'inverse, une transformation adiabatique doit être suffisamment rapide pour n'autoriser aucun échange thermique (une isolation thermique parfaite est impossible) et une transformation rapide est généralement considérée adiabatique.

- En pratique, il est impossible de réaliser une transformation parfaitement isotherme ou parfaitement adiabatique, une véritable évolution se situera entre ces deux situations idéales. On dit alors que cette transformation est **polytropique**.
- Il ne faut pas confondre adiabatique et isotherme ! Lors d'une transformation adiabatique, la température du système varie toujours et lors d'une transformation isotherme, il y a toujours échange de chaleur.

Définitions

- Une évolution est **monobare** si la pression exercée par le milieu extérieur sur le système est constante et uniforme au cours de la transformation (cela ne dit rien sur la pression du système).
- Une évolution est **monotherme** si la température du milieu extérieur est constante et uniforme au cours de la transformation (cela ne dit rien sur la température du système).

Les évolutions thermodynamiques « mono » d'un système sont causées par la modification des paramètres du milieu extérieur dont certains peuvent être connus et constants durant toute la transformation thermodynamique, mais, contrairement aux transformations réversibles « iso », l'état intermédiaire du système n'est pas forcément connu.

➡ Diagrammes de Clapeyron et de Watt

Pour étudier l'évolution d'un système thermodynamique au cours d'une ou plusieurs transformations, il est utile de tracer un diagramme de Clapeyron qui donne l'évolution de la pression en fonction du volume massique $P(v)$ ou du volume molaire $P(V_m)$ au cours de la transformation :

Transformation	ISOBARE	ISOCHORE	ISOTHERME (GP) ADIABATIQUE REVERSIBLE (GP)
Diagramme de Clapeyron			
Relation utile pour un Gaz Parfait	$\frac{V}{T} = \text{constante}$	$\frac{P}{T} = \text{constante}$	Isotherme : $PV = \text{constante}$ Adiab. réversible ¹ : $PV^\gamma = \text{constante}$

Avertissement : Il ne faut pas confondre le **diagramme de Clapeyron** avec le **diagramme de Watt** où la pression est fonction du volume $P(V)$. Le diagramme de Clapeyron n'utilise que des grandeurs intensives. Si le système est ouvert (masse variable), ces deux diagrammes diffèrent. Cependant si la masse est constante, les deux diagrammes sont équivalents et ils sont souvent confondus dans la littérature ou dans les sujets où l'on parle de diagramme de Clapeyron alors qu'on trace en fait des diagrammes de Watt. On travaille dans ce qui suit sur des systèmes fermés, on utilisera donc le nom de Clapeyron, plus habituel pour les étudiants, bien que techniquement on trace des diagrammes de Watt.

- En traçant ce type de diagramme, on suppose que les transformations étudiées sont réversibles, ce qui implique que la pression d'un fluide contenu dans une enceinte fermée est définie à tout instant.
- Dans un diagramme de Clapeyron, si la transformation n'est pas réversible, la pression ne peut pas être définie au cours de l'évolution du système : on peut alors seulement représenter l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final du gaz sans connaître les états intermédiaires.
- Les tracés des isochores ou des isobares sont valables pour tout gaz, mais ceux des isothermes et des adiabatiques réversibles ne sont valables que pour un gaz parfait. La forme des grandeurs constantes

1. Les propriétés de la transformation adiabatique réversible sont étudiées au chapitre 22, p. 399.

montre que la pente de la tangente en un point d'intersection de coordonnées (P_o , V_o) est plus grande pour une adiabatique réversible que pour une isotherme (voir chapitre 22 p. 400, équations de Laplace).

POINT MÉTHODE

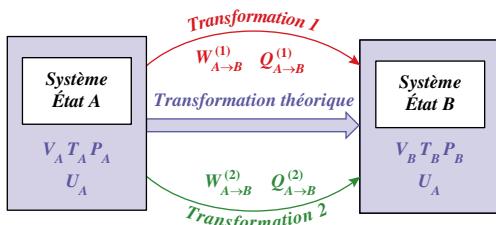
Choisir une notation pertinente : Δ , d , δ ou rien

- Pour comprendre les **différences de notations Δ , d , rien et δ** dans ce qui suit il faut bien distinguer fonctions d'état et grandeurs d'échange. Dans toutes les transformations étudiées, on considère d'une part un état initial et un état final et d'autre part une transformation permettant de passer de l'un à l'autre. Dans le chapitre précédent on a défini des grandeurs et des **fonctions d'état** qui caractérisent le système dans un état donné. Ces grandeurs varient pendant la transformation, mais leur variation entre l'état initial et l'état final ne dépend que des états, donc pas de la nature de la transformation (autrement dit pas du chemin suivi). On peut donc définir leur variation macroscopique ΔY ou infinitésimale dY et éventuellement les calculer sur un chemin théorique (réversible, idéal, simple, ...) d'où l'intérêt particulier de la transformation réversible. On pourra appliquer à ces grandeurs le calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables. D'autres fonctions d'état (H et S) seront vues plus loin.

Dans ce chapitre, on s'intéresse dans les paragraphes suivants à des **grandes d'échange**, (travail W et chaleur Q) qui sont des quantités que le système échange avec le milieu extérieur. Cela n'a pas de sens de les définir dans un état donné, elles n'interviennent qu'au cours d'une transformation et, à ce titre, dépendent de la transformation (du chemin suivi) et pas seulement de l'état initial, et de l'état final. Parler de leur variation n'a pas de sens, seul compte la quantité macroscopique de la transformation réelle Z ou la petite quantité δZ échangée et utiliser un chemin théorique ne permet pas de les déterminer. D'autres grandes d'échange ($S_{crée}$ et $S_{échangée}$) seront vues plus loin. $S_{crée}$ n'est pas à strictement parler une grande d'échange, mais elle se comporte comme telle du point de vue de ce qui est expliqué ici.

■ **En résumé :**

Transformation macroscopique



Grandes et fonctions d'état (valable aussi pour H, S, P, V, T)

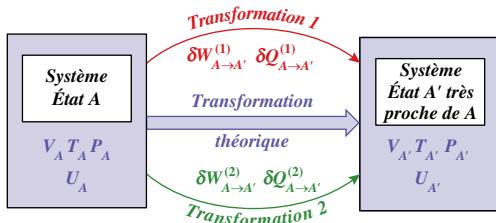
$$\Delta U_{A \rightarrow B} = U_B - U_A = \Delta U_{A \rightarrow B}^{(1)} = \Delta U_{A \rightarrow B}^{(2)} = \Delta U_{A \rightarrow B}^{(théorique)}$$

Grandes d'échange (valable aussi pour $S_{crée}$ et $S_{échangée}$)

$$W_{A \rightarrow B}^{(1)} \neq W_{A \rightarrow B}^{(2)} \neq W_{A \rightarrow B}^{(théorique)}$$

$$\text{et } Q_{A \rightarrow B}^{(1)} \neq Q_{A \rightarrow B}^{(2)} \neq Q_{A \rightarrow B}^{(théorique)}$$

Transformation infinitésimale



Grandes et fonctions d'état (valable aussi pour H, S, P, V, T)

$$dU_{A \rightarrow A'} = U_{A'} - U_A = dU_{A \rightarrow A'}^{(1)} = dU_{A \rightarrow A'}^{(2)} = dU_{A \rightarrow A'}^{(théorique)}$$

Grandes d'échange (valable aussi pour $S_{crée}$ et $S_{échangée}$)

$$\delta W_{A \rightarrow A'}^{(1)} \neq \delta W_{A \rightarrow A'}^{(2)} \neq \delta W_{A \rightarrow A'}^{(théorique)}$$

$$\delta Q_{A \rightarrow A'}^{(1)} \neq \delta Q_{A \rightarrow A'}^{(2)} \neq \delta Q_{A \rightarrow A'}^{(théorique)}$$

- **Signe des grandes d'échange :** dans toutes les transformations, on considère toujours (sauf indication contraire) le point de vue du système ; si le système reçoit, la quantité est positive, si le système fournit, la quantité est négative.

II | Transfert mécanique (travail)

1. Expression générale du travail des forces de pression

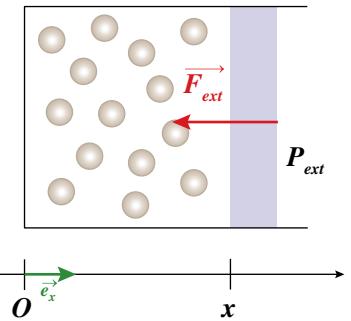
Le travail est un mode de transfert d'énergie entre le milieu extérieur et le système thermodynamique. Cette notion a déjà été définie dans le cours de mécanique (*voir chapitre 14 p. 257*). On s'intéresse ici au travail des forces de pression que l'on calcule sur un cas simple. Initialement, le piston, dont la section est notée S , délimite un volume Sx de gaz (l'axe est orienté dans le sens d'une variation positive de x pour une augmentation de volume). On note la pression extérieure P_{ext} . Le système (le gaz de particules) subit donc une force de la part du milieu extérieur telle que :

$$\overline{F}_{ext} = -P_{ext}S\overrightarrow{e}_x$$

On peut donc exprimer le travail élémentaire des forces de pression, noté δW , exercées sur le système lors d'un déplacement infinitésimal dx du piston :

$$\delta W = \overline{F}_{ext} dx \overrightarrow{e}_x = -P_{ext} S dx = -P_{ext} dV$$

où dV est la variation de volume du système lors du déplacement du piston.



→ Pour une compression : $dx < 0 \Rightarrow dV < 0 \Rightarrow \delta W > 0$

Le travail est positif donc le système reçoit du travail provenant du milieu extérieur.

→ Pour une dilatation : $dx > 0 \Rightarrow dV > 0 \Rightarrow \delta W < 0$

Le travail est négatif donc le système fournit du travail au milieu extérieur.

On peut montrer que cette expression se généralise à un système de forme quelconque, subissant des déformations quelconques du fait des forces de pression.

Définition

Le **travail des forces de pression** échangé par un système évoluant d'un état d'équilibre initial A à un état d'équilibre final B est égal à : $W_{A \rightarrow B} = - \int_{V_A}^{V_B} P_{ext} dV$

Le travail est homogène à une énergie et s'exprime en Joule.

- Attention, il faut bien comprendre que la pression extérieure P_{ext} n'est pas nécessairement la pression du milieu extérieur, mais la somme algébrique de toutes les pressions « ressenties » par le système (par exemple, les pressions exercées par l'atmosphère, par le piston, par l'expérimentateur, par une masse posée sur le piston...). P_{ext} caractérise le milieu extérieur tel que le système le « perçoit », tandis que dV caractérise le système.
- D'autres travaux, dont la somme est appelée **travail utile**, que celui des forces de pression peuvent être échangés par le système (turbine...), mais on travaillera souvent dans des situations où seul intervient le travail des forces de pression.

2. Cas d'une transformation isochore (gaz quelconque)

Pour une transformation isochore, le volume V du système reste constant durant toute l'évolution, il n'y a pas de déplacement des points d'application des forces de pression donc :

$$W_{A \rightarrow B} (\text{isochore}) = - \int_{V_A}^{V_B=V_A} P_{ext} dV = 0$$

Certaines transformations ne sont pas isochores, mais telles que les points d'application des forces de pression ne se déplacent pas et le travail sera également nul (*voir détente de Joule-Gay-Lussac p. 379*).

3. Cas d'une transformation monobare (gaz quelconque)

Soit un cylindre muni d'un piston de masse nulle et de section S . À l'équilibre initial, la pression du gaz P est égale à la pression du milieu extérieur, par exemple la pression atmosphérique P_0 . On pose une masse m sur le piston, dès lors, la pression à l'intérieur du cylindre n'est plus définie. Il en est de même tout au long de la transformation. Lorsque le piston s'immobilise, le système atteint un état d'équilibre, la pression du gaz est de nouveau définie. En revanche, au cours de la transformation, la pression imposée par le milieu extérieur sur le système est constante et égale à $P_{ext} = P_0 + mg/S$. Le travail des forces de pression vaut :

$$W_{A \rightarrow B} (\text{monobare}) = -P_{ext} \int_{V_A}^{V_B} dV = -P_{ext} (V_B - V_A)$$

- Cette transformation est souvent utilisée par les chimistes pour mesurer des constantes de réactivités à pression constante.

4. Cas d'une transformation réversible (gaz quelconque)

On envisage une transformation réversible d'un gaz contenu dans une enceinte fermée de l'état d'équilibre initial A à l'état d'équilibre final B. À tout instant de la transformation, le système est à l'équilibre avec le milieu extérieur. Par conséquent la pression interne du gaz P est égale à tout instant à la pression extérieure $P_{ext} = P$. Ainsi le travail des forces de pression d'un gaz subissant une transformation réversible vaut :

$$W_{A \rightarrow B} (\text{réversible}) = - \int_{V_A}^{V_B} P_{ext} dV = - \int_{V_A}^{V_B} P dV$$

- Ce résultat est essentiel, car il permet d'étudier ces transformations particulières, qui seront souvent utilisées pour modéliser de façon simple des transformations réelles plus complexes.

→ Cas d'une transformation isobare (gaz quelconque)

Pour une transformation isobare non seulement la pression du gaz est égale à la pression extérieure, mais de plus elle reste constante durant toute l'évolution :

$$W_{A \rightarrow B} (\text{isobare}) = -P \int_{V_A}^{V_B} dV = -P (V_B - V_A)$$

- Une transformation isobare est donc un cas particulier de transformation monobare.
- Le travail des forces de pression dépend de la variation du volume du système : les parois de l'enceinte doivent être déformables pour que le gaz subisse une transformation isobare.
- Pour un gaz parfait, on obtient aussi grâce à l'équation d'état :

$$W_{A \rightarrow B} (\text{isobare GP}) = -nR(T_B - T_A)$$

→ Cas d'une transformation isotherme (gaz parfait)

Pour une transformation isotherme, la température T du système reste constante durant toute l'évolution. En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, on obtient :

$$W_{A \rightarrow B} (\text{isotherme GP}) = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = - \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = -nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V}$$

$$W_{A \rightarrow B} (\text{isotherme GP}) = -nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT \ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right)$$

- Le travail des forces de pression dépend de la température du système. Les parois de l'enceinte doivent être diathermanes pour que le gaz subisse une transformation isotherme.

POINT MÉTHODE

Calculer le travail des forces de pression sur un gaz

- On retiendra que la démarche pour calculer le **travail des forces de pression** $W_{A \rightarrow B}$ d'un gaz subissant une transformation est toujours la même :

- ➡ Déterminer l'état initial et l'état final du gaz.
- ➡ Déterminer la pression extérieure, c'est-à-dire celle réellement « perçue » par le gaz pendant la transformation, en tenant compte des actions éventuellement exercées sur un piston (atmosphère extérieure, opérateur, masse...).
- ➡ Déterminer si elle est identique ou non à celle régnant dans le système, en prenant en compte le type de la transformation (brutale, réversible...) et introduire si nécessaire l'équation d'état des gaz parfaits.
- ➡ Exprimer le travail : $W_{A \rightarrow B} = - \int_{V_A}^{V_B} P_{ext} dV$ et remplacer P_{ext} selon les conclusions de l'étude

- Le calcul du travail nécessite donc de connaître la **nature de la transformation** subie par le gaz.

Récapitulatif : Travail reçu (algébriquement) par un gaz parfait confiné dans une enceinte et subissant une transformation de l'état d'équilibre initial A à l'état d'équilibre final B.

Transformation	Propriété	Travail reçu par le système
ISOCHORE	$V = cste$	$W_{A \rightarrow B} = 0$
ISOBARE (GP)	$P = cste$	$W_{A \rightarrow B} = -P(V_B - V_A) = -nR(T_B - T_A)$
ISOTHERME (GP)	$T = cste$	$W_{A \rightarrow B} = -nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$
MONOBARE	$P_{ext} = cste$	$W_{A \rightarrow B} = -P_{ext}(V_B - V_A)$

1. Visualisation du travail des forces de pression sur un diagramme de Clapeyron

Pour une transformation réversible, le signe du travail des forces de pression peut être déterminé par un diagramme de Clapeyron (P, V) .

Dans ce diagramme, l'aire sous la courbe représentant la transformation est liée au travail échangé (*voir outils mathématiques p. 359*).

Diagramme de Clapeyron		
Signe du travail	$W_{A \rightarrow B} = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = \cancel{W} > 0$	$W_{A \rightarrow B} = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = -\cancel{W} < 0$
Conséquence	Le système subit une compression → il reçoit du travail.	Le système subit une détente → il fournit du travail.

- Cette représentation permet de vérifier, lors d'une application numérique, si le signe obtenu est correct.
- Le diagramme de Clapeyron permet de constater que le travail des forces de pression dépend du chemin suivi, car l'aire dépend de la forme de la courbe représentant la transformation de A à B.

Définition

Un système subit une **transformation cyclique** si l'état d'équilibre final coïncide avec l'état d'équilibre initial après passage par plusieurs états d'équilibre intermédiaires.

On peut représenter sur un diagramme de Clapeyron une transformation cyclique d'un système subissant successivement deux transformations thermodynamiques, *a* et *b*. L'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final sont indiqués par les coordonnées du point E et l'état intermédiaire par les coordonnées du point I. Le travail d'une transformation cyclique est la somme des travaux de chaque transformation particulière : $W_{cycle} = W_{E \xrightarrow{a} I} + W_{I \xrightarrow{b} E}$

Par conséquent, dans les schémas ci-dessous, le travail sur le cycle est toujours la différence entre l'aire sous la courbe rouge et celle sous la courbe bleue, ce qui entraîne que le travail est égal (selon le sens du cycle) à \pm l'aire du cycle. Selon le sens de parcours du cycle, on obtient donc un travail total positif ou négatif.

Diagramme de Clapeyron		
Sens de parcours	trigonométrique	horaire
Signe du travail	$W_{cycle} = \mathcal{A} > 0$	$W_{cycle} = -\mathcal{A} < 0$
Conséquence	Cycle récepteur : le système reçoit du travail.	Cycle moteur : le système fournit du travail.

- La variation d'une fonction d'état est toujours nulle pour une transformation cyclique ($\Delta U_{cycle} = 0$) mais les grandeurs d'échange ne sont généralement pas nulles sur un cycle complet.

III Transfert thermique (chaleur)

1. Notion de transfert thermique

Définition

Le **transfert thermique** ou **chaleur** est une forme d'énergie échangée par un système thermodynamique avec le milieu extérieur au cours d'une transformation, indépendamment des effets mécaniques. Cette grandeur, notée Q , est homogène à une énergie et son unité est le Joule.

- La chaleur est une grandeur extensive mais n'est pas une fonction d'état, elle dépend du chemin suivi, et doit être notée δQ sur une transformation infinitésimale.
- Il ne faut pas confondre température et chaleur. La température est une grandeur d'état définie pour un système dans un état d'équilibre. La chaleur est une grandeur énergétique d'échange entre deux états.

On peut parler de la température d'un système mais cela n'a pas de sens de parler de sa chaleur (pas plus que de son travail).

- Contrairement à ce qui a été vu pour W , il n'y a pas de « formule » pour calculer Q . On verra au chapitre 21 comment le premier principe permettra cependant de la calculer.
- On distingue trois modes fondamentaux de transmission de l'énergie thermique : la **conduction**, la **convection** et le **rayonnement** qui ont été envisagés au lycée et qui feront l'objet d'un cours approfondi en deuxième année.

POINT MÉTHODE

Différencier la transformation adiabatique et la transformation isotherme

- Il convient d'insister sur la **distinction adiabatique/isotherme**, notions souvent confondues par les étudiants :

Une transformation adiabatique se fait sans transfert thermique entre le système et le milieu extérieur ($Q = 0$), une transformation isotherme se fait sans variation de température ($T = \text{constante}$).

Exemple 1 : Lorsque l'on fait bouillir de l'eau à pression atmosphérique, la température de l'eau reste égale à 100°C pendant le changement d'état liquide/vapeur. Cette transformation est isotherme et non adiabatique, puisque le système reçoit de l'énergie thermique.

Exemple 2 : Si l'on comprime un gaz contenu dans un récipient aux parois athermanes, sa température va croître malgré l'absence d'échange thermique avec le milieu extérieur. Cette transformation est adiabatique et non isotherme, le système reçoit du travail qui fait augmenter sa température.

- La conduction thermique est un **phénomène lent**, ce qui explique pourquoi une transformation isotherme d'un gaz dans une enceinte en contact avec l'extérieur se passe lentement, pour que la conduction thermique à travers la paroi diathermane permettant l'équilibre des températures ait le temps de se produire. Inversement une transformation rapide sera souvent supposée adiabatique, les échanges de chaleur n'ayant pas le temps de se produire (ce qui rend le concept d'adiabatique réversible parfois paradoxal).

2. Les thermostats

Définition

Un **thermostat**, noté Ω , (ou « source de chaleur ») est un système fermé de volume constant capable d'échanger de l'énergie thermique en gardant une température constante notée T_Ω . Le milieu extérieur d'un système est souvent assimilé à un thermostat ou à un ensemble de thermostats.

- La température du thermostat est uniforme et stationnaire en tout point de l'espace et à chaque instant.
- Le thermostat est un modèle physique idéal. Il s'agit d'un système dont la capacité thermique est assez grande pour que sa variation de température soit négligeable lors de transfert thermique avec le système. Un dispositif s'approche d'autant plus d'un thermostat idéal que son volume est grand. Par exemple, l'atmosphère est un excellent thermostat car, malgré les activités humaines, la température de l'atmosphère n'a augmenté que de 1,1 °C en un siècle².
- Un système subissant une transformation monotherme ne reçoit un transfert thermique que d'un seul thermostat (appelé source) à la température T_Ω .

2. 5^e rapport du GIEC (Groupe d'experts Intergouvernemental sur l'Évolution du Climat)–2013.

Questions de cours

- Fonctions d'état/grandeurs d'échange : définitions, exemples, distinctions, notations.
- Transformation réversible, isobare, isochore, isotherme, adiabatique, monobare, monotherme : définitions, exemples, diagrammes de Clapeyron (validité selon la nature quelconque ou parfaite du gaz).
- Travail des forces de pression : expression dans le cas général, expressions dans les différents cas particuliers (isochore, réversible, isobare, isotherme, monobare).
- Visualisation du travail des forces de pression dans un diagramme de Clapeyron pour une transformation cyclique ou non, signe, exemples.
- Transfert thermique : définition, propriétés, exemples.
- Thermostat : définition, exemples, propriétés, intérêt.
- Transformation adiabatique / transformation isotherme : définitions, propriétés, exemples, distinction.

Erreurs à éviter

- Ne pas confondre chaleur et température : ne **jamais** dire qu'une transformation adiabatique est à température constante ni que, si la température est constante, il n'y a pas de chaleur échangée.
- Ne pas confondre les notations d , Δ réservées aux fonctions d'état, et δ ou *rien* réservées aux grandeurs d'échange (*voir point méthode p. 362*).

Quelques « trucs » utiles

- Même si l'énoncé ne le demande pas, toujours faire un schéma synoptique des transformations (*voir exercice n° 1 par exemple*) et tracer un diagramme de Clapeyron des transformations étudiées. On y placera également les isothermes intéressantes (aux températures des thermostats) pour se repérer.
- La nature des transformations sera indiquée sur le schéma et permettra d'utiliser les relations entre les états de façon efficace. Par exemple $P_A V_A = P_B V_B$ pour une transformation isotherme de A à B, sans revenir sans cesse à l'équation d'état du GP.

Conseils

Ce chapitre est avant tout un chapitre de définitions, d'où le petit nombre d'exercices. Le lecteur est invité à toujours représenter les transformations proposées et à s'assurer que tout le vocabulaire est connu et toutes les définitions intégrées.

1 Transformation cyclique d'un gaz parfait ★
[→ corrigé p. 370](#)

Une mole de gaz parfait diatomique subit une transformation cyclique constituée des étapes suivantes :

- À partir des conditions initiales $P_A = 1 \text{ bar}$ et $t_A = 27^\circ\text{C}$ (état A), un échauffement isochore fait tripler sa pression et sa température atteint t_B (état B).
- Une détente isotherme lui fait ensuite retrouver sa pression initiale (état C).
- Un refroidissement isobare le ramène à l'état initial A.

① Déterminer les grandeurs d'état de A, B et C.

② Représenter le cycle dans un diagramme de Clapeyron. En déduire le signe du travail reçu par le gaz au cours d'un cycle.

③ Calculer le travail reçu par le gaz et sa variation d'énergie interne pour chaque transformation puis sur le cycle.

2 Cycle d'un gaz parfait ★
[→ corrigé p. 371](#)

Une mole de gaz parfait monoatomique passe d'un état A (P_A, V_A, T_0) à un état B (P_B, V_B, T_0) avec $V_A > V_B$. Une première méthode consiste à lui faire subir une transformation isobare suivie d'une transformation isochore (état intermédiaire noté C). Une seconde méthode lui fait d'abord subir une transformation isochore puis une transformation isobare (état intermédiaire noté D).

① Déterminer et comparer la variation d'énergie interne du gaz pour chacune des deux méthodes envisagées pour passer de A à B. Peut-on donner les mêmes conclusions pour le travail et la chaleur échangées par le gaz avec l'extérieur sur les deux transformations ?

② Le gaz effectue maintenant un cycle ADBCA en suivant les mêmes chemins que décrits ci-dessus. Déterminer le travail sur chaque étape. En déduire le travail total sur le cycle. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

3 Détentes d'un gaz parfait ★★
[→ corrigé p. 372](#)

On enferme n moles d'un gaz parfait monoatomique dans un cylindre vertical aux parois diathermanes clos par un piston sans masse de section S . Le piston est maintenu de sorte que le gaz soit comprimé à la pression $P_A = 5P_0$ où P_0 est la pression atmosphérique extérieure. Le gaz occupe initialement le volume V_A . La température extérieure est T_0 . L'ensemble est à l'équilibre. On réalise deux expériences à partir de ce même état initial :

a) On relâche brutalement le piston et on attend l'équilibre.

b) On relâche très lentement le piston de façon à ce que le système passe par une suite d'états d'équilibre infiniment voisins.

① Caractériser les transformations et déterminer l'état final dans chaque cas.

② Déterminer le travail reçu par le gaz au cours de chaque transformation. Conclure.

③ Déterminer la variation d'énergie interne dans chaque cas. Commenter.

④ Que peut-on dire des échanges thermiques dans chaque cas ?

1 Transformation cyclique d'un gaz parfait

→ énoncé p. 369

- 1 On rassemble les informations sur le schéma synoptique ci-contre. Les températures doivent être en Kelvin dans tous les calculs. La pression doit être en Pascal dans l'équation du gaz parfait mais peut rester en bar dans les calculs suivants, où l'on utilise uniquement des rapports, de même pour le volume qui doit être en m^3 dans l'équation du gaz parfait, mais peut rester en litre ensuite, puisqu'on effectue uniquement des rapports de grandeurs.

Le système est fermé donc la quantité de matière est la même dans tous les états :

$$n_A = n_B = n_C = 1 \text{ mole.}$$

En utilisant l'équation des gaz parfaits, on détermine complètement l'état A en calculant V_A :

$$V_A = n \frac{RT_A}{P_A} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 25 \text{ L}$$

On détermine complètement l'état B en calculant T_B . La transformation AB est isochore, donc :

$$\frac{P_B}{T_B} = \frac{P_A}{T_A} \quad \text{d'où :}$$

$$T_B = T_A \frac{P_B}{P_A} = 3T_A = 900 \text{ K} = 627^\circ\text{C}$$

On détermine complètement l'état C en calculant V_C . La transformation BC est isotherme, donc :

$$P_C V_C = P_B V_B \quad \text{d'où :}$$

$$V_C = V_B \frac{P_B}{P_C} = V_A \frac{3P_A}{P_A} = 3V_A = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 75 \text{ L}$$

- 2 Le diagramme de Clapeyron $P(V)$ figure ci-contre. Le cycle étant parcouru dans le sens horaire, le travail total est négatif, égal à l'opposé de l'aire Δ du cycle.
- 3 Les transformations BC et CA sont réversibles, le travail se calcule comme suit, où $i = \text{initial}$ et $f = \text{final}$ sur l'une quelconque des transformations :

$$W_{i \rightarrow f} = - \int_{V_i}^{V_f} P_{ext} dV = - \int_{V_i}^{V_f} P dV$$

Soit respectivement sur l'isotherme BC et sur l'isobare CA :

$$W_{B \rightarrow C} = nRT_B \ln \left(\frac{P_C}{P_B} \right) = -P_B V_B \ln 3 = -3P_A V_A \ln 3$$

et

$$W_{C \rightarrow A} = -P_A (V_A - V_C) = 2P_A V_A$$

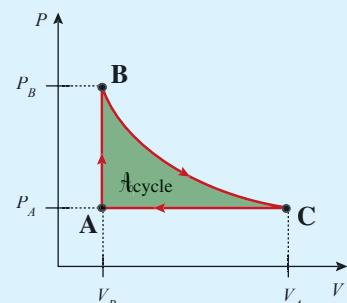
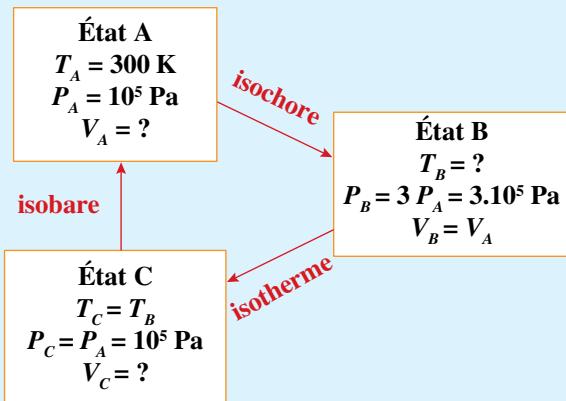
Sur l'isochore AB, le travail est nul : $W_{A \rightarrow B} = 0$

Le gaz est diatomique, et les températures comprises entre 100 et 1000 K, on aura donc $C_{V,m} = 5R/2$. La variation d'énergie interne se calcule de la même façon sur toutes les transformations :

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = nC_{V,m}(T_f - T_i) = \frac{5}{2} nR(T_f - T_i)$$

Les résultats numériques sont rassemblés dans le tableau ci-contre.

On trouve sans surprise sur le cycle, une variation nulle de l'énergie interne et un travail négatif.



Transformation	$W (\text{kJ})$	$\Delta U (\text{kJ})$
A → B	0	12,5
B → C	-8,2	0
C → A	5,0	-12,5
Cycle	-3,2	0

Bien comprendre

La variation d'une fonction d'état ne dépend pas du chemin suivi $\Delta U_{A \rightarrow B}^{isobare} = \Delta U_{A \rightarrow C \rightarrow B} \Rightarrow \Delta U_{cycle} = 0$. Ce n'est pas le cas du travail, grandeur d'échange, qui est différent selon le chemin $W_{A \rightarrow B}^{isochore} \neq W_{A \rightarrow C \rightarrow B} \Rightarrow W_{cycle} \neq 0$. On se rappellera par ailleurs que les grandeurs d'échange sont toujours comptées algébriquement du point de vue du système, positives s'il reçoit, négatives s'il fournit.

2 Cycle d'un gaz parfait

→ énoncé p. 369

- 1 La variation d'énergie interne ne dépend que de l'état initial et de l'état final, donc elle est la même pour les deux méthodes. Par ailleurs l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température, or elle est identique en A et en B. La variation d'énergie interne est donc nulle sur chaque transformation. Le travail et la chaleur sont des grandeurs d'échange, elles seront différentes selon que l'on effectue la transformation ACB ou ADB.
- 2 Le travail sur les isochores AD et BC est nul. Sur les transformations isobares, il vaut :

$$W_{i \rightarrow f} = - \int_{V_i}^{V_f} P_{ext} dV = - \int_{V_i}^{V_f} P_{isobare} dV = -P_{isobare} \int_{V_i}^{V_f} dV = -P_{isobare} (V_f - V_i)$$

Soit, en notant que AD est isochore, donc $V_D = V_A$, que BC est isochore, donc $V_C = V_B$, et que DB est isobare à la pression P_B et CA est isobare à la pression P_A :

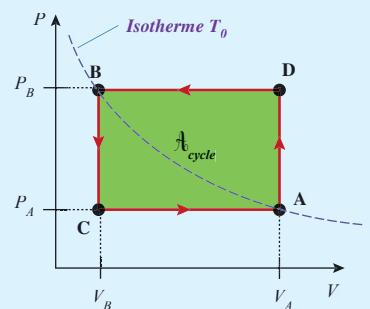
$$W_{D \rightarrow B} = -P_B (V_B - V_D) = P_B (V_A - V_B) \quad \text{et} \quad W_{C \rightarrow A} = -P_A (V_A - V_C) = P_A (V_B - V_A)$$

Le travail total sur le cycle vaut :

$$W_{cycle} = W_{A \rightarrow D} + W_{D \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow A} \text{ soit : } W_{cycle} = (P_B - P_A)(V_A - V_B)$$

En traçant le diagramme de Clapeyron, on retrouve que le travail du cycle est positif, car il est parcouru dans le sens trigonométrique, (le système est récepteur et reçoit du travail de l'extérieur sur un cycle) et sa valeur est la surface du cycle ici aisée à calculer puisqu'il s'agit du rectangle ABCD dont la surface vaut bien :

$$\mathcal{H}_{cycle} = (P_B - P_A)(V_A - V_B)$$



Bien comprendre

- Le diagramme de Clapeyron permet de comprendre et de visualiser les transformations, il est pertinent de le faire dès le début de l'exercice, au moins au brouillon et éventuellement de le compléter au fur et à mesure.
- Dans la première question, la variation d'énergie interne AB est identique sur ACB et ADB, mais elle diffère sur chaque portion dont les états initiaux et finaux sont différents à chaque fois.

3 Détentes d'un gaz parfait

→ énoncé p. 369

- 1 À la fin de chaque expérience le système est en équilibre donc, le piston étant mobile, il est à la même pression que le milieu extérieur. Par ailleurs les parois étant diathermanes, il est aussi à la même température que l'extérieur. La quantité de matière étant la même et le système fermé, on en déduit que le volume est aussi le même. Les deux transformations mènent donc au même état final. La première transformation est monobare et monotherme. La seconde est telle que le système est en équilibre à tout instant, (donc réversible) de sorte qu'en raison des parois diathermane, il reste à la même température pendant toute la transformation, laquelle est donc isotherme.

On peut donc écrire : $\begin{cases} P_A V_A = nRT_0 \\ P_B V_B = nRT_0 \end{cases} \Rightarrow P_A V_A = P_B V_B$ d'où : $V_B = V_A \frac{P_A}{P_B} = V_A \frac{5P_0}{P_0} = 5V_A$

- 2 On obtient le travail en utilisant les propriétés d'une transformation monobare pour (a), isotherme pour (b).

$$W_{A \rightarrow B}^{(a)} = - \int_{V_A}^{V_B} P_{ext} dV = - \int_{V_A}^{V_B} P_0 dV = -P_0 \int_{V_A}^{V_B} dV \quad \text{d'où : } W_{A \rightarrow B}^{(a)} = -P_0(V_B - V_A) = -4P_0V_A$$

$$W_{A \rightarrow B}^{(b)} = - \int_{V_A}^{V_B} P_{ext} dV = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = - \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_0}{V} dV = -nRT_0 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V}$$

d'où : $W_{A \rightarrow B}^{(b)} = -nRT_0 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -\ln(5)nRT_0 = -\ln(5)P_0V_A$

On obtient sans surprise un travail négatif dans les deux cas, puisqu'il s'agit d'une détente. De même on constate que les travaux sont différents puisque les transformations sont différentes bien qu'ayant même état initial et même état final.

- 3 Le gaz est monoatomique, la variation d'énergie interne est donc dans les deux cas :

$$\Delta U_{A \rightarrow B}^{(a)} = \Delta U_{A \rightarrow B}^{(b)} = nC_{V,m}(T_B - T_A) = \frac{3}{2}nR(T_B - T_A) = 0$$

L'état initial et l'état final étant identiques, la variation d'énergie interne (fonction d'état) est la même pour les deux transformations.

- 4 Les parois diathermanes permettent les échanges de chaleur avec l'extérieur. On peut imaginer que la première détente, brutale et rapide, est dans un premier temps adiabatique, et donc le gaz se refroidit, puis il doit prendre de la chaleur au milieu extérieur pour arriver à l'équilibre thermique. Dans le second cas, le gaz doit à tout instant être en équilibre thermique, il reçoit donc de la chaleur pendant toute la transformation pour maintenir sa température pendant la détente. Dans tous les cas la chaleur est positive, mais la valeur ne sera pas identique entre les deux transformations qui sont différentes, car Q est une grandeur d'échange.

Bien comprendre

La thermodynamique sera d'autant mieux comprise, qu'on s'efforce de visualiser les transformations et les échanges qui s'y déroulent, en particulier le sens des échanges avec l'extérieur selon la nature des transformations. La détermination aussi complète que possible des états initiaux et des états finaux, la construction d'un schéma et d'un diagramme de Clapeyron, sur lequel on portera les isothermes intéressantes comme ici, seront toujours d'une grande utilité dans la résolution, car ils mettront en évidence les inconnues, la nature des transformations et, par suite, le fil conducteur de la résolution.

À méditer

Comprendre un problème physique, c'est être capable d'en voir la solution sans résoudre d'équations.
PAUL DIRAC (1902-1984)

Premier principe de la thermodynamique

Le principe de conservation de l'énergie, qui constitue l'un des principes unificateurs de la physique, émerge et se formalise au milieu du xix^e siècle. On le retrouve en thermodynamique, donnant lieu à la naissance du premier principe, énoncé en 1845 par le physicien allemand Julius Robert von Mayer (1814-1878). Ce principe permet d'aboutir à un bilan énergétique unifiant un système à son milieu extérieur. Il en découle une connaissance sur les transferts énergétiques qui sont à la base du fonctionnement de nombreuses machines thermiques. Ainsi, une parfaite maîtrise de ces transferts permet, tout en optimisant le rendement des machines, de limiter la consommation énergétique, un enjeu capital pour notre société actuelle.

I Premier principe de la thermodynamique

1. La conservation de l'énergie

→ Énergie d'un système

Historiquement la notion d'énergie est présente à la fois en mécanique et en chimie, c'est-à-dire dans le premier cas, sous son aspect macroscopique et dans le second cas sous son aspect microscopique. De même les échanges énergétiques en mécanique sont exprimés à travers le travail des forces, tandis qu'en chimie, ils le sont plutôt à travers la chaleur. Aucune de ces deux approches n'est suffisante pour décrire totalement le comportement d'un système. Par exemple en mécanique, le frottement produit de la chaleur qui n'est pas prise en compte dans le bilan énergétique. La première étape consiste donc à établir la nature de l'énergie totale du système thermodynamique afin de traiter ses variations de façon exhaustive.

Définition

L'énergie totale d'un système, notée E , est définie comme étant la somme des énergies cinétiques et potentielles macroscopiques ($E_{C,macro}$ et $E_{P,macro}$) et microscopiques ($e_{C,micro}$ et $e_{P,micro}$) :

$$E = E_{C,macro} + E_{P,macro} + e_{C,micro} + e_{P,micro} = E_m + U$$

- $E_m = E_{C,macro} + E_{P,macro}$ représente l'énergie mécanique du système, qui dépend du référentiel. L'énergie cinétique macroscopique fait référence à un mouvement d'ensemble de toutes les particules (fluide en écoulement...). L'énergie potentielle macroscopique découle des interactions avec l'extérieur (champ gravitationnel, champ électromagnétique...).
- $U = e_{C,micro} + e_{P,micro}$ représente l'énergie interne du système, qui est indépendante du référentiel. L'énergie cinétique microscopique prend en compte l'agitation thermique, tandis que l'énergie potentielle microscopique découle d'interactions entre les particules du système.
- Il est important de noter que la réunion de deux systèmes ne se traduit pas forcément par l'additivité de leurs énergies internes, car le mélange peut introduire une nouvelle énergie potentielle d'interaction entre les systèmes. Cependant dans le cas de gaz parfaits pour lesquels ces interactions sont négligées, on pourra écrire : $U(GP_A \cup GP_B) = U(GP_A) + U(GP_B)$.

→ Variation de l'énergie du système

Après avoir subi une transformation due aux contraintes de son milieu extérieur, le système possédant initialement l'énergie E_A évolue vers un nouvel état d'énergie E_B . Le bilan énergétique permet de lier directement la variation d'énergie aux transferts avec l'extérieur.

Enoncé

L'énergie totale d'un système isolé est constante :

$$\Delta E (\text{système isolé}) = 0$$

Par conséquent la variation d'énergie d'un système est le fait d'échanges énergétiques avec l'extérieur :

$$\Delta E (\text{système}) = \epsilon_{\text{échangée}}$$

Le fondement est simple : l'énergie de l'univers (système isolé par excellence) est constante. Donc si l'on définit le système et le reste de l'univers, la variation d'énergie du système est égale et opposée à celle du reste de l'univers. Cette variation est donc due à l'échange énergétique entre le système et le reste de l'univers, à savoir le milieu extérieur. Ces relations simples peuvent paraître évidentes, mais elles traduisent une des lois les plus fondamentales et universelle de la physique qu'est le principe de conservation de l'énergie¹, principe qui n'est réellement apparu qu'au XIX^e siècle après une longue maturation de la pensée scientifique. On verra au chapitre suivant que d'autres grandeurs ne se conservent pas, mais peuvent être créées.

2. Énoncés du premier principe

Les énergies échangées entre un système thermodynamique et son milieu extérieur se traduisent par un échange de travail ou transfert mécanique (des forces de pression et éventuellement d'autres forces) W et un échange de chaleur ou transfert thermique Q . En tenant compte de l'ensemble de ces échanges dans le principe de conservation de l'énergie entre un système et son milieu extérieur, on en déduit le premier principe de la thermodynamique. Historiquement ce principe provient d'une volonté de créer une grandeur reflétant l'énergie du système, qui soit conservative, ce que n'est pas l'énergie mécanique seule par exemple.

Enoncé

Premier principe de la thermodynamique :

- Un système fermé qui évolue d'un état d'équilibre initial A à un état d'équilibre final B échange avec le milieu extérieur un travail W et une chaleur Q selon le principe de conservation de l'énergie :

$$\Delta E_{A \rightarrow B} = \Delta E_{m,A \rightarrow B} + \Delta U_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B} + Q_{A \rightarrow B}$$

- Pour une transformation infinitésimale d'un état A à un état A' (proche de l'état A) le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$dE = dE_m + dU = \delta W + \delta Q$$

- Le premier principe s'applique toujours entre deux états d'équilibre.
- Si le système étudié est ouvert, il faudra tenir compte de l'échange de matière avec le milieu extérieur ou, plus simplement, se ramener à un système fermé, ce qui sera abordé au paragraphe III.2 (p. 380). et détaillé au chapitre 23 (p. 425).
- Le premier principe permet de relier la variation d'énergie entre deux états, à l'énergie échangée entre le système et l'extérieur, exprimée, sauf mention contraire, algébriquement par rapport au système :
 - ➡ Si le système reçoit de l'énergie : $W + Q > 0$, alors son énergie totale E augmente.
 - ➡ Si le système fournit de l'énergie : $W + Q < 0$, alors son énergie totale E diminue.
- Le travail des forces conservatives est pris en compte dans l'énergie mécanique via l'énergie potentielle.

1. Les lois de conservation (en particulier celle de l'énergie) sont des piliers de la physique. En 1930, Wolfgang Pauli préféra postuler l'existence d'une particule alors inconnue (le neutrino), plutôt que de renoncer aux lois de conservation.

Enoncé

Dans le cas simple, mais fréquent, d'un système fermé au repos dans une enceinte globalement immobile, donc tel que son énergie macroscopique ne varie pas, le premier principe de la thermodynamique s'écrit plus simplement, respectivement pour une transformation macroscopique et pour une transformation infinitésimale :

$$\Delta U_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B} + Q_{A \rightarrow B} \quad \text{ou} \quad dU = \delta W + \delta Q$$

Si le système reçoit de l'énergie pour passer de A à B, alors il doit en fournir une quantité identique pour passer de B à A. Le premier principe ne dit pas si le système va évoluer spontanément de A à B ou de B à A, car c'est un **principe de conservation**. La nécessité d'un principe d'évolution fera l'objet du second principe, étudié au chapitre suivant.

Les conséquences des signes des grandeurs énergétiques échangées sur la nature du système sont étudiées en détail dans le chapitre 23 sur les machines thermiques.

POINT MÉTHODE*Calculer les grandeurs d'échanges*

- Le premier principe sert souvent à **calculer l'énergie thermique Q** échangée. En effet diverses relations permettent, selon les transformations, de calculer le travail (*voir p. 363-364*). Par ailleurs, on sait le plus souvent calculer la variation d'énergie interne, car elle ne dépend que de l'état final et de l'état initial. Le premier principe permettra donc en général de déterminer l'expression de la chaleur échangée.
- Si la transformation subie par le système est adiabatique (pas de transfert d'énergie thermique) : $Q = 0$, le premier principe permet plutôt de déterminer assez simplement la **valeur du travail**.
- Il est essentiel de différencier les notations δ et d , qui distinguent les fonctions d'état ($E, U, H\dots$) et les **grandes d'échanges** (W, Q) (*voir point méthode détaillé sur cette question p. 362*).

3. Une nouvelle fonction d'état : l'enthalpie

De nombreuses transformations thermodynamiques s'effectuent directement en contact avec l'atmosphère, c'est-à-dire à pression constante, comme par exemple une réaction chimique. La notion d'enthalpie est née de la nécessité de décrire ces transformations². On l'utilisera également avec profit pour les fluides en écoulement (*voir chapitre 23 p. 425*).

Définition

L'**enthalpie**, notée H , d'un système thermodynamique est une fonction d'état égale à la somme de son énergie interne U et du travail que ce système doit exercer contre la pression extérieure P pour pouvoir occuper un volume V :

$$H = U + PV$$

L'enthalpie s'exprime en Joule (symbole J).

- L'enthalpie d'un fluide est une fonction d'état extensive qui ne dépend que de trois paramètres d'état T, P et V . Or ces trois paramètres sont liés entre eux par l'équation d'état du système, donc l'enthalpie ne s'exprime qu'en fonction de deux paramètres indépendants : $H = H(T, P)$.

2. Étymologiquement, enthalpie signifie apport de chaleur en grec (*en-thalpein*), ce qui explique que l'enthalpie soit utilisée en chimie pour déterminer le caractère exothermique ou endothermique d'une réaction.

- On privilégiera l'enthalpie à l'énergie interne, lorsque le traitement du problème fera apparaître un système décrit à partir des grandeurs T et P .

→ Capacité thermique à pression constante

Définitions

- La **capacité thermique à pression constante**, notée C_p , est une grandeur extensive définie comme l'énergie à apporter à un système pour augmenter sa température d'un Kelvin, quand l'expérience est réalisée à pression constante. Elle s'exprime donc comme la dérivée partielle de l'enthalpie par rapport à la température à pression constante :

$$C_p = \left(\frac{\partial H(T, P)}{\partial T} \right)_P \quad \text{Son unité est le Joule par Kelvin, noté J.K}^{-1}.$$

- On définit également la **capacité thermique massique à pression constante**, notée c_p , et la **capacité thermique molaire à pression constante**, notée $C_{p,m}$, toutes deux intensives, s'exprimant respectivement en $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et $\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, telles que :

$$c_p = \frac{C_p}{m} \quad \text{et} \quad C_{p,m} = \frac{C_p}{n} \quad \text{d'où : } C_p = nC_{p,m} = mc_p$$

où m et n représentent respectivement la masse et la quantité de matière du système.

Définition

- On définit le **coefficient adiabatique** (ou **coefficient de Laplace**) d'un fluide homogène quelconque (gaz parfait et gaz réel), noté γ , comme étant le rapport des capacités thermiques :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} = \frac{c_p}{c_v}$$

- Pour un gaz quelconque, ce coefficient dépend de la température.
- Malgré son nom, l'utilisation de ce coefficient ne se restreint pas aux transformations adiabatiques.

4. Conséquences directes du premier principe

Si le système (d'énergie macroscopique constante) subit une transformation infinitésimale isobare, sans autre échange de travail que celui des forces de pression, on a :

$$dH = dU + d(PV) = \delta W + \delta Q + PdV + VdP = -PdV + \delta Q + PdV + 0 = \delta Q$$

Si le système (d'énergie macroscopique constante) subit une transformation infinitésimale isochore, sans autre échange de travail que celui des forces de pression, on a :

$$dU = \delta W + \delta Q = 0 + \delta Q = \delta Q$$

Résultats qui se généralisent aisément par intégration à une transformation macroscopique.

Résultats

Le premier principe pour un système d'énergie macroscopique constante, n'échangeant d'autre travail que celui des forces de pression, s'écrit, respectivement pour des transformations macroscopiques et infinitésimales :

- Pour une transformation isochore : $\Delta U_{A \rightarrow B}(\text{isochore}) = Q_{A \rightarrow B}$ et $dU(\text{isochore}) = \delta Q$
- Pour une transformation isobare : $\Delta H_{A \rightarrow B}(\text{isobare}) = Q_{A \rightarrow B}$ et $dH(\text{isobare}) = \delta Q$

- Cette dernière propriété est à la base de la calorimétrie qui est généralement réalisée à pression constante.
- Par abus de langage, on confond parfois dans ces conditions (en chimie par exemple) les termes chaleur et enthalpie.

→ Cas d'une phase condensée

Le modèle des phases condensées incompressibles et indilatables est utile pour étudier de façon simplifiée les liquides et les solides. Dans ces systèmes le produit PV varie très peu et, de ce fait, les fonctions U et H ne dépendent pratiquement que de la température. En conséquence, les capacités thermiques à pression et volume constants sont peu différentes, et on les considérera généralement identiques :

$$C_p = \left(\frac{\partial H(T, P)}{\partial T} \right)_p \approx \frac{dH(T)}{dT}$$

$$C_v = \left(\frac{\partial U(T, V)}{\partial T} \right)_v \approx \frac{dU(T)}{dT} \quad \text{or : } H = U + PV \quad (\text{avec } PV \approx \text{constante}) \text{ donc : } \frac{dH(T)}{dT} \approx \frac{dU(T)}{dT}$$

Résultat

Les capacités thermiques à volume constant et pression constante d'une **phase condensée incompressible et indilatable** sont confondues en une seule grandeur C , la capacité thermique :

$$C_p \approx C_v = C \quad \text{d'où : } c_p = c_v = c = \frac{C}{m} \quad \text{et} \quad C_{p,m} = C_{v,m} = C_m = \frac{C}{n} \quad \text{soit : } C = nC_m = mc$$

- On retiendra que la capacité thermique massique de l'eau liquide à la pression atmosphérique et à température ambiante est : $c_{eau} = 4,18 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

Résultat

Pour une phase condensée, le premier principe se réduit donc en général à :

$$\Delta H_{A \rightarrow B} \approx \Delta U_{A \rightarrow B} = Q_{A \rightarrow B} = C \Delta T_{A \rightarrow B} = mc(T_B - T_A) \quad \text{ou} \quad dH \approx dU = \delta Q = CdT = mcdT$$

II Le cas du gaz parfait

1. Capacités thermiques du gaz parfait

L'enthalpie H et l'enthalpie molaire H_m d'un gaz parfait s'expriment grâce à l'équation d'état ($PV = nRT$) :

$$H = U + PV = U + nRT \quad \text{et} \quad H_m = U_m + RT$$

Or pour un gaz parfait, l'énergie interne ne dépend que de la température, donc l'enthalpie du gaz parfait ne dépend que de la température.

Un gaz qui possède cette propriété obéit à la **seconde loi de Joule** : $H_m = H_m(T)$.

Les expressions des capacités thermiques du gaz parfait sont donc les dérivées des fonctions d'état qui ne dépendent que de T (la définition de C_v a été vue au chapitre 19 p. 349) :

$$C_p(GP) = \left(\frac{\partial H(T, P)}{\partial T} \right)_p = \frac{dH(T)}{dT}$$

$$C_v(GP) = \left(\frac{\partial U(T, V)}{\partial T} \right)_v = \frac{dU(T)}{dT} \quad \text{Or : } H = U + PV \text{ d'où : } \frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + nR \frac{dT}{dT} \text{ soit : } \frac{dH}{dT} - \frac{dU}{dT} = nR$$

Qui permet d'écrire une relation simple entre les capacités thermiques.

Théorème

La **relation de Mayer** relie les capacités thermiques à volume constant et à pression constante du gaz parfait :

$$C_p - C_v = nR \quad \text{et} \quad C_{p,m} - C_{v,m} = R \quad \text{donc} \quad C_p > C_v$$

Il en découle des expressions simples des capacités thermiques du gaz parfait en fonction de γ :

$$\begin{cases} \gamma = \frac{C_p}{C_v} \\ C_p - C_v = nR \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_v = \frac{nR}{\gamma-1} \\ C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma-1} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} C_{v,m} = \frac{R}{\gamma-1} \\ C_{p,m} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} \end{cases}$$

► Cas des gaz parfaits monoatomique et diatomique

Les capacités thermiques à volume constant ont été données au chapitre 19 p. 352. En utilisant la relation de Mayer et la définition du coefficient adiabatique, on obtient aisément le tableau suivant.

GAZ PARFAIT	C_v	C_p	$C_{v,m}$	$C_{p,m}$	$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}}$
GP monoatomique	$\frac{3}{2}nR$	$\frac{5}{2}nR$	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{5}{3} \approx 1,67$
GP diatomique (100 K < $T \leq 1000$ K)	$\frac{5}{2}nR$	$\frac{7}{2}nR$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	$\frac{7}{5} = 1,4$

- Dans les conditions usuelles de température et de pression, l'air peut être assimilé à un gaz parfait diatomique (composé à 99 % de N₂ et O₂). Le coefficient adiabatique de l'air est donc approximativement égal à 1,4.

2. Transformations du gaz parfait

Pour un gaz parfait, les variations de l'énergie interne et de l'enthalpie ne dépendent que des températures initiale (T_i) et finale (T_f) de la transformation et pas de la nature de celle-ci :

$$\begin{aligned} \Delta U_{i \rightarrow f} &= nC_{v,m}(T_f - T_i) = nC_{v,m}\Delta T_{i \rightarrow f} \\ \Delta H_{i \rightarrow f} &= \Delta U_{i \rightarrow f} + nR\Delta T_{i \rightarrow f} = nC_{v,m}(T_f - T_i) + nR(T_f - T_i) \\ \Delta H_{i \rightarrow f} &= nC_{p,m}(T_f - T_i) = nC_{p,m}\Delta T_{i \rightarrow f} \end{aligned}$$

En utilisant les résultats des calculs du travail des différentes transformations habituelles du chapitre 19, le premier principe et ses conséquences (voir I.4.), ainsi que les expressions ci-dessus, on peut dresser le tableau ci-dessous, où l'on note pour alléger :

$$\Delta T = T_f - T_i ; \Delta U = \Delta U_{i \rightarrow f} ; \Delta H = \Delta H_{i \rightarrow f} ; W = W_{i \rightarrow f} ; Q = Q_{i \rightarrow f}$$

TRANSFORMATION	ΔU	ΔH	Travail W	Chaleur Q
Isochore	$nC_{v,m}\Delta T$	$nC_{p,m}\Delta T$	$W = 0$	$Q = \Delta U = nC_{v,m}\Delta T$
Isobare	$nC_{v,m}\Delta T$	$nC_{p,m}\Delta T$	$W = -P(V_f - V_i)$	$Q = \Delta H = nC_{p,m}\Delta T$
Isotherme	0	0	$W = nRT \ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right) = nRT \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)$	$Q = -W$
Adiabatique	$nC_{v,m}\Delta T$	$nC_{p,m}\Delta T$	$W = \Delta U = nC_{v,m}\Delta T$	$Q = 0$

Où l'on voit à nouveau clairement que les variations des fonctions d'état (U, H) sont indépendantes de la transformation, mais pas les grandeurs d'échange (W, Q).

III Les détentes de gaz

Définition

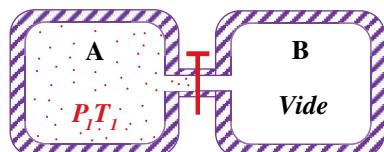
Une **détente** est une transformation au cours de laquelle le volume molaire d'un gaz quelconque augmente et donc sa pression diminue.

Historiquement les détentes dites de Joule étudiées ci-dessous, ont été élaborées pour établir des propriétés des gaz et mesurer certains paramètres, comme la valeur des coefficients a et b de l'équation d'état de Van der Waals du gaz réel (voir p. 353) qui peuvent se déterminer à l'aide de la variation de température mesurée respectivement dans la détente de Joule-Gay-Lussac et dans la détente de Joule-Kelvin étudiées ci-après.

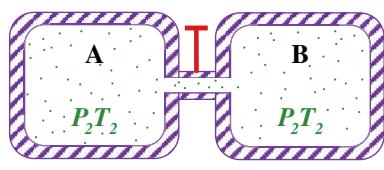
Actuellement des détendeurs sont utilisés pour obtenir une baisse de pression dans les bouteilles de plongée, les bouteilles de gaz de combustion, les systèmes de réfrigération.

1. La détente de Joule-Gay-Lussac

L'expérience de Joule-Gay-Lussac a été réalisée au XIX^e siècle par Joule, Gay-Lussac et Hirn. Elle consiste à séparer une enceinte calorifugée et indéformable en 2 compartiments distincts par un robinet. Le compartiment A est rempli d'un gaz quelconque homogène à la pression P_i et à la température T_i , tandis que le compartiment B est initialement vide³ (voir figures ci-contre). On ouvre le robinet pour permettre la diffusion spontanée⁴ du gaz dans les deux compartiments. Durant toute la transformation le système choisi, c'est-à-dire le gaz, n'est pas homogène car la pression et la température ne sont pas uniformes, mais cela n'interdit pas d'exprimer le premier principe entre l'état final (f) et l'état initial (i) qui sont deux états d'équilibre. Dans ces deux états, on suppose que le gaz est macroscopiquement au repos dans une enceinte restée immobile, son énergie mécanique initiale est donc égale à son énergie mécanique finale.



Σ état initial



Σ état final

Travail : Les parois sont rigides, donc immobiles, le gaz n'échange aucun travail avec l'extérieur :

$$W_{i \rightarrow f} = 0$$

Chaleur : Les parois sont adiabatiques, le gaz n'échange aucune chaleur avec l'extérieur :

$$Q_{i \rightarrow f} = 0$$

Premier principe :

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = W_{i \rightarrow f} + Q_{i \rightarrow f} = 0$$

Résultat

La détente de Joule-Gay-Lussac est isoénergétique, la variation d'énergie interne du gaz lors de la transformation est nulle : $\Delta U_{\text{Joule-Gay-Lussac}} = 0$

3. Voir le document sur le vide p. 358.

4. La spontanéité du transfert des particules sera étudiée dans le chapitre 22.

→ Évolution de la température dans une détente de Joule Gay-Lussac

Propriétés

- Lors d'une détente de Joule-Gay-Lussac, la température d'un gaz diminue :

$$\Delta T_{\text{Joule-Gay-Lussac}} \leq 0 \quad \text{soit} \quad T_f \leq T_i$$

- Un gaz suit la **première loi de Joule**, si son énergie interne ne dépend que de la température. Dans ce cas sa température ne varie pas lors d'une détente de Joule Gay Lussac.

$$\Delta T_{\text{Joule-Gay-Lussac (gaz / 1^{re} loi de Joule)}} = 0 \quad \text{soit} \quad T_f = T_i$$

La baisse de température n'est pas surprenante, puisqu'à l'état d'équilibre final, le gaz réel occupe un volume plus important qu'initialement, ce qui implique que la distance inter-particulaire moyenne augmente, on observe donc une augmentation de la variation de l'énergie potentielle microscopique. Comme l'énergie interne, $U = e_{c,micro} + e_{p,micro}$, ne varie pas, alors l'énergie cinétique microscopique diminue. L'agitation thermique est donc moindre et la température diminue.

- Il existe quelques très rares exceptions à la propriété ci-dessus, par exemple l'hélium, pris à une température initiale supérieure à 200 K, se réchauffe lors d'une détente de Joule-Gay-Lussac.
- La détente de Joule-Gay-Lussac permet donc de tester si un gaz suit ou non la première loi de Joule, à travers la variation éventuelle de sa température lors de la détente.

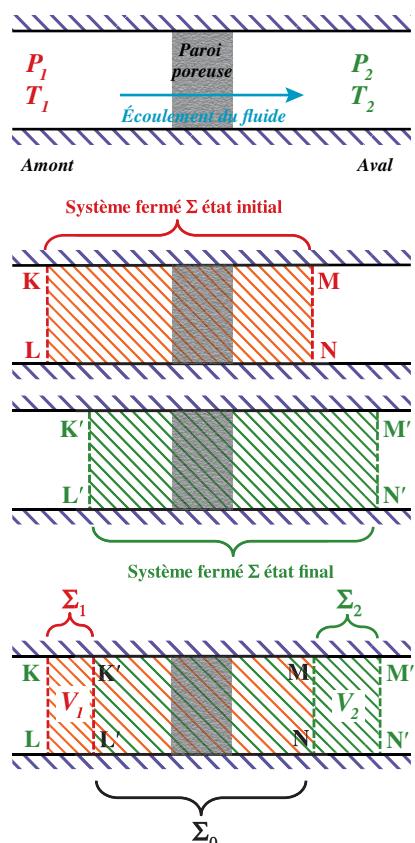
2. La détente de Joule-Kelvin ou Joule-Thomson⁵

L'expérience est réalisée en 1852 par lord Kelvin : un fluide circule dans une canalisation horizontale, rigide, aux parois adiabatiques. Le champ de pesanteur est vertical et uniforme, l'énergie potentielle du fluide ne varie donc pas. On s'intéresse à la façon dont l'état du fluide est modifié entre une position 1 (dite en amont) et une position 2 (dite en aval) entre lesquelles une paroi poreuse permet la diffusion lente du fluide, suffisamment lente pour que l'énergie cinétique du fluide et plus particulièrement sa variation soient négligeables. La pression et la température du fluide peuvent être définies localement sur un volume de fluide en amont et en aval de l'écoulement, suffisamment loin de la zone de diffusion (paroi poreuse) pour être considérées uniformes. L'écoulement est stationnaire (l'état du fluide en une position donnée ne varie pas dans le temps). L'écoulement est unidimensionnel (suivant une direction notée x)⁶.

Il s'agit *a priori* d'un système ouvert mais, comme toujours dans ce cas, on se ramène à un système fermé qui se déplace, comme indiqué sur le schéma. Le système Σ évolue donc entre un état initial (i) et un état final (f) :

$$\Sigma(\text{état initial}) = \text{fluide compris dans (KLMN)} \\ = \Sigma_{\text{état initial}} = \Sigma_1 + \Sigma_0$$

$$\Sigma(\text{état final}) = \text{fluide compris dans (K'L'M'N')} \\ = \Sigma_{\text{état final}} = \Sigma_2 + \Sigma_0$$



5. William Thomson (1834-1907) a été anobli en Lord Kelvin. On utilise donc indifféremment les deux patronymes.

6. Dans le chapitre sur les machines thermiques, on étudiera le cas où l'écoulement n'est pas horizontal et de vitesse non négligeable (voir p. 425).

On applique le premier principe à ce système (la variation d'énergie mécanique est nulle dans les hypothèses précisées ci-dessus) :

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = U(\Sigma_{\text{état final}}) - U(\Sigma_{\text{état initial}}) = [U(\Sigma_2) + U(\Sigma_0)] - [U(\Sigma_1) + U(\Sigma_0)] = U(\Sigma_2) - U(\Sigma_1)$$

Tout se passe du point de vue de la variation d'énergie, comme si le système Σ_1 (=KLK'L') évoluait en Σ_2 (=MNM'N')⁷. La partie centrale du système, dont l'état n'est pas aisément définir, car inhomogène, n'intervient pas dans l'écriture (du fait du régime stationnaire).

Travail : Les parois sont rigides, donc immobiles, par contre le fluide en amont de KL et le fluide en aval de MN'N' font partie de l'extérieur du système défini, et donc exercent des forces de pression sur le système. Tout se passe comme si une paroi virtuelle progressait de KL à K'L' en « poussant » le gaz à la pression P_1 (constante), de sorte que son volume varie de $V_1 = V(KLK'L')$ à 0 et de même en aval, tout se passe comme si une paroi virtuelle progressait de MN à MN' en « tirant » le gaz à une pression P_2 (constante) de sorte que son volume évolue de 0 à $V_2 = V(MNM'N')$. Le travail (transformations monobares) échangé entre le gaz et l'extérieur est donc :

$$W_{i \rightarrow f} = W_1 + W_2 = -P_1(0 - V_1) - P_2(V_2 - 0) = P_1V_1 - P_2V_2$$

Chaleur : les parois sont calorifugées, le gaz n'échange aucune chaleur avec l'extérieur : $Q_{i \rightarrow f} = 0$

Premier principe : $\Delta U_{i \rightarrow f}(\Sigma) = W_{i \rightarrow f} + Q_{i \rightarrow f} = W_1 + W_2 = P_1V_1 - P_2V_2$

d'où :

$$(U_2 + U_0) - (U_1 + U_0) = P_1V_1 - P_2V_2$$

Soit :

$$(U_2 + P_2V_2) - (U_1 + P_1V_1) = 0 \quad \text{et} \quad H_2 - H_1 = H(\Sigma_2) - H(\Sigma_1) = 0$$

Si l'on considère que le système Σ_1 a évolué en Σ_2 , alors la variation d'enthalpie du système est nulle.

On peut également tirer la même conclusion sur le système fermé Σ car, bien que l'expression de l'enthalpie du système Σ_0 ne soit pas aisée à exprimer, on peut néanmoins l'introduire dans l'équation sans la développer :

$$H_2 + H_0 - H_1 - H_0 = (H(\Sigma_2) + H(\Sigma_0)) - (H(\Sigma_1) + H(\Sigma_0)) = H(\Sigma_f) - H(\Sigma_i) = 0$$

Résultat

La détente de Joule-Kelvin est isenthalpique, la variation d'enthalpie du gaz lors de la transformation est nulle : $\Delta H_{\text{Joule-Kelvin}} = 0$

→ Evolution de la température dans une détente de Joule-Kelvin

La température en amont est celle T_1 du système Σ_1 , la température en aval est celle T_2 du système Σ_2 .

Propriété

- Lors d'une détente de Joule-Kelvin, la température d'un gaz varie :

$$\Delta T_{\text{Joule-Kelvin}} \leq 0 \quad \text{soit : } T_2 \leq T_1 \quad \text{ou} \quad \Delta T_{\text{Joule-Kelvin}} \geq 0 \quad \text{soit : } T_2 \geq T_1$$

- Un gaz suit la **deuxième loi de Joule** si son enthalpie ne dépend que de la température. Dans ce cas sa température ne varie pas lors d'une détente de Joule-Kelvin :

$$\Delta T_{\text{Joule-Kelvin}}(\text{gaz / 2^e loi de Joule}) = 0 \quad \text{soit : } T_2 = T_1$$

- Pour chaque gaz il existe une température dite d'inversion T_{inv} , telle que le gaz s'échauffe s'il est pris à une température initiale supérieure à T_{inv} , et se refroidit s'il est pris à une température initiale inférieure à T_{inv} . Assez élevée pour la plupart des gaz (580 K environ pour l'oxygène et l'azote), elle est basse pour

7. On comprend aisément que les deux systèmes contiennent la même quantité de matière (puisque Σ_0 est inchangé) et, même si Σ_1 ne se transforme pas dans la réalité directement en Σ_2 , on peut imaginer une telle transformation, pour déterminer la variation d'énergie, puisqu'elle repose sur les mêmes états initial et final que l'évolution réelle.

l'hydrogène (205 K) et l'hélium (45 K). C'est pourquoi on dit généralement abusivement que les gaz, hormis l'hydrogène et l'hélium, se refroidissent lors d'une détente de Joule-Kelvin, car c'est effectivement ce qui se produit à la température ordinaire.

3. Le cas du gaz parfait

La définition initiale du gaz parfait s'appuie sur sa nature : particules ponctuelles et sans interactions entre elles. Une autre définition, issue de la précédente et du comportement microscopique du gaz, est celle donnée par son équation d'état ($PV = nRT$). La première est descriptive, la seconde permet de prévoir le comportement du gaz parfait. Il est intéressant d'en formuler une troisième, qui permettra de déterminer si un gaz est parfait de façon expérimentale.

Définition

Un **gaz parfait** est un gaz qui suit les **deux lois de Joule** et réciproquement :

$$U(\text{GP}) = U(T) \quad \text{et} \quad H(\text{GP}) = H(T)$$

- Ainsi, on peut expérimentalement déterminer si un gaz est parfait, en lui faisant subir les détentes de Joule. Si sa température est constante lors de ces deux détentes, alors le gaz est parfait.
- En réalité le gaz parfait reste un modèle idéal, les détentes de Joule permettront de déterminer expérimentalement dans quelle mesure et dans quelles conditions, un gaz peut être assimilé à un gaz parfait. Plus la variation de température lors des détentes est faible et plus le gaz est proche d'un modèle de gaz parfait dans les conditions de l'expérience.

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Énergie d'un système thermodynamique, premier principe et conservation de l'énergie.
- Enthalpie : définition, unité, intérêt.
- Capacité thermique à pression constante et capacité thermique à volume constant : définitions. Cas du gaz parfait : relation de Mayer, expression des capacités thermiques. Cas de la phase condensée.
- Variation d'énergie interne, variation d'enthalpie, travail, chaleur : cas de transformations isochore, isobare, isotherme, adiabatique, en particulier pour un gaz parfait.
- Détente de Joule-Gay-Lussac : principe, propriétés.
- Détente de Joule-Kelvin : principe, propriétés.
- Les détentes de Joule dans le cas du gaz parfait : propriétés, utilité.

Erreurs à éviter

- Les relations de Mayer et les expressions qui en découlent concernant les capacités thermiques ne sont valables que pour les gaz parfaits, on ne les utilisera pas pour un liquide par exemple.

Quelques « trucs » utiles

- Dans un exercice ou un sujet de thermodynamique, on a souvent à calculer des variations d'énergie (ΔU , ΔH) ou des échanges énergétiques (Q , W) pour plusieurs systèmes et sur différentes transformations. On évitera donc d'écrire des formules muettes générales, mais on indicera systématiquement les grandeurs et on écrira explicitement les variations des paramètres d'état :

Exemple : ΔU_{AB} (ou $\Delta U_{A \rightarrow B}$) = $m_0 c_0 (T_B - T_A)$ au lieu de $\Delta U = mc\Delta T$

EXERCICES

1 Cylindre d'un moteur peu performant (ENSTIM 2008) ★★

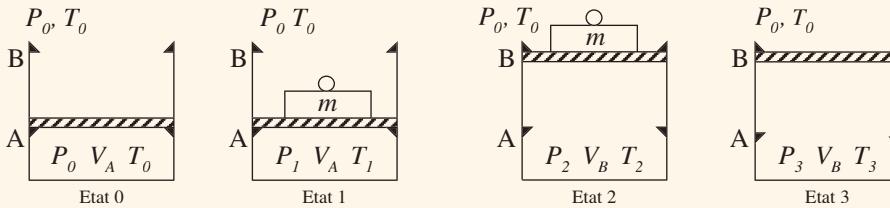
→ corrigé p. 385

Données numériques : $V_B = 1,0 \text{ L}$ $V_A = 330 \text{ mL}$ $T_0 = 300 \text{ K}$ $P_0 = 1,0 \text{ bar}$
 $m = 10 \text{ kg}$ $S = 100 \text{ cm}^2$ $g = 10 \text{ N.kg}^{-1}$ $\gamma = 1,4$

La constante des gaz parfaits est: $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Les différentes transformations seront supposées réversibles.

On imagine un cylindre aux parois diathermanes (perméables à la chaleur), fermé par un piston. Le piston, de masse négligeable, peut glisser sans frottement entre 2 cales A et B, sa section est S . Dans l'état initial, le piston est en A, le cylindre renferme un volume V_A d'air supposé gaz parfait, de coefficient γ , à la température de l'extérieur T_0 et à la pression extérieure P_0 .



On place une masse m sur le piston et on chauffe très doucement le gaz par un moyen approprié, non représenté sur le schéma, jusqu'à ce que le piston décolle juste de la cale A (gaz dans l'état 1 : P_1 , V_A , T_1). Puis, on maintient le chauffage jusqu'à ce que le piston arrive juste en B (gaz dans l'état 2 : P_2 , V_B , T_2), le chauffage est alors arrêté. On ôte m et on laisse refroidir l'ensemble jusqu'à ce que le piston décolle juste de B (gaz dans l'état 3 : P_3 , V_B , T_3). On laisse toujours refroidir jusqu'à la température T_0 , alors le piston revient en A (gaz dans l'état 0), le cycle est terminé.

- 1 Exprimer les capacités thermiques à pression et à volume constants C_p et C_v du gaz en fonction de P_0 , V_A , T_0 , γ . Les calculer.
- 2 Quelle est la nature de la transformation de 0 à 1 subie par le gaz ? Exprimer la pression P_1 et la température T_1 en fonction de P_0 , T_0 , m , g , S . Faire l'application numérique. Exprimer, puis calculer la quantité de chaleur (transfert thermique) Q_0^1 reçue par le gaz au cours de cette transformation.
- 3 Quelle est la nature de la transformation 1 à 2 subie par le gaz ? Exprimer, puis calculer la température T_2 et la quantité de chaleur (transfert thermique) Q_1^2 reçue par le gaz au cours de cette transformation.
- 4 Quelles sont les natures des transformations 2 à 3 et 3 à 0 subies par le gaz ? Exprimer et calculer les chaleurs échangées sur ces transformations.
- 5 Exprimer, puis calculer le travail W échangé par le gaz avec l'extérieur, au cours du cycle.
- 6 Tracer l'allure du diagramme de Clapeyron du cycle. Retrouver, d'après le diagramme, le travail W calculé précédemment et vérifier la pertinence littérale et numérique de W obtenu par cette méthode avec W obtenu précédemment.

2 Calorimétrie ★★

→ corrigé p. 386

On dispose d'un calorimètre, qui contient initialement une masse $m = 250 \text{ g}$ d'eau liquide à la température de 20°C . On y ajoute $m' = 500 \text{ g}$ d'eau liquide à la température de 50°C .

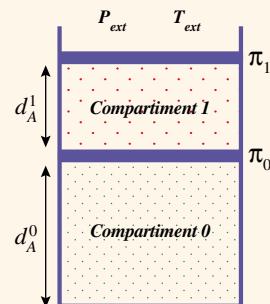
- 1 Quelle est la température finale attendue, si l'on néglige la capacité thermique du calorimètre ?
- 2 En fait on mesure une température finale $T_f' = 35^\circ\text{C}$. En déduire la capacité thermique du calorimètre.
- 3 On reprend le calorimètre dans le même état initial que précédemment et on jette dans l'eau un bloc de plomb de masse $M = 500 \text{ g}$, à la température de 80°C . Déterminer la température finale T_f'' attendue. En fait on obtient une température légèrement inférieure, proposer une explication.

Données : $c_{eau} = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$ et $c_{plomb} = 0,129 \text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$

3 Transformations de gaz parfaits (d'après CCP 2008) ★★★

→ corrigé p. 387

Le dispositif expérimental est un cylindre indéformable de parois diathermiques, de section $S = 10^{-2} \text{ m}^2$, dans lequel 2 pistons de masses négligeables, π_1 et π_0 peuvent se déplacer librement et sans frottement. π_0 délimite un compartiment 0 dans lequel se trouve du dioxygène. Le compartiment 1 situé entre les deux pistons contient du diazote. Dans l'état initial, noté état A, les systèmes sont à l'équilibre thermique et mécanique. La pression extérieure est $P_{ext} = 10^5 \text{ Pa}$, la température extérieure est $T_{ext} = 300 \text{ K}$. Les hauteurs des compartiments sont respectivement $d_A^0 = 0,2 \text{ m}$ et $d_A^1 = 0,15 \text{ m}$. Les gaz sont considérés parfaits. On note les grandeurs en indiquant par l'état et à l'aide d'un exposant correspondant au gaz : par exemple T_A^0 est la température du gaz dans le compartiment 0 dans l'état A. On bloque π_0 , π_1 est libre de se déplacer et le système est entièrement plongé dans un thermostat à la température $T_s = 600 \text{ K}$, la pression extérieure n'étant pas modifiée. On note B le nouvel état d'équilibre atteint par les systèmes.



Données :

- constantes massiques⁸ dioxygène et diazote : $r_o = 260 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et $r_i = 297 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$
- coefficients adiabatiques : $\gamma_o = \gamma_i = \gamma = 1,4$

- ① Déterminer complètement les pressions et températures de l'état A, en déduire les masses de gaz dans les compartiments.
- ② Après avoir caractérisé les transformations subies par les gaz, déterminer complètement l'état B.
- ③ Calculer les variations d'énergie interne et d'enthalpie des systèmes, ainsi que le travail et la chaleur échangées par chaque gaz. (*On pourra calculer ces grandeurs dans l'ordre qui paraîtra pertinent*).
- ④ L'ensemble étant dans l'état d'équilibre B, on bloque π_1 , puis on libère π_0 . Déterminer complètement le nouvel état d'équilibre noté C, ainsi que la variation d'énergie interne et d'enthalpie de chaque gaz.
- ⑤ On note W_{BC}^0 le travail reçu par le dioxygène. À l'aide de cette grandeur, exprimer toutes les grandeurs énergétiques échangées par les gaz. Représenter le diagramme de Clapeyron des transformations, en y plaçant les isothermes pertinentes.

4 Détente de Joule-Gay-Lussac ★

→ corrigé p. 392

Le comportement des gaz réels est assez bien décrit par l'équation d'état de Van der Waals et de l'énergie interne associée soit : $\left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right)(V - nb) = nRT \quad \text{et} \quad U_{vdW} = U_{GP} - \frac{n^2 a}{V} + U_0$

- ① On fait subir une détente de Joule-Gay-Lussac aux gaz du tableau ci-dessous. En supposant qu'ils vérifient l'équation de Van der Waals, déterminer pour chacun de ces gaz la variation de température attendue si le volume des deux enceintes est le même et vaut 10 L, et selon que l'on utilise 10 moles ou 0,1 mole de gaz.
- ② Commenter ces résultats en comparant les différents cas, selon que l'on a initialement fixé la même pression dans l'enceinte pour toutes les mesures, ou la même température pour toutes les mesures.

Gaz	Hélium	Néon	Argon	Dihydrogène	Diazote	Dioxygène
$a (10^{-3} \text{ J.m}^3.\text{mol}^{-2})$	3,45	21,3	136,3	24,7	140,8	137,8

8. La constante massique r est telle que : $nR=mr$ soit $r = R/M$, elle dépend donc du gaz, contrairement à R .

1 Cylindre d'un moteur peu performant

→ énoncé p. 383

- 1 D'après la relation de Mayer et la définition de γ , les capacités thermiques s'expriment comme :

$$\begin{cases} \gamma = \frac{C_p}{C_v} \\ C_p - C_v = nR \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_v = \frac{nR}{\gamma - 1} \\ C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \end{cases} \quad \text{en utilisant la loi des gaz parfaits :}$$

$$\begin{cases} C_v = \frac{P_0 V_A}{T_0 (\gamma - 1)} = 0,275 \text{ J.K}^{-1} \\ C_p = \frac{\gamma P_0 V_A}{T_0 (\gamma - 1)} = 0,385 \text{ J.K}^{-1} \end{cases}$$

- 2 De 0 à 1, le volume reste constant, la température augmente ainsi que la pression, jusqu'à permettre au gaz de « soulever » le piston, c'est-à-dire jusqu'à ce que la pression interne soit égale à la pression atmosphérique additionnée de la pression due à la masse m :

$$P_1 = P_0 + \frac{mg}{S} = P_0 \left(1 + \frac{mg}{SP_0} \right) = 1,1 \text{ bar} \quad (\text{avec } S = 10^{-2} \text{ m}^2)$$

La transformation du gaz parfait est isochore donc :

$$\frac{T_1}{P_1} = \frac{T_0}{P_0} \quad \text{soit :} \quad T_1 = T_0 \frac{P_1}{P_0} = T_0 \left(1 + \frac{mg}{SP_0} \right) = 330 \text{ K}$$

La transformation est isochore, donc d'après les conséquences du premier principe et les propriétés du gaz parfait, on a :

$$Q_0^1 = \Delta U_0^1 = C_v (T_1 - T_0) = 8,25 \text{ J}$$

Bien comprendre

Dans les calculs du 1, il est essentiel d'exprimer les grandeurs en unités internationales, en particulier les volumes en m^3 et bien évidemment les températures en Kelvin et les pressions en Pascal : $V_A = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, $T_0 = 300 \text{ K}$, $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$... En revanche, il est plus intéressant de donner les résultats dans les unités de l'énoncé, et lorsque des proportionnalités entre deux grandeurs du même type sont engagées, on peut garder ces unités, par exemple dans la question 2. On exprimera avantageusement comme suit et on évitera de se ruer sur la calculatrice et de la surcharger de puissances de 10, que l'on calculera rapidement mentalement avec profit. Notons en particulier, que dans le premier calcul, la même grandeur est utilisée dans deux unités différentes :

$$P_1 = P_0 \left(1 + \frac{mg}{SP_0} \right) = 1,0 \times \left(1 + \frac{10 \times 10}{10^{-2} \times 10^5} \right) = 1,0 \times (1 + 0,1) = 1,1 \text{ bar}$$

et $T_1 = T_0 \left(1 + \frac{mg}{SP_0} \right) = 300 \times \left(1 + \frac{10 \times 10}{10^{-2} \times 10^5} \right) = 300 \times (1 + 0,1) = 330 \text{ K}$

Dans les questions suivantes, les grandeurs doivent être dans une unité quelconque du moment qu'elles sont identiques dans un calcul de rapport : volumes en m^3 , L ou mL (le plus pratique), pression en Pa ou bar (le plus pratique). Les températures sont impérativement en K, les rapports de température en °C n'ont pas de sens.

- 3 De 1 à 2 la pression reste constante, identique à P_1 , puisque le gaz se dilate en soulevant le piston lentement (transformations réversibles). Ce dernier est alors constamment en équilibre mécanique et thermique. La transformation est donc isobare, le volume évoluant de V_A à V_B , le gaz étant parfait :

$$\frac{T_2}{V_B} = \frac{T_1}{V_A} \quad \text{soit :} \quad T_2 = T_1 \frac{V_B}{V_A} = 1000 \text{ K}$$

La transformation est isobare. D'après les conséquences du premier principe et les propriétés du gaz parfait, on a :

$$Q_1^2 = \Delta H_1^2 = C_p (T_2 - T_1) = 258 \text{ J}$$

- 4 De 2 à 3 la transformation est isochore, et de 3 à 0 elle est isobare (même type de transformations que précédemment mais avec un refroidissement), on peut donc utiliser les mêmes raisonnements que ci-dessus, le calcul préalable de la température T_3 est donc nécessaire :

$$\frac{T_3}{P_3} = \frac{T_2}{P_2} \quad \text{avec} \quad P_3 = P_0 \quad \text{et} \quad P_2 = P_1 \quad \text{soit :} \quad T_3 = T_2 \frac{P_0}{P_1} = 909 \text{ K}$$

Et : $Q_2^3 = \Delta U_2^3 = C_V(T_3 - T_2) = -25 \text{ J}$ $Q_3^0 = \Delta H_3^0 = C_p(T_0 - T_3) = -234 \text{ J}$

- 5 On applique le premier principe sur le cycle, en remarquant que U est une fonction d'état, donc sa variation sur un cycle est nulle, puisque l'état initial et l'état final sont identiques. D'où :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = \sum Q_i^j + \sum W_i^j = Q_0^1 + Q_1^2 + Q_2^3 + Q_3^0 + W_{\text{cycle}}$$

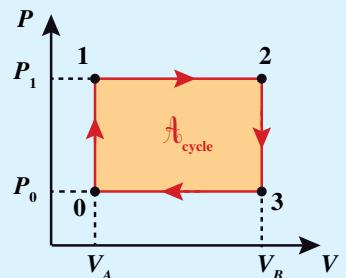
Soit : $W_{\text{cycle}} = -(Q_0^1 + Q_1^2 + Q_2^3 + Q_3^0) = -6,7 \text{ J}$

Bien comprendre

Les arrondis des calculs et les choix des chiffres significatifs peuvent influer sur le résultat ci-dessus (où la somme a été calculée avec les résultats non arrondis, elle donne 7,3 J sinon). Comme dans beaucoup d'énoncés, les données ne sont pas toujours proposées avec beaucoup de cohérence (les volumes par exemple) dans leur précision et cela peut sembler influer de façon importante sur le résultat, surtout lorsqu'il est petit comme ici. Il faudra alors présenter les résultats avec un peu d'intelligence pour les rendre acceptables et susceptibles de se prêter à une analyse pertinente. Certaines données ont d'ailleurs été un peu modifiées par rapport au texte original (pressions).

- 6 Le diagramme de Clapeyron permet d'écrire que le travail est égal à l'opposé de l'aire du cycle (rectangle), puisqu'il est parcouru dans le sens horaire (voir p. 366), soit :

$$W_{\text{cycle}} = -(P_1 - P_0)(V_B - V_A) = 0,110^5 \times 670.10^{-6} = -6,7 \text{ J}$$



Qui est cohérent numériquement avec ce qui précède. On peut vérifier aussi la pertinence de l'expression littérale, en détaillant les expressions des chaleurs :

$$W_{\text{cycle}} = -[C_V(T_1 - T_0 + T_3 - T_2) + C_p(T_2 - T_1 + T_0 - T_3)] = (C_p - C_V)[T_1 - T_0 + T_3 - T_2] = nR[T_1 - T_0 + T_3 - T_2]$$

En utilisant la loi des gaz parfaits :

$$W_{\text{cycle}} = P_1 V_1 - P_0 V_0 + P_3 V_3 - P_2 V_2 \quad \text{or :} \quad P_2 = P_1; P_3 = P_0; V_0 = V_1 = V_A; V_2 = V_3 = V_B$$

D'où : $W_{\text{cycle}} = P_1 V_A - P_0 V_A + P_0 V_B - P_1 V_B = (P_1 - P_0)(V_A - V_B)$ finalement : $W_{\text{cycle}} = -(P_1 - P_0)(V_B - V_A)$

Ce qui est identique au résultat obtenu par l'aire du cycle. Le système fournit du travail ($W_{\text{cycle}} < 0$), on verra au chapitre 23 qu'il s'agit donc d'un moteur.

2 Calorimétrie

→ énoncé p. 383

Toutes les expériences sont à pression atmosphérique constante, les quantités de chaleur échangées sont donc égales aux variations d'enthalpie des systèmes (conséquences du premier principe). Le calorimètre étant adiabatique, la chaleur totale échangée par l'ensemble des systèmes mis en contact à l'intérieur du calorimètre est nulle. On applique ce raisonnement à chaque question. Par ailleurs les systèmes sont soit des liquides (eau), soit des solides (plomb, calorimètre), donc uniquement des phases condensées, pour lesquelles on ne définit qu'un seul coefficient calorimétrique C (avec $C = mc$ si le système est homogène).

- 1 Le mélange des deux masses m et m' d'eau initialement aux températures respectivement T et T' conduit à un état d'équilibre à la température T_f telles que :

$$\Delta H_{total} = Q = 0 = \Delta H + \Delta H' = mc_{eau}(T_f - T) + m'c_{eau}(T_f - T')$$

D'où : $T_f = \frac{mT + m'T'}{m + m'} = 40 \text{ } ^\circ\text{C}$

Bien comprendre

- En calorimétrie on ne s'intéresse la plupart du temps qu'à des différences de températures, ce qui permet (exceptionnellement en thermodynamique !) de travailler avec des valeurs en $^\circ\text{C}$. On pourra vérifier que le calcul avec les valeurs en Kelvin fournit évidemment le même résultat. Dans la formule précédente, on peut également garder les masses en grammes puisqu'il s'agit d'un rapport.
- On évitera par ailleurs (ici et dans tous les exercices) les formules générales type $\Delta H = C\Delta T$ et on écrira systématiquement la différence des températures pertinente selon le corps, ce qui est non seulement plus rigoureux mais également beaucoup moins source d'erreurs. Des indices explicites facilitent aussi le calcul et sa compréhension.

- 2 On reprend le même raisonnement mais en tenant compte du calorimètre :

$$\Delta H_{total} = Q = 0 = \Delta H + \Delta H' + \Delta H_{cal} = mc_{eau}(T_f' - T) + m'c_{eau}(T_f' - T') + C_{cal}(T_f' - T)$$

D'où : $C_{cal} = -\frac{m(T_f' - T) + m'(T_f' - T')}{(T_f' - T)} c_{eau} = 1,045 \text{ kJ.K}^{-1}$

N. B. : *Le calorimètre n'est pas un objet homogène, la capacité thermique massique ici n'aurait pas de sens.*

- 3 Le raisonnement est à nouveau le même en tenant compte de l'eau, du plomb et du calorimètre :

$$\Delta H_{total} = Q = 0 = \Delta H + \Delta H_{plomb} + \Delta H_{cal} = mc_{eau}(T_f'' - T) + Mc_{plomb}(T_f'' - T_{plomb}) + C_{cal}(T_f'' - T)$$

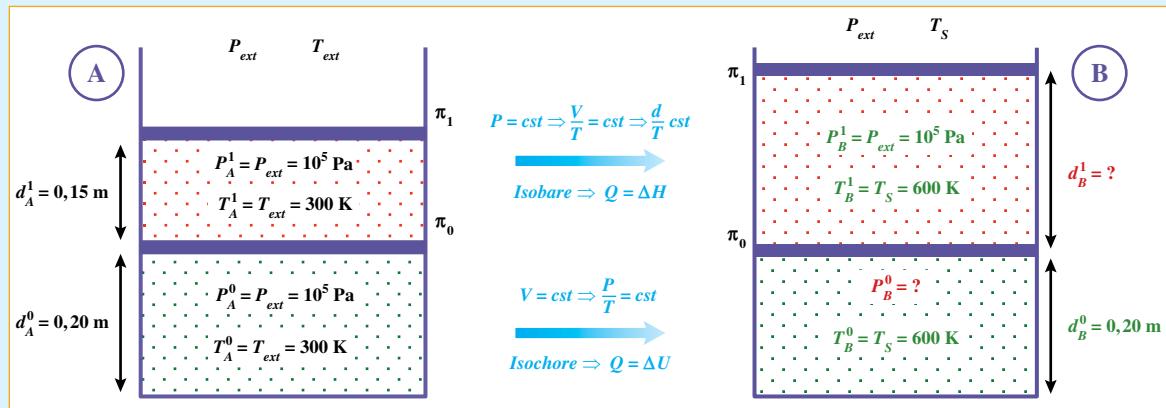
$$T_f'' = \frac{mc_{eau}T + Mc_{plomb}T_{plomb} + C_{cal}T}{mc_{eau} + Mc_{plumb} + C_{cal}} = 21,8 \text{ } ^\circ\text{C}$$

On notera que l'élévation de température est beaucoup plus faible qu'avec l'eau, en raison de la capacité thermique du plomb nettement inférieure à celle de l'eau, ce qui signifie qu'il faut beaucoup plus d'énergie pour chauffer l'eau d'un degré que pour chauffer (ou ici refroidir) une masse identique de plomb de $1 \text{ } ^\circ\text{C}$. Si l'on obtient une valeur inférieure dans la mesure, c'est que le calorimètre n'est pas idéal et qu'une partie de la chaleur est dissipée à l'extérieur malgré tout.

3 Transformations de gaz parfaits

→ énoncé p. 384

On propose ici une méthode de résolution qui permet de clairement poser le problème, donc de guider la solution, voire de présenter sa solution. L'un des avantages de cette façon de procéder est d'avoir toujours de façon claire et disponible toutes les données de l'énoncé et toutes celles qui sont calculées en cours de problème. Dans un long problème de thermodynamique comme celui dont est tiré ce sujet, cela permet d'être rapide, efficace et de limiter les erreurs. On peut utiliser cette méthode dans tous les exercices de thermodynamique et dans tous les problèmes (en particulier ceux traitant des machines thermiques, en faisant apparaître autant de rectangles contenant les grandeurs que d'état successifs du fluide), même si dans un souci de concision et de gain de place, cela n'a pas été fait dans cet ouvrage. Le diagramme de Clapeyron, même si l'il n'est pas demandé, est aussi un moyen de schématiser et de visualiser le problème.



Dans le schéma ci-dessus, on a porté :

- en noir les données de l'énoncé ;
- en vert les données des états que l'on peut immédiatement trouver à la lecture de l'énoncé ;
- en bleu les propriétés des transformations que l'on pourra exploiter ensuite dans la résolution ;
- en rouge les grandeurs inconnues qui nécessiteront un calcul.

L'idéal est de compléter le schéma au fur et à mesure de la résolution et de le garder sous les yeux tout au long du problème (ici on le reproduit au fur et à mesure du corrigé pour montrer la méthode) en utilisant des couleurs différentes pour les données de l'énoncé et pour les grandeurs calculées, de façon à utiliser préférentiellement les premières qui sont plus fiables.

- 1 L'ensemble du système est en équilibre thermique avec l'extérieur d'où : $T_A^0 = T_A^1 = T_{ext} = 300 \text{ K}$

Les pistons sont libres de se déplacer, l'équilibre mécanique étant atteint et leur masse négligeable, la pression est donc la même de part et d'autre de π_0 et de π_1 d'où : $P_A^0 = P_A^1 = P_{ext} = 10^5 \text{ Pa}$

Les gaz sont parfaits, d'où :

$$\begin{aligned} P_A^0 V_A^0 &= n_0 R T_A^0 & \text{avec : } V_A^0 &= S d_A^0 & \text{et } n_0 R &= m_0 r_0 \\ P_A^1 V_A^1 &= n_1 R T_A^1 & \text{avec : } V_A^1 &= S d_A^1 & \text{et } n_1 R &= m_1 r_1 \end{aligned}$$

Soit : $m_0 = \frac{P_A^0 d_A^0 S}{r_0 T_A^0} = 2,56 \text{ g}$ et $m_1 = \frac{P_A^1 d_A^1 S}{r_1 T_A^1} = 1,68 \text{ g}$

- 2 À l'équilibre dans l'état B, les gaz sont en équilibre thermique avec l'extérieur en raison des parois diathermiques, leurs températures sont donc égales à celle du thermostat : $T_B^0 = T_B^1 = T_S = 600 \text{ K}$

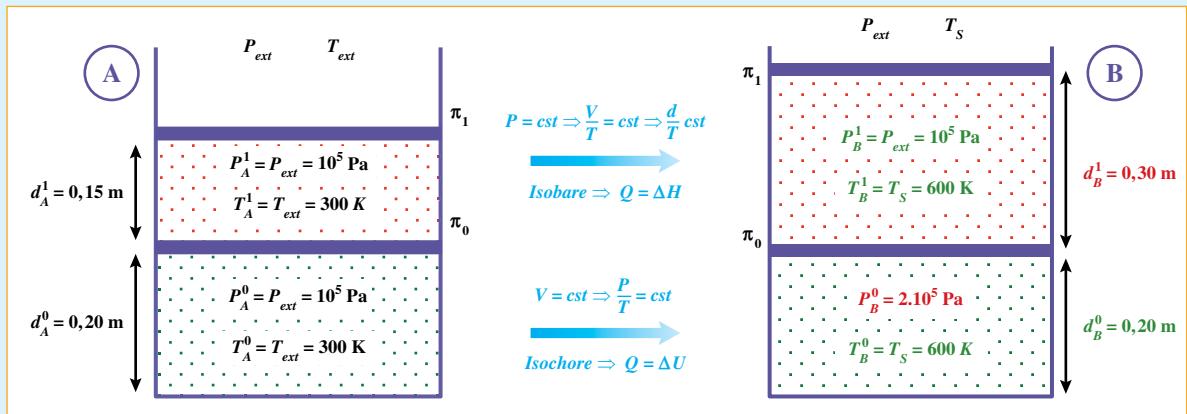
Le piston π_0 étant bloqué, le volume du compartiment 0 reste fixé, et la transformation du dioxygène est donc isochore, d'où :

$$d_B^0 = d_A^0 = 0,2 \text{ m} \quad \text{et} \quad \frac{P_B^0}{T_B^0} = \frac{P_A^0}{T_A^0} \quad \text{soit : } P_B^0 = P_A^0 \frac{T_B^0}{T_A^0} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

L'échange de chaleur avec le thermostat étant lent, et le piston π_1 étant libre, il reste en équilibre mécanique pendant la transformation, la pression restant identique de part et d'autre, la transformation du diazote est donc isobare, d'où :

$$P_B^1 = P_A^1 = 10^5 \text{ Pa} \quad \text{et} \quad \frac{d_B^1}{T_B^1} = \frac{d_A^1}{T_A^1} \quad \text{soit : } d_B^1 = d_A^1 \frac{T_B^1}{T_A^1} = 0,3 \text{ m}$$

On peut compléter le schéma.



Bien comprendre

- L'échange thermique avec le thermostat se fait lentement, ce qui permet de supposer que le piston évolue également lentement, en restant dans une succession d'états d'équilibre (même pression de part et d'autre), et donc de qualifier la transformation dans le compartiment 1 de réversible à pression extérieure constante, c'est-à-dire isobare.
- Il est toujours plus commode de caractériser les transformations à l'aide d'un rapport de grandeurs constant, plutôt que de revenir à la loi des gaz parfaits, d'autant qu'ici les rapports sont particulièrement simples numériquement.
- Les données numériques sont celles de l'énoncé original, qui n'est pas très tatillon sur les chiffres significatifs... On choisira donc ici de donner 3 chiffres significatifs sur des valeurs utiles tout au long du sujet (masse par exemple) et on n'hésitera pas à arrondir les grandeurs énergétiques par exemple (voir aussi point méthode p. 12).

- 3 La transformation du dioxygène est isochore. On peut écrire, d'après les conséquences du premier principe établies en cours :

$$W_{AB}^0 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta U_{AB}^0 = Q_{AB}^0$$

Par ailleurs le dioxygène est supposé parfait donc :

$$\Delta U_{AB}^0 = n_0 C_{V,m0} (T_B^0 - T_A^0)$$

$$\text{et} \quad \Delta H_{AB}^0 = n_0 C_{P,m0} (T_B^0 - T_A^0)$$

Soit : $\Delta U_{AB}^0 = Q_{AB}^0 = \frac{m_0 r_0}{\gamma - 1} (T_B^0 - T_A^0) = 500 \text{ J}$

$$\text{et} \quad \Delta H_{AB}^0 = \frac{\gamma m_0 r_0}{\gamma - 1} (T_B^0 - T_A^0) = 700 \text{ J}$$

La transformation du diazote est isobare. On peut écrire, d'après les conséquences du premier principe établies en cours :

$$\Delta H_{AB}^1 = Q_{AB}^1$$

Par ailleurs le diazote est supposé parfait donc :

$$\Delta H_{AB}^1 = n_1 C_{P,m1} (T_B^1 - T_A^1)$$

$$\text{et} \quad \Delta U_{AB}^1 = n_1 C_{V,m1} (T_B^1 - T_A^1)$$

Soit : $\Delta H_{AB}^1 = Q_{AB}^1 = \frac{\gamma m_1 r_1}{\gamma - 1} (T_B^1 - T_A^1) = 525 \text{ J}$

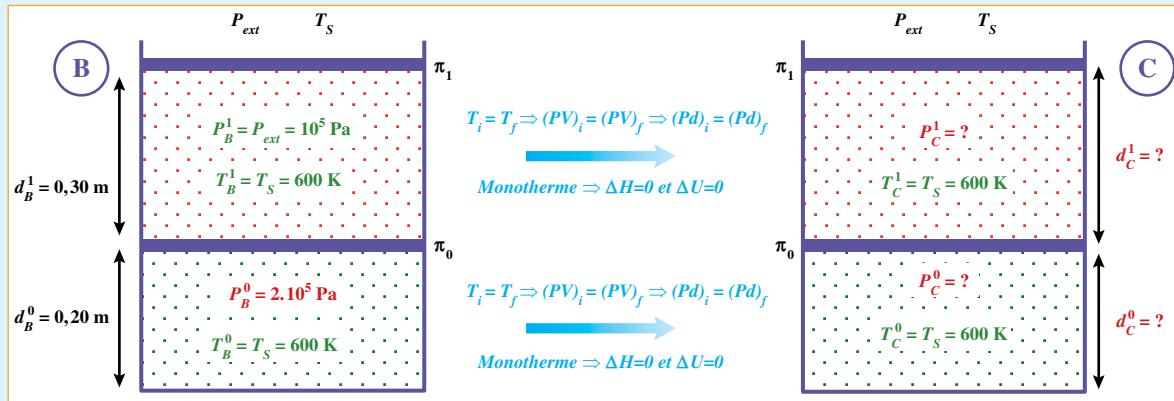
$$\text{et} \quad \Delta U_{AB}^1 = \frac{m_1 r_1}{\gamma - 1} (T_B^1 - T_A^1) = 375 \text{ J}$$

Le travail peut être calculé de plusieurs façons, la plus rapide utilise le premier principe :

$$W_{AB}^1 = \Delta U_{AB}^1 - Q_{AB}^1 = -150 \text{ J}$$

Les deux gaz s'échauffent et reçoivent donc de l'énergie, le diazote fournit du travail en poussant le piston libre, il reçoit en revanche de la chaleur de la part du thermostat. Le dioxygène n'échange pas de travail et reçoit uniquement de la chaleur. Il est vraisemblable qu'il y a aussi échange de chaleur entre les gaz.

On applique à nouveau la même schématisation pour la suite du problème, le schéma ci-dessous pouvant être placé en prolongement du précédent en un seul enchaînement : A → B → C. La même logique de couleur est adoptée ci.



Bien comprendre

- Il a été conseillé plusieurs fois de traduire les transformations par des égalités de rapports simples (par exemple isobare par $V/T = cst$). On peut utiliser le même principe sur des transformations non « iso » avec une petite précaution. En effet, il est important de comprendre ici, que, bien que la température finale et la température initiale soient les mêmes, la transformation n'est pas isotherme (car brutale), donc il est incorrect d'écrire $T = cst$ ou $PV = cst$, car c'est faux au cours de la transformation. Cela n'a pas d'importance pour la détermination des grandeurs, car on peut, sans erreur, écrire des égalités en valeurs initiales et finales : $P_i V_i = P_f V_f$.
- La schématisation préalable des systèmes dans les différents états présente aussi l'avantage de prévoir l'évolution, par exemple ici on s'attend à trouver une pression finale intermédiaire entre les deux pressions initiales, et des distances qui montrent que le piston remonte nécessairement. Ces prévisions permettent en particulier de traquer les erreurs de calculs.

- La libération du piston π_0 , soumis à des pressions différentes de part et d'autre, lui permet de se déplacer (nécessairement vers le haut en raison d'une pression supérieure dans le compartiment 0) de façon à atteindre l'équilibre mécanique. Dans l'état final C, les pressions seront donc identiques dans les deux compartiments. Pendant cette transformation brutale, la température n'est pas homogène pendant la transformation, mais, lorsque l'équilibre est atteint, les gaz sont en équilibre thermique avec l'extérieur en raison des parois diathermanes. On a donc :

$$P_c^0 = P_c^1 \quad \text{dont la valeur est à établir, et :} \quad T_c^0 = T_c^1 = T_S = 600 \text{ K}$$

Les transformations sont donc monothermes et les gaz parfaits, d'où :

$$\begin{cases} d_c^0 P_c^0 = d_B^0 P_B^0 \\ d_c^1 P_c^1 = d_B^1 P_B^1 \end{cases} \quad \text{soit, en effectuant le rapport de ces deux égalités :} \quad \frac{d_c^1 P_c^1}{d_c^0 P_c^0} = \frac{d_B^1 P_B^1}{d_B^0 P_B^0}$$

$$\text{Puis : } \frac{d_c^1}{d_c^0} = \frac{d_B^1}{d_B^0} \frac{P_B^1}{P_B^0} = \frac{0,3}{0,2} \frac{10^5}{2.10^5} = \frac{3}{4}$$

Par ailleurs le volume total reste constant puisque le piston π_1 est bloqué, d'où :

$$d_C^0 + d_C^1 = d_B^0 + d_B^1 = 0,2 + 0,3 = 0,5 \quad (\text{où les distances sont en mètres})$$

Soit le système d'équations simple à résoudre :

$$\begin{cases} d_C^0 + d_C^1 = 0,5 \\ 3d_C^0 = 4d_C^1 \end{cases}$$

$$d_C^0 = \frac{2}{7} = 0,286 \text{ m}$$

et

$$d_C^1 = \frac{3}{14} = 0,214 \text{ m}$$

Qui permet de calculer la pression à l'aide de l'une ou l'autre équation initiale :

$$P_C^0 = P_C^1 = \frac{d_B^0}{d_C^0} P_B^0 = \frac{d_B^1}{d_C^1} P_B^1 = 1,43 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

La température finale est identique à la température initiale pour chaque gaz dans la transformation BC, donc :

$$\Delta U_{BC}^0 = 0 \text{ J} \quad \Delta U_{BC}^1 = 0 \text{ J} \quad \Delta H_{BC}^0 = 0 \text{ J} \quad \Delta H_{BC}^1 = 0 \text{ J}$$

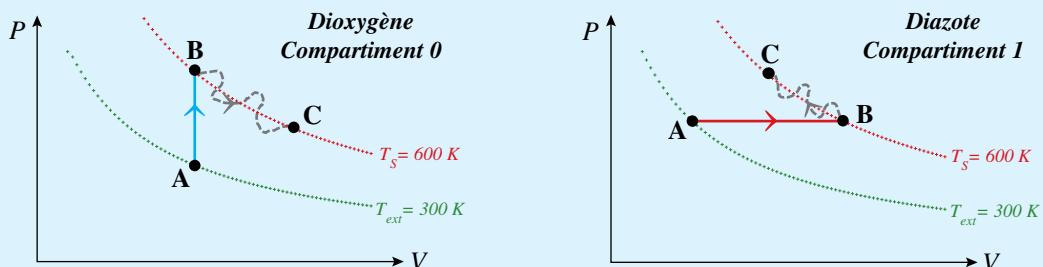
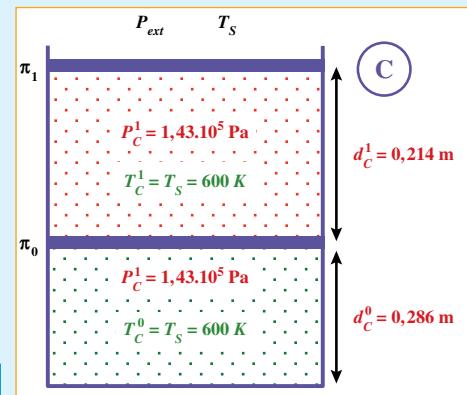
- 6 Le volume global de l'enceinte ne varie pas, aucune paroi extérieure ne se déplace, les systèmes n'échangent donc pas de travail avec l'extérieur, mais uniquement entre eux, du fait du déplacement du piston π_0 . Le travail reçu par l'un est donc égal à celui fourni par l'autre, c'est-à-dire l'opposé de celui reçu par l'autre :

$$W_{BC}^1 = -W_{BC}^0$$

D'après le premier principe on peut donc écrire :

$$\Delta U_{BC}^0 = Q_{BC}^0 + W_{BC}^0 = 0 \quad \text{soit :} \quad Q_{BC}^0 = -W_{BC}^0$$

$$\Delta U_{BC}^1 = Q_{BC}^1 + W_{BC}^1 = 0 \quad \text{soit :} \quad Q_{BC}^1 = -W_{BC}^1 = W_{BC}^0$$



Bien comprendre

- Ici la transformation est brutale et n'est donc pas aisée à caractériser. Cela n'empêche nullement de calculer les variations des fonctions d'état qui ne dépendent pas de la transformation, mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Par contre, le calcul des grandeurs échangées est délicat. On peut cependant donner des relations entre elles, à l'aide du premier principe. Par ailleurs il faut noter que les gaz échangent du travail uniquement entre eux, mais que les échanges de chaleur vont se faire d'une part avec l'extérieur et d'autre part entre les gaz et qu'il n'est pas aisés de différencier ces échanges.
- On note bien ici l'importance de la distinction entre fonctions d'état et grandeurs d'échange. Les variations des fonctions se calculent toujours aisément, si on connaît l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final. Par contre les grandeurs d'échange ne peuvent s'obtenir totalement que si les caractéristiques de la transformation sont connues et, de surcroît à ce niveau, si elles sont simples (et souvent réversibles). Cette distinction apparaît aussi sur les diagrammes sur lesquels on peut toujours porter les états de départ et d'arrivée, mais pas nécessairement le chemin suivi, en pointillé quelconque de B à C.
- Signalons enfin que les notations peuvent paraître lourdes dans cet énoncé, mais qu'elles ont le mérite d'être logiques et sans ambiguïté, et sont donc finalement très pratiques.

4 Détente de Joule-Gay-Lussac

→ énoncé p. 384

- 1 La détente de Joule-Gay-Lussac est isoénergétique (*démonstration à connaître voir p. 379*), on en déduit en notant $V_A = V_B$ le volume d'une enceinte, T_0 la température initiale du gaz et n la quantité de matière introduite :

$$\Delta U_{JGL} = 0 = U_{VdW}^f - U_{VdW}^i = \Delta U_{GP} - n^2 a \left(\frac{1}{V_A + V_B} - \frac{1}{V_A} \right) = n C_{V,m} \Delta T_{JGL} - n^2 a \left(\frac{1}{2V_A} - \frac{1}{V_A} \right) = n C_{V,m} \Delta T_{JGL} + \frac{n^2 a}{2V_A}$$

où ΔT est la variation de température du gaz due à la détente, d'où : $\Delta T = -\frac{na}{2C_{V,m}V_A} < 0$

où l'on distinguera deux cas : monoatomique (hélium, néon, argon) ou diatomique (dihydrogène, diazote, dioxygène).

Gaz	MONOATOMIQUE			DIATOMIQUE		
	Hélium	Néon	Argon	Dihydrogène	Diazote	Dioxygène
$a (10^{-3} J.m^3.mol^{-2})$	3,45	21,3	136,3	24,7	140,8	137,8
$2 C_{V,m}$	$3R$	$3R$	$3R$	$5R$	$5R$	$5R$
$-\Delta T (n = 10 \text{ mol}) (\text{en K})$	0,14	0,85	5,5	0,59	3,34	3,3
$-\Delta T (n = 0,1 \text{ mol}) (\text{en K})$	0,0014	0,0085	0,055	0,0059	0,0334	0,033

La plus faible variation est obtenue avec l'hélium pour les gaz monoatomiques, avec le dihydrogène pour les diatomiques. Par ailleurs tous les gaz subissent un refroidissement.

- 2 On note aussi que lorsque la quantité de matière diminue, pour un même volume, la variation de température est plus faible. Ici on a fixé le volume, donc on peut encore fixer un second paramètre :

→ Si on fixe la température initiale, alors plus le nombre de mole est petit et plus la pression initiale est faible (en première approximation on peut raisonner sur le gaz parfait $PV = nRT$). Or un plus faible nombre de moles induit une plus faible variation de température. On en déduit que toutes conditions égales par ailleurs, le gaz se rapproche de la première loi de Joule (et donc du GP) quand la pression diminue.

→ Si on fixe la pression, pour n et V donnés, alors la température est d'autant plus élevée que le nombre de moles est faible. Or un plus faible nombre de moles induit une plus faible variation de température. On en déduit que toutes conditions égales par ailleurs, le gaz se rapproche de la première loi de Joule (et donc du GP) quand la température augmente.

Ces résultats sont cohérents avec la définition du GP : à faible pression les molécules sont peu en interaction car dispersées et à haute température, l'énergie d'agitation thermique est importante et l'énergie potentielle d'interaction devient faible devant elle. Dans ces deux cas, les interactions entre molécules sont d'autant plus négligeables (et le gaz d'autant plus proche d'un GP) que la pression est faible et la température élevée.

À méditer

De toutes les lois de conservation, celle qui traite de l'énergie est la plus difficile, la plus abstraite et cependant la plus utile. Elle est plus difficile car [...] cette fois, nous avons un nombre qui ne varie pas avec le temps, mais ce nombre ne représente aucun objet particulier.

RICHARD FEYNMAN (1918-1988)

Second principe de la thermodynamique

Historiquement, le second principe de la thermodynamique fut énoncé au début de l'ère industrielle au XIX^e siècle, bien avant le premier principe, à travers les réflexions menées sur le fonctionnement des machines thermiques. En effet, si le premier principe traduit les échanges énergétiques des systèmes, il ne permet cependant pas de prévoir leur évolution. Un second principe est donc nécessaire, dont le formalisme actuel dépasse largement le cadre des machines thermiques, et même celui de la thermodynamique, puisqu'on le retrouve à l'œuvre dans la totalité des phénomènes physiques réels.

Outils mathématiques

■ Propriétés de la fonction logarithme $\ln x$:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b, \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad \text{et} \quad \ln(a^\alpha) = \alpha \ln a$$

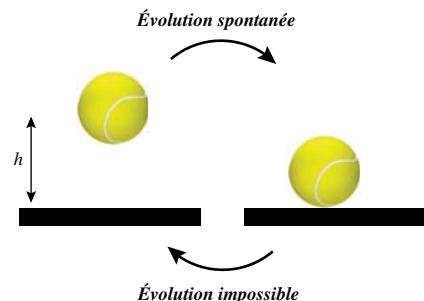
On en déduit facilement la **différentielle logarithmique** : $x^\alpha y^\beta = \text{cste} \Leftrightarrow \alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y} = 0$

I Entropie d'un système thermodynamique

1. Un principe d'évolution nécessaire

Le premier principe est un principe de conservation énergétique qui ne permet pas de prévoir le sens d'évolution d'un système. Ce manque d'information doit être comblé par un second principe, indispensable lors d'une étude thermodynamique.

La majeure partie des phénomènes physiques qui nous entourent, telle que, par exemple, la chute d'une balle de tennis dans du sable, depuis une hauteur h , sont **irréversibles**. Jamais la balle posée sur le sol ne remontera spontanément, alors que ce n'est pas interdit par le premier principe : l'augmentation de l'énergie potentielle de la balle, lors de cette transformation, pourrait être compensée par une diminution de l'énergie interne, se traduisant par une baisse de la température du système. Jamais personne n'a observé une balle remonter toute seule en se refroidissant, une telle transformation est impossible, ce que le premier principe ne permet pas d'établir. Il est donc nécessaire d'ajouter *un principe d'évolution* qui permet d'imposer un sens évolutif à une transformation. C'est précisément le rôle du second principe de la thermodynamique.



Définition

Une transformation est dite **réversible** s'il est possible d'en inverser le sens par une modification infinitésimale des conditions extérieures.

- Une transformation réversible passe par une succession d'états infiniment voisins qui sont tous des états d'équilibre.

La majorité des phénomènes sont naturellement irréversibles et tendent à homogénéiser une distribution hétérogène. La présence de phénomènes dissipatifs, tels que les frottements fluides ou solides, l'inhomogénéité de la concentration ou de la température d'un milieu, la brutalité et la rapidité d'une transformation et certaines réactions chimiques sont des **causes d'irréversibilité**.

Afin de rendre compte du sens spontané d'une transformation et des phénomènes d'irréversibilité, le physicien Rudolf Clausius (1822-1888) introduit en 1865 une fonction nommée **entropie**. Ce terme dérive du grec *entropē* signifiant «cause d'évolution».

Définition

À tout système thermodynamique est associée une fonction d'état extensive appelée **entropie** et notée S . L'entropie s'exprime en J.K^{-1} .

- Les variations de l'entropie ne dépendent pas du chemin suivi, puisque c'est une fonction d'état.

2. Élaboration de la fonction entropie

L'entropie étant une fonction d'état, S et V peuvent être utilisés comme grandeurs d'état indépendantes pour décrire un système thermodynamique. Ainsi la différentielle totale de l'énergie interne d'un système $U(S, V)$ peut s'exprimer :

$$dU(S, V) = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV$$

Définitions

La **température thermodynamique** T_{th} qui s'identifie à la température cinétique, liée à l'agitation thermique des constituants et la **pression thermodynamique** P_{th} qui s'identifie à la pression cinétique, liée aux chocs des constituants, s'expriment alors respectivement par :

$$T_{th} = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V \quad \text{et} \quad P_{th} = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$$

- On admettra que la température et la pression thermodynamiques s'identifient respectivement à la température absolue T et à la pression mécanique P précédemment définies.

→ Cela conduit à la **première identité thermodynamique**,

$$dU = TdS - PdV \quad \text{soit en permutant}$$

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV$$

L'entropie peut ainsi s'exprimer en fonction de l'énergie interne U et du volume V . Toutefois il est souvent commode d'effectuer un passage des variables (U, V) à (H, P) en introduisant la définition de l'enthalpie $H = U + PV$ dans la première identité thermodynamique :

$$dH = dU + PdV + VdP \Rightarrow dH = TdS - PdV + PdV + VdP$$

→ Cela conduit à la **deuxième identité thermodynamique**,

$$dH = TdS + VdP \quad \text{soit en permutant}$$

$$dS = \frac{1}{T} dH - \frac{V}{T} dP$$

- Ces deux identités sont extrêmement importantes et on donne dans l'exercice n° 2 un moyen de les retrouver rapidement. En effet, elles permettront par la suite d'exprimer l'entropie d'un gaz parfait, d'une phase condensée et d'étudier une transformation isentropique d'un gaz parfait.

- Il est important de souligner que ces deux identités sont seulement valables pour des systèmes thermodynamiques monophasés divariants¹.

3. Expressions de l'entropie d'un gaz parfait

Chaque **état d'équilibre** d'un système fermé contenant n moles de gaz parfait peut être décrit par trois paramètres thermodynamiques, P , V et T . Or ces trois paramètres sont liés entre eux par l'équation d'état du gaz parfait $PV = nRT$, par conséquent seul l'un de ces couples de variables (T, V), (T, P) ou (P, V) suffit à identifier parfaitement un état d'équilibre. L'entropie qui est une fonction d'état, ne dépend que des états macroscopiques du gaz, ce qui permet donc de l'exprimer en fonction d'un couple de deux variables : $S(T, V)$, $S(T, P)$ ou $S(P, V)$.

- Avec la première identité thermodynamique, la première loi de Joule (expression de $U(T)$) et l'équation d'état des gaz parfaits, on obtient $S_{GP}(T, V)$:

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV \quad \Rightarrow \quad dS = C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

soit en intégrant :
$$S_{GP}(T, V) = C_V \ln T + nR \ln V + cste$$

- En utilisant la deuxième identité thermodynamique, la seconde loi de Joule (expression de $H(T)$) et l'équation d'état des gaz parfaits, on obtient $S_{GP}(T, P)$:

$$dS = \frac{1}{T} dH - \frac{V}{T} dP \quad \Rightarrow \quad dS = C_P \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P}$$

soit en intégrant :
$$S_{GP}(T, P) = C_P \ln T - nR \ln P + cste$$

- La détermination de $S_{GP}(P, V)$ peut s'obtenir à partir d'une combinaison linéaire des deux équations précédentes et en utilisant la relation de Mayer, $C_P - C_V = nR$, on obtient :

$$S_{GP}(V, P) = C_V \ln P + C_P \ln V + cste$$

- L'entropie est en fait définie à une constante additive près correspondant à un état arbitraire choisi comme origine. Ces expressions démontrent bien le caractère extensif de l'entropie.

- Il est inutile de retenir par cœur ces équations qui seront en principe données dans un énoncé, mais il est conseillé de savoir les redémontrer.

En pratique, on s'intéresse toujours à la variation de l'entropie $\Delta S_{A \rightarrow B (GP)}$ entre deux états d'équilibre (P_A, V_A, T_A) et (P_B, V_B, T_B), ce qui permet d'éliminer les constantes d'intégration. Ainsi la variation de l'entropie en fonction du couple (T, V) s'écrit :

$$\Delta S_{A \rightarrow B (GP)} = S(T_B, V_B) - S(T_A, V_A) = C_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

En utilisant la relation $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$, on peut écrire :

$$\Delta S_{A \rightarrow B (GP)} = \frac{nR}{\gamma - 1} \left[\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + (\gamma - 1) \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \right] = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}}\right)$$

En utilisant ce qui précède et à l'aide de la relation $C_P = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1}$, on retrouve les expressions de la variation de l'entropie pour les deux autres couples de variables récapitulées ci-après. À titre d'exercice, le lecteur est invité à retrouver ces expressions.

1. C'est-à-dire ayant deux variables indépendantes.

	$\Delta S_{A \rightarrow B}(\text{GP})(T, V)$	$\Delta S_{A \rightarrow B}(\text{GP})(T, P)$	$\Delta S_{A \rightarrow B}(\text{GP})(P, V)$
Variation d'entropie du GP	$\frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}} \right)$	$\frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_B^\gamma P_B^{1-\gamma}}{T_A^\gamma P_A^{1-\gamma}} \right)$	$\frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{P_B V_B^\gamma}{P_A V_A^\gamma} \right)$

- Dans toutes ces expressions, on suppose C_V , C_p et donc γ indépendants de la température.
- Si le système subit une transformation cyclique, on vérifie bien que la variation de l'entropie est nulle (fonction d'état).

On tire aisément de ce qui précède, la variation de l'entropie d'un gaz parfait confiné dans une enceinte subissant une transformation particulière de l'état d'équilibre initial A à l'état d'équilibre final B :

	Isochore	Isobare	Isotherme
$\Delta S_{A \rightarrow B}(\text{GP})$	$\frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{P_B}{P_A} \right)$	$\frac{\gamma nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) = \frac{\gamma nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$	$nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = nR \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right)$

4. Expressions de l'entropie d'une phase condensée

Pour une phase condensée indilatable, il est très difficile de faire varier le volume et la pression du système. On a vu (*chapitre 21 p. 377*) que l'on peut écrire :

$dU = dH = CdT$ où $C = C_V = C_p$ est la capacité thermique du système, indépendante de T .

On a donc : $dS = \frac{dU}{T} = C \frac{dT}{T}$

D'où :

$$S_{\text{phase condensée}} = C \ln T + \text{cste}$$

Si la phase est homogène, on peut utiliser la capacité thermique massique c :

$$S_{\text{phase condensée}} = mc \ln T + \text{cste}$$

II | Second principe de la thermodynamique

1. Enoncés

Le second principe se décline sous différents énoncés historiques fondés sur le bon sens et en général, ils sont reliés au fonctionnement des machines thermiques, ce qui est compréhensible, puisqu'ils sont issus de réflexions menées entre 1810 et 1860. Trois énoncés du deuxième principe ont eu une grande portée historique : d'abord l'énoncé de l'ingénieur français Sadi Carnot en 1824, exprimé sous la forme du « rendement » maximal d'un moteur thermique fonctionnant de façon réversible entre deux sources de chaleur, ensuite ceux de l'Allemand Rudolf Clausius et de l'Écossais William Thomson (le futur lord Kelvin), respectivement en 1850 et en 1852. Clausius stipule qu'il n'existe aucune transformation thermodynamique dont le seul effet est d'extraire une quantité de chaleur d'un réservoir froid et de la fournir à un réservoir chaud tandis que Kelvin montre qu'aucune transformation thermodynamique a pour seul effet d'extraire une quantité de chaleur d'un réservoir et de la convertir entièrement en travail.

Dans le cadre de la thermodynamique axiomatique des principes qui fait l'objet de cette partie du programme, on énonce aujourd'hui le second principe avec un formalisme qui s'appuie en particulier sur les fonctions d'état d'un système, comme on le voit dans ce qui suit, en continuité avec les chapitres précédents. On verra néanmoins au chapitre 23 suivant, que l'application du second principe (exprimé en

termes d'entropie) aux machines thermiques, permet de retrouver tous les énoncés historiques évoqués ci-dessus. (voir *retour au second principe p. 430*).

Ces énoncés ont tous en commun les **phénomènes d'irréversibilités**, qui n'apparaissent pas dans l'énoncé du premier principe.

Énoncé

Second principe de la thermodynamique :

Lors d'une transformation thermodynamique, l'**entropie créée**, notée $S_{\text{créée}}$, au sein d'un système fermé est toujours positive ou nulle :

$$S_{\text{créée}} \geq 0$$

Pour une transformation réversible, $S_{\text{créée}}$ est nulle, tandis que pour une transformation irréversible $S_{\text{créée}}$ est strictement positive.

- Certains auteurs discutent des phénomènes physiques encourus si l'entropie créée prend une valeur négative. Un tel résultat signifie simplement qu'une telle transformation thermodynamique irait à l'encontre de toutes les lois physiques et donc ne pourrait avoir lieu.
- Même si le temps n'apparaît pas, le signe de $S_{\text{créée}}$ porte en lui le sens possible de l'évolution du système, contrairement au premier principe. Bien au-delà de la thermodynamique, le second principe imposera toujours une flèche du temps dans les transformations des systèmes physiques.

2. Bilan entropique

Pour connaître l'entropie créée par un système subissant une transformation, on effectue un bilan entropique.

Énoncé

Un système qui reçoit du milieu extérieur un travail W et une chaleur Q a pour **bilan entropique** :

$$\Delta S = S_{\text{créée}} + S_{\text{échangée}}$$

où le terme $S_{\text{échangée}}$ représente l'entropie reçue par le système de la part du milieu extérieur.

Chaque terme de cette équation s'exprime en J.K^{-1} .

- Contrairement à la variation d'énergie qui ne peut que résulter d'un échange, la variation d'entropie peut provenir non seulement d'un échange mais aussi être créée à « partir de rien ».
- Cette expression est un bilan d'entropie et ne constitue pas le second principe, contrairement à ce qu'on entend souvent. En physique un terme de création, comme toutes les autres grandeurs, est *a priori* algébrique, positif s'il y a apparition, négatif si il y a disparition. Le second principe consiste bien à dire que $S_{\text{créée}}$ ne peut qu'être positive.
- Dans ce bilan, S est une fonction d'état, sa variation ne dépend pas de la transformation mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Au contraire, $S_{\text{échangée}}$ est une grandeur d'échange et $S_{\text{créée}}$ se comporte comme telle (même si en toute rigueur elle n'est pas une grandeur d'échange). Elles dépendent donc de la transformation (voir *point méthode p. 362*).

→ Cas particuliers de bilans entropiques

- Dans le cas d'une transformation cyclique, la variation de l'entropie d'un système fermé est nulle ($\Delta S = 0$), car l'entropie S est une fonction d'état. Le bilan entropique s'écrit alors :

$$\Delta S_{\text{cycle}} = S_{\text{créée}} + S_{\text{échangée}} = 0$$

Comme $S_{\text{créée}} \geq 0$, on en déduit alors que $S_{\text{échangée}} \leq 0$.

- Dans le cas d'un système totalement isolé du milieu extérieur, la variation de l'entropie d'un système fermé est seulement égale à l'entropie créée :

$$\Delta S(\text{isolé}) = S_{\text{créée}} \geq 0$$

Cela implique que l'entropie d'un système isolé ne peut que croître jusqu'à atteindre sa valeur maximale lorsque l'état d'équilibre est atteint. Dans son état d'équilibre, l'entropie est donc constante, d'où $\Delta S = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a plus de création d'entropie au sein du système. L'univers étant le système isolé par excellence, on énonce parfois le second principe sous la forme : $\Delta S_{\text{univers}} \geq 0$.

- Pour une transformation infinitésimale d'un état A à un état A' (proche de l'état A) le bilan entropique s'exprime :

$$dS = \delta S_{\text{créée}} + \delta S_{\text{échangée}}$$

→ Expression de l'entropie échangée

La détermination de l'entropie échangée, $S_{\text{échangée}}$, est issue des travaux théoriques de Clausius lors de la construction de la fonction entropie S . On admettra les résultats qui suivent.

Énoncé

Lors d'une transformation infinitésimale quelconque, l'**entropie échangée** par un système fermé Σ en contact avec un milieu extérieur à la température T_{contact} s'exprime par l'intermédiaire du transfert thermique :

$$\delta S_{\text{échangée}} = \frac{\delta Q_{\text{échangée}}}{T_{\text{contact}}}$$

- Le problème de la détermination des échanges thermiques et des températures de contact peut être extrêmement complexe. Dans le cas d'un thermostat, T_{contact} est la température du thermostat. Par contre si le milieu extérieur n'est pas un thermostat, la température de contact est celle de la frontière entre le système et le milieu extérieur où la température n'a aucune raison d'être uniforme.

Dans le cas simple d'un contact avec un seul thermostat Ω à la température T_Ω , $S_{\text{échangée}}$ vaut :

$$S_{\text{échangée}} (\text{1 thermostat}) = \frac{Q_{\text{échangée}}}{T_\Omega}$$

On généralise à un système en contact avec N thermostats Ω_i à la température T_{Ω_i} :

$$S_{\text{échangée}} (\text{N thermostats}) = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_{\Omega_i}}$$

- Le premier principe est appelé **principe d'équivalence** car W et Q jouent les mêmes rôles vis-à-vis de l'énergie interne. Le second principe brise cette équivalence, car le travail n'intervient pas dans la variation de l'entropie. L'entropie, contrairement à l'énergie, n'est pas une grandeur conservative, c'est pourquoi c'est une fonction qui donne un sens à la flèche du temps.

→ Récapitulatif

Transformation	Adiabatique $Q = 0$	Non adiabatique $Q \neq 0$
Réversible	$S_{\text{créée}} = 0$ et $S_{\text{échangée}} = 0 \Rightarrow \Delta S = 0$	$S_{\text{créée}} = 0$ et $S_{\text{échangée}} \neq 0 \Rightarrow \Delta S$ quelconque
Irréversible	$S_{\text{créée}} > 0$ et $S_{\text{échangée}} = 0 \Rightarrow \Delta S > 0$	$S_{\text{créée}} > 0$ et $S_{\text{échangée}} \neq 0 \Rightarrow \Delta S$ quelconque

POINT MÉTHODE

Exploiter le second principe et le bilan entropique

■ Le **second principe** peut permettre en théorie de déterminer dans quel sens se produit une transformation, à travers le signe de l'entropie créée. En pratique, on sait généralement quelle transformation a lieu et le bilan entropique correspondant permet de vérifier la réversibilité ou l'irréversibilité de la transformation. On procède alors dans l'ordre suivant (*voir exercices*) :

- ➡ Déterminer l'état d'équilibre final (les paramètres thermodynamiques).
- ➡ Déterminer la variation de l'entropie ΔS par le biais d'une des identités thermodynamiques ou d'une expression de l'entropie fournie par l'énoncé. Attention, ΔS peut être négative ou positive.
- ➡ À l'aide, en général, du premier principe ou de ses conséquences, calculer les transferts thermiques Q_i . Cela suppose de connaître la nature de la transformation.
- ➡ Calculer l'entropie échangée, $S_{\text{échangée}} = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_{\Omega_i}}$.
- ➡ Écrire le **bilan entropique** $\Delta S = S_{\text{créeée}} + S_{\text{échangée}}$ et en déduire $S_{\text{créeée}}$:
 - Si $S_{\text{créeée}}$ est nulle, alors la transformation étudiée est réversible.
 - Si $S_{\text{créeée}}$ est strictement positive, alors la transformation étudiée est irréversible et l'on précisera la source des irréversibilités.
 - Si $S_{\text{créeée}}$ est négatif..., chercher l'erreur de calcul !

■ Dans le cours sur les **machines thermiques** (*voir chapitre 23*), on verra que le second principe permet d'imposer des limites à leurs possibilités et des conditions à leur fonctionnement.

■ Il n'est pas surprenant que le bilan entropique nécessite de connaître la nature de la transformation, puisque $S_{\text{échangée}}$ est une grandeur d'échange et que $S_{\text{créeée}}$ se comporte comme telle.

III | Le cas particulier de la transformation adiabatique réversible

Propriété

Lors d'une transformation adiabatique ($S_{\text{échangée}} = 0$) et réversible ($S_{\text{créeée}} = 0$), la variation d'entropie est nécessairement nulle :

$$\Delta S_{A \rightarrow B} (\text{adiabatique réversible}) = 0$$

Cette transformation est dite **isentropique**.

1. Les lois de Laplace (GP)

En utilisant les expressions de la variation de l'entropie du gaz parfait établies p. 396, on peut écrire pour la transformation isentropique :

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{P_B V_B^\gamma}{P_A V_A^\gamma} \right) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_B^\gamma P_B^{1-\gamma}}{T_A^\gamma P_A^{1-\gamma}} \right) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}} \right) = 0$$

soit : $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$; $T_A^\gamma P_A^{1-\gamma} = T_B^\gamma P_B^{1-\gamma}$; $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$

Ces relations sont valables tout au long d'une transformation réversible, qui constitue une suite d'états d'équilibre, ce qui permet d'en déduire les lois qu'elle vérifie.

Énoncé

Un gaz parfait subissant une transformation adiabatique réversible suit les **lois de Laplace** :

$$PV^\gamma = cste \quad , \quad T^\gamma P^{1-\gamma} = cste \quad , \quad TV^{\gamma-1} = cste$$

- Il est conseillé aux étudiants de mémoriser la première relation et de retrouver les deux autres en injectant l'équation des gaz parfaits dans $PV^\gamma = cste$. Une autre façon d'établir ces équations est proposée dans l'exercice n° 3 p. 404.

2. Comparaison entre une adiabatique réversible et une isotherme (GP)

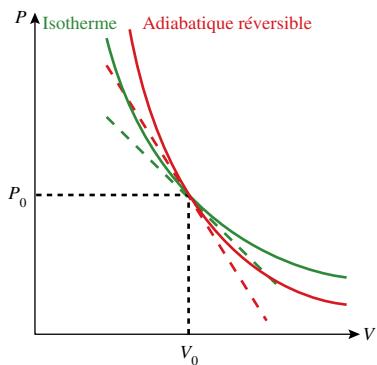
Pour comparer sur un diagramme de Clapeyron l'allure de la courbe représentant une transformation isotherme et une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait, on calcule la pente de la tangente en un point appartenant à ces courbes (*voir différentielle logarithmique, outils mathématiques p. 393*).

➡ **Transformation adiabatique réversible.** On utilise la loi de Laplace du gaz parfait :

$$PV^\gamma = cste \Rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \left(\frac{dP}{dV} \right)_{ad.\,rev.} = -\gamma \frac{P}{V}$$

➡ **Transformation isotherme.** On utilise l'équation d'état du gaz parfait :

$$PV = cste \Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \left(\frac{dP}{dV} \right)_{isoth.} = -\frac{P}{V}$$



Le coefficient adiabatique γ d'un gaz parfait est supérieur à 1. En un point (V_0, P_0) quelconque du diagramme de Clapeyron, la courbe représentant la transformation adiabatique réversible a toujours une pente supérieure à celle de l'isotherme passant par le même point.

IV Diagramme entropique

1. Transformations particulières

Tout comme dans le chapitre 20 où l'on a décrit les transformations dans un diagramme de Clapeyron, il est possible de représenter les états d'équilibre et les évolutions du système dans un **diagramme entropique** ($T = f(S)$). En traçant ce type de diagramme, on suppose que les transformations étudiées sont réversibles, ce qui implique que les grandeurs d'état du système sont définies à tout instant.

- Les représentations d'une transformation isotherme et d'une adiabatique réversible dans ce type de diagramme ne posent aucune difficulté. Par contre il est plus délicat de tracer une isobare et une isochore dans le cas du gaz parfait. Pour cela il faut exprimer $S(T,P)$ et $S(T,V)$ et les comparer.

➡ **Transformation isobare.** On utilise l'expression de l'entropie $S(T,P)$ du gaz parfait :

$$S(T,P) = S(T) \Rightarrow S(T) = C_p \ln T - nR \ln P + cste = C_p \ln T + S_0 \Rightarrow \ln T = \frac{S - S_0}{C_p}$$

d'où :

$$T_{isobare} = \exp\left(\frac{S - S_0}{C_p}\right) = k \exp\left(\frac{S}{C_p}\right)$$

➡ **Transformation isochore.** On utilise l'expression de l'entropie $S(T, V)$ du gaz parfait :

$$S(T, V) = S(T) \Rightarrow S(T) = C_V \ln T + nR \ln V + cste = C_V \ln T + S'_0 \Rightarrow \ln T = \frac{S - S'_0}{C_V}$$

d'où :

$$T_{\text{isochore}} = \exp\left(\frac{S - S'_0}{C_V}\right) = k' \exp\left(\frac{S}{C_V}\right)$$

Pour un gaz parfait C_p est supérieur à C_v . En un point (S_0, T_0) quelconque du diagramme entropique, la courbe représentant la transformation isobare a toujours une pente inférieure à celle de l'isochore.

Transformation	ISOTHERME	ADIABATIQUE REVERSIBLE	ISOBARE (GP) ISOCHORE (GP)
Diagramme entropique (T, S)			

2. Visualisation du transfert thermique sur un diagramme entropique

Pour une transformation réversible, le signe du transfert thermique peut être déterminé par un diagramme entropique $T(S)$. La chaleur échangée par un système d'un état d'équilibre initial A à un état d'équilibre final B est liée à l'aire Δ sous la courbe (voir *outils mathématiques du chapitre 20, p. 359*).

Diagramme entropique	 $S_A < S_B$	 $S_A > S_B$
Signe de la chaleur	$Q_{\text{rév. } A \rightarrow B} = \int_{S_A}^{S_B} T \, dS = \Delta > 0$	$Q_{\text{rév. } A \rightarrow B} = \int_{S_A}^{S_B} T \, dS = -\Delta < 0$
Conséquence	Le système reçoit de la chaleur.	Le système fournit de la chaleur.

On peut représenter une transformation cyclique sur un diagramme entropique : un système subissant successivement deux transformations thermodynamiques, *a* et *b*, où l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final sont indiqués par les coordonnées du point E et l'état intermédiaire par les coordonnées du point I. La chaleur échangée lors d'une transformation cyclique est la somme des transferts thermiques de chaque transformation particulière : $Q_{\text{cycle}} = Q_{E \rightarrow I} + Q_{I \rightarrow E}$

Par conséquent dans les schémas ci-dessous, la chaleur sur le cycle est toujours égale à la différence entre l'aire sous la courbe rouge et celle sous la courbe bleue, ce qui entraîne que le transfert thermique est égal (selon le sens du cycle) à \pm l'aire du cycle. Selon le sens de parcours du cycle, on obtient donc un transfert thermique total positif ou négatif.

Diagramme entropique		
Sens de parcours	horaire	trigonométrique
Signe de la chaleur	$Q_{cycle} = \Delta A > 0$	$Q_{cycle} = -\Delta A < 0$
Conséquence	Cycle moteur : le système reçoit de la chaleur.	Cycle récepteur : le système fournit de la chaleur.

- Il ne faut pas confondre cycle moteur et récepteur dans un diagramme entropique. Les dénominations *moteur* et *récepteur* proviennent du signe du travail échangé entre un système et son milieu extérieur pendant une transformation cyclique. En effet lors d'une transformation cyclique $\Delta U_{cycle} = W_{cycle} + Q_{cycle} = 0$.
 - ➡ Si $Q_{cycle} > 0 \Rightarrow W_{cycle} < 0$: cycle moteur
 - ➡ Si $Q_{cycle} < 0 \Rightarrow W_{cycle} > 0$: cycle récepteur

- Si une transformation cyclique est représentée dans un diagramme (P,V) et un diagramme (T,S), alors les aires et les sens du parcours seront identiques.

➡ CONCLUSION : Entropie et désordre

L'entropie a été définie ici comme une fonction d'état macroscopique d'un système thermodynamique mais reste une grandeur abstraite, difficile à appréhender. Sans entrer dans les détails d'une approche microscopique (hors programme), il reste intéressant d'en connaître les conclusions pour mieux comprendre cette notion. Proposée par Boltzmann (1844-1906) en 1877, une définition probabiliste microscopique de l'entropie permet de la considérer comme une mesure du désordre régnant dans un système. Le second principe traduit alors l'idée que, spontanément, un système isolé évolue vers l'état le plus désordonné possible, ce que n'importe quelle chambre ou bureau d'étudiant met facilement en évidence !

Plus sérieusement, on montre que le système va naturellement adopter une répartition équilibrée et homogène de ses composants et de ses grandeurs d'état (ce qui traduit le plus grand désordre), car elle est infiniment plus probable que toute distribution déséquilibrée (qui traduit une situation présentant davantage d'ordre). Par exemple, lors d'une détente de Joule-Gay-Lussac, le gaz va spontanément se répartir de façon homogène entre les deux compartiments et jamais ensuite, toutes les particules ne se retrouveront dans un seul compartiment. On notera au passage que cette transformation se fait sans échange d'énergie, ce qui fait que le premier principe n'interdit en aucun cas le retour complet du gaz dans un seul compartiment. On comprend sur cet exemple l'importance du rôle du second principe dans l'évolution des systèmes.

On peut également dire que, si localement un ordre apparaît dans un système Σ , c'est nécessairement au prix d'un désordre plus grand dans son environnement, car, globalement, l'entropie du système isolé

$(\Sigma + \text{environnement de } \Sigma)$ augmente². On comprend alors, pourquoi les systèmes évoluent vers un état le plus homogène possible, c'est parce que c'est l'état de plus grand désordre : deux objets de températures différentes évoluent vers un état de température intermédiaire identique à travers un transfert thermique du chaud vers le froid, un liquide concentré se dilue dans un liquide moins concentré et un tiroir bien rangé devient toujours ... un fouillis inextricable !

En conclusion, on retiendra que le second principe permet de comprendre l'évolution spontanée d'un système macroscopique et, bien au-delà, de la totalité des systèmes physiques.

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Fonction entropie : définition, entropie d'un gaz parfait, variation d'entropie du gaz parfait selon la transformation.
- Second principe : insuffisance du premier principe, nécessité d'un principe d'évolution, énoncé.
- Bilan entropique : expression et conséquences, transformation adiabatique ou non, réversible ou non.
- Transformation adiabatique réversible du GP : lois de Laplace, allure de la transformation dans un diagramme de Clapeyron, comparaison à l'isotherme.

Erreurs à éviter

- Le second principe ne consiste pas à écrire que la variation d'entropie est la somme de deux termes, mais que l'entropie créée dans un système fermé est nécessairement positive.
- L'entropie échangée est une grandeur d'échange, comme le travail ou la chaleur. L'entropie créée n'est pas une grandeur d'échange, mais ce n'est pas non plus une fonction d'état. Elle se comporte comme les grandeurs d'échange, c'est-à-dire qu'elle n'a de sens que du fait d'une transformation et elle dépend du chemin suivi entre l'état initial et l'état final.
- Les lois de Laplace ne sont pas valables dans tous les cas, mais uniquement pour un gaz parfait subissant une transformation adiabatique réversible (*isentropique*).

Quelques « trucs » utiles

- L'identité thermodynamique ou l'expression de l'entropie échangée montrent qu'entre les grandeurs énergétiques et entropiques, il y a un facteur de l'ordre de la température. On ne compare pas des grandeurs de nature différente, mais on trouvera nécessairement pour une transformation donnée des valeurs numériques beaucoup plus faibles pour les grandeurs entropiques que pour les grandeurs énergétiques (exemple : $Q = 500 \text{ J}$ et $\Delta S = 0,8 \text{ J.K}^{-1}$).
- On ne s'étonnera pas d'une variation d'entropie négative dans un système, seule l'entropie créée dans un système fermé est nécessairement positive.
- La température intervenant dans le calcul de l'entropie échangée est celle du thermostat, qui n'a aucune raison d'être celle du système au cours de la transformation (sauf transformation isotherme).
- On aura le réflexe de traduire transformation *isentropique* par *adiabatique réversible* dans un énoncé et d'appliquer les lois de Laplace si l'on travaille sur un gaz parfait.

2. Ce concept a été développé par Schrödinger, à travers l'idée que le haut degré d'organisation d'un organisme vivant, pourrait se traduire comme une lutte permanente contre l'évolution naturelle de l'entropie des systèmes physiques. Cette approche a donné lieu à de nombreux débats passionnés des physiciens, dont le détail dépasse largement le cadre de cet ouvrage et même celui de la physique, puisqu'il s'est étendu à l'économie, la sociologie, l'écologie...

1 Détentes d'un gaz parfait ★

→ corrigé p. 406

➡ **Détente de Joule-Gay-Lussac :**

On considère une mole de gaz parfait monoatomique enfermée dans une enceinte calorifugée A de volume V_0 , à la pression P_0 et à la température T_0 . Cette enceinte communique par une vanne avec une enceinte identique B vide. On ouvre la vanne et on attend l'équilibre.

➡ **Détente brutale :**

On prend maintenant une mole du même gaz dans un récipient muni d'une paroi diathermane. Un piston sans masse est maintenu par un opérateur de façon que le volume soit V_0 et la pression P_0 . La pression extérieure est de $P_0/2$ et la température extérieure est constante à T_0 . L'opérateur lâche le piston brusquement.

➡ **Détente lente :**

On reprend l'énoncé de la détente brutale mais maintenant l'opérateur relâche le piston très lentement.

- ➊ Pour chaque détente, déterminer si la transformation subie par le gaz est réversible ou irréversible. Préciser, le cas échéant, la source des irréversibilités.
- ➋ Classer les entropies créées en fonction de leur importance et commenter.

2 Identités thermodynamiques et lois de Laplace ★

→ corrigé p. 408

Retrouver les identités thermodynamiques en appliquant les deux principes à une transformation réversible infinitésimale. En déduire les lois de Laplace pour un gaz parfait.

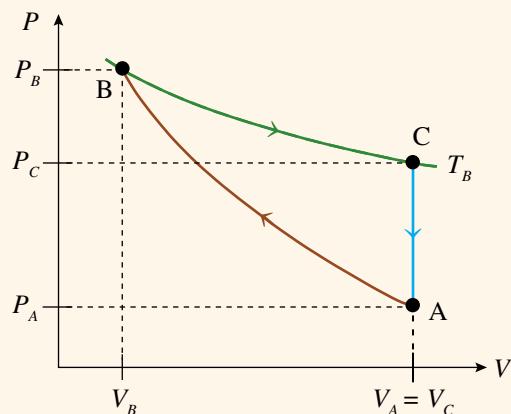
3 Transformation cyclique d'un gaz parfait ★★

→ corrigé p. 408

Une masse constante de gaz parfait, dont le rapport des capacités thermiques à pression et volume constants est $\gamma = 1,4$, décrit le cycle ci-contre.

Le gaz initialement dans l'état d'équilibre A ($P_A = 10^5 \text{ Pa}$, $V_A = 4,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, $T_A = 144,4 \text{ K}$) subit une compression isentropique qui l'amène à la température $T_B = 278,8 \text{ K}$.

- ➊ Calculer la pression P_B et le volume V_B de l'état d'équilibre B.
- ➋ Le gaz est mis en contact avec une source à la température T_B , il subit une détente isotherme réversible, qui ramène son volume à la valeur initiale V_A . Calculer P_C et la variation de l'entropie ΔS_{BC} .
- ➌ Le gaz dans l'état d'équilibre C est mis en contact avec un thermostat de température T_A tandis que son volume est maintenu constant à la valeur V_A . Calculer la variation de l'entropie ΔS_{CA} et le transfert thermique Q_{CA} .
- ➍ En déduire l'entropie créée $S_{\text{créée}, CA}$ au cours de la transformation isochore CA. Conclure.
- ➎ Représenter le cycle sur un diagramme entropique (T, S).



4 Transformations dans un cylindre (d'après ATS 2000) ★★☆

→ corrigé p. 410

Cet exercice académique a pour but de comprendre les différences et les points communs des propriétés des transformations rencontrées dans les exercices de thermodynamique. Il est donc utile de manier dans un premier temps des relations littérales avec un maximum de rapport de grandeurs de même type, relations qu'on exploitera dans de nombreuses situations, et les applications numériques, qui pourront être effectuées en fin d'exercice, feront l'objet d'arrondis, tant dans les données que dans les résultats, sans nuire à la compréhension.

Un cylindre vertical, fermé par un piston sans masse et mobile sans frottement, contient un gaz diatomique supposé parfait. L'ensemble est placé dans un milieu thermostaté de température T_0 où règne une pression P_0 . Les conditions initiales sont les suivantes : Le cylindre de volume V_0 contient n moles de gaz à la température T_0 et le piston est à l'équilibre. On considère 4 cylindres identiques, sauf en ce qui concerne les parois et on place une masse totale M sur chacun des pistons comme suit :

- Cylindre 1 : parois diathermanes, on place M brutalement.
- Cylindre 2 : parois diathermanes, on place des masselottes aussi petites que l'on veut, très lentement, jusqu'à une masse totale M .
- Cylindre 3 : parois athermanes (= adiabatiques), on place M brutalement.
- Cylindre 4 : parois athermanes, on place des masselottes aussi petites que l'on veut, très lentement, jusqu'à une masse totale M .

On note avec un indice i les grandeurs et fonctions d'état de chaque cylindre i dans son état d'équilibre final. Pour chaque expression littérale, effectuer les applications numériques rapides avec : $P_0 = 1 \text{ bar}$; $T_0 = 300 \text{ K}$; $V_0 = 4,8 \text{ L}$; $n = 0,2 \text{ mol}$; $M = 50 \text{ kg}$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; $S = 50 \text{ cm}^2$; $R = 8 \text{ USI}$; $\gamma = 7/5$.

- ➊ Pour chaque cylindre, caractériser la transformation et déterminer l'expression de la pression finale. Dans ce qui suit, on pourra utiliser le rapport des pressions $\alpha_i = P_i / P_0$ pour alléger les calculs. En déduire la température finale des cylindres 1,2 et 4. On ne cherche pas pour l'instant à déterminer T_3 , mais on peut l'utiliser pour exprimer les grandeurs demandées dans ce qui suit. Exprimer les volumes dans l'état final.
- ➋ Exprimer la variation d'énergie interne pour chaque cylindre, puis le travail et la chaleur reçus par le gaz. On peut maintenant déterminer la température T_3 . Montrer qu'elle vaut : $T_3 = T_0 \frac{\alpha_3(\gamma-1)+1}{\gamma}$
- ➌ Pour chaque cylindre, déterminer la variation d'entropie, l'entropie échangée et l'entropie créée.
- ➍ Commenter tous ces résultats, qu'on rassemblera avantageusement dans un tableau.

1 Détentes d'un gaz parfait

→ énoncé p. 404

- ❶ Pour chaque détente on cherche à identifier la réversibilité ou l'irréversibilité des transformations. Pour cela il faut suivre scrupuleusement le **point méthode** p. 399.

Étape 1 : On cherche à identifier les paramètres de l'état final.

► La détente de Joule-Gay-Lussac (JGL) est un cas particulier, car l'obtention des grandeurs thermodynamiques de l'état d'équilibre final n'est possible qu'après avoir identifié la chaleur échangée Q . Comme le gaz parfait est contenu dans une enceinte isolée mécaniquement, $W = 0$ et isolé thermiquement, $Q = 0$. En appliquant le premier principe on obtient : $\Delta U_{A \rightarrow B} (\text{JGL}) = C_V (T_B - T_A) = 0$ donc $T_B = T_A = T_0$

Puis en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits sur cette transformation isotherme, on détermine P_B sachant que $V_B = 2V_A$:

$$P_A V_A = P_B V_B = P_B 2V_A \quad \text{d'où : } P_B = \frac{P_A}{2} = \frac{P_0}{2}$$

► Lorsque la transformation est brutale (TB), le système n'est pas en équilibre thermique entre l'état initial et final. La transformation est donc monotherme, d'où : $T_B = T_A = T_0$

À l'état final, le piston est à l'équilibre mécanique avec la pression extérieure, d'où : $P_B = \frac{P_0}{2}$

De plus la détermination du volume s'effectue par le biais de l'équation d'état du gaz parfait,

$$\text{d'où : } P_B V_B = P_A V_A \quad \text{soit : } V_B = \frac{P_A V_A}{P_B} = 2V_0$$

► Lorsque la transformation est uniformément lente (TL), cela assure au système un équilibre thermique pendant toute l'évolution. La transformation est donc isotherme, d'où : $T_B = T_A = T_0$

À l'état final, le piston est à l'équilibre mécanique avec la pression extérieure, d'où : $P_B = \frac{P_0}{2}$

De plus la détermination du volume s'effectue par le biais de l'équation d'état du gaz parfait,

$$\text{d'où : } P_B V_B = P_A V_A \quad \text{soit : } V_B = \frac{P_A V_A}{P_B} = 2V_0$$

Étape 2 : On cherche à identifier la chaleur échangée Q .

Pour toutes ces détentes, la variation d'énergie interne s'écrit : $\Delta U_{A \rightarrow B} = C_V (T_B - T_A) = 0$

En appliquant le premier principe sur chacun de ces systèmes, on obtient : $Q_{A \rightarrow B} = -W_{A \rightarrow B} = \int_{V_A}^{V_B} P_{ext} dV$

► Transformation brutale : $P_{ext} = P_B = cste$ d'où : $Q_{A \rightarrow B} (\text{TB}) = P_B (V_B - V_A) = \frac{P_0 V_0}{2}$

► Transformation lente : $P_{ext} = P = \frac{nRT_0}{V}$ d'où : $Q_{A \rightarrow B} (\text{TL}) = nRT_0 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT_0 \ln 2$

Étape 3 : À l'aide des identités thermodynamiques, en déduire la variation de l'entropie.

La variation d'entropie se calcule de la même façon pour les trois transformations, soit à partir de l'expression de l'entropie du gaz parfait, soit en la retrouvant à l'aide des identités thermodynamiques, en choisissant un chemin quelconque, par exemple réversible :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{A \rightarrow B} = \int_{T_A}^{T_B} C_V \frac{dT}{T} + \int_{V_A}^{V_B} nR \frac{dV}{V} = C_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

→ Détente de Joule-Gay-Lussac :

$$\Delta S(JGL) = nR \ln 2$$

→ Détente brutale :

$$\Delta S(TB) = nR \ln 2$$

→ Détente lente :

$$\Delta S(TL) = nR \ln 2$$

Étape 4 : En déduire l'entropie échangée $S_{échangée}$

L'entropie échangée se calcule identiquement pour tous : $S_{échangée,A \rightarrow B} = \frac{Q_{A \rightarrow B}}{T_0}$

→ Détente de Joule-Gay-Lussac :

$$S_{échangée,A \rightarrow B}(JGL) = 0$$

→ Détente brutale :

$$S_{échangée,A \rightarrow B}(TB) = \frac{P_0 V_0}{2 T_0} = \frac{nR}{2}$$

→ Détente lente :

$$S_{échangée,A \rightarrow B}(TL) = nR \ln 2$$

Étape 5 : Ecrire le bilan entropique permettant d'obtenir l'entropie créée $S_{crée}$.

Le bilan entropique s'obtient identiquement pour ces trois systèmes : $S_{crée,A \rightarrow B} = \Delta S_{A \rightarrow B} - S_{échangée,A \rightarrow B}$

→ Détente de Joule-Gay-Lussac :

$$S_{crée,A \rightarrow B}(JGL) = nR \ln 2 > 0$$

→ Détente brutale :

$$S_{crée,A \rightarrow B}(TB) = nR \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) > 0$$

→ Détente lente :

$$S_{crée,A \rightarrow B}(TL) = 0$$

Ainsi d'après le second principe, lorsque $S_{crée}$ est strictement positive, la transformation est irréversible. C'est le cas d'une détente de Joule-Gay-Lussac et d'une détente brutale. L'irréversibilité est due à la diffusion de particules des zones de fortes concentrations vers les basses concentrations. Par contre lorsque la détente est infiniment lente, l'entropie créée est nulle, ce qui traduit, d'après le second principe, un phénomène réversible. À tout instant, les états intermédiaires du système sont à l'équilibre, car la perturbation créée est trop faible pour produire des inhomogénéités. Toutes les transformations ont le même état initial et le même état final. La variation de l'entropie (ΔS) est donc la même puisque c'est une fonction d'état. Par contre les entropies créées et échangées diffèrent dans les trois cas car elles dépendent du chemin suivi.

2 On peut classer les entropies créées en fonction de leur importance, ainsi :

$$S_{crée}(\text{Joule-Gay-Lussac}) > S_{crée}(\text{Transformation Brutale}) > S_{crée}(\text{Transformation Lente})$$

Cette classification n'est pas étonnante. Il est facile de comprendre que dans une détente de Joule-Gay-Lussac, les particules ont un espace vide dans lequel elles peuvent se mouvoir et donc créer plus de désordre qu'une détente brutale où le piston mobile permet de limiter la zone de diffusion de ces particules. Au contraire lors d'une transformation lente, le volume déplacé par le piston est extrêmement petit, ne permettant pas d'augmenter le désordre dans le gaz.

Bien comprendre

Une détente de Joule-Gay-Lussac est toujours irréversible, le gaz ne peut pas revenir dans son état initial naturellement. Il faut bien avoir en tête que le travail est nul durant toute la transformation. En effet même si le volume final est supérieur au volume initial, le gaz ne subit aucune force provenant du milieu extérieur, en raison de la rigidité des parois.

2 Identités thermodynamiques et lois de Laplace

→ énoncé p. 404

Soit un gaz à la pression P , contenu dans une enceinte fermée, et en contact avec un thermostat à la température T . Il subit une transformation réversible infinitésimale d'un état d'équilibre A vers un état d'équilibre A'.

Les deux principes de la thermodynamique s'écrivent :

1^{er} principe : $dU = \delta W + \delta Q$; 2^e principe : $\delta S_{\text{créée}} = 0$

En appliquant un bilan entropique, on obtient donc : $dS = \delta S_{\text{échangée}} = \frac{\delta Q}{T}$ d'où $\delta Q = TdS$

Le système reste en équilibre mécanique pendant la transformation réversible donc : $\delta W = -PdV$

Soit $\boxed{dU = -PdV + TdS}$ ou $\boxed{TdS = dU + PdV}$ (1) la première identité thermodynamique

En introduisant la définition de l'enthalpie $H = U + PV$ dans l'expression ci-dessus, on obtient :

$$dH = dU + PdV + VdP = TdS - PdV + PdV + VdP$$

d'où : $\boxed{dH = VdP + TdS}$ ou $\boxed{TdS = dH - VdP}$ (2) la deuxième identité thermodynamique

Pour une transformation adiabatique ($\delta S_{\text{échangée}} = 0$) et réversible ($\delta S_{\text{créée}} = 0$), l'entropie est constante : $dS = 0$.

$$(1) \text{ appliqué au GP : } dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = 0 \Rightarrow C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = 0$$

$$\text{Soit : } \frac{nR}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} + (\gamma-1) \frac{dV}{V} = 0 \quad (3)$$

qui est la différentielle logarithmique de (voir p. 393) :

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = \text{cste}}$$

$$(2) \text{ appliqué au GP : } dS = \frac{dH}{T} - \frac{VdP}{T} = 0 \Rightarrow C_P \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P} = 0$$

$$\text{Soit : } \frac{\gamma nR}{\gamma-1} \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P} = 0 \Rightarrow \gamma \frac{dT}{T} + (1-\gamma) \frac{dP}{P} = 0 \quad (4)$$

qui est la différentielle logarithmique de :

$$\boxed{T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cste}}$$

Pour finir, $\gamma(3)-(4)$ donne $\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$ qui est la différentielle logarithmique de $\boxed{PV^\gamma = \text{cste}}$

Bien comprendre

Un seul de ces calculs suffit pour obtenir une équation de Laplace, les deux autres formules peuvent être obtenues en remplaçant la variable à changer par la relation des gaz parfaits $PV = nRT$.

3 Transformation cyclique d'un gaz parfait

→ énoncé p. 404

1 La compression subite par le gaz parfait est isentropique, c'est-à-dire que l'entropie est constante durant toute l'évolution, c'est une transformation adiabatique réversible. Pour obtenir les paramètres P_B et V_B dans l'état d'équilibre B on utilise les équations de Laplace, soient $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cste}$ pour déterminer la pression et $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$ pour le volume.

– Détermination de la pression dans l'état d'équilibre B :

$$T_A^\gamma P_A^{1-\gamma} = T_B^\gamma P_B^{1-\gamma} \Rightarrow P_B = P_A \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} = 10^6 \text{ Pa}$$

– Détermination du volume dans l'état d'équilibre B :

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Rightarrow V_B = V_A \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 8.10^{-5} \text{ m}^3$$

Par la suite, on peut calculer la quantité de mol n dans l'état d'équilibre A qui reste constante durant toutes les évolutions du gaz parfait :

$$P_A V_A = nRT_A \Rightarrow n = \frac{P_A V_A}{RT_A} = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

- 2 À présent le gaz subit une transformation isotherme à la température T_B jusqu'à atteindre un état d'équilibre C. On peut donc écrire $P_B V_B = P_C V_C$ d'où : $P_C = \frac{P_B V_B}{V_C} = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

On a le choix entre trois équations pour déterminer la variation de l'entropie ΔS d'un gaz parfait. On choisit $S(T,V)$ car la variable T est constante. Pour rappel, d'après la première identité thermodynamique, de la première loi de Joule et de l'équation d'état des gaz parfaits, on obtient $S(T,V)$:

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV \Rightarrow dS = C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

soit en intégrant : $S(T,V) = C_V \ln T + nR \ln V + cste$

$$\Delta S_{BC}(T,V) = S_C - S_B = C_V \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) + nR \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)$$

$T_B = T_C$, d'où :

$$\Delta S_{BC} = nR \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = nR \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = 0,48 \text{ J.K}^{-1}$$

- 3 En conservant le volume constant, on abaisse la température jusqu'à atteindre l'état d'équilibre A. L'expression de la variation de l'entropie s'écrit :

$$\Delta S_{CA}(T,V) = S_A - S_C = C_V \ln\left(\frac{T_A}{T_C}\right) + nR \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right)$$

Or $V_C = V_A$, d'où :

$$\Delta S_{CA} = C_V \ln\left(\frac{T_A}{T_C}\right) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) = -0,48 \text{ J.K}^{-1}$$

Durant cette transformation isochore, le gaz n'échange pas de travail avec le milieu extérieur, d'où :

$$\Delta U_{CA} = Q_{CA} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_A - T_B) = -97,7 \text{ J}$$

- 4 L'entropie créée lors de la transformation CA, se détermine en réalisant un bilan entropique. Pour cela on doit calculer l'entropie échangée entre le gaz parfait et le milieu extérieur durant cette évolution. Le gaz est mis en contact avec un thermostat à température T_A .

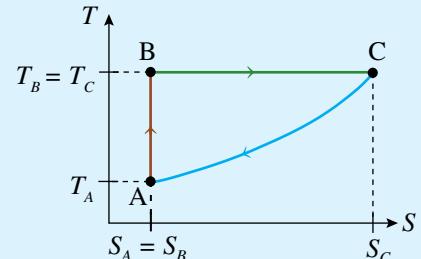
$$S_{échangée,CA} = \frac{Q_{CA}}{T_{échangée,CA}} = \frac{nR}{(\gamma-1)} \frac{(T_A - T_B)}{T_A} = -68 \text{ J.K}^{-1}$$

Le bilan entropique de cette transformation est :

$$\Delta S_{CA} = S_{créée,CA} + S_{échangée,CA} \Rightarrow S_{créée,CA} = \Delta S_{CA} - S_{échangée,CA} = 0,20 \text{ J.K}^{-1}$$

La transformation n'est pas réversible, car l'entropie créée est strictement supérieure à 0. Ce phénomène est dû à la diffusion de la température, allant du plus chaud T_C vers le plus froid T_A .

- 5 Le diagramme entropique est représenté ci-contre. La transformation totale est cyclique, car le gaz parfait revient dans son état d'équilibre initial A après être passé par deux états d'équilibres intermédiaires, B et C. L'aire et le sens de parcours du cycle sont identiques à ceux du diagramme de Clapeyron (P,V).



4 Transformations dans un cylindre

→ énoncé p. 405

- ❶ Dans l'état final, les quatre systèmes atteignent le même état d'équilibre mécanique, la pression du gaz étant égale à la pression extérieure :

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_0 + \frac{Mg}{S} = P_i = 2 \text{ bar} \quad \text{et} \quad \alpha_i = \alpha = 2$$

À l'état final les deux premiers cylindres sont en équilibre thermique (parois diathermanes) avec l'extérieur :

$$T_1 = T_2 = T_0 = 300 \text{ K}$$

La transformation est brutale dans le cylindre 1 qui n'est pas en équilibre thermique lors du passage de l'état initial à l'état final, contrairement au cylindre 2 pour lequel la transformation uniformément lente assure un équilibre thermique pendant toute la transformation, qui est donc réversible. La première transformation est donc monotherme et la seconde est isotherme.

Les transformations subies par le cylindre 3 et 4 sont respectivement adiabatique irréversible et adiabatique réversible. Les lois de Laplace ne s'appliquent que dans ce dernier cas :

$$T_4^{\gamma} P_4^{1-\gamma} = T_0^{\gamma} P_0^{1-\gamma} \Rightarrow T_4 = T_0 \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 366 \text{ K}$$

À ce stade on ne peut pas calculer T_3 .

Dans les fluides des cylindres 1 et 2, les températures initiales et finales sont égales d'où :

$$P_i V_i = P_0 V_0 \Rightarrow V_1 = V_2 = \frac{P_0 V_0}{P_i} = \frac{V_0}{\alpha} = \frac{V_0}{2} = 2,4 \text{ L}$$

Dans le cylindre 4, on peut calculer le volume avec la loi des gaz parfaits ou une loi de Laplace :

$$P_4 V_4^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma} \Rightarrow V_4 = V_0 \alpha^{-\frac{1}{\gamma}} = 2,9 \text{ L}$$

Dans le cylindre 3, seule la loi des gaz parfaits est pertinente : $\frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{P_0 V_0}{T_0}$

- ❷ Pour tous les systèmes la variation d'énergie interne s'écrit : $\Delta U_{0 \rightarrow i} = C_V (T_i - T_0) = \frac{nR}{\gamma-1} (T_i - T_0)$

Soit : $\Delta U_{0 \rightarrow 1} = \Delta U_{0 \rightarrow 2} = 0 \text{ J}$, $\Delta U_{0 \rightarrow 3} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_3 - T_0)$ et $\Delta U_{0 \rightarrow 4} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_4 - T_0) = 264 \text{ J}$

Le travail s'écrit pour tous les systèmes : $W_{0 \rightarrow i} = - \int_{V_0}^{V_i} P_{ext} dV$

Sur la transformation brutale 1, $P_{ext} = P_1 = cste$. Sur la transformation réversible 2, $P_{ext} = P = \frac{nRT_0}{V}$

D'où : $W_{0 \rightarrow 1} = -P_1 (V_1 - V_0) = 480 \text{ J}$ et $W_{0 \rightarrow 2} = -nRT_0 \ln\left(\frac{V_2}{V_0}\right) = 333 \text{ J}$

D'où l'on déduit à l'aide du premier principe :

$$Q_{0 \rightarrow 1} = \Delta U_{0 \rightarrow 1} - W_{0 \rightarrow 1} = -480 \text{ J} \quad \text{et} \quad Q_{0 \rightarrow 2} = \Delta U_{0 \rightarrow 2} - W_{0 \rightarrow 2} = -333 \text{ J}$$

Pour les transformations 3 et 4, il est plus commode de commencer par la chaleur : $Q_{0 \rightarrow 3} = Q_{0 \rightarrow 4} = 0 \text{ J}$

D'où, à l'aide du premier principe :

$$W_{0 \rightarrow 4} = \Delta U_{0 \rightarrow 4} - Q_{0 \rightarrow 4} = 264 \text{ J} \quad \text{et} \quad W_{0 \rightarrow 3} = -P_3 (V_3 - V_0) = \Delta U_{0 \rightarrow 3}$$

La dernière équation permet maintenant de déterminer T_3 : $-P_3(V_3 - V_0) = \frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_0)$

Soit : $-(\gamma-1)P_3 \left[\frac{nRT_3}{P_3} - \frac{nRT_0}{P_0} \right] = nR(T_3 - T_0)$

Puis $(\gamma-1)(T_3 - \alpha T_0) = T_0 - T_3$ d'où : $T_3 = T_0 \frac{\alpha(\gamma-1)+1}{\gamma} = 385 \text{ K}$

Puis on peut en déduire : $V_3 = \frac{T_3 P_0}{T_0 P_3} V_0 = 3,1 \text{ L}$ et $\Delta U_{0 \rightarrow 3} = W_{0 \rightarrow 3} = 340 \text{ J}$

- ③ La variation d'entropie se calcule de la même façon pour les quatre transformations, soit à partir de l'expression de l'entropie du gaz parfait, soit en la retrouvant à l'aide des identités thermodynamiques en choisissant un chemin quelconque, par exemple réversible :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = \frac{C_V dT}{T} + \frac{nR dV}{V} \Rightarrow \Delta S_{0 \rightarrow i} = \int_{T_0}^{T_i} \frac{nR}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + \int_{V_0}^{V_i} nR \frac{dV}{V}$$

D'où : $\Delta S_{0 \rightarrow i} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_i}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{V_i}{V_0} \right)$

Remarque : On obtient évidemment le même résultat en appliquant $S(\text{GP}) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln T + nR \ln V + cste.$

D'où : $\Delta S_{0 \rightarrow 1} = \Delta S_{0 \rightarrow 2} = -nR \ln \alpha = -1,11 \text{ J.K}^{-1}$

$$\Delta S_{0 \rightarrow 3} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_3}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{V_3}{V_0} \right) = 0,31 \text{ J.K}^{-1}$$

$$\Delta S_{0 \rightarrow 4} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_4}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{V_4}{V_0} \right) = 0 \text{ J.K}^{-1}$$

L'entropie échangée se calcule identiquement pour tous : $S_{échangée,0 \rightarrow i} = \frac{Q_{0 \rightarrow i}}{T_{échangée}}$

D'où : $S_{échangée,0 \rightarrow 1} = \frac{Q_{0 \rightarrow 1}}{T_0} = -1,60 \text{ J.K}^{-1}$ et $S_{échangée,0 \rightarrow 2} = \frac{Q_{0 \rightarrow 2}}{T_0} = -1,11 \text{ J.K}^{-1}$

$$S_{échangée,0 \rightarrow 3} = S_{échangée,0 \rightarrow 4} = \frac{Q_{0 \rightarrow 3}}{T_0} = \frac{Q_{0 \rightarrow 4}}{T_0} = 0 \text{ J.K}^{-1}$$

L'entropie créée s'obtient identiquement pour tous, en effectuant un bilan d'entropie :

$$S_{créée,0 \rightarrow i} = \Delta S_{0 \rightarrow i} - S_{échangée,0 \rightarrow i}$$

D'où : $S_{créée,0 \rightarrow 1} = \Delta S_{0 \rightarrow 1} - S_{échangée,0 \rightarrow 1} = 0,49 \text{ J.K}^{-1}$ et $S_{créée,0 \rightarrow 2} = \Delta S_{0 \rightarrow 2} - S_{échangée,0 \rightarrow 2} = 0 \text{ J.K}^{-1}$

$$S_{créée,0 \rightarrow 3} = \Delta S_{0 \rightarrow 3} - S_{échangée,0 \rightarrow 3} = 0,31 \text{ J.K}^{-1}$$
 et $S_{créée,0 \rightarrow 4} = \Delta S_{0 \rightarrow 4} - S_{échangée,0 \rightarrow 4} = 0 \text{ J.K}^{-1}$

On obtient bien une entropie créée nulle pour les deux transformations réversibles et strictement positive pour les autres.

- 4 On récapitule dans le tableau ci-dessous, les expressions des grandeurs d'échange et les variations des fonctions d'état et les variations de la température.

Transformation	ΔT	ΔU	W	Q	ΔS	$S_{échangée}$	$S_{créée} = \Delta S - S_{échangée}$
Cylindre 0 → 1 (monotherme non-réversible)	0	0	$-P_1(V_1 - V_0)$	$-W$	$-nR \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$	$\frac{Q}{T_0}$	$-\left(nR \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) + \frac{Q}{T_0}\right)$
Cylindre 0 → 2 (isotherme réversible)	0	0	$-nRT_0 \ln\left(\frac{V_2}{V_0}\right)$	$-W$	$-nR \ln\left(\frac{P_2}{P_0}\right)$	$\frac{Q}{T_0}$	0
Cylindre 0 → 3 (adiabatique non-réversible)	$T_0 \left(\frac{\alpha(\gamma-1)+1}{\gamma} - 1 \right)$	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_0)$	ΔU	0	$\frac{nR}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_3}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V_3}{V_0}\right)$	0	ΔS
Cylindre 0 → 4 (adiabatique réversible)	$T_0 \left(\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_4 - T_0)$	ΔU	0	0	0	0

Analyses des résultats de ces expressions :

- Le travail est toujours positif, car le gaz est comprimé, $W > 0$.
- S'il peut échanger de la chaleur avec le milieu extérieur, alors le gaz en fournit nécessairement lors de la compression, $Q \leq 0$.
- En conséquence, il fournit forcement de l'entropie à l'extérieur, $S_{échangée} \leq 0$.
- Le signe de la variation d'entropie est plus délicat et dépend des conditions de la transformation :
 - Cas du cylindre 1 et 2, les systèmes évoluent vers un état moins désordonné car ils ont moins d'espace et conservent la même température, $\Delta S < 0$.
 - Cas du cylindre 3, le système a moins d'espace, mais il s'est échauffé, il est donc plus désordonné en raison de l'agitation moléculaire, $\Delta S > 0$.
 - Cas du cylindre 4, l'évolution adiabatique réversible est isentropique, $\Delta S = 0$ et $S_{créée} = 0$.

Bien comprendre

- On obtient généralement l'état d'équilibre final avec quelques indications sur la transformation et à partir de l'état d'équilibre initial, mais pas toujours (cylindre 3).
- Le calcul des variations des fonctions d'état ($\Delta U, \Delta S$) est toujours faisable puisqu'il ne dépend pas de la transformation.
- En général, il est plus facile de calculer d'abord W , puis Q . Pour une transformation adiabatique cependant $Q = 0$ permet d'obtenir rapidement W .
- Le calcul de Q est indispensable pour obtenir $S_{échangée}$. $S_{créée}$ s'obtient en dernier et sa valeur doit être cohérente avec le second principe et permet de conclure sur la réversibilité.

À méditer

Parmi les contrastes que l'on peut observer entre les phénomènes physiques, il n'en est pas de plus grand que celui qui oppose les phénomènes irréversibles aux phénomènes réversibles.
MAX PLANCK (1858-1947)

Machines thermiques

Une grande partie de notre technologie repose sur le principe des transferts énergétiques. La nature nous permet souvent d'accéder directement à l'énergie mécanique (grâce au vent et aux chutes d'eau), bien que la plupart des énergies utilisées soient sous forme thermique, issues de la combustion des énergies fossiles (pétrole, gaz, charbon) ou de la fission nucléaire. De nombreuses machines thermiques constituées d'un fluide circulant en circuit fermé se trouvent dans les chaînes énergétiques, depuis la production d'électricité dans les centrales jusqu'aux utilisations industrielles ou domestiques (moteurs de véhicules ou d'appareils, systèmes de chauffage, de refroidissement...). Pour comprendre comment s'opèrent les transferts d'énergie entre une machine thermique et son milieu extérieur, on applique le premier et le second principes de la thermodynamique. Le cours de ce chapitre n'introduit pas de concepts nouveaux, mais constitue une application riche de ceux élaborés dans les chapitres 19 et 20 et des principes posés dans les chapitres 21 et 22. À ce titre, l'ensemble de ce cours peut être considéré comme une succession d'exercices d'application et travaillé comme tel.

N. B. : Dans les diagrammes, les transformations isobare, isochore, isotherme et adiabatique réversible sont représentées respectivement par des courbes fléchées de couleur rouge, bleue, verte et marron.

I Transformation cyclique d'un système fermé

1. Description

Définition

Une **machine thermique** est un mécanisme plus ou moins complexe dans lequel un système thermodynamique, noté Σ , généralement constitué d'un fluide, échange du travail W et de la chaleur Q avec le milieu extérieur.

On se limitera ici à des machines utilisant un fluide, la plupart du temps un gaz parfait.

Propriétés

- Une machine thermique fonctionne pendant une durée indéfinie, pour cela le système thermodynamique doit réaliser des **cycles**, c'est-à-dire qu'il revient périodiquement à son état initial. L'énergie interne U et l'entropie S d'un système étant des fonctions d'état, on a :

$$\Delta U_{cycle} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S_{cycle} = 0$$

- Les échanges thermiques se font avec une ou plusieurs zones distinctes du milieu extérieur, dont les températures sont en général différentes et variables. On modélisera ici chacune de ces zones par un **thermostat parfait** (appelé aussi **source**), c'est-à-dire dont la température est fixe et ne varie pas au cours des échanges.
- Les transformations successives du fluide dans la machine seront modélisées par des transformations simples entre des états clairement identifiés.

En étudiant les cycles réels, on constate que les échanges ne se font pas toujours avec des thermostats (mise en route d'un climatiseur par exemple), ni que les transformations sont simples, comme on le voit dans le schéma de l'exercice n° 1 (*voir p. 431*). Néanmoins les modélisations utilisées permettent de dégager de nombreuses propriétés applicables aux machines réelles.

Définition

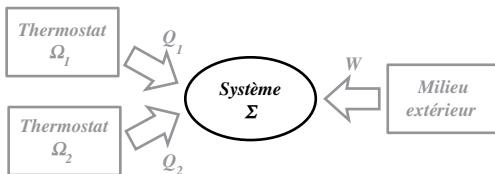
- On construit un **schéma de principe** d'une machine thermique en représentant le système au centre d'échanges avec l'extérieur et en identifiant les différents thermostats. Les échanges sont représentés par des flèches entre, d'une part le système thermodynamique, et, d'autre part, l'extérieur (travail) et les thermostats (chaleurs).
- Une grandeur d'échange W ou Q est toujours exprimée du point de vue du système, elle est positive s'il la reçoit, négative s'il la fournit.

POINT MÉTHODE

Effectuer un schéma de principe d'une machine thermique

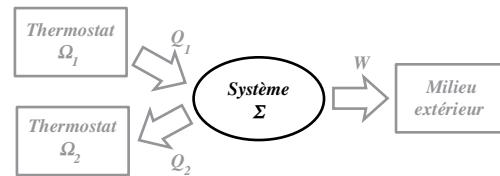
- On distingue deux façons de réaliser ces **schémas de principe**.

Soit en indiquant les échanges par des flèches systématiquement orientées vers Σ et en y associant des grandeurs algébriques.



Signes des échanges éventuellement inconnus
 W, Q_1, Q_2 algébriques

Soit en mettant en évidence le sens réel du transfert par une flèche partant de Σ pour un transfert négatif, et par une flèche allant vers Σ pour un transfert positif.



Signes des échanges connus
 $W < 0, Q_1 > 0, Q_2 < 0$

Important : dans ce qui suit, la première représentation sera privilégiée lorsqu'on ne préjuge pas des signes des grandeurs d'échange (étude d'un cas général par exemple), par contre lorsque les signes sont clairement identifiés, on choisira la deuxième représentation, car elle est plus visuelle.

Définitions

- Un **moteur** est une machine thermique qui fournit du travail à l'extérieur. Sur un diagramme de Clapeyron, un cycle moteur est parcouru dans le sens horaire : $W_{\text{moteur}} < 0$
- Un **récepteur** est une machine thermique qui reçoit du travail de la part de l'extérieur. Sur un diagramme de Clapeyron, un cycle récepteur est parcouru dans le sens trigonométrique : $W_{\text{récepteur}} > 0$

- Parmi les récepteurs, on trouve le réfrigérateur, le climatiseur, la pompe à chaleur.
- Les propriétés des machines seront toujours dégagées en appliquant le premier et le second principes de la thermodynamique sur le système Σ (fluide effectuant des cycles).

2. La machine monotherme**Définition**

Une **machine monotherme** est un système en contact avec un seul thermostat noté Ω , à la température T_Ω (une seule source de chaleur).

Le schéma de principe de ce système figure ci-contre. Il subit une transformation cyclique, au cours de laquelle il échange de l'énergie thermique Q avec une source de chaleur et du travail W pouvant être mécanique ou électrique. On applique les deux principes à ce système.



Schéma de principe d'une machine monotherme W et Q algébriques

$$\Rightarrow W = -Q \quad (1)$$

→ 1^{er} principe thermodynamique : $\Delta U_{cycle} = W + Q$

Or le système effectue un cycle : $\Delta U_{cycle} = 0$

→ 2^e principe thermodynamique : $S_{créée} \geq 0$

Or : – le système effectue un cycle : $\Delta S_{cycle} = S_{échangée} + S_{créée} = 0 \Rightarrow S_{échangée} = -S_{créée} \leq 0$
– le système Σ n'échange du transfert thermique qu'avec un seul thermostat d'où :

$$S_{échangée} = \frac{Q}{T_\Omega} \leq 0 \quad (2)$$

De (1) et (2) on déduit que, pour une machine monotherme : $Q \leq 0$ et $W \geq 0$. Ainsi une machine monotherme ne peut que recevoir du travail et céder de la chaleur, c'est nécessairement un récepteur. C'est le cas par exemple des radiateurs électriques. On ne peut donc pas concevoir une machine cyclique qui délivrerait du travail (moteur) à partir d'une unique source de chaleur.

Énoncé

Principe de Carnot : Pour qu'un système cyclique fournisse du travail, il doit obligatoirement échanger du transfert thermique avec, au minimum, deux sources de chaleur possédant des températures différentes, le moteur monotherme n'existe donc pas.

On voit que le second principe permet d'imposer des conditions sur les transferts thermiques. Le premier principe seul ne suffit pas à démontrer l'impossibilité du moteur monotherme.

3. La machine ditherme

Définition

Une **machine ditherme** est un système qui est en contact avec un thermostat Ω_C , dit chaud, à la température T_C et un thermostat Ω_F , dit froid, à la température T_F , avec $T_C > T_F$.

La machine thermique ditherme est la plus rencontrée en pratique, bien qu'il en existe d'autres comprenant plus de deux sources de chaleur. Son schéma de principe figure ci-contre.

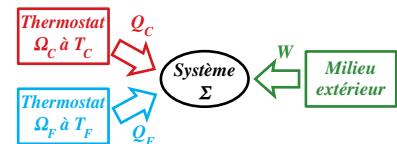


Schéma de principe d'une machine ditherme W , Q_c et Q_f algébriques

Le système subit une transformation cyclique au cours de laquelle il échange le travail W avec l'extérieur, l'énergie thermique Q_C avec la source chaude Ω_C et l'énergie thermique Q_F avec la source froide Ω_F .

→ 1^{er} principe thermodynamique : $\Delta U_{cycle} = W + Q_C + Q_F$

Or le système effectue un cycle : $\Delta U_{cycle} = 0 \Rightarrow W = -(Q_C + Q_F)$

→ 2^e principe thermodynamique : $S_{créée} \geq 0$

Or : – le système effectue un cycle : $\Delta S_{cycle} = S_{échangée} + S_{créée} = 0 \Rightarrow S_{échangée} = -S_{créée} \leq 0$
– le système Σ échange du transfert thermique avec deux thermostat d'où :

$$S_{échangée} = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$$

Si les transformations sont réversibles : $S_{\text{créée}} = 0$ d'où $S_{\text{échangée}}(\text{réversible}) = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0$
On peut généraliser le raisonnement à un nombre quelconque de thermostats.

Énoncé

Inégalité de Clausius : une machine thermique qui échange de la chaleur avec n thermostats vérifie nécessairement l'inégalité suivante où T_i est la température du i -ème thermostat : $\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$

Soit pour une machine ditherme échangeant avec une source chaude et une source froide : $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$
L'égalité est vérifiée si le cycle effectué par le fluide est réversible.

→ Le diagramme de Raveau

Il est possible d'identifier les différents fonctionnements des machines dithermes en traçant un **diagramme de Raveau** qui consiste à porter sur l'axe des abscisses Q_F , le transfert thermique reçu par le système de la part de la source froide, et sur l'axe des ordonnées Q_C celui reçu de la part de la source chaude. On utilise à nouveau les deux principes pour identifier diverses zones dans ce diagramme.

→ 2^e principe : d'après l'inégalité de Clausius, tous les points de fonctionnement d'une machine doivent vérifier :

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$$

Seuls les points de coordonnées (Q_F, Q_C) se situant au-dessous de la droite d'équation (en pointillés rouges) : $Q_C = -\frac{T_C}{T_F} Q_F$ sont possibles, tous ceux situés au-dessus sont impossibles, car contraires au second principe (zone rose).

→ 1^{er} principe : d'après la relation $W = -(Q_C + Q_F)$ qui en découle, on détermine le signe du transfert thermique total selon la nature de la machine :

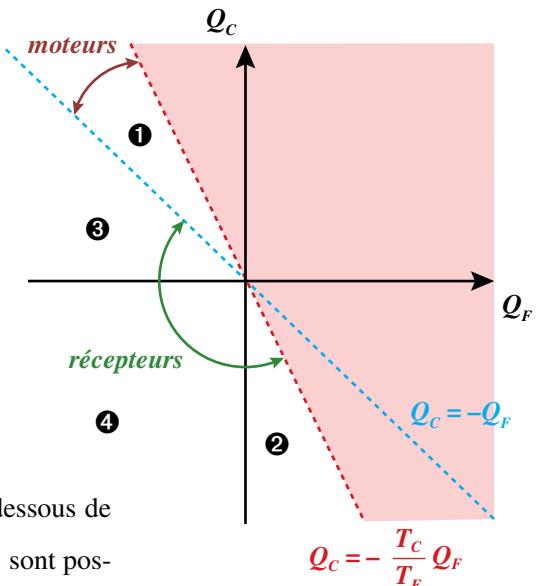
$$\text{moteur : } W < 0 \Rightarrow Q_C + Q_F > 0$$

$$\text{récepteur : } W > 0 \Rightarrow Q_C + Q_F < 0$$

La limite entre ces deux situations est la droite d'équation $Q_C + Q_F = 0$, soit $Q_C = -Q_F$ en pointillés bleus sur le diagramme (moins inclinée que la précédente compte tenu de leurs coefficients directeurs respectifs). Le moteur est au-dessus de la droite, le récepteur en dessous. Ces conditions font apparaître quatre zones distinctes (notées ①②③④) caractérisant le fonctionnement des machines dithermes. Le tableau suivant montre que seules les zones ① et ② du diagramme de Raveau correspondent à des machines dithermes utiles.

Définitions

La rentabilité d'une machine ditherme sur un cycle s'exprime par son **rendement**, noté r , ou son **efficacité** énergétique, notée e , qui traduit le bénéfice pour l'utilisateur de la machine, et qui est égal au rapport de l'énergie utile récupérée par l'utilisateur sur l'énergie que cela a coûté à cet utilisateur (grandeur comptée positivement). Ils sont positifs et sans dimension.



- Le terme rendement s'utilise plutôt pour les moteurs, $r < 1$.
- Le terme efficacité s'utilise plutôt pour les récepteurs, $e > 1$ (voir remarque importante p. 424).

Zone	❶	❷	❸	❹
Signe des échanges	$W < 0 ; Q_c > 0 ; Q_f < 0$	$W > 0 ; Q_c < 0 ; Q_f > 0$	$W > 0 ; Q_c > 0 ; Q_f < 0$	$W > 0 ; Q_c < 0 ; Q_f < 0$
Schéma de principe				
Cycle	Moteur	Récepteur	Récepteur	Récepteur
Conséquence	L'énergie thermique circule de la source chaude vers la source froide (mouvement naturel) en produisant de l'énergie mécanique.	Le travail reçu fait circuler l'énergie thermique en sens inverse du sens spontané, de la source froide vers la source chaude.	Le travail reçu fait circuler la chaleur de la source chaude vers la source froide, ce qui se passe spontanément, c'est du travail gaspillé !	Le travail reçu produit de la chaleur à la fois vers la source froide et la source chaude, ce qui n'a pas de sens.
Machine	Moteur à essence, moteur Diesel	Réfrigérateur, climatiseur, pompe à chaleur	<i>Ce système n'a aucun intérêt.</i>	<i>Ce système n'a aucun intérêt.</i>

POINT MÉTHODE

Calculer un rendement ou une efficacité

- Pour calculer un **rendement** r ou une **efficacité** e , on procédera dans cet ordre :
 - Écrire r ou e en fonction du travail et de la chaleur pertinente, vérifier les signes, et utiliser des grandeurs positives : par exemple si l'utilisateur s'intéresse à la chaleur chaude et qu'elle est perdue par le système, l'énergie utile pour l'utilisateur est $-Q_c$.
 - Écrire l'expression de r ou de e en fonction uniquement des chaleurs à l'aide du premier principe :

$$W = -(Q_c + Q_f) \quad (3)$$

→ Déterminer les chaleurs en fonction des grandeurs d'état pertinentes, en s'appuyant sur les transformations réellement effectuées par le fluide dans la situation étudiée.

→ Écrire l'expression de r ou de e maximale, en fonction uniquement des températures des sources, en utilisant le second principe à travers l'inégalité de Clausius : $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0 \quad (4)$

- L'utilisation de l'inégalité de Clausius doit se faire avec vigilance en raison de la présence d'une inégalité et de grandeurs algébriques, que l'on multiplie membre à membre, pour obtenir les rapports de chaleurs nécessaires. Le lecteur est invité à vérifier les résultats suivants :

→ Si $Q_c > 0$ on pourra écrire $\frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c}$ (utile pour un moteur).

→ Si $Q_f > 0$ on pourra écrire $\frac{Q_c}{Q_f} \leq -\frac{T_c}{T_f}$ (utile pour un récepteur frigorifique).

→ Si $Q_c < 0$ on pourra écrire $\frac{Q_f}{Q_c} \geq -\frac{T_f}{T_c}$ (utile pour un récepteur pompe à chaleur).

II | Les moteurs dithermes

On se place dans la zone ❶ du diagramme de Raveau. Un transfert thermique s'effectue naturellement de la source chaude ($Q_C > 0$) vers une source froide ($Q_F < 0$) au travers d'un fluide s'écoulant dans les tuyaux du moteur, fluide qui entraîne une pièce mécanique ($W < 0$). Par exemple dans un moteur à essence de voiture, la combustion de l'essence (énergie qui coûte à l'utilisateur) crée la source chaude, la source froide est l'air ambiant, la chaleur qui y est rejetée est sans intérêt pour l'utilisateur, le gaz dans un cylindre produit du travail (énergie utile pour l'utilisateur) qui fait avancer le véhicule.

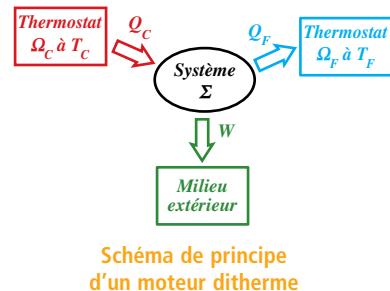


Schéma de principe
d'un moteur ditherme

1. Rendement du moteur ditherme

Définition

Le rendement d'un moteur ditherme est :

$$r = \frac{\text{énergie mécanique récupérée par l'utilisateur}}{\text{énergie thermique payée par l'utilisateur}} = \frac{-W}{Q_C}$$

En utilisant (3) l'expression du rendement devient alors : $r = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$

En utilisant (4) on majore le rendement : $r = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} \leq 1 - \frac{T_F}{T_C}$

Ce rendement est donc limité par les phénomènes d'irréversibilités ((4) découle du deuxième principe). Pour T_C et T_F fixées, le rendement est d'autant plus faible que les irréversibilités sont importantes.

Propriété

Le rendement maximal du moteur ditherme correspond à un cycle réversible et vaut :

$$r_{\text{maximum}} = r_{\text{réversible}} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

- Le rendement maximum est indépendant du système thermodynamique, il ne dépend que de la température des deux sources (voir remarque importante p. 424).
- Il est important de comprendre que le rendement d'un moteur est d'autant plus grand que l'écart entre les températures des sources est important. Cela est mis à profit dans le moteur diesel par rapport au moteur à essence. Une conséquence est qu'on ne peut pas construire une machine réellement rentable avec un écart de température trop faible (par exemple température extérieure et température du sol)¹.

2. Le moteur de Carnot

Au début du XIX^e siècle, le physicien Sadi Carnot conceptualisa une machine théorique constituée d'un gaz parfait effectuant un cycle réversible, c'est-à-dire qu'en inversant son fonctionnement, tous les flux de chaleurs doivent être exactement opposés. A partir de ces conditions Carnot raisonna de la façon suivante :

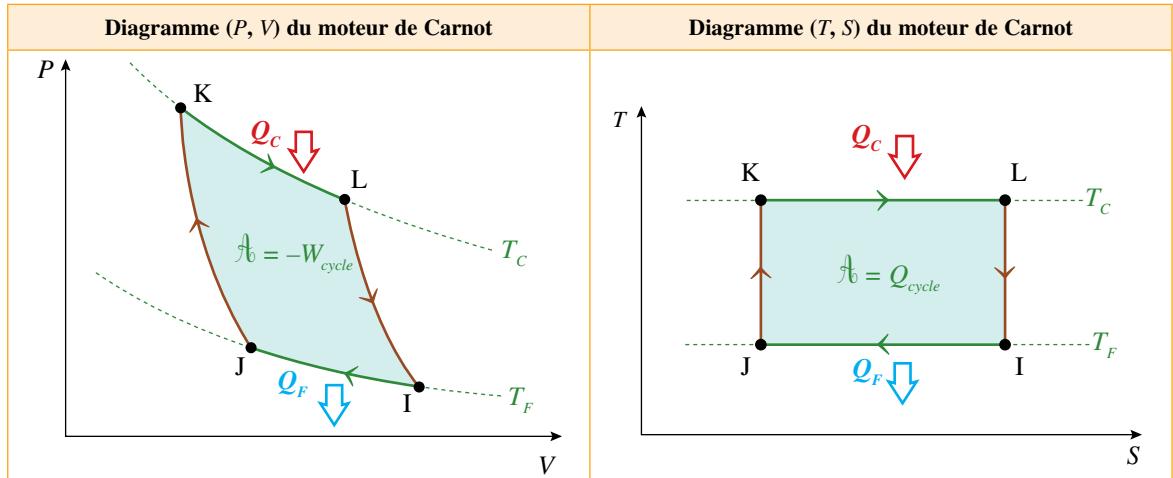
- ➔ La machine thermique fonctionne par contraction et dilatation d'un corps soumis alternativement à deux sources de chaleur de températures différentes T_C et T_F avec $T_C > T_F$.
- ➔ Pour qu'ils soient réversibles, tous les échanges de chaleur (Q_C et Q_F) doivent être effectués par une succession d'états d'équilibre infiniment voisins, donc ces transformations sont des isothermes.

1. Cette notion pourtant essentielle est presque toujours absente des raisonnements dits « écologiques ».

→ Pour qu'elles soient réversibles, les phases où le corps change de température doivent se faire sans échange de chaleur : ces transformations sont des adiabatiques réversibles (donc isentropiques).

→ Toutes les transformations doivent être infiniment lentes pour qu'elles soient réversibles.

Ainsi un cycle moteur de Carnot peut être décrit dans un diagramme (P, V) ou (T, S) ci-dessous. Le cycle moteur ($I \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow I$) doit être parcouru dans le sens horaire.



Le rendement de ce cycle est celui d'un moteur diatherme :

$$r_{Carnot} = -\frac{W}{Q_C} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$$

On doit calculer les chaleurs échangées en s'appuyant sur la nature des transformations subies par le fluide.

→ **1^e méthode :** très astucieuse et rapide, consistant à utiliser les grandeurs thermodynamiques référencées sur le diagramme (T, S). Les transformations sont réversibles, en particulier les isothermes, donc l'entropie créée sur chacune est nulle. On peut donc écrire pour chaque isotherme, que la variation d'entropie est égale à l'entropie échangée : $\Delta S(\text{isotherme}) = S_{\text{échangée}}$

Donc : $\Delta S_{I \rightarrow J} = S_J - S_I = S_{I \rightarrow J}^{\text{échangée}} = \frac{Q_{I \rightarrow J}}{T_F}$ et $\Delta S_{K \rightarrow L} = S_L - S_K = S_{K \rightarrow L}^{\text{échangée}} = \frac{Q_{K \rightarrow L}}{T_C}$

Or on voit sur le diagramme : $S_L - S_K = S_I - S_J$ et $Q_{K \rightarrow L} = Q_C$; $Q_{I \rightarrow J} = Q_F$

Ainsi on en déduit que : $Q_C = T_C(S_I - S_J)$ et $Q_F = -T_F(S_I - S_J)$

En remplaçant ces expressions dans l'équation du rendement du moteur de Carnot on obtient :

$$r_{Carnot} = 1 + \frac{-T_F(S_I - S_J)}{T_C(S_I - S_J)} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

→ **2^e méthode :** plus classique et plus longue, consistant à calculer les énergies d'échange pour chaque transformation à l'aide des variables d'état.

- Détermination de Q_C et Q_F sur les transformations isothermes IJ et KL (voir calcul p. 364 et p. 378) :

$$Q_F = Q_{I \rightarrow J} = nRT_F \ln\left(\frac{V_J}{V_I}\right) \quad \text{et} \quad Q_C = Q_{K \rightarrow L} = nRT_C \ln\left(\frac{V_L}{V_K}\right)$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation du rendement du moteur de Carnot on obtient :

$$r_c = 1 + \frac{T_F \ln\left(\frac{V_J}{V_I}\right)}{T_C \ln\left(\frac{V_L}{V_K}\right)}$$

– Détermination des rapports de volumes sur les transformations adiabatiques réversibles JK et LI:

$$\text{Loi de Laplace } TV^{\gamma-1} = \text{cste} : \begin{cases} T_F V_J^{\gamma-1} = T_C V_K^{\gamma-1} \\ T_C V_L^{\gamma-1} = T_F V_I^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{T_F V_J^{\gamma-1}}{T_F V_I^{\gamma-1}} = \frac{T_C V_K^{\gamma-1}}{T_C V_L^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{V_J}{V_I} = \frac{V_K}{V_L} \Rightarrow \ln\left(\frac{V_J}{V_I}\right) = -\ln\left(\frac{V_L}{V_K}\right)$$

Ce qui permet d'exprimer le rendement du moteur de Carnot en fonction uniquement des températures :

$$r_{Carnot} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

Ce résultat est identique à celui obtenu précédemment par le biais de l'inégalité de Clausius. Cela démontre bien qu'un moteur de Carnot qui comprend deux isothermes et deux adiabatiques réversibles orientées dans le sens horaire constitue le modèle idéal de rendement maximal.

Énoncé

Théorème de Carnot : le rendement d'un moteur ditherme cyclique réel à deux sources de températures données T_C et T_F est toujours inférieur au rendement du moteur de Carnot, modèle réversible constitué de deux isothermes aux températures des sources et de deux adiabatiques réversibles :

$$r_{réel} \leq r_{carnot} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

■ Bien qu'idéal, le rendement de Carnot est toujours strictement inférieur à 1. En effet, le système doit perdre une chaleur Q_F non nulle pour fonctionner (impossibilité du moteur monotherme). C'est une limite physique et non technique.

3. Exemple de moteur réel

On représente quelques cycles théoriques de moteurs réels.

→ On suppose que les transformations adiabatiques sont réversibles et que le fluide contenu dans ces machines est un gaz parfait avec $\gamma = C_p/C_v$ le coefficient adiabatique.

→ Les applications numériques sont faites pour un gaz diatomique (air) où $\gamma = 1,4$. On exprime souvent les rendements à partir de taux de compression, rapports de volumes ou de pressions en des points pertinents du cycle.

→ On suppose que le fluide ne subit aucune évolution chimique et que la chaleur Q_C qui lui est fournie provient d'une source de chaleur chaude fictive qui se trouve être en réalité une réaction exothermique (qui dégage de la chaleur) de combustion dioxygène/carburant.

Remarques : Le cycle de Beau de Rochas du moteur à essence qui équipe les voitures à essence est décrit en détail dans l'exercice n° 1 p. 431. Celui du moteur diesel qui équipe les véhicules lourds et des voitures présente un intérêt considérable en terme de rendement (une fois chaud). En effet, contrairement au mélange d'essence, le carburant peut être comprimé et chauffé davantage sans exploser. À puissance équivalente, un moteur diesel est donc plus rentable qu'un moteur essence. Par ailleurs, le carburant est moins raffiné, donc demande une production moins polluante et moins gourmande en énergie. Son défaut principal que constitue l'émission de particules fines peut être, au moins en partie, contourné grâce à des filtres très performants. Inversement, il rejette moins de polluants gazeux que le moteur à essence. Le moteur diesel est décrié par les uns, porté aux nues par les autres et bien rares ceux qui prennent en compte objectivement tous les aspects de la question. La thermodynamique est un premier pas dans la compréhension de ces systèmes et une connaissance incontournable pour des choix énergétiques raisonnés, pertinents, basés sur une analyse complète de la chaîne énergétique et scientifiquement argumentés.

N. B. : Retrouver les expressions et les valeurs du rendement données dans la dernière colonne constitue un excellent exercice d'entraînement que le lecteur est invité à effectuer.

⇒ Cycle Diesel (moteur à combustion interne) :

Diagramme (P, V)	Diagramme (T, S)	Rendement
<p>Diagramme (P, V) : Cycle Diesel. L'axe vertical est la pression P et l'axe horizontal est le volume V. Le cycle passe par les points A, B, C, D, A. La ligne de compression est une courbe concave vers l'origine. La ligne de dilatation est une droite. Des flèches indiquent les transferts de chaleur Q_C (vers le cylindre) et Q_F (du régénérateur). La puissance nette est $-W_{cycle}$. Les températures T_c et T_f sont indiquées sur les axes.</p>	<p>Diagramme (T, S) : Cycle Diesel. L'axe vertical est la température T et l'axe horizontal est la quantité d'état S. Le cycle passe par les points A, B, C, D, A. La ligne de compression est une courbe concave vers l'origine. La ligne de dilatation est une droite. Des flèches indiquent les transferts de chaleur Q_C (vers le cylindre), Q_{cycle} (entre les deux processus) et Q_F (du régénérateur).</p>	$r = 1 - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{-\gamma} - \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{-\gamma}}{\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{-1} - \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{-1}} \right)$ <p>Pour $V_A / V_B = 20$ et $V_A / V_C = 10$; $r = 65\%$</p>

⇒ Cycle de Beau de Rochas ou d'Otto (moteur à essence à 4 temps, combustion interne) :

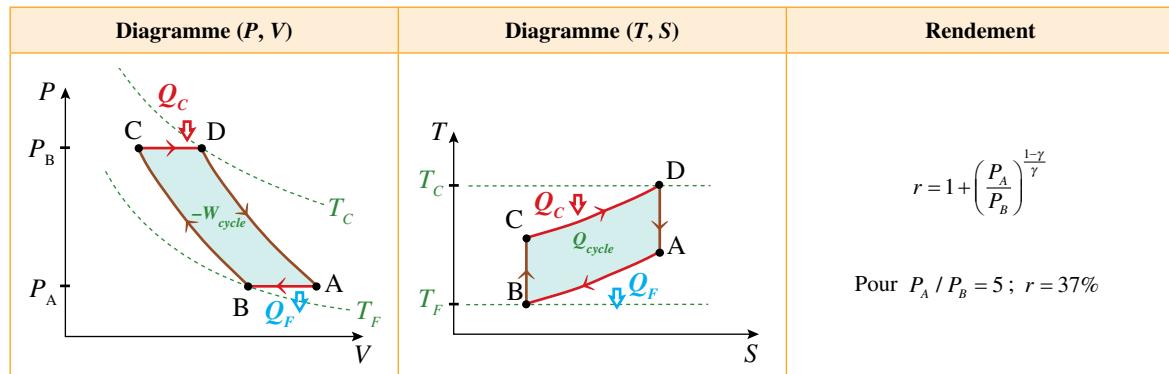
Diagramme (P, V)	Diagramme (T, S)	Rendement
<p>Diagramme (P, V) : Cycle Otto. L'axe vertical est la pression P et l'axe horizontal est le volume V. Le cycle passe par les points A, B, C, D, A. La ligne de compression est une droite. La ligne de dilatation est une courbe concave vers l'origine. Des flèches indiquent les transferts de chaleur Q_C (vers le cylindre), Q_{cycle} (entre les deux processus) et Q_F (du régénérateur). La puissance nette est $-W_{cycle}$. Les températures T_c et T_f sont indiquées sur les axes.</p>	<p>Diagramme (T, S) : Cycle Otto. L'axe vertical est la température T et l'axe horizontal est la quantité d'état S. Le cycle passe par les points A, B, C, D, A. La ligne de compression est une droite. La ligne de dilatation est une courbe concave vers l'origine. Des flèches indiquent les transferts de chaleur Q_C (vers le cylindre), Q_{cycle} (entre les deux processus) et Q_F (du régénérateur).</p>	$r = 1 - \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{1-\gamma}$ <p>Pour $V_A / V_B = 10$; $r = 60\%$</p>

⇒ Cycle de Stirling (moteur à combustion externe) :

Diagramme (P, V)	Diagramme (T, S)	Rendement
<p>Diagramme (P, V) : Cycle Stirling. L'axe vertical est la pression P et l'axe horizontal est le volume V. Le cycle passe par les points A, B, C, D, A. La ligne de compression est une droite. La ligne de dilatation est une courbe concave vers l'origine. Des flèches indiquent les transferts de chaleur Q_{C1} (vers le cylindre), Q_{C2} (vers le régénérateur), Q_{F2} (du régénérateur) et Q_{F1} (du régénérateur). La puissance nette est $-W_{cycle}$. Les températures T_c et T_f sont indiquées sur les axes.</p>	<p>Diagramme (T, S) : Cycle Stirling. L'axe vertical est la température T et l'axe horizontal est la quantité d'état S. Le cycle passe par les points A, B, C, D, A. La ligne de compression est une droite. La ligne de dilatation est une courbe concave vers l'origine. Des flèches indiquent les transferts de chaleur Q_{C1} (vers le cylindre), Q_{cycle} (entre les deux processus) et Q_{F1} (du régénérateur).</p>	$r = \frac{1}{\frac{1}{(\gamma-1)} \ln \left(\frac{V_D}{V_A} \right) + \frac{T_c - T_f}{T_c}}$ <p>Pour $V_D / V_A = 10$ $T_c = 1000 \text{ K}$ et $T_f = 300 \text{ K}$, $r = 40\%$</p>

Le cycle ci-dessus est généralement présenté, à tort, comme un moteur de Stirling, alors qu'il est un moteur à air chaud. Dans le brevet déposé par Stirling en 1816, la chaleur Q_{F1} est récupérée quasi intégralement pour fournir la chaleur Q_{C1} dans un dispositif appelé régénérateur, portant ainsi le rendement du moteur à une valeur proche de celui de Carnot, comme étudié dans le sujet (trop long pour figurer dans ces pages) proposé aux CCP en MP en 2011.

→ Cycle de Brayton-Joule (moteur à réaction) :



- Le rendement de Carnot est identique pour tous les cycles réels (mais modélisés) ci-dessus, car les sources sont choisies à la même température ($T_c = 1000$ K la température de la chambre de combustion et $T_f = 300$ K la température ambiante). Or le rendement de Carnot ne dépend que des températures des sources, soit ici : $r_{carnot} = 1 - 300/1000 = 70\%$. Les valeurs ci-dessus sont, comme attendu, bien inférieures au rendement de Carnot.
- Des contraintes techniques font que les cycles réels non modélisés sont plus complexes et que l'aire du cycle moteur est plus faible.
- Enfin, les valeurs des grandeurs thermodynamiques données dans les exemples ci-dessus sont réalistes. Toutefois les rendements réels sont moins importants, il faut en effet prendre en compte les pertes énergétiques dues aux frottements mécaniques et aux déperditions de chaleur. Les cycles ci-dessus sont approximés à l'aide de transformations simples idéales entre des états précis. Par exemple pour un cycle de Beau de Rochas, le rendement réel avec les mêmes valeurs est plutôt d'environ 40 %.

III Les récepteurs dithermes

On se place dans la zone ② du diagramme de Raveau p. 416 pour étudier les machines frigorifiques et les pompes à chaleur. Le principe physique de fonctionnement de ces deux machines thermiques est identique, elles reçoivent du travail ($W > 0$) pour effectuer un transfert thermique non naturel de la source froide ($Q_f > 0$) vers la source chaude ($Q_c < 0$), mais le but recherché n'est pas le même.

Dans le cas d'une **machine frigorifique** notée Frig par la suite (un climatiseur, un réfrigérateur), l'utilisateur est intéressé par la source froide (et donc la chaleur prélevée dans ce milieu) : intérieur du réfrigérateur, pièce climatisée. La chaleur rejetée dans la source chaude qu'est le milieu ambiant est sans intérêt.

Dans le cas d'une **pompe à chaleur (PAC)** l'utilisateur est intéressé par la source chaude (et donc la chaleur donnée à ce milieu) : la pièce ou l'eau à chauffer. La chaleur prélevée dans le milieu ambiant (source froide) est sans intérêt.

Dans tous les cas, l'utilisateur paye le travail fourni à la machine.

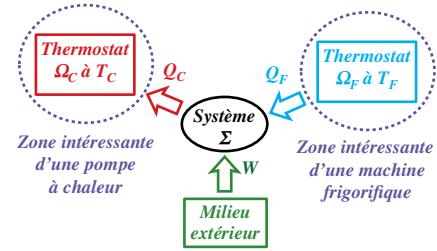


Schéma de principe
d'un récepteur ditherme

1. Efficacité du récepteur ditherme

Définitions

- L'efficacité d'une machine frigorifique ditherme est :

$$e_{Frig} = \frac{\text{énergie thermique intéressante récupérée par l'utilisateur}}{\text{énergie mécanique payée par l'utilisateur}} = \frac{Q_F}{W}$$

- L'efficacité d'une pompe à chaleur ditherme est :

$$e_{PAC} = \frac{\text{énergie thermique intéressante récupérée par l'utilisateur}}{\text{énergie mécanique payée par l'utilisateur}} = \frac{-Q_C}{W}$$

Ces efficacités sont limitées par les phénomènes d'irréversibilités.

En utilisant (3) les expressions des efficacités deviennent alors :

$$e_{Frig} = \frac{Q_F}{-(Q_C + Q_F)} = -\frac{1}{1 + \frac{Q_C}{Q_F}} \quad \text{et} \quad e_{PAC} = \frac{-Q_C}{-(Q_C + Q_F)} = \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_C}}$$

En utilisant (4) on majore les efficacités (*voir point méthode p. 417*) :

$$\text{Récepteur frigorifique : } \frac{Q_C}{Q_F} \leq -\frac{T_C}{T_F} \quad \text{d'où : } e_{Frig} = -\frac{1}{1 + \frac{Q_C}{Q_F}} \leq \frac{1}{\frac{T_C}{T_F} - 1} = \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

$$\text{Pompe à chaleur : } \frac{Q_F}{Q_C} \geq -\frac{T_F}{T_C} \quad \text{d'où : } e_{PAC} = \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_C}} \leq \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C}} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

Pour T_C et T_F fixées, l'efficacité est d'autant plus petite que les irréversibilités sont importantes.

Propriétés

- L'efficacité maximale du récepteur frigorifique ditherme correspond à un cycle réversible et vaut :

$$e_{\max Frig} = e_{Frig, \text{réversible}} = \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

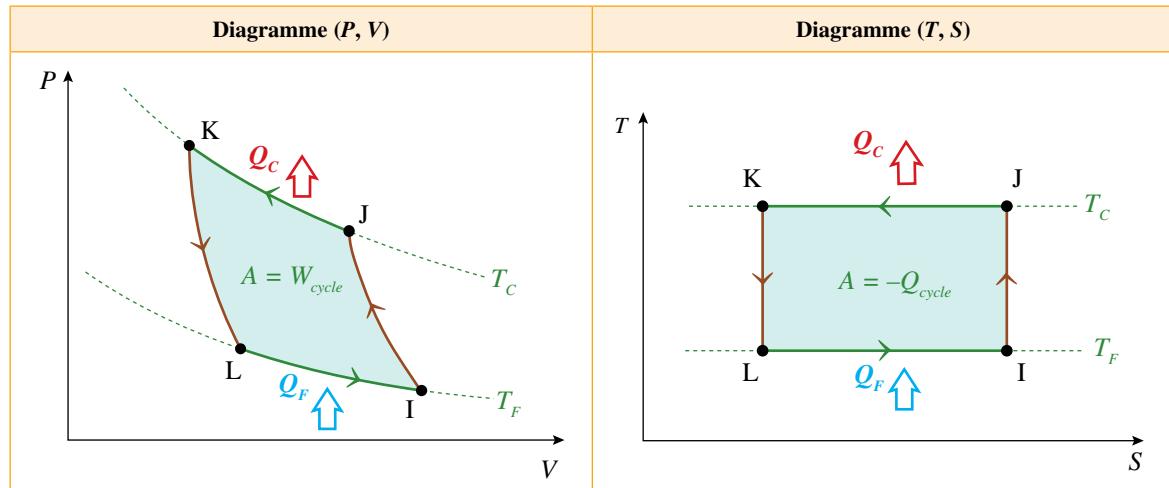
- L'efficacité maximale de la pompe à chaleur ditherme correspond à un cycle réversible et vaut :

$$e_{\max PAC} = e_{PAC, \text{réversible}} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

- L'efficacité maximale est indépendante du cycle effectué par le système, elle ne dépend que de la température des deux sources.
- On rappelle que l'efficacité est supérieure à 1. Mais on définit parfois le rendement d'une machine réceptrice comme le rapport de son efficacité sur l'efficacité qu'elle aurait si elle était réversible, cette grandeur est alors inférieure à 1 (*voir remarque importante p. 424*).
- On voit que l'efficacité d'une pompe à chaleur est meilleure si l'écart entre les températures est faible (dehors/dedans). Une PAC est peu efficace pour chauffer une piscine en plein hiver par exemple.
- On pourra aussi vérifier que pour un réfrigérateur, la chaleur prélevée au milieu froid est inférieure à celle rejetée dans le milieu chaud, de sorte que laisser son réfrigérateur ouvert en été pour rafraîchir la pièce ne conduit... qu'à la réchauffer !

2. Le récepteur de Carnot

On construit un cycle récepteur ($I \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow I$) de Carnot selon la même logique que le moteur. Il est décrit dans un diagramme (P,V) ou (T,S), et doit être parcouru dans le sens trigonométrique.



Les calculs des efficacités de Carnot se mènent comme ceux du rendement du moteur de Carnot, à l'aide du diagramme (T,S) ou du diagramme (P,V). Le lecteur est invité à vérifier, à titre d'exercice, que ces grandeurs sont bien les efficacités maximales obtenues pour les cycles réversibles.

Énoncé

Théorème de Carnot : l'efficacité d'un récepteur ditherme cyclique réel à deux sources de température données T_c et T_f est toujours inférieure à l'efficacité du récepteur de Carnot, modèle réversible constitué de deux isothermes aux températures des sources et de deux adiabatiques :

$$e_{Frig.réel} \leq e_{Frig.Carnot} = \frac{T_f}{T_c - T_f} \quad \text{et} \quad e_{PAC.réel} \leq e_{PAC.Carnot} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

Récapitulatif	Moteur	Machine frigorifique	Pompe à chaleur
Signe des échanges Utile – payée	$W < 0 ; Q_c > 0 ; Q_f < 0$	$W > 0 ; Q_c < 0 ; Q_f > 0$	$W > 0 ; Q_c < 0 ; Q_f > 0$
Rendement et Efficacité	$r = \frac{-W}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$	$e_{Frig} = \frac{Q_f}{W} = -\frac{1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}}$	$e_{PAC} = \frac{-Q_c}{W} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}}$
Rendement et Efficacité de Carnot (max)	$r_{Carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$	$e_{Frig.Carnot} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$	$e_{PAC.Carnot} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

Remarque importante : Les distinctions rendement (moteur) et efficacité (récepteurs) ci-dessus sont celles employées le plus fréquemment dans les cours de CPGE (et dans le programme). Les thermodynamiciens définissent le rendement d'une machine frigorifique par la grandeur suivante, nécessairement inférieure à 1.

$$\rho_{récepteur} = \frac{e_{récepteur}}{e_{récepteur.carnot}} < 1$$

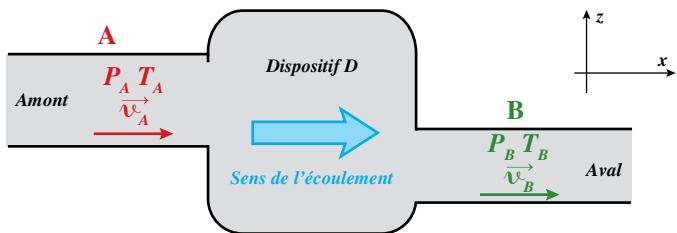
Cette définition est souvent étendue aux moteurs ($\rho = r/r_{carnot}$, comme dans le sujet de l'ICNA 2015), ce qui peut introduire une certaine confusion dans les expressions et les définitions. On gardera en tête que ces deux définitions sont employées (r et ρ) et on s'adaptera en fonction des énoncés.

IV Les machines thermiques à écoulement de fluide stationnaire

1. Description du système

Les machines thermiques, telles que les pompes à chaleur et les réfrigérateurs, sont pour la plupart traversées par des fluides en circuit fermé, subissant des échanges énergétiques avec par exemple un compresseur. Plus généralement, on trouve des systèmes à écoulement dans de nombreux domaines (mécanique des fluides, propulsion, aéronautique...). Il est donc intéressant de proposer une nouvelle formulation du premier principe adaptée à ces fluides en écoulement.

On considère une canalisation ouverte rigide, dans laquelle circule un fluide. On s'intéresse à la façon dont l'état du fluide est modifié entre une position A (dite en amont) et une position B (dite en aval). Sur le chemin du fluide, entre ces deux positions, peut se trouver un dispositif D (compresseur, détendeur, échangeur...) susceptible d'échanger du travail et de la chaleur avec le fluide. Ailleurs, les parois sont calorifugées (non représentées). On définit l'état local du fluide, c'est-à-dire sa pression, sa température, sa vitesse d'ensemble en A par (P_A, T_A, \vec{v}_A) et en B par (P_B, T_B, \vec{v}_B) . Ces grandeurs permettront d'exprimer les fonctions d'état du fluide, en particulier les différentes formes d'énergie. On limite l'étude au cas d'un écoulement unidimensionnel (suivant une direction notée x) dans un champ de pesanteur uniforme dirigé suivant une direction (Oz). De plus on ne considère que des écoulements stationnaires, ce qui exclut par exemple les phases transitoires de démarrage ou d'arrêt de la machine thermique.



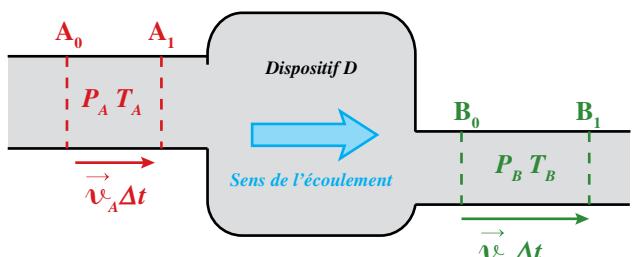
Définition

Un **écoulement** est dit **stationnaire** (ou permanent) par rapport à un référentiel si les grandeurs physiques relatives à toute région fixe de l'espace ne dépendent pas du temps t . Autrement dit, une grandeur physique quelconque définie en un point $M(x, y, z)$ de la canalisation est telle que :

$$\forall M, \forall t X(M, t) = X(M)$$

On étudie l'évolution du fluide entre les instants t_0 et $t_1 = t_0 + \Delta t$. Pendant la durée Δt ,² le fluide s'écoule, de sorte qu'un volume mésoscopique situé en A_0 (respectivement en B_0) à l'instant t_0 se déplace en A_1 (respectivement en B_1), tels que :

$$\overrightarrow{A_0 A_1} = \vec{v}_A \Delta t \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B_0 B_1} = \vec{v}_B \Delta t$$



Le premier principe, sous la forme développée dans les chapitres précédents, s'applique à des systèmes fermés, c'est-à-dire qu'on peut conceptuellement délimiter dans l'espace et dont la matière reste la même au cours du temps. Un système en écoulement est *a priori* un système ouvert, mais on l'étudie en définissant un système fermé Σ , se trouvant à un instant donné t_0 dans une zone délimitée de l'espace (ici entre A_0 et B_0), puis on suit ce système fermé dans le temps. À l'instant t_1 , Σ est maintenant dans la zone

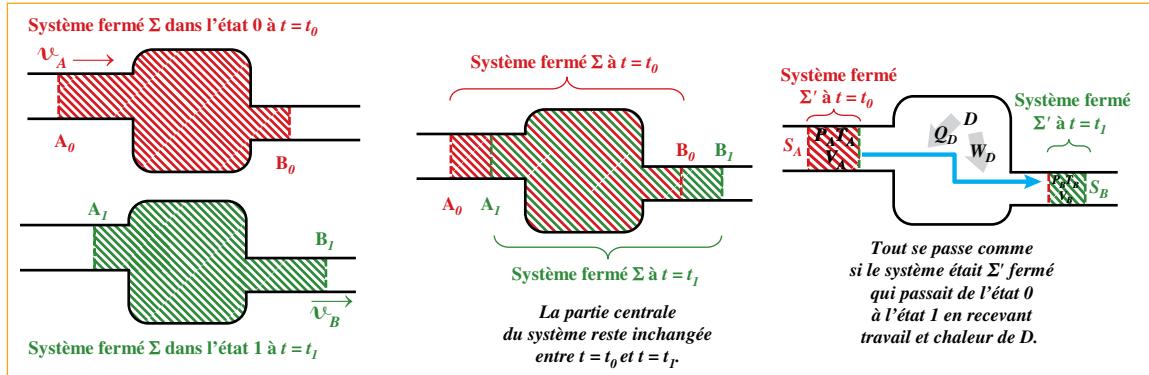
2. Il conviendrait en toute rigueur d'étudier cette évolution sur un intervalle de temps infinitésimal dt entre un instant t et un instant $t + dt$, le déplacement $A_0 A_1$ est alors $\vec{v}_A dt$ et la masse qui passe traverse la section pendant ce temps est δm , de sorte qu'on puisse considérer que les grandeurs physiques peuvent être définies homogènes au premier ordre sur cet élément de volume occupé par δm . De même, cela conduirait à des relations entre énergie et puissance ainsi qu'une expression du débit plus rigoureuses.

entre A_1 et B_1 . En observant le schéma ci-dessous, on se rend compte que, non seulement on ramène le système ouvert à un système fermé, mais que, de surcroit, on peut grandement simplifier le problème en remarquant que tout se passe comme si un système fermé Σ' , situé à t_0 entre A_0 et A_1 , se déplaçait pour se trouver entre B_0 et B_1 à t_1 et, de ce fait, évolue de l'état 0, défini par les grandeurs indicées A, à l'état 1, défini par les grandeurs indicées B. En effet, en écrivant que la masse du système fermé Σ se conserve :

$$m_{\Sigma}(t_0) = m_{\Sigma}(t_1) \Rightarrow m_{A_0B_0} = m_{A_1B_1} \Rightarrow m_{A_0A_1} + m_{A_1B_0} = m_{A_1B_0} + m_{B_0B_1} \Rightarrow m_{A_0A_1} = m_{B_0B_1}$$

Qui montre bien que le système Σ' qui a été défini sur le schéma est bien un système fermé de masse :

$$m_{\Sigma' \text{ en } A}(t_0) = m_{\Sigma' \text{ en } B}(t_1) = m$$



L'avantage évident est qu'il n'est alors pas nécessaire de connaître en détail la façon (qui peut être très complexe) dont le fluide évolue dans le dispositif, pour établir le bilan énergétique du système. Seuls seront à prendre en compte les échanges qu'il aura effectués avec le dispositif du fait de sa traversée. Attention, les volumes $V_A = V_{A_0A_1} = v_A S_A \Delta t$ et $V_B = V_{B_0B_1} = v_B S_B \Delta t$ (avec S_A et S_B les surfaces des sections de la canalisation en A et en B) respectivement occupés par Σ' à t_0 et t_1 , n'ont aucune raison d'être égaux.

2. Le premier principe thermodynamique industriel

Dans ce qui suit on considère maintenant le système Σ' évoluant entre l'état initial 0 décrit par les grandeurs indicées A et l'état final 1 décrit par les grandeurs indicées B. On effectue un bilan énergétique sur le système.

→ La variation d'énergie interne (microscopique) du système pendant l'intervalle de temps Δt est :

$$\Delta U = U_1 - U_0 = U_{B_0B_1} - U_{A_0A_1} = U_B - U_A$$

→ L'énergie mécanique macroscopique du système n'est ni nulle ni constante. Le fluide en mouvement possède en effet une énergie cinétique macroscopique et une énergie potentielle de pesanteur qui varient entre A et B, la première parce que la vitesse du fluide varie, la seconde parce que l'altitude du fluide varie.

$$\begin{aligned}\Delta E_c &= E_{c,B_0B_1} - E_{c,A_0A_1} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{c,B} - E_{c,A} \\ \Delta E_p &= E_{pB_0B_1} - E_{pA_0A_1} = mgz_B - mgz_A = E_{pB} - E_{pA} \\ \Delta E_m &= E_{mB_0B_1} - E_{mA_0A_1} = E_{mB} - E_{mA} = \Delta E_c + \Delta E_p\end{aligned}$$

→ Le fluide circulant reçoit une puissance mécanique \mathcal{P}_w et une puissance thermique \mathcal{P}_Q de la part du dispositif D, donc le **travail utile** W_D (qui n'inclut pas le travail des forces de pression) et la chaleur Q_D reçus par le fluide de la part du dispositif D, pendant l'intervalle de temps Δt considéré sont :

$$W_D = \mathcal{P}_w \Delta t \quad \text{et} \quad Q_D = \mathcal{P}_Q \Delta t$$

→ Le fluide est aussi présent en dehors du système et interagit sur ce dernier à travers des forces de pression. Le fluide en amont exerce une pression P_A sur le système placé à sa droite en A sur le schéma, tandis que le fluide en aval exerce une pression P_B sur le système placé à sa gauche en B sur le schéma. Le travail des forces de pression a déjà été établi au chapitre 20. Ici on peut considérer que, sous l'action de ces forces de pression, le système évolue d'une part en A à pression constante P_A du volume V_A à un volume nul et d'autre part en B d'un volume nul à un volume V_B à la pression constante P_B . Le travail total des forces de pression sur le fluide est donc :

$$W_P = W_{PA} + W_{PB} = [-P_A(0 - V_A)] + [-P_B(V_B - 0)] = P_A V_A - P_B V_B$$

→ La canalisation indéformable et calorifugée n'échange pas d'énergie avec le fluide.

On applique maintenant le premier principe au système Σ' sous sa forme générale, c'est-à-dire en tenant compte de la variation de l'énergie microscopique (énergie interne) et de l'énergie macroscopique (énergie mécanique d'ensemble), ce qui dans l'intervalle de temps Δt s'écrit :

$$\Delta U + \Delta E_m = W + Q \quad \text{soit :} \quad \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p = W_P + W_D + Q_D$$

D'où, en utilisant les expressions précédentes :

$$U_B - U_A + E_{c,B} - E_{c,A} + E_{p,B} - E_{p,A} = P_A V_A - P_B V_B + W_D + Q_D$$

que l'on écrit en utilisant la masse du système et les grandeurs massiques (en minuscule) :

$$m(u_B - u_A) - m(P_A v_A - P_B v_B) + \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) + mg(z_B - z_A) = m(w_D + q_D)$$

Avec u l'énergie interne massique, v le volume massique, w_D et q_D les transferts mécanique et thermique massiques reçus de la part du dispositif D. En introduisant l'enthalpie ($H = U + PV$) et plus précisément l'enthalpie massique $h = u + Pv$:

$$m(h_B - h_A) + \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) + mg(z_B - z_A) = m(w_D + q_D)$$

où l'on obtient une forme dite industrielle du premier principe (en raison de son intérêt pour les machines à écoulement de fluide) que l'on énonce sous sa forme massique.

Énoncé

Premier principe industriel : La variation d'enthalpie massique d'un fluide en écoulement stationnaire entre un point A d'altitude z_A et un point B d'altitude z_B , dans une canalisation calorifugée rigide, et traversant un dispositif lui fournissant un transfert mécanique massique w_D (travail utile) et un transfert thermique massique q_D , de sorte que sa vitesse et sa pression soient respectivement v_A et P_A en A, et v_B et P_B en B, vérifie :

$$\left(h_B + \frac{v_B^2}{2} + gz_B \right) - \left(h_A + \frac{v_A^2}{2} + gz_A \right) = w_D + q_D$$

- Dans le cas d'un écoulement du fluide lent ($v_A \approx 0$ et $v_B \approx 0$) ou sans variation de vitesse ($v_A \approx v_B$) et si l'on suppose la canalisation horizontale ($z_A \approx z_B$), l'expression du premier principe pour un écoulement stationnaire s'écrit : $\Delta h = w_D + q_D$.
- Lors de la détente de Joule-Thomson-Kelvin, étudiée p. 380, le système s'écoule dans une canalisation totalement calorifugée et, de surcroît, ne reçoit pas de travail autre que celui des forces de pression (qui est pris en compte dans l'enthalpie). C'est donc un cas particulier d'application du système ci-dessus où l'on obtient une détente isenthalpique : $\Delta h = 0$.

Définition

Le **débit massique**, noté D_m , d'un fluide en écoulement en un point de la canalisation est la masse de fluide traversant la section par unité de temps :

$$D_m = \frac{\delta m}{\delta t}$$

Le débit massique s'exprime en kg.s^{-1} .

Si on reprend l'expression du bilan sur la masse³ m qui traverse la section pendant une durée Δt on fait apparaître les puissances fournies par le dispositif au fluide, ainsi que le débit massique de l'installation :

$$m \left(h_B + \frac{v_B^2}{2} + gz_B \right) - m \left(h_A + \frac{v_A^2}{2} + gz_A \right) = m(w_D + q_D) = W_D + Q_D = \mathcal{P}_w \Delta t + \mathcal{P}_q \Delta t$$

$$D_m \left[\left(h_B + \frac{v_B^2}{2} + gz_B \right) - \left(h_A + \frac{v_A^2}{2} + gz_A \right) \right] = \mathcal{P}_w + \mathcal{P}_q$$

3. Le diagramme de Mollier (P,h)

Les diagrammes thermodynamiques permettent de représenter et de relier graphiquement différentes grandeurs thermodynamiques essentielles pour décrire un fluide. En particulier le **diagramme de Mollier**⁴ (P, h) d'un fluide donne les points dont les coordonnées sont : en abscisse l'enthalpie massique (notée h) et en ordonnée la pression (notée P) représentée en échelle logarithmique. Il est surtout utilisé pour l'étude des cycles de réfrigération, permettant de connaître l'état (liquide/vapeur), le titre massique en vapeur (noté x), le volume massique (noté v), l'entropie massique (notée s) et la température (notée T) du fluide circulant dans la machine thermique. Les unités utilisées sont fournies dans un encadré.

On représente ci-après un exemple de diagramme (P, h) établi de façon théorique, d'un fluide réfrigérant, le **R134a** (Hydro-Fluoro-Carbon) n'ayant aucune action sur la couche d'ozone. Chaque fluide possède son propre diagramme permettant de suivre son évolution dans le circuit au cours de son cycle. Un grand nombre de tracés figurent sur le diagramme, sur chacun une grandeur demeure constante. Sur chaque courbe ou au niveau d'un axe, est indiquée la valeur numérique de la grandeur qui demeure constante si la transformation se fait en suivant la courbe. Le tracé épais noir représente la courbe de saturation (courbe en cloche), sous laquelle le fluide est constitué d'un mélange liquide-vapeur. À droite de cette courbe se trouve le domaine où le fluide est entièrement sous forme gazeuse. Le sommet de cette courbe indique le point critique où les deux phases liquide et vapeur sont parfaitement mélangées.

Courbe	Horizontal grise	Vertical grise	Rouge	Verte	Bleue	Noire*
Nature	isobare	isenthalpique	isotherme	isochore	isentropique	isotitre
Grandeur constante sur la courbe	P	h	T	v	s	x

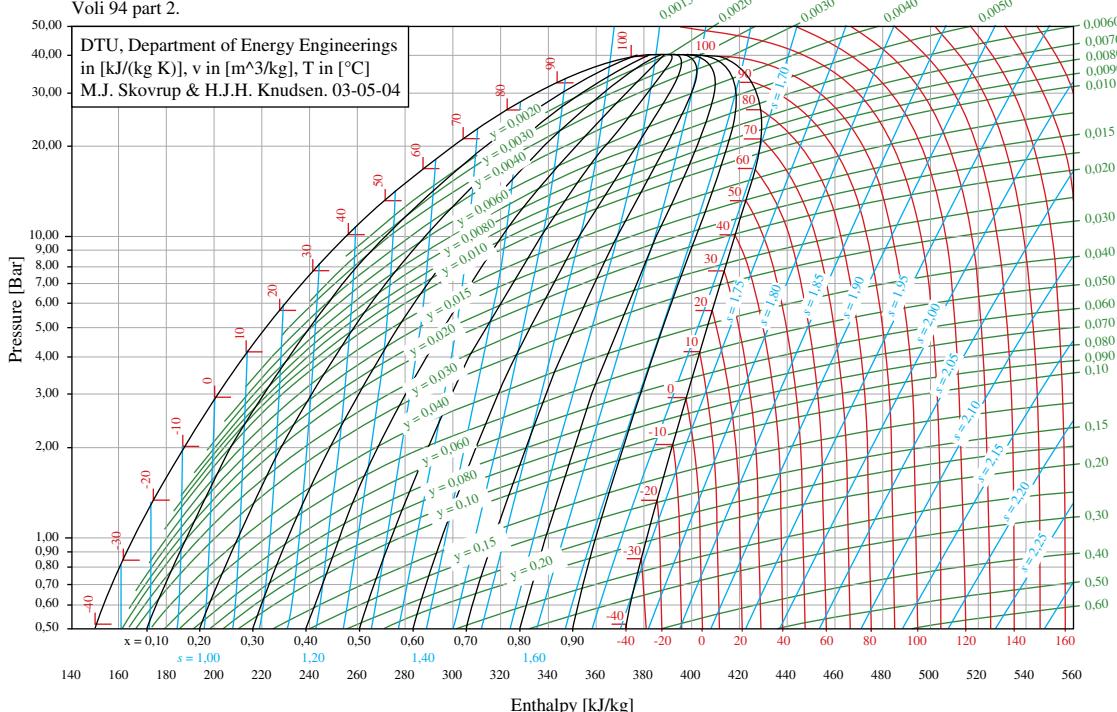
* ce tracé n'a évidemment de sens que dans un mélange liquide-vapeur, donc sous la courbe de saturation.

N. B. : L'équilibre liquide/vapeur est étudié au chapitre 24. On y définit en particulier la courbe de saturation (p. 441), le point critique (p. 439) et le titre massique en vapeur x (p. 441).

3. Voir note n° 2 p. 425.

4. Il existe plusieurs types de diagrammes de Mollier (h,s) ou ($\log P, h$) (référence : Bulletin UdPPC n° 894 p. 599). La représentation d'un diagramme est effectuée par un logiciel gratuit tel que par exemple *CoolPack* développé par l'Université Technique du Danemark (DTU).

R134a Ref : D.P. Wilson & R.S. Basu, ASHRAE Transactions 1988,
Voli 94 part 2.

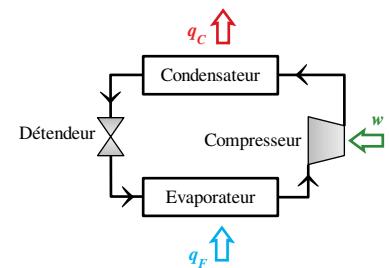


Remarque : La partie d'une isotherme située en dessous de la courbe de saturation coïncide avec une isobare (voir chapitre 24 p. 440) et son tracé est donc horizontal dans cette zone. Si le fluide est sous forme gazeuse, à droite, elles sont dirigées vers le bas et tendent, à basse pression, à être verticales, là où le fluide peut être assimilé à un gaz parfait.

→ Principe de fonctionnement général d'une machine frigorifique à écoulement de fluide

Dans une machine frigorifique à écoulement de fluide, ce dernier évolue généralement entre 4 dispositifs différents :

Le **compresseur** idéal fournit un travail au fluide ($w > 0$) pour augmenter sa pression sans transfert de chaleur. Au contact du **condenseur**, le fluide se liquéfie et cède de l'énergie thermique à la source chaude ($q_C < 0$). Par la suite le **détendeur** ramène le liquide frigorifique à une pression suffisamment basse pour que celui-ci puisse s'évaporer dans l'**évaporateur**, en captant de l'énergie thermique issue de la source froide ($q_F > 0$). Le fluide ainsi vaporisé retourne dans le compresseur pour effectuer un nouveau cycle. On retiendra que les transformations liées à chaque composant d'une machine thermique ont généralement les propriétés suivantes :



Dispositif	Détendeur	Echangeur de chaleur : évaporateur et condenseur	Compresseur idéal
Transformation	Isenthalpique $\Delta h = 0$	Isobare $\Delta P = 0$	Isentropique $\Delta s = 0 ; w \neq 0$ et $q = 0$

Remarque : Ce type de machine à changement d'état liquide/vapeur peut être aussi utilisé pour fabriquer une machine à vapeur (moteur), où le fluide constitué d'eau peut décrire un cycle de Rankine ou de Hirn. De nombreuses turbines fonctionnent selon ce principe, en particulier les centrales de production d'électricité.

→ CONCLUSION : Retour sur le second principe

Au fil de l'étude des machines thermiques, on a retrouvé ses différents énoncés historiques introduits p. 396.

→ **Énoncé de Kelvin :** *Aucune transformation thermodynamique n'a pour seul effet d'extraire une quantité de chaleur d'un réservoir et de la convertir entièrement en travail (impossibilité du moteur monotherme).*

→ **Énoncé de Clausius :** *Aucune transformation n'a pour seul effet d'extraire de la chaleur d'un réservoir froid et de la fournir à un réservoir chaud (Inégalité de Clausius).*

→ **Énoncé de Carnot :** *Il existe une valeur maximale au rendement d'une machine ditherme (cycle réversible de Carnot).*

Historiquement ce sont les observations qui ont conduit au second principe, il est logique qu'une fois ce dernier formalisé avec rigueur dans le cadre d'une théorie générale, il conduise à retrouver les résultats expérimentaux. L'étude de l'histoire de la physique apporte bien d'autres exemples comparables, on citera pour mémoire celui de Kepler et Newton concernant la gravitation (*voir chapitre 17*).

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Machine thermique, moteur, récepteur : définitions, schémas de principe, cas d'une machine ditherme.
- Inégalité de Clausius : démonstration, conséquence (cas de la machine monotherme).
- Diagramme de Raveau : construction, exploitation.
- Rendement et efficacité : définitions, expressions, valeur maximale, valeurs réelles.
- Machine de Carnot : principe, rendement, comparaison à une machine quelconque.
- Premier principe industriel pour les machines thermiques à écoulement de fluide stationnaire : position du problème, démonstration, expression massique et en fonction du débit.
- Diagramme de Mollier (P, h) : description du diagramme, exploitation sur une transformation « iso ».

Erreurs à éviter

- La machine de Carnot donne le rendement maximal de la machine étudiée. Cela ne signifie pas que le rendement de Carnot sera de 100 % (*voir commentaire du théorème de Carnot p. 420*).
- L'approximation du gaz parfait n'est pas forcement vraie pour tous les fluides à l'état gazeux, surtout si la pression est élevée. Pour cela on utilise un diagramme de Mollier.

Quelques « trucs » utiles

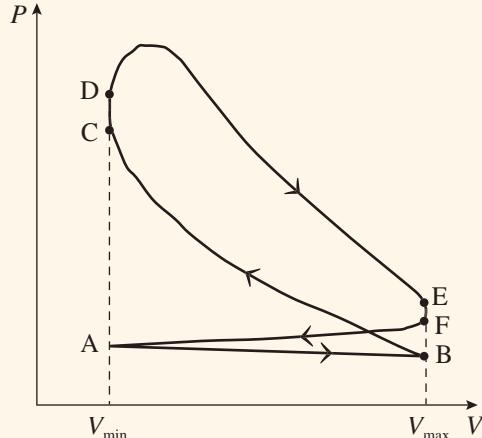
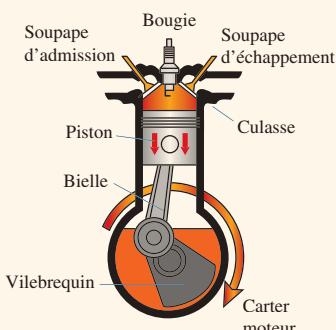
- Pour étudier une machine, il est indispensable de tracer son diagramme de Clapeyron, sur lequel on portera systématiquement le tracé des isothermes utiles (généralement $T = T_c$ et $T = T_f$), d'une part pour tracer le cycle de la machine de façon pertinente (on n'oubliera pas le sens de parcours), d'autre part pour repérer les échanges de chaleurs ainsi que les données du problème.
- Utiliser une valeur absolue dans l'expression du rendement empêche souvent de continuer le calcul (c'est pourquoi elles sont proscrites dans ce cours). On procèdera plutôt ainsi : faire un schéma de principe de la machine en réfléchissant aux signes des échanges. Se poser les questions : quelle grandeur m'intéresse et quelle grandeur me coûte (le travail, la chaleur chaude, la froide ?) et écrire le rendement avec ces grandeurs, puis en vérifier le signe sur le schéma de principe de la machine et placer un signe « - » devant toutes les grandeurs négatives. Appliquer ensuite le 1^{er} principe pour écrire le travail, puis le rendement en fonction des chaleurs.
- On exploitera généralement des transformations « iso », on utilisera donc au maximum des rapports de grandeurs (par exemple $PV = cste$ sur une isotherme, $P/T = cste$ sur une isochore), rapports que l'on fera aussi apparaître dans les rendements (*voir exercices n° 1 et n° 2 p. 431*).

EXERCICES

1 Cycle de Beau de Rochas & Otto – Moteur à explosion ★★

→ corrigé p. 433

Un moteur à explosion fonctionne suivant le cycle réel à quatre temps ci-dessous. Les 4 temps sont : l'admission AB (1^{er} temps), la compression BC (2^e temps), l'explosion CD et la détente DE (3^e temps) ; l'échappement : éjection EF et refoulement FA (4^e temps).



- 1 Décrire le fonctionnement du moteur pour chacune des étapes du cycle et approximer le cycle réel moteur dans un diagramme de Clapeyron par un cycle de Beau de Rochas et d'Otto. On confondra F et B et on négligera les étapes d'admission AB et de refoulement FA du gaz constitué d'un mélange air et essence.
- 2 Justifier le sens de parcours du cycle.
- 3 Donner l'expression du rendement en fonction des températures T_B , T_C , T_D et T_E .
- 4 Soit le rapport de compression $\alpha = V_{\max} / V_{\min}$, donner l'expression du rendement de ce moteur en fonction de α et de $\gamma = C_p / C_V$.

2 Pompe à chaleur (d'après ENSTIM 2005) ★★★

→ corrigé p. 434

Une pompe à chaleur effectue le cycle de Joule inversé suivant. L'air pris dans l'état A de température T_0 et de pression P_0 est comprimé suivant une adiabatique réversible jusqu'au point B où il atteint la pression P_1 . Le gaz se refroidit à pression constante et atteint la température finale de la source chaude T_1 , correspondant à l'état C. Puis l'air est ensuite refroidi dans une turbine suivant une détente adiabatique réversible pour atteindre l'état D de pression P_0 . Pour finir le gaz se réchauffe à pression constante au contact de la source froide et retrouve son état initial A.

On considère l'air comme étant un gaz parfait de coefficient isentropique $\gamma = 1,4$. On posera $\beta = 1 - \gamma^{-1}$ et $a = P_1/P_0$. On prendra : $T_0 = 283 \text{ K}$; $T_1 = 298 \text{ K}$; $a = 5$.

- 1 Représenter le cycle parcouru par le fluide dans un diagramme de Clapeyron (P, V).
- 2 Exprimer les températures T_B et T_D en fonction de T_0 , T_1 , a et β . Calculer leurs valeurs numériques.
- 3 Définir l'efficacité e de la pompe à chaleur à partir des quantités d'énergie échangées au cours du cycle. Montrer qu'elle s'exprime seulement en fonction de a et β , puis calculer sa valeur numérique.
- 4 Quelles doivent être les transformations du fluide si on envisage de faire fonctionner la pompe à chaleur suivant un cycle de Carnot réversible entre les températures T_0 et T_1 ? Calculer sa valeur numérique.
- 5 Comparer les valeurs obtenues pour e et e_{carnot} , puis interpréter la différence observée.

3 Climatisation d'une voiture (d'après Banque PT 2011) ★★★

→ corrigé p. 435

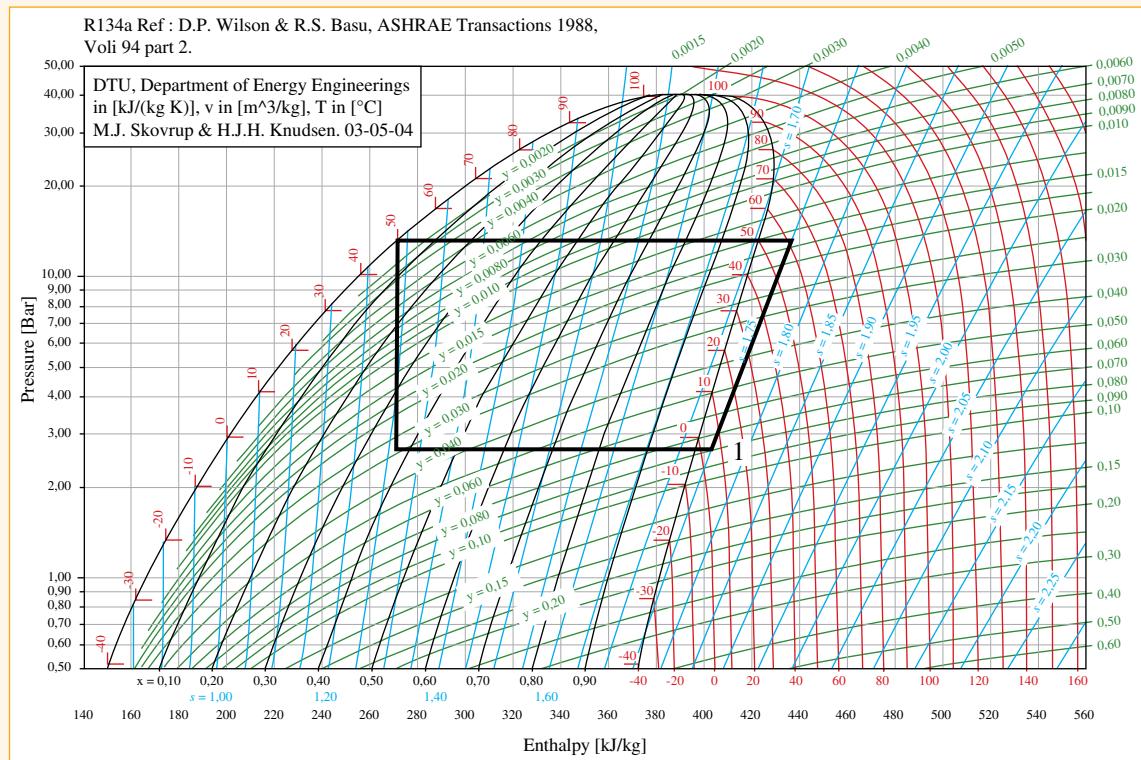
La climatisation est désormais présente sur plus de 9 véhicules neufs sur 10. Elle est composée d'un circuit d'air pulsé par ventilateur et d'un circuit frigorifique constitué d'un compresseur, d'un condenseur, d'un détendeur et d'un évaporateur, dans lesquels circule un fluide frigorigène. Le fluide utilisé par la majorité des véhicules en circulation est le **R134a**.

Après l'étude du principe de fonctionnement d'une climatisation, le problème aborde certains aspects de sa conception ainsi que la surconsommation entraînée par son fonctionnement. Pour indication, à $2400 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, le moteur de la voiture développe une puissance motrice de 30 kW.

Dans tout le problème, la climatisation étudiée assure le maintien d'une température de l'habitacle de la voiture égale à 20°C pour une température de l'air extérieur égale à 35°C , grâce à un débit massique constant $D_m = 0,15 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

On suppose que les conduites reliant les différents appareils sont parfaitement calorifugées et que la pression qui y règne est constante. On néglige toutes les variations de vitesse du fluide et l'on raisonne sur 1 kg de fluide.

- ➊ Dans quel sens est parcouru le cycle ? Justifier. A partir de l'état 1 du fluide, porter le numéro de chaque état du fluide sur le diagramme (P, h). Donner pour chaque transformation, la nature de la transformation et le nom de l'organe traversé par le fluide (compresseur, détendeur, évaporateur et condenseur).
- ➋ Quelle est la valeur du travail massique échangé dans le compresseur ? Quel est son signe ?
- ➌ Quelle est la valeur du transfert thermique massique avec l'air de l'habitacle ? Quel est son signe ?
- ➍ Définir l'efficacité de l'installation. Calculer sa valeur numérique.
- ➎ Quelle surconsommation relative entraîne le fonctionnement de la climatisation lorsque le moteur tourne à $2400 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$?



CORRIGÉS

1 Cycle de Beau de Rochas & Otto – Moteur à explosion

→ énoncé p. 431

- 1 Ce cycle constitué de deux boucles : une petite parcourue dans le sens trigonométrique jouant un rôle récepteur, et une grande boucle parcourue dans le sens horaire jouant un rôle moteur.

Les étapes mécaniques sont :

→ L'admission AB (1^e temps) : la soupape d'admission est ouverte et le piston effectue une course descendante au cours de laquelle le gaz est aspiré dans le cylindre. Ce système est ouvert ce qui implique une augmentation de la quantité de matière. Cette étape est effectuée sous une pression atmosphérique extérieure constante, c'est-à-dire que la transformation est **une isobare**.

→ La compression BC (2^e temps) : les deux soupapes sont fermées. Le piston effectue une course ascendante au cours de laquelle il comprime le gaz. Cette compression est rapide pour qu'aucun transfert de chaleur n'ait le temps de s'effectuer avec le milieu extérieur. De plus on suppose que l'équilibre de pression entre le gaz et le piston est maintenu tout au long de la transformation. Cette étape peut donc être modélisée par **une compression adiabatique réversible**.

→ L'explosion CD et la détente DE (3^e temps) : les deux soupapes sont fermées. L'explosion du mélange gazeux s'effectue de façon quasi instantanée à température élevée et à volume constant sans que le piston ne bouge. Cette étape peut donc être modélisée par **un chauffage isochore**. La détente est analogue à la compression, modélisée par **une détente adiabatique réversible**. C'est lors de cette étape que le moteur va réellement fournir du travail, car le piston va se déplacer sous l'action du gaz chauffé par l'explosion.

→ L'éjection EF et le refoulement FA (4^e temps) : la soupape d'échappement s'ouvre car la pression dans le cylindre est supérieure à la pression atmosphérique, provoquant une rapide baisse de pression sans que le piston ne bouge. Cette étape est modélisée (F = B) par une transformation **isochore** EB. Puis le piston remonte pour refouler le gaz brûlé de façon **isobare** (BA).

On représente ci-contre le cycle théorique (cycle de Beau de Rochas) du moteur à 4 temps sur un diagramme de Clapeyron (P, V).

- 2 La fonction principale d'un moteur est de fournir du travail mécanique. Ceci implique que le cycle étudié est moteur et qu'il est parcouru dans le sens horaire. Dans la suite de l'exercice, on étudie le cycle moteur et l'on négligera les étapes d'admission AB et d'échappement BA du gaz.

- 3 Le rendement r de ce cycle est celui d'un moteur : l'utilisateur s'intéresse au travail ($W < 0$) et paye la chaleur chaude (combustion du carburant) ($Q_C > 0$), d'où, en utilisant le premier principe :

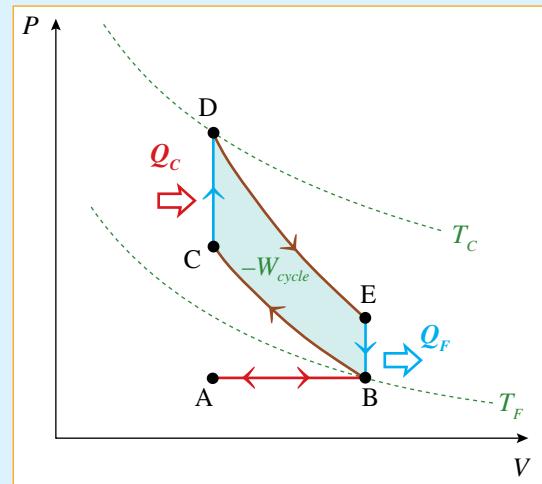
$$r = \frac{-W}{Q_C} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} \quad \text{car} \quad \Delta U_{\text{cycle}} = 0 = W + Q_C + Q_F$$

Les échanges thermiques se font sur les isochores uniquement, d'où : $r = 1 + \frac{Q_{EB}}{Q_{CD}}$

Sur une transformation isochore, le travail est nul et la chaleur est égale à la variation d'énergie interne, soit, le gaz étant parfait :

$$\begin{cases} Q_{CD} = \Delta U_{CD} = C_V (T_D - T_C) \\ Q_{EB} = \Delta U_{EB} = C_V (T_B - T_E) \end{cases} \Rightarrow$$

$$r = 1 + \frac{T_B - T_E}{T_D - T_C} = 1 - \frac{T_E - T_B}{T_D - T_C}$$



- ④ On exprime le rendement sous forme de rapports de température :

$$r = 1 - \frac{T_E}{T_D} \frac{1 - \frac{T_B}{T_E}}{1 - \frac{T_C}{T_D}}$$

La relation de Laplace $TV^{\gamma-1} = cste$, appliquée aux adiabatiques réversibles BC et DE permet d'établir un lien entre les rapports de températures et le rapport des volumes caractérisant le moteur :

$$\begin{cases} T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \\ T_D V_D^{\gamma-1} = T_E V_E^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{T_B}{T_C} = \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^{\gamma-1} = \alpha^{1-\gamma} \\ \frac{T_E}{T_D} = \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^{\gamma-1} = \alpha^{1-\gamma} \end{cases} \text{ d'où : } \frac{T_B}{T_C} = \frac{T_E}{T_D} = \alpha^{1-\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{T_B}{T_E} = \frac{T_C}{T_D}$$

Soit en remplaçant dans r : $r = 1 - \alpha^{1-\gamma}$

Bien comprendre

Il est toujours utile dans le calcul d'un rendement de moteur, d'une part de faire apparaître une valeur explicitement inférieure à 1, en écrivant des différences positives de températures, et d'autre part de mettre en facteur les grandeurs (généralement des températures) pour faire apparaître des rapports, dont les expressions s'obtiennent aisément sur les différentes transformations.

2 Pompe à chaleur

→ énoncé p. 431

- ① On représente ci-contre dans un diagramme de Clapeyron, le cycle d'une pompe à chaleur parcouru dans le sens trigonométrique.

- ② On applique la relation de Laplace $P_0^{1-\gamma} T_0^\gamma = cste$ pour la transformation adiabatique réversible AB :

$$P_0^{1-\gamma} T_0^\gamma = P_1^{1-\gamma} T_B^\gamma \Rightarrow T_B = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

soit : $T_B = T_0 a^\beta = 448 \text{ K}$

car : $\frac{\gamma-1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{\gamma} = \beta$

Ainsi que pour la transformation adiabatique réversible CD :

$$P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_0^{1-\gamma} T_D^\gamma \Rightarrow T_D = T_1 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

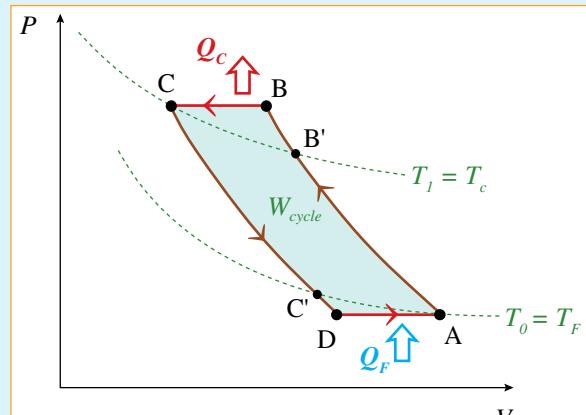
soit : $T_D = T_1 a^{-\beta} = 188 \text{ K}$

- ③ L'efficacité e de ce cycle est celle d'une PAC, l'utilisateur paye le travail ($W > 0$) et s'intéresse à la chaleur chaude ($Q_C < 0$), soit en utilisant le premier principe sur le cycle :

$$e = \frac{-Q_C}{W} = \frac{-Q_C}{-(Q_C + Q_F)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{Q_F}{Q_C} \right)}$$

Les échanges de chaleurs se font sur les isobares uniquement, d'où :

$$e = \frac{1}{1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}}$$



Remarque : B' et C' sont utiles à la question 4.

Le transfert thermique d'un gaz parfait sur une isobare est égal à la variation d'enthalpie :

$$\begin{cases} Q_{BC} = \Delta H_{BC} = C_p(T_C - T_B) = C_p(T_1 - T_0 a^\beta) \\ Q_{DA} = \Delta H_{DA} = C_p(T_A - T_D) = C_p(T_0 - T_1 a^{-\beta}) \end{cases}$$

On utilise ces résultats pour déterminer le rapport de chaleurs dans l'expression de l'efficacité :

$$\frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = \frac{C_p(T_0 - T_1 a^{-\beta})}{C_p(T_1 - T_0 a^\beta)} = \frac{T_0 - T_1 a^{-\beta}}{T_1 - T_0 a^\beta} = \frac{T_0 \left(1 - \frac{T_1 a^{-\beta}}{T_0}\right)}{T_0 a^\beta \left(\frac{T_1 a^{-\beta}}{T_0} - 1\right)} = -a^{-\beta}$$

d'où : $e = \frac{1}{1 - a^{-\beta}} = 2,71$

Bien comprendre

Le cycle d'une pompe à chaleur est toujours un peu déroutant, car les énoncés « *le fluide se refroidit au contact de la source chaude* » et « *le fluide se réchauffe au contact de la source froide* » sont déstabilisants (on a tendance à penser qu'on se réchauffe toujours au chaud et qu'on se refroidit ... au froid !). Pourtant c'est bien ainsi que se font les échanges de chaleur décrits dans le cours. Il est essentiel ici de tracer préalablement les isothermes chaudes et froides et de suivre scrupuleusement les indications de l'énoncé pour schématiser le cycle et pour repérer les échanges thermiques à prendre en compte. On note qu'une pompe à chaleur présente toujours un cycle assez étroit (le système consomme peu de travail donc d'énergie). On note cependant qu'un trop grand écart de température nuit non seulement à l'efficacité (*voir cours*) mais aussi au fonctionnement, les températures B et D devenant trop extrêmes pour le fluide. On retiendra qu'une pompe à chaleur est très efficace pour de faibles écarts de température (chauffage d'appoint par exemple), mais totalement inadaptée pour des applications plus lourdes ou le chauffage dans un environnement à très basse température.

- 4 Le cycle de Carnot est composé de deux transformations adiabatiques réversibles (AB') et (CD') et de deux transformations isothermes au cours desquelles ont lieu les transferts thermiques. Le cycle est réversible donc l'inégalité de Clausius devient une égalité :

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0 \quad \text{soit ici :} \quad \frac{Q_{BC}}{T_1} + \frac{Q_{DA}}{T_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = -\frac{T_0}{T_1}$$

En remplaçant dans e : $e_{Carnot} = \frac{1}{1 - \frac{T_0}{T_1}} = \frac{T_1}{T_1 - T_0} = 19,9$

- 5 On a donc $e < e_{Carnot}$, ce qui s'explique par le caractère réversible du cycle de Carnot qui maximise l'efficacité du cycle, le cycle réel n'est pas réversible, son efficacité est nécessairement moindre.

3 Climatisation d'une voiture

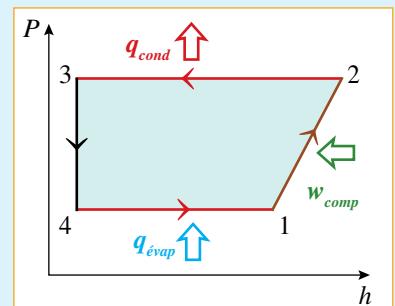
→ énoncé p. 432

- 1 Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique. En effet le cycle étudié doit être récepteur, car on fournit du travail pour pouvoir transférer de l'énergie thermique de la source froide vers la source chaude. La transformation 1 → 2 : la pression du fluide augmente en suivant une isentropique ⇒ un compresseur.

La transformation 2 → 3 : le fluide se liquéfie en suivant une isobare ⇒ un condenseur.

La transformation 3 → 4 : la pression du fluide diminue en suivant une isenthalpique ⇒ un détendeur.

La transformation 4 → 1 : le fluide se vaporise en suivant une isobare ⇒ un évaporateur.



- 2 Le compresseur est supposé parfait, calorifugé et sans frottement ($q_{comp} = 0$) et dans lequel la vitesse d'écoulement du fluide ne varie pas ($v_1 \approx v_2$) de plus il n'y a pas de dénivellation ($z_1 \approx z_2$). L'expression du premier principe industriel pour un écoulement stationnaire s'écrit alors :

$$h_2 - h_1 = w_{comp} \quad \text{par lecture graphique :} \quad h_1 = 404 \text{ kJ.kg}^{-1} \quad \text{et} \quad h_2 = 438 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

d'où : $w_{comp} = 34 \text{ kJ.kg}^{-1} > 0$

Le travail échangé entre le compresseur et le fluide est positif car le fluide reçoit effectivement du travail.

- 3 Le fluide traverse l'évaporateur en transférant de l'énergie thermique à l'habitacle sans échange de travail ($q_{évac} = 0$) et dans lequel la vitesse d'écoulement du fluide ne varie pas ($v_1 \approx v_4$) de plus il n'y a pas de dénivellation ($z_1 \approx z_4$). L'expression du premier principe industriel pour un écoulement stationnaire s'écrit alors :

$$h_1 - h_4 = q_{évac} \quad \text{par lecture graphique :} \quad h_1 = 404 \text{ kJ.kg}^{-1} \quad \text{et} \quad h_4 = 272 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

d'où : $q_{évac} = 132 \text{ kJ.kg}^{-1} > 0$

L'énergie thermique échangée entre le fluide et l'habitacle est positive, car le fluide reçoit effectivement de l'énergie thermique provenant de la source froide.

- 4 L'efficacité e de ce cycle est celui d'une machine réceptrice frigorifique : l'utilisateur paye le travail ($W > 0$) lequel est fourni au niveau du compresseur et s'intéresse à la chaleur froide ($Q_F > 0$) laquelle est prélevée sur l'habitacle dans l'évaporateur, soit :

$$e = \frac{Q_F}{W} = \frac{q_F}{w} \quad \text{donc :}$$

$$e = \frac{q_{évac}}{w_{comp}} = \frac{132}{34} = 3,9$$

Bien comprendre

Le débit massique ou volumique est une grandeur (masse ou volume) circulant par unité de temps. La puissance est une énergie par unité de temps. Exprimer l'un (en général la puissance) permettra toujours de faire apparaître l'autre (en général le débit) dans le calcul.

- 5 Pour calculer la surconsommation relative, il faut comparer la puissance générée par le moteur et celle reçue par le compresseur. La puissance reçue par le compresseur est :

$$\mathcal{P}_{comp} = \frac{\delta W_{comp}}{dt} = \frac{\delta m \cdot w_{comp}}{dt} = D_m w_{comp} = 0,15 \times 34 = 5,1 \text{ kW}$$

Or à 2 400 tr.min⁻¹, le moteur de la voiture développe une puissance motrice de 30 kW. Ainsi la climatisation exige une puissance fournie par le moteur qui se traduit par une surconsommation relative de :

$$\frac{\mathcal{P}_{comp}}{\mathcal{P}_{moteur}} = \frac{5,1}{30} = 17 \%$$

À méditer

Quand une loi a reçu une confirmation suffisante de l'expérience, nous pouvons adopter deux attitudes, ou bien laisser cette loi dans la mêlée ; elle sera soumise alors à une incessante révision qui, sans aucun doute, finira par démontrer qu'elle n'est qu'approximative. Ou bien, on peut l'ériger en principe, en adoptant des conventions telles que la proposition soit certainement vraie.

HENRI POINCARÉ (1854-1912)

Changements d'état du corps pur

La matière qui nous entoure et nous constitue se compose de particules (atomes, molécules et ions) agencées les unes par rapport aux autres, permettant de former un état particulier observable macroscopiquement. Lorsqu'un corps évolue d'un état physique à un autre, par le biais d'une modification des grandeurs d'état thermodynamiques, on assiste à un changement important et soudain des propriétés mécaniques, optiques et électriques de ce corps. Ce phénomène physico-chimique est peut-être celui le plus fréquemment observable dans notre quotidien. La transformation de l'eau liquide en eau vapeur par chauffage, la fonte d'un glaçon dans un cocktail, la fusion d'un métal dans un creuset et la compréhension du fonctionnement d'une machine frigorifique sont quelques exemples parmi tant d'autres qui suscitent la curiosité et méritent amplement d'y consacrer un chapitre.

I | Transitions de phase

Définitions

- Un **corps pur** est un système composé d'une seule espèce chimique, par exemple l'eau (H_2O). Les systèmes tels que l'air ou l'eau salée ne sont pas des corps purs.
- L'**état physique** ou la **phase** d'un corps pur est une région de l'espace dans laquelle toutes les grandeurs d'état intensives sont continues : **état solide, liquide ou gazeux**.
- Le passage d'un état physique à un autre est appelé **changement d'état** ou **transition de phase**.

Avertissement important : Afin de lever l'ambiguïté qui pourrait apparaître dans l'utilisation du mot état, dans ce qui suit on appellera phase, l'état physique d'un système et on la notera avec une lettre grecque α , β ... et on réservera le terme état à l'état thermodynamique du système noté avec des lettres latines majuscules A, B... De même on notera T_p la température de la transition de phase, dont on verra plus loin qu'elle est constante. Dans ce chapitre, on restreindra l'étude des changements d'état aux corps purs sous forme solide, liquide ou gazeux.

- Lorsque les paramètres d'état intensifs sont uniformes, on dit que la phase est **homogène**.
- Un système comportant une seule phase est dit **monphasé**. Un système comportant deux phases, par exemple de l'eau liquide et de l'eau vapeur, est dit **diphasé**¹. A l'équilibre diphasé, on constate une discontinuité de certaines grandeurs intensives (masse volumique, densité) entre les phases.

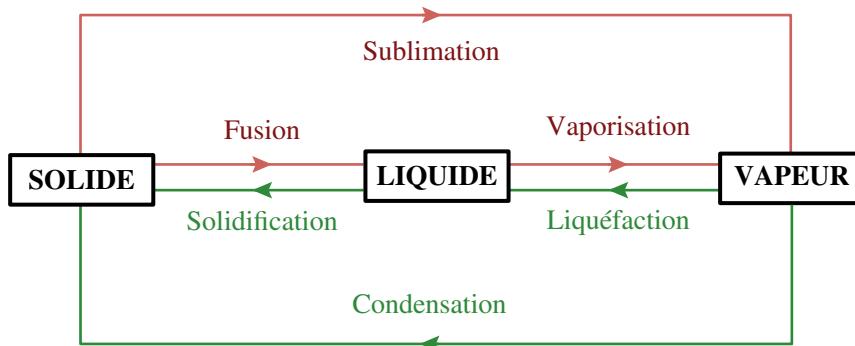
Définitions

- **Phase solide** : Les particules constituant la matière vibrent autour d'une position d'équilibre. Les liaisons fortes limitent la mobilité des atomes ou des molécules se situant dans le réseau cristallin. La phase solide est donc une phase condensée (incompressible) et ordonnée à grande distance (indéformable).
- **Phase liquide** : Les particules sont libres de se mouvoir les unes par rapport aux autres. Les liaisons intermoléculaires ne sont pas permanentes, mais restent fortes. Une phase liquide est donc une phase condensée (très peu compressible) et ordonnée à courte distance (déformable).
- **Phase vapeur ou gazeuse** : Les liaisons intermoléculaires sont quasiment inexistantes. La phase gazeuse est donc une phase dispersée (compressible) et désordonnée (déformable).

1. Ce terme est également employé pour un système comportant deux espèces qui ne se mélagent pas, par exemple l'eau et l'huile ou deux solides.

- Il existe d'autres états de la matière tels que les plasmas, les solides amorphes (verre) et les cristaux liquides, qui ne sont pas traités au programme.

Dans la nomenclature des transitions de phase ci-dessous : une flèche rouge représente une transition de phase qui demande un apport d'énergie, tandis qu'une flèche verte indique que la transition de phase fournit de l'énergie au milieu.



- En hiver, la vapeur d'eau se transforme en eau solide (givre) sur des objets froids, il s'agit bien de condensation. Mais dans le langage courant, on parle aussi de condensation lorsque l'eau, sous forme gazeuse, se transforme en eau liquide (la buée sur les vitres). Pour éviter cette confusion, on utilise parfois le terme **condensation solide** pour définir le passage d'une phase gazeuse à une phase solide.

II | Diagrammes d'état du corps pur

L'état d'un corps pur peut être décrit à l'aide des grandeurs d'état thermodynamiques telles que la température T , la pression P et le volume V . En pratique, il est plus commode, pour se représenter ces états, d'utiliser des diagrammes à deux dimensions : le diagramme (P,T) et le diagramme de Clapeyron (P,v) où l'abscisse sera généralement le volume massique.

1. Diagramme expérimental (P,T)

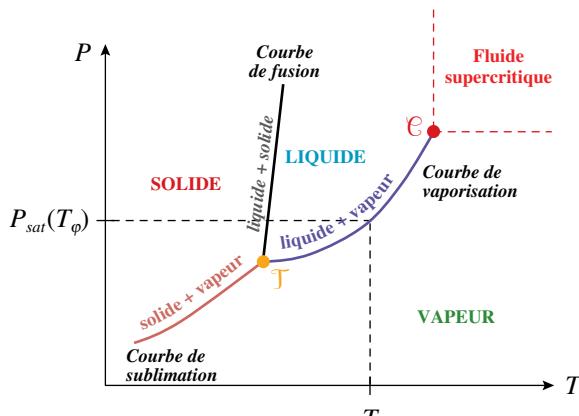
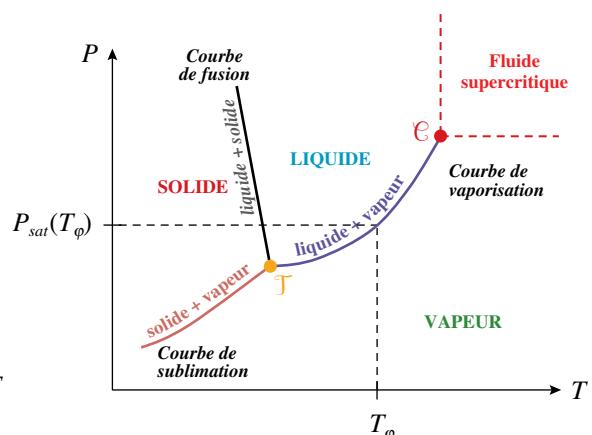
Soit un système thermodynamique constitué d'un corps pur contenu dans un récipient clos, où l'on a la possibilité de faire varier la pression P et la température T . La modification des grandeurs thermodynamiques s'effectue très lentement de sorte que le système soit toujours à l'équilibre.

En modifiant le couple (P,T) , on s'aperçoit qu'un corps pur peut être simultanément dans plusieurs phases différentes. On représente cela dans un diagramme en coordonnées (P,T) qui se compose de trois courbes qui définissent les valeurs des grandeurs d'état pour lesquelles deux phases coexistent.

Propriété

Lorsque le corps pur coexiste sous deux phases, il n'est plus possible de choisir indépendamment les grandeurs d'état P et T , ce qui se traduit par la présence d'une courbe de changement d'état sur les diagramme (P,T) .

Tous les corps purs présentent des diagrammes (P, T) ayant la même allure. Celui de l'eau (et du bismuth) diffèrent légèrement quant à la pente de leur courbe de fusion.

DIAGRAMME (P, T) GÉNÉRALDIAGRAMME (P, T) DE L'EAU ET DU BISMUTH

- Le diagramme (P, T) de l'eau est un cas particulier. La courbe de fusion a une pente négative qui est liée au fait que le volume occupé par l'eau dans l'état solide est supérieur à celui occupé par l'eau dans l'état liquide (et de même pour le bismuth), contrairement à tous les autres corps purs. Au niveau moléculaire cette anomalie est liée aux liaisons hydrogène.

Au point triple de l'eau : $P_{\mathcal{T}} = 611 \text{ Pa} \ll P_{atm}$ et $T_{\mathcal{T}} = 273,16 \text{ K} \approx 0^\circ\text{C}$

Au point critique de l'eau : $P_{\mathcal{C}} = 221.10^5 \text{ Pa} \gg P_{atm}$ et $T_{\mathcal{C}} = 647,15 \text{ K} \approx 374^\circ\text{C}$

Définitions

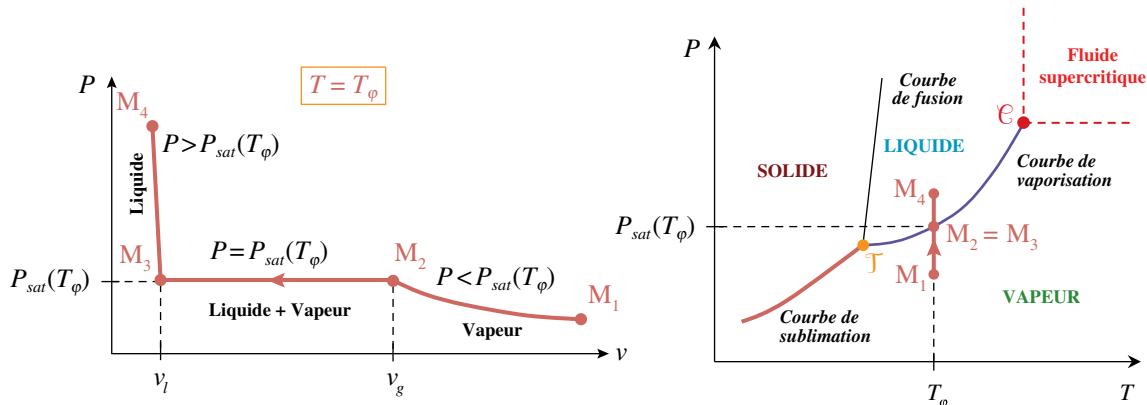
- Une **vapeur sèche** définit un gaz qui ne coexiste ni avec la phase solide, ni avec la phase liquide.
- Une **vapeur saturante** définit un système où la phase gazeuse est en équilibre avec la phase solide ou la phase liquide.
- La **pression de vapeur saturante**, notée $P_{sat}(T_\varphi)$, est la pression à laquelle la phase gazeuse d'un corps pur est en équilibre avec sa phase condensée à température donnée T_φ .
- Le corps pur est **monophasé** si les coordonnées représentatives de l'état se situent dans l'un des domaines solide, liquide ou gaz. On peut alors fixer indépendamment chacune des deux variables intensives P ou T , le système est **divariant**.
- Le corps pur est **diphasé** si les coordonnées représentatives de l'état se situent sur l'une des trois courbes. On ne peut alors fixer indépendamment P et T , le système est dit **monovariant**.
- Il existe un seul et unique couple $(P_{\mathcal{T}}, T_{\mathcal{T}})$, pour lequel les trois états coexistent : le **point triple**, noté \mathcal{T} . Le corps pur est alors dit **triphasé**, on ne peut choisir aucune des grandeurs P et T .
- À l'extrémité de la courbe de vaporisation se trouve le **point critique**, noté \mathcal{C} . Au-delà de ce point, il n'est plus possible expérimentalement d'observer de transitions de phase liquide-vapeur, les deux phases sont indiscernables, le fluide est alors qualifié de **supercritique** ou **hypercritique**.
- Pour pouvoir considérer une vapeur comme un gaz parfait, il faudra se situer loin des zones critiques. Expérimentalement, il est possible d'observer un corps pur dans un état physique pour lequel la pression et la température correspondent théoriquement à une phase différente de celle dans laquelle il se situe. Cet état est dit **métastable** et la moindre perturbation peut le faire évoluer vers un état stable. On dit que le système subit **un retard à la transition de phase** (voir exercice n° 1 p. 448).

2. Cas particulier de l'équilibre liquide-vapeur

Un système thermodynamique constitué d'un corps pur sous forme gazeuse, de masse m , est contenu dans une enceinte fermée, dans laquelle on a la possibilité de faire varier la pression P et le volume V du récipient. Le système est thermostaté à la température T_i réglable.

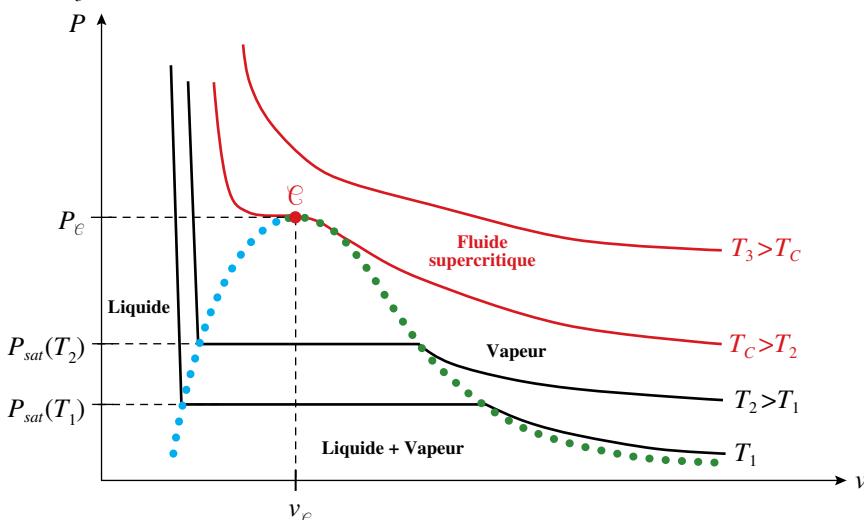
On comprime le gaz très lentement, de sorte que le système soit toujours à l'équilibre thermodynamique (en particulier la température reste constante) et on mesure la pression P et le volume massique v .

Une représentation graphique de cette évolution ($M_1 \rightarrow M_4$) est faite sur un diagramme de Clapeyron $P(v)$. Pour mieux comprendre cette évolution, on trace aussi le diagramme de phases (P,T).



Expérimentalement, on comprime la vapeur sèche ($M_1 \rightarrow M_2$) jusqu'à une pression notée $P_{sat}(T_\varphi)$ à laquelle apparaît une première goutte de liquide. En poursuivant la compression, on constate que la pression n'évolue plus et que toute la vapeur se transforme progressivement en liquide ($M_2 \rightarrow M_3$). En continuant à comprimer, la pression augmente à nouveau, tandis que le volume diminue peu (liquide très peu compressible). En continuant la compression on observerait de même la transition liquide-solide. Si on suit l'évolution sur le diagramme (P,T), le trajet ($M_2 \rightarrow M_3$) se résume à un seul point sur la courbe de vaporisation, traduisant le fait qu'ayant choisi la température du système, la pression de changement d'état est automatiquement fixée.

Cette expérience peut être reproduite pour différentes valeurs de température. On obtient ainsi un ensemble d'isothermes (température constante) appelées **isothermes d'Andrews**. L'ensemble des points M_2 et des points M_3 forment une courbe en cloche, représentée sur le diagramme ci-dessous :



Définitions

- La **courbe d'ébullition** (en bleu sur le graphique) est constituée de l'ensemble des points correspondant au liquide juste saturant, c'est-à-dire dans lequel apparaît la première bulle de gaz.
- La **courbe de rosée** (en vert sur le graphique) est constituée de l'ensemble des points correspondant à la vapeur juste saturante, c'est-à-dire dans laquelle apparaît la première goutte de liquide.
- L'ensemble de ces courbes forme la **courbe de saturation**.

- En dessous de la courbe de saturation, le corps pur est constitué d'un mélange liquide-vapeur où figure un changement d'état. Ainsi à pression fixée, tout changement de phase se produit à température constante. Les échanges d'énergie réalisés servent alors à modifier la composition du mélange. Pour une température donnée, la pression de changement d'état correspond donc à la pression de saturation.
- En dessous de la température critique T_c , dans la zone à gauche de la courbe d'ébullition, le corps pur sera uniquement présent sous forme liquide, tandis qu'il sera sous la forme gazeuse à droite de la courbe de rosée, correspondant au domaine de vapeur sèche. Au-delà de la température critique, le corps pur se trouve sous la forme d'un fluide supercritique.

→ Influence du point critique sur le stockage des fluides

On stocke un fluide sous forme liquide pour limiter l'encombrement des bouteilles. Le liquide est donc stocké à volume constant, à température ambiante et sous pression dans des bouteilles indéformables. Malheureusement en cas d'incendie, le fluide subit dans la bouteille une évolution à volume constant, représentée par un segment vertical sur le diagramme de Clapeyron. Si le volume massique est inférieur à v_c , cette évolution conduit dans la zone du liquide où pour une faible variation de température la pression augmente très rapidement (isothermes liquides très pentues), provoquant l'explosion de la bouteille. Pour éviter ce problème, il est préférable que le volume massique initial soit supérieur à v_c , de sorte que le corps pur évolue, en cas d'incendie, vers la zone vapeur où les pentes plus douces des isothermes rendent moins risquée l'élévation de pression.

3. Exploitation des isothermes d'Andrews pour un mélange diphasé

Il est possible de déterminer facilement la composition d'un mélange liquide-vapeur par simple lecture du diagramme $P(v)$. Pour cela on se place sur le palier de liquéfaction du diagramme de Clapeyron. On nomme m_l et m_g les masses respectives du corps pur sous forme liquide et sous forme vapeur. La masse totale du système étant $m = m_l + m_g$. Bien que moins habituel, on peut aussi tracer le diagramme $P(V_m)$ (avec V_m le volume molaire) et s'intéresser aux quantités de matière, respectivement, n_l , n_g et n .

Définitions

- Les **titres massiques** en liquide x_l et en vapeur x_g d'un système diphasé sont respectivement :

$$x_l = \frac{m_l}{m} \text{ et } x_g = \frac{m_g}{m} \text{ avec } x_l + x_g = 1$$

- Les **titres molaires** en liquide y_l et en vapeur y_g d'un système diphasé sont respectivement :

$$y_l = \frac{n_l}{n} \text{ et } y_g = \frac{n_g}{n} \text{ avec } y_l + y_g = 1$$

Au point M, le mélange liquide-vapeur a un volume total $mv = m_g v_g + m_l v_l$ où v_l et v_g représentent respectivement les volumes massiques du corps pur liquide et vapeur et v le volume massique total occupé par le système diphasé. D'où :

$$v = v_g \frac{m_g}{m} + v_l \frac{m_l}{m}$$

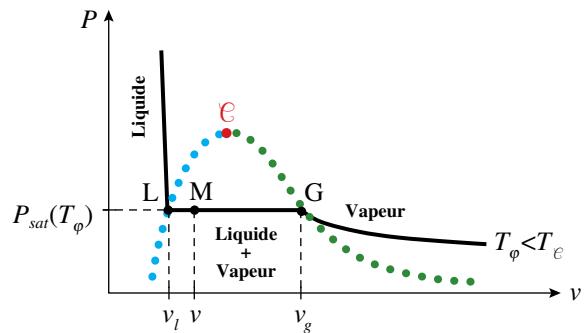
soit $v = v_g x_g + v_l x_l$ d'où $v = v_g x_g + v_l (1 - x_g)$

On en déduit l'expression des titres massiques en fonction des volumes :

$$x_g = \frac{v - v_l}{v_g - v_l} = \frac{LM}{LG} \quad \text{et} \quad x_l = \frac{v_g - v}{v_g - v_l} = \frac{MG}{LG}$$

■ Par analogie avec un système mécanique en équilibre où le point M, du schéma ci-contre, est le barycentre des points L et G affectés des masses des différentes phases, on appelle parfois **théorème des moments** la relation suivante :

$$x_l \overline{ML} + x_g \overline{MG} = 0$$



POINT MÉTHODE

Déterminer l'état (physique et thermodynamique) d'un système

■ Il est fréquent d'avoir à **déterminer complètement l'état d'un système thermodynamique** (grandeur d'état et phases présentes), dont on connaît l'état initial et qui subit une transformation dont on connaît les caractéristiques. Par exemple, on sait que le système est initialement à une température T_i et une pression P_i sous forme vapeur et qu'il évolue de façon isochore vers une température T_f au contact d'un thermostat dans une enceinte rigide. La question qui se pose est double : que vaut la pression finale du système et quel est son état physique ? Le corps est-il toujours uniquement sous forme vapeur, est-il sous deux phases liquide + vapeur ou est-il entièrement liquide ?

■ En l'absence d'indications, il faut **faire des hypothèses et les tester** pour les valider ou les rejeter. Le test repose sur les propriétés de l'isotherme d'Andrews $T = T_f$ et la valeur de la pression de saturation à cette température $P_{sat}(T_f)$.

HYPOTHÈSE	Le système est uniquement sous forme vapeur	Le système est un mélange liquide + vapeur	Le système est uniquement sous forme liquide
Grandeur(s) automatiquement connue(s)	Titres massiques $x_g = 1$ $x_l = 0$	Pression finale $P_f = P_{sat}(T_f)$	Titres massiques $x_g = 0$ $x_l = 1$
Grandeur(s) inconnue(s)	Pression finale P_f ?	Titres massiques $x_g = ?$ $x_l = 1 - x_g = ?$	Pression finale P_f ?
Calcul (outils possibles)	Détermination de P_f (loi du gaz parfait, contraintes...)	Détermination de x_l (Loi du GP sur la vapeur, volume du liquide << volume de gaz...)	Détermination de P_f (contraintes, masse volumique du liquide...)
Hypothèse valide si	$P_f < P_{sat}(T_f)$	$x_g < 1$	$P_f > P_{sat}(T_f)$
Hypothèse à rejeter si	$P_f > P_{sat}(T_f)$	$x_g > 1$	$P_f < P_{sat}(T_f)$

- Si l'on connaît plutôt la pression finale, on cherchera, avec des tests du même type, la température finale ou le titre (ou fraction) massique en vapeur, et on utilisera aussi les propriétés des isothermes d'Andrews et la valeur de la température T_φ de transition de phase à la pression P_f pour conclure.

HYPOTHÈSE	Le système est uniquement sous forme vapeur	Le système est un mélange liquide + vapeur	Le système est uniquement sous forme liquide
Hypothèse valide si	$T_f > T_\varphi(P_f)$	$x_g < I$	$T_f < T_\varphi(P_f)$

III Aspect énergétique

1. Enthalpie massique de transition de phase

Lors d'une transition de phase où la pression et la température sont constantes, **l'énergie apportée ou retirée au système ne sert donc pas à les modifier, mais à modifier la composition du système**. Les expressions $\Delta U = C_V \Delta T$ ou $\Delta H = C_p \Delta T$, introduites au chapitre 21, ne s'appliquent pas pour un changement d'état, elles ne s'appliquent que pour un système monophasé (liquide ou solide ou vapeur) dont la température varie (ou pas !). Pour une transition de phase, la description par l'enthalpie est pertinente pour déterminer un transfert thermique, puisque la transformation est à pression constante (*voir chapitre 21 p. 376*).

Définition

L'**enthalpie massique de transition de phase** $\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi)$ d'un corps pur de masse m , à la température T_φ et à la pression P fixes, est la variation de l'enthalpie massique de ce corps évoluant d'une phase α (liquide ou solide ou vapeur) à une nouvelle phase β , différente de la précédente :

$$\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi) = \frac{\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} H(T_\varphi)}{m} = h_\beta(T_\varphi) - h_\alpha(T_\varphi)$$

L'enthalpie massique de transition de phase s'exprime en J.kg⁻¹.

- Cette grandeur s'appelle aussi **chaleur latente² massique** de transition de phase, de l'état α à l'état β dont on trouve encore la notation $l_{\alpha \rightarrow \beta}(T_\varphi)$. Elle correspond à l'énergie qu'il faut apporter à 1 kg d'un corps pur pour l'amener d'une phase α à une phase β à la température T_φ constante et sous une pression P fixée. Comme en chimie, on aura coutume de normaliser toutes ces expressions, en faisant figurer en indice du Δ les trois premières lettres de la transition de phase. Par exemple :

- l'enthalpie massique de fusion de l'eau à 0 °C sous pression atmosphérique est :

$$\Delta_{fus} h(273,15 \text{ K}) = l_{fus}(273,15 \text{ K}) = 335 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

- l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau à 100 °C sous pression atmosphérique est :

$$\Delta_{vap} h(373,15 \text{ K}) = l_{vap}(373,15 \text{ K}) = 2257 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

- Un corps pur possède six chaleurs latentes différentes, une pour chaque transition de phase. Mais on se ramène à trois valeurs utiles, puisque h étant une fonction d'état, $\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi)$ est l'opposée de $\Delta_{\beta \rightarrow \alpha} h(T_\varphi)$. En effet :

$$\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi) = h_\beta(T_\varphi) - h_\alpha(T_\varphi) = -(h_\alpha(T_\varphi) - h_\beta(T_\varphi)) = -\Delta_{\beta \rightarrow \alpha} h(T_\varphi)$$

2. Le terme **latente** indique que la quantité, ici la chaleur, est « cachée », tant que le système reste dans un état physique donné, mais est susceptible de se manifester lors de la transition de phase.

Les enthalpies massiques de transition de phase sont positives pour les changements d'état qui nécessitent un apport d'énergie et négatives pour ceux qui libèrent de l'énergie au milieu extérieur.

Signe de l'enthalpie massique de transition de phase	Transition de phase		Notation de l'enthalpie massique de transition de phase
$\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi) > 0$	Liquide → Vapeur	Vaporisation	$\Delta_{vap} h = h_{vapeur} - h_{liquide} = -\Delta_{liq} h$
	Solide → Liquide	Fusion	$\Delta_{fus} h = h_{liquide} - h_{solide} = -\Delta_{sol} h$
	Solide → Vapeur	Sublimation	$\Delta_{sub} h = h_{vapeur} - h_{solide} = -\Delta_{con} h$
$\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi) < 0$	Vapeur → Liquide	Liquéfaction	$\Delta_{liq} h = h_{liquide} - h_{vapeur} = -\Delta_{vap} h$
	Liquide → Solide	Solidification	$\Delta_{sol} h = h_{solide} - h_{liquide} = -\Delta_{fus} h$
	Vapeur → Solide	Condensation	$\Delta_{con} h = h_{solide} - h_{vapeur} = -\Delta_{sub} h$

Les changements d'état s'effectuent toujours à pression constante, ce qui permet d'en déduire simplement la chaleur qu'il faut apporter à un système de masse m pour passer d'une phase α à une phase β :

$$Q_{\alpha \rightarrow \beta} = \Delta_{\alpha \rightarrow \beta} H = m \Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi)$$

On en déduit, d'après le premier principe, la variation de l'énergie interne lors d'une transition de phase, sachant que la pression $P(T_\varphi)$ est constante³ :

$$\Delta U_{\alpha \rightarrow \beta} = W_{\alpha \rightarrow \beta} + Q_{\alpha \rightarrow \beta} = -P(T_\varphi)(V_\beta - V_\alpha) + m \Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi)$$

2. Entropie massique de transition de phase

Il est possible d'étudier le changement d'état d'un corps pur à pression constante à l'aide de l'entropie. L'entropie étant une fonction d'état, on pourra, comme toujours, imaginer une transformation réversible pour calculer sa variation.

Définition

L'**entropie massique de transition de phase** d'un corps pur de masse m , à la température T_φ et à la pression P fixes, est la variation de l'entropie massique de ce corps évoluant d'une phase α (solide ou liquide ou vapeur) à une nouvelle phase β , différente de la précédente :

$$\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} s(T_\varphi) = \frac{\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} S(T_\varphi)}{m} = s_\beta(T_\varphi) - s_\alpha(T_\varphi)$$

L'entropie massique de transition de phase s'exprime en $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

D'après la physique statistique et les travaux menés par Boltzmann, l'entropie d'un système augmente avec le désordre. D'un point de vue microscopique, un solide cristallin est composé d'un arrangement ordonné, à grande distance, de particules⁴, impliquant que l'entropie massique s_{solide} est très faible. Dans un liquide, les particules sont libres de se mouvoir les unes par rapport aux autres, tout en ayant des liaisons intermoléculaires fortes. Une phase liquide est donc une phase condensée, mais ordonnée seulement à courte distance. L'entropie massique $s_{liquide}$ est donc supérieure à celle d'un solide. Pour finir, dans

3. La notation P_{sat} est réservée à l'équilibre vapeur + liquide ou vapeur + solide.

4. Attention, certains solides tel que le verre ont une structure amorphe. De ce fait ils possèdent un désordre structural important.

une phase gazeuse, les liaisons intermoléculaires sont quasiment inexistantes. L'état gazeux est donc une phase constituée de particules dispersées et désordonnées, où l'entropie massique s_{vapeur} est très élevée.

Propriété

L'entropie massique d'un corps pur varie en fonction de l'état du système :

$$s_{solide} < s_{liquide} \ll s_{vapeur}$$

- On peut donc en déduire que les entropies massiques de transition de phase sont positives pour les changements d'état qui conduisent à une phase moins condensée (solide → liquide → vapeur) et négative en sens inverse (vapeur → liquide → solide). Par exemple :

$$\Delta_{vap} s = s_{vapeur} - s_{liquide} > 0 \text{ et } \Delta_{liq} s = s_{liquide} - s_{vapeur} < 0$$

Lors d'un changement réversible ($S_{créée} = 0$) à température constante ($S_{échangée} = Q_{\alpha \rightarrow \beta} / T_\varphi$) et à pression constante ($Q_{\alpha \rightarrow \beta} = m \Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi)$), la variation d'entropie massique de transition de phase peut être exprimée en fonction de l'enthalpie massique de transition de phase, à l'aide d'un bilan entropique :

$$\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} S = \frac{Q_{\alpha \rightarrow \beta}}{T_\varphi} = \frac{m \Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi)}{T_\varphi}$$

Propriété

L'entropie massique de transition de phase d'un corps pur peut s'exprimer en fonction de l'enthalpie massique de transition de phase :

$$\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} s(T_\varphi) = \frac{\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi)}{T_\varphi}$$

- $\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} s(T_\varphi)$ et $\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi)$ sont de même signe. En effet pour rompre les liaisons d'un système permettant de passer d'un état à un autre moins ordonné ($\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} s(T_\varphi) > 0$), il faut fournir de l'énergie, c'est-à-dire que $\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi)$ doit être strictement positive.

3. Bilans énergétiques en présence de transitions de phase

Le tableau ci-dessous récapitule les différentes variations énergétiques et entropiques d'un système thermodynamique subissant une transformation à pression constante, avec et sans changement de phase.

TRANSFORMATION	$\Delta H_{A \rightarrow B}$	$\Delta S_{A \rightarrow B}$
GP qui ne change pas de phase	$mc_p (T_B - T_A)$	$mc_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$
Liquide ou solide qui ne change pas de phase	$mc (T_B - T_A)$	$mc \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$
GP, liquide ou solide qui change de phase à T_φ	$m \Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi)$	$m \Delta_{\alpha \rightarrow \beta} s(T_\varphi) = m \frac{\Delta_{\alpha \rightarrow \beta} h(T_\varphi)}{T_\varphi}$

- Généralement la capacité thermique massique c d'un système liquide se notera c_l et celui d'un système solide c_s .

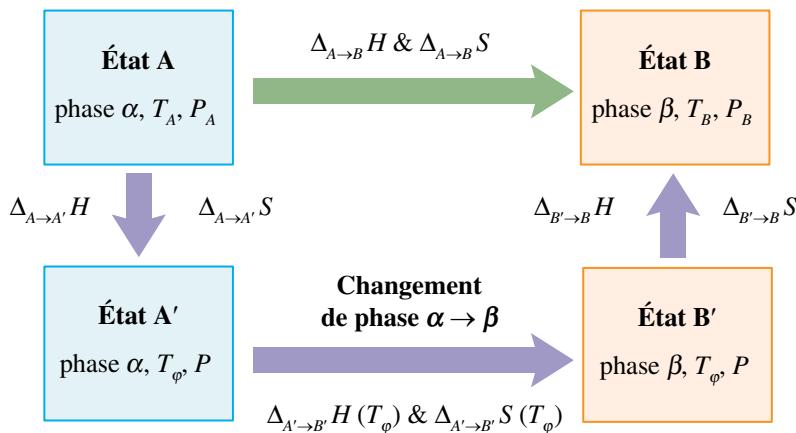
POINT MÉTHODE

Établir un bilan enthalpique ou entropique avec changement d'état

- Un bilan énergétique permet de connaître la quantité d'énergie qu'il faut fournir au système, ou inversement celle que libère le système au milieu extérieur, pour pouvoir évoluer d'un état d'équilibre initial A caractérisé par une phase α et des grandeurs d'état T_A, V_A, P_A , vers un état d'équilibre final B caractérisé par une phase β et des grandeurs d'état T_B, V_B, P_B .

L'enthalpie et l'entropie étant des fonctions d'état, on peut imaginer un **chemin réversible commode** pour calculer leur variation lors de la transformation réelle A → B.

Dans un premier temps le système sous sa forme α , doit modifier sa température jusqu'à atteindre T_φ la température de transition de phase. Après avoir changé de phase, la température du système peut continuer à évoluer, jusqu'à atteindre un nouvel état d'équilibre final sous sa forme β .



■ **Bilan d'enthalpie :** $\Delta_{A \rightarrow B} H = \underbrace{\Delta_{A \rightarrow A'} H}_{\text{phase } \alpha} + \underbrace{\Delta_{A' \rightarrow B'} H(T_\varphi)}_{\text{changement de phase}} + \underbrace{\Delta_{B' \rightarrow B} H}_{\text{phase } \beta}$

$$\Delta_{A \rightarrow B} H = mc_\alpha (T_\varphi - T_A) + m\Delta_{A' \rightarrow B'} h(T_\varphi) + mc_\beta (T_B - T_\varphi)$$

■ **Bilan d'entropie :** $\Delta_{A \rightarrow B} S = \underbrace{\Delta_{A \rightarrow A'} S}_{\text{phase } \alpha} + \underbrace{\Delta_{A' \rightarrow B'} S(T_\varphi)}_{\text{changement de phase}} + \underbrace{\Delta_{B' \rightarrow B} S}_{\text{phase } \beta}$

Les expressions de ΔS à utiliser ont été établies au chapitre 22 p. 396 pour les systèmes monophasés (phase condensée et gaz parfait).

► Théorème des moments

Comme on a écrit un théorème des moments pour le volume massique, il est également possible de l'écrire pour l'enthalpie, l'entropie et l'énergie interne massiques d'un mélange liquide-vapeur :

$$\begin{cases} x_g = \frac{h - h_l}{h_g - h_l} \\ x_l = \frac{h_g - h}{h_g - h_l} \end{cases} \quad \begin{cases} x_g = \frac{s - s_l}{s_g - s_l} \\ x_l = \frac{s_g - s}{s_g - s_l} \end{cases} \quad \begin{cases} x_g = \frac{u - u_l}{u_g - u_l} \\ x_l = \frac{u_g - u}{u_g - u_l} \end{cases}$$

Questions de cours

- Transition de phase : définition, nomenclature, propriétés des différents états.
- Diagramme (P,T) du corps pur : zone d'état physique, courbes de transitions de phase, interprétation du diagramme, point critique, point triple.
- Équilibre liquide-vapeur : isothermes d'Andrews, courbes de saturation, définition d'une vapeur sèche ou saturante, suivi de l'évolution isotherme ou isobare du corps pur sur un diagramme (P,T) ou (P,v) .
- Titre (ou fraction) massique, molaire : définitions, théorème des moments (volumes, énergie, entropie).
- Enthalpie massique de transition de phase : définition, relation entre les enthalpies, lien avec le transfert thermique, variation d'énergie interne dans une transition de phase.
- Entropie massique de transition de phase, comparaison de l'entropie des différentes phases.
- Bilans énergétique et entropique d'une transformation avec transition de phase.

Erreurs à éviter

- Il est important de ne pas conclure qu'un apport thermique augmente la température. C'était déjà faux sur la vapeur sèche (lors d'une transformation isotherme le transfert thermique n'est pas nul), ça l'est encore davantage ici où l'apport thermique ne sert pas à maintenir la température, mais à permettre le changement d'état physique.

Quelques « trucs » utiles

- Il faut toujours avoir le réflexe en présence d'un mélange diphasé de penser à la monovariance du système : si on connaît la température, on a automatiquement la pression et inversement.
- On se rappellera aussi qu'en calorimétrie (généralement opérée à pression constante) on peut écrire que la somme des ΔH ($= Q$ à pression constante) est nulle et, le cas échéant, on n'omettra pas dans les expressions, les enthalpies de transition de phase. Dans ce genre de situation, la méthode développée p. 446 est particulièrement commode.

1 **Transitions de phase au laboratoire ou au quotidien ★**

→ corrigé p. 452

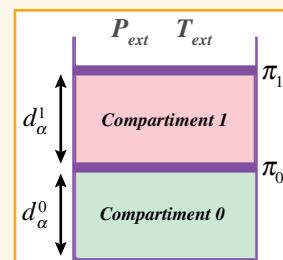
Proposer des explications aux expériences du quotidien et du laboratoire décrites dans les questions suivantes, en s'appuyant sur les propriétés des transitions de phase d'un corps pur. Aucun calcul n'est demandé, mais l'utilisation de diagrammes, de données éventuellement à rechercher et un peu de réflexion seront utiles.

- 1** Pourquoi les aliments cuisent-ils plus vite dans une cocotte-minute ? Pourquoi est-ce particulièrement utile à la montagne ?
- 2** On recommande de baisser le gaz sous une casserole d'eau bouillante. Pourquoi la cuisson « à gros bouillon » n'est-elle pas pertinente ? Par ailleurs au-dessus d'une casserole d'eau qui bout, on dit souvent qu'on voit de la vapeur. Est-ce exact ?
- 3** Lorsqu'on met au congélateur une bouteille en plastique remplie d'eau, elle éclate en gelant. Pourquoi ? Au contraire, si l'on remplit à moitié la bouteille d'une eau très chaude et qu'on la place au congélateur, elle s'écrase. Pourquoi ? (Les bouteilles sont bouchées dans les deux cas).
- 4** Un extincteur contient du dioxyde de carbone liquide sous haute pression. Lorsqu'on utilise l'extincteur il se forme une mousse (dioxyde solide) très froide. Au bout d'un court moment, le produit « disparaît » totalement. Que peut-on en déduire concernant les constantes caractéristiques du CO₂ ? Avec un raisonnement identique, expliquer pourquoi il y a de l'eau liquide sur Terre et pas à la surface de Mars.
- 5** Un bloc de glace est posé sur des tréteaux. Un fil fin aux extrémités duquel sont fixées deux masses importantes est posé à cheval sur le pain de glace. Au bout d'un certain temps le fil a traversé le pain de glace qui semble toujours intact. Expliquer ce qui s'est produit.
- 6** Si l'on place une tasse très propre contenant de l'eau dans un four à micro-onde, il arrive que l'eau ne soit pas en train de bouillir lorsqu'on la sort, bien que la tasse semble très chaude. Si l'on place le sachet de thé ou une cuillère dans la tasse, une ébullition violente démarre. Expliquer ce qui s'est passé. Comment éviter ce phénomène qui peut entraîner des brûlures importantes ? Est-ce possible avec une casserole sur le gaz ?
- 7** On réalise dans une enceinte transparente la manipulation suivante : un mélange liquide + gaz est d'abord détendu à température constante jusqu'à ce que tout le liquide soit vaporisé. En maintenant ensuite la pression, on chauffe fortement le gaz, puis en maintenant la température constante, on le comprime fortement, ensuite on maintient à nouveau la pression et on refroidit le système. Pour terminer on maintient la température et on détend lentement le système. Rien n'ayant été observé jusqu'ici, il apparaît tout à coup des bulles... dans ce qu'on pensait être toujours un gaz. De plus du gaz apparaît au-dessus d'un liquide manifestement en train de se vaporiser. Comment est-ce possible ?

2 **Évolution d'un mélange liquide-vapeur (d'après CCP 2008) ★★★**

→ corrigé p. 454

On reprend le dispositif expérimental de l'exercice n° 3 p. 384. Un cylindre indéformable de parois diathermanes, de section $S = 10^{-2} \text{ m}^2$, comporte 2 pistons de masses négligeables : π_1 est bloqué et π_0 peut se déplacer librement et sans frottement. π_0 délimite un compartiment 0 dans lequel se trouve de l'eau. Le compartiment 1 situé entre les deux pistons contient de l'air. Dans l'état initial, noté état α , les systèmes sont à l'équilibre thermique avec l'extérieur où la température est $T_\alpha = 380 \text{ K}$. Les hauteurs des compartiments sont respectivement $d_\alpha^0 = 0,1 \text{ m}$ et $d_\alpha^1 = 0,1 \text{ m}$. On note que l'eau est sous forme vapeur et liquide, le liquide occupant une hauteur $d_{\alpha,liq}^0 = 0,002 \text{ m}$. Les gaz sont considérés parfaits. On note les grandeurs en indiquant par l'état et à l'aide d'un exposant correspondant au gaz : par



exemple T_α^0 est la température du gaz dans le compartiment 0 dans l'état α . On place maintenant l'ensemble dans un thermostat à la température $T_\beta = 390$ K et on attend que le système atteigne un nouvel état d'équilibre β .

On admettra que la pression de vapeur saturante de l'eau pour des températures proches de $T_0 = 373$ K vérifie l'expression :

$$P_{\text{sat}}(T) = P_0 \exp \left[\frac{M_E l_v(T_0)}{RT_0^2} (T - T_0) \right]$$

Où $P_0 = P_{\text{sat}}(T_0) = 1,0 \cdot 10^5$ Pa et $l_v(T_0)$ est l'enthalpie de vaporisation (anciennement nommée chaleur latente) massique de l'eau.

Données : $M_E = 18 \text{ g.mol}^{-1}$; $M_A = 29 \text{ g.mol}^{-1}$; $R = 8,31 \text{ USI}$; $l_v(T_0) = 2240 \text{ kJ.kg}^{-1}$; masse volumique de l'eau liquide $\rho_l = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$

- ① Déterminer complètement les pressions et températures de l'état α .
- ② Calculer les masses de gaz dans les compartiments et la masse d'eau liquide. En déduire la fraction (ou titre) massique de vapeur d'eau dans l'état α .
- ③ Montrer que dans l'état β l'eau ne peut pas se trouver sous forme de vapeur sèche.
- ④ Montrer que dans l'état β l'eau ne peut pas se trouver uniquement sous forme liquide.
- ⑤ Calculer les hauteurs de chaque compartiment dans l'état β et la fraction massique de vapeur d'eau dans le compartiment 0. Commenter.

3 Un glaçon au sauna ★★

→ corrigé p. 455

On utilise un calorimètre muni d'un piston mobile sans frottement, de sorte que la pression reste égale à la pression atmosphérique $P_0 = 1$ bar dans toutes les expériences. On introduit dans le calorimètre un glaçon d'eau de masse x kg à la température $T_f = 273$ K et une masse $(1 - x)$ kg de vapeur d'eau à la température $T_e = 373$ K. On rappelle : $P_{\text{vap}}(T_e) = P_{\text{fus}}(T_f) = 1$ bar.

Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_l = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$

Enthalpies massiques de changement d'état : $\Delta_{\text{vap}} h(T_e) = 2300 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $\Delta_{\text{fus}} h(T_f) = 330 \text{ kJ.kg}^{-1}$

- ① Déterminer la composition du système si la température finale est T_e et montrer que dans ce cas x doit nécessairement être inférieur à une valeur x_M . Calculer numériquement x_M .
- ② Déterminer la composition du mélange initial si la température finale est T_f . Montrer que dans ce cas x doit être supérieur à une valeur x_m . Calculer numériquement x_m .
- ③ On choisit $x_M < x < x_m$. Déterminer l'état final. A.N. : $x = 0,80 \text{ kg}$

4 Modèle de fonctionnement d'une turbine à vapeur – Cycle de Rankine (d'après CCP 2007) ★★★

→ corrigé p. 458

Le circuit secondaire d'une centrale nucléaire comporte les éléments suivants : un générateur de vapeur, une turbine, un condenseur et une pompe d'alimentation (figure ci-après).

Les transformations subies par l'eau dans le circuit sont modélisées par le cycle de Rankine décrit ci-dessous.

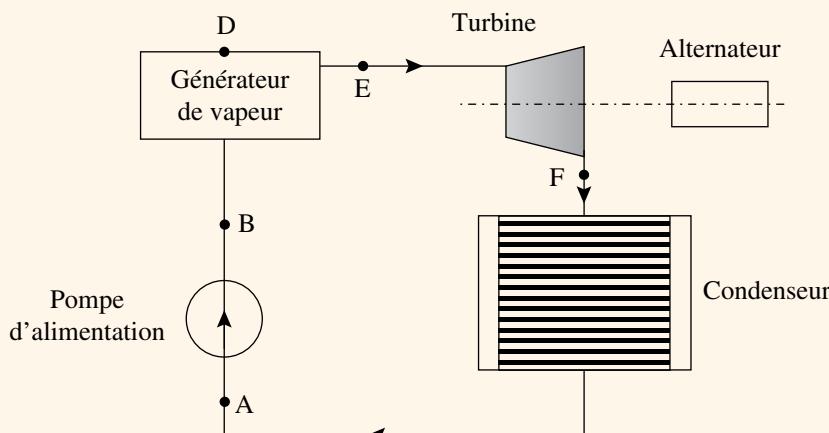
– A → B : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression $P_1 = 0,056$ bar à la pression $P_2 = 69,200$ bar, du liquide saturant sortant du condenseur à la pression P_1 (état A). Cette compression entraîne une élévation ΔT de la température du liquide.

– B → D : échauffement isobare du liquide dans le générateur de vapeur qui amène le liquide de l'état B à l'état de liquide saturant sous la pression P_2 (état D).

- D → E : vaporisation totale, dans le générateur de vapeur, sous la pression P_2 .
 - E → F : détente adiabatique réversible, dans la turbine, de P_2 à P_1 .
 - F → A : liquéfaction totale, dans le condenseur, sous la pression P_1 , de la vapeur présente dans l'état F.
- Tous les calculs se rapportent à des grandeurs massiques. La capacité thermique massique c_L du liquide est constante et vaut $4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Le coefficient de dilatation isobare α de l'eau liquide, supposé constant, vaut $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

Température (°C)	P_{sat} (bar)	Liquide saturante		Vapeur saturante	
		v_L ($\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$)	h_L ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)	v_G ($\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$)	h_G ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)
35	0,056	$1,00 \cdot 10^{-3}$	146,34	25,24	2560,67
285	69,200	$1,35 \cdot 10^{-3}$	1261,11	0,028	2768,83

- ① Représenter le cycle décrit par l'eau dans un diagramme de Clapeyron (P, v).
- ② La différentielle de l'entropie massique du liquide s'écrit en fonction des variables T et P : $ds = c_L \frac{dT}{T} - \alpha v_L dP$. On note $\Delta T = T - T_1$ l'élévation de la température du liquide dans la pompe d'alimentation. Sachant que $\Delta T \ll T_1$, calculer ΔT . On supposera pour ce calcul, que le liquide est incompressible et que son volume massique v_L vaut $10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$. Dans la suite du problème on négligera ΔT .
- ③ Calculer le titre massique x_F et l'enthalpie massique h_{MF} du système liquide-vapeur sortant de la turbine (état F). Dans les questions précédentes, il est énoncé, que l'entropie massique d'un système liquide-vapeur, de titre massique x , en équilibre à la température T est donnée par la relation : $s(x, T) = c_L \ln T + \frac{\Delta_{\text{vap}} h(T)x}{T} + \text{cste}$ où $\Delta_{\text{vap}} h(T)$ est la chaleur latente massique de vaporisation à la température T .
- ④ Calculer les quantités d'énergie q_1 et q_2 reçues par kg d'eau, par transfert thermique, respectivement, dans le condenseur et dans le générateur de vapeur. Calculer le travail w reçu, par kg de fluide au cours du cycle. La seconde identité thermodynamique pour un fluide en écoulement s'écrit : $dh = Tds + vdp$.
- ⑤ Calculer le rendement ρ du cycle. Comparer ce rendement à celui ρ_c d'un cycle de Carnot décris entre les mêmes températures extrêmes T_1 et T_2 .



Résolution de problème : Qui est le plus fort ? ★★★**→ corrigé p. 459****DOCUMENT 1 : Superman**

Dans le film *Superman III* de Richard Lester en 1983, le héros (créé à l'origine en bande dessinée par Jerry Siegel et Joe Shuster) éteint un gigantesque incendie de façon originale. En soufflant sur la surface d'un lac des environs, il en gèle une bonne épaisseur en quelques secondes, soulève le bloc de glace ainsi formé, puis le rapporte en volant jusqu'au site industriel en feu sur lequel il le lâche. Le glaçon se liquéfie pendant sa chute dans la chaleur de l'incendie générant une pluie qui sauve la situation en éteignant les flammes.

DOCUMENT 2 : Le Hobbit

Dans le deuxième opus de la saga *Le Hobbit* de Peter Jackson en 2013, tiré de l'œuvre de fantasy de J.R.R. Tolkien parue en 1937, les nains fondent de l'or pour le couler dans un gigantesque moule. Cet or liquide sera utilisé pour submerger un dragon (dont on sait qu'il vénère l'or par-dessus tout).

Hypothèses de travail s'appuyant sur les images des films

Les dimensions du lac sont de quelques kilomètres, on pourra assimiler le bloc de glace à un cylindre de 2 km de diamètre et d'un mètre d'épaisseur. De même, le moule contenant l'or liquide sera assimilé à un cylindre de 20 m de haut et de 5 m de diamètre.

Données complémentaires :

Les grandeurs liées aux changements d'état sont données à pression atmosphérique, les capacités thermiques sont arrondies et supposées constantes dans les domaines utilisés.

Densité	Capacité thermique massique du liquide ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)	Capacité thermique massique du solide ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)	Température de fusion ($^{\circ}\text{C}$)	Température d'ébullition ($^{\circ}\text{C}$)	Enthalpie massique de fusion ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)	Enthalpie massique de vaporisation ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)
Eau	1	4,2	2,0	0	100	333
Or	19,3	0,17	0,13	1064	2856	64

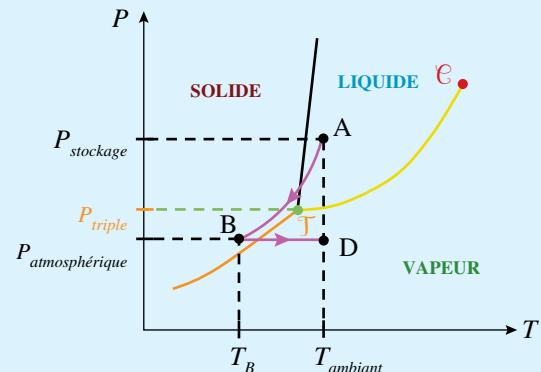
Ordre de grandeur de la puissance d'un réacteur nucléaire ou d'une centrale thermique : 1 GW

Problème à résoudre : Analyser, quantifier, comparer et commenter ces prouesses énergétiques.

1 Transitions de phase au laboratoire et au quotidien

→ énoncé p. 448

- 1 Les aliments cuisent dans l'eau bouillante, donc à la température T_α du changement d'état de l'eau. Au niveau de la mer, à la pression normale de 1 atmosphère (environ 1 bar), $T_\alpha = 100^\circ\text{C}$. Dans la cocotte-minute, la pression est supérieure, car la vapeur est bloquée dans la marmite et il se produit un équilibre qui permet d'atteindre 1,8 bar (la soupape s'ouvre si la pression dépasse cette valeur), ce qui correspond à $T_\alpha = 118^\circ\text{C}$. À plus haute température, les aliments cuisent plus rapidement (la température est un facteur cinétique). Inversement, à la montagne, la pression diminue rapidement avec l'altitude. À 2000 m d'altitude, la pression est de 0,8 atm pour une température d'ébullition de l'eau $T_\alpha = 95^\circ\text{C}$, en haut du Mont Blanc (respectivement de l'Everest) la pression tombe à 0,55 atm (resp. 0,3 atm) et $T_\alpha = 85^\circ\text{C}$ (resp. 70 °C). Cette fois les aliments sont de plus en plus longs à cuire au fur et à mesure qu'on s'élève, d'où l'intérêt de la cocotte-minute !
- 2 La chaleur fournie par le gaz (ou la plaque électrique) sert dans un premier temps à éléver la température de l'eau. **Une fois l'ébullition atteinte, la température n'évolue plus** et l'apport thermique ne sert qu'à vaporiser l'eau liquide. Il est donc pertinent de baisser le gaz de façon à juste maintenir l'ébullition. La cuisson ne sera pas plus rapide à gros bouillons, la température sera toujours de 100 °C et on gaspillera surtout de l'énergie à faire évaporer l'eau. **La vapeur d'eau est invisible**, comme tous les gaz incolores. Ce qu'on a l'habitude d'appeler vapeur est en fait de l'eau liquide sous forme de très fines gouttelettes formées, lorsque la vapeur qui s'élève de la casserole se refroidit dans l'air ambiant et se liquéfie. Il en est de même pour la buée de respiration en hiver, si on la voit, c'est parce que l'eau est sous forme liquide.
- 3 Le volume massique de l'eau liquide est plus faible que celui de l'eau solide, de ce fait le volume augmente lorsque la glace se solidifie. C'est pourquoi la bouteille fermée éclate en général. On peut l'éviter en la gardant ouverte ou en ne la remplissant pas totalement, car en laissant beaucoup d'air, ce dernier se comprimera facilement sans détruire la bouteille. Si l'on met de l'eau très chaude, en ne remplissant que la moitié, une grande quantité de vapeur d'eau est enfermée en même temps que l'eau liquide dans la bouteille. Elle se refroidit et se liquéfie en diminuant fortement de volume, la bouteille s'écrase.
- 4 Le dioxyde de carbone est initialement liquide à haute pression et température ambiante. L'ouverture provoque une détente brutale qu'on peut supposer adiabatique, le CO₂ se refroidit donc brutalement et se solidifie (AB). Il évolue ensuite à pression constante (atmosphérique) et se réchauffe progressivement (BD). S'il « disparaît » c'est qu'il passe sous forme vapeur. Donc il se sublime. Cela suppose que la pression ambiante permet ce changement d'état, donc que **la pression du point triple du CO₂ est supérieure à la pression atmosphérique**. Il n'en est évidemment pas de même pour l'eau. Ce qui explique qu'elle existe sur Terre à l'état liquide, au contraire de Mars où la pression en surface est beaucoup trop faible pour autoriser la présence d'eau liquide. Les données sont faciles à trouver dans une base de données ou sur internet.
- Point triple CO₂ :** $T = 216,55 \text{ K}$ et $P = 5,19 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ (soit 5,12 atm)
- Point triple eau :** $T = 273,16 \text{ K}$ et $P = 611 \text{ Pa}$ (soit 0,006 atm)
- Pression à la surface de Mars :** $P = 30 \text{ Pa}$ (soit 0,0003 atm)



5. C'est Denis Papin (1647-1712) scientifique et inventeur de génie qui inventa la cocotte-minute, avec un appareil appelé digesteur. On lui doit aussi la machine à vapeur et le premier sous-marin (baptisé *urinator*). Il ne sut jamais rentabiliser ses inventions et, très en avance sur son temps, se fit de nombreux ennemis. Il mourut sans doute dans un grand dénuement dans les bas quartiers de Londres, rejeté de la Royal Society par le tout puissant Newton.

- 5 La force exercée par le fil est importante du fait des poids fixés à ses extrémités et de surcroît répartie sur une faible surface. De ce fait, la pression est localement élevée au niveau du fil et **la compression de la glace d'eau produit de l'eau liquide** (c'est le contraire avec les autres corps). Donc, localement, la glace fond, le fil s'enfonce et, la pression redevenant normale en surface, l'eau se resolidifie. Le fil progresse ainsi jusqu'à traverser la glace, qui se reforme au fur et à mesure. À la fin, le pain de glace est intact et le fil a traversé toute l'épaisseur et se retrouve sur le sol.
- 6 Ce phénomène est un **retard au changement d'état** ou état métastable. La température monte au-dessus de 100 °C, température où la vaporisation devrait commencer (et la température cesser d'augmenter). L'eau est alors dans un état dit métastable, en dehors d'une situation d'équilibre. Il suffit alors d'une toute petite perturbation (sachet de thé, cuillère, agitation) pour ramener le système à l'équilibre, l'ébullition retardée démarre alors très violemment. Pour l'éviter, il faut que le milieu soit perturbé pendant la montée en température. On évitera de chauffer de l'eau pure, le plateau tournant fournit aussi une agitation bienvenue. Cela n'arrive pas avec la casserole, car le chauffage par en-dessous provoque rapidement de la convection (l'eau plus chaude inférieure est moins dense et remonte) qui agite fortement le milieu. Avec un micro-ondes au contraire, les ondes excitent toutes les molécules d'eau en même temps et chauffent uniformément le liquide, par conséquent il ne se produit pas de convection.

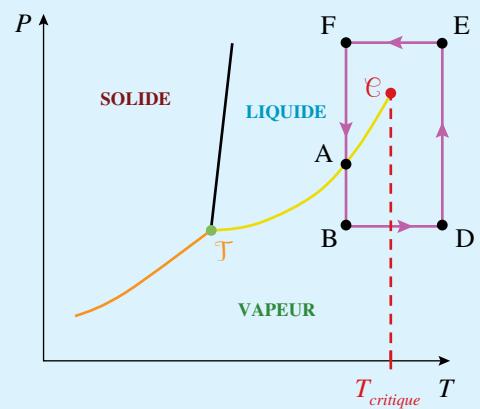
Bien comprendre

L'état métastable, ou du retard au changement d'état, n'est pas un état d'équilibre, on ne peut pas le placer sur un diagramme.

Remarque : L'utilisation d'état métastable a permis de réaliser les premiers détecteurs de particules. Dans la chambre à brouillard, un gaz brutalement détendu ne se liquéfie pas, malgré une température inférieure à celle du changement d'état, on dit que la vapeur est sursaturante. Le passage d'une particule provoque la liquéfaction le long de sa trajectoire, qui est ainsi matérialisée par des microgouttes (brouillard). De même dans la chambre à bulles où le liquide est sursaturant et dans lequel des bulles se forment sur la trajectoire. La surfusion est l'état métastable d'un liquide qui devrait être solide, elle se produit par exemple pour des gouttes de pluies en hiver qui restent liquides dans une atmosphère à température inférieure à 0 °C. Au contact du sol, elles gèlent instantanément, provoquant le verglas sur les routes.

- 7 Cette manipulation qui s'appelle **tour du point critique** est compréhensible si on la représente sur un diagramme (P,T). On part du mélange bien visible (A), puis on vaporise par détente, le système est clairement dans l'état gazeux (B), on a vu disparaître progressivement le liquide. Ensuite on chauffe (BD), puis on comprime (DE) et enfin on refroidit (EF), aucun changement n'est visible, car le fluide passe continûment d'un point à l'autre. Lorsqu'on détend, on arrive en A, on voit apparaître le gaz au-dessus du liquide qu'on pensait être toujours du gaz. Il faut évidemment que $T_A < T_c$ et $T_D > T_c$.

Remarque : Dans la pratique l'expérience se mène un peu différemment avec des isochores moins faciles à représenter sur le graphe (P,T), mais le principe est le même, il faut faire le tour du point critique. On trouve sur internet des vidéos montrant cette expérience avec le suivi sur un diagramme de Clapeyron. Cette manipulation est par ailleurs réalisable dans les lycées qui possèdent le matériel adéquat. Le même matériel permet également d'observer l'opalescence critique, cet état très particulier du fluide au point critique.



- ❶ Les parois sont perméables à la chaleur, d'où $T_\alpha^0 = T_\alpha^1 = T_{ext} = T_\alpha = 380 \text{ K}$. De plus le piston π_0 étant mobile, la pression P_α^0 dans le compartiment 0 est identique à la pression P_α^1 dans le compartiment 1. Dans l'état α , l'eau est à l'équilibre liquide-vapeur, elle est à la pression de vapeur saturante :

$$P_\alpha^0 = P_\alpha^1 = P_\alpha = P_{sat}(T_\alpha) = P_0 \exp\left[\frac{M_E l_v(T)_0}{RT_0^2}(T_\alpha - T_0)\right] = 1,28 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

- ❷ Dans les deux compartiments 0 et 1, les gaz sont supposés parfaits. D'où :

$$P_\alpha V_{\alpha,E,vap}^0 = \frac{m_{E,vap}}{M_E} RT_\alpha \Rightarrow m_{E,vap} = \frac{M_E P_\alpha}{RT_\alpha} S(d_\alpha^0 - d_{\alpha,liq}^0) = 0,71 \text{ g}$$

$$P_\alpha V_{\alpha,A,vap}^1 = \frac{m_{A,vap}}{M_A} RT_\alpha \Rightarrow m_{A,vap} = \frac{M_A P_\alpha}{RT_\alpha} S d_\alpha^1 = 1,17 \text{ g}$$

Le volume de l'eau liquide permet d'obtenir sa masse : $m_{E,liq} = V_{\alpha,E,liq}^0 \rho_l = S d_{\alpha,liq}^0 \rho_l = 20,0 \text{ g}$

Ainsi la masse totale de l'eau dans le compartiment 0 est : $m_E = m_{E,liq} + m_{E,vap} = 20,7 \text{ g}$

La fraction massique de vapeur d'eau dans l'état α vaut : $x_\alpha = \frac{m_{E,vap}}{m_E} = 3,4\%$

On note dans la suite du problème, $d = d_\alpha^0 + d_\alpha^1$.

- ❸ Dans ce nouvel état : $T_\beta^0 = T_\beta' = 390 \text{ K}$ et $P_\beta^0 = P_\beta'$. La pression de vapeur saturante à cette température vaut :

$$P_\beta^0 = P_\beta^1 = P_\beta = P_{sat}(T_\beta) = P_0 \exp\left[\frac{M_E l_v(T)_0}{RT_0^2}(T_\beta - T_0)\right] = 1,81 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Supposons que dans l'état β l'eau dans le compartiment 0 se trouve uniquement sous forme de vapeur sèche, qui se comporte comme un gaz parfait, de même que l'air dans le compartiment 1 :

$$\begin{cases} P_\beta S d_\beta^0 = \frac{m_E}{M_E} RT_\beta \\ P_\beta S d_\beta^1 = \frac{m_{A,vap}}{M_A} RT_\beta \end{cases} \Rightarrow P_\beta S(d_\beta^0 + d_\beta^1) = \left(\frac{m_E}{M_E} + \frac{m_{A,vap}}{M_A}\right) RT_\beta \Rightarrow P_\beta S d = \left(\frac{m_E}{M_E} + \frac{m_{A,vap}}{M_A}\right) RT_\beta$$

$$\Rightarrow P_\beta = \left(\frac{m_E}{M_E} + \frac{m_{A,vap}}{M_A}\right) \frac{RT_\beta}{Sd} = 1,93 \cdot 10^6 \text{ Pa} > 1,81 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

La pression obtenue P_β n'est pas inférieure à $P_{sat}(T_\beta)$, l'eau ne peut pas être uniquement sous forme de vapeur sèche.

- ❹ Supposons maintenant que dans l'état β l'eau dans le compartiment 0 se trouve uniquement sous forme liquide. La hauteur de l'eau liquide peut être négligée ($\sim 2 \text{ mm}$), le gaz dans le compartiment 1 occupe tout le volume et sa pression vaut alors :

$$P_\beta = \frac{m_{A,vap} RT_\beta}{M_A S d_\beta^1} = 6,62 \cdot 10^4 \text{ Pa} < 1,81 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

La pression obtenue P_β n'est pas supérieure à $P_{sat}(T_\beta)$, l'eau ne peut pas être uniquement sous forme liquide. Ainsi, dans l'état β , l'eau est obligatoirement en phase liquide-vapeur et la pression régnant dans les deux compartiments est égale à $P_\beta = P_{sat}(T_\beta) = 1,81 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

❸ La hauteur du compartiment 1 vérifie alors :

$$P_\beta S d_\beta^1 = \frac{m_{A,vap}}{M_A} RT_\beta \quad \text{d'où :} \quad d_\beta^1 = \frac{m_{A,vap} RT_\beta}{M_A P_\beta S} = 0,072 \text{ m}$$

On peut en déduire la hauteur du compartiment 0 : $d_\beta^0 = d - d_\beta^1 = 0,128 \text{ m}$

La masse totale m_E est conservée et on cherche la hauteur occupée par l'eau liquide $d_{\beta,liq}^0$ et l'eau vapeur $d_{\beta,vap}^0$:

$$\begin{aligned} m_E &= m_{E,liq} + m_{E,vap} = d_{\beta,liq}^0 S \rho_l + \frac{d_{\beta,vap}^0 S P_\beta M_E}{RT_\beta} \quad \text{avec} \quad d_\beta^0 = d_{\beta,vap}^0 + d_{\beta,liq}^0 \\ \Rightarrow m_E &= (d_\beta^0 - d_{\beta,vap}^0) S \rho_l + \frac{d_{\beta,vap}^0 S P_\beta M_E}{RT_\beta} \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } d_{\beta,vap}^0 = RT_\beta \frac{m_E - S \rho_l d_\beta^0}{S(P_\beta M_E - \rho_l RT_\beta)} = 0,128 \text{ m} \quad \text{et} \quad d_{\beta,liq}^0 = d_\beta^0 - d_{\beta,vap}^0 = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

On peut maintenant obtenir les masses de l'eau sous forme liquide et sous forme vapeur :

$$m_{E,liq} = d_{\beta,liq}^0 S \rho_l = 19,4 \text{ g} \quad \text{et} \quad m_{E,vap} = m_E - m_{E,liq} = 1,28 \text{ g}$$

$$\text{Ainsi on en déduit : } x_\beta = \frac{m_{E,vap}}{m_E} = 6,2\%$$

L'apport d'énergie thermique transforme une petite quantité d'eau liquide en eau sous forme vapeur.

Bien comprendre

- Le calcul des valeurs numériques doit se faire avec un certain nombre de chiffres significatifs, car la pression dans les états α et β dépend d'une exponentielle. Arrondir les résultats à deux chiffres significatifs après la virgule engendre un écart important sur la valeur numérique de x_α et x_β .
- On a ici mené les calculs de façon rigoureuse. On peut également arriver rapidement à un résultat correct en négligeant le volume du liquide devant celui de la vapeur : $d_{\beta,liq}^0 \ll d_{\beta,vap}^0 \Rightarrow m_{E,vap} = P_\beta d_\beta^0 S / RT_\beta = 1,28 \text{ g}$ et $m_{E,liq} = m_E - m_{E,vap} = 19,4 \text{ g}$.

3 Un glaçon au sauna

→ énoncé p. 449

L'ensemble des transformations se fait à pression constante pour un système fermé :

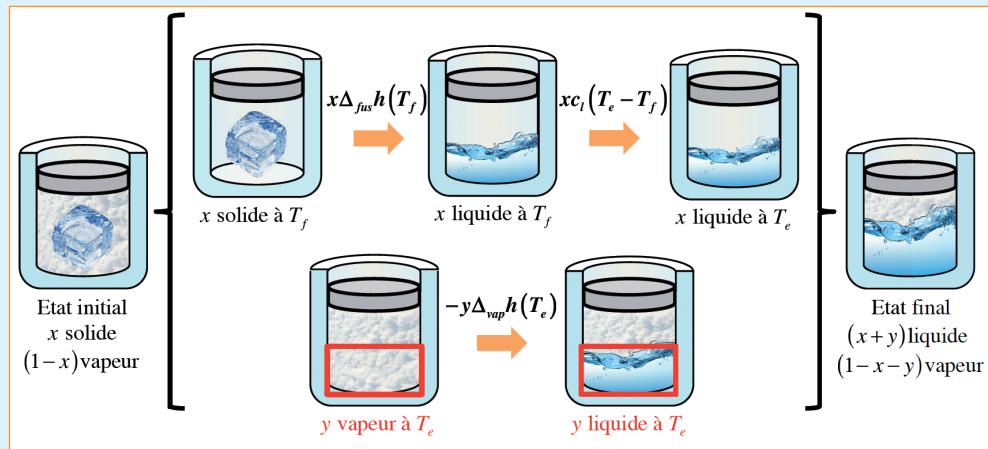
$$\Delta H_{i \rightarrow f} = \sum Q \text{ or l'ensemble est adiabatique, d'où } \Delta H = 0.$$

Le système est formé initialement d'un glaçon et d'une vapeur. Pour calculer ΔH (la fonction d'état), on imagine des transformations simples pour lesquelles ΔH est facile à calculer.

Dans toutes les études qui suivent, on se ramène à une seule inconnue à déterminer, dont la valeur permet de connaître l'ensemble de l'état du système : y dans la question ❶, z dans la question ❷ et T dans la question ❸. Attention, ici x n'est pas une inconnue, mais une donnée.

- ❶ À la température T_e sous pression P_0 , le système ne peut être que dans l'état liquide-vapeur :
- le glaçon a totalement fondu, l'eau liquide s'est réchauffée ce qui nécessite un apport thermique.
 - une partie y de la vapeur s'est liquéfiée pour donner cet apport thermique.

La modélisation de la transformation est schématisée page suivante.



On peut ainsi écrire le bilan énergétique de ce système :

$$x\Delta_{fus}h(T_f) + xc_l(T_e - T_f) - y\Delta_{vap}h(T_e) = 0 \quad \text{d'où} \quad y = x \frac{\Delta_{fus}h(T_f) + c_l(T_e - T_f)}{\Delta_{vap}h(T_e)}$$

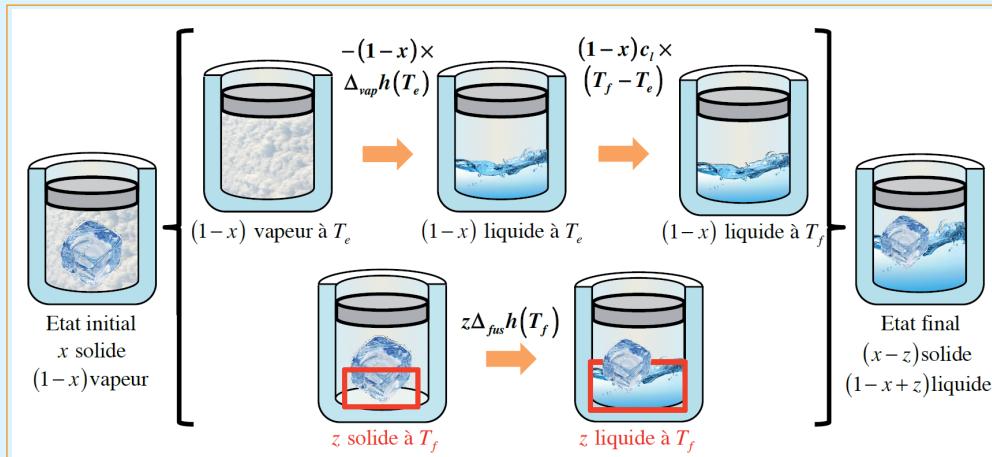
Cette transformation n'est possible que s'il y a assez de vapeur, d'où $y \leq 1-x$, ce qui permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} & x[\Delta_{fus}h(T_f) + c_l(T_e - T_f)] \leq (1-x)\Delta_{vap}h(T_e) \\ \Rightarrow & x \leq \frac{\Delta_{vap}h(T_e)}{\Delta_{fus}h(T_f) + \Delta_{vap}h(T_e) + c_l(T_e - T_f)} \quad \Rightarrow \quad x \leq x_M = 0,75 \text{ kg} \end{aligned}$$

2) À la température T_f sous pression P_0 , le système ne peut être que dans l'état solide-liquide :

- ↳ La vapeur s'est totalement liquéfiée, puis s'est refroidie, l'ensemble a fourni de la chaleur.
- ↳ Une partie z du glaçon a récupéré cette chaleur pour fondre.

La modélisation de la transformation est schématisée ci-après :



On peut ainsi écrire le bilan énergétique de ce système :

$$z\Delta_{fus}h(T_f) - (1-x)\Delta_{vap}h(T_e) + (1-x)c_l(T_e - T_f) = 0 \quad \text{d'où :} \quad z = \frac{(1-x)[\Delta_{vap}h(T_e) + c_l(T_e - T_f)]}{\Delta_{fus}h(T_f)}$$

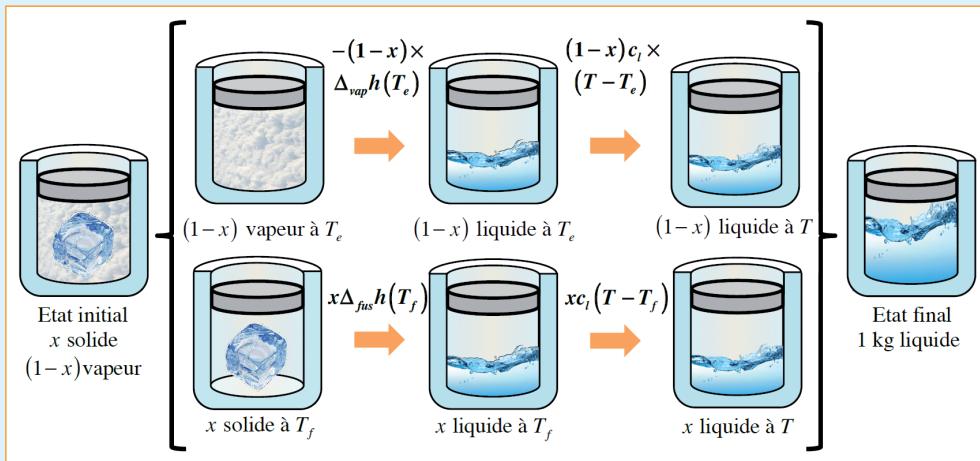
Cette transformation n'est possible que s'il y a assez de glace, d'où $z \leq x$, ce qui permet d'écrire que :

$$(1-x) [\Delta_{\text{vap}} h(T_e) + c_l (T_e - T_f)] \leq x \Delta_{\text{fus}} h(T_f)$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{\Delta_{\text{vap}} h(T_e) + c_l (T_e - T_f)}{\Delta_{\text{fus}} h(T_f) + \Delta_{\text{vap}} h(T_e) + c_l (T_e - T_f)} \Rightarrow x \geq x_m = 0,89 \text{ kg}$$

- 3 Dans ①, pour qu'il reste de la vapeur il faut que $x < x_m$ donc si $x > x_m$, il n'y a plus d'eau vapeur. Dans ②, pour qu'il reste du solide il faut que $x > x_m$ donc si $x < x_m$ cela implique qu'il n'y a plus d'eau solide. Ainsi dans les deux cas il ne reste que de l'eau sous forme liquide soit $(1-x+x=1 \text{ kg})$.

On cherche à identifier l'état final, donc à connaître la température finale notée T , seule inconnue du problème.



On peut ainsi écrire le bilan énergétique de ce système :

$$x \Delta_{\text{fus}} h(T_f) + xc_l(T - T_f) - (1-x) \Delta_{\text{vap}} h(T_e) + (1-x)c_l(T - T_e) = 0$$

$$\text{d'où : } T [xc_l + (1-x)c_l] = -x \Delta_{\text{fus}} h(T_f) + (1-x) \Delta_{\text{vap}} h(T_e) + xc_l T_f + (1-x) T_e c_l$$

$$\text{soit : } T = \frac{(1-x) \Delta_{\text{vap}} h(T_e) - x \Delta_{\text{fus}} h(T_f) + c_l (x T_f + (1-x) T_e)}{c_l} = 340 \text{ K} = 67^\circ \text{C} \quad T_f < T < T_e$$

Bien comprendre

- En calorimétrie, on écrit presque toujours un bilan enthalpique global de somme nulle. Concernant les unités, on peut conserver les données en kJ (car on ne fait que des rapports) et exceptionnellement les températures sont en °C ($T_f = 0^\circ \text{C}$ et $T_e = 100^\circ \text{C}$), puisque n'interviennent que des différences de températures.
- La transformation réelle se fait différemment, sans passer par des états intermédiaires d'équilibre, mais pour calculer ΔH (ou ΔS) on peut choisir un chemin plus commode (voir point méthode p. 446).

Dans l'étude du changement d'état il faut bien identifier les inconnues :

– S'il y a deux phases, l'inconnue est la composition, P et T sont connues (① et ②).

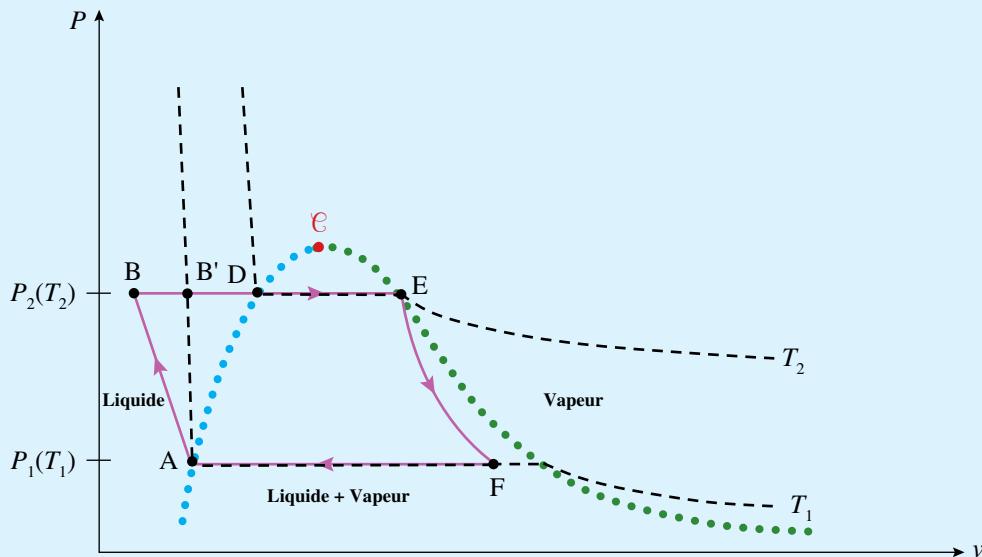
– S'il n'y a qu'une phase, l'inconnue est l'état, ici T , la composition est connue (③).

■ Attention, certaines erreurs sont à éviter : au-dessus de x_m on a la phase liquide-solide et au-dessous de x_M on a la phase liquide-vapeur, il ne faut pas en conclure qu'entre les deux on a ... la phase solide-liquide-vapeur ! Cela est évidemment faux car ce n'est possible qu'au point triple et la pression n'est pas la bonne.

4 Modèle de fonctionnement d'une turbine à vapeur – Cycle de Rankine

→ énoncé p. 449

- ❶ L'eau subit des changements d'état liquide-vapeur. On place donc la courbe de saturation sur le diagramme de Clapeyron ainsi que les deux isothermes T_1 et T_2 .



- ❷ La compression AB est adiabatique réversible donc isentropique, d'où :

$$ds = c_L \frac{dT}{T} - \alpha v_L dP = 0$$

Qui s'intègre en : $c_L \int_{T_1}^{\Delta T + T_1} \frac{dT}{T} = \alpha v_L \int_{P_1}^{P_2} dP \Rightarrow c_L \ln\left(\frac{\Delta T + T_1}{T_1}\right) = \alpha v_L (P_2 - P_1)$

$\Delta T \ll T_1$, on peut faire un développement limité de la fonction $\ln(1 + x)$, d'où :

$$\ln\left(\frac{\Delta T + T_1}{T_1}\right) \approx \frac{\Delta T}{T_1} \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{\alpha v_L T_1 (P_2 - P_1)}{c_L} = 7,6 \cdot 10^{-2} \text{ K} = 0,076 \text{ }^\circ\text{C}$$

On peut donc négliger cette différence de température et écrire que $T_B \approx T_1$, ce qui revient à confondre les positions (très proches) de B et B' sur le diagramme.

- ❸ Dans la turbine, la détente EF est adiabatique réversible, donc isentropique, avec un système diphasé. Donc, en utilisant l'expression de l'entropie pour un système diphasé liquide-vapeur on obtient :

$$\Delta s_{E \rightarrow F} = s_F - s_E = 0 \Rightarrow c_L \ln T_2 + \frac{\Delta h_{vap}(T_2)x_E}{T_2} = c_L \ln T_1 + \frac{\Delta h_{vap}(T_1)x_F}{T_1}$$

d'où : $x_F = \frac{T_1}{\Delta_{vap}h(T_1)} \left[c_L \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{\Delta_{vap}h(T_2)x_E}{T_2} \right] = \frac{T_1}{h_G(T_1) - h_L(T_1)} \left[c_L \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{(h_G(T_2) - h_L(T_2))x_E}{T_2} \right]$

E se trouve sur la courbe de rosée, $x_E = 100\%$. Ainsi : $x_F = 66\%$.

L'enthalpie massique de l'état F s'obtient en appliquant le théorème des moments pour l'enthalpie massique :

$$x_F = \frac{h_{mF} - h_L(T_1)}{h_L(T_1) - h_G(T_1)} \Rightarrow h_{mF} = x_F (h_G(T_1) - h_L(T_1)) + h_L(T_1) = 1740 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

- 4 De F à A, le gaz se liquéfie à pression constante, d'où :

$$q_1 = \frac{\Delta_{F \rightarrow A} H}{m} = \Delta_{F \rightarrow A} h = h_A - h_F = h_L(T_1) - h_{mF} = -1593 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

La transformation BD est isobare, donc :

$$q_2 = \Delta_{B \rightarrow E} h = \Delta_{B \rightarrow D} h + \Delta_{D \rightarrow E} h$$

L'échauffement BD est isobare :

$$dP = 0$$

L'identité thermodynamique massique s'écrit alors :

$$dh = Tds + vdp = Tds$$

La variation infinitésimale de l'entropie se simplifie

$$ds = c_L \frac{dT}{T} - \alpha v_L dp = c_L \frac{dT}{T}$$

également en :

$$dh = c_L dt$$

Soit finalement :

$$\text{En intégrant : } \int_{h_B}^{h_D} dh = c_L \int_{T_1}^{T_2} dT \Rightarrow h_D - h_B = \Delta_{B \rightarrow D} h = c_L (T_2 - T_1)$$

Pour la vaporisation DE :

$$\Delta_{D \rightarrow E} h = h_G(T_2) - h_L(T_2)$$

Ainsi : $q_2 = \Delta_{B \rightarrow E} h = c_L (T_2 - T_1) + h_G(T_2) - h_L(T_2) = 2553 \text{ kJ.kg}^{-1}$

Pour un cycle, la variation de l'énergie interne massique est nulle. Ainsi d'après le premier principe

$$\Delta u = w + q = w + q_1 + q_2 = 0, \text{ ce qui permet d'écrire : } w = -(q_1 + q_2) = -960 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

- 5 Le cycle de Rankine est moteur. Le rendement sur un cycle s'écrit donc :

$$\rho = \frac{\text{énergie mécanique récupérée par l'utilisateur}}{\text{énergie thermique payée par l'utilisateur}} = \frac{-w}{q_2} = 37,6\%$$

Le rendement maximal, c'est-à-dire le rendement de Carnot, vaut :

$$\rho_C = 1 - \frac{T_{froid}}{T_{chaud}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 44,8\% > \rho$$

Bien comprendre

Ce problème reprend en grande partie toutes les notions fondamentales vues au cours des chapitres de thermodynamique : le premier principe, les identités thermodynamiques, le travail échangé, la chaleur échangée, le rendement et les changements d'état. Il est donc impératif de garder en tête que la thermodynamique, **dans tout son ensemble**, permet de comprendre et d'expliquer la majorité des phénomènes physiques du quotidien, mais aussi le fonctionnement des machines industrielles et domestiques.

Résolution de problème : Qui est le plus fort ?

→ énoncé p. 451

Calculs préliminaires

Masse d'eau gelée par Superman : $m = \rho \pi r^2 h = 10^3 \pi \times (10^3)^2 \times 1 \approx 3.10^9 \text{ kg}$

Masse d'or fondu par les nains : $m' = \rho' \pi r'^2 h' = 1,93 \cdot 10^4 \pi \times (2,5)^2 \cdot 20 \approx 8.10^6 \text{ kg}$

N. B. : La densité est le rapport de la masse volumique d'un corps sur la masse volumique de l'eau ($= 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$).

Superman

Superman doit effectuer divers transferts énergétiques. Il doit d'abord refroidir une masse m d'eau du lac de la température ambiante ($T_i = 20^\circ \text{C}$) à la température de fusion ($T_f = 0^\circ \text{C}$), puis la solidifier. L'énergie correspondante est :

$$\Delta H = mc_l(T_f - T_i) - m\Delta_{fus} h = -3.10^9 (4,2 \times 20 + 333) \cdot 10^3 \approx -10^{15} \text{ J}$$

Superman doit ensuite soulever le bloc de glace (à une hauteur de vol estimée à $z = 200 \text{ m}$), donc vaincre l'énergie potentielle de pesanteur correspondante, puis communiquer une vitesse de vol (estimée à

$v = 100 \text{ m.s}^{-1} = 360 \text{ km/h}$) au super glaçon, donc une énergie cinétique. L'énergie mécanique à dépenser pour apporter le bloc de glace sur le site de l'incendie est donc :

$$E_m = mgz + \frac{1}{2}mv^2 = 3.10^9 \left(10 \times 200 + \frac{100^2}{2} \right) \approx 2.10^{13} \text{ J}$$

On a négligé les frottements, rien ne freine Superman quand il sauve le monde. On notera encore une fois que les énergies nécessaires aux changements d'état sont importantes, il est beaucoup plus «facile» énergétiquement de soulever et transporter le bloc de glace que de l'obtenir !

Il faut noter que l'obtention du glaçon est un transfert thermique ($\Delta H = Q_F$) qui rapporte de la chaleur à Superman, cependant cette transformation étant contraire au second principe (le lac en équilibre thermique ne va pas spontanément se transformer en glace), il faut l'équivalent d'une machine thermique à Superman pour réaliser cette réfrigération. Il doit donc consommer une énergie du même ordre de grandeur (travail W) et surtout évacuer une énergie thermique (Q_C) du même ordre de grandeur vers une source chaude. Si cette source chaude est l'environnement, il va faire très, très chaud autour de lui (la capacité thermique d'un gaz étant nettement plus faible que celle de l'eau liquide)... ou alors il faut vaporiser une partie du lac pour compenser. On peut enfin imaginer que Superman dispose d'une super batterie intégrée, qu'il transforme l'énergie thermique prise à l'eau en énergie stockable, la stocke et la réutilise sous forme de moteur pour transporter le glaçon... Dans tous les cas, les ordres de grandeurs des échanges énergétiques réalisés par Superman correspondent à l'énergie fournie par une centrale pendant 6 heures (énergie mécanique) à 12 jours (énergie thermique).

Le hobbit et les nains

Les nains doivent chauffer la masse m' d'or de la température ambiante ($T_i' = 20^\circ\text{C}$) jusqu'à sa température de fusion ($T_f' = 1064^\circ\text{C}$) puis la faire fondre. L'énergie correspondante est :

$$\Delta H' = m'c_s'(T_f' - T_i') + m'\Delta_{fus}h' = 8.10^6 (0,13 \times 1044 + 64) \cdot 10^3 \approx 2.10^{12} \text{ J}$$

Outre que cette fusion est nettement plus réaliste techniquement et physiquement que l'exploit de Superman, elle consomme l'énergie fournie par une centrale pendant environ 30 minutes.

Dans tous les cas, bien que considérables, ces diverses prouesses énergétiques sont tout à fait insignifiantes devant celles mises en jeu dans Star Wars (*voir problème p. 316*), et les héros ne feraient pas le poids (en tout cas d'un point de vue énergétique) devant Dark Vador... à moins de suivre un entraînement de Jedi ?

Bien comprendre

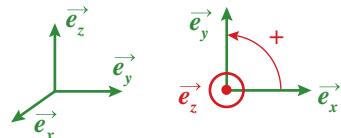
- Dans ce type d'énoncé, on attend avant tout un raisonnement et il est tout à fait indiqué de faire des calculs d'ordre de grandeur et d'arrondir sans hésiter les valeurs utilisées et obtenues. Il faut aussi choisir des valeurs, on les prendra simples et commodes avec des ordres de grandeurs pertinents. Il n'est pas indispensable (bien que faisable en choisissant une valeur d'efficacité par exemple) de déterminer avec précision les valeurs des grandeurs énergétiques de la machine frigorifique qui pourrait jouer le rôle de Superman. On a vu au chapitre précédent que les valeurs de Q_C , Q_F et W sont du même ordre de grandeur, et ici encore, même un facteur 10 ne modifie pas les conclusions.
- Il ne suffit pas par contre de calculer les valeurs des énergies mises en jeu (ce qui est relativement simple), il faut surtout discuter la pertinence physique de phénomènes. D'ailleurs, bien d'autres problèmes physiques pourraient être évoqués ici : un glaçon 1 000 fois plus long qu'épais saisi par un de ses bords risque à coup sûr de se briser, la quasi-instantanéité des changements d'état de l'eau est suspecte, l'or liquide dans une enveloppe d'or solide qui tient bien debout pendant que le dragon l'observe et dont l'or liquide jaillit brutalement est peu vraisemblable, l'ensemble devrait plutôt s'étaler assez mollement sur le sol, dès l'ouverture du moule. On aurait pu d'ailleurs déterminer la profondeur du bassin que peut emplir cet or, elle est également largement insuffisante pour submerger le dragon...

Champ magnétique

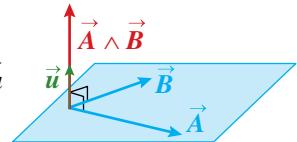
L'électromagnétisme est un domaine très vaste de la physique, qui repose sur une des quatre interactions fondamentales (l'interaction électromagnétique) dont le champ d'action s'étend des particules élémentaires aux galaxies. L'électromagnétisme est omniprésent en physique, que l'on étudie la physique des particules dans les grands collisionneurs, la lévitation des matériaux supraconducteurs ou qu'on s'intéresse aux objets les plus exotiques de l'univers comme les magnétars, mais aussi dans les phénomènes du quotidien, que l'on colle un magnet sur son réfrigérateur ou que l'on recharge son téléphone et même au cœur du fonctionnement de notre organisme lorsqu'on bronce au soleil ou que l'on fait travailler ses muscles ou ses neurones... C'est Maxwell qui a ouvert la voie de l'électromagnétisme en unifiant ce qui semblait être, avant lui, des phénomènes distincts (électricité et magnétisme) et Einstein qui a ensuite poussé plus loin l'unification en intégrant l'électromagnétisme à la relativité.

OUTILS MATHÉMATIQUES

■ **Trièdre direct** : de même que le sens trigonométrique est choisi par convention comme sens positif pour orienter le plan, l'orientation de l'espace fait l'objet d'une convention. Il existe de nombreux moyens mnémotechniques (peu élégants) utilisant les doigts d'une main pour le visualiser. On retiendra plutôt que si le trièdre $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est direct, alors lorsque la rotation de \vec{A} vers \vec{B} est vue dans le sens trigonométrique, \vec{C} pointe vers soi. Les bases des systèmes de coordonnées sont toujours directes, la vision familière du trièdre de la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ suffit donc à visualiser le sens direct. Par ailleurs toute permutation circulaire dans un trièdre direct est aussi directe ($(\vec{e}_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ par exemple).



■ **Produit vectoriel**: $\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin(\widehat{\vec{A}, \vec{B}}) \vec{u}$



- ➡ Le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est orthogonal aux vecteurs \vec{A} et \vec{B} et le trièdre $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$ est direct.
- ➡ Le produit vectoriel est anti-commutatif : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$
- ➡ Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul.

I Généralités

1. Propriétés d'un champ vectoriel

Au chapitre 15, l'intérêt et le rôle du concept de champ ont déjà été évoqués. Cette notion est particulièrement féconde en électromagnétisme.

Définition

Un **champ** (vectoriel ou scalaire) est une propriété de l'espace qui permet en particulier de modéliser les interactions entre différents systèmes et qui doit rendre compte des observations expérimentales. En toute généralité, un champ se définit en un point M quelconque de l'espace et à un instant t quelconque, il dépend donc à la fois des coordonnées du point M et du temps t .

Définitions

- Un **champ uniforme** est un champ dont les caractéristiques sont les mêmes en tout point de l'espace considéré : $\forall (M, P) \in \text{espace considéré} \text{ et } \forall t : \vec{C}(M, t) = \vec{C}(P, t)$
- Un **champ stationnaire** est un champ dont les caractéristiques sont indépendantes du temps : $\forall M \in \text{espace considéré} \text{ et } \forall (t, t') : \vec{C}(M, t) = \vec{C}(M, t')$

■ On ne confondra pas ces deux notions et on évitera le terme de champ constant qui prête à confusion pour une grandeur qui dépend de plusieurs variables.

■ Pour un champ vectoriel, les caractéristiques concernent la direction, le sens et la norme.

La description d'un champ vectoriel (cas qui va faire l'objet de ce chapitre) suppose *a priori* de connaître son expression mathématique en tout point et à tout instant, ce que permettent d'établir les équations qui régissent le phénomène étudié. Cependant, même en l'absence de son expression, il peut être commode de visualiser les propriétés du champ à travers des représentations liées à sa nature vectorielle.

Définition

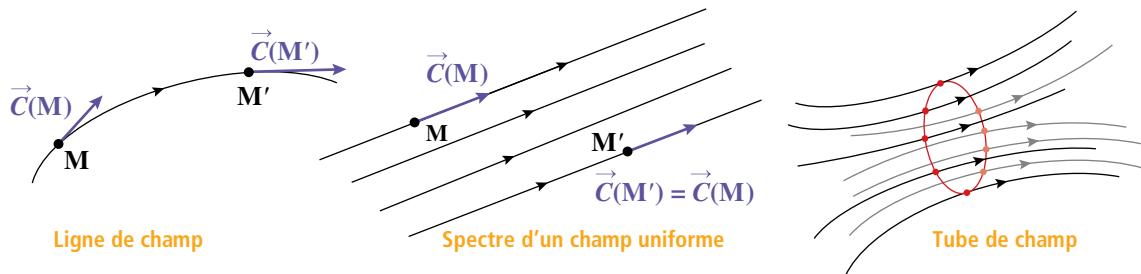
- Une **ligne de champ** d'un champ vectoriel est une courbe en tout point tangente au vecteur champ dans la zone d'espace considérée. Elle est orientée selon le sens du champ.
- Le **spectre** d'un champ vectoriel est l'ensemble de ses lignes de champ dans l'espace considéré.
- Un **tube de champ** est un faisceau de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

■ La ligne de champ reste une courbe imaginaire (comme l'équateur ou l'orbite d'une planète), c'est un outil commode de visualisation.

■ La valeur du champ n'a aucune raison d'être identique tout le long de la ligne de champ.

■ Le spectre d'un champ uniforme est un ensemble de droites parallèles, puisque tous les vecteurs sont eux-mêmes parallèles entre eux.

■ Si le champ est stationnaire, le spectre n'évolue pas dans le temps, sinon il est susceptible de se modifier à chaque instant (mais pas nécessairement, voir exercice n° 1 p. 474).



Propriété

On montre que la valeur du champ magnétique augmente dans les régions où les lignes de champ se resserrent et diminue dans les zones où elles s'évasent.

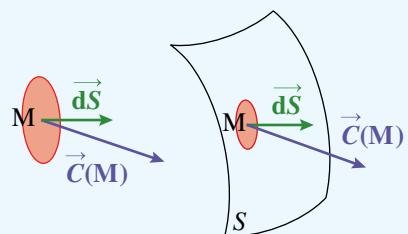
Définition

Le flux d'un vecteur à travers une surface élémentaire est le produit scalaire de ce vecteur par le vecteur surface, lequel est défini orthogonal à la surface et de valeur égale à la surface :

$$d\phi = \vec{C}(M, t) \cdot \vec{dS}$$

Sur une surface quelconque, le flux du vecteur est la somme des flux élémentaires : $\phi(t) = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{C}(M, t) \cdot \vec{dS}$

L'unité du flux dépend de la nature du champ étudié.



Le flux d'un champ uniforme à travers une surface plane est donc : $\phi(t) = \vec{C}_{uniforme}(t) \cdot \vec{S}_{plane}$

2. Le champ magnétique

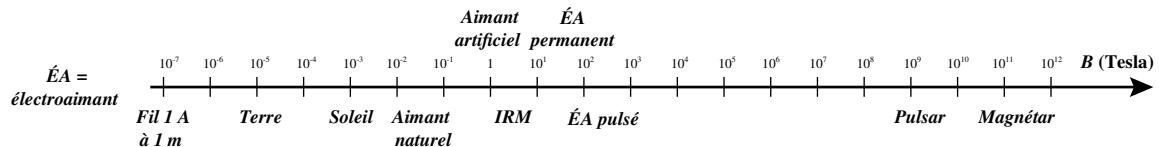
On a déjà vu que la notion de champ permettait d'étudier plus facilement les phénomènes en déconnectant les causes (sources) et les conséquences (actions exercées par ces sources sur les systèmes). En physique on décrit le phénomène électromagnétique à l'aide de deux champs vectoriels appelés champ électrique et champ magnétique. Le second fait l'objet de ce chapitre.

Le magnétisme est facilement observable au quotidien : le clou en fer est attiré par un aimant, l'aiguille de la boussole s'oriente vers une région précise de la Terre. En 1820, Hans Ørsted (1777-1851) mit en évidence la propriété qu'a un conducteur parcouru par un courant de dévier l'aiguille de la boussole.

Définition

Le champ magnétique est un champ vectoriel susceptible d'exister en tout point de l'espace et qui dépend, en toute généralité, de la position et du temps. Son existence et ses propriétés doivent permettre de justifier les phénomènes magnétiques observés. Le champ magnétique est noté $\vec{B}(M, t)$, sa valeur s'exprime en Tesla (T).

- Les astres, les aimants, les courants sont des sources de champ magnétique et inversement sont susceptibles d'être affectés par la présence d'un champ magnétique.
- Les **équations de Maxwell** permettent d'exprimer le champ magnétique en fonction des sources et des milieux (vide ou matériels) dans lesquels il s'exerce. On retiendra les ordres de grandeurs suivants :



- De même que dans l'expression de la force électrique (donc du champ électrique) figure la constante ϵ_0 (la **permittivité diélectrique** du vide) dans l'expression du champ magnétique figure la constante μ_0 (**perméabilité magnétique** du vide). Ces deux constantes sont liées par la relation :

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad \text{où } c \text{ est la célérité de la lumière dans le vide, et :} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

- Dans la plupart des phénomènes, le champ magnétique est indissociable du champ électrique, au point qu'on l'appelle le **champ électromagnétique**. Par ailleurs les variations du champ électromagnétique sont susceptibles de se propager, ce sont les **ondes électromagnétiques**, qui sont aussi des solutions des équations de Maxwell. Si l'on se place en régime stationnaire cependant, les deux champs sont décorrélés et l'on peut étudier séparément l'électrostatique et la magnétostatique. Dans le cadre de l'ARQS, les variations locales des champs (et des courants qui sont liés à leur étude) sont suffisamment lentes devant les temps de propagation, pour que nombre de résultats des régimes stationnaires s'appliquent, bien que les champs

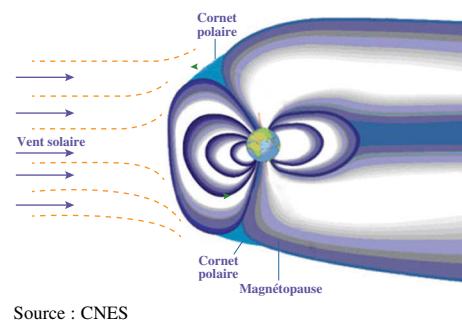
soient corrélés. Cela revient à dire, entre autres, que les variations de la valeur d'un courant (sinusoïdal par exemple) se répercutent instantanément sur les variations du champ magnétique qui en découle.

Au chapitre 15, on a étudié l'action du champ magnétique sur les particules chargées, sans réellement se préoccuper de la nature des sources de ce champ. Dans ce chapitre on va s'intéresser d'une part aux sources de champ magnétique et d'autre part à des effets plus généraux des champs magnétiques. *Dans tous les cas on se place dans le cadre de l'ARQS.*

II | Sources de champ magnétique

1. Les astres

Une étoile, une planète, ou d'autres objets plus exotiques du cosmos sont généralement des sources de champs magnétiques. Ces champs sont parfois très intenses comme dans les étoiles à neutrons¹ par exemple. Leur origine est liée au comportement de la matière dans l'astre (rotation d'un noyau métallique par exemple dans le cas de la Terre). Les spectres de ces champs sont complexes et évoluent dans le temps. Le champ magnétique de la Terre est un bouclier très efficace contre les particules émises par le Soleil, sans lequel la vie ne pourrait exister sur Terre. On appelle **magnétosphère**, la zone d'influence notable du champ magnétique terrestre. On voit sur la géométrie du spectre représenté ci-contre, que des zones dites cornets polaires peuvent laisser passer des particules, ce qui donnera des aurores polaires (*voir photo p. 285*). Plus simplement, ce champ a longtemps permis aux navigateurs de s'orienter et il est possible que certains oiseaux migrateurs, sensibles au champ magnétique, l'utilisent aussi pour se repérer.



Source : CNES

2. Les aimants

Un aimant est un matériau qui génère naturellement un champ magnétique dans son voisinage. La magnétite (Fe_3O_4), du nom de la ville de Magnésie où elle abonde dans les roches, a longtemps été le seul aimant naturel connu. Néanmoins on a trouvé relativement récemment des aimants naturels à base de cobalt ou nickel. On fabrique aussi des aimants artificiels puissants à l'aide de terres rares² (néodyme en particulier). En effet les matériaux dits ferromagnétiques ont la propriété de devenir des aimants, lorsqu'ils sont eux-mêmes soumis de façon appropriée à un champ magnétique, ce qui est facile à vérifier avec un aimant et une épingle par exemple. Inversement, on peut détruire l'aimantation, par exemple par chauffage.

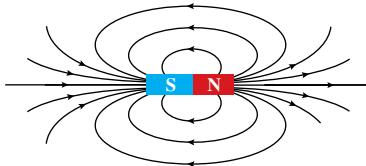
L'aiguille de la boussole est un petit aimant qui s'oriente dans le champ magnétique terrestre, une de ses pointes se dirigeant vers le pôle Nord (en réalité le pôle magnétique ne coïncide pas avec le pôle géographique).

Définition

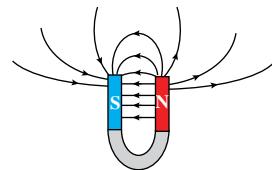
Par convention, on appelle **pôle nord** d'un aimant, le côté de l'aimant qui s'oriente vers le nord de la Terre, et **pôle sud** l'autre côté.

1. Une étoile à neutrons est l'astre résultant de l'explosion d'une supernova. Formée d'une matière extrêmement dense, essentiellement sous forme de neutrons, elle est en rotation très rapide et produit un champ magnétique intense. L'effet combiné de ces deux propriétés en fait un « phare » de l'espace, car on en reçoit des flashes électromagnétiques périodiques rapides, d'où leur autre nom de pulsar. Le magnétar est un pulsar dont le champ magnétique est particulièrement intense.
2. Les terres rares appelées aussi les lanthanides sont les éléments généralement placés sur la première ligne en dessous de la classification périodique.

Il est facile de vérifier que deux aimants peuvent s'attirer ou se repousser, selon la façon dont on les oriente l'un par rapport à l'autre.



Spectre du champ d'un aimant droit

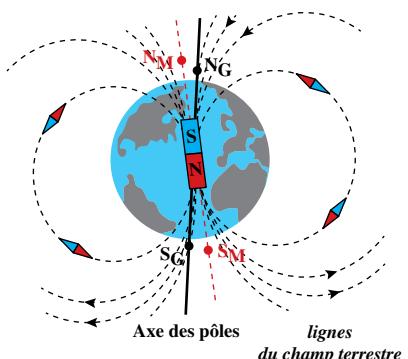


Spectre du champ d'un aimant en U

Propriétés

- Deux pôles magnétiques de même nature se repoussent, deux pôles différents s'attirent.
- Les lignes de champ d'un aimant, partent de son pôle nord et arrivent à son pôle sud.

Deux aimants ont donc tendance à faire s'aligner (dans le même sens) leurs lignes de champs (*voir aussi III.4.*). Ainsi l'aiguille d'une boussole s'oriente le long des lignes de champ terrestre comme sur le schéma. En conséquence, si l'on considère la Terre comme un aimant, alors le pôle nord de l'aimant-Terre est en fait au sud de la planète. Par ailleurs, l'axe des pôles n'est pas l'axe magnétique et le nord géographique N_G ne coïncide pas avec le nord magnétique N_M .



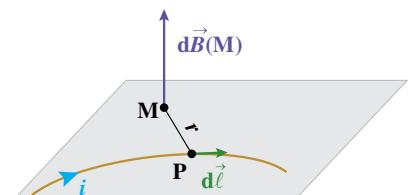
3. Les courants

L'expérience d'Ørsted en 1820 a mis en évidence qu'un conducteur parcouru par un courant électrique pouvait faire dévier l'aiguille d'une boussole. Cette expérience est une illustration d'une propriété générale des courants électriques.

Propriétés

- Tout conducteur parcouru par un courant génère dans son voisinage un champ magnétique, dont l'expression dépend de la géométrie du conducteur, de l'intensité du courant et du point où on le détermine.
- La valeur du champ est proportionnelle à l'intensité qui traverse le conducteur. Cela reste vrai si l'intensité est variable dans le temps (dans le cadre de l'ARQS).
- Le champ magnétique ne dépend pas de la nature du conducteur, en particulier il ne dépend pas du matériau utilisé.
- Un courant constant crée donc un champ magnétique stationnaire dans l'espace qui l'entoure.
- C'est sur ce principe que fonctionne l'électro-aimant.

Il existe une loi (dite de Biot et Savart³) qui permet de calculer le champ créé par n'importe quelle distribution de courant (fil, bobinage, nappe de courant...). Cette loi contient un produit vectoriel qui traduit les propriétés d'antisymétrie du champ par rapport aux sources. Par ailleurs, elle fait apparaître, comme la loi de Coulomb, une dépendance en $1/r^2$, qui entraîne que l'effet de la source est de portée infinie.



3. Cette loi qui permet d'établir la plupart des résultats ci-dessous a disparu des programmes de première (et même de deuxième) année. C'est fort dommage, car elle constitue un outil de compréhension important des phénomènes électromagnétiques, sans présenter de difficultés mathématiques excessives. C'est pourquoi on en donne un aperçu qualitatif ici.

Enfin, elle indique que le champ est proportionnel à l'intensité du courant de la source. La constante μ_0 figure dans l'expression. Cette loi indique que le champ généré en un point M de l'espace, par un élément de courant $d\ell$ placé en P et orienté dans le sens du courant est orienté de sorte que le trièdre ($d\ell, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{dB}$) est direct. Il en découle une propriété essentielle de la géométrie du champ magnétique.

Propriété

Les lignes du champ magnétique généré par une distribution de courants sont des courbes fermées, qui enlacent les conducteurs, et dont l'orientation est directe par rapport à celle du courant.

Il existe des « règles » dites du bonhomme d'Ampère ou du tire-bouchon de Maxwell qui permettent de trouver le sens du champ en fonction de celui du courant. On retiendra plutôt la nature directe des orientations, que l'on peut vérifier sur les schémas du tableau suivant : par exemple lorsque le fil rectiligne pointe vers l'observateur, ce dernier voit les lignes de champ orientées dans le sens trigonométrique, de même, lorsque l'ensemble des lignes de champ pointent vers l'observateur, le courant dans la spire est vu dans le sens trigonométrique.

On donne, sous forme de tableaux, les expressions générales des champs magnétiques générés par des distributions de courant habituelles, ainsi que leurs spectres. Tous ces dispositifs sont à géométrie cylindrique, on utilise donc la base cylindrique habituelle (voir p. 213).

→ Champ magnétique créé par un fil infini

Expression	Représentation	Spectre	Orientation dans (P)
$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ <p>Fil infini signifie que sa longueur est grande devant la distance à laquelle on étudie le champ.</p>			<p>Le courant pointe vers l'observateur, les lignes de champ sont orientées dans le sens trigonométrique.</p> <p>(P)</p>

→ Champ magnétique créé par une spire ou une bobine plate (N spires)

Expression	Représentation	Spectre	Orientation dans (P)
$\vec{B}(M \in Oz) = \frac{\mu_0 i N \sin^3 \alpha}{2R} \vec{e}_z$ <p>M est un point de l'axe N est le nombre de spires Le champ garde le même sens tout au long de l'axe.</p>			<p>courant vers l'observateur lignes de champ dans le sens trigonométrique</p> <p>(P)</p> <p>courant vers le plan de figure lignes de champ dans le sens horaire.</p>

→ Champ magnétique créé par un solénoïde ou bobine de longueur L et de rayon R

Expression	Représentation	Spectre
$\vec{B}(M \in O_z) = \frac{\mu_0 n i (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)}{2} \vec{e}_z$ <p>M est un point de l'axe. $n = N/L$ est le nombre de spires par unité de longueur. L'orientation est comparable à celle de la bobine plate.</p>		

→ Champ magnétique créé par un solénoïde infini

Expression	Représentation	Spectre
$\vec{B}_{\text{intérieur}} = \mu_0 n i \vec{e}_z \quad \vec{B}_{\text{extérieur}} = \vec{0}$ <p>n est le nombre de spires par mètre infini = longueur très grande devant le rayon et M loin du bord.</p>		

N. B. : Il règne une certaine confusion dans les termes utilisés selon les différents ouvrages. Afin de l'éviter, on emploiera ici indifféremment les termes de bobine ou de solénoïde pour un enroulement de longueur L et de rayon R et on précisera bobine « plate » pour un enroulement de longueur suffisamment faible pour être considérée nulle (superposition de spires) et solénoïde « infini » pour un enroulement dont la longueur est très grande devant le rayon, étudié dans une zone où l'on peut négliger les effets de bord.

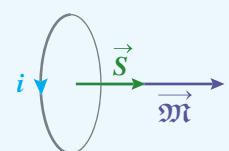
Définition

En raison de la similarité du spectre d'un aimant droit avec celui d'une bobine, on appelle par analogie, **face nord**, la face de la bobine d'où sortent les lignes de champs, et **face sud**, celle où elles rentrent.

4. Dipôle magnétique

Définition

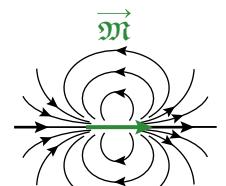
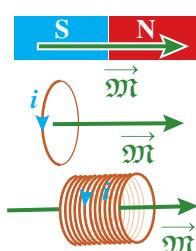
Un **dipôle magnétique** est une petite spire plane de surface S , parcourue par un courant d'intensité i , dont on observe le champ magnétique à grande distance.



On caractérise le dipôle par son **moment magnétique** : $\vec{m} = i\vec{S} = iS\vec{n}$ où le vecteur surface est orienté dans le sens direct par rapport au sens du courant.

La valeur du moment magnétique s'exprime en A.m^2 .

- Les lignes de champ d'un dipôle magnétique ressemblent fortement à celles d'un aimant droit vu de loin, c'est pourquoi on définit aussi le moment magnétique d'un aimant, comme celui qu'aurait une spire ayant les mêmes effets que l'aimant.



À grande distance,
les spectres sont identiques.

- Cette notion est encore plus générale, car, au cœur de la matière les particules sont généralement pourvues d'un moment magnétique (y compris les particules neutres). L'assemblage des particules pour constituer la matière

génère d'autres dipôles magnétiques et on attribue ainsi des moments magnétiques aux atomes, aux molécules... Chaque dipôle génère son champ magnétique, et, dans beaucoup de cas, la multitude de dipôles au sein de la matière constitue une distribution aléatoire qui conduit à des résultantes d'effet nul. Mais dans certains matériaux dits ferromagnétiques, les moments magnétiques sont susceptibles de s'aligner dans une direction privilégiée, leurs effets vont alors s'additionner et générer un champ magnétique, c'est le cas dans un aimant par exemple.

■ Quelques valeurs de moment magnétique :

$$\mathfrak{M}_{\text{Terre}} = 8.10^{22} \text{ A.m}^2 \quad \mathfrak{M}_{\text{aimant moyen}} = 10 \text{ A.m}^2$$

$$\mathfrak{M}_{\text{neutron}} = 1.10^{-26} \text{ A.m}^2 \quad \mathfrak{M}_{\text{proton}} = 1,4.10^{-26} \text{ A.m}^2$$

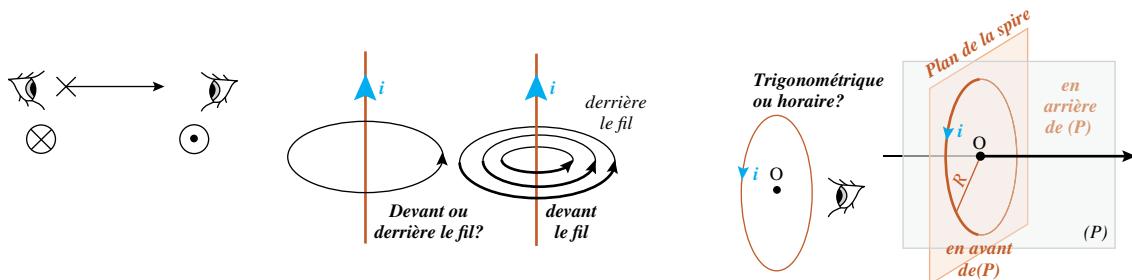
■ Il est facile de vérifier qu'on peut obliger la matière à créer ces alignements (ce qu'on démontre dans un cas simple au III.3.) : en passant un aimant plusieurs fois sur un morceau de fer, on crée une aimantation provisoire, que l'agitation thermique va progressivement détruire. Dans un matériau aimanté permanent, l'aimantation perdure, sauf si l'on dépasse une température limite appelée température de Curie. C'est également de cette façon que sont inscrites les données sur un disque dur magnétique : la tête de lecture (un circuit très petit) crée en passant au-dessus du matériau une aimantation d'une petite zone (bit) dans un sens donné pour y inscrire un 1, dans l'autre sens pour y inscrire un 0. On peut modifier le sens à tout moment en repassant la tête sur le disque, d'où leur réinscriptibilité à l'infini (*voir exercice n° 8 p. 475*).

POINT MÉTHODE

Représenter le champ magnétique

■ La **représentation des sources, des champs, des lignes de champ** doit toujours être sans ambiguïté, en raison de l'importance de l'orientation selon la convention directe. De même, l'**orientation du courant**, qui traduit son algébrisation, est essentielle et doit toujours figurer sur les schémas. Enfin, la connaissance et la représentation des bases des différents systèmes de coordonnées sont ici indispensables.

■ On utilisera avantageusement la représentation maintenant familière, rappelée ci-dessous pour un schéma plan. Pour un schéma en 3D, on fera apparaître en trait plus épais ce qui est en avant par rapport à ce qui est en arrière de la perspective, comme sur le schéma ci-dessous. On n'hésitera pas non plus à mettre en évidence un plan utile (symétrie, circuit...). Les schémas y gagneront en clarté, et les résolutions d'exercices en efficacité.

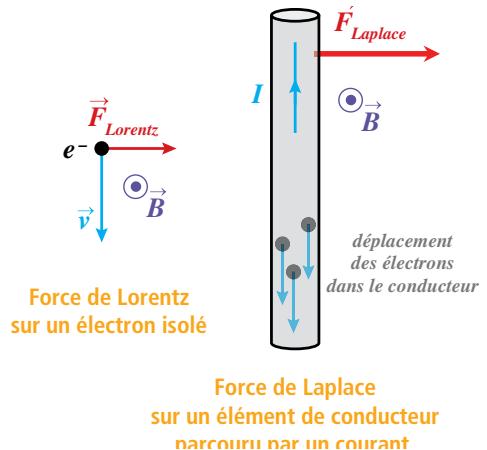


III Action d'un champ magnétique

1. Force de Laplace

Dans le chapitre 15, on a vu qu'une particule chargée en mouvement, plongée dans un champ magnétique subissait une force de Lorentz susceptible de dévier sa trajectoire. Or, dans un conducteur parcouru par un courant, des charges se déplacent. Si on plonge le circuit dans un champ magnétique, ces charges vont subir

une force de Lorentz, mais, contrairement à ce qui a été étudié au chapitre 15 (voir p. 279), les particules ne sont pas libres d'évoluer dans l'espace. Dans le conducteur, les charges mobiles sont « bloquées » dans le matériau, elles vont donc entraîner l'ensemble du conducteur, ce qui se traduit par l'existence d'une force sur le conducteur. Il est facile d'obtenir l'expression de la force de Laplace à partir de la force de Lorentz par le calcul. De manière qualitative, on comprend aisément sur un schéma le lien entre les deux phénomènes.



Énoncé

Chaque petit élément d'un conducteur parcouru par un courant d'intensité i , placé dans un champ magnétique \vec{B} subit une force appelée **force de Laplace** qui vaut :

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

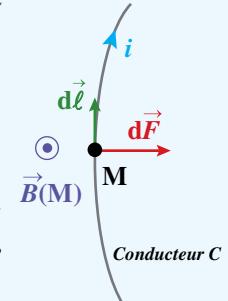
La résultante de la force de Laplace sur le conducteur C est donc :

$$\vec{F} = \int_{M \in C} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}(M)$$

où l'élément de courant est orienté dans le sens algébrique choisi pour l'intensité.

Cette expression est valable si le courant et le champ ne sont pas stationnaires, dans le cadre de l'ARQS :

$$\vec{F}(t) = \int_{M \in C} i(t) d\vec{\ell} \wedge \vec{B}(M, t)$$



- Contrairement à la force de Lorentz dont elle découle, la force de Laplace est susceptible de travailler du fait du déplacement du conducteur, déplacement dont elle peut être responsable et dont le rôle est essentiel dans un moteur électrique. On exprimera la puissance de cette force dans le cas particulier du paragraphe suivant.

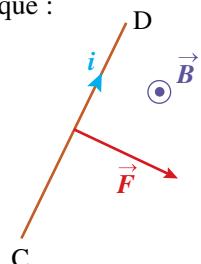
2. Action d'un champ magnétique uniforme sur une tige rigide

Soit une portion de conducteur rectiligne et rigide CD parcourue par un courant d'intensité i et placé dans un champ magnétique extérieur⁴ uniforme. Ces grandeurs sont susceptibles de dépendre du temps, on exprime donc la résultante des forces de Laplace sur la tige à un instant t quelconque :

$$\vec{F}(t) = \int_{tige} [i(t) d\vec{\ell} \wedge \vec{B}(M, t)] = \int_C^D [i(t) d\vec{\ell} \wedge \vec{B}(M, t)]$$

Or le champ magnétique est uniforme, donc ne dépend pas de la position du point sur la tige et l'intensité est la même tout au long de la tige (ARQS). De ce fait et même si elles dépendent du temps, ces deux grandeurs sont constantes du point de vue de l'intégrale (d'espace), d'où :

$$\vec{F}(t) = i(t) \left[\int_C^D d\vec{\ell} \right] \wedge \vec{B}(t) = i(t) \overrightarrow{CD} \wedge \vec{B}(t)$$



Énoncé

La résultante des forces de Laplace sur une tige homogène rigide CD parcourue par un courant d'intensité $i(t)$, placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}(t)$ vaut : $\vec{F}(t) = i(t) \overrightarrow{CD} \wedge \vec{B}(t)$ où le vecteur \overrightarrow{CD} est orienté dans le sens algébrique du courant. On admet qu'elle s'applique au centre de la tige.

4. Attention, il s'agit d'un champ extérieur, différent de celui engendré par le courant.

■ L'algébrisation du courant est essentielle dans cette formule, la tige est orientée par le choix du sens positif de l'intensité sur le circuit (l'intensité pouvant par ailleurs être positive ou négative). Du fait du produit vectoriel, la force est nécessairement orthogonale à la tige et au champ, donc au plan formé par ces deux directions. Si l'intensité est positive, le trièdre $(\overline{CD}, \overline{B}, \overline{F})$ est direct.

■ Même si le champ magnétique est stationnaire, cette force n'est pas nécessairement indépendante du temps en raison des variations temporelles possibles de l'intensité.

■ Si le champ est colinéaire à la tige, la force de Laplace est nulle. Si le champ est orthogonal à la tige, sa valeur est $F = iLB$ où L est la longueur de la tige.

Cette force est susceptible de modifier le mouvement de la tige (mettre en mouvement, accélérer, freiner, dévier...). Dans un cas simple du mouvement de translation, sa puissance s'exprime facilement.

Propriété

La puissance de la force de Laplace sur une tige rigide en translation à la vitesse \vec{v} dans un champ magnétique uniforme \vec{B} vaut : $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = i(\overline{CD} \wedge \vec{B}) \vec{v}$

3. Action d'un champ magnétique uniforme sur un cadre rectangulaire rigide

On considère un cadre rectangulaire rigide KLMN de centre O, parcouru par un courant d'intensité $i(t)$, que l'on note simplement i pour ne pas alourdir le calcul. Ce cadre définit un plan, dans lequel on note (Oz) un de ses deux axes de symétrie Δ . Le cadre est plongé dans un champ magnétique uniforme extérieur orthogonal à (Oz) qui définit la direction (Ox). En toute généralité, le plan du cadre et le champ forment un angle quelconque, on note α l'angle entre la normale au cadre (ou son moment magnétique) et le champ. Les forces de Laplace qui s'appliquent sur chaque portion du cadre sont les suivantes :

$$\overrightarrow{F_{KL}} = i\overrightarrow{KL} \wedge \vec{B} ; \quad \overrightarrow{F_{LM}} = i\overrightarrow{LM} \wedge \vec{B} ; \quad \overrightarrow{F_{MN}} = i\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} ; \quad \overrightarrow{F_{NK}} = i\overrightarrow{NK} \wedge \vec{B}$$

Dans tous les cas, ces forces sont orthogonales à la fois au champ et à la portion de conducteur. Sur les portions KL et MN, on peut facilement prévoir que les forces de Laplace sont colinéaires à Δ et que ces deux forces sont opposées, ce que confirme le calcul :

$$\overrightarrow{F_{KL}} = ia(-\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y) \wedge B \vec{e}_z = iaB \cos \alpha \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{F_{MN}} = ia(\cos \alpha \vec{e}_y + \sin \alpha \vec{e}_x) \wedge B \vec{e}_z = -iaB \cos \alpha \vec{e}_z$$

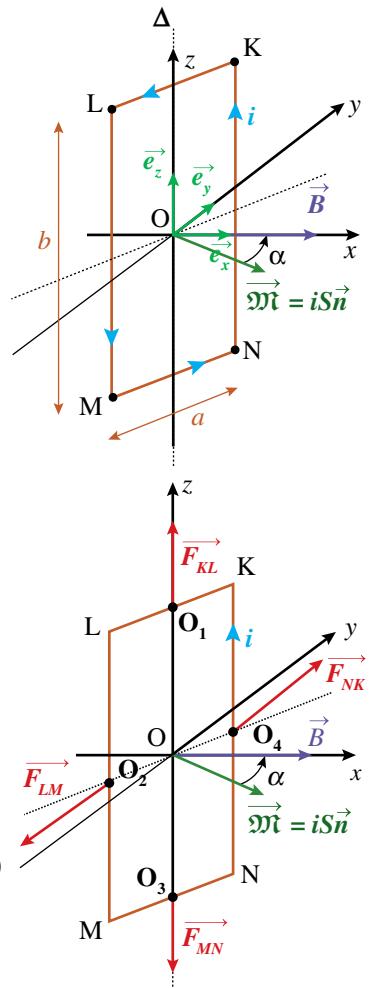
Sur les portions LM et NK, les tiges sont colinéaires à l'axe (Oz), donc les forces sont orthogonales à l'axe (et au champ) et opposées, ce que confirme le calcul :

$$\overrightarrow{F_{LM}} = -ib \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_x = -ibB \vec{e}_y ; \quad \overrightarrow{F_{NK}} = ib \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_x = ibB \vec{e}_y$$

La résultante de ces forces est nulle :

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_{KL}} + \overrightarrow{F_{LM}} + \overrightarrow{F_{MN}} + \overrightarrow{F_{NK}} = iaB \cos \alpha \vec{e}_z - ibB \vec{e}_x - iaB \cos \alpha \vec{e}_z + ibB \vec{e}_x = \vec{0}$$

Le moment de chaque force en O, point de l'axe, vaut (où les points O_i sont les milieux des portions) :



$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_{IO}(\vec{F}_{KL}) &= \vec{OO_1} \wedge \vec{F}_{KL} = \frac{b}{2} \vec{e}_z \wedge i a B \cos \alpha \vec{e}_z = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_{IO}(\vec{F}_{LM}) &= \vec{OO_2} \wedge \vec{F}_{LM} = -\frac{a}{2} (\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y) \wedge (-ib \vec{B} \vec{e}_y) = \frac{ab}{2} i \sin \alpha B \vec{e}_z \\ \vec{\mathcal{M}}_{IO}(\vec{F}_{MN}) &= \vec{OO_3} \wedge \vec{F}_{MN} = -\frac{b}{2} \vec{e}_z \wedge (-ia B \cos \alpha \vec{e}_z) = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_{IO}(\vec{F}_{NK}) &= \vec{OO_4} \wedge \vec{F}_{NK} = \frac{a}{2} (\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y) \wedge (ib \vec{B} \vec{e}_x) = \frac{ab}{2} i \sin \alpha B \vec{e}_z\end{aligned}$$

La somme des moments est donc :

$$\vec{\mathcal{M}}_{IO} = \vec{\mathcal{M}}_{IO}(\vec{F}_{KL}) + \vec{\mathcal{M}}_{IO}(\vec{F}_{LM}) + \vec{\mathcal{M}}_{IO}(\vec{F}_{MN}) + \vec{\mathcal{M}}_{IO}(\vec{F}_{NK}) = abi \sin \alpha B \vec{e}_z$$

L'action mécanique du champ magnétique sur le cadre est donc telle que sa résultante est nulle et que son moment ne l'est pas, il s'agit donc d'un couple. Ce couple étant orienté suivant l'axe Δ , il est susceptible de faire tourner le cadre autour de cet axe. On reconnaît dans le moment le produit de la surface du cadre et de l'intensité, qui incite à utiliser le moment magnétique du cadre :

$$\vec{\mathcal{M}}_{IO} = iS \sin \alpha B \vec{e}_z = \vec{m} \sin \alpha B \vec{e}_z = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Toutes les grandeurs dans cette formule peuvent dépendre du temps. Notons que ce moment est indépendant de O.

Si le cadre effectue une rotation autour de l'axe fixe Δ à la vitesse angulaire Ω et avec les conditions d'orientation et d'uniformité du champ supposées ci-dessus, alors la puissance du couple de Laplace vaut :

$$\mathfrak{P} = \Gamma \cdot \Omega$$

4. Action d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique

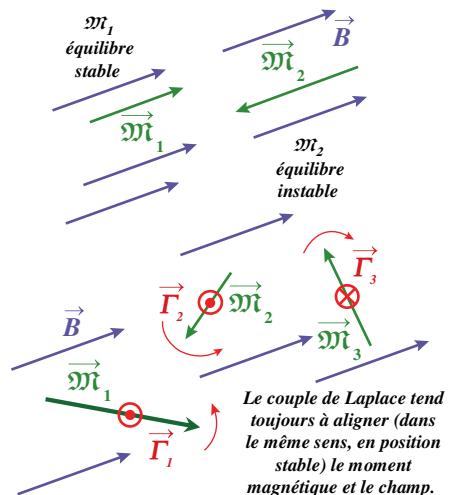
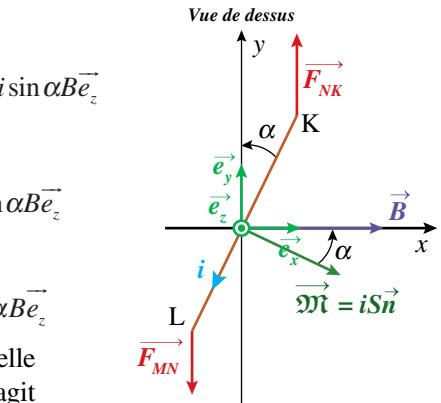
On admettra la généralisation du résultat précédent à tout système possédant un moment magnétique (circuit, aimant, dipôle, particule...) plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme et d'orientation quelconque, sans hypothèse autre que l'ARQS quant aux variations temporelles.

Résultat

Tout système (circuit, aimant, particule...) possédant un moment magnétique \vec{m} placé dans un champ magnétique \vec{B} uniforme subit une action mécanique réduite au couple : $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$

■ En l'absence d'autre action (ou si ces dernières se compensent) le système est à l'équilibre lorsque le couple de Laplace s'annule, c'est-à-dire lorsque le moment et le champ sont colinéaires, ce qui correspond à deux positions possibles. Cependant, on voit aisément sur le schéma que la première position est stable, tandis que la seconde est instable car le moindre écart ramène le dipôle vers sa position stable.

■ Si le moment magnétique est celui d'un circuit fermé, on peut noter que, bien que la résultante des forces soit nulle, si le circuit (par exemple le cadre étudié en 2) est déformable, alors, l'effet des forces est d'augmenter la surface du circuit. Par ailleurs, l'effet du couple est d'orienter le circuit (rigide ou non) de façon à aligner le moment, donc le vecteur surface



avec le champ, ce qui tend à placer le plan du circuit orthogonalement au champ. L'ensemble de ces effets montre que le système évolue de manière à être traversé par un flux du champ maximal, résultat que l'on exploitera au chapitre suivant.

- Si le moment magnétique est celui d'un aimant droit, ce dernier tend à s'aligner dans le sens SN sur la ligne de champ magnétique, ce qui explique le mouvement de l'aiguille de la boussole.

C'est aussi en orientant les moments microscopiques du matériau ferromagnétique qu'on crée l'aimantation lorsqu'on fabrique un aimant artificiel ou que l'on écrit sur un disque dur.

► Effet d'un champ d'orientation variable

Un champ dont la direction varie dans le temps, entraînera avec lui le système pourvu d'un moment magnétique. Le champ étant généralement produit par un électro-aimant, et le moment magnétique solidaire d'une pièce mécanique, on parle de **conversion électromécanique**, l'énergie électrique de l'électroaimant, produisant (à travers un effet magnétique) une énergie cinétique sur la pièce mécanique. En particulier un champ tournant fera tourner le système (*voir exercice n° 7 p. 475*).

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Champ magnétique, lignes de champ, spectre : nature des sources, propriétés, cas particuliers.
- Spectre d'un fil infini, d'une bobine, d'un solénoïde infini.
- Spectre des aimants, pôles, orientation.
- Force de Laplace : origine, expression, cas d'une tige rigide dans un champ magnétique uniforme.
- Action de Laplace sur un circuit rectangulaire rigide dans un champ magnétique uniforme.
- Dipôle magnétique : définition. Moment magnétique : définition, généralisation, action d'un champ uniforme sur un moment magnétique, conséquences.

Erreurs à éviter

- On ne confondra pas le champ créé par une distribution de courant avec le champ extérieur dans laquelle cette distribution est éventuellement plongée.
- Il est important de ne pas faire l'impasse sur la rigueur des méthodes mises en œuvre dans les exercices de mécanique pour traiter des exercices sur les mouvements des systèmes en électromagnétisme.

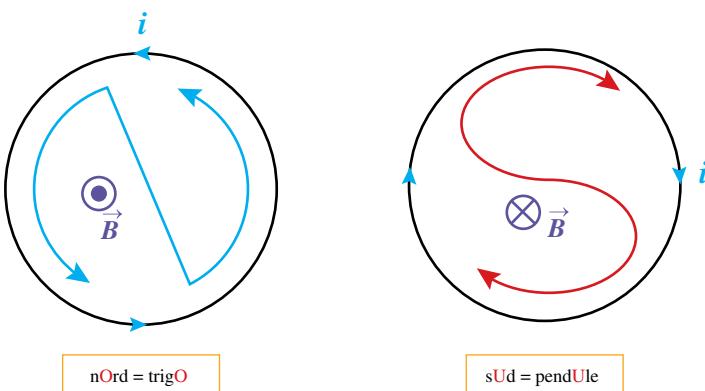
Quelques « trucs » utiles

- Les règles des trois doigts et autres bonhomme d'Ampère ou tire-bouchons de Maxwell, ont toutes pour but de visualiser un trièdre direct, généralement pour exprimer un produit vectoriel. Il est recommandé à ce niveau d'abandonner ces « trucs » et d'appréhender réellement, d'une part la notion d'orientation directe de l'espace, d'autre part l'outil qu'est le produit vectoriel. On y gagnera grandement en technicité et en vision des phénomènes physiques. On rappelle les règles du calcul dans une base directe, selon l'ordre des vecteurs de la base :

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z & \text{et} & \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z & \text{et} & \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = -\vec{e}_y \\ & & \vec{e}_z \wedge \vec{e}_y = -\vec{e}_x \end{array} \quad (x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow y) \quad (x \leftarrow y \leftarrow z \leftarrow x \leftarrow y)$$

On raisonnera de même avec les bases cylindrique (\vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_z) ou sphérique (\vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_ϕ).

- On peut facilement retrouver la nature d'une face d'une bobine avec l'un des moyens mnémotechniques ci-dessous.



1 Propriétés du champ magnétique ★[→ corrigé p. 476](#)

Donner un exemple de champ magnétique : **a)** stationnaire et uniforme **b)** uniforme et non stationnaire **c)** stationnaire et non uniforme **d)** non uniforme et non stationnaire. Le spectre d'un champ non stationnaire est-il conservé au cours du temps ?

2 Lignes de champ ★★[→ corrigé p. 476](#)

- 1** En utilisant une propriété du vecteur champ et du déplacement élémentaire le long d'une ligne de champ, montrer que les équations différentielles des lignes de champ peuvent s'écrire en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$$

- 2** Déterminer de même les équations des lignes de champ en coordonnées cylindriques.

- 3** On donne les expressions d'un champ magnétique dans le plan (Oxy) :

$$B_x = \frac{-\alpha y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad B_y = \frac{\alpha x}{x^2 + y^2} \quad \text{avec } \alpha \text{ une constante}$$

Établir l'équation cartésienne des lignes de champ dans ce plan. En déduire le spectre du champ magnétique. Quelle peut être la source de champ ?

3 Champ d'un solénoïde (d'après CCP MP 2008) ★★★[→ corrigé p. 477](#)

On admet le résultat du champ sur l'axe d'une bobine plate donné dans le tableau p. 466.

- 1** En remarquant que le solénoïde est une succession de bobines plates d'épaisseurs infinitésimales, établir l'expression du champ en un point de l'axe d'un solénoïde (donnée aussi p. 467).
- 2** En déduire l'expression du champ en un point de l'axe d'un solénoïde infini.

4 Définition légale de l'Ampère ★★[→ corrigé p. 478](#)

« Un ampère est l'intensité d'un courant constant qui, s'il est maintenu dans deux conducteurs linéaires et parallèles, de longueurs infinies, de sections négligeables, et distants d'un mètre dans le vide, produit entre ces deux conducteurs, une force linéaire égale à 2×10^{-7} Newton par mètre. » Ainsi fut donnée en 1948 la définition légale de l'Ampère (toujours en vigueur) par le Comité International des Poids et Mesures. Montrer que cette définition est cohérente avec les expressions des champs données dans le cours.

5 Oscillation d'une tige ★★★[→ corrigé p. 479](#)

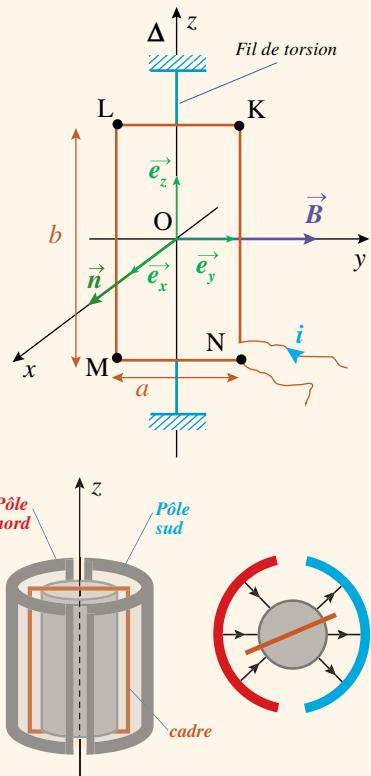
Une tige homogène rigide OA de masse m et de longueur ℓ est fixée en une extrémité O. En O une liaison pivot parfaite autorise le mouvement autour d'un axe horizontal Δ . La tige est parcourue par un courant d'intensité constante I dans le sens AO. On applique dans l'espace occupé par la tige un champ magnétique colinéaire à l'axe Δ . On admettra que le moment de la force de Laplace peut se calculer à l'aide de la résultante établie dans le cours et appliquée au centre d'inertie de la tige. Rappel : $J_{\Delta} = m\ell^2/3$

- 1** Déterminer les positions d'équilibre de la tige. Existent-elles toujours ? On admettra (et on pourra le vérifier) que, lorsqu'elles existent, la position la plus basse est stable et l'autre non.
- 2** On écarte la tige de la position d'équilibre stable d'un petit angle α_0 et on l'abandonne sans vitesse initiale. Établir l'équation différentielle du mouvement de la tige et l'équation horaire du système.

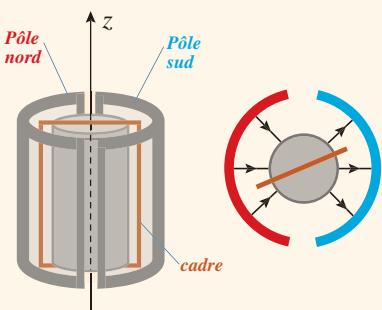
6 Galvanomètre à cadre mobile ★★☆

→ corrigé p. 480

On considère le cadre rectangulaire rigide décrit p. 470 placé dans un champ magnétique. Il est maintenu par un fil de torsion, de constante C , confondu avec l'axe (Oz), de sorte que le cadre est astreint à demeurer dans un plan vertical, son seul mouvement possible étant la rotation autour de Δ . Le courant qui circule dans le cadre est commandé par un interrupteur et un générateur non représentés ici. Initialement l'interrupteur est ouvert et le cadre est au repos dans le plan (Oyz), comme l'indique le schéma. Le champ magnétique est uniforme et stationnaire, dirigé suivant (Oy). On ferme l'interrupteur. Après quelques oscillations, le cadre s'immobilise dans une nouvelle position, de sorte qu'il a tourné d'un angle θ_{eq} par rapport à sa position initiale.



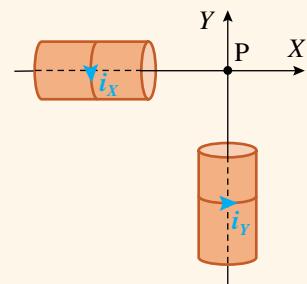
- Expliquer qualitativement les observations, en réfléchissant aux phénomènes responsables de l'amortissement. Établir une relation entre θ_{eq} et l'intensité du courant.
- Quelle application pratique peut-on tirer de ce système ? Commenter.
- En réalité, pour pallier au défaut du système précédent, ce dispositif est généralement utilisé dans un entrefer d'aimant cylindrique, dont on peut schématiser la forme ci-contre. Le noyau central canalise les lignes de champ et le champ ne dépend que de la distance à l'axe. Quel est son intérêt ?



7 Champ tournant ★★

→ corrigé p. 482

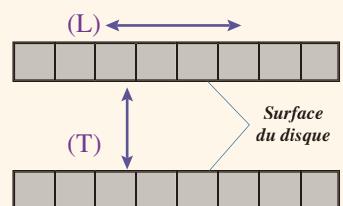
- Donner l'expression vectorielle du champ magnétique d'un solénoïde, parcouru par un courant sinusoïdal $i(t)$, en un point de son axe. Quelles caractéristiques du champ varient au cours du temps ?
- On utilise deux bobines identiques, parcourues par des courants sinusoïdaux de même amplitude et de même fréquence, déphasés de $\pi/2$. On dispose les bobines à angle droit et à même distance de P, le point d'intersection de leurs axes. Déterminer le champ magnétique en P. Quel est l'intérêt de ce dispositif ?



8 Disque dur ★★

→ corrigé p. 482

Pour écrire sur un disque dur, une tête de lecture se déplace très près (10 nm !) de la surface en créant un champ magnétique, dont la direction est fixée par construction, selon la position du circuit électrique (minuscule bobinage) qui le génère. Deux processus (longitudinal L ou transversal T) sont possibles comme indiqué sur le schéma ci-contre, où la double flèche représente la direction du champ. Comment écrit-on un « 0 » ou un « 1 » sur le disque et comment seront orientés les dipôles représentant les bits d'information sur le disque ? Schématiser le code binaire de l'octet représentant la lettre B (01000010) dans les deux dispositifs. Quels sont les avantages du processus (T) par rapport au processus (L) ?



Conseils

Les exercices s'appuient sur la connaissance du cours, en particulier il est impératif de savoir établir les résultats concernant les forces et couples de Laplace dans les cas simples, qui ne sont pas redémontrés dans les corrigés. On notera également que les outils de la mécanique doivent être parfaitement maîtrisés. Enfin une schématisation rigoureuse est essentielle dans toutes les résolutions.

1 Propriétés du champ magnétique

→ énoncé p. 474

- a) Champ uniforme et stationnaire : entrefer d'un aimant permanent en U, intérieur d'un solénoïde infini (de longueur grande devant son rayon) parcouru par un courant continu constant.
- b) Champ uniforme et non stationnaire : intérieur d'un solénoïde infini parcouru par un courant variable (par exemple sinusoïdal).
- c) Champ stationnaire et non uniforme : champ d'un aimant droit, d'un fil infini ou d'une bobine plate parcourus par un courant continu constant.
- d) Champ non uniforme et non stationnaire : champ d'un astre, d'un fil infini ou d'une bobine plate parcourus par un courant variable, champ tournant créé par deux bobines (voir exercice n° 7 p. 475).
Sauf dans le cas d'un astre ou d'un champ tournant, les champs non stationnaires envisagés ci-dessus sont tels que seule leur valeur et non leur direction est modifiée au cours du temps, en conséquence le spectre ne se modifie pas au cours du temps. Dans le cas du champ tournant au contraire, c'est la direction qui se modifie (la norme reste constante) et de ce fait le spectre varie dans le temps.

2 Lignes de champ

→ énoncé p. 474

On détermine l'équation d'une ligne de champ en écrivant que le vecteur champ \vec{B} et le déplacement élémentaire sur la ligne $d\vec{OM}$ sont colinéaires, avec k une constante :

- 1 En coordonnées cartésiennes :

$$k\vec{B}(M) = d\vec{OM} \quad \begin{cases} kB_x = dx \\ kB_y = dy \\ kB_z = dz \end{cases}$$

$$\text{d'où : } \frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} = k \quad (1)$$

- 2 en coordonnées cylindriques :

$$k\vec{B}(M) = d\vec{OM} \quad \begin{cases} kB_r = dr \\ kB_\theta = rd\theta \\ kB_z = dz \end{cases}$$

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z} = k \quad (2)$$

- 3 Les coordonnées du champ sont connues, on en déduit une équation différentielle cartésienne de la ligne de champ (on se limite au plan ici), en remplaçant dans (1) :

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} \quad \text{soit :} \quad -\frac{dx}{\alpha y} (x^2 + y^2) = \frac{dy}{\alpha x} (x^2 + y^2) \quad \text{soit :} \quad -x dx = y dy$$

qui s'intègre aisément en $x^2 + y^2 = \text{cste}$

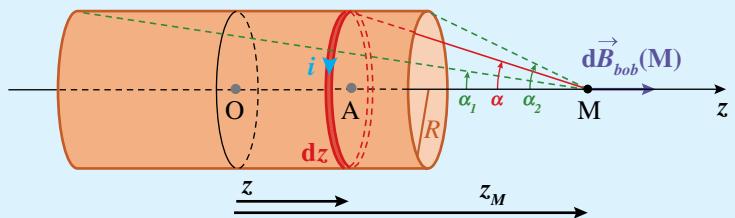
Soit l'équation d'un cercle de centre O et de rayon quelconque, car la constante traduit le fait que tous les cercles de centre O sont des lignes de champ, il en existe évidemment une infinité. La source responsable de ce spectre peut être un fil rectiligne infini passant par O, que l'on étudie dans un plan perpendiculaire au fil. On pourra vérifier que si on utilise dans (2) l'expression du champ en coordonnées cylindriques donnée p. 466, on obtient une équation différentielle $\frac{dr}{d\theta} = 0$ dont la solution est $r = \text{cste}$, soit évidemment également des cercles de centre O. Si on prend $\alpha = \mu_0 I / 2\pi$, c'est bien le champ du fil exprimé en coordonnées cartésiennes qui est donné dans l'énoncé.

3 Champ d'un solénoïde

→ énoncé p. 474

- 1 Le solénoïde peut être considéré comme une succession de bobines plates d'épaisseurs dz , formées de $dN = ndz$ spires, et vues sous un angle $\alpha(z)$ du point M. Le champ créé en M par une bobine plate d'épaisseur dz s'écrit :

$$d\vec{B}_{bob}(M) = dN \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z = ndz \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$



Le théorème de superposition indique que le champ résultant en M est la somme vectorielle de tous les champs générés par les bobines plates d'épaisseur dz . Or tous ces champs sont colinéaires à (Oz) ce qui permet d'exprimer leur somme aisément :

$$\vec{B}_{sol}(M) = \int_{solénôide} d\vec{B}_{bob}(M) = \int_{solénôide} \left[ndz \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z \right] = \frac{\mu_0 ni}{2R} \left[\int_{solénôide} \sin^3 \alpha dz \right] \vec{e}_z$$

Bien comprendre

Il est important de voir qu'ici, la somme se fait sur le solénoïde. On calcule le champ en un point M quelconque de l'axe, mais dont les caractéristiques ne varient pas quand on intègre sur le solénoïde et, à ce titre, z_M est une constante pour l'intégration. Par ailleurs, lorsqu'on peut choisir la variable d'intégration (ici α ou z), il est quasiment toujours plus facile d'intégrer sur les variables angulaires.

Il faut maintenant ramener le calcul de l'intégrale à la variable la plus commode, ici α . On exprime donc z en fonction de α et des constantes du problème :

$$z = z_M - AM = z_M - \frac{R}{\tan \alpha} = z_M - R \cotan \alpha \quad \text{d'où :} \quad dz = 0 + \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

En notant que lorsqu'on somme sur tout le solénoïde, l'angle α varie de α_1 à α_2 , le champ magnétique du solénoïde vaut donc :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 ni}{2R} \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{R \sin^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha \right] \vec{e}_z = \frac{\mu_0 ni}{2} \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha \right] \vec{e}_z = \frac{\mu_0 ni}{2} [-\cos \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{e}_z$$

Soit le résultat suivant conforme à celui donné dans le tableau p. 467 :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 ni}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{e}_z}$$

- 2 Le solénoïde infini correspond au cas où l'angle α_1 tend vers 0 et α_2 vers π . On obtient alors :

$$\vec{B}_{sol\infty}(M) = \frac{\mu_0 ni}{2} (1 - (-1)) \vec{e}_z \quad \text{soit :} \quad \boxed{\vec{B}_{sol\infty}(M) = \mu_0 ni \vec{e}_z}$$

Ce résultat est ici démontré uniquement sur l'axe. On montre, à l'aide d'un théorème qui sera vu en seconde année, que cette expression reste valable en dehors de l'axe. Par contre, la démonstration reste valable même si l'intensité dépend du temps.

Bien comprendre

- Le choix des bornes doit respecter d'une part l'orientation choisie pour définir α dans la bobine plate, d'autre part le sens de l'axe Oz , donc de α_1 à α_2 tels que notés sur le schéma. Le lecteur est d'ailleurs invité à vérifier que, quelles que soient les valeurs des angles, en respectant leur définition (à partir de l'axe et vers la direction entre M et le bord de la supérieure bobine), le champ est toujours dans le sens positif de l'axe, où que se trouve M par rapport au solénoïde (avec l'axe direct par rapport au sens de i).
- On se rappellera par ailleurs que les dérivées des fonctions tangente et cotangente peuvent prendre plusieurs formes, mais que les plus commodes sont généralement :

$$\frac{d(\tan \alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{et} \quad \frac{d(\cotan \alpha)}{d\alpha} = -\frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{avec } \cotan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

4 Définition légale de l'Ampère

→ énoncé p. 474

Soient deux fils disposés suivant le schéma ci-contre. Le fil 1 génère un champ magnétique orthoradial \vec{B}_1 (c'est-à-dire suivant \vec{e}_θ en coordonnées cylindriques, orthogonal au rayon r). Le fil 2 parcouru par un courant I_2 se trouve dans ce champ, il est donc soumis à une force de Laplace. Soit une longueur L du fil 2. Les deux fils étant parallèles, tous les points du fil 2 sont soumis au même champ, car ce dernier ne dépend que de la distance au fil 1 qui génère le champ.

L'expression obtenue dans le cours pour la force de Laplace sur une tige rectiligne dans un champ uniforme est donc valable.

Sur la portion L :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 L \vec{e}_z \wedge \vec{B}_1(d) = I_2 L \vec{e}_z \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{e}_\theta = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d} \vec{e}_r$$

La force linéaire, c'est-à-dire la force par unité de longueur sur le fil 2 a donc pour valeur :

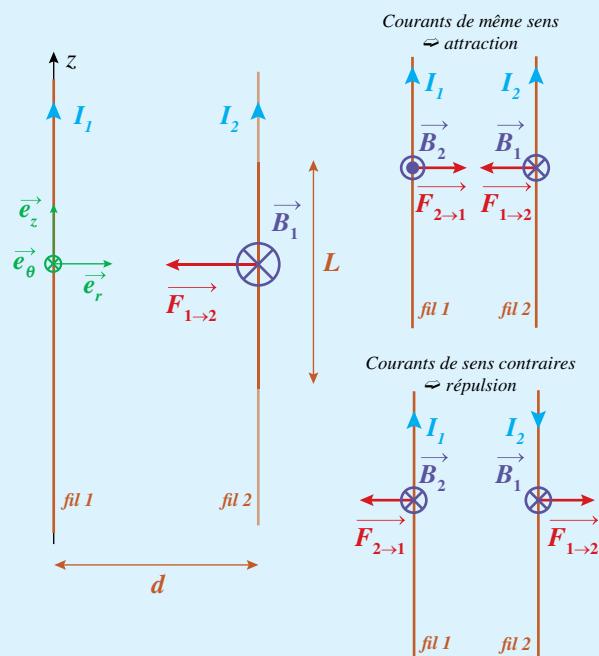
$$f_{1 \rightarrow 2} = \frac{F_{1 \rightarrow 2}}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

$$\text{Soit numériquement : } f_{1 \rightarrow 2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 1 \times 1}{2\pi \times 1} = 2.10^{-7} \text{ N/m}$$

Si les intensités sont de 1 A et les fils distants de 1 m, alors la force par unité de longueur est bien de 2.10^{-7} N/m comme indiqué dans le texte.

Bien comprendre

- Le rôle des fils est symétrique et le même raisonnement conduit au même résultat si l'on s'intéresse à la force exercée sur le fil 1, du fait du champ généré par le fil 2. On trouverait juste une force de sens contraire. On constate par ailleurs, que deux fils parallèles parcourus par des courants de même sens s'attirent, tandis qu'en vérifie facilement que, s'ils sont de sens contraires, ils se repoussent.
- Notons que l'expression « force linéaire » de l'énoncé officiel n'est pas très heureuse. On lui préfère en général l'expression « force linéique ».



5 Oscillations d'une tige

→ énoncé p. 474

1 Cadre

Position du problème : On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen et matérialisé par les axes (Oxyz).

Le système est la tige, un solide en rotation autour de l'axe fixe horizontal Δ en raison de la liaison pivot (supposée idéale).

Paramétrage : On choisit l'axe (Oz) confondu avec Δ . Le centre d'inertie G décrit donc un arc de cercle dans un plan vertical orthogonal à l'axe. Le point O est choisi sur l'axe dans ce plan. La direction (Ox) qui sert à repérer la position du mobile est choisie verticale vers le bas. Ce système étant à un seul degré de liberté, l'angle θ suffit à décrire son mouvement. On utilise la base cylindrique.

2 Outils

Bilan des actions : La liaison pivot étant idéale, le moment exercé par le support sur le système est nul et l'action mécanique de contact se réduit à une résultante de force \vec{R} dont le point d'application est sur l'axe et dont la direction importe peu ici.

Le poids est appliqué en G : $\vec{mg} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$

Et son moment en O vaut : $\overline{\mathcal{M}}_{IO\in\Delta}(\vec{mg}) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{mg} = \frac{\ell}{2} \vec{e}_r \wedge (mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta) = -\frac{mg\ell}{2} \sin \theta \vec{e}_z$

La force de Laplace (calculée p. 469), dont la résultante est appliquée en G, vaut : $\vec{F} = I\vec{AO} \wedge \vec{B} = I\ell B \vec{e}_\theta$

Son moment en O vaut : $\overline{\mathcal{M}}_{IO\in\Delta}(\vec{F}) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F} = \frac{\ell}{2} \vec{e}_r \wedge I\ell B \vec{e}_\theta = \frac{I\ell^2 B}{2} \vec{e}_z$

Cinématique : Le vecteur rotation est porté par l'axe de rotation et vaut : $\vec{\Omega} = \theta \vec{e}_z$

Le système est en rotation autour de Δ , son moment cinétique vaut : $L_\Delta = J_\Delta \vec{\Omega} = J_\Delta \dot{\theta}$

3 Point de départ (loi physique)

On applique le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe de rotation Δ au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen :

$$\frac{dL_{/\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{mg}) + \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) \quad (1)$$

4 Moulinette à calcul

À l'équilibre, le système est immobile en $\theta = \theta_{eq}$ et la somme des moments est donc nulle :

$$\frac{I\ell^2 B}{2} - \frac{\ell}{2} mg \sin \theta_{eq} = 0 \quad \text{d'où :} \quad \sin \theta_{eq} = \frac{I\ell B}{mg} \quad (2)$$

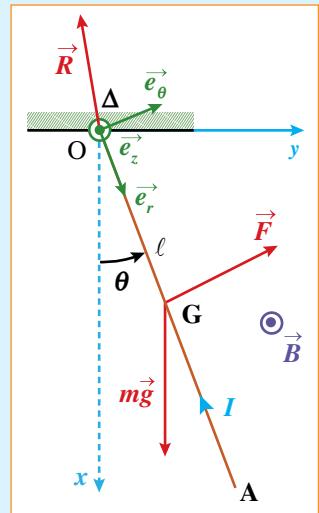
Si $I\ell B < mg$, l'équation (2) a deux solutions l'une $\theta_{eq1} < \pi/2$ et l'autre symétrique de cette dernière par rapport à l'horizontale $\pi/2 < \theta_{eq2} = \pi - \theta_{eq1} < \pi$.

Si $I\ell B > mg$ l'équation (2) n'a pas de solution, car la force de Laplace est trop élevée pour permettre une position d'équilibre. En effet l'équilibre nécessite que son moment soit compensé par celui du poids.

Bien comprendre

Pour vérifier la stabilité, il suffit de dériver l'expression de la résultante des moments (système à un degré de liberté) par rapport à θ . On obtient $\mathcal{M}' = -mg\ell \cos(\theta)/2$ qui est négatif en θ_{eq1} (qui est donc une position stable) et positif en θ_{eq2} (qui est donc une position instable).

5 Schéma



- ❷ Si il y a mouvement, (1) fournit l'équation différentielle :

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = J_{\Delta} \ddot{\theta} = \frac{I\ell^2 B}{2} - \frac{\ell}{2} mg \sin \theta$$

Le système est un pendule pesant, la force de Laplace lui donne une position d'équilibre différente de la position verticale. Ce système est donc un oscillateur, il doit osciller autour de sa position d'équilibre, il est donc pertinent de la faire intervenir pour simplifier l'équation différentielle. Pour cela on introduit l'angle $\alpha = \theta - \theta_{eq1}$, (d'où $\dot{\alpha} = \dot{\theta}$), puis on développe $\sin \theta$:

$$J_{\Delta} \ddot{\alpha} = \frac{I\ell^2 B}{2} - \frac{\ell}{2} mg \sin(\alpha + \theta_{eq1})$$

$$\text{d'où : } J_{\Delta} \ddot{\alpha} = \frac{I\ell^2 B}{2} - \frac{\ell}{2} mg \sin \alpha \cos \theta_{eq1} - \frac{\ell}{2} mg \sin \theta_{eq1} \cos \alpha$$

L'angle α est nécessairement inférieure à α_0 , donc petit, ce qui permet d'écrire : $\sin \alpha \approx \alpha$ et $\cos \alpha \approx 1$. D'où :

$$J_{\Delta} \ddot{\alpha} = -\alpha \frac{\ell}{2} mg \cos \theta_{eq1} - \underbrace{\frac{\ell}{2} mg \sin \theta_{eq1} + \frac{I\ell^2 B}{2}}_{=0 \text{ (condition d'équilibre)}}$$

où sans surprise la condition d'équilibre (2) apparaît naturellement.

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\ddot{\alpha} + \frac{\ell mg \cos \theta_{eq1}}{2J_{\Delta}} \alpha = 0 \quad \text{soit :} \quad \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega = \sqrt{\frac{\ell mg \cos \theta_{eq1}}{J_{\Delta}}} = \sqrt{\frac{3g \cos \theta_{eq1}}{2\ell}}$$

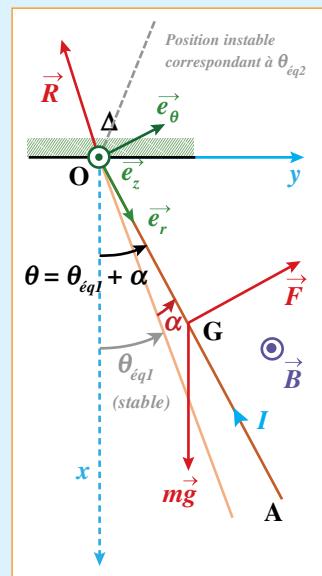
► Analyse

Le système effectue donc des oscillations autour de sa position d'équilibre, on peut donner la solution, habituelle avec ces conditions initiales : $\alpha = \alpha_0 \cos \omega t$ ou $\theta = \theta_{eq1} + \alpha_0 \cos \omega t$

On peut éventuellement exprimer la pulsation en fonction des données de l'énoncé qui permet de confirmer que le mouvement est possible et que ω existe puisqu'ici $I\ell B < mg$: $\omega = \left(\frac{3g}{2\ell} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{I\ell B}{mg} \right)^2 \right]^{1/4}$

Le pendule oscille avec une période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g \cos \theta_{eq1}}}$ autour de sa position d'équilibre, on peut

noter que cette période augmente quand l'angle de l'équilibre augmente (le cosinus diminue), c'est-à-dire quand la force de Laplace augmente (par exemple si on augmente le champ ou l'intensité).



6 Galvanomètre à cadre mobile

→ énoncé p. 475

❶ ► Cadre

On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen et matérialisé par les axes (Ox), (Oy), (Oz) où O est le point de l'axe du fil de torsion confondu avec G le centre d'inertie du cadre.

Le système est un solide, le cadre en rotation d'axe fixe, on repère sa position par un angle θ entre la normale au cadre et l'axe (Ox), soit l'angle polaire.

► Outils

On travaille dans la base cartésienne pour exprimer les vecteurs.

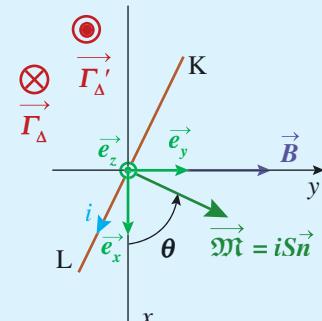
Bilan des actions : poids mg

réaction du fil \vec{R}

couple de rappel $\vec{\Gamma}$ du fil de torsion.

couple de Laplace $\vec{\Gamma}'$

Seuls les deux derniers ont un moment non nul, puisque mg et \vec{R} sont appliqués en un point de l'axe.



Initialement le fil de torsion n'exerce aucun couple puisque le système est à l'équilibre et que le couple de Laplace est nul en l'absence de courant. L'angle θ est donc également l'angle de torsion du fil, qui exerce un couple de rappel :

$$\vec{\Gamma} = -C\theta \vec{e}_z$$

Le couple de Laplace est celui exercé sur un cadre rigide par un champ uniforme, comme étudié dans le cours :

$$\vec{\Gamma}' = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B} = IS\vec{e}_r \wedge B\vec{e}_y = IS(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) \wedge B\vec{e}_y = ISB \cos\theta \vec{e}_z$$

Cinématique : Le vecteur rotation est porté par l'axe de rotation et vaut $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$

Le moment cinétique du système par rapport à Δ vaut donc : $L_\Delta = J_\Delta \Omega = J_\Delta \dot{\theta}$

Lorsqu'on fait passer du courant, le couple de Laplace tend à faire tourner le cadre de façon qu'il soit orienté perpendiculairement au champ (champ et moment magnétique du cadre alignés), le couple suivant l'axe (Oz) est orienté positivement. Cependant, le couple de torsion exerce un moment de rappel (comparable à un ressort pour la translation), orienté dans le sens négatif de l'axe. Le système tend donc à osciller sous ces deux actions. Dans un dispositif idéal, ces oscillations ne s'arrêteraient pas, mais les frottements finissent par amortir le système, qui se positionne de sorte que l'ensemble des moments se compensent (équilibre). Étant alors au repos, les forces de frottement n'interviennent plus sur la position du cadre.

→ Point de départ (loi physique)

On applique le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe de rotation Δ au solide à l'équilibre dans un référentiel galiléen :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathbb{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathbb{M}_\Delta(mg) + \Gamma_\Delta + \Gamma'_\Delta = 0$$

$$\Gamma_\Delta + \Gamma'_\Delta = [-C\theta_{eq} \vec{e}_z + ISB \cos\theta_{eq} \vec{e}_z] \cdot \vec{e}_z = -C\theta_{eq} + ISB \cos\theta_{eq} = 0$$

d'où : $I = \frac{C\theta_{eq}}{SB \cos\theta_{eq}}$

→ Analyse

- ② La position atteinte par le cadre est corrélée à l'intensité, on peut donc théoriquement mesurer l'intensité en mesurant l'angle dont a tourné le cadre. L'inconvénient du dispositif tel qu'il est décrit est que la relation n'est pas linéaire, ce qui est malcommode pour un appareil de mesure. La non-linéarité du système est due à la présence de l'angle entre le moment magnétique du cadre et le champ.
- ③ Dans le dispositif en aimant cylindrique, en raison de la symétrie, le champ ne dépend que de la distance au centre et négliger les effets de bord, revient à supposer le cylindre de longueur infinie, donc un champ dans l'entrefer qui ne dépend pas de la position suivant (Oz). De ce fait, le cadre est soumis à un champ qui est toujours orthogonal à sa normale et qui garde la même valeur le long de ses tiges LM et NK, même quand il tourne. En conséquence, le couple de Laplace se réduit à $\Gamma'_\Delta = ISB$ et le facteur de non linéarité $\cos\theta_{eq}$ disparaît, on a maintenant à l'équilibre une relation linéaire entre l'intensité et l'angle :

$$I = \frac{C\theta_{eq}}{SB}$$

Ainsi conçu ce dispositif est celui du galvanomètre à cadre mobile. Très sensible, il permettait de mesurer de faibles courants. Dans un ampèremètre à aiguille, il était également associé à un shunt permettant de ne le faire traverser que par une très faible partie du courant à mesurer. Il est aujourd'hui remplacé par des dispositifs électroniques.

7 Champ tournant

→ énoncé p. 475

- 1 Le champ sur l'axe d'un solénoïde est colinéaire à l'axe et vaut : $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{2R} i(t) [\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2] \vec{e}_A$

où α_1 et α_2 sont les angles sous lesquels on voit les bords du solénoïde depuis P et \vec{e}_A le vecteur unitaire, sur l'axe, orienté de façon directe par rapport au sens du courant dans la bobine. La valeur du champ est variable puisque l'intensité est variable, mais son orientation est fixe (colinéaire à l'axe).

- 2 Si l'on dispose deux bobines, les deux champs vont s'additionner vectoriellement et le champ résultant en P sera :

$$\vec{B}(P) = \vec{B}_x(P) + \vec{B}_y(P)$$

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{2R} i_x(t) [\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2] \vec{e}_x + \frac{\mu_0}{2R} i_y(t) [\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2] \vec{e}_y$$

Les angles α_1 et α_2 sont les mêmes pour les deux bobines, qui sont vues identiquement depuis P. Les intensités valent respectivement :

$$i_x(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad i_y(t) = I_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I_0 \sin(\omega t)$$

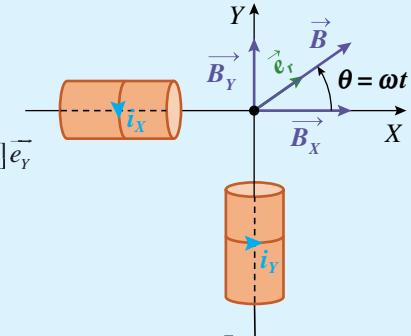
Soit :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{2R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) I_0 \left[\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y \right] = B_0 \left[\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y \right]$$

Et : $\vec{B}(P) = B_0 \vec{e}_r$

Le champ résultant a donc la direction du vecteur \vec{e}_r des coordonnées polaires, avec l'angle polaire $\theta = \omega t$. Autrement dit, le champ magnétique tourne à la vitesse angulaire ω et peut éventuellement entraîner une pièce solidaire d'un dipôle magnétique placé en P. La valeur du champ est constante.

N. B. : Changer le signe du déphasage permet de tourner dans l'autre sens.



8 Disque dur

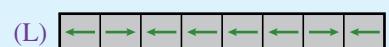
→ énoncé p. 475

L'écriture d'un 0 ou d'un 1 se fait par inversion du sens du champ magnétique, car le dipôle créé dans le secteur (cluster, représentant 1 bit d'information) va s'aligner sur le champ, il y a donc deux sens possibles pour chaque processus. Or le sens du champ d'un électroaimant dépend du sens du courant, inverser le courant entraîne l'inversion du champ. Il suffit donc d'orienter le courant dans la tête (petit électroaimant) dans un sens ou un autre pour écrire le code binaire.

Les dipôles sur la surface seront parallèles à la surface dans le système (L) et perpendiculaires dans le système (T), comme indiqué sur le schéma (où l'on a choisi un sens arbitraire d'écriture) où figurent le code binaire de la lettre B et les dipôles servant à l'écrire.

On voit que dans le mode (L), on est limité par la place, alors qu'il est plus facile de serrer les secteurs du mode (T) et donc d'augmenter la capacité du disque (il faut aussi augmenter entre autres, la vitesse d'inversion du courant dans la tête). Par ailleurs sur le mode (L) on voit que des interactions naissent entre les dipôles qui fonctionnent comme de petits aimants et s'attirent ou se repoussent selon qu'ils sont de même sens ou de sens contraire. Ce problème est en grande partie éliminé dans le mode (T), qui est plus récent (car plus délicat à mettre en œuvre) sur les disques durs, où il permet une plus grande capacité mémoire.

N. B. : Le mode lecture du disque se fait par induction avec la même tête, ce qui est expliqué au chapitre suivant.



0 1 0 0 0 0 1 0



À méditer

Si l'homme s'était borné à recueillir des faits, les sciences ne seraient qu'une nomenclature stérile, et jamais il n'eût connu les grandes lois de la nature.

PIERRE-SIMON DE LAPLACE (1749-1827)

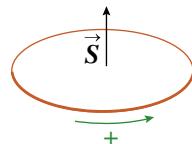
Induction électromagnétique

Découverte expérimentalement par Faraday en 1831, l'induction est un phénomène électromagnétique que nous exploitons au quotidien. Elle est en effet à l'œuvre dans la quasi-totalité de la production du courant électrique, dans les moteurs de nos appareils électriques domestiques, les transformateurs qui équipent nos chargeurs d'appareils électroniques, les alternateurs de nos voitures, les freins des véhicules lourds, les microphones, les haut-parleurs... On a vu au chapitre précédent que les courants électriques génèrent des champs magnétiques, on va voir ici comment les champs magnétiques peuvent produire des courants, fondement du phénomène de l'induction. L'étude de l'induction ouvre un large champ de connaissances dans lequel, non seulement électricité et magnétisme sont étroitement imbriqués, unifiés dans le vocabulaire du physicien, mais où vont également prendre une place importante les lois de la mécanique et de l'électrocinétique, ainsi que les propriétés des oscillateurs. Ce chapitre clôt ainsi le programme de première année en mettant en œuvre de nombreux aspects qui y ont été abordés, mais il ouvre aussi la voie à tout le champ de l'électromagnétisme (ondes, rayonnement...) qui sera abordé plus en profondeur dans les programmes de seconde année.

OUTILS MATHÉMATIQUES

- **Orientation directe** : L'orientation positive du sens de parcours d'un contour correspond à une orientation directe de sa surface par un vecteur orthogonal, selon le schéma ci-contre.
- **Intégration** : Dans un calcul intégral, où les variables d'espace et de temps sont indépendantes, alors les termes temporels sont des constantes du point de vue de l'intégration sur une variable d'espace (et inversement) :

$$I(t) = \int_{x \in D_{\text{int}}} f(t)g(x)dx = f(t) \int_{x \in D_{\text{int}}} g(x)dx$$



I | Le phénomène d'induction

1. Loi de modération de Lenz

Le phénomène d'induction se traduit par des mouvements de charges et donc généralement par l'apparition de courants électriques au sein de la matière conductrice (existence de charges mobiles), en présence d'un champ magnétique et sous certaines conditions expérimentales plus ou moins complexes. Il est difficile de donner une définition précise et globale de l'induction, dont la compréhension passe d'abord par l'étude de phénomènes expérimentaux simples où elle est mise en évidence, ce qui est l'objet de ce chapitre. Cependant, on peut déjà énoncer une loi très générale à laquelle elle obéit.

Énoncé

Loi de Lenz : Les effets de l'induction s'opposent aux causes de son existence.

Cette loi, parfois appelée loi de modération de Lenz, rappelle de nombreux systèmes où ce type de comportement est observé (rôle de l'inertie en mécanique, cas des bobines en électrocinétique, des équilibres en chimie...).

► Restrictions de l'étude

Une étude exhaustive de l'induction s'appuie sur les équations locales de l'électromagnétisme (équations de Maxwell) et le comportement microscopique des charges dans la matière, suite au champ électrique électromoteur généré par les conditions expérimentales. En l'absence de connaissances sur les champs électriques en particulier, il est cependant possible d'en proposer une première approche, à travers les effets macroscopiques des propriétés du flux du champ magnétique à travers un circuit fermé. Bien qu'on ne puisse donc pas justifier cette approche, elle va permettre de modéliser de nombreuses situations. Elle n'est cependant pas complètement générale. En particulier, elle sera inefficace dans les cas suivants :

- Un phénomène d'induction peut apparaître dans des pièces métalliques conductrices où la notion de circuit n'est pas appropriée, bien que l'essence du phénomène soit la même. Il en résulte des courants dits de Foucault que l'on se contentera d'évoquer de façon qualitative dans certaines applications.
- Un phénomène d'induction se produit dans certaines conditions dans des circuits fermés, alors que les lois qui suivent prévoient qu'il n'existe pas. Un exemple en est donné dans l'exercice n° 4 p. 499.

Sauf précision explicite, on ne traitera ici que des cas d'induction où une approche en termes de flux à travers des circuits fermés est pertinente.

2. Les variations du flux, causes de l'induction

Soit un circuit conducteur fermé, placé dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique. Si le champ est stationnaire et le circuit immobile, il ne se passe rien de notable. Mais si le circuit se déplace, se déforme ou si le champ est variable, alors, le plus souvent, il apparaît dans le circuit un courant, lequel génère à son tour un champ magnétique.

Définitions

- Un **courant induit** est un courant électrique qui apparaît dans un conducteur plongé dans un champ magnétique, lors de la variation du flux magnétique qui le traverse, soit du fait du déplacement ou de la déformation du circuit (**induction de Lorentz**), soit du fait de la variation temporelle du champ (**induction de Neumann**).
- Un **champ magnétique induit** est le champ magnétique généré par le courant induit dans un circuit.
- Les deux phénomènes d'induction (Lorentz et Neumann) peuvent aussi se superposer, si le conducteur se déplace dans un champ variable.
- Le phénomène d'induction traduit l'apparition d'un processus génératrice dans le circuit. Or un génératrice présente une tension à ses bornes y compris en circuit ouvert. Par conséquent même si le circuit n'est pas fermé, le phénomène d'induction existe, le courant induit qui circule lorsqu'on ferme le circuit en est une manifestation.

Énoncé

Loi de Lenz en termes de flux : le courant induit dans un circuit est tel que le champ magnétique qu'il génère s'oppose aux variations du flux du champ magnétique responsable de l'induction à travers le circuit (*voir définition du flux p. 463*).

- Il est très important de comprendre que le champ induit ne s'oppose pas au champ inducteur, mais à ses variations au niveau du circuit.
- Cette conséquence de la loi de Lenz permet de prévoir qualitativement et très simplement les propriétés d'orientation des champs et courants induits dans de nombreux cas, comme détaillé dans le tableau page suivante. Il faut cependant garder à l'esprit, que certains cas d'induction ne peuvent pas être décrits en termes de flux à travers un circuit.

3. Loi de Faraday

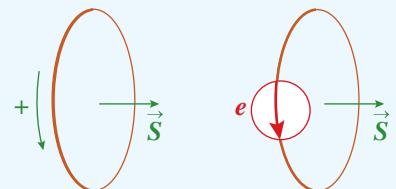
La loi de Faraday, mise en évidence expérimentalement par ce génie de l'expérimentation qu'était Michael Faraday (1791-1867), a été par la suite démontrée à l'aide des équations de Maxwell de l'électromagnétisme. Elle permet de traduire de façon quantitative et mathématique la loi de Lenz en termes de flux.

Énoncé

Loi de Faraday : Lorsque le flux Φ d'un champ magnétique à travers un circuit varie, alors ce dernier est le siège d'une f.e.m. induite qui vaut :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

où l'orientation de la surface (calcul du flux) et le sens algébrique du courant (et donc de la f.e.m.) sont cohérents avec le sens direct conventionnel.



POINT MÉTHODE

Choisir une orientation et utiliser un circuit équivalent

- La loi de Faraday n'a aucun sens en l'absence d'**orientation préalable des systèmes**. En effet, le courant induit découle de la variation du flux dans un circuit. Or ces deux grandeurs sont algébriques et leur signe est lié aux conventions d'orientation. On choisit donc une orientation pour le vecteur surface du circuit : ce choix est souvent celui du champ extérieur (mais pas nécessairement). L'orientation de la surface entraîne un sens cohérent direct de parcours du circuit, qui est souvent appelé sens positif du courant. On peut parfaitement choisir en premier le sens qui fixe l'algébrisation du courant sur le circuit, l'orientation de la surface est alors directe par rapport à ce choix.
- Si le calcul donne un courant positif, alors il circulera effectivement dans ce sens, si le calcul donne un courant négatif, alors il circulera en sens inverse. Aucun calcul ne sera pertinent en l'absence d'orientation des surfaces et du courant et, même si on pourra s'intéresser au sens réel du courant pour comprendre le phénomène ou vérifier la loi de Lenz, dans les calculs, on travaillera uniquement avec les **grandes algébriques**.
- Il sera presque toujours commode, une fois les f.e.m. d'induction déterminées, de remplacer les dispositifs par le générateur équivalent. Les conventions d'orientation devront évidemment être respectées dans cette opération et les **circuits équivalents** obtenus permettront d'écrire des lois des mailles sans erreur.

Le tableau page suivante permet de résumer les situations possibles simples. La variation du flux peut résulter d'un champ variable dans le temps, d'un déplacement du circuit dans un champ non uniforme, d'une rotation du circuit par rapport aux lignes de champ, voire d'une déformation du circuit (modification de sa surface). Plusieurs de ces possibilités peuvent être conjointes. Dans tous les cas on constate que le champ induit s'oppose aux variations du champ qui a donné naissance à l'induction.

Variation du flux	Évolution du champ qui traverse le circuit	Signes des grandeurs	Courant et champ induits
<i>Le flux algébrique augmente.</i>		$\phi > 0 \text{ et } \frac{d\phi}{dt} > 0 \Rightarrow e < 0 \text{ et } i < 0$ $\Delta \vec{B} \rightarrow \vec{B}_{induit}$	
		$\phi < 0 \text{ et } \frac{d\phi}{dt} > 0 \Rightarrow e < 0 \text{ et } i < 0$ $\Delta \vec{B} \rightarrow \vec{B}_{induit}$	
<i>Le flux algébrique diminue.</i>		$\phi > 0 \text{ et } \frac{d\phi}{dt} < 0 \Rightarrow e > 0 \text{ et } i > 0$ $\Delta \vec{B} \leftarrow \vec{B}_{induit}$	
		$\phi < 0 \text{ et } \frac{d\phi}{dt} < 0 \Rightarrow e > 0 \text{ et } i > 0$ $\Delta \vec{B} \leftarrow \vec{B}_{induit}$	

II Circuits simples sièges d'induction

1. Auto-induction

Soit un circuit parcouru par un courant d'intensité i (du fait d'un générateur par exemple). Il crée un champ magnétique dans son voisinage, qui génère un flux à travers lui-même. Or le champ magnétique est nécessairement proportionnel à l'intensité dans le circuit. Le calcul du flux se fait à un instant donné par une intégrale sur la surface du circuit pour laquelle l'intensité, qui ne dépend que du temps, est une constante (voir *outils mathématiques p. 483*). Le flux $\phi(t)$ est donc proportionnel à $i(t)$.

Définition

Le **flux propre** est le flux du champ \vec{B} généré par un circuit parcouru par un courant i à travers lui-même. Le flux propre est proportionnel à l'intensité qui parcourt le circuit :

$$\phi_{propre}(t) = Li(t) = \iint_{S_{circuit}} \vec{B}(\mathbf{M}, t) \cdot d\vec{S}$$

où L est l'inductance (propre) du circuit qui s'exprime en Henry.

- On peut montrer que l'inductance ne dépend que de μ_0^1 et de la géométrie du circuit. Par contre, elle ne dépend pas de la nature du matériau conducteur du circuit.

Si l'intensité dans le circuit varie, alors le flux varie et le circuit est le siège d'un phénomène d'induction.

1. Si le circuit est dans le vide ou l'air. En présence de noyau magnétique dans le circuit, des paramètres de la matière de ce noyau interviendront.

Définitions

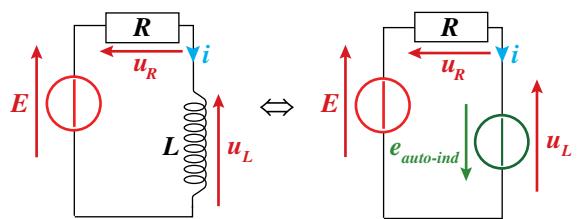
- Le phénomène d'**auto-induction** est l'induction d'un circuit sur lui-même, en raison de la variation de l'intensité du courant qui le parcourt.
- Une **f.é.m. d'auto-induction** dans un circuit vérifie la loi de Faraday :

$$e_{auto-ind} = -\frac{d\phi_{propre}}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

La définition de la f.é.m. d'auto-induction repose aussi sur l'orientation du circuit. La loi de Lenz est facile à mettre en évidence, le signe de la f.é.m. est déterminé par la même convention d'orientation que celle du courant dans le circuit, si i augmente alors la f.é.m. est négative, tendant à imposer un courant de sorte à le minimiser. Inversement si i diminue, la f.é.m. sera positive, tendant à faire augmenter i . Dans tous les cas la f.é.m. d'auto-induction s'oppose aux variations de l'intensité dont elle découle.

Si le circuit dans lequel se produit l'induction est une bobine placée dans un circuit (par exemple un RL série comme ci-contre), on retrouve bien la tension habituelle aux bornes de la bobine en convention récepteur. En effet, l'orientation du circuit et de la f.é.m. induite selon les règles précédentes correspondent à la convention générateur de l'électrocinétique, d'où :

$$u_L = -e_{auto-ind} = L \frac{di}{dt}$$



2. Induction mutuelle

Deux circuits \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 non connectés entre eux sont susceptibles d'être parcourus chacun par un courant et donc de générer chacun un champ magnétique. S'ils sont placés de manière à baigner dans le champ magnétique de l'autre, ils seront chacun traversés par le flux du champ de l'autre. Par un raisonnement comparable au précédent, ces flux sont proportionnels au courant du circuit inducteur.

Les variations du courant dans \mathcal{C}_1 modifient le flux du champ de \mathcal{C}_1 sur \mathcal{C}_2 , et donc génèrent un phénomène d'induction dans le circuit \mathcal{C}_2 . Inversement la modification du courant de \mathcal{C}_2 génère un phénomène d'induction sur \mathcal{C}_1 . Ces deux effets ont lieu simultanément, on parle alors d'**induction mutuelle**.

Définition

Le **flux mutuel** est le flux du champ généré par un circuit (dit inducteur) parcouru par un courant, à travers un autre circuit (dit induit). Le flux mutuel dans le circuit induit est proportionnel à l'intensité qui parcourt le circuit inducteur :

$$\phi_{mutuel1 \rightarrow 2}(t) = M_{21}i_1(t) = \iint_{S_2} \overline{B}_1(\mathbf{M}, t) \cdot \overline{dS}_2$$

où M_{21} est le **coefficient d'inductance mutuelle** du circuit \mathcal{C}_2 placé dans le champ du circuit \mathcal{C}_1 .

$$\phi_{mutuel2 \rightarrow 1}(t) = M_{12}i_2(t) = \iint_{S_1} \overline{B}_2(\mathbf{M}, t) \cdot \overline{dS}_1$$

où M_{12} est le **coefficient d'inductance mutuelle** du circuit \mathcal{C}_1 placé dans le champ du circuit \mathcal{C}_2 .

On montre que : $M_{21} = M_{12} = M$ où M est l'inductance mutuelle des circuits \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 qui s'exprime en Henry.

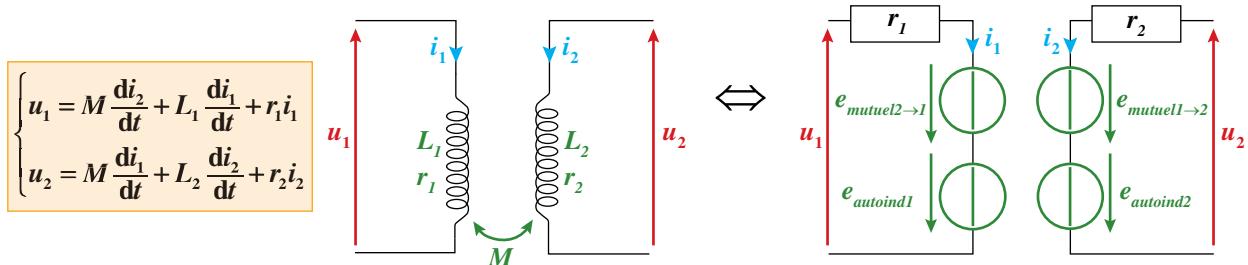
■ L'induction mutuelle génère un couplage² entre les deux circuits, qui apparaît dans les équations différentielles décrivant les systèmes, couplage exploité en particulier dans le transformateur.

On a schématisé ci-dessous (par des bobines) des circuits possédant un coefficient d'auto-induction et en influence mutuelle. Les lois des mailles sur les circuits équivalents, où l'on a fait figurer les f.e.m. induites, sont :

$$\begin{cases} u_1 + e_{mutuel2 \rightarrow 1} + e_{autoind1} - r_1 i_1 = 0 \\ u_2 + e_{mutuel1 \rightarrow 2} + e_{autoind2} - r_2 i_2 = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} u_1 - \frac{d\phi_{mutuel2 \rightarrow 1}}{dt} - \frac{d\phi_{propre1}}{dt} - r_1 i_1 = 0 \\ u_2 - \frac{d\phi_{mutuel1 \rightarrow 2}}{dt} - \frac{d\phi_{propre2}}{dt} - r_2 i_2 = 0 \end{cases}$$



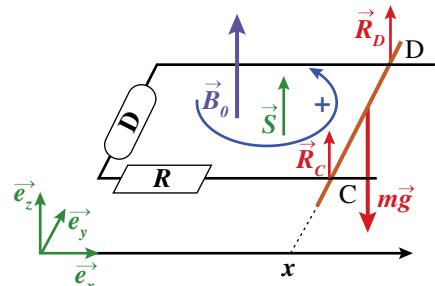
3. Le rail de Laplace

Le rail de Laplace est un dispositif qui permet de modéliser une version simplifiée de systèmes plus ou moins complexes. Ce circuit est susceptible d'être le siège de phénomènes d'induction par déformation du circuit.

Définition

Le rail de Laplace est une tige rigide posée sur des rails parallèles et horizontaux, fermés par un dipôle générateur ou récepteur. L'ensemble est conducteur.

Le rail de Laplace correspond au dispositif ci-contre, dans lequel la tige CD peut glisser sur des rails lorsqu'elle subit une force horizontale. L'ensemble est conducteur et la tige reste en contact avec les rails. On suppose pour simplifier que la résistance du circuit ne dépend pas de la position de la tige, de sorte qu'on modélise l'ensemble de la résistance du circuit par un résistor R , d'autres dipôles pouvant compléter le circuit. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme orthogonal au plan du dispositif. À l'équilibre et en l'absence de générateur, il ne se produit rien de notable. En cas de déplacement, on suppose que la tige garde son alignement, soit une translation suivant (Ox). Dans tous les cas les forces exercées seront le poids, les réactions des rails qui, en l'absence de frottements, n'ont pas de composante sur (Ox) et d'autres forces qui dépendent de la manipulation et qui seront toutes suivant (Ox).



Le théorème de la résultante cinétique appliquée à CD dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit : $\vec{m}\ddot{x} = \vec{F}_{autres} + \vec{R}_C + \vec{R}_D + \vec{mg}$ dont on n'utilisera que la projection suivant (Ox). On n'évoquera donc plus dans ce qui suit, ni le poids ni les réactions, dont la résultante est nulle.

2. La notion de couplage traduit le fait que les systèmes n'évoluent pas indépendamment l'un de l'autre. Cette situation a déjà été rencontrée en exercice (voir mécanique : pendules couplés p. 298, électricité : circuits couplés p. 145).

La surface du circuit est modifiée dès que la tige se déplace, de ce fait le flux du champ magnétique à travers le circuit varie et d'après la loi de Faraday, une f.e.m. induite apparaît dans le circuit :

$$\phi(t) = \vec{B}_0 \cdot \vec{S}(x) = B_0 \vec{e}_z \cdot a x(t) \vec{e}_z = B_0 a x(t) \quad \text{d'où :}$$

$$e_{ind} = -\frac{d\phi(t)}{dt} = -B_0 a \frac{dx(t)}{dt} = -B_0 a \dot{x}$$

On néglige souvent l'auto-induction de ce circuit car le champ induit est généralement beaucoup plus faible que le champ inducteur.

III | Induction de Neumann : circuits fixes dans un champ variable

1. Le transformateur

Définition

Un **transformateur** est un système à deux bobines, appelées **primaire** et **secondaire**, en interaction mutuelle.

Une tension variable est appliquée au primaire, qui est donc parcouru par un courant d'intensité variable et constitue de ce fait la source d'un champ magnétique variable. Le flux variable qui en résulte dans le secondaire y génère un courant induit dont les propriétés (fréquence, amplitude) sont liées à celles du courant primaire et à la nature du couplage.

Pour réaliser un bon transformateur, on cherche à rendre le couplage (influence mutuelle) le plus efficace possible. Pour cela, on fait en sorte que les deux bobines soient traversées par le même champ. Deux moyens permettent de réaliser cette condition :

- ↳ Les bobines sont enroulées ensemble sur le même support.
- ↳ Les bobines sont traversées par un noyau de fer qui canalise les lignes de champ (système le plus fréquent, ci-contre).

Dans les deux cas ce sont les bobines qui créent le champ, l'induction dans le secondaire se traduisant par une influence en retour sur le primaire. Par ailleurs les bobines sont aussi le siège d'une auto-induction.

Dans un modèle simple, les bobines sont identiques dans leur géométrie (spires de surface S) mais diffèrent par leur nombre de spires (respectivement N_1 et N_2). En supposant qu'on a fait en sorte que toutes les spires soient traversées par un champ colinéaire à leur vecteur surface, de même sens, et que ce champ ait la même valeur $B(t)$ pour toutes les spires, les flux dans les bobines sont respectivement :

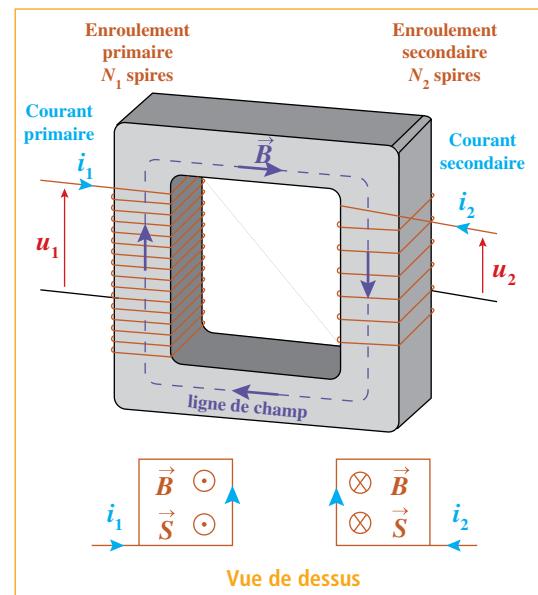
$$\begin{cases} \phi_1 = N_1 B(t) S \\ \phi_2 = N_2 B(t) S \end{cases}$$

En négligeant les résistances des bobines, on obtient en régime variable, des f.e.m. d'induction qui se confondent avec la tension aux bornes des bobines :

$$\begin{cases} e_1 = -u_1 = -u_{\text{ primaire}} = -\frac{d\phi_1}{dt} = -N_1 S \frac{dB}{dt} \\ e_2 = -u_2 = -u_{\text{secondaire}} = -\frac{d\phi_2}{dt} = -N_2 S \frac{dB}{dt} \end{cases}$$

soit la relation entre les tensions :

$$\frac{u_{\text{ primaire}}}{u_{\text{secondaire}}} = \frac{N_1}{N_2}$$



Vue de dessus

En négligeant toutes les pertes énergétiques (dans les circuits et dans le milieu canalisant le champ), la puissance fournie au primaire est intégralement transmise au secondaire et on a alors également une relation de proportionnalité entre les intensités des circuits.

Propriétés

Dans un **transformateur parfait**, c'est-à-dire où l'on néglige tous les phénomènes de pertes et où les spires des bobinages sont toutes traversées par le même champ magnétique, le rapport des tensions et le rapport des intensités entre primaire et secondaire sont inverses l'un de l'autre et uniquement liés au rapport des nombres de spire :

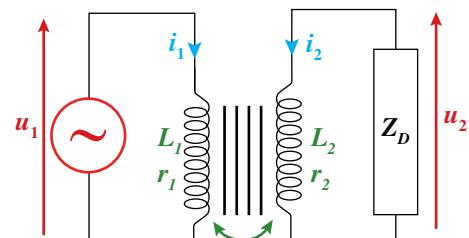
$$\frac{u_{\text{ primaire}}}{u_{\text{ secondaire}}} = - \frac{i_{\text{ secondaire}}}{i_{\text{ primaire}}} = \frac{N_1}{N_2}$$

- Ce qui précède n'a de sens qu'en régime variable. Un courant continu appliqué au primaire ne donne aucun courant au secondaire (une fois le transitoire d'établissement du courant dans la bobine terminé).
- On comprend alors le nom de transformateur : pour une tension appliquée au primaire, on peut récupérer au secondaire une tension du même type, mais d'amplitude de son choix, selon le rapport des nombres de spires des bobines. Par exemple pour transformer du 220 V en 110 V, il faut deux fois plus de spires au primaire qu'au secondaire.
- Le transformateur peut donc être utilisé dans les deux sens, car les rôles du primaire et du secondaire peuvent être permutés, selon que l'on veut une tension plus élevée ou plus basse que celle qui est disponible.
- Si le transformateur n'est pas idéal, le rapport des tensions peut être plus compliqué, mais abaisser une tension passera toujours par un nombre de spires plus faible au secondaire qu'au primaire, avec une intensité plus élevée au secondaire qu'au primaire.
- Pour de nombreuses raisons (en particulier pour minimiser les pertes en ligne) les courants électriques sortant des centrales sont de très haute tension et d'intensité assez faible. On dispose sur les lignes, au fur et à mesure que le réseau devient local, des transformateurs qui abaissent progressivement la tension, tout en augmentant l'intensité, de façon à disposer dans les installations domestiques et industrielles d'un courant de tension appropriée aux appareils et d'intensité suffisante pour les besoins³.

2. Transformateur en régime sinusoïdal

On peut modéliser les circuits du transformateur réel par le schéma du paragraphe II.2., dans lequel on ne néglige pas les résistances des circuits. Les bobines, siège d'un flux propre et d'un flux mutuel, sont équivalentes à des f.e.m. qui donnent les équations établies plus haut, soit :

$$\begin{cases} u_1 = M \frac{di_2}{dt} + L_1 \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 \\ u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 \end{cases} \quad (1)$$



$$(2)$$

On se place dans le cas où une tension sinusoïdale est appliquée au primaire et où le secondaire est connecté à un dipôle D qu'il doit alimenter. En notation complexe, le système est alors le suivant :

$$\begin{cases} u_1 = Mj\omega i_2 + L_1 j\omega i_1 + r_1 i_1 \\ -Z_D i_2 = Mj\omega i_1 + L_2 j\omega i_2 + r_2 i_2 \end{cases} \quad (1')$$

$$(2')$$

3. Les réseaux longues distances transportent du courant très haute tension de 400 000 ou 225 000 V, ce courant est ensuite transformé en moyenne tension (63 000 V et 15 000 à 25 000 V) et finalement en basse tension (400 V triphasé et 230 V monophasé).

En exprimant l'intensité du secondaire dans (2') et en la remplaçant dans (1'), on obtient une équation électrique entre les grandeurs du primaire, qui permet de montrer que le couplage est équivalent, du point de vue de ce circuit, à une impédance Z_{eq} sur le primaire telle que :

$$\begin{cases} \underline{u_1} = \left(\frac{M^2 \omega^2}{Z_D + L_2 j\omega + r_2} + L_1 j\omega + r_1 \right) \underline{i}_1 = Z_{eq} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 = \frac{-M j\omega \underline{i}_1}{Z_D + L_2 j\omega + r_2} \end{cases}$$

➡ Cas particulier

Dans le cas simple où les résistances sont négligeables et où le secondaire est fermé sur lui-même ($Z_D = 0$), l'ensemble de la bobine primaire (y compris son couplage) peut être vu comme une seule bobine équivalente :

$$\underline{u_1} = \left(\frac{M^2 \omega^2}{L_2 j\omega} + L_1 j\omega \right) \underline{i}_1 = j\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) = j\omega L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) = jL_{eq} \omega$$

avec $L_{eq} = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) = L_1 (1 - \alpha^2)$ où $\alpha = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ est appelé **coefficient de couplage**

➡ Aspect énergétique

En multipliant les équations (1) et (2) respectivement par i_1 et i_2 et en les additionnant on obtient :

$$\begin{cases} u_1 i_1 = M i_1 \frac{di_2}{dt} + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1^2 \\ u_2 i_2 = M i_2 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2^2 \end{cases} \Rightarrow u_1 i_1 = M \left(i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 - u_2 i_2$$

Dans le schéma, l'alimentation du primaire et le dipôle utile D sont en convention générateur, on a donc :

$$u_1 i_1 = -\mathcal{P}_{\text{reçue générateur}} = \mathcal{P}_{\text{fournie générateur}} = \mathcal{P}_{\text{alim}} \quad \text{et} \quad u_2 i_2 = -\mathcal{P}_{\text{reçue dipôle D}} = -\mathcal{P}_D$$

L'équation énergétique s'écrit donc :

$$\mathcal{P}_{\text{fournie générateur}} = \mathcal{P}_{\text{couplage}} + \mathcal{P}_{\text{bob1}} + \mathcal{P}_{\text{bob2}} + \mathcal{P}_{EJ1} + \mathcal{P}_{EJ2} + \mathcal{P}_D \quad \text{avec : } \mathcal{P}_{\text{couplage}} = \frac{d(Mi_1 i_2)}{dt}$$

Qui montre que l'énergie fournie par l'alimentation du primaire est répartie entre, d'une part l'énergie magnétique dans la bobine 1, l'énergie magnétique dans la bobine 2 et l'énergie magnétique de couplage et d'autre part, en pertes par effet Joule dans les résistors et, enfin, en énergie dans le dipôle utilisateur.

3. Autres applications

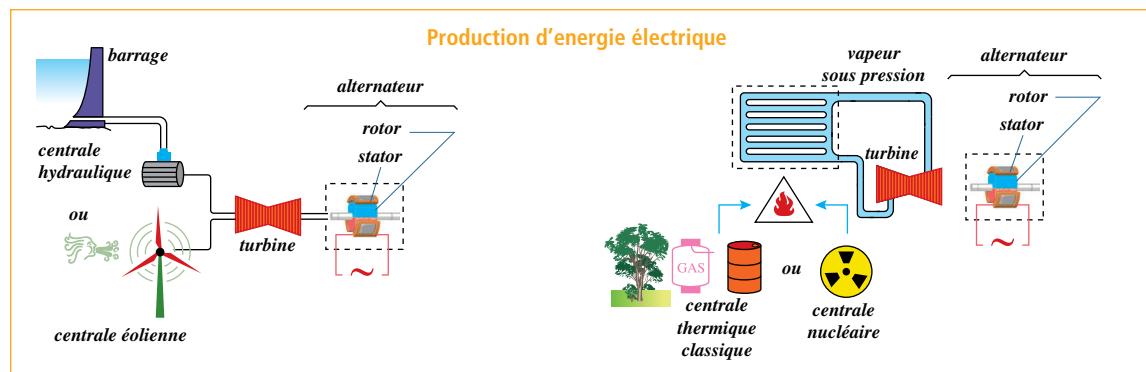
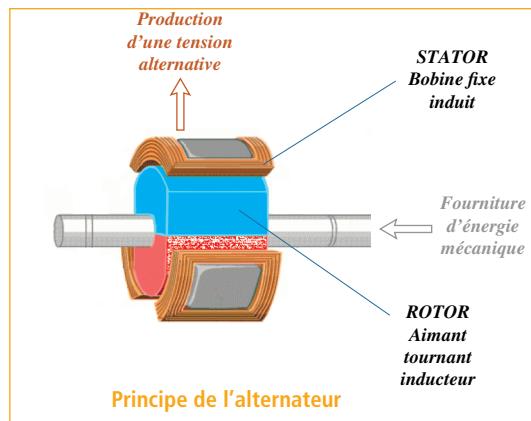
➡ L'alternateur

Propriétés

Un **alternateur** est composé d'une bobine fixe (**stator**) et d'un aimant permanent tournant ou d'une bobine alimentée en continu tournante (**rotor**). Le rotor engendre un champ magnétique, qui, du fait de sa rotation, génère un flux variable et donc un courant induit dans le stator.

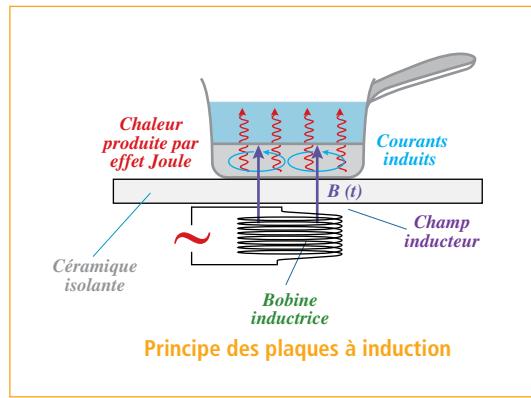
Le champ magnétique du rotor est stationnaire lorsqu'il est immobile, c'est sa rotation qui plonge la bobine du stator dans un champ variable. La rotation à vitesse constante permet d'obtenir un courant alternatif sinusoïdal (voir exercice n° 2 p. 498).

La quasi-totalité de l'énergie électrique est produite par ce procédé. Dans certains cas, la source d'énergie met directement en rotation le rotor (énergie hydraulique, éolienne). Cependant, le plus souvent, une source d'énergie primaire (nucléaire grâce à la fission de l'uranium, chimique grâce à la combustion du pétrole, du gaz, du charbon, d'une biomasse) sert à produire une vapeur sous pression qui fait tourner une turbine, laquelle assure le mouvement du rotor.



Le chauffage par induction

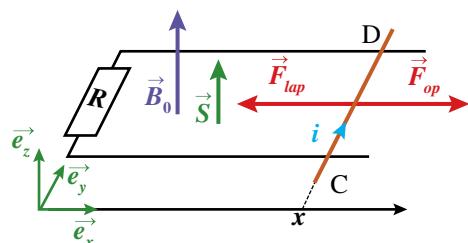
Dans les plaques à induction se trouvent des bobines alimentées par le courant alternatif du secteur, qui génèrent un champ magnétique alternatif, donc variable. Des **courants induits de Foucault** apparaissent dans la masse métallique qui constitue le fond de la casserole posée sur la plaque, lequel s'échauffe par effet Joule. La chaleur est transmise aux aliments. Une couche de céramique entre la bobine et la casserole reste froide car, en tant qu'isolant électrique, elle n'est parcourue par aucun courant induit (donc pas d'effet Joule) et en tant qu'isolant thermique, elle s'échauffe très peu au contact de la casserole et de la bobine.



IV Induction de Lorentz : circuit mobile dans champ stationnaire

1. Rail de Laplace en mode générateur

Dans ce mode de fonctionnement, on ne place pas de générateur dans le circuit, mais un opérateur déplace le rail. Le flux dans le circuit fermé varie en raison de sa déformation et un courant induit apparaît dans le circuit. La tige subit donc une force de Laplace (courant dans un champ magnétique extérieur). La loi



de Lenz permet de prévoir que cette force sera de nature à s'opposer à la variation imposée, autrement dit, si on éloigne la tige, la force de Laplace tendra à la ramener, tandis que si on la rapproche, la force de Laplace tendra à l'éloigner. Un calcul rapide permet de le vérifier, en utilisant les résultats du II.3. :

$$\phi(t) = B_0 ax(t) \quad \text{et} \quad e_{ind} = -B_0 ax$$

Le circuit est uniquement résistif, le cadre fonctionne selon le schéma équivalent ci-contre et l'intensité induite vérifie :

$$e_{ind} = Ri$$

d'où l'**équation électrique** : $Ri = -B_0 ax$

Et une force de Laplace s'exerce sur la tige :

$$\vec{F}_{lap} = i \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{B_0} = ia \overrightarrow{e_y} \wedge B_0 \overrightarrow{e_z} = ia B_0 \overrightarrow{e_x} = -\frac{a^2 B_0^2}{R} \dot{x} \overrightarrow{e_x} = -\frac{a^2 B_0^2}{R} v_{tige}$$

La force de Laplace est bien opposée au déplacement imposé à la tige par l'opérateur. **N. B.** : Sur le schéma, le choix du sens de la force exercée par l'opérateur donne un courant négatif qui circule en réalité dans le sens contraire du sens positif indiqué. Le théorème de la résultante cinétique projeté sur (Ox) fournit l'**équation mécanique** :

$$m \ddot{x} = F_{op} - \frac{a^2 B_0^2}{R} \dot{x}$$

L'analyse énergétique se fait en multipliant l'équation mécanique par la vitesse :

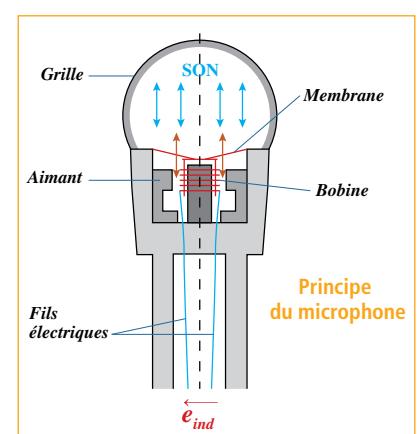
$$m \ddot{x} \dot{x} = F_{op} \dot{x} - \frac{a^2 B_0^2}{R} \dot{x}^2 \quad \text{soit :} \quad F_{op} \dot{x} = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) \quad \text{soit :} \quad \boxed{\mathcal{P}_{\text{fournie opérateur}} = \mathcal{P}_{EJ} + \mathcal{P}_{\text{cinétique}}}$$

Où l'on montre que la puissance fournie par l'opérateur se répartit en puissance cinétique et en effet Joule. Si la vitesse de la tige est maintenue constante, alors toute la puissance de l'utilisateur est transformée en chaleur par effet Joule.

2. Applications

→ Microphone électrodynamique

Le son est une vibration mécanique qui se propage dans un milieu matériel (en général l'air). Dans un microphone, une membrane en contact avec l'air et solidaire d'une bobine est soumise à ces vibrations. Son mouvement reproduit les oscillations de l'air, de même que celui de la bobine qu'elle entraîne. Celle-ci est placée dans un champ magnétique produit par un aimant permanent. Il naît alors dans la bobine un courant induit, dont les variations sont directement liées à celles de l'onde sonore. Ce courant électrique peut ensuite être traité, enregistré et renvoyé sur un haut-parleur (voir p. 496). On peut schématiser le fonctionnement, en imaginant le rail de Laplace sur lequel l'opérateur (le son) ferait osciller horizontalement le rail, ce qui généreraient une f.e.m. alternative dont les variations seraient liées à celles imposées à la tige.



→ Freinage par induction

Les courants de Foucault, évoqués plus haut dans les plaques à induction, apparaissent également lorsque le métal se déplace dans un champ magnétique extérieur. Sans détailler les calculs du magnétisme dans la matière, on peut néanmoins qualitativement raisonner à l'aide de la loi de Lenz. Les courants induits

qui circulent dans la masse métallique, du fait du champ magnétique extérieur, vont donner naissance à des forces de Laplace, qui seront telles qu'elles s'opposeront au mouvement initial de la matière. Ainsi une structure métallique de la roue d'un véhicule, placée dans un champ magnétique sera freinée par les forces de Laplace issues des courants de Foucault. Le freinage par induction est en général le premier moyen de freiner d'un véhicule lourd (vitesse élevée), il est ensuite relayé par un freinage par friction, plus efficace à basse vitesse. On évite ainsi une usure des pièces mécaniques par friction à vitesse élevée et on obtient un premier freinage très efficace aux grandes vitesses. Notons cependant que, dans les deux étapes, le freinage dissipe de l'énergie sous forme de chaleur (par effet Joule puis par frottement).

→ Boucle de détection

Un circuit bobiné est placé sous le bitume d'une route et alimenté par un courant alternatif. Il génère donc un champ magnétique. Lorsqu'un véhicule passe au-dessus de la boucle, des courants de Foucault (dus au déplacement de la masse métallique dans le champ, mais également à la variation du champ induit du bobinage) apparaissent dans le châssis du véhicule et génèrent à leur tour un champ induit. La bobine du sol et le châssis sont alors en influence mutuelle. Les propriétés du circuit dans le sol sont donc modifiées par ce couplage et l'analyse du signal électronique (et plus particulièrement de l'oscillateur associé au bobinage) permet de détecter cette modification, donc le passage du véhicule. Cela est exploité pour déclencher le flash lors du franchissement d'un feu rouge par exemple.

V Conversion électromécanique

Dans tous les exemples qui précèdent, on assiste à une conversion d'énergie soit mécanique → électrique (alternateur, rail de Laplace mis par un opérateur, microphone, freinage par induction) ou électrique → électrique (transformateur, chauffage par induction). Il est également possible de réaliser une conversion électro-mécanique, où l'énergie électrique fournie par un générateur est convertie en énergie mécanique. C'est grâce aux forces de Laplace que l'on réalise cette conversion. Les différents systèmes feront donc apparaître, comme dans les exemples précédents, une équation électrique dans un circuit et une équation mécanique du déplacement d'un système.

POINT MÉTHODE

Exprimer le couplage à l'aide de l'équation électrique et de l'équation mécanique

■ Comme il a été vu dans l'exemple du IV.1. et comme on le verra dans ce qui suit, l'étude des systèmes sièges d'une induction a souvent pour but de déterminer, d'une part le comportement électrique d'un circuit et d'autre part le comportement mécanique d'un système en mouvement. Deux équations seront donc nécessaires :

- ➡ l'**équation électrique**, généralement issue de la loi de mailles sur le circuit ou sur son équivalent.
- ➡ l'**équation mécanique**, généralement issue du PFD (TRC ou TMC) sur les parties mobiles.

La force de Laplace (mécanique par essence, mais issue d'un courant) réalise le **couplage** entre les deux approches, c'est pourquoi on obtient un système d'équations différentielles couplées (entre $x(t)$ et $i(t)$) le plus souvent). Leur résolution peut être simple, l'une des grandeurs s'écrivant en fonction de l'autre (exemples du rail de Laplace), mais parfois plus délicate, selon la complexité des équations (*voir exercice n° 1 ou exercice n° 4 p. 498-499*).

- Parfois le couplage est réalisé entre deux circuits électriques, et l'on obtient alors deux équations électriques couplées (transformateurs).
- On se trouvera souvent en régime sinusoïdal forcé, et les méthodes développées dans les chapitres 10 et 11 seront alors mises en œuvre (*voir III.2. et exercices n° 3 et n° 4 p. 499*).

1. Rail de Laplace en mode moteur

Le rail de Laplace toujours plongé dans un champ magnétique (mais en l'absence d'opérateur) est connecté à un générateur qui fournit un courant circulant dans la tige, laquelle, en présence du champ extérieur, est soumise à la force de Laplace :

$$\vec{F}_{lap} = i \overrightarrow{CD} \wedge \vec{B}_0 = i a \vec{e}_y \wedge \vec{B}_0 \vec{e}_z = i a B_0 \vec{e}_x$$

Dans le même temps, le déplacement de la tige suite à cette force génère un phénomène d'induction comme vu au II.3. :

$$\phi(t) = B_0 a x(t) \quad \text{et} \quad e_{ind} = -B_0 a \dot{x}$$

La loi des mailles sur le circuit équivalent donne :

$$e_{gen} + e_{ind} = R i$$

$$\Rightarrow \text{équation électrique :} \quad B_0 a \dot{x} + R i = e_{gen}$$

Le théorème de la résultante cinétique est projeté sur (Ox) :

$$\Rightarrow \text{équation mécanique :} \quad m \ddot{x} = i a B_0$$

On obtient donc un système d'équations électromécaniques couplées :

$$\begin{cases} B_0 a \dot{x} + R i = e_{gen} \\ m \ddot{x} = i a B_0 \end{cases} \text{ d'où en levant le couplage : } \begin{cases} \frac{di}{dt} + \frac{a^2 B_0^2}{mR} i = 0 \\ \ddot{x} + \frac{a^2 B_0^2}{mR} \dot{x} = \frac{B_0 a}{mR} e_{gen} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \\ \dot{x} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau} \end{cases} \text{ avec } \tau = \frac{mR}{a^2 B_0^2}$$

Les solutions sont des exponentielles de même constante de temps τ . La vitesse tend vers une valeur limite non nulle, et l'intensité tend vers 0. Lorsque le régime permanent est atteint, le mouvement est uniforme et le courant nul, la f.e.m. d'induction compensant celle du générateur.

L'analyse énergétique se fait en multipliant l'équation mécanique par la vitesse et l'équation électrique par l'intensité :

$$m \ddot{x} \dot{x} = i a B_0 \dot{x} = i a B_0 \frac{e_{gen} - R i}{a B_0} = i e_{gen} - R i^2 \quad \text{soit :} \quad e_{gen} i = R i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right)$$

$$\text{soit : } \boxed{\mathcal{P}_{\text{fournie générateur}} = \mathcal{P}_{EJ} + \mathcal{P}_{\text{cinétique}}}$$

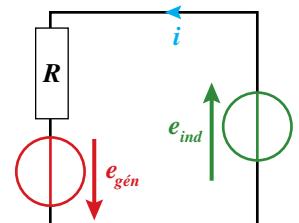
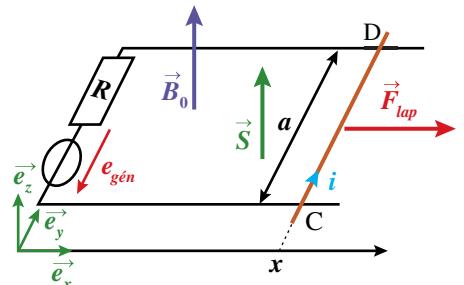
Lorsque la situation limite est atteinte (quelques τ), la vitesse est uniforme, le générateur ne débite plus, le courant est nul (plus d'effet Joule), aucune puissance n'est plus échangée.

POINT MÉTHODE

Exploiter les bilans énergétiques

■ Les **bilans d'énergie** s'obtiennent également de façon systématique (voir exercice n° 1 p. 498) :

- ➡ Multiplier l'équation électrique par l'intensité.
- ➡ Multiplier l'équation mécanique par la vitesse.
- ➡ Combiner les deux expressions, généralement par élimination du terme de Laplace.
- ➡ Identifier chaque terme comme une puissance (souvent la dérivée temporelle d'une énergie).
- ➡ Traduire le comportement physique des systèmes : en général une source d'énergie (alimentation électrique, opérateur, pesanteur...) distribue l'énergie entre les systèmes mécaniques (puissance cinétique, dissipation par frottement...) et électriques (énergie magnétique emmagasinée dans les bobines, dissipation par effet Joule...).



- Lorsqu'on a affaire à deux équations électriques, on multiplie chacune par l'intensité appropriée, puis on procède comme précédemment (transformateurs, voir III.2.).
- Lorsque le couplage est facile à lever (par exemple rails de Laplace basiques, voir IV.1. ou V.1.). On pourra effectuer le bilan directement sur l'une des équations.

2. Haut-parleur

Un haut-parleur (HP) est constitué d'un aimant et d'une bobine placée dans l'entrefer de l'aimant. Un courant circule dans la bobine. Il reproduit fidèlement les variations du son attendu (grâce par exemple à la tension obtenue par le microphone décrit au paragraphe précédent). Une force de Laplace, proportionnelle à ce courant va naître sur la bobine, qui est solidaire d'une membrane et soumise à un système de rappel élastique. Son déplacement génère une f.e.m. d'induction dans la bobine. L'ensemble constitue un oscillateur forcé à la fréquence imposée par le courant inducteur, la membrane oscillera aux fréquences imposées par la tension, donc celles du son à écouter, mettant l'air en contact en mouvement.

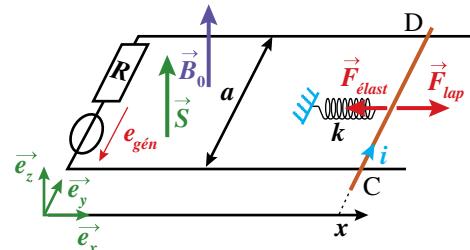
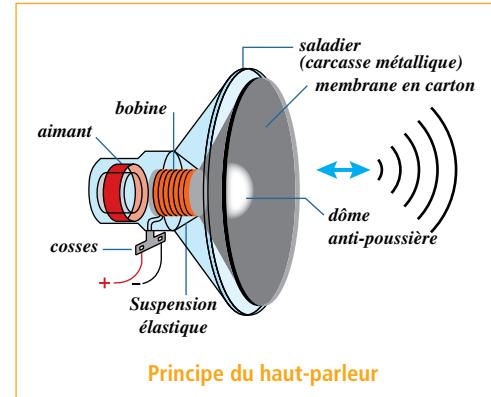
On peut modéliser le dispositif par un rail de Laplace alimenté par un générateur alternatif et soumis, en plus de la force de Laplace, à une force de rappel élastique par un ressort, comme sur le schéma ci-contre. Par rapport au système précédent, l'équation mécanique contient un terme supplémentaire, la force de rappel, l'équation électrique est inchangée :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + iaB_0 \\ e_{\text{gén}} + e_{\text{ind}} = Ri \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} B_0 a \dot{x} + Ri = e_{\text{gén}} \\ m\ddot{x} = -kx + iaB_0 \end{cases}$$

$$\ddot{x} + \frac{a^2 B_0^2}{mR} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{B_0 a}{mR} e_{\text{gén}}$$



dont on tire l'équation du mouvement :

Il s'agit donc comme attendu d'un oscillateur forcé par le générateur, c'est-à-dire par la tension qui reproduit les variations du son. La membrane oscille donc à la fréquence imposée par le générateur et ce mouvement reproduit les variations sonores à transmettre. En faisant le lien avec le cours d'électrocinétique sur les filtres, on comprend que selon les caractéristiques du haut-parleur, on peut choisir les gammes de fréquences émises (graves, médium ou aiguës), en adaptant la bande passante du système.

N. B. : Ce qui précède est une bonne approximation du fonctionnement du HP. Cependant, d'une part on a négligé l'auto-induction et les phénomènes de frottements, d'autre part on n'a pas étudié le processus réel d'induction dans la bobine. En effet compte tenu de sa géométrie, ce dispositif pose le problème évoqué au début du chapitre car, sauf à le modéliser par un rail de Laplace, le phénomène inductif ne peut y être correctement abordé en termes de flux tel que vu ici. L'exercice n° 4 p. 499 en propose une approche plus complète.

VERS LA COLLE**Questions de cours**

- Induction : principe, lois de Lenz, de Faraday.
- Auto-induction : principe, coefficient, lien avec le circuit RL.
- Induction mutuelle : principe, coefficients, équations et schéma équivalent, notion de couplage.
- Rail de Laplace : principe, fonctionnement en générateur, en moteur, équations électriques et mécaniques, bilans énergétiques.
- Conversion électromécanique : principe du haut-parleur.

Erreurs à éviter

- Les principales erreurs sont liées aux signes et aux orientations. Les choix d'orientation doivent non seulement précéder tout calcul, mais également être cohérents (surface et sens du courant, puis f.e.m.). On gardera dans tous les calculs les grandeurs algébriques, une fois les signes et orientations fixées.

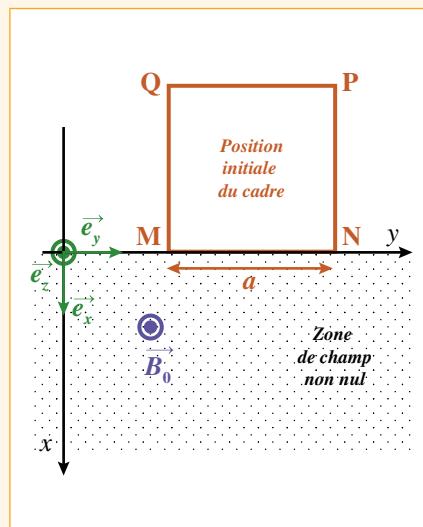
Quelques « trucs » utiles

- Il est important de schématiser des systèmes équivalents (en respectant les orientations !) aux dispositifs pour écrire les lois électriques. Cependant on verra vite qu'avec des orientations directes standard, on arrive toujours aux mêmes équations, qui rejoignent celles établies en électrocinétique.
- Comme toujours en électromagnétisme, les schémas en perspective sont souvent mieux compris si on les assortit de schémas plans, en particulier pour avoir des orientations fiables des courants, des surfaces et des champs.

1 Chute d'un cadre (d'après ICNA 2011) ★★

→ corrigé p. 501

Un cadre rigide MNPQ sur lequel est enroulé un circuit fermé de n spires conductrices carrées de côté a (masse totale m) est placé verticalement et son mouvement étudié dans le référentiel terrestre, dont les axes sont choisis comme sur la figure ci-contre. À l'instant initial, le côté le plus bas MN est horizontal et coïncide avec l'axe Oy. Le circuit a une résistance totale R et un coefficient d'auto-induction L . Dans le demi-espace $x > 0$, règne un champ magnétique uniforme et stationnaire comme indiqué sur le schéma. Le cadre est abandonné, sans vitesse initiale, dans le champ de pesanteur uniforme. On suppose qu'un système de guidage l'astreint à demeurer vertical et on néglige tout phénomène de frottement.



- 1 Expliquer pourquoi le cadre est le siège d'un phénomène d'induction. Exprimer la f.e.m. induite dans le circuit. En déduire l'équation électrique vérifiée par l'intensité dans le cadre, dans le cas où l'on néglige le phénomène d'auto-induction.
- 2 Établir l'expression des forces de Laplace sur le cadre. Commenter leur action. Établir l'équation différentielle du mouvement et en déduire les expressions de la vitesse du système et de l'intensité. Exprimer la vitesse limite. Est-elle atteinte ? Quel est le mouvement du cadre une fois qu'il est intégralement dans la zone de champ ?
- 3 On tient compte maintenant du phénomène d'auto-induction. Établir l'équation différentielle du mouvement. Sans la résoudre explicitement, décrire le mouvement du cadre. Établir un bilan énergétique.

2 Induction mutuelle (CCP MP 2008) ★

→ corrigé p. 503

Une spire rigide plane circulaire de centre O, de rayon a et de résistance r est placée dans le champ magnétique régnant à l'intérieur d'un solénoïde infini (comprenant N spires et de longueur L grande devant son rayon $R > a$) parcouru par un courant variable : $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$. L'axe de la spire et celui du solénoïde coïncident.

- 1 Expliquer qualitativement pourquoi et dans quel sens apparaît un courant dans la petite spire, puis exprimer l'intensité de ce courant (la spire est immobilisée).
- 2 Même question si la spire tourne maintenant autour d'un axe fixe de son plan à une vitesse angulaire constante ω et qu'un courant stationnaire d'intensité I_0 circule dans le solénoïde.
- 3 Quel phénomène a-t-on négligé ici ? Quels systèmes réels ces dispositifs modélisent-ils ?

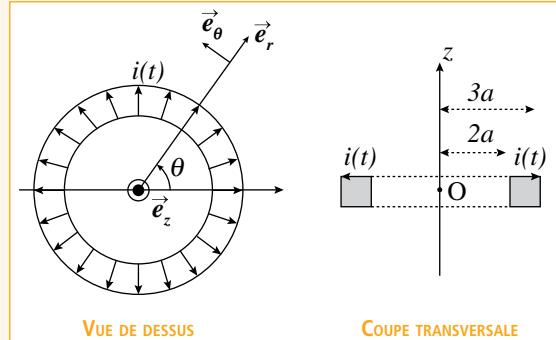
3 Pince ampèremétrique (CCP TSI 2014) ★★★

→ corrigé p. 505

Une pince ampèremétrique à induction est constituée d'un tore de section carrée de côté a , d'axe (Oz) de rayon compris entre $2a$ et $3a$, sur lequel sont bobinées régulièrement un grand nombre N de spires carrées en série. Ce circuit de résistance R est fermé sur un ampèremètre de résistance négligeable. On travaille dans la base cylindrique comme indiqué sur le schéma. Un fil infini parcouru par un courant $I(t) = I_m \cos(\omega t)$ dont on cherche à mesurer la valeur efficace, coïncide avec l'axe (Oz). Soit $i(t)$ le courant induit dans le bobinage du tore et $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$ son expression en régime forcé. On donne :

$$\vec{B}_{fil}(M, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta ; \quad \vec{B}_{tore}(M \text{ à l'intérieur du tore}, t) = \frac{\mu_0 N i(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta ; \quad \vec{B}_{tore}(M \text{ à l'extérieur du tore}, t) = \vec{0}$$

- 1 Justifier l'existence d'un courant $i(t)$ dans le bobinage torique. Que signifie régime forcé ici ? Justifier la direction des champs. Comment expliquer qualitativement que le champ du tore soit nul à l'extérieur ?
- 2 Établir l'expression du flux du champ du fil et celle du flux du champ du tore à travers une spire du tore, en fonction de μ_0 , $I(t)$, $i(t)$, N et a . En déduire le flux total dans le bobinage torique.
- 3 Rappeler les définitions du coefficient d'auto-inductance et du coefficient d'inductance mutuelle et les exprimer pour le bobinage du tore. Établir l'expression de la f.e.m. induite dans le tore en fonction de ces coefficients et des dérivées des intensités.
- 4 Exprimer la fonction de transfert $H = i / I$ et donner son module et son expression asymptotique à haute et basse fréquence. Commenter.
- 5 On admet qu'aux fréquences de travail, la résistance du bobinage est négligeable devant son impédance. En déduire une expression simple du rapport des intensités efficaces du tore et du fil.
- 6 Ce dispositif, appelé pince ampèremétrique, possède un grand nombre de spires (par exemple $N = 1000$). Expliquer son utilité par rapport à un ampèremètre simple. Peut-on l'utiliser en courant continu ?

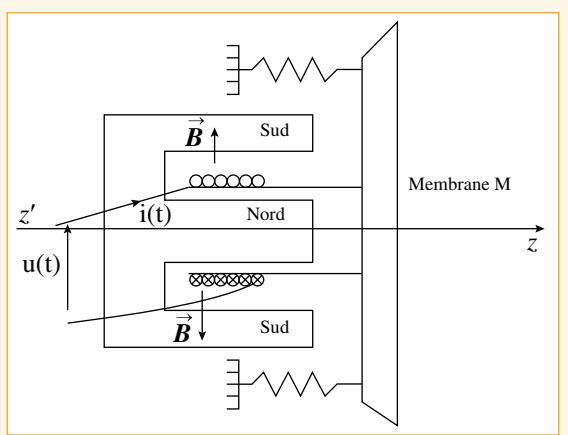


4 Haut-parleur (CCP PSI 2006) ★★★

→ corrigé p. 507

Un haut-parleur électrodynamique est un système à symétrie cylindrique constitué :

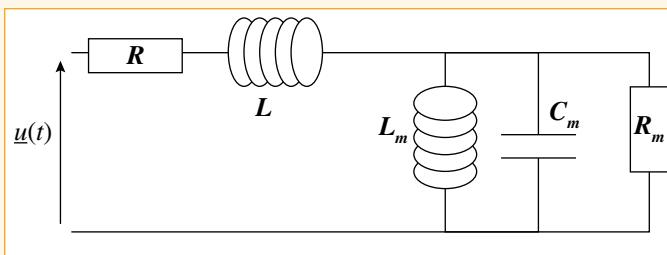
- d'un aimant annulaire, d'axe ($z'z$), créant un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_r$ radial et de norme constante dans la région utile de l'entrefer ;
- d'un solénoïde indéformable de même axe ($z'z$), comportant N spires et de rayon ρ , placé dans l'entrefer de l'aimant ;
- d'une membrane M perpendiculaire à l'axe ($z'z$), solidaire du solénoïde et pouvant effectuer de faibles déplacements axiaux autour de sa position d'équilibre $z = 0$, grâce à un système élastique que l'on modélisera par un ressort unique de raideur k .



On ne tiendra compte, ni du poids du dispositif, ni de la réaction du support, car ils se compensent. On travaillera en coordonnées cylindriques, c'est-à-dire avec les vecteurs : $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$.

Le courant $i(t)$ est compté positif lorsqu'il circule suivant \vec{e}_θ . La transmission acoustique de la membrane à l'air environnant se traduit par une force de frottement fluide $\vec{F} = -f \cdot \vec{v}$, opposée à la vitesse \vec{v} de la membrane ($f > 0$). La bobine est assimilable à une inductance pure L , en série avec une résistance R . Elle est alimentée par un amplificateur qui délivre une tension $u(t)$ à ses bornes.

- ① Faire le bilan des actions mécaniques appliquées à l'ensemble (bobine + membrane). En déduire l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ qui traduit le comportement mécanique du dispositif de masse m .
- ② Peut-on ici calculer la f.e.m. induite par le déplacement de la bobine à l'aide de la loi de Faraday ? On admettra donc que, de ce point de vue, le circuit se comporte comme un rail de Laplace qui se déplacerait à la même vitesse, orthogonalement au champ magnétique et qui aurait la même longueur que le fil enroulé. Écrire l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ qui traduit le comportement électrique du système, puis le système d'équations couplées entre i et z .
- ③ Dans le cas où la tension $u(t)$ est sinusoïdale de pulsation ω , toutes les grandeurs physiques variables sont des fonctions harmoniques du temps. Exprimer les équations précédentes en notation complexe et déterminer l'impédance complexe Z du circuit électrique alimenté par $u(t)$ en fonction de L , R , ω et des éléments mécaniques du dispositif.
- ④ Montrer qu'on peut adopter comme modèle électrique du haut-parleur le schéma équivalent ci-contre. On exprimera chacun des éléments L_m , C_m et R_m de l'impédance motionnelle (on cherchera à définir ce terme) en fonction de B , m , f , N , ρ et k .



5 Disque dur ★

→ corrigé p. 510

Le principe d'écriture du disque dur a été évoqué dans l'exercice n° 8 du chapitre précédent (voir p. 475). Expliquer comment le même dispositif permet de lire les données inscrites sur la surface.



Sur la photo la tête a été soulevée pour qu'elle soit visible par réflexion sur la surface du disque.

1 Chute d'un cadre

→ énoncé p. 498

- 1 Lorsque le cadre pénètre dans la zone de champ, il est traversé dans sa partie basse par un flux. Ce flux varie, car la surface augmente au fur et à mesure de la chute. Une f.e.m. induite apparaît dans le circuit qui, étant fermé, est alors parcouru par un courant induit.

Le flux du champ à un instant t vaut : $\phi(t) = n\bar{B}_0 \cdot \bar{S}(x) = nB_0 \vec{e}_z \cdot ax(t) \vec{e}_z = nB_0 ax(t)$

Soit une f.e.m. induite, d'après la loi de Faraday : $e_{ind} = -\frac{d\phi(t)}{dt} = -nB_0 a \frac{dx(t)}{dt}$ soit : $e_{ind} = -nB_0 a \dot{x}$

Si le circuit est uniquement résistif, le cadre fonctionne selon le schéma équivalent ci-contre et l'intensité induite vérifie :

$$e_{ind} = Ri \quad \text{d'où l'équation électrique : } Ri = -nB_0 a \dot{x}$$

- 2 On étudie le mouvement du cadre dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids $\vec{P} = mge_x$, aux forces de Laplace et aux réactions des supports de guidage. En l'absence de frottement, ces réactions n'ont pas de composante suivant (Ox). (*En théorie pour un mouvement idéalement vertical, elles sont nulles, mais en pratique elles sont indispensables pour éviter l'instabilité du système qui basculerait certainement à la moindre perturbation*). Les contraintes de guidage imposent une vitesse suivant l'axe vertical, d'où les vecteurs cinématiques :

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x$$

Les forces de Laplace valent :

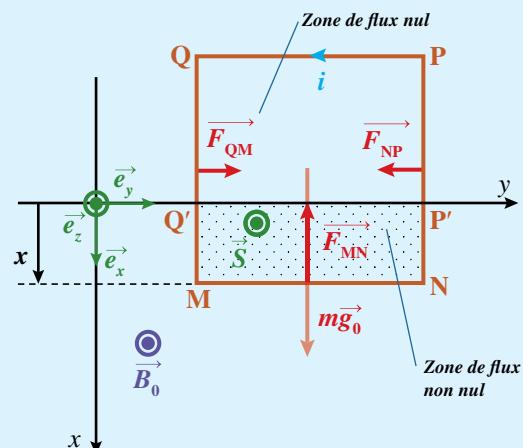
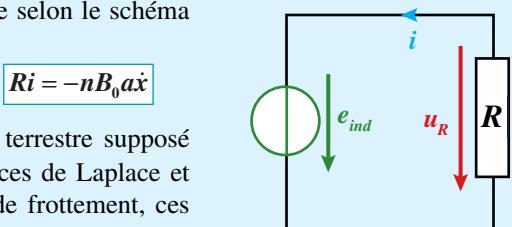
$$\vec{F}_{MN} = ni\bar{M}\bar{N} \wedge \bar{B}_0 = nia\vec{e}_y \wedge B_0 \vec{e}_z = niaB_0 \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_{PQ} = \vec{0} \quad (\text{pas de champ à ce niveau})$$

$$\vec{F}_{QM} = ni\bar{Q}\bar{M} \wedge \bar{B}_0 = nix\vec{e}_x \wedge B_0 \vec{e}_z = -nixB_0 \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_{NP} = ni\bar{N}\bar{P} \wedge \bar{B}_0 = ni(-x\vec{e}_x) \wedge B_0 \vec{e}_z = nixB_0 \vec{e}_y$$

Attention : i est négatif.



Bien comprendre

Il est absolument essentiel pour calculer les forces de Laplace sans erreur de signe, d'orienter les éléments de courant selon le sens positif choisi (par exemple QM est dans le sens de (Ox) et NP en sens contraire) et, simultanément, de conserver l'expression algébrique du courant. Si l'on cherche à mettre le sens réel du courant dans les équations (on sait ici que le courant est négatif, donc tourne en sens contraire du schéma) on risque des erreurs de signes.

On constate sans surprise, sachant que i est négatif, que les forces de Laplace sont de nature à minimiser le flux qui augmente, en tendant à diminuer la surface du cadre s'il était déformable et, dans le cas contraire, à freiner la descente du cadre dans le champ à travers une résultante verticale vers le haut.

On applique le théorème de la résultante cinétique au cadre dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\ddot{a} = \vec{F}_{MN} + \vec{F}_{QM} + \vec{F}_{NP} + \vec{F}_{PQ} + \vec{mg} + \vec{R}_{sup}$$

Qui conduit par projection sur (Ox) à l'équation mécanique : $m\ddot{x} = niaB_0 + mg_0$

$$\begin{cases} Ri = -naxB_0 \\ m\ddot{x} = niaB_0 + mg_0 \end{cases}$$

Bien comprendre

On peut ici plus simplement remplacer i dans l'expression de la force de Laplace, dès le début, pour obtenir directement l'équation différentielle ci-dessous. On n'a volontairement pas fait ce remplacement dans cette résolution de façon à mettre en évidence le couplage électromécanique des équations et faire le parallèle avec la question suivante où ce couplage est plus complexe du fait de l'auto-induction.

L'élimination de i conduit à l'équation différentielle mécanique (« pure ») :

$$\ddot{x} + \frac{n^2 B_0^2 a^2}{mR} \dot{x} = g_0 \quad \text{soit :} \quad \ddot{\psi} + \frac{\nu}{\tau} = g_0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{n^2 B_0^2 a^2}$$

L'équation différentielle précédente est du second ordre en x mais du premier ordre en ψ , et la solution est $\psi = \dot{x} = A e^{-t/\tau} + \tau g_0$, soit, en tenant compte des conditions initiales ($\psi(t=0)=0$) :

$$\psi = \dot{x} = g_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{et :} \quad i = -\frac{naB_0}{R} \dot{x} = \frac{mg_0}{naB_0} (e^{-t/\tau} - 1)$$

Lorsque t tend vers l'infini, la vitesse tend vers la vitesse limite : $\psi_{\lim} = g_0 \tau = \frac{mRg_0}{n^2 B_0^2 a^2}$

En théorie cette vitesse est atteinte au bout d'un temps infini, en pratique au bout de quelques τ , le temps caractéristique du système, à condition que le cadre ne soit pas encore totalement dans la zone de champ. Si le cadre entre totalement dans le champ avant une durée de quelques τ , alors la vitesse limite n'est pas atteinte. Dans tous les cas le mouvement ultérieur est celui d'une chute libre, car les phénomènes d'induction, et donc les forces de Laplace, disparaissent, le flux devenant constant.

Bien comprendre

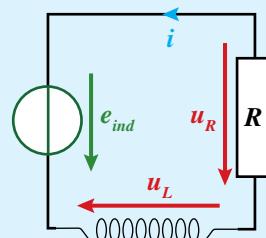
Si l'on conserve l'idée d'un circuit purement résistif, le courant induit cesse brutalement lorsque le cadre arrive entièrement dans le champ, et le mouvement ultérieur est une chute libre sans frottement. En réalité en raison de l'auto-induction, le courant ne cesse pas brutalement et un régime transitoire intervient entre la situation précédente et la chute libre. Notons par ailleurs qu'il est impossible de générer un champ magnétique qui s'annule de façon aussi brutale au passage de l'axe.

- 3 Le calcul de la f.e.m. d'induction due au déplacement reste valable, mais l'équation électrique n'est plus correcte si l'on tient compte de l'auto-induction dans le cadre. La loi des mailles appliquée au circuit équivalent ci-contre conduit à l'équation :

$$e_{ind} = -nB_0 a \dot{x} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

Le calcul des forces de Laplace reste valable (ici on n'a pas d'expression simple de i par l'équation électrique) :

$$\vec{F}_{MN} = niaB_0 \vec{e}_x \quad ; \quad \vec{F}_{QM} = -nixB_0 \vec{e}_y = -\vec{F}_{NP} \quad ; \quad \vec{F}_{PQ} = \vec{0}$$



Le théorème de la résultante cinétique conduit par projection sur (Ox) à la même expression que précédemment : $m\ddot{x} = niaB_0 + mg_0$

Soit le système couplé :

$$\begin{cases} -nB_0 a \dot{x} = Ri + L \frac{di}{dt} & (1) \text{ équation électrique} \\ m\ddot{x} = niaB_0 + mg_0 & (2) \text{ équation mécanique} \end{cases}$$

De (2) on tire l'expression de i : $i = \frac{m}{naB_0} (\ddot{x} - g_0)$ qui se dérive en : $\frac{di}{dt} = \frac{m}{naB_0} \ddot{x}$

Puis l'on remplace ces deux expressions dans (1) de façon à lever le couplage :

$$-nB_0a\dot{x} = R \frac{m}{naB_0}(\ddot{x} - g_0) + L \frac{m}{naB_0}\ddot{x}$$

Soit, en utilisant la vitesse et en écrivant l'équation sous une forme plus habituelle :

$$\ddot{\psi} + \frac{R}{L}\dot{\psi} + \frac{n^2B_0^2a^2}{Lm}\psi = \frac{R}{L}g_0$$

La solution de cette équation différentielle du second ordre en ψ est la somme d'une solution homogène (régime transitoire du second ordre) qui s'amortit et d'une solution particulière constante (voir chapitre 9 p. 137). La vitesse tend donc vers une valeur limite, dont on peut vérifier qu'elle est la même que dans le cas précédent. Là encore cette vitesse n'est pas atteinte si le cadre entre totalement dans le champ avant, car la validité de l'équation cesse lorsque le cadre est entièrement dans le champ. Après un nouveau régime transitoire d'annulation du courant, le cadre est en chute libre.

Le bilan de puissance s'effectue sur le système d'équations couplées, où l'on multiplie l'équation électrique par l'intensité et l'équation mécanique par la vitesse, puis l'on soustrait membre à membre :

$$\begin{cases} -naB_0\dot{x}i = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} & (1) \times i \\ m\ddot{x}\dot{x} = naB_0i\dot{x} + mg_0\dot{x} & (2) \times \dot{x} \end{cases} \quad \text{Soit :} \quad m\ddot{x}\dot{x} = -Ri^2 - Li\frac{di}{dt} + mg_0\dot{x}$$

D'où : $m\overline{g_0.\psi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\psi^2\right) + Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$ Finalement : $\mathcal{P}_{\text{pesanteur}} = \mathcal{P}_{\text{cinétique}} + \mathcal{P}_{EJ} + \mathcal{P}_{\text{magnétique}}$

La puissance motrice de la force de pesanteur (travail moteur du poids) se répartit entre la puissance cinétique (accélère le système), la puissance magnétique (énergie emmagasinée dans la bobine) et l'effet Joule (dissipation d'énergie dans la résistance sous forme de chaleur).

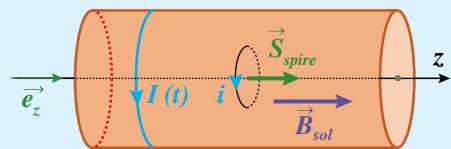
Bien comprendre

Lorsque les équations couplées sont simples et que le couplage se lève aisément par une proportionnalité entre vitesse et intensité, le bilan de puissance se fait plus rapidement à l'aide d'une équation découpée, par exemple en multipliant l'équation mécanique par la vitesse et en identifiant l'effet Joule dans le terme en ψ^2 (qui devient i^2 grâce à la proportionnalité). Mais lorsque le système est plus complexe comme ici, le bilan se fait en multipliant chaque équation par la valeur correspondante ($i \times$ l'équation électrique et $\psi \times$ l'équation mécanique) et en éliminant entre les deux, le terme de couplage, qui est naturellement la puissance de la force de Laplace, terme en $i\psi$ qui apparaît dans les deux équations. Il ne reste plus qu'à identifier les différents termes et à donner un sens physique à l'équation.

2 Induction mutuelle

→ énoncé p. 498

- 1 Le solénoïde crée un champ uniforme et variable dans le temps, dont la valeur algébrique est proportionnelle à l'intensité I , ce champ varie donc alternativement. Le circuit (spire), étant immobile et rigide, est traversé par un flux qui varie dans le temps, en raison de la variation du champ extérieur généré par le solénoïde. C'est un cas d'induction de Neumann, il apparaît un courant induit dans la spire, dont le champ va s'opposer aux variations du champ du solénoïde. Or ce dernier présentant des variations alternatives, il en sera de même du courant induit puisque, selon le cas, il faudra compenser une augmentation ou une diminution du flux.



Le flux du champ dans la spire à un instant t est égal à :

$$\phi(t) = \vec{B}_{sol} \cdot \vec{S}_{spire} = \mu_0 n I(t) \vec{e}_z \cdot \pi a^2 \vec{e}_z = \mu_0 n I(t) \pi a^2$$

Soit une f.e.m. induite, d'après la loi de Faraday, et avec les orientations définies ci-dessus :

$$e_{ind} = -\frac{d\phi(t)}{dt} = -\mu_0 n \pi a^2 \frac{dI(t)}{dt} \quad \text{avec : } I(t) = I_0 \sin(\omega t) \quad \text{d'où } e_{ind} = -\mu_0 n \pi a^2 I_0 \omega \cos(\omega t)$$

L'équation électrique sur la spire s'écrit :

$$e_{ind} = ri_{ind} \quad \text{d'où : } i_{ind} = -\frac{\mu_0 n \pi a^2 I_0 \omega}{r} \cos(\omega t)$$

Si l'on trace les sinusoïdes représentant les variations algébriques du courant inducteur et celles du courant induit on constate bien que, lorsque le premier augmente, le second est négatif créant un champ opposé au champ inducteur pour compenser son augmentation, tandis que lorsque le courant inducteur diminue le courant induit est positif créant un champ induit qui tend à compenser la diminution du champ inducteur, ce qui est conforme à la loi de Lenz.

Bien comprendre

Si l'on a procédé rigoureusement, il est évident que les résultats seront conformes à la loi de Lenz. Cependant, on commet facilement des erreurs de signes dans ce genre de problème, la vérification finale permet alors de les faire apparaître, si un comportement contraire à la loi de Lenz semble être observé. Inversement, on peut prévoir qualitativement le sens des grandeurs induites (f.e.m., intensité, champ) selon la loi de Lenz et vérifier que les résultats du calcul sont cohérents avec cette prévision.

- 2 Le solénoïde crée cette fois un champ uniforme et stationnaire. Par contre le circuit tourne dans ce champ, modifiant l'orientation de la surface et donc la valeur du flux au cours du temps, lequel va diminuer puis augmenter alternativement. C'est un cas d'induction de Lorentz, il apparaît un courant induit dans la bobine, dont le champ va s'opposer aux variations de ce flux, conduisant encore à des variations alternatives du courant induit.

Le flux du champ dans la spire à un instant t est égal à :

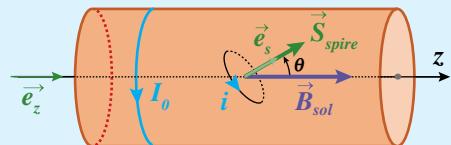
$$\phi(t) = \vec{B}_{sol} \cdot \vec{S}_{spire} = \mu_0 n I \vec{e}_z \cdot \pi a^2 \vec{e}_s(t) = \mu_0 n I \pi a^2 \cos(\theta(t))$$

avec $\theta(t) = \omega t$, imposé par la rotation de la spire autour de l'axe Δ et toujours $n = N/L$

Soit une f.e.m. induite, d'après la loi de Faraday, et avec les orientations définies ci-dessus :

$$e_{ind} = -\frac{d\phi(t)}{dt} = -\mu_0 n I \pi a^2 \frac{d \cos(\theta(t))}{dt} = \mu_0 n I \pi a^2 \omega \sin(\omega t)$$

Or : $e_{ind} = ri_{ind}$ d'où : $i_{ind} = \frac{\mu_0 n \pi a^2 I_0 \omega}{r} \sin(\omega t)$



On vérifie toujours la loi de Lenz, initialement le flux est maximal ($\theta = 0$) il diminue sur le premier $1/4$ de tour, le courant induit est alors positif, car il doit compenser la baisse du flux par un champ induit dans le même sens que le champ inducteur. On peut raisonner de même sur la suite du mouvement.

- 3 Le premier dispositif correspond au principe du transformateur : en adaptant les dimensions et le nombre de spires des circuits, on obtient dans le secondaire (spire) un courant induit de même fréquence que le courant inducteur du primaire (solenoid), mais dont la valeur efficace sera plus grande ou plus faible. Bien que généralement les rôles soient inverses (inducteur tournant, induit fixe) le second dispositif est celui d'un alternateur, où le stator est le solénoïde et dans lequel le mouvement du rotor (ici la spire) génère un courant induit dans le rotor à une fréquence identique à celle de la rotation. On a ici négligé le phénomène d'auto-induction dans la spire. De même, on a supposé que le courant du solénoïde était maintenu sans perturbation due à l'induction mutuelle de la spire sur le solénoïde, ce qui, avec une bobine de petite dimension devant celles du solénoïde, est légitime.

3 Pince ampèremétrique

→ énoncé p. 499

- 1 Le courant dans le fil est variable et produit un champ non stationnaire, dont le flux à travers le circuit du tore varie dans le temps. C'est un phénomène d'induction de Neumann, il apparaît une f.e.m. induite dans le bobinage, qui, puisqu'il constitue un circuit fermé, génère un courant induit. En raison de l'influence mutuelle, il se produit d'abord un régime transitoire, qui, en présence des résistances des circuits, s'amortit rapidement. **Le régime sinusoïdal forcé est un régime permanent** (non stationnaire) qui perdure seul au-delà du transitoire.

Tous les plans contenant l'axe (Oz) (\vec{e}_z, \vec{e}_r) sont des plans de symétries des distributions de courant (fil et tore), comme on le voit aisément sur le schéma. Or le champ magnétique est antisymétrique, donc dans un plan de symétrie, il est orthogonal à ce plan. **Le champ du tore et celui du fil (et par conséquent la résultante des deux) sont donc nécessairement orthoradiaux en tout point de l'espace.**

Le solénoïde torique est fermé et « bloque » les lignes de champs à l'intérieur, aucune ligne ne peut traverser une distribution de courant. On peut imaginer un solénoïde infini (champ extérieur nul) dont on aurait refermé l'une sur l'autre les deux extrémités.

- 2 **N. B. :** Dans ce qui suit, pour faciliter la compréhension, on sépare les calculs des flux des champs de chaque distribution de courant. Étant donné cependant que ces champs sont colinéaires et dépendent des mêmes variables, on pourrait plus rapidement les traiter en un seul calcul, à partir de la somme des deux champs. Par ailleurs sur le schéma, l'échelle n'est pas respectée concernant la position de l'axe (Oz).

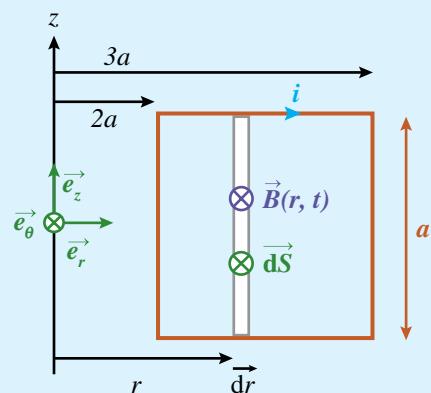
Le champ ici n'est pas uniforme sur une spire (ni celui du fil, ni celui de tore), on doit donc calculer le flux à l'aide d'une intégrale. On exprime d'abord le flux élémentaire sur une surface de largeur dr et de longueur a d'une spire. Le champ est uniforme sur cette surface, puisqu'il ne dépend que de r :

$$d\phi_{fil \rightarrow spire}(t) = \vec{B}_{fil}(r, t) \cdot d\vec{S}_{spire} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta \cdot dr \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 a I(t)}{2\pi r} dr$$

Le flux du champ du fil à travers toute la spire vaut donc :

$$\phi_{fil \rightarrow spire}(t) = \int_{spire} d\phi_{fil \rightarrow spire}(t) = \int_{2a}^{3a} \frac{\mu_0 a I(t)}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 a I(t)}{2\pi} \int_{2a}^{3a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 a I(t)}{2\pi} [\ln r]_{2a}^{3a} = \frac{\mu_0 a I(t)}{2\pi} \ln \frac{3}{2}$$

$$\phi_{fil \rightarrow tore}(t) = N \phi_{fil \rightarrow spire}(t) = \frac{\mu_0 a N I(t)}{2\pi} \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$



Bien comprendre

Dans l'intégrale précédente, on intègre sur la position r , or le courant ne dépend que du temps et, à t donné, ne dépend pas de la position, donc ne dépend pas de r . Du point de vue de l'intégrale d'espace, il est donc constant, ce qui permet de le sortir de l'intégrale. On pourrait aussi choisir un élément de surface $dS = dr dz$ et calculer l'intégrale double qui donne évidemment le même résultat :

$$\phi_{fil \rightarrow spire}(t) = \iint_{spire} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S} = \iint_{spire} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dz \int_{2a}^{3a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} [z]_{-a/2}^{a/2} [\ln r]_{2a}^{3a} = \frac{\mu_0 a I(t)}{2\pi} \ln \frac{3}{2}$$

Un calcul comparable permet d'obtenir le flux du champ du tore sur lui-même (flux propre) :

$$d\phi_{tore \rightarrow spire}(t) = \vec{B}_{tore}(r, t) \cdot d\vec{S}_{spire} = \frac{\mu_0 Ni(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta \cdot dr \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 a Ni(t)}{2\pi r} dr$$

$$\phi_{tore \rightarrow spire}(t) = \int_{spire} d\phi_{tore \rightarrow spire}(t) = \int_{2a}^{3a} \frac{\mu_0 a N i(t)}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 a N i(t)}{2\pi} \int_{2a}^{3a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 a N i(t)}{2\pi} [\ln r]_{2a}^{3a} = \frac{\mu_0 a N i(t)}{2\pi} \ln \frac{3}{2}$$

$$\phi_{tore \rightarrow tore}(t) = N \phi_{tore \rightarrow spire}(t) = \frac{\mu_0 a N^2 i(t)}{2\pi} \ln \frac{3}{2}$$

Et : $\phi_{tot}(t) = \phi_{tore \rightarrow tore}(t) + \phi_{fil \rightarrow tore}(t) = \frac{\mu_0 a N (N i + I)}{2\pi} \ln \frac{3}{2}$

- ③ Les coefficients d'auto-induction et d'inductance mutuelle du bobinage torique vérifient :

$$\phi_{propre}(t) = \phi_{tore \rightarrow tore}(t) = L i(t) \quad \text{et} \quad \phi_{mutuel}(t) = \phi_{fil \rightarrow tore}(t) = M I(t)$$

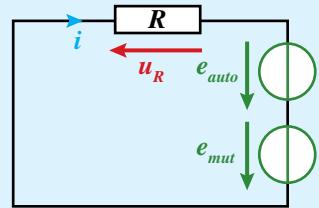
$$L = \frac{\mu_0 a N^2}{2\pi} \ln \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad M = \frac{\mu_0 a N}{2\pi} \ln \frac{3}{2}$$

La f.e.m. induite dans le tore vérifie la loi de Faraday :

$$e_{ind} = -\frac{d\phi_{tot}(t)}{dt} = -L \frac{di(t)}{dt} - M \frac{dI(t)}{dt} = e_{auto} + e_{mut}$$

Soit l'équation électrique dans le bobinage selon le schéma équivalent :

$$R i + L \frac{di(t)}{dt} + M \frac{dI(t)}{dt} = 0$$



- ④ En régime permanent sinusoïdal et en utilisant les notations complexes, l'équation électrique s'écrit :

$$\underline{i}(R + jL\omega) = -Mj\omega \underline{I} \quad \text{soit la fonction de transfert :} \quad \underline{H} = \frac{\underline{i}}{\underline{I}} = -\frac{Mj\omega}{R + jL\omega}$$

qui est celle d'un passe-haut, comme on peut le confirmer par le comportement asymptotique :

$$\text{Hautes fréquences : } |\underline{H}| \rightarrow \frac{M}{L} \quad \text{Basses fréquences : } |\underline{H}| \rightarrow 0$$

Ce dispositif ne sera utile que pour des fréquences suffisamment élevées (typiquement $\omega > \omega_c = \frac{R}{L}$)

- ⑤ Ce cas correspond à $R \ll L\omega$, la fonction de transfert est alors simple :

$$\underline{H} = -\frac{M}{L} \quad \text{qui permet de donner le rapport des intensités efficaces dans les circuits :}$$

$$\frac{i_{eff}}{I_{eff}} = \frac{i_m}{I_m} = |\underline{H}| = \frac{M}{L}$$

Soit, en utilisant les expressions obtenues pour les coefficients d'induction :

$$\frac{i_{eff}}{I_{eff}} = \frac{M}{L} = \frac{1}{N}$$

et avec 1000 spires :

$$i_{eff} = \frac{I_{eff}}{1000}$$

- ⑥ On dispose ainsi d'un système qui permet de lire directement (au facteur N près) l'intensité dans le fil sur l'ampèremètre du bobinage. Ce dispositif présente plusieurs avantages, en particulier pour mesurer des courants très intenses. Introduire un ampèremètre supposerait, d'une part de manipuler le câble électrique (dangereux), d'autre part d'interrompre la distribution du courant le temps de placer l'ampèremètre, lequel devrait par ailleurs être capable de mesurer des courants très élevés (centaines d'Ampères). Avec le tore que l'on place autour du fil, on évite de manipuler le fil et on mesure un courant beaucoup plus faible et donc moins dangereux et accessible sur un ampèremètre basique. Ce dispositif ne convient évidemment pas à la mesure d'un courant continu, pour lequel il n'y aura pas de régime permanent d'induction.

4 Haut-parleur

→ énoncé p. 499

- 1 On étudie le mouvement du dispositif (bobine + membrane) dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Outre les forces de pesanteur et les réactions qui se compensent, le système subit une force de rappel de la part des ressorts, une force de frottement fluide et une force de Laplace, car il est parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique. Les contraintes de guidage imposent donc un déplacement suivant l'axe horizontal (z'), les vecteurs cinématiques étant : $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$, les forces s'écrivent :

$$\vec{F}_{\text{élast}} = -kz\vec{e}_z ; \quad \vec{F}_{\text{frott}} = -f\vec{v} = -f\dot{z}\vec{e}_z$$

On calcule la résultante des forces de Laplace sur une spire circulaire de la bobine à un instant t quelconque, en tenant compte de la géométrie radiale du champ (voir schéma ci-dessus) :

$$\vec{F}_{\text{lap-1spire}}(t) = \int_{\text{spire}} [i(t)d\ell \wedge \vec{B}(M)] = \int_{\text{spire}} [i(t)d\ell \vec{e}_\theta(M) \wedge B\vec{e}_r(M)] = -i(t)B \int_{\text{spire}} [d\ell \vec{e}_z] = -i(t)B \left[\int_{\text{spire}} d\ell \right] \vec{e}_z$$

Dans ce calcul, d'une part la valeur de l'intensité et celle du champ sont indépendantes de la position de l'élément de courant, mais de surcroît, alors que les directions des vecteurs $d\ell$ et \vec{B} dépendent de l'élément de courant considéré, celle du produit vectoriel n'en dépend pas. Toutes ces grandeurs peuvent donc être sorties de l'intégrale qui se calcule alors aisément :

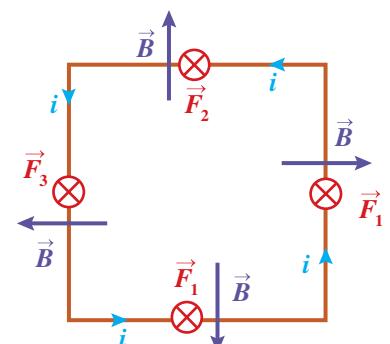
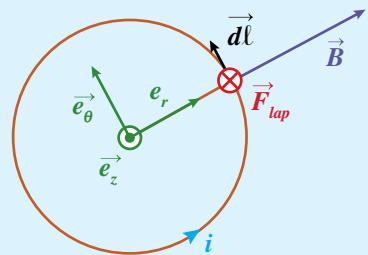
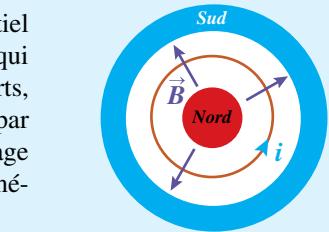
$$\vec{F}_{\text{lap-1spire}}(t) = -i(t)B \left[\int_{\text{spire}} d\ell \right] \vec{e}_z = -i(t)B\ell_{\text{spire}} \vec{e}_z = -i(t)B2\pi\rho \vec{e}_z$$

Toutes les spires subissent la même force, la force de Laplace sur la bobine est donc : $\vec{F}_{\text{lap}} = -Ni(t)B2\pi\rho \vec{e}_z$

Cette force a bien pour effet de mouvoir la bobine et donc la membrane le long de l'axe. Le mouvement de la membrane est lié aux variations des grandeurs électriques et génère un mouvement longitudinal de l'air, donc un son.

Bien comprendre

Bien qu'à ce niveau le calcul intégral, outil incontournable en physique, doive être maîtrisé, il est possible ici pour une première approche du système, de remplacer la spire circulaire par une spire carrée de côté a et de s'appuyer sur un calcul plus simple (sans intégrale). Pour obtenir une situation similaire, on place alors un champ dans le plan de la spire qui est orthogonal à chacun des côtés, puis on utilise les résultats de la force de Laplace sur chacune des 4 tiges rigides qui forment le cadre (attention ici la résultante n'est pas un couple comme dans le calcul du cadre p. 470-471). Les 4 forces sont égales, dirigées suivant l'axe (z,z') et de valeur $F = Bai(t)$. Soit une résultante $\vec{F}_{\text{lap-1spire}}(t) = 4ai(t)Be_z$ identique à celle obtenue ci-dessus en remplaçant $2\pi\rho$ le périmètre de la spire circulaire par $4a$ le périmètre de la spire carrée.



Le théorème de la résultante cinétique appliqué au dispositif s'écrit donc (où, conformément aux indications de l'énoncé, on n'évoque pas la résultante du poids et des réactions qui est nulle) :

$$m\ddot{z} = \vec{F}_{\text{lap}} + \vec{F}_{\text{élast}} + \vec{F}_{\text{frott}} \quad \text{soit par projection sur (Oz)} : m\ddot{z} = Ni2\pi\rho B - kz - f\dot{z}$$

Soit : $m\ddot{z} + f\dot{z} + kz = -Ni(t)2\pi\rho B$ l'équation mécanique

- ❷ Ici le vecteur surface de la bobine est colinéaire à $(z'z)$, il est donc orthogonal au champ (qui est radial), et cette situation perdure même lors du déplacement de la bobine dans le champ. Le flux à travers le bobinage est donc nul et le reste à tout instant. La loi de Faraday conduit ici à une f.e.m. induite nulle. Ce cas correspond à la situation évoquée au début du cours, pour lequel la loi de Faraday en termes de flux à travers le circuit est mise en défaut. On utilise donc l'analogie avec le rail de Laplace proposée par l'énoncé.

Bien comprendre

Il est cependant aisément de comprendre pourquoi il y a quand même une induction de Lorentz dans ce cas. Il suffit d'imaginer les charges mobiles (électrons) dans le bobinage. Lors du déplacement de la bobine, ces électrons sont animés d'une vitesse colinéaire à (Oz) dans un champ radial. Ils subissent donc une force de Lorentz orthoradiale, qui les entraîne dans un mouvement d'ensemble à l'intérieur du conducteur et qui se traduit par un courant induit à l'échelle macroscopique. L'équation plus générale de Maxwell-Faraday permet de démontrer ce résultat et de donner l'expression de la f.e.m. induite. Lorsque le rail de Laplace de longueur a se déplace dans le champ magnétique, les électrons subissent aussi une force de Lorentz qui se traduit par la f.e.m. induite, qui peut ici, par contre, être calculée comme dans le cours à l'aide de la loi de Faraday sur le flux. Notons que le même problème intervient dans l'étude du microphone, système tout à fait symétrique du haut-parleur.

On modélise la bobine par un rail de Laplace qui correspond aux mêmes orientations, c'est-à-dire avec une vitesse et un courant orientés comme dans le cours, mais un champ magnétique en sens contraire comme sur le schéma ci-contre (voir cours p. 492). La f.e.m. induite est donc :

$$e_{ind} = -(-B)a\dot{z} = Ba\dot{z}$$

Par analogie, que l'énoncé invite à faire, on en déduit en remplaçant a par la longueur du bobinage que la f.e.m. induite par le mouvement du solénoïde vaut (toujours avec des orientations choisies) :

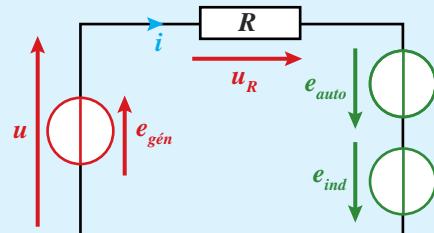
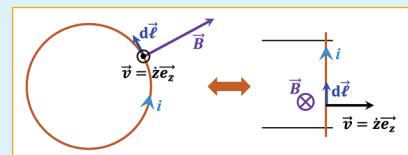
$$e_{ind} = BN2\pi\rho\dot{z}$$

On peut alors proposer le schéma électrique équivalent, qui tient compte de l'alimentation de la bobine, de sa résistance, de son auto-inductance (que l'on peut aussi schématiser par une bobine) et de la f.e.m. induite par le déplacement. La loi des mailles s'écrit :

$$e_{générateur} + e_{ind} + e_{auto} + u_R = 0$$

$$\text{Soit : } u(t) + N\dot{z}(t)2\pi\rho B - L\frac{di}{dt} - Ri(t) = 0$$

$$\text{d'où : } L\frac{di}{dt} + Ri(t) = u(t) + N\dot{z}(t)2\pi\rho B \quad \boxed{\text{l'équation électrique}}$$



On obtient donc sans surprise un système d'équations électromécaniques couplées entre le mouvement (mécanique) et le courant (électrique) :

$$\begin{cases} m\ddot{z} + f\dot{z} + kz = -(N2\pi\rho B)i \\ L\frac{di}{dt} + Ri = u + (N2\pi\rho B)\dot{z} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} m\ddot{z} + f\dot{z} + kz = -\beta i \\ L\frac{di}{dt} + Ri = u + \beta\dot{z} \end{cases}$$

avec $\beta = N2\pi\rho B$

- ❸ En régime sinusoïdal, on exprime le système précédent à l'aide des notations complexes pour u , i et z les grandeurs dépendant du temps, où la dérivation se traduit par une multiplication d'un facteur $j\omega$:

$$\begin{cases} (j\omega)^2 m\underline{z} + j\omega f\underline{z} + k\underline{z} = -\beta\underline{i} \\ jL\omega\underline{i} + R\underline{i} = \underline{u} + \beta j\omega\underline{z} \end{cases}$$

L'impédance complexe du circuit est égale au rapport de la tension d'alimentation et de l'intensité, on exprime donc le déplacement en fonction de l'intensité à l'aide de l'équation mécanique :

$$[(j\omega)^2 m + j\omega f + k] \underline{z} = -\beta \underline{i} \quad \text{d'où :} \quad \underline{z} = \frac{-\beta}{(j\omega)^2 m + j\omega f + k} \underline{i}$$

que l'on remplace dans l'équation électrique :

$$(jL\omega + R)\underline{i} = \underline{u} - \beta j\omega \frac{\beta}{(j\omega)^2 m + j\omega f + k} \underline{i} \quad \text{d'où :} \quad (jL\omega + R)\underline{i} + \frac{j\omega \beta^2}{(j\omega)^2 m + j\omega f + k} \underline{i} = \underline{u}$$

Puis : $\left[R + jL\omega + \frac{j\omega \beta^2}{(j\omega)^2 m + j\omega f + k} \right] \underline{i} = \underline{u}$

Or par définition $\underline{u} = Z \underline{i}$ donc l'impédance équivalente du circuit vaut :

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{j\omega(N2\pi\rho B)^2}{k + (j\omega)^2 m + j\omega f}$$

Où il est commode de laisser les termes sous cette forme, pour l'identification qui suit.

- 4 Le circuit proposé a pour impédance \underline{Z}' dans l'expression de laquelle on met en évidence l'impédance des composants associés en parallèle :

$$\underline{Z}' = R + jL\omega + \underline{Z}_{//} = R + jL\omega + \frac{1}{\underline{Y}_{//}} = R + jL\omega + \frac{1}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{jL_m\omega} + jC_m\omega}$$

Bien comprendre

Pour une association parallèle, il est toujours plus commode de calculer l'admittance, qui est la somme des admittances, chacune inverse de l'impédance de la branche. De même, il est ici pratique de ne pas réduire les fractions, pour une meilleure identification. Par ailleurs il est toujours possible d'introduire une notation pour un facteur encombrant (ici β), à condition de l'exprimer à la fin des questions, pour donner les résultats en fonction des grandeurs de l'énoncé.

Pour obtenir des expressions d'impédances comparables, on divise numérateur et dénominateur de la fraction dans l'impédance du haut-parleur par son numérateur :

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{\frac{(j\omega)^2 m + j\omega f + k}{j\omega \beta^2}} = R + jL\omega + \frac{1}{\frac{j\omega m}{\beta^2} + \frac{f}{\beta^2} + \frac{k}{j\omega \beta^2}}$$

Les deux impédances sont identiques sous réserve que les paramètres vérifient les relations suivantes :

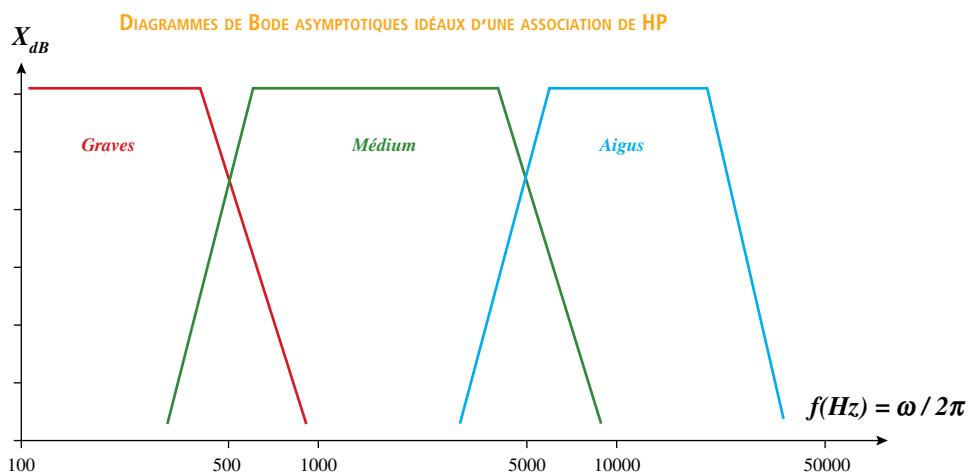
$$\frac{1}{R_m} = \frac{f}{\beta^2} \quad ; \quad jC_m\omega = \frac{j\omega m}{\beta^2} \quad ; \quad \frac{1}{jL_m\omega} = \frac{k}{j\omega \beta^2}$$

Soit : $R_m = \frac{\beta^2}{f} = \frac{(N2\pi\rho B)^2}{f}$ $C_m = \frac{m}{\beta^2} = \frac{m}{(N2\pi\rho B)^2}$ $L_m = \frac{\beta^2}{k} = \frac{(N2\pi\rho B)^2}{k}$

Ces dipôles électriques équivalents sont en fait liés aux grandeurs mécaniques d'où le terme de « motionnelle », qui signifie en mouvement.

Bien comprendre

- On note ici que le condensateur est lié à l'inertie, la bobine au ressort et la résistance à l'inverse du coefficient de frottement. Ces liens diffèrent des similitudes habituelles de l'analogie électrique/mécanique vue au chapitre 9, résultant d'une association en parallèle et non en série des dipôles.
- Par ailleurs on note que le déplacement peut aussi s'exprimer en fonction de la tension d'alimentation (on élimine l'intensité complexe des équations) sous une forme $z = Xu$ qui correspond à un comportement forcé du déplacement par la tension appliquée au système. Or la tension reproduit les variations du son capté ou enregistré. Le déplacement sera donc toujours de même fréquence que la tension appliquée et donc, le son émis de même fréquence que le son enregistré. Cependant, selon les valeurs de X , c'est-à-dire selon la fréquence, il peut être déphasé et son amplitude dépendra de la fréquence. On cherche en général à obtenir une fonction de transfert qui présente un « plat » dans une gamme de fréquence (passe bande large), ce qui permet d'obtenir une réponse identique dans toute la gamme et donc une restitution propre du son (qui est une superposition de sons sinusoïdaux d'après la décomposition de Fourier). Cette situation est relativement facile à obtenir sur une bande de fréquence pas trop large, c'est pourquoi pour une bonne qualité, on associera un HP pour les basses (fréquences de l'ordre de la centaine de Hertz), un HP pour les médium (de l'ordre du kHz) et un pour les aigus (de l'ordre de la dizaine de kHz), HP dont on peut représenter le comportement électromécanique comme sur le schéma ci-dessous.

**5 Disque dur**

→ énoncé p. 500

La tête, une petite bobine, se déplace rapidement au-dessus de la surface où sont inscrites les données, une succession de petits dipôles, qui chacun génère un champ magnétique. Lors du passage rapide de la tête, le flux varie dans la bobine (non alimentée en mode lecture) et un courant induit apparaît qui est de sens différent selon qu'on passe au-dessus d'un 1 ou d'un 0. L'analyse du signal fournit le codage. D'autres technologies plus performantes équipent maintenant les disques durs récents.

À méditer

Je ne trouve que des vérités, enseigne-moi la vérité.

ANDRÉ-MARIE AMPÈRE (1775-1836)

Description et évolution d'un système

La prévision de la composition finale de tout système physico-chimique est primordiale dans l'industrie chimique, que ce soit pour contrôler la composition d'une peinture ou pour améliorer le rendement de la synthèse d'un médicament. Cette prévision se fait en trois étapes : premièrement, décrire rigoureusement le système étudié dans son état initial; deuxièmement, comprendre quelle transformation chimique se produit et la modéliser par une ou plusieurs réactions chimiques; troisièmement, utiliser cette modélisation pour déterminer avec précision la composition du système à l'état final.

CADRE D'ÉTUDE : Un constituant physico-chimique est caractérisé par sa formule chimique, dans un état physique donné indiqué entre parenthèses. Exemples : $\text{H}_2\text{O}(\ell)$, $\text{Na}^+(\text{aq})$, $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$, $\text{Fe}(\text{s})$, etc. Dans ce manuel, lorsque l'état physique n'est pas indiqué, il s'agit d'une espèce dissoute en solution.

I États physiques et transformations de la matière

1. Les trois états de la matière

- La matière peut exister sous trois états principaux : solide, liquide ou gazeux.

	Solide	Liquide	Gaz
Caractéristiques macroscopiques	Forme propre	Oui	Non
	Volume propre	Oui	Oui

- Il existe plusieurs types de solides : les **solides cristallins** (structure ordonnée), les **solides amorphes** (structure désordonnée) et les **solides semi-cristallins** (juxtaposition de zones cristallines et de zones amorphes).
- Pour un même solide cristallin, il peut parfois exister plusieurs structures différentes. On dit que le solide possède plusieurs **variétés allotropiques** (par ex. : carbone diamant et carbone graphite).

2. Notion de phase

Définition

Une **phase** est une région de l'espace où les grandeurs indépendantes de la quantité de matière (température, concentration, etc.) varient de façon continue.

- Pour déterminer le nombre de phases présentes dans un système, on retiendra que :
 - Tous les gaz se mélangent pour former une unique phase gazeuse.
 - Des liquides peuvent former une seule phase (liquides miscibles) ou plusieurs phases (liquides non miscibles).
 - À l'état solide il y a en général autant de phases que de solides.

3. Les transformations de la matière

→ Transformations de la matière

- Transformation physique** : Les espèces chimiques ne sont pas modifiées. En revanche, certains paramètres physiques changent : la distance entre les différentes espèces, leur position, leur vitesse, etc.

Exemples : Un changement d'état, la compression d'un gaz, une élévation de température, etc.

■ **Transformation chimique** : Les espèces chimiques sont modifiées, il y a donc une modification des liaisons entre atomes ou ions.

Exemple : Dans l'eau, le chlorure d'hydrogène HCl(g) se transforme en ions H_3O^+ et en ions Cl^- .

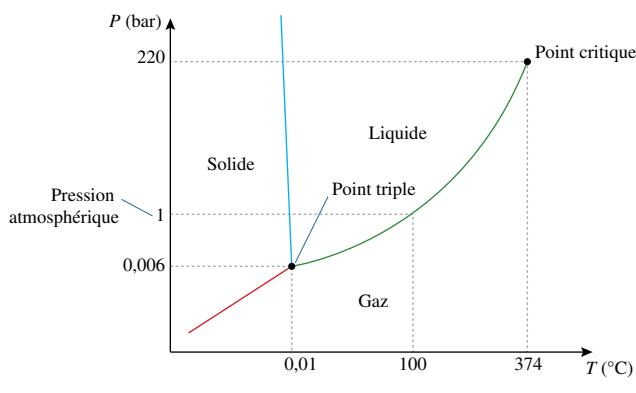
■ **Transformation nucléaire** : Il y a une modification des noyaux atomiques.

Exemple : Désintégration α de l'uranium par éjection d'un noyau d'hélium : ${}_{92}^{238}\text{U} \rightarrow {}_{90}^{234}\text{Th} + {}_2^4\text{He}$

► Les changements d'état du corps pur : utilisation des diagrammes d'état

■ Pour étudier les changements d'état d'un corps pur, on utilise souvent un **diagramme d'état (P, T)**, sur lequel on porte la pression en ordonnée et la température en abscisse et on indique pour chaque couple (P, T) l'état physique dans lequel se trouve le corps étudié (voir figure ci-dessous).

Diagramme d'état de l'eau liquide



■ Chaque **zone du plan** correspond à un état physique possible de la matière.

■ Chaque **portion de courbe** entre deux zones est l'ensemble des couples (P, T) pour lesquels les deux états peuvent coexister. C'est dans ces conditions de température et de pression que le changement d'état peut se produire.

■ L'intersection des trois courbes est le **point triple**. Il s'agit de l'unique couple (P, T) pour lequel les trois états de la matière coexistent. Pour l'eau : $T_t = 0,01^\circ\text{C}$; $P_t = 0,006 \text{ bar}$.

■ La courbe de vaporisation (frontière liquide – gaz) est limitée vers les hautes températures et fortes pressions par le **point critique**, au-delà duquel le changement d'état liquide-gaz n'est plus observé : il s'agit d'un état fluide intermédiaire entre l'état liquide et l'état gazeux appelé **état supercritique**.

II Description de l'état initial d'un système physico-chimique

1. Cas d'un système homogène gazeux

■ On utilise pour les gaz le **modèle du gaz parfait** qui repose sur les hypothèses suivantes : les constituants élémentaires du gaz (atomes ou molécules) sont considérés comme **ponctuels** et il n'y a **pas d'interaction** entre eux autre que les collisions.

Énoncé

Loi des gaz parfaits :

$$PV = n_{\text{tot}} RT$$

Pression totale dans le système (Pa ; 1 bar = 10^5 Pa) Température du système (K ; $T(\text{K}) = \theta (\text{°C}) + 273,15$)
 Volume de la phase gazeuse (m^3) Constante des gaz parfaits ($R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
 Quantité de matière totale de gaz dans le système (mol)

■ Dans un mélange de plusieurs gaz situés dans une enceinte de volume V , à la température T , on appelle **pression partielle P_i du gaz i** , la pression qu'aurait le gaz i s'il occupait tout seul le volume V à la même température T . On note n_i sa quantité de matière.

- Pour le gaz i appartenant à un **mélange gazeux**, la loi des gaz parfaits devient : $P_i V = n_i RT$
- En remaniant les deux équations précédentes, on obtient la **loi de Dalton** : $P_i = x_i P$

2. Cas d'un système homogène liquide ou solide

Selon la nature du système étudié (solide pur, liquide pur, mélange ou solution), on utilisera différents outils de description :

Nature du constituant i	Notation	Expression
Fraction molaire du constituant i	Constituant d'un mélange	x_i Fraction molaire du constituant i (sans dimension) $x_i = \frac{n_i}{\sum n_i} = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}}$ Quantité de matière du constituant i (mol) Quantité de matière totale (mol)
Concentration molaire du soluté i	Soluté	C_i Concentration molaire du soluté i (mol.L^{-1}) $C_i = \frac{n_i}{V}$ Quantité de matière du soluté i (mol) Volume de la solution (L)
Masse volumique de l'échantillon i	Liquide pur ou solution ou solide pur	ρ_i Masse volumique de l'échantillon i (kg.m^{-3}) $\rho_i = \frac{m_i}{V_i}$ Masse de l'échantillon i considéré (kg) Volume de l'échantillon i considéré (m^3)

III Modélisation de la transformation chimique

1. Transformation chimique et réaction chimique

- Une **transformation chimique** est modélisée par une **réaction chimique**, c'est-à-dire un modèle simple qui ne tient pas compte de tous les paramètres (déplacement des molécules à l'échelle microscopique, fréquence des collisions entre elles, etc.).
- À toute réaction chimique, on associe une **équation de réaction** qui comporte toujours, par défaut, un **signe égal** entre le membre de gauche contenant les réactifs et le membre de droite contenant les produits.



2. Transformation totale – transformation équilibrée

À l'issue d'une transformation chimique, le système atteint l'**état final**, état dans lequel les quantités de matière des réactifs et produits encore présents n'évoluent plus. Il existe deux types d'état final :

- L'un, au moins, des réactifs a **entièrement disparu** ; la transformation est dite **totale**. Dans ce cas, on peut remplacer le signe égal de l'équation de réaction par une **simple flèche** (\rightarrow).
- **Réactifs et produits coexistent** ; la transformation est dite **équilibrée**. Dans ce cas, on peut remplacer le signe égal de l'équation de réaction par une **double flèche** (\rightleftharpoons).

3. Activité chimique

Définition

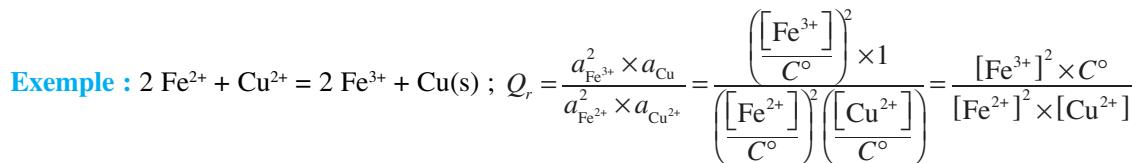
L'**activité chimique** d'un constituant physico-chimique i , notée a_i , est une grandeur sans dimension caractéristique du comportement de i dans un système physico-chimique. L'expression de l'activité chimique a_i d'un constituant i dépend de sa nature.

Nature du constituant i	Expression de a_i	Commentaires
Constituant d'un mélange liquide	$a_i = x_i$	x_i est la fraction molaire de i dans le mélange.
Soluté (supposé infiniment dilué)	$a_i = \frac{C_i}{C^\circ}$	C_i est la concentration molaire de i en solution. C° est la concentration standard : $C^\circ = 1 \text{ mol.L}^{-1}$
Gaz parfait dans un mélange de gaz parfaits	$a_i = \frac{P_i}{P^\circ}$	P_i est la pression partielle de i dans le mélange gazeux. P° est la pression standard : $P^\circ = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.
Solvant, liquide pur, solide pur	$a_i = 1$	Un solvant, toujours en large excès, a un comportement voisin de celui du constituant correspondant pur.

4. Quotient de réaction Q_r et constante d'équilibre K

- Soit une réaction chimique à laquelle on associe l'équation de réaction suivante : $0 = \sum_i v_i A_i$. Les A_i sont les espèces chimiques intervenant dans l'équation de réaction, d'activité a_i , et les v_i sont les nombres stœchiométriques algébriques ($v_i < 0$ pour un réactif, $v_i > 0$ pour un produit). On définit le **quotient de réaction Q_r** , sans dimension, par l'expression suivante :

$$Q_r = \prod_i a_i^{v_i} = \frac{\prod_{\substack{i \in \text{produits} \\ |v_i|}} a_i^{v_i}}{\prod_{i \in \text{réactifs}} a_i^{v_i}}$$



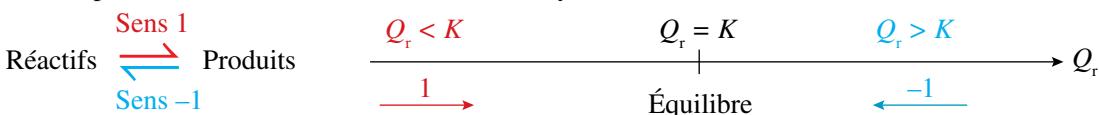
Énoncé

Relation de Guldberg et Waage (ou loi d'action des masses) :

Lorsque à l'issue d'une transformation chimique, un système physico-chimique atteint l'**équilibre**, le quotient de réaction prend une valeur, appelée **constante thermodynamique, notée K** , qui ne dépend que de la température T du système et qui s'exprime ainsi : $K = Q_{r,\text{éq}} = \prod_i a_{i,\text{éq}}^{v_i}$

→ Évolution spontanée d'un système physico-chimique

Les grandeurs Q_r et K permettent de prévoir l'évolution d'un système physico-chimique. Celui-ci évolue de façon à atteindre l'équilibre, c'est-à-dire de façon que Q_r tende vers K . On utilise souvent le schéma ci-dessous pour visualiser le sens d'évolution d'un système.



→ Transformations quantitatives, limitées ou très peu déplacées

- Utiliser la valeur numérique de K pour déterminer la nature d'une transformation chimique peut s'avérer très utile dans la résolution des exercices (*voir point méthode p. 516*), on peut retenir le résultat ci-dessous.

Résultat

Si $K < 10^{-4}$, alors la **transformation** est **très peu déplacée** et si $K > 10^4$, alors la **transformation** est **quantitative**.

- Il faut toutefois être très prudent car les limites 10^{-4} et 10^4 peuvent être mises en défaut (*voir exercice n° 4 p. 519*).

IV Détermination de l'état final

1. Construction du tableau d'avancement

- Contrairement à ce qui a été vu au lycée, l'**avancement molaire** (exprimé en mol) est noté ξ et non x .
- On peut exprimer, à tout instant t , la quantité de matière $n_i(t)$ d'un constituant quelconque i d'un système siège d'une transformation chimique d'avancement molaire ξ par l'expression : $n_i(t) = n_i(0) + v_i \xi(t)$.

Exemple : Transformation chimique **quantitative** qui a lieu lors de la synthèse de l'ammoniac à partir de diazote (n_0 mol) et de dihydrogène ($2n_0$ mol).

	N ₂ (g)	+	3 H ₂ (g)	→	2 NH ₃ (g)	Avancement (en mol)
État initial (E.I.)	n_0		$2n_0$		0	0
Instant t	$n_0 - \xi$		$2n_0 - 3\xi$		2ξ	ξ
État final (E.F.)	$\frac{n_0}{3}$		$\varepsilon \rightarrow 0$		$\frac{4n_0}{3}$	$\xi_f = \xi_{\max} = \frac{2n_0}{3}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hypothèse 1 : N}_2 \text{ est limitant} \Rightarrow n_0 - \xi_{\max} = 0 \Rightarrow \xi_{\max} = n_0 \\ \text{Hypothèse 2 : H}_2 \text{ est limitant} \Rightarrow 2n_0 - 3\xi_{\max} = 0 \Rightarrow \xi_{\max} = \frac{2n_0}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \xi_{\max} = \frac{2n_0}{3}$$

À l'état final, il ne reste qu'une quantité infime ε de dihydrogène, c'est le **réactif limitant**.

- Pour les réactions en solution, il est plus commode d'utiliser une grandeur homogène à une concentration molaire : l'**avancement volumique x** . Attention, ceci n'est possible que si le volume V du système est constant. L'**avancement volumique x** est défini par $x = \frac{\xi}{V}$ et s'exprime donc en mol.L⁻¹.

Exemple : Transformation chimique **équilibrée** qui a lieu lors de la mise en solution de l'acide acétique dans l'eau.

	CH ₃ COOH	+	H ₂ O (l)	↔	CH ₃ COO ⁻	+ H ₃ O ⁺	Avancement (en mol.L ⁻¹)
État initial (E.I.)	C ₀		-		0	0	0
Instant t	C ₀ - x		-		x	x	x
État final (E.F.)	C ₀ - $x_{\text{éq}}$		-		$x_{\text{éq}}$	$x_{\text{éq}}$	$x_{\text{éq}}$

2. Détermination de l'état final

POINT MÉTHODE

Déterminer la composition finale d'un système physico-chimique

- Déterminer la composition du système à l'état initial.
- Choisir la grandeur pertinente à utiliser dans le tableau d'avancement : **avancement molaire** ou **avancement volumique**.
- Remplir les deux premières lignes du tableau d'avancement (état initial et instant i).
- Établir la nature **quantitative, limitée** ou **très peu déplacée** de la transformation, soit en suivant les instructions de l'énoncé, soit en analysant la valeur de la constante d'équilibre.
- Pour la troisième ligne, trois cas se présentent :

Cas 1 : Transformation très peu déplacée $\xi_f \rightarrow 0$	<ul style="list-style-type: none"> • Remplir la troisième ligne en faisant tendre l'avancement ξ vers ε aussi petit que possible.
Cas 2 : Transformation limitée $\xi_f = \xi_{\text{eq}}$	<ul style="list-style-type: none"> • Remplir la troisième ligne du tableau en remplaçant ξ par ξ_{eq}. • Déterminer littéralement l'expression de K à l'aide des éléments de la dernière ligne du tableau. • On obtient ainsi une équation à une seule inconnue, l'avancement à l'équilibre ξ_{eq}, que l'on peut résoudre à la main ou à la calculatrice.
Cas 3 : Transformation quantitative $\xi_f = \xi_{\text{max}}$	<ul style="list-style-type: none"> • Identifier le réactif limitant et déterminer l'avancement maximal ξ_{max}. • Compléter la dernière ligne du tableau.

→ voir exercice n° 2 p. 518

Questions de cours

- Les différents états de la matière. Les différentes transformations de la matière. Exemples.
- La loi des gaz parfaits et la loi de Dalton. Définir tous les paramètres, donner leur unité. Retrouver la loi de Dalton par le calcul. Énoncer les hypothèses du modèle du gaz parfait.
- Quels sont les différents outils de description d'un système homogène (définitions, unités) ?
- Activité chimique d'un constituant physico-chimique : définition et différentes expressions selon la nature du constituant considéré.
- La relation de Guldberg et Waage. Application à la prévision du sens d'une transformation chimique.

Erreurs à éviter

- Pour une espèce pure, cela n'a pas de sens de parler de concentration ou de fraction molaire. On utilise en général la masse volumique pour calculer une quantité de matière.
- Pour éviter les erreurs d'unités lors des calculs de masse volumique, il faut retenir par cœur : $\rho_{\text{eau}} = 1 \text{ kg.L}^{-1} = 1 \text{ g.mL}^{-1}$.
- Le volume doit être en m^3 dans la loi des gaz parfaits.
- Lorsqu'on effectue la détermination de l'état final d'une transformation équilibrée, il ne faut surtout pas injecter directement les quantités de matière dans K , mais il faut utiliser les activités.
- Ne pas confondre x_i (fraction molaire) et x (avancement volumique).

Quelques « trucs » utiles

- Dans l'expression de Q_r ou de K , grandeurs sans dimension, C° et P° sont indispensables à l'homogénéité. Cependant, il est usuel d'omettre les C° pour alléger les écritures.
- Des réactifs, introduits initialement en proportions stœchiométriques, restent en proportions stœchiométriques tout au long de la transformation.

Méthode pour résoudre une transformation en phase gazeuse

- ➔ Ajouter une colonne au tableau d'avancement indiquant la quantité totale de gaz dans le système.
- ➔ Exprimer K en fonction des pressions partielles et de P° .
- ➔ Utiliser la loi de Dalton ($P_i = x_i P$) pour exprimer K en fonction des x_i , de P et P° .
- ➔ Utiliser la relation $x_i = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}}$ pour exprimer K en fonction des n_i , de P , de n_{tot} et de P° .
- ➔ Remplacer les n_i par leur expression en fonction de ξ_f (voir tableau d'avancement).
- ➔ Résoudre l'équation pour déterminer ξ_f .

1 Sens d'évolution d'une réaction de précipitation ★

→ corrigé p. 520

Un système contenant du chlorure de plomb $\text{PbCl}_2(s)$, des ions plomb Pb^{2+} , des ions chlorure Cl^- et de l'eau peut être le siège de la réaction d'équation : $\text{PbCl}_2(s) \rightleftharpoons \text{Pb}^{2+} + 2\text{Cl}^-$ (1).

La constante d'équilibre associée à l'équation de cette réaction vaut $K = 1,0 \cdot 10^{-6}$.

On introduit $n = 0,50$ mol de chlorure de plomb solide dans un volume $V = 1,0$ L d'eau distillée et on agite longuement, une partie du solide ne se dissout pas.

- ① Lister tous les constituants physico-chimiques du système. Combien y a-t-il de phases à l'état final ?
- ② Déterminer l'activité initiale des différents constituants du système puis donner la valeur du quotient de réaction initial de la réaction (1).
- ③ En déduire comment évolue le système. Donner la composition qualitative du système à l'état final.
- ④ Construire le tableau d'avancement de la réaction puis vérifier que $[\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}} = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

On prélève un volume $V_0 = 20$ mL de la solution limpide S qui surnage et on y introduit un volume $V = 1,0$ mL d'une solution de chlorure de potassium ($\text{K}^+ + \text{Cl}^-$) de concentration $C = 2,0 \text{ mol.L}^{-1}$; on observe la formation d'un précipité.

- ⑤ Déterminer la composition initiale de ce nouveau système.
- ⑥ Quelle est la nature du précipité formé ? Comment expliquer sa formation ?

2 Synthèse du dihydrogène (d'après Agro-Véto BCPST 2007) ★

→ corrigé p. 520

Un mode de préparation industrielle du dihydrogène met en jeu la réaction en phase gazeuse d'équation suivante : $\text{CH}_4(g) + \text{H}_2\text{O}(g) \rightleftharpoons \text{CO}(g) + 3\text{H}_2(g)$. La réaction se déroule sous une pression totale constante, $P = 10$ bar. La température du système demeure constante et telle que la constante d'équilibre K est égale à 15. Initialement, le système contient 10 moles de méthane et 10 moles d'eau.

- ① Exprimer la constante thermodynamique K en fonction de la quantité de matière de chacun des constituants, de la pression totale P et de P° .
- ② Déterminer la composition du système à l'équilibre.

3 Déphosphatation des effluents aqueux (d'après E3A PC 2013) ★★

→ corrigé p. 522

On s'intéresse à la déphosphatation d'un effluent aqueux contenant $C' = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ de phosphore à l'aide de chlorure de fer $\text{FeCl}_3(s)$. La variation de volume engendrée par l'ajout de chlorure de fer est supposée négligeable. Le pH de l'effluent est maintenu égal à 8,5. On admet qu'à ce pH, le phosphore est sous forme d'ions hydrogénophosphate HPO_4^{2-} . L'opération permet d'abaisser la concentration en ions hydrogénophosphate à $C'' = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

L'ajout d'ions Fe^{3+} apportés par le chlorure de fer en milieu légèrement basique provoque la précipitation du phosphate de fer $\text{FePO}_4(s)$ selon l'équation de réaction : $\text{Fe}^{3+} + \text{HPO}_4^{2-} + \text{HO}^- \rightarrow \text{FePO}_4(s) + \text{H}_2\text{O}(l)$
On admet que la transformation correspondante est totale.

- ① Un premier essai de déphosphatation consiste à ajouter 10,0 g de chlorure de fer $\text{FeCl}_3(s)$ à 1,0 m³ d'effluent. Quelle est la concentration en ions hydrogénophosphate HPO_4^{2-} à l'état final ?
- ② Déterminer à présent la masse minimale de chlorure de fer $\text{FeCl}_3(s)$ à ajouter à 1,0 m³ d'effluent pour obtenir une concentration finale en ions hydrogénophosphate égale à $C'' = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

Données :

– Masses molaires : $M_{\text{Cl}} = 35,5 \text{ g.mol}^{-1}$; $M_{\text{Fe}} = 55,8 \text{ g.mol}^{-1}$

– Pour le calcul de la concentration en ions hydroxyde : $[\text{HO}^-] = 10^{(\text{pH}-14)} \text{ mol.L}^{-1}$

4 Hydrolyse de l'ATP (d'après Agro-Véto BCPST 2013) ★★

→ corrigé p. 523

L'adénosine triphosphate (ATP^{4-}) est essentielle dans le métabolisme humain, elle fournit, par hydrolyse, l'énergie nécessaire aux réactions chimiques du métabolisme.

On considère la réaction d'hydrolyse de l'ATP⁴⁻ en ADP³⁻ : $\text{ATP}^{4-} + \text{H}_2\text{O}(\ell) = \text{ADP}^{3-} + \text{HPO}_4^{2-} + \text{H}^+$ de constante d'équilibre $K = 2,21 \cdot 10^{-2}$, à $T = 298$ K. On étudie cette réaction en milieu tamponné à pH = 7,0 (la concentration en ions H⁺ est constante au cours de l'expérience, égale à $1,0 \cdot 10^{-7}$ mol.L⁻¹). Les concentrations molaires initiales C_i des réactifs sont données dans le tableau ci-après.

	ADP ³⁻	ATP ⁴⁻	HPO ₄ ²⁻	H ₂ PO ₄ ⁻
$C_i (\text{mol.L}^{-1})$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$2,25 \cdot 10^{-3}$	$0,60 \cdot 10^{-3}$	$0,95 \cdot 10^{-3}$

- En l'absence de toute considération biologique, quelle évolution spontanée peut-on prévoir ?
- Calculer les concentrations à l'équilibre de chacune des espèces participant à la réaction donnée. Que peut-on en conclure ?
- Cette situation était-elle prévisible en ne tenant compte que de la valeur de K ?

Résolution de problème : Comment ajuster le pH de l'eau d'une piscine ?

→ corrigé p. 524

DOCUMENT 1 : Qualité de l'eau selon le pH

Extrait de www.piscine-clic.com

pH

Eau basique : Trouble, corrosive, irritante pour les yeux et les muqueuses, provoque des précipitations de sel, entarre les filtres et les parois, milieu favorable au calcaire, au développement d'algues et annule l'action des produits.

pH idéal : 7,2 – 7,4

Eau acide : Corrode les parois en béton, les revêtements en ciment et les objets métalliques, irrite les yeux et les muqueuses, est favorable à l'apparition d'algues et annule l'action des produits.

DOCUMENT 2 : Extrait de notice de piscine hors-sol

Comment corriger le pH de ma piscine ?

■ Pour baisser le pH

On utilise du pH-moins[®] : Acide chlorhydrique HCl dilué, vendu en bouteille portant la mention « 23% en masse d'acide chlorhydrique ». Son espèce active est H₃O⁺.

■ Pour augmenter le pH

On utilise du pH-plus[®] : Carbonate de sodium Na₂CO₃, vendu sous forme de poudre. Son espèce active est l'ion CO₃²⁻.

À la fin du mois de juin, un particulier souhaite vérifier la qualité de l'eau de sa piscine de 50 m³ pour que ses amis puissent l'utiliser sans crainte pendant l'été. À l'aide d'indicateurs colorés achetés dans son magasin de bricolage préféré, il mesure le pH de l'eau de sa piscine et obtient pH = 6.

Problème à résoudre : À l'aide des documents et de vos connaissances personnelles, aidez ce particulier à rendre sa piscine à nouveau propre à l'utilisation.

Données :

- Masses molaires : $M(\text{Na}_2\text{CO}_3) = 106 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{HCl}) = 36,5 \text{ g.mol}^{-1}$
- Densité de l'acide chlorhydrique commercial : $d = 1,1$
- Réaction de l'ion carbonate en milieu acide : $\text{CO}_3^{2-} + 2 \text{H}_3\text{O}^+ \rightarrow \text{H}_2\text{CO}_3 + 2 \text{H}_2\text{O}(\ell)$ de constante $K = 10^{16,7}$
- En terminale S, le pH a été défini de la façon suivante : $\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+]$. Ainsi, plus la concentration en ions H₃O⁺ d'une solution est élevée, plus le pH est faible et plus la solution est dite acide.

Conseil

L'exercice n° 2 est une illustration du point méthode du cours. La démarche est structurée à l'aide de symboles ↗. Il est conseillé de s'en inspirer dans les exercices similaires.

1 Sens d'évolution d'une réaction de précipitation

→ énoncé p. 518

- Constituants physico-chimiques du système : $\text{H}_2\text{O}(\ell)$, $\text{PbCl}_2(\text{s})$, $\text{Pb}^{2+}(\text{aq})$, $\text{Cl}^-(\text{aq})$. Il y a **deux phases** à l'état final : une phase liquide (solution aqueuse contenant $\text{Pb}^{2+}(\text{aq})$ et $\text{Cl}^-(\text{aq})$) et une phase solide ($\text{PbCl}_2(\text{s})$).
- Initialement, la dissolution n'a pas commencé, donc $a(\text{Pb}^{2+}) = a(\text{Cl}^-) = 0$ et, pour le solide présent, $a(\text{PbCl}_2) = 1$. Pour l'eau présente, qui est le solvant, $a(\text{H}_2\text{O}) = 1$. Or, $Q_r = \frac{a(\text{Pb}^{2+})a(\text{Cl}^-)^2}{a(\text{PbCl}_2)}$, on en déduit donc que $Q_{r,i} = 0$
- $Q_{r,i} < K$ donc le système évolue dans le **sens 1** de la transformation et le solide se dissout partiellement jusqu'à atteindre l'équilibre. Composition qualitative finale du système : eau (solvant), $\text{PbCl}_2(\text{s})$, Pb^{2+} et Cl^- . Les ions sont obtenus en faible quantité car $K < 10^{-4}$.

4

	$\text{PbCl}_2(\text{s})$	\rightleftharpoons	Pb^{2+}	+	2Cl^-
E.I.	Excès		0		0
E.F.	Excès		$x_{\text{éq}}$		$2x_{\text{éq}}$

$$K = \left[\text{Pb}^{2+} \right]_{\text{éq}} \left[\text{Cl}^- \right]_{\text{éq}}^2 = 4x_{\text{éq}}^3, \text{ on en déduit que } x_{\text{éq}} = \sqrt[3]{\frac{K}{4}} = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

- Attention à ne pas oublier les dilutions :

$$\left[\text{Pb}^{2+} \right] = \frac{x_{\text{éq}} V_0}{V_0 + V}; \left[\text{K}^+ \right] = \frac{CV}{V_0 + V}; \left[\text{Cl}^- \right] = \frac{2x_{\text{éq}} V_0 + CV}{V_0 + V}$$

$$[\text{Pb}^{2+}] = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}; [\text{K}^+] = 9,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}; [\text{Cl}^-] = 1,1 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

- On peut calculer la valeur du nouveau quotient de réaction :

$$Q'_r = \left[\text{Pb}^{2+} \right] \left[\text{Cl}^- \right]^2 = (6,0 \cdot 10^{-3})(1,1 \cdot 10^{-1})^2 = 6,9 \cdot 10^{-5} \Rightarrow Q'_r > K. \text{ Le système évolue donc dans le sens -1 de la transformation, c'est-à-dire le sens de formation du précipité de PbCl}_2.$$

2 Synthèse du dihydrogène

→ énoncé p. 518

- Il faut d'abord exprimer K en fonction des activités puis des pressions partielles puisqu'il s'agit de gaz :

$$K = \frac{a_{\text{H}_2,\text{éq}}^3 a_{\text{CO},\text{éq}}}{a_{\text{CH}_4,\text{éq}} a_{\text{H}_2\text{O},\text{éq}}} = \frac{P_{\text{H}_2,\text{éq}}^3 P_{\text{CO},\text{éq}}}{P_{\text{CH}_4,\text{éq}} P_{\text{H}_2\text{O},\text{éq}} P^{\circ 2}}$$

On utilise ensuite la relation de Dalton : $P_i = x_i P$ et la relation $x_i = \frac{n_i}{n_{\text{tot,gaz,éq}}}$ pour exprimer K en fonction des quantités de matière et de la pression totale :

$$K = \frac{n_{\text{H}_2,\text{éq}}^3 n_{\text{CO},\text{éq}} P^2}{n_{\text{CH}_4,\text{éq}} n_{\text{H}_2\text{O},\text{éq}}^2 n_{\text{tot,gaz,éq}}^2 P^{\circ 2}} \text{ avec } n_{\text{tot,gaz,éq}} = n_{\text{H}_2,\text{éq}} + n_{\text{CO},\text{éq}} + n_{\text{CH}_4,\text{éq}} + n_{\text{H}_2\text{O},\text{éq}}$$

② Pour déterminer la composition du système à l'équilibre, il faut utiliser le **point méthode** p. 516 :

→ **Déterminer la composition du système à l'état initial.**

Ici, elle est donnée dans l'énoncé : $n(\text{CH}_4)_0 = n(\text{H}_2\text{O})_0 = 10 \text{ mol}$, toutes les espèces sont gazeuses et $P = 10 \text{ bar}$.

→ **Choisir la grandeur pertinente à utiliser dans le tableau d'avancement : avancement molaire ou avancement volumique.**

Pour une transformation en phase gazeuse, on utilise l'avancement molaire ξ (mol).

→ **Remplir les deux premières lignes du tableau d'avancement (état initial et instant t).**

	$\text{CH}_4(\text{g})$	+	$\text{H}_2\text{O}(\text{g})$	=	$\text{CO}(\text{g})$	+	$3 \text{ H}_2(\text{g})$	$n_{\text{tot,gaz}}$
E.I.	10		10		0		0	20
Instant t	$10 - \xi$		$10 - \xi$		ξ		3ξ	$20 + 2\xi$

→ **Établir la nature quantitative, limitée ou très peu déplacée de la transformation, soit en suivant les instructions de l'énoncé, soit en analysant la valeur de la constante d'équilibre.**

$K = 15$, la transformation est donc limitée. Il s'agit du cas 2 du **point méthode**.

→ **Remplir la troisième ligne du tableau en remplaçant ξ par ξ_{eq} .**

	$\text{CH}_4(\text{g})$	+	$\text{H}_2\text{O}(\text{g})$	=	$\text{CO}(\text{g})$	+	$3 \text{ H}_2(\text{g})$	$n_{\text{tot,gaz}}$
E.I.	10		10		0		0	20
Instant t	$10 - \xi$		$10 - \xi$		ξ		3ξ	$20 + 2\xi$
E.F.	$10 - \xi_{\text{eq}}$		$10 - \xi_{\text{eq}}$		ξ_{eq}		$3\xi_{\text{eq}}$	$20 + 2\xi_{\text{eq}}$

→ **Déterminer littéralement l'expression de K à l'aide des éléments de la dernière ligne du tableau.**

$$K = \frac{\xi_{\text{eq}}(3\xi_{\text{eq}})^3 P^2}{(10 - \xi_{\text{eq}})^2 (20 + 2\xi_{\text{eq}})^2 P^{\circ 2}} = \frac{27\xi_{\text{eq}}^4 P^2}{4(10 - \xi_{\text{eq}})^2 (10 + \xi_{\text{eq}})^2 P^{\circ 2}} = \frac{27\xi_{\text{eq}}^4 P^2}{4(10^2 - \xi_{\text{eq}}^2)^2 P^{\circ 2}}$$

→ **On obtient ainsi une équation à une seule inconnue, l'avancement à l'équilibre ξ_{eq} , que l'on peut résoudre à la main ou à la calculatrice.**

Équation obtenue : $2\sqrt{K}(10^2 - \xi_{\text{eq}}^2)P^\circ - \sqrt{27}\xi_{\text{eq}}^2 P = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{K}10^2 = (2\sqrt{K}P^\circ + \sqrt{27}P)\xi_{\text{eq}}^2$ tous les termes étant positifs dans l'expression de K , on en peut prendre la racine carrée.

Résolution : $\xi_{\text{eq}} = 10 \left(\frac{2\sqrt{K}P^\circ}{2\sqrt{K}P^\circ + \sqrt{27}P} \right)^{\frac{1}{2}}$

$\boxed{\xi_{\text{eq}} = 3,6 \text{ mol}}$

3 Déphosphatation des effluents aqueux

1 • Composition initiale :

- $[\text{HPO}_4^{2-}] = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ (HPO_4^{2-} est la seule espèce phosphorée) ;
- $[\text{H}^+] = 10^{-8,5} \text{ mol.L}^{-1}$, d'après la valeur du pH, donc $[\text{HO}^-] = 10^{-5,5} \text{ mol.L}^{-1}$ (cette valeur ne change pas au cours de la réaction car le pH est maintenu constant) ;

$$-\left[\text{Fe}^{3+}\right] = \frac{n(\text{Fe}^{3+})}{V} = \frac{n(\text{FeCl}_3)}{V} = \frac{m(\text{FeCl}_3)}{M(\text{FeCl}_3)V} = 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

• Pour cette transformation en solution, on choisit d'utiliser l'avancement volumique x (mol.L^{-1}).

• Tableau d'avancement :

	Fe^{3+}	+	HPO_4^{2-}	+	HO^-	\rightarrow	$\text{FePO}_4(\text{s})$	+	$\text{H}_2\text{O}(\ell)$
E.I.	$6,2 \cdot 10^{-5}$		$1,6 \cdot 10^{-4}$		$10^{-5,5}$		—		Excès
Instant t	$6,2 \cdot 10^{-5} - x$		$1,6 \cdot 10^{-4} - x$		$10^{-5,5}$		—		Excès
E.F. (réaction totale)	$6,2 \cdot 10^{-5} - x_{\max}$		$1,6 \cdot 10^{-4} - x_{\max}$		$10^{-5,5}$		—		Excès

La transformation est totale donc $x_{\max} = 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$

On en déduit que $[\text{HPO}_4^{2-}] = 9,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$

La concentration en HPO_4^{2-} vaut donc $9,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

Bien comprendre

Parler de la concentration de $\text{FePO}_4(\text{s})$ n'a pas de sens, c'est pourquoi elle n'est pas introduite dans le tableau d'avancement.

2 On note C_0 la concentration molaire initiale en Fe^{3+} .

	Fe^{3+}	+	HPO_4^{2-}	+	HO^-	\rightarrow	$\text{FePO}_4(\text{s})$	+	$\text{H}_2\text{O}(\ell)$
E.I.	C_0		$1,6 \cdot 10^{-4}$		$10^{-5,5}$		—		Excès
Instant t	$C_0 - x$		$1,6 \cdot 10^{-4} - x$		$10^{-5,5}$		—		Excès
E.F. (réaction totale)	$C_0 - x_{\max}$		$1,6 \cdot 10^{-4} - x_{\max}$		$10^{-5,5}$		—		Excès

On connaît la concentration finale : $[\text{HPO}_4^{2-}]_f = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$, donc $x_{\max} = 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

Comme Fe^{3+} est le réactif limitant, $C_0 - x_{\max} = 0$, on en déduit que $C_0 = 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

On cherche alors la masse de FeCl_3 à introduire :

$$m(\text{FeCl}_3) = n(\text{FeCl}_3) \times M(\text{FeCl}_3) = n(\text{Fe}^{3+})_0 \times M(\text{FeCl}_3) = C_0 \times V \times M(\text{FeCl}_3)$$

$m(\text{FeCl}_3) = 20,8 \text{ g}$

4 Hydrolyse de l'ATP

→ énoncé p. 519

- 1 Les espèces intervenant dans la réaction sont toutes des espèces dissoutes. Leur activité s'exprime donc comme le rapport de leur concentration et de C° que l'on omettra.

$$Q_{r,i} = \frac{[\text{ADP}^{3-}]_0 [\text{HPO}_4^{2-}]_0 [\text{H}^+]_0}{[\text{ATP}^{4-}]_0} = \frac{2,5 \cdot 10^{-4} \times 0,60 \cdot 10^{-3} \times 1,0 \cdot 10^{-7}}{2,25 \cdot 10^{-3}} = 6,7 \cdot 10^{-12} \Rightarrow Q_r \ll K$$

On a donc évolution dans le sens 1, c'est-à-dire hydrolyse de l'ATP.

- 2 Tableau d'avancement, en mol.L⁻¹, de cette réaction :

	ATP^{4-}	+	$\text{H}_2\text{O}(l)$	→	ADP^{3-}	+	HPO_4^{2-}	+	H^+
E.I.	$2,25 \cdot 10^{-3}$		–		$2,5 \cdot 10^{-4}$		$0,60 \cdot 10^{-3}$		$1,0 \cdot 10^{-7}$
Instant t	$2,25 \cdot 10^{-3} - x$		–		$2,5 \cdot 10^{-4} + x$		$0,60 \cdot 10^{-3} + x$		$1,0 \cdot 10^{-7}$
E.F. (équilibre)	$2,25 \cdot 10^{-3} - x_{\text{éq}}$		–		$2,5 \cdot 10^{-4} + x_{\text{éq}}$		$0,60 \cdot 10^{-3} + x_{\text{éq}}$		$1,0 \cdot 10^{-7}$

$$\text{À l'équilibre : } Q_{r,\text{éq}} = K = 2,21 \cdot 10^{-2} = \frac{(2,5 \cdot 10^{-4} + x_{\text{éq}})(0,60 \cdot 10^{-3} + x_{\text{éq}})1,0 \cdot 10^{-7}}{(2,25 \cdot 10^{-3} - x_{\text{éq}})}$$

En réarrangeant, on obtient un polynôme du second degré : $1,0 \cdot 10^{-7}x_{\text{éq}}^2 + 2,21 \cdot 10^{-2}x_{\text{éq}} - 4,97 \cdot 10^{-5} = 0$

Résolution numérique : $\Delta = 4,88 \cdot 10^{-4}$ et $x_{\text{éq}} = 2,25 \cdot 10^{-3}$ mol.L⁻¹ (seule solution positive).

On remarque que $x_{\text{éq}} = x_{\text{max}}$ et donc que [ATP⁴⁻] est négligeable. On en conclut que la transformation est quasi totale car il y a disparition quasi complète du réactif limitant.

Calculons à présent toutes les concentrations à l'équilibre :

$$[\text{ADP}^{3-}] = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}; [\text{HPO}_4^{2-}] = 2,85 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}; [\text{H}^+] = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$$

Calculons précisément [ATP⁴⁻] à l'aide de la constante d'équilibre :

$$K = 2,21 \cdot 10^{-2} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \times 2,85 \cdot 10^{-3} \times 1,0 \cdot 10^{-7}}{[\text{ATP}^{4-}]}; \text{ on en déduit que } [\text{ATP}^{4-}] = 3,2 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$$

- 3 L'examen de la valeur de K ($K \ll 1$) nous aurait plutôt incités à dire que la transformation était très peu déplacée. Ici, c'est le fait que le pH soit fixé qui provoque une telle évolution. La concentration en H⁺ étant maintenue à une très petite valeur (10⁻⁷ mol.L⁻¹) au cours de la réaction, Q_r est maintenu à une valeur inférieure à K tout au long de la transformation et le système évolue totalement dans le sens 1.

Bien comprendre

L'hypothèse $K > 10^4$ (respectivement $K < 10^{-4}$) assure la plupart du temps que $Q_r \ll K$ (respectivement $Q_r \gg K$). Cependant parfois, les concentrations initiales sont telles que l'on ne rentre pas dans ces cas.

Résolution de problème : Comment ajuster le pH de l'eau d'une piscine ?

→ énoncé p. 519

D'après le document 1, le pH d'une piscine doit être compris entre 7,2 et 7,4. Comme celui de notre piscine vaut 6, il doit être remonté. Pour cela, d'après le document 2, il faut utiliser du *pH*-plus, c'est-à-dire une base, le carbonate de sodium.

Nous devons à présent calculer la quantité de carbonate de sodium à ajouter.

La transformation qui permet de remonter le pH est celle qui consomme les ions H_3O^+ par les ions CO_3^{2-} :



La valeur de la constante nous indique que la transformation est quantitative. On peut alors remplir le tableau d'avancement, sachant que l'on cherche la quantité initiale de carbonate de sodium n_0 à introduire dans une piscine de volume $V = 50 \text{ m}^3$, pour que la concentration en ions H_3O^+ passe de 10^{-6} à $10^{-7,3}$ mol.L⁻¹, par exemple.

	CO_3^{2-}	+	$2 \text{H}_3\text{O}^+$	\rightarrow	H_2CO_3	+	$2 \text{H}_2\text{O}(\ell)$
E.I.	$\frac{n_0}{V}$		10^{-6}		0		Excès
Instant t	$\frac{n_0}{V} - x$		$10^{-6} - 2x$		x		Excès
E.F.	$\frac{n_0}{V} - x_{\max}$		$10^{-6} - 2x_{\max}$		x_{\max}		Excès
	= 0		= $10^{-7,3}$		= $4,7 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$		Excès

On déduit du tableau que :

$$x_{\max} = \frac{1}{2} (10^{-6} - 10^{-7,3}) = 4,7 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$$

La réaction étant quantitative, il suffit donc que :

$$\frac{n_0}{V} = 4,7 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}, \text{ et } n_0 = x_{\max} \times V = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

On peut alors calculer la masse m_0 que le particulier doit ajouter :

$$m_0 = n_0 \times M \Rightarrow \boxed{m_0 = 2,5 \text{ g}}$$

Cinétique chimique

La cinétique chimique est le domaine de la chimie qui étudie la vitesse des réactions chimiques, c'est-à-dire l'évolution des quantités de matière des réactifs et des produits au cours du temps. Déterminer l'expression des facteurs dont dépend la vitesse permet de pouvoir la modifier pour des raisons industrielles par exemple.

OUTILS MATHÉMATIQUES

■ Équation cartésienne d'une droite

Toute droite non verticale possède une équation cartésienne dans le repère du plan du type : $y = ax + b$. On appelle a le coefficient directeur (ou pente) de cette droite et b l'ordonnée à l'origine. Si la droite est horizontale, $a = 0$ sinon $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ où $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ sont deux points différents de la droite. Quant à b , il s'agit de l'ordonnée du point d'abscisse nulle de la droite.

■ Équations différentielles d'ordre 1

- La fonction y est solution de l'équation différentielle : $y' + ky = 0$ où k est un réel non nul si et seulement si $y(t) = y(0)e^{-kt}$.
- Soit l'équation $y' + ky^2 = 0$ où k réel. Si la fonction y est solution de cette équation et ne s'annule pas, on a $\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(0)} = kt$

■ Dérivée et tangente à la courbe

Soit (\mathcal{C}) la courbe d'équation : $y = f(x)$ où f dérivable. Le coefficient directeur (ou pente) de la tangente au point $M(x, f(x))$ de (\mathcal{C}) est $f'(x)$.

CADRE D'ÉTUDE : Dans ce chapitre toutes les réactions étudiées sont considérées comme totales et ont lieu à volume constant. Le système étudié est homogène (constitué d'une seule phase liquide ou gazeuse) et fermé (pas d'échange de matière avec le milieu extérieur).

I Suivi cinétique d'une réaction

Effectuer le suivi cinétique d'une réaction c'est déterminer expérimentalement la composition du système à différents instants.

➔ Méthode chimique de suivi



Exemple : Pour suivre la cinétique de la réaction $H_2O_2 + 2 I^- + 2 H^+ \rightarrow 2 H_2O + I_2$ on peut réaliser des prélèvements à différents instants et doser I_2 par $S_2O_3^{2-}$.

1. Baisser la température (trempe), diluer, mettre un inhibiteur, etc.

► Méthodes physiques de suivi

Mesurer une grandeur physique que l'on peut facilement relier à la concentration (voir tableau ci-dessous).

	Grandeur mesurée	Méthode physique	Loi
Espèce colorée	Absorbance A	Spectrophotométrie visible	Loi de Beer-Lambert : $A = \sum_i \varepsilon_i \times \ell \times C_i$ <p style="text-align: center;">Absorbance de la solution (sans unité) Coefficient d'extinction molaire ($\text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$) Concentration de l'espèce chimique colorée i ($\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) Longueur de la cuve (cm)</p>
Espèce gazeuse	Pression totale P	Manométrie	Loi des gaz parfaits : $P = \sum_i n_i \frac{RT}{V} = RT \sum_i C_i$ <p style="text-align: center;">Pression totale (Pa) Quantité de matière du gaz i (mol) Constante des gaz parfaits ($R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) Concentration molaire du gaz i ($\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$) Température (K) Volume (m^3)</p>
Espèce ionique	Conductivité σ	Conductimétrie	Loi de Kohlrausch : $\sigma = \sum_i \lambda_i^0 \times C_i$ <p style="text-align: center;">Conductivité de la solution ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$) Conductivité molaire de l'ion i ($\text{mol}^{-1} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$) Concentration molaire de l'ion i ($\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$)</p>

POINT MÉTHODE

Exprimer une concentration en fonction d'une grandeur physique

- Identifier la ou les espèce(s) chimique(s) dont la concentration est reliée à la grandeur physique mesurée (espèce colorée, ions, gaz, etc.).
- Établir un tableau d'avancement en ajoutant à droite une colonne où est donnée l'expression de la grandeur mesurée aux dates $t = 0$, t et $t \rightarrow \infty$. Pour cela, on utilisera une des lois du tableau précédent.
- Relier la concentration d'une espèce chimique à la grandeur physique mesurée.

→ exercice n° 3 p. 535

Exemples :

Réaction	Méthode de suivi
$2 \text{I}^- + \text{S}_2\text{O}_8^{2-} \rightarrow \text{I}_2 + 2 \text{SO}_4^{2-}$	I_2 est colorée ⇒ suivi spectrophotométrique.
$2 \text{NO(g)} + \text{O}_2(\text{g}) \rightarrow 2 \text{NO}_2(\text{g})$	Les réactifs et les produits sont gazeux ⇒ suivi manométrique.
$\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5 + \text{OH}^- \rightarrow \text{CH}_3\text{COO}^- + \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	OH^- et CH_3COO^- sont des ions ⇒ suivi conductimétrique.

Ces méthodes physiques ne nécessitent pas de faire des prélevements, la mesure est donc faite directement dans le milieu réactionnel.

II | Vitesse de réaction

Soit n_i la quantité de matière du constituant A_i et $[A_i]$ sa concentration molaire dans un système de volume V constant. On notera C_0 sa concentration initiale.

1. Définitions

Définitions

- La **vitesse de disparition** $\nu_{d,Ai}$ du constituant A_i est définie par : $\nu_{d,Ai} = -\frac{d[A_i]}{dt}$
- La **vitesse de formation** $\nu_{f,Ai}$ du constituant A_i est définie par : $\nu_{f,Ai} = +\frac{d[A_i]}{dt}$
- La **vitesse de réaction** ν s'exprime aussi en fonction des concentrations des réactifs ou produits et de leur coefficient stoechiométrique v_i :

$$\nu = \frac{1}{v_i} \frac{d[A_i]}{dt}$$

- Les vitesses de formation, de disparition et de réaction s'expriment usuellement en **mol.L⁻¹.s⁻¹**.

Exemple : $3 \text{ ClO}^- \rightarrow \text{ClO}_3^- + 2 \text{ Cl}^-$

$$\nu_{f,\text{ClO}_3^-} = +\frac{d[\text{ClO}_3^-]}{dt}; \quad \nu_{f,\text{Cl}^-} = +\frac{d[\text{Cl}^-]}{dt}; \quad \nu_{d,\text{ClO}^-} = -\frac{d[\text{ClO}^-]}{dt}$$

$$\nu = -\frac{1}{3} + \frac{d[\text{ClO}^-]}{dt} = +\frac{d[\text{ClO}_3^-]}{dt} = +\frac{1}{2} \frac{d[\text{Cl}^-]}{dt}$$

2. Facteurs influençant ν

Rappel de lycée

La vitesse de réaction augmente avec la **concentration des réactifs**, la **température** et la présence d'un **catalyseur**.

→ Influence de la concentration des réactifs à température constante

- L'expérience a montré que, pour un certain nombre de réactions chimiques effectuées à température constante, la vitesse de réaction ν pouvait être reliée de façon simple aux concentrations des réactifs.

Énoncé

- Une réaction admet un ordre si sa vitesse ν se met sous la forme :

$$\nu = k \prod_i [A_i]^{\alpha_i}$$

Vitesse de la réaction (mol.L⁻¹.s⁻¹)

i

Constante cinétique
(unité dépendant de l'ordre
de la réaction)

Ordre partiel par rapport au composé A_i

Concentration des réactifs
et éventuellement du catalyseur (mol.L⁻¹)

- Cette relation est appelée **loi de vitesse**.
- $\sum_i \alpha_i$ est l'ordre global de la réaction.

Exemple 1 : $\text{CO(g)} + \text{Cl}_2\text{(g)} \rightarrow \text{COCl}_2\text{(g)}$; $v = k [\text{CO}][\text{Cl}_2]^{3/2}$

L'ordre partiel par rapport à CO est 1 et celui par rapport à Cl₂ est 3/2. L'ordre global de la réaction est 5/2.

Exemple 2 : $\text{H}_2\text{(g)} + \text{Br}_2\text{(g)} \rightarrow 2 \text{HBr(g)}$; $v = k \frac{[\text{H}_2][\text{Br}_2]^{1/2}}{1 + k' \frac{[\text{HBr}]}{[\text{Br}_2]}}$. Cette réaction n'admet pas d'ordre.

Remarques :

- La détermination d'un ordre ne peut se faire qu'expérimentalement.
- Pour une réaction admettant un ordre, plus la concentration en réactif est élevée, plus la vitesse de la réaction est importante.

→ Influence de la température

Définition

L'énergie d'activation d'une réaction, notée E_a , représente l'énergie minimale que l'on doit fournir aux réactifs pour que la réaction chimique s'effectue. C'est une barrière d'énergie, elle s'exprime en J.mol^{-1} .

Énoncé

Loi d'Arrhenius :

La constante cinétique k est caractéristique de la réaction et dépend de la température selon la loi d'Arrhenius :

$$k = A \cdot \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$$

Facteur de fréquence (même unité que k)

Constante cinétique (unité variable
selon l'ordre de la réaction)

Énergie d'activation (J.mol^{-1})

Température (K)

Constante des gaz parfaits ($8,314 \text{ J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$)

A et E_a sont des constantes indépendantes de la température.

POINT MÉTHODE

Déterminer une énergie d'activation E_a

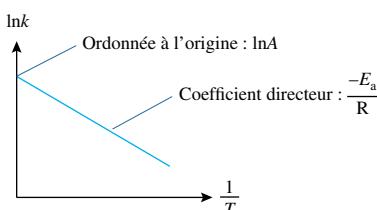
■ **Données de l'exercice :** Plusieurs couples de valeurs (T, k) obtenus expérimentalement.

■ **Méthode :**

- Prendre le logarithme de chaque membre de la loi d'Arrhenius : $\ln k = \ln A - \frac{E_a}{RT}$.
- Tracer la courbe $\ln k = f\left(\frac{1}{T}\right)$ à l'aide des données expérimentales fournies.
- Déterminer les valeurs de A et de E_a grâce aux valeurs du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.

$$\ln k = -\frac{E_a}{R} \times \frac{1}{T} + \ln A$$

$$y = m \times x + p$$



→ exercice n° 1 p. 535

→ Influence du catalyseur

Le **catalyseur** augmente la vitesse d'une réaction thermodynamiquement possible sans apparaître dans l'équation bilan. Le catalyseur est généralement introduit en faibles proportions par rapport au réactif limitant (environ 10% en quantité). Le catalyseur ne modifie pas l'avancement final.

III Cinétiques avec un seul réactif : $a A \rightarrow b B$

- Cette partie vise à établir les lois cinétiques (expression reliant la concentration [A] au temps) pour des réactions d'ordre 0, 1 et 2.
- On considérera qu'à $t = 0$, $[A] = C_0$ et $[B] = 0$.

Rappel de lycée

Le **temps de demi-réaction** noté $t_{1/2}$ est le temps au bout duquel la moitié du réactif limitant a été consommée.

1. Loi cinétique

→ Réaction d'ordre 1

- Unité de k :** Réaliser une analyse dimensionnelle.

$$\nu = k[A] \Rightarrow \text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1} = [k] \times \text{mol.L}^{-1} \Rightarrow [k] = \text{s}^{-1}$$

- Équation différentielle :**

$$\nu = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^1$$

Définition de ν

Loi de vitesse

- Résolution de l'équation différentielle :**

– Séparation des variables : Isoler les termes en $[A]$ et ceux en t .

$$\frac{d[A]}{[A]} = -akdt$$

– Intégration : Intégrer chaque membre de l'équation entre l'instant initial $t = 0$ et un instant t quelconque.

$$\int_0^t \frac{d[A]}{[A]} = \int_0^t -akdt \Leftrightarrow [\ln[A]]_0^t = -ak[t]_0^t \Leftrightarrow \boxed{\ln[A] - \ln C_0 = -ak \times t}$$

- Expression de $t_{1/2}$:** Lorsque $t = t_{1/2}$, $[A] = \frac{C_0}{2} \Rightarrow \ln \frac{C_0}{2} = -akt_{1/2} + \ln C_0 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{ak}$

ORDRE 1	Loi cinétique	Expression de $t_{1/2}$	Unité de k
Cas général :	$\ln[A] = -akt + \ln C_0$	$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{ak}$; $t_{1/2}$ est indépendant de C_0	
Exemple : $2 \text{N}_2\text{O}_5(\text{g}) \rightarrow 4 \text{NO}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g})$	$\ln[\text{N}_2\text{O}_5] = -2kt + \ln C_0$	$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{2k}$	s^{-1}

→ Réaction d'ordre 2

Par une démarche analogue, on obtient les résultats ci-dessous.

ORDRE 2	Loi cinétique	Expression de $t_{1/2}$	Unité de k
Cas général :	$\frac{1}{[A]} - \frac{1}{C_0} = akt$	$t_{1/2} = \frac{1}{akC_0}$; $t_{1/2}$ est inversement proportionnel à C_0	L.mol ⁻¹ .s ⁻¹
Exemple : $3 \text{ ClO}^- \rightarrow \text{ClO}_3^- + 2 \text{ Cl}^-$	$\frac{1}{[\text{ClO}^-]} - \frac{1}{C_0} = 3kt$	$t_{1/2} = \frac{1}{3kC_0}$	

→ Réaction d'ordre 0

Les réactions d'ordre 1 et 2 sont les plus fréquentes. Dans le cas (rare) d'une réaction d'ordre 0, une démarche analogue à celle effectuée pour une réaction d'ordre 1 donne les résultats ci-dessous.

ORDRE 0	Loi cinétique	Expression de $t_{1/2}$	Unité de k
Cas général :	$[A] = -akt + C_0$	$t_{1/2} = \frac{C_0}{2ak}$; $t_{1/2}$ est proportionnel à C_0	mol.L ⁻¹ .s ⁻¹

2. Détermination expérimentale de l'ordre d'une réaction

La méthode à utiliser pour établir une correspondance entre le tableau de valeurs et la loi de vitesse (afin de déterminer l'ordre de la réaction) dépend des données fournies.

→ Méthode intégrale

La méthode intégrale est adaptée lorsqu'on connaît [A] ou P ou A ou σ , etc. en fonction du temps.

POINT MÉTHODE

Déterminer l'ordre d'une réaction et la valeur de k avec la méthode intégrale

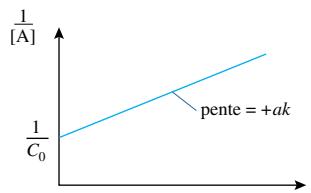
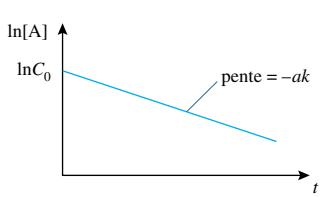
- Faire une hypothèse sur l'ordre de la réaction.
- Établir la loi cinétique sous la forme d'une fonction affine du temps.
- Relier [A] à la grandeur physique mesurée si [A] n'est pas directement donnée.
- Vérifier l'hypothèse :
 - Tracer la courbe $\ln[A] = f(t)$. S'il s'agit d'une droite, l'hypothèse ordre 1 est vérifiée.
 - Sinon tracer la courbe $1/[A] = f(t)$. S'il s'agit d'une droite, l'hypothèse ordre 2 est vérifiée.
 - Etc.

→ Ordre 1 : $\ln[A] = -ak \times t + \ln C_0$

$$\ln[A] = m \times t + p$$

→ Ordre 2 : $\frac{1}{[A]} = ak \times t + \frac{1}{C_0}$

$$\frac{1}{[A]} = m \times t + p$$



→ Déterminer la valeur de la constante de vitesse k à partir du coefficient directeur de la droite obtenue.

→ exercice n° 2 p. 535

→ Méthode des temps de demi-réaction

Le principe de cette méthode est similaire à celui de la méthode intégrale. Elle consiste à recommencer plusieurs fois l'expérience pour différentes valeurs de concentrations initiales C_0 en réactif et déterminer la valeur du temps de demi-réaction $t_{1/2}$. Il faut ensuite faire une hypothèse sur l'ordre de la réaction et exploiter l'expression du temps de demi-réaction sous forme d'une droite (*voir exercice n° 5 p. 536*).

→ Méthode différentielle

La méthode différentielle est adaptée lorsqu'on connaît la vitesse de réaction v en fonction de $[A]$.

POINT MÉTHODE

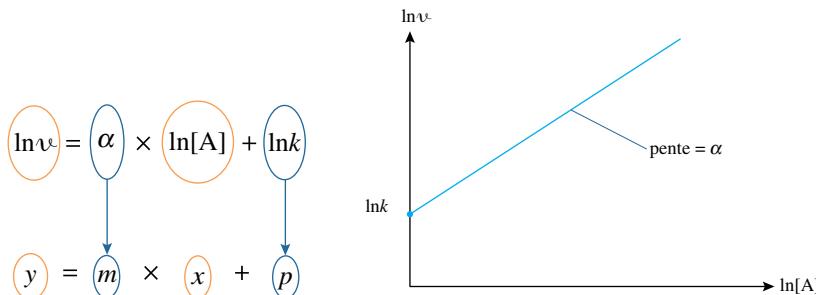
Déterminer l'ordre d'une réaction et la valeur de k avec la méthode différentielle

→ Prendre le logarithme de chaque membre de la loi de vitesse $v = k[A]^\alpha$:

$$\ln v = \alpha \ln [A] + \ln k$$

→ Tracer la courbe $\ln v = f(\ln [A])$. Si la courbe est une droite alors la réaction admet un ordre.

→ Déterminer l'ordre de la réaction à partir du coefficient directeur de la droite et la valeur de la constante de vitesse à partir de l'ordonnée à l'origine :



Remarques :

- La valeur de la vitesse de la réaction se détermine graphiquement en déterminant à différents instants la valeur du coefficient directeur de la tangente à la courbe $[A] = f(t)$.
- **Intérêt :** Il n'est pas nécessaire de postuler d'ordre.
- **Inconvénient :** La détermination des vitesses à l'aide du coefficient directeur est peu précise.

► Méthode des vitesses initiales

La méthode des vitesses initiales est similaire à la méthode différentielle. Elle consiste à recommencer plusieurs fois l'expérience pour différentes valeurs de concentrations initiales C_0 en réactif et à déterminer graphiquement la valeur de la vitesse initiale v_0 associée. On écrit alors $\ln v_0 = \alpha_0 \ln C_0 + \ln k$ et le tracé de $\ln v_0 = f(\ln C_0)$ permet de déterminer l'ordre initial α_0 de la réaction (voir exercice n° 4 p. 535).

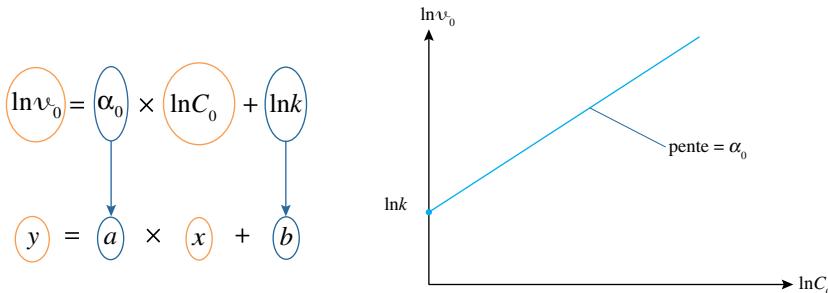
POINT MÉTHODE

Déterminer l'ordre d'une réaction et la valeur de k avec la méthode des vitesses initiales

- Écrire la loi de vitesse à $t = 0$ ($v_0 = kC_0^{\alpha_0}$) et prendre le logarithme de chaque membre :

$$\ln v_0 = \alpha_0 \ln C_0 + \ln k$$

- Tracer la courbe $\ln v_0 = f(\ln C_0)$. Si la courbe est une droite alors la réaction admet un ordre initial.
- Déterminer l'ordre initial de la réaction à partir du coefficient directeur de la droite et la valeur de la constante de vitesse à partir de l'ordonnée à l'origine.



→ exercice n° 4 p. 539

Remarques :

- La détermination graphique de la valeur de v_0 est plus précise que celle de v .
- Une réaction peut admettre un ordre initial sans pour autant avoir un ordre à un instant t (voir exemple ci-dessous). En revanche si une réaction admet un ordre, il est forcément égal à son ordre initial.

Exemple : $H_2(g) + Br_2(g) \rightarrow 2 HBr(g)$; $v = k \frac{[H_2][Br_2]^{1/2}}{1 + k' \frac{[HBr]}{[Br_2]}}$. À l'état initial $[HBr]_0 = 0 \text{ mol.L}^{-1}$, donc

$v_0 = k[H_2]_0[Br_2]_0^{1/2}$. La réaction n'admet pas d'ordre courant mais a un ordre initial 3/2.

IV Cinétiques avec deux réactifs ou plus : $a A + b B \rightarrow c C + d D$

En égalisant les deux expressions de la vitesse on obtient : $-\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^{\alpha}[B]^{\beta}$

Cette équation différentielle ne peut être résolue directement (présence de deux fonctions $[A]$ et $[B]$). On doit obligatoirement se placer dans des conditions expérimentales où on peut simplifier la loi de vitesse pour se ramener au cas des cinétiques avec un seul réactif (voir III p. 529).

1. Déterminer l'ordre global de la réaction : Conditions stœchiométriques

■ **Principe :** Les réactifs sont introduits dans les proportions stœchiométriques afin que leurs concentrations soient proportionnelles à tout instant. La loi de vitesse peut alors s'exprimer en fonction de la concentration d'un seul des deux réactifs. On peut alors déterminer l'**ordre global $\alpha + \beta$** de la réaction en appliquant la méthode intégrale, des temps de demi-réaction, différentielle ou des vitesses initiales.

Exemple :

	2 I ⁻	+	S ₂ O ₈ ²⁻	→	I ₂	+	2 SO ₄ ²⁻
t = 0	0,80		0,40		0		0
t	0,80 - 2x = 2(0,40 - x)		0,40 - x		x		2x

- On est dans les conditions stœchiométriques car $\frac{[I^-]_0}{2} = \frac{[S_2O_8^{2-}]_0}{1}$
- D'après le tableau d'avancement, quel que soit t : $\frac{[I^-]}{2} = [S_2O_8^{2-}]$
- On peut simplifier la loi de vitesse : $v = k[I^-]^\alpha[S_2O_8^{2-}]^\beta = k2^\alpha[S_2O_8^{2-}]^{\alpha+\beta} = k'[S_2O_8^{2-}]^{\alpha+\beta}$ avec $k' = k2^\alpha$
- On se ramène à la forme mathématique que l'on sait exploiter : $-\frac{d[S_2O_8^{2-}]}{dt} = k'[S_2O_8^{2-}]^{\alpha+\beta}$

Résultat

Dans le cas où il y a plusieurs réactifs, se placer dans les **conditions stœchiométriques** permet d'accéder à l'**ordre global** de la réaction.

2. Déterminer un ordre partiel : Dégénérescence de l'ordre

■ **Principe :** Si le réactif A est introduit en large excès devant B, on peut considérer [A] comme constante et environ égale à $[A]_0$. La loi de vitesse peut alors s'exprimer en fonction de [B] uniquement. On peut alors déterminer l'**ordre partiel β** en appliquant la méthode intégrale, des temps de demi-réaction, différentielle ou des vitesses initiales.

Exemple :

	2 Fe ²⁺	+	2 Hg ²⁺	→	Hg ₂ ²⁺	+	2 Fe ³⁺
t = 0	0,10		0,0010		0		0
t	0,10 - 2x ≈ 0,10		0,0010 - 2x		x		2x

- $[Fe^{2+}]_0 > 10 [Hg^{2+}]_0 \Rightarrow [Fe^{2+}]_0 \gg [Hg^{2+}]_0 \Rightarrow [Fe^{2+}] \approx [Fe^{2+}]_0$
- On peut simplifier la loi de vitesse : $v = k[Hg^{2+}]^\alpha[Fe^{2+}]^\beta \approx k'[Hg^{2+}]^\alpha$ avec $k' = k[Fe^{2+}]_0^\beta$
- k' est appelée **constante de vitesse apparente** de la réaction.
- On se ramène à la forme mathématique que l'on sait traiter : $-\frac{1}{2} \frac{d[Hg^{2+}]}{dt} = k'[Hg^{2+}]^\alpha$

Résultat

Dans le cas où il y a plusieurs réactifs, la méthode de dégénérescence de l'ordre permet d'accéder à l'un des **ordres partiels**.

■ Dans le cas d'une réaction avec plusieurs réactifs (majorité des cas) on peut déterminer entièrement la loi de vitesse (ordres partiels et constante cinétique) en combinant habilement les deux méthodes précédentes.

Questions de cours

- Loi empirique d'Arrhenius, énergie d'activation.
- Établir l'équation différentielle et la loi cinétique dans le cas d'une réaction d'ordre 2 d'équation : $3 A \rightarrow B$. Donner l'expression du temps de demi réaction ainsi que l'unité de k .
- Exposer les deux méthodes de simplification de la loi de vitesse dans le cas de la réaction d'équation : $a A + b B \rightarrow c C + d D$.
- Exposer le principe de la méthode intégrale. Application à une réaction d'ordre 1.
- Exposer le principe des méthodes différentielle et de la vitesse initiale. Citer un intérêt de la méthode différentielle. Quel est l'inconvénient majeur de la méthode des vitesses initiales ?

Erreurs à éviter

- Penser à convertir les données de l'énoncé si elles ne sont pas en accord avec les unités données en début de chapitre pour les lois de Beer-Lambert, des gaz parfaits et d'Ohm.
- Contrairement à l'expression de la vitesse de réaction, l'expression des vitesses de disparition des réactifs et d'apparition des produits sont indépendantes de l'équation bilan de la réaction.
- Les ordres partiels qui interviennent dans une loi de vitesse ne sont pas forcément égaux aux nombres stœchiométriques de son équation.
- L'énergie d'activation s'exprime en $J.\text{mol}^{-1}$ et non pas en J.
- Vérifier l'unité de t avant de donner celle de k car le temps peut être donné en h ou min.
- Pour déterminer k il faut effectuer la régression linéaire en utilisant tous les points du tableau. Ne jamais calculer k en utilisant un seul couple de points, ainsi on gagne en précision et on évite l'incertitude très importante d'une seule mesure.

Quelques « trucs » utiles

- Les lois cinétiques pour les ordres 1 et 2 ne sont pas à connaître par cœur car elles se redémontrent.
- La méthode intégrale est la méthode qui est la plus fréquemment rencontrée dans les exercices, il faut la maîtriser parfaitement.
- Dans les méthodes différentielle et des vitesses initiales, il n'y a aucune équation différentielle à écrire : il suffit d'appliquer le logarithme à la loi de vitesse.
- S'entraîner à faire les régressions linéaires à la calculatrice avant la colle.
- Il faut savoir retrouver les unités de k rapidement selon l'ordre de la réaction à l'aide d'une analyse dimensionnelle.

Méthode pour résoudre un exercice de cinétique

- ➔ Identifier si la réaction est simple (un seul réactif) ou plus compliqué (plusieurs réactifs). S'il y a plusieurs réactifs il faut simplifier la loi de vitesse soit avec la méthode de dégénérescence de l'ordre, soit avec la méthode des conditions stœchiométriques.
- ➔ Analyser les données expérimentales fournies afin de choisir la méthode à utiliser pour déterminer l'ordre de la réaction.
- ➔ Écrire la loi cinétique (méthode intégrale ou des $t_{1/2}$) ou appliquer le logarithme à l'expression de v (méthode différentielle ou des vitesses initiales).
- ➔ Relier la grandeur physique mesurée à la concentration des réactifs ou produits (penser à ajouter une troisième colonne dans le tableau d'avancement).
- ➔ Se ramener au tracé d'une droite pour déterminer l'ordre de la réaction et la valeur de k .

EXERCICES

1 Calcul d'une énergie d'activation ★

→ corrigé p. 537

On donne la valeur de la constante cinétique k d'une réaction à différentes températures T :

T (°C)	20	25	30	35
k (s ⁻¹)	0,122	0,172	0,240	0,331

- ① Quel est l'ordre de la réaction étudiée ?
- ② Déterminer la valeur de l'énergie d'activation E_a et du facteur de fréquence A de cette réaction.

2 Inversion du saccharose ★

→ corrigé p. 537

On étudie la cinétique de la réaction d'hydrolyse du saccharose (noté S). On suppose que la vitesse de la réaction s'écrit sous la forme : $v = k[S]^\alpha = -\frac{d[S]}{dt}$

t (h)	0	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
[S] (mol.L ⁻¹)	1,00	0,920	0,847	0,779	0,717	0,660

- ① À l'aide d'une régression linéaire, montrer que $\alpha = 1$ et calculer la valeur de la constante cinétique k de la réaction.
- ② a) Définir le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ et déterminer sa valeur.
b) Que vaut la valeur de $t_{1/2}$ si on double la concentration initiale $[S]_0$ en S ?

3 Cinétique de décomposition de l'arsine (d'après Agro-Véto) ★★

→ corrigé p. 538

La décomposition de l'arsine AsH₃, notée **B**, en arsenic et dihydrogène s'écrit : AsH₃(g) → As(s) + $\frac{3}{2}$ H₂(g)

Cette réaction est du premier ordre par rapport à l'arsine et on note k sa constante cinétique. La réaction a lieu dans un réacteur fermé contenant initialement uniquement de l'arsine à la pression P_0 .

- ① Déterminer l'expression de [B] en fonction de t , k et de la concentration initiale C_0 en **B**.
- ② En déduire l'expression théorique de la pression totale du système P en fonction de P_0 , de k et du temps t .
- ③ Comment déterminer la valeur de la constante k à partir de mesures expérimentales de la pression totale P en fonction du temps t ?

4 Décomposition du DMSO (d'après CCP) ★

→ corrigé p. 539

À haute température, le DMSO subit une réaction de décomposition d'équation bilan :



Dans le tableau ci-dessous, la vitesse initiale v_0 de la réaction est donnée pour différentes valeurs de la concentration initiale en DMSO. On suppose que la loi de vitesse s'écrit sous la forme $v_0 = k \times [\text{DMSO}]_0^\alpha$ avec α l'ordre initial de la réaction.

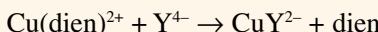
$10^3 \times [\text{DMSO}]_0$ (mol.L ⁻¹)	2,0	4,0	6,0	8,0	10
$10^6 \times v_0$ (mol.L ⁻¹ .s ⁻¹)	1,52	3,12	4,73	6,33	7,93

- ① Rappeler par quelle méthode graphique on peut déterminer la vitesse initiale v_0 .
- ② À l'aide d'un graphe sur papier millimétré ou d'une régression linéaire, déterminer l'ordre initial α_0 de la réaction et la constante cinétique k .

5 Étude des complexes des ions Cu²⁺ (d'après ENSTIM) ★★

→ corrigé p. 539

On propose d'étudier la vitesse de la réaction :



Le tableau suivant résume les conditions expérimentales et les résultats de la mesure de la concentration C en Cu(dien)²⁺ au cours du temps dans les conditions suivantes :

– $\theta = 25^\circ\text{C}$ et pH = 4,0 maintenu constant.

– Concentrations initiales : $[\text{Cu(dien)}^{2+}]_0 = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{Y}^{4-}]_0 = 6,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

t (s)	10	20	30	40	50
C (mol.L ⁻¹)	$1,50 \cdot 10^{-3}$	$1,10 \cdot 10^{-3}$	$0,80 \cdot 10^{-3}$	$0,60 \cdot 10^{-3}$	$0,43 \cdot 10^{-3}$

1 a) Montrer sans calcul que les conditions initiales choisies permettront de déterminer l'un des ordres partiels. En déduire l'expression de la constante cinétique apparente k_{app} .

b) Déterminer graphiquement cet ordre partiel et calculer la constante cinétique apparente k_{app} .

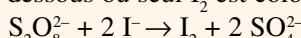
2 Des mesures dans les conditions $[\text{Cu(dien)}^{2+}]_0 = [\text{Y}^{4-}]_0 = C'_0$ ont conduit aux résultats ci-dessous. En déduire le deuxième ordre partiel et la valeur de la constante cinétique k de la réaction.

$C'_0 (10^{-2} \text{ mol.L}^{-1})$	1,51	2,98	5,95
$t_{1/2}$ (s)	138	70,0	35,0

6 Étude cinétique de la synthèse du diiode (d'après CAPES) ★★

→ corrigé p. 540

On se propose d'étudier la réaction ci-dessous où seul I₂ est coloré.



Cette réaction admet un ordre. On appelle α l'ordre partiel par rapport à S₂O₈²⁻, β celui par rapport à I⁻ et k la constante cinétique.

1 À l'instant $t = 0$, on mélange un volume $V_1 = 15,0 \text{ mL}$ de solution de peroxodisulfate d'ammonium (S₂O₈²⁻ + 2 NH₄⁺) de concentration $C_1 = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ et un volume $V_2 = 25,0 \text{ mL}$ de solution d'iodure de potassium (K⁺ + I⁻) de concentration $C_2 = 0,250 \text{ mol.L}^{-1}$.

a) Soient C_0 la concentration initiale de S₂O₈²⁻ et C celle de I⁻ dans le mélange. Calculer C_0 et C puis simplifier la loi de vitesse en introduisant k' , la constante cinétique apparente.

b) En supposant que l'ordre partiel par rapport à S₂O₈²⁻ vaut 1, établir la loi cinétique en [S₂O₈²⁻]. Quelle courbe faut-il tracer pour vérifier que cet ordre est bien égal à 1 ?

2 Des mesures de l'absorbance de la solution en fonction du temps ont permis d'obtenir le tableau suivant :

t (min)	0	4,0	8,0	12,0	16,0
A	0	0,349	0,670	0,940	1,178

a) Montrer que ces résultats sont en accord avec une cinétique d'ordre 1 par rapport à S₂O₈²⁻ et calculer la constante cinétique apparente.

b) En déduire la constante de vitesse si l'on suppose que l'ordre partiel par rapport à I⁻ vaut aussi 1.

Données :

– Coefficient d'extinction molaire de I₂ : $\epsilon = 1190 \text{ L.mol}^{-1}.cm^{-1}$

– Longueur de la cuve $\ell = 1,0 \text{ cm}$

CORRIGÉS**Conseil**

Les exercices n° 1, 2, 3, 4 et 5 sont des illustrations des points méthodes du cours. La démarche est structurée à l'aide de symboles ➔, il est conseillé de s'en inspirer dans les exercices similaires.

1 Calcul d'une énergie d'activation

➔ énoncé p. 535

1 La réaction est d'ordre 1 car la constante cinétique k s'exprime en s^{-1} .

2 Pour déterminer A et E_a , il faut utiliser le **point méthode** p. 528 :

➔ Prendre le logarithme de chaque membre de la loi d'Arrhenius.

$$k = A e^{\frac{-E_a}{RT}} \Leftrightarrow \ln k = -\frac{E_a}{RT} + \ln A$$

➔ Tracer la courbe $\ln k = f(1/T)$ à l'aide des données expérimentales fournies.

La courbe $\ln k = f(1/T)$ est une droite d'équation $y = -6005,9x + 18,394$.

➔ Déterminer les valeurs de A et de E_a grâce aux valeurs du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.

$$-\frac{E_a}{R} = -6005,9 \text{ et } \ln A = 18,394 \Rightarrow \boxed{E_a = 50 \text{ kJ.mol}^{-1} \text{ et } A = 9,7 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}}$$

Bien comprendre

- La température T est exprimée en $^\circ\text{C}$ ⇒ convertir T en Kelvin lorsqu'on trace la droite $\ln k = f(1/T)$.
- Dans cet exercice et dans les suivants il faudra veiller à exprimer le résultat avec un nombre de chiffres significatifs cohérents avec les données (2 chiffres significatifs dans ce cas).
- La droite $\ln k = f(1/T)$ est tracée directement sur la calculatrice qui affiche l'équation. Il en est de même pour les exercices suivants où l'on réalise des régressions linéaires.

2 Inversion du saccharose

➔ énoncé p. 535

1 Pour résoudre l'exercice, il faut appliquer la méthode intégrale (*voir point méthode p. 530*) :

➔ Faire une hypothèse sur l'ordre de la réaction.

Ordre 1 (donné par l'énoncé).

➔ Établir la loi cinétique sous la forme d'une fonction affine.

- Écrire l'équation différentielle : $-\frac{d[S]}{dt} = k[S]$
- Séparation des variables : $\frac{d[S]}{[S]} = -kdt$
- Intégration entre 0 et t : $\ln[S] - \ln[S]_0 = -kt \Rightarrow \ln[S] = -kt + \ln[S]_0$

➔ Vérifier l'hypothèse.

La courbe $\ln[S] = f(t)$ est une droite donc l'hypothèse **ordre 1** est vérifiée.

➔ Déterminer la valeur de k .

– Unité de k : $v = k[S] \Rightarrow \text{L.mol}^{-1}.\text{h}^{-1} = [k] \times \text{mol.L}^{-1} \Rightarrow [k] = \text{h}^{-1}$

– Le coefficient directeur de la droite est $-0,08312 \Rightarrow \boxed{k = 8,31 \cdot 10^{-2} \text{ h}^{-1}}$

2 a) Le temps de demi-réaction est le temps au bout duquel la moitié du réactif limitant a été consommée.

$$\text{Lorsque } t = t_{1/2}, [S] = \frac{[S]_0}{2} \Rightarrow \ln \frac{[S]_0}{2} = -kt_{1/2} + \ln[S]_0 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = 8,34 \text{ h}$$

b) Dans le cas d'une réaction d'ordre 1, la valeur de $t_{1/2}$ ne dépend pas de la concentration initiale du réactif limitant. Donc dans ces nouvelles conditions $t_{1/2} = 8,34 \text{ h}$.

Bien comprendre

- Dans le tableau de mesure, le temps est exprimé en heures. Il est inutile de tout convertir en secondes, en revanche il faut exprimer k en h^{-1} .
- Dans cet exercice et dans les suivants il faudra veiller à exprimer le résultat avec un nombre de chiffres significatifs cohérents avec les données (3 chiffres significatifs dans ce cas).

3 Cinétique de décomposition de l'arsine

→ énoncé p. 535

$$\text{1 } \nu = k[B] = -\frac{d[B]}{dt} \Rightarrow \ln[B] = -kt + \ln C_0$$

2 La résolution suit le **point méthode** p. 526 :

→ Identifier les espèces chimiques dont la concentration est reliée à la grandeur physique mesurée (ici gaz).

Les espèces gazeuses sont encadrées en bleu.

→ Établir un tableau d'avancement en ajoutant à droite une colonne où est donnée l'expression de P aux dates $t = 0$ et t .

	AsH ₃ (g)	→	As(s)	+	$\frac{3}{2} \text{ H}_2(\text{g})$	P
E.I.	C_0		0		0	$P_0 = C_0 RT$
E.Int.	$C_0 - x$		x		$\frac{3}{2}x$	$P = \left(C_0 + \frac{1}{2}x \right) RT$

→ Relier la concentration d'une espèce chimique à la grandeur mesurée.

$$P_B = (C_0 - x)RT \Rightarrow P_B = C_0 RT - xRT = C_0 RT - (2P - 2C_0 RT) \Rightarrow P_B = -2P + 3P_0$$

$$[B] = \frac{P_B}{RT} = \frac{-2P + 3P_0}{RT}$$

→ On injecte l'expression de [B] dans la formule obtenue à la question 1.

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{-2P + 3P_0}{RT} \right) = -kt + \ln \frac{P_0}{RT} \Rightarrow \ln(-2P + 3P_0) = -kt + \ln P_0$$

3 Pour déterminer la valeur de k , tracer $\ln(-2P + 3P_0) = f(t)$. Le coefficient directeur de la droite est égal à $-k$.

Bien comprendre

- Ne pas prendre en compte As(s) (qui n'est pas un gaz) dans l'expression de P .
- Le point délicat de ce suivi manométrique est de trouver la relation $P_B = -2P + 3P_0$. Il faut donc s'entraîner.

4 Décomposition du DMSO

→ énoncé p. 535

1 Pour déterminer v_0 il faut tracer la courbe $[DMSO] = f(t)$. La vitesse initiale v_0 est égale à l'**opposé du coefficient directeur** de la tangente à l'origine.

2 Pour déterminer α_0 et k , il faut appliquer la méthode des vitesses initiales (*voir point méthode p. 532*) :

→ Écrire la loi de vitesse à $t = 0$ et prendre le logarithme de chaque membre.

$$v_0 = k \times [DMSO]_0^{\alpha_0} \Rightarrow \ln v_0 = \alpha_0 \ln [DMSO]_0 + \ln k$$

→ Tracer la courbe $\ln v_0 = f(\ln [DMSO]_0)$. Si la courbe est une droite, la réaction admet un ordre initial.

La courbe $\ln v_0 = f(\ln [DMSO]_0)$ est une droite d'équation $y = 1,0268x - 7,0123$.

→ Déterminer les valeurs de k et de α_0 .

$$\alpha_0 = 1,0268 \text{ et } \ln k = -7,0123 \Rightarrow k = 9,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} \text{ et } \alpha_0 = 1$$

Bien comprendre

Dans le tableau il est inscrit $10^3 \times [DMSO]_0$ (mol.L⁻¹) et $10^6 \times v_0$ (mol.L⁻¹.s⁻¹). Cela signifie qu'il faut diviser toutes les valeurs de la première ligne par 10^3 pour obtenir la valeur de $[DMSO]_0$ et celles de la deuxième ligne par 10^6 pour obtenir les valeurs de v_0 .

S'il avait été inscrit : $[DMSO]_0$ (10³ mol.L⁻¹) et v_0 (10⁶ mol.L⁻¹.s⁻¹) il aurait fallu multiplier toutes les valeurs de la première ligne par 10^3 et celles de la deuxième ligne par 10^6 pour obtenir les valeurs de $[DMSO]_0$ et v_0 .

5 Étude des complexes des ions Cu²⁺

→ énoncé p. 536

1 a) Simplification de la loi de vitesse par la méthode de dégénérescence de l'ordre :

$$[Y^{4-}]_0 \gg [Cu(dien)^{2+}]_0 \Rightarrow [Y^{4-}] \approx cte = [Y^{4-}]_0 \Rightarrow v = k_{app} [Cu(Dien)^{2+}]^\alpha \text{ avec } k_{app} = k[Y^{4-}]_0^\beta$$

⇒ On peut accéder à la valeur de α .

b) Hypothèse $\alpha = 1$. L'intégration de l'équation différentielle donne $\ln C = \ln C_0 - k_{app} t$. La courbe $\ln C = f(t)$ est une droite de coefficient directeur $-3,1 \cdot 10^{-2}$.

⇒ L'**ordre 1** est vérifié et $k_{app} = 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

2 Simplification de la loi de vitesse par la méthode des conditions stœchiométriques :

$$[Y^{4-}]_0 = [Cu(Dien)^{2+}]_0 = C' \Rightarrow v = k[Y^{4-}]^\beta \times [Cu(Dien)^{2+}]^\alpha = kC'^{\alpha+\beta}$$

Pour déterminer $\alpha + \beta$, suivre la méthode des temps de demi-réaction :

• Faire une hypothèse sur l'ordre de la réaction.

Hypothèse $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 2$

• Etablir l'expression de $t_{1/2}$ en fonction de C_0 .

$$v = kC'^2 = -\frac{dC'}{dt} \Rightarrow \frac{1}{C'} = kt + \frac{1}{C'_0} \text{ à } t = t_{1/2}, \quad C' = \frac{C'_0}{2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{1}{kC'_0}$$

• Vérifier l'hypothèse.

La courbe $t_{1/2} = f\left(\frac{1}{C'_0}\right)$ est une droite donc $\alpha + \beta = 2$

• Déterminer la valeur de k .

Le coefficient directeur de la droite est 2,0839 $\Rightarrow k = \frac{1}{2,0839} = 0,480 \text{ L.mol}^{-1}.\text{s}^{-1}$

Bien comprendre

- L'ordre le plus fréquemment rencontré est l'ordre 1, c'est pour cette raison que dans l'exercice on fait l'hypothèse $\alpha = \beta = 1$. Cette hypothèse est par la suite validée.
- Le choix de la méthode à utiliser pour déterminer l'ordre d'une réaction ainsi que la constante cinétique dépend des données. Dans la question 1 on fournit des couples (t, C) donc la méthode utilisée est la méthode intégrale. Dans la question 2 on fournit des couples $(C'_0, t_{1/2})$ donc la méthode à utiliser est la méthode des temps de demi-réaction.
- Pour des raisons de précision, il est important de prendre en compte tous les couples de données pour calculer k (en effectuant par exemple une régression linéaire). Il ne faut surtout pas calculer $k = \frac{1}{C'_0 t_{1/2}}$ à partir d'un seul couple de points.

6 Étude cinétique de la synthèse du diiode

→ énoncé p. 536

1 a) $C_0 = \frac{C_1 V_1}{V_1 + V_2} = 2,34 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ et $C = \frac{C_2 V_2}{V_1 + V_2} = 0,156 \text{ mol.L}^{-1}$. On peut appliquer la **dégénérescence de l'ordre** car $C \gg C_0$:

$$\nu = k [S_2O_8^{2-}]^\alpha [I_2]^\beta \quad \nu = k' [S_2O_8^{2-}]^\alpha \text{ avec } k' = k C^\beta$$

b) La loi cinétique dans ces conditions s'écrit : $\ln[S_2O_8^{2-}] = -k't + \ln C_0$. Pour vérifier que l'ordre par rapport à $S_2O_8^{2-}$ vaut 1 il faut tracer $\ln[S_2O_8^{2-}] = f(t)$.

2 a)

	$S_2O_8^{2-}$	+	$2 I^-$	\rightarrow	I_2	+	$2 SO_4^{2-}$	A
E.I.	C_0		C		0		0	$A = 0$
E.Int	$C_0 - x$		$C - x \approx C$		x		$2x$	$A = \varepsilon \ell x$

D'après le tableau d'avancement ci-dessus, I_2 étant la seule espèce colorée : $x = \frac{A}{\varepsilon \ell}$

$$\Rightarrow \ln[S_2O_8^{2-}] = \ln(C_0 - x) = \ln\left(C_0 - \frac{A}{\varepsilon \ell}\right)$$

La courbe $\ln\left(C_0 - \frac{A}{\varepsilon \ell}\right) = f(t)$ est une droite de coefficient directeur $-0,0344$.

$$\Rightarrow \alpha = 1 \text{ et } k' = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1}$$

b) Si l'ordre par rapport à I^- vaut 1 alors $k' = k \times C$ donc $k = \frac{k'}{C} = 0,22 \text{ L.mol}^{-1}.\text{min}^{-1}$

Bien comprendre

- Lorsque l'on mélange deux solutions de volumes V_1 et V_2 , les concentrations C_1 et C_2 varient car le volume de la solution varie : $V_{\text{tot}} = V_1 + V_2$. Il faut donc systématiquement calculer les nouvelles concentrations C'_1 et C'_2 .
- Lorsque la concentration intervenant dans la loi cinétique (ici $S_2O_8^{2-}$) n'est pas la même que la concentration à laquelle on a accès expérimentalement (ici I_2), il faut relier ces deux concentrations à l'aide d'un tableau d'avancement : $[S_2O_8^{2-}] = C_0 - x = C_0 - [I_2]$

Structure de l'atome et classification périodique

La classification périodique a été établie par Mendeleïev en 1869 et est devenue aujourd'hui un emblème pour les chimistes. Ce tableau à la forme si caractéristique n'est pas simplement une mosaïque où l'on peut trouver des données sur les éléments (comme les masses molaires). C'est un outil permettant de prévoir certaines propriétés physico-chimiques des éléments dépendant de leur configuration électronique.

I | Description quantique de l'atome

1. Rappels sur l'atome général

- **Atome** : Entité neutre constituée d'un noyau (contenant des protons et des neutrons) et d'électrons. La taille d'un atome est de l'ordre de 10^{-10} m.
- **Isotopes** : Entités atomiques ayant le même nombre de protons Z mais un nombre de masse A différent.
- **Exemple** : Le deutérium ^2_1H noté usuellement D est un isotope de l'hydrogène ^1_1H .
- **Symbol du noyau** : ^{A_Z}X .
- **Élément chimique** : Ensemble d'entités ayant le même numéro atomique Z (atome, ions, etc.).

2. Spectroscopie

À l'échelle microscopique les entités chimiques ont une énergie quantifiée et une interaction photon-matière peut avoir lieu. On parle de **spectroscopie d'absorption** si un photon est absorbé ($E_{\text{final}} > E_{\text{initial}}$) et de **spectroscopie d'émission** si un photon est émis ($E_{\text{final}} < E_{\text{initial}}$).

POINT MÉTHODE

Calculer un écart énergétique entre deux états ou calculer une longueur d'onde absorbée ou émise

- Convertir les données de l'énoncé dans le système international (distance en m, énergie en J).
- Appliquer la formule :

$$\Delta E_{\text{entité}} = |E_{\text{final}} - E_{\text{initial}}| = h\nu_{\text{photon}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{photon}}}$$

Écart entre deux niveaux d'énergie de l'entité considérée (J)

Fréquence du photon (s^{-1})

Constante de Planck ($h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$)

Célérité de la lumière ($c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$)

- Convertir le résultat obtenu pour l'exprimer avec l'unité demandée dans l'énoncé.

→ exercice n° 1 p. 548

3. Nombres quantiques et orbitales atomiques

- La résolution de l'**équation de Schrödinger** (équation fondamentale de la mécanique quantique) permet de décrire le comportement des électrons dans l'atome. Elle conduit à introduire **4 nombres quantiques**.

Résultats

- Nombre quantique principal n :** $n \in \mathbb{N}^*$; il définit la couche électronique.
- Nombre quantique secondaire (ou azimutal) ℓ :** $\ell \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \ell \leq n - 1$; il définit la sous-couche électronique.

Valeur de ℓ	0	1	2	3	...
Sous-couche	s	p	d	f	...

- Nombre quantique magnétique m_ℓ :** $m_\ell \in \mathbb{Z}$ et $-\ell \leq m_\ell \leq +\ell$
- Nombre quantique de spin m_s :** $m_s = +\frac{1}{2}$ et $m_s = -\frac{1}{2}$

- Le triplet de nombre quantique (n, ℓ, m_ℓ) définit une **orbitale atomique (OA)** qui est une fonction décrivant l'électron et à laquelle on associe une énergie.
- Deux orbitales atomiques ayant la même énergie sont dites **dégénérées**. Un ensemble d'orbitales atomiques dégénérées constitue une **sous-couche électronique**.
- Le tableau ci-dessous décrit les sous-couches associées à $n = 1, 2$ et 3 .

Niveau n	Valeur de ℓ	Valeur de m_ℓ	Orbitales atomiques	Nom de la sous-couche	Schéma
1	0	0	1 OA	1s	—
2	0	0	1 OA	1s	—
	1	-1 ; 0 ; 1	3 OA dégénérées	2p	— — —
3	0	0	1 OA	3s	—
	1	-1 ; 0 ; 1	3 OA dégénérées	3p	— — —
	2	-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2	5 OA dégénérées	3d	— — — — —

- Au niveau $n = 4$, la valeur $\ell = 3$ est possible. Pour le couple $(n = 4 ; \ell = 3)$, 7 valeurs de m_ℓ sont possibles (de -3 à +3) ce qui génère un ensemble de 7 orbitales atomiques dégénérées nommées 4f.

- Un électron caractérisé par $m_s = +\frac{1}{2}$ est symbolisé \uparrow alors qu'un électron caractérisé par $m_s = -\frac{1}{2}$ est symbolisé \downarrow .

II | Configuration électronique fondamentale d'un atome ou d'un ion**1. Règles de remplissage****Énoncé**

Principe d'exclusion de Pauli : Deux électrons ne peuvent pas être caractérisés par les quatre mêmes nombres quantiques. Ainsi une orbitale atomique contient au **maximum deux électrons** (de m_s opposé).

Une conséquence du principe de Pauli est l'occupation maximale des sous-couches :

Sous-couche	s (1 OA)	p (3 OA)	d (5 OA)	f (7 OA)
Occupation maximale	2 électrons	6 électrons	10 électrons	14 électrons

Énoncé

Règle de Klechkowski (ordre énergétique des sous-couches) : Dans l'état fondamental (état de plus basse énergie), les sous-couches sont remplies par ordre croissant d'énergie. Cette énergie augmente suivant $n + \ell$ croissant, et pour deux valeurs identiques de $n + \ell$, selon n croissant.

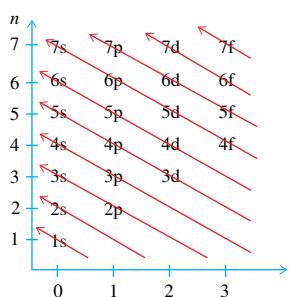


FIGURE 1 : Moyen mnémotechnique pour retrouver l'ordre énergétique des OA : 1s 2s 2p 3s 3p 4s 3d 4p ...

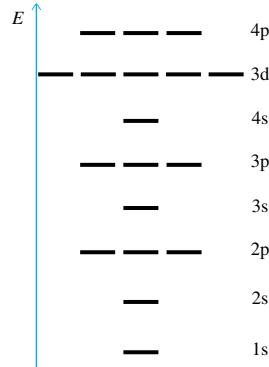


FIGURE 2 : Diagramme énergétique

Exemples :

- La configuration électronique de l'atome de cobalt ($Z = 27$) est : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^7$.
- La configuration électronique de l'atome d'arsenic ($Z = 33$) est : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^3$.

Énoncé

Règle de Hund (mode de remplissage) : Pour des niveaux électroniques **dégénérés partiellement remplis**, l'état fondamental est celui où le maximum d'orbitales atomiques est occupé avec des électrons présentant des spins parallèles.

- La règle de Hund permet de déterminer le nombre d'électrons non appariés d'un atome dans son état fondamental.

Exemple : La dernière sous-couche occupée de l'atome de cobalt est une sous-couche 3d qui possède 7 électrons : $3d^7$. D'après la règle de Hund, l'atome de cobalt possède 3 électrons célibataires (non appariés).



2. Électrons de cœur et de valence

Définition

Les **électrons de valence** sont les électrons appartenant aux sous-couches de plus grand n auxquels on ajoute ceux appartenant aux sous-couches de n inférieur si elles sont partiellement remplies. Les **électrons de cœur** sont les autres électrons.

Exemples :

- Cobalt ($Z = 27$) : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^7$ possède **9 électrons de valence** et 18 électrons de cœur.
- Arsenic ($Z = 33$) : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^3$ possède **5 électrons de valence** et 28 électrons de cœur.

3. Formation des ions

POINT MÉTHODE

Déterminer la configuration électronique fondamentale d'un ion

- Déterminer la configuration électronique fondamentale de l'atome.
- Les cations sont obtenus en enlevant en premier les électrons de la sous-couche la plus externe de plus grande valeur de n même s'il ne s'agit pas de la sous-couche qui a été remplie en dernier.
- Les anions sont obtenus en ajoutant des électrons dans la dernière sous-couche partiellement remplie. Si toutes les sous-couches sont pleines, on remplit la sous-couche suivante.

→ exercice n° 2 p. 548

Exemples :

- Fe : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^6 \Rightarrow Fe^{2+} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^0 3d^6 \Rightarrow Fe^{3+} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^0 3d^5$
 – Cl : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5 \Rightarrow Cl^- : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$

POINT MÉTHODE

Prévoir la formule des ions monoatomiques d'un élément

- Écrire la configuration électronique de l'atome.
- Repérer le gaz noble le plus proche.
- L'atome s'ionise de manière à acquérir la structure électronique de ce gaz noble.

→ exercice n° 2 p. 548

Exemple : Na ($Z = 11$) a tendance à former l'ion Na^+ qui est isoélectronique du néon ($Z = 10$).

III Classification périodique des éléments

1. Présentation générale

- Le tableau principal comporte **7 lignes** (appelées aussi **périodes**) et **18 colonnes** (appelées aussi **familles**). Un bloc de deux lignes, contenant des éléments appartenant aux lignes 6 et 7, est placé en dessous du tableau principal pour gagner de la place dans la représentation (sans cela le tableau aurait 32 colonnes).
- La classification périodique peut aussi être analysée comme une association de « blocs » en lien avec la structure électronique des atomes (voir III.3 p. 545) : **bloc s**, **bloc p**, **bloc d**, **bloc f**.

2. Principe de construction

- Les éléments sont classés par **numéros atomiques Z croissants**.
- Les éléments présentant la **même configuration électronique de valence** sont placés dans une même **colonne** (ou **famille**).

Exemple : Les éléments ci-dessous ont les mêmes configurations électroniques de valence (ns^2np^4). Ils appartiennent donc à la même colonne de la classification (famille des chalcogènes).

Oxygène : $Z = 8 \quad 1s^2 2s^2 2p^4$

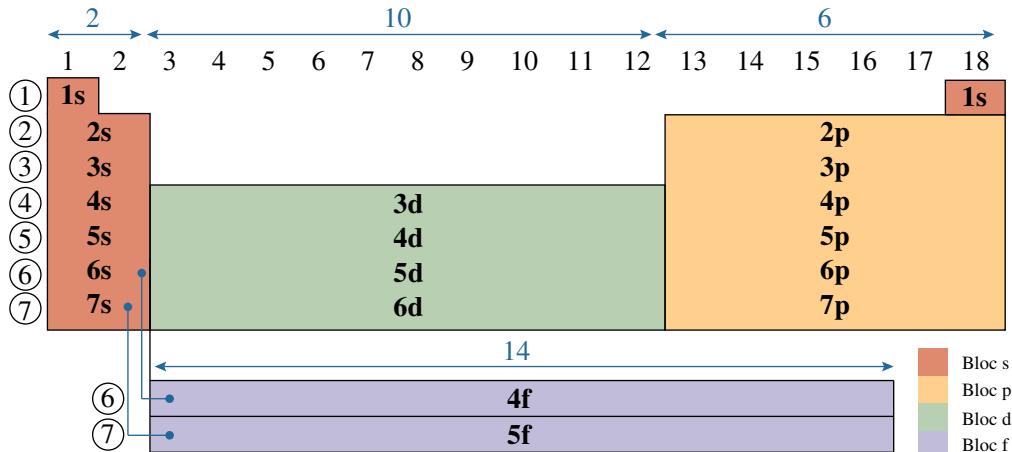
Sélénium : $Z = 34 \quad [_{18}Ar] 4s^2 3d^{10} 4p^4$

Soufre : $Z = 16 \quad [_{10}Ne] 3s^2 3p^4$

Tellure : $Z = 52 \quad [_{36}Kr] 5s^2 4d^{10} 5p^4$

3. Lien entre classification périodique et configuration électronique

On peut retrouver l'ordre énergétique de Klechkowski en utilisant la classification périodique.



POINT MÉTHODE

Déterminer la configuration électronique d'un élément à partir de sa position dans le tableau

- La colonne indique la dernière sous-couche occupée de l'atome :
 - Colonnes 1 et 2 : x -ème colonne du bloc s $\Rightarrow s^x$
 - Colonnes 3 à 12 : y -ème colonne du bloc d $\Rightarrow d^y$
 - Colonnes 13 à 18 : z -ème colonne du bloc p $\Rightarrow p^z$
- La ligne donne la valeur de n_{\max} .
- L'application de la règle de Klechkowski permet de retrouver la configuration électronique complète et de déterminer le numéro atomique Z de l'élément.

→ exercice n° 3 p. 548

Exemple : Le silicium est situé sur la 14^e colonne et la 3^e ligne.

$$\left. \begin{array}{l} - 14^{\text{e}} \text{ colonne} \Rightarrow 2^{\text{e}} \text{ colonne du bloc p} \Rightarrow p^2 \\ - 3^{\text{e}} \text{ ligne} \Rightarrow 3p^2 \end{array} \right\} \text{Si : } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2 \Rightarrow Z = 14$$

POINT MÉTHODE

Déterminer la position d'un élément à partir de la configuration électronique

- La plus grande valeur de n donne la ligne.
- La dernière sous-couche et son occupation donnent la colonne.
 - s^x : x -ème colonne du bloc s $\Rightarrow x$ -ème colonne
 - d^y : y -ème colonne du bloc d $\Rightarrow (y + 2)$ -ème colonne
 - p^z : z -ème colonne du bloc p $\Rightarrow (z + 12)$ -ème colonne

→ exercice n° 3 p. 548

Exemple : L'atome d'iridium a pour configuration $[_{54}\text{Xe}]6s^24f^{14}5d^7$.

- $n_{\max} = 6 \Rightarrow 6^{\text{e}} \text{ ligne}$

- $d^7 \Rightarrow$ 7^e colonne du bloc d

$\Rightarrow 7 + 2 = 9^{\text{e}}$ colonne de la classification périodique

Ir : 6^e ligne et 9^e colonne de la classification

4. Les grands ensembles à connaître

- Il convient de savoir situer dans la classification les familles des **métaux alcalins**, **halogènes** et **gaz nobles**.

- Il convient de savoir citer les éléments (ainsi que leur symbole et leur numéro atomique) :

– Des périodes 1 et 2 de la classification en s’aidant éventuellement de la phrase

- Liliane Becta Bien Chez Notre Oncle Frédéric I

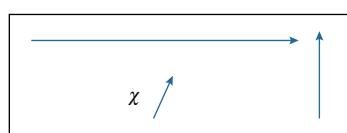
- De la colonne des halogénés : Fluor F, Chlore Cl, Bromé Br et Iode I.
 - Les **métaux** se trouvent à gauche de la ligne de la frontière en gras, ils sont représentés en jaune sur la classification périodique ci après :

5. Électronégativité et propriétés redox

Définition

L'**électronégativité** est une **grandeur relative sans dimension** qui traduit l'aptitude d'un atome A à attirer à lui le doublet électronique de la liaison quand il est associé à un atome B.

- Un élément **très électronégatif** cherche à attirer à lui les électrons. Le corps pur associé présente donc des **propriétés oxydantes** (capte des électrons).
 - Un élément **faiblement électronégatif** cède facilement des électrons. Le corps pur associé aura donc des **propriétés réductrices** (cède des électrons).
 - Évolution dans la classification périodique :



— Pouvoir oxydant augmente
Pouvoir réducteur augmente

Remarque : Le fluor est l'élément le plus électronégatif de la classification périodique. Le filuor F_2 est le corps le plus oxydant.

Questions de cours

- Principe des spectroscopies d'absorption et d'émission.
- Nombres quantiques : définitions et règles de quantification. Déterminer les nombres quantiques associés à la couche $n = 3$.
- À l'aide d'exemples précis et pertinents, exposer les règles qui permettent d'établir la configuration électronique d'une entité à l'état fondamental.
- Expliquer le principe de construction de la classification périodique.
- Sur une classification périodique schématique placer les différents ensembles d'éléments suivants : métaux, halogènes, alcalino-terreux, gaz nobles, alcalins.

Erreurs à éviter

- En spectroscopie d'absorption ou d'émission, il faut convertir les unités données dans l'énoncé en unités du système international afin d'éviter les erreurs dans les applications numériques.
- Lors de l'ionisation des éléments du bloc d (éléments des colonnes 3 à 10), on enlève les électrons ns avant les électrons $(n - 1)d$.
- Pour obtenir la configuration électronique d'un ion dans son état fondamental il faut d'abord écrire la configuration électronique de l'atome, puis arracher ou ajouter les électrons.
- Lors de l'écriture d'une configuration électronique, ne pas oublier la présence des orbitales 4f après l'orbitale 6s. De même, ne pas oublier la présence des orbitales 5f après l'orbitale 7s.

Quelques « trucs » utiles

- On rappelle que pour convertir les Joules en électron-volts : $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.
- Pour les éléments présentant des valeurs de Z élevées, il est possible d'écrire la configuration électronique de manière abrégée. Ainsi la configuration électronique de l'atome de cobalt ($Z = 27$) est : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^7$, mais on peut l'écrire $[_{18}\text{Ar}] 4s^2 3d^7$ car la configuration de l'atome d'argon est : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$. Apprendre par cœur les valeurs de Z des gaz nobles permet de gagner du temps dans l'écriture des configurations électroniques.
- Les énoncés des règles de remplissage sont souvent demandés aux concours. Il faut les apprendre **rigoureusement**.
- Lorsque l'on descend d'un cran dans une colonne on ajoute au numéro atomique de l'élément le nombre de protons suivant :

Passage ligne 2 à ligne 3	+8
Passage ligne 3 à ligne 4	+18
Passage ligne 4 à ligne 5	+18
Passage ligne 5 à ligne 6	+32
Passage ligne 6 à ligne 7	+32

- Il y a beaucoup d'exception à la règle de Klechkovski, en particulier dans le bas de la classification.

1 Un monde quantique ★

→ corrigé p. 550

- 1** Classer les ondes électromagnétiques suivantes de la plus énergétique à la moins énergétique : infrarouge, rayons X, ultra-violet, lumière visible, micro-ondes et ondes hertziennes.

- 2** Expliquer le principe de la spectroscopie d'émission et de la spectroscopie d'absorption.

L'énergie de l'électron dans un atome d'hydrogène est quantifiée. Elle ne peut prendre que des valeurs discrètes vérifiant la relation : $E_n = \frac{-13,6}{n^2}$ (en eV) avec n entier. Dans le spectre d'émission de l'hydrogène, on appelle série de Balmer l'ensemble des raies correspondant aux transitions vers le niveau d'arrivée $n = 2$.

- 3** Calculer les longueurs d'ondes associées aux trois transitions les moins énergétiques de la série de Balmer. Préciser pour chacune à quel type d'onde électromagnétique elle correspond.

- 4** Expliquer pourquoi une lampe à hydrogène émet de la lumière rose.

Données :

- Constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
- Célérité de la lumière : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

2 Configurations électroniques ★★

→ corrigé p. 550

- 1** Énoncer les règles permettant d'établir la configuration électronique d'un atome.

- 2** Rappeler pour chaque type de sous-couche l'occupation électronique maximale.

- 3** L'atome de baryum a pour configuration électronique de valence $6s^2$.

- a) Déterminer (sans utiliser le tableau périodique) le numéro atomique du baryum.
 - b) Donner les quadruplets de nombres quantiques caractérisant les électrons de valence de l'atome de baryum.
 - c) Prévoir l'ion le plus probable associé à l'élément baryum.
- 4** Donner les configurations électroniques de l'atome de soufre ($Z = 16$), de l'atome d'osmium ($Z = 76$) et de l'ion Zn^{2+} ($Z = 30$).
- 5** La dernière sous-couche occupée de l'atome de plomb est caractérisée par les triplets de nombres quantiques $(6,1,1)$, $(6,1,0)$, $(6,1,-1)$. Cette sous-couche est occupée par deux électrons.
- a) Donner le nom de cette sous-couche.
 - b) Dénombrer les électrons de valence du plomb.

3 Promenons-nous dans la classification ★

→ corrigé p. 551

- 1** Donner la structure électronique de l'atome d'indium In ($Z = 49$), en déduire sa position dans la classification périodique.
- 2** Le sélénium (Se) appartient à la colonne de l'oxygène (famille des chalcogènes) et à la 4^e période.
- a) En déduire la configuration électronique de l'atome associé à cet élément et son numéro atomique.
 - b) Le polonium (Po) est le 5^e élément de la famille des chalcogènes. Déterminer son numéro atomique.
- 3** Le palladium possède 8 électrons sur sa dernière sous-couche occupée. Cette sous-couche est caractérisée par les nombres quantiques $n = 4$ et $\ell = 2$. Déterminer, sans utiliser la classification périodique, la configuration électronique, le numéro atomique et la position du palladium.

4 Étude des éléments du bloc s ★★

→ corrigé p. 552

- 1 Citer le nom des deux familles qui composent le bloc s.
- 2 Le magnésium ($Z = 12$) est-il un oxydant ou un réducteur ? Justifier.
- 3 Le strontium (Sr) se trouve deux périodes sous le magnésium. Comparer le comportement redox du strontium à celui du magnésium.
- 4 Le césium (Cs) est à gauche du baryum. Il peut former un sel de formule CsCl avec l'élément chlore ($Z = 17$). Quand on dissout ce sel dans l'eau, il se forme un anion et un cation solvatés. Identifier le cation et l'anion.

Résolution de problème : Imagerie par résonance magnétique ★★★

→ corrigé p. 552

DOCUMENT 1 : L'IRM

L'IRM (Imagerie par Résonance Magnétique) est une technique de diagnostic médical qui fournit des images des organes du corps humain. Les premières images chez l'homme ont été réalisées en 1979. Le principe de cet outil médical est celui de la RMN du proton des molécules d'eau de l'organisme. Afin de rendre le diagnostic plus aisés, on administre au patient des agents de contraste. Il s'agit de complexes d'ions métalliques, c'est-à-dire d'une structure moléculaire où un ion métallique est associé à un ou plusieurs ligands. Les ligands sont des molécules possédant un doublet non liant et pouvant se lier à un métal. Dans les agents de contraste d'IRM, l'ion métallique est de type M^{3+} .

Une espèce paramagnétique possède des électrons non appariés. Plus elle possède d'électrons non appariés, plus ses propriétés paramagnétiques sont importantes. En IRM, plus la concentration en cations paramagnétiques est élevée dans la zone étudiée, meilleur sera le contraste.

DOCUMENT 2 : Les configurations électroniques blocs par blocs

Bloc s	[gaz noble précédent] ns^x
Bloc p	[gaz noble précédent] $ns^2 [(n-2)f^{14}] [(n-1)d^{10}] np^x$
Bloc d	[gaz noble précédent] $ns^2 [(n-2)f^{14}] (n-1)d^x$
Bloc f	[gaz noble précédent] $ns^2 (n-2)f^x (n-1)d^1$

Lors de l'ionisation des éléments du bloc d, les électrons des orbitales ns sont enlevés avant ceux des orbitales $(n - 1)d$. Lors de l'ionisation des éléments du bloc f, les électrons sont enlevés dans l'ordre suivant : ns , $(n - 1)d$ puis $(n - 2)f$.

Données :

- Tous les éléments situés après l'uranium ($Z = 92$) sont artificiels.
- Classification périodique p. 671.

Problème à résoudre : Quel élément naturel est le mieux adapté pour être utilisé comme agent de contraste en IRM ?

Conseil

Les exercices n° 1, 2, 3 et 4 sont des illustrations des points méthodes du cours. La démarche est structurée à l'aide de symboles ➔, il est conseillé de s'en inspirer dans les exercices similaires.

1 Un monde quantique

➔ énoncé p. 548

- ❶ Les ondes électromagnétiques se classent de la moins énergétique à la plus énergétique suivant : ondes hertziennes, micro-ondes, infra-rouges, visibles, UV, rayons X.
- ❷ En **spectroscopie d'absorption**, la matière utilise l'énergie d'un photon pour passer de l'état fondamental à un état excité et on enregistre les photons absorbés par la matière.
En **spectroscopie d'émission**, une entité initialement excitée par une perturbation annexe (électrique, thermique, etc.), se désexcite en émettant un photon. On enregistre alors les photons émis.
- ❸ Les radiations les moins énergétiques correspondent aux transitions $5, 4, 3 \rightarrow 2$.

Pour les calculer il faut utiliser le **point méthode** p. 541 :

➔ Convertir les données de l'énoncé dans le système international (distance en m, énergie en J).

- $n = 3 \rightarrow n = 2$:

$$\Delta E = E_3 - E_2 = -13,6 \times \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4} \right) = 1,89 \text{ eV} = 1,89 \times 1,60 \cdot 10^{-19} = 3,02 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

➔ Appliquer la formule liant énergie et longueur d'onde : $\Delta E_{\text{entité}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{photon}}}$

$$\text{Donc } \lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3,00 \cdot 10^8}{3,02 \cdot 10^{-19}} \Rightarrow \boxed{\lambda = 6,57 \cdot 10^{-7} \text{ m}}$$

➔ Convertir le résultat pour l'exprimer avec l'unité demandée dans l'énoncé.

Ce photon a une longueur d'onde de **657 nm**. Il est dans le visible, de **couleur rouge**.

$$\bullet n = 4 \rightarrow n = 2 : \lambda = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3,00 \cdot 10^8}{-13,6 \times 1,60 \cdot 10^{-19} \times \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4} \right)} = 487 \text{ nm}. \text{ Ce photon est dans le bleu.}$$

$$\bullet n = 5 \rightarrow n = 2 : \lambda = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3,00 \cdot 10^8}{-13,6 \times 1,60 \cdot 10^{-19} \times \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{4} \right)} = 435 \text{ nm}. \text{ Ce photon est dans le violet.}$$

- ❹ La lumière rose émise par la lampe à hydrogène est due à la superposition de lumières rouge, bleue et violette.

2 Configurations électroniques

➔ énoncé p. 548

- ❶ Il s'agit des règles de **Hund**, **Klechkowski** et **Pauli** (*voir énoncés dans le cours*).
- ❷ L'occupation maximale des sous-couches est la suivante : **2** électrons pour une sous-couche s, **6** pour une sous-couche p, **10** pour une sous-couche d et **14** pour une sous-couche f.
- ❸ a) On applique la règle de Klechkowski jusqu'à arriver à « $6s^2$ ». On trouve $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 \boxed{6s^2}$. Le baryum est donc caractérisé par **Z = 56**.

b) Les électrons de valence du baryum correspondent à l'orbitale 6s. Les quadruplets caractérisant ces deux électrons sont : $(6,0,0,\frac{1}{2})$ et $(6,0,0,-\frac{1}{2})$

c) Pour prévoir la formule de l'ion baryum, utiliser le **point méthode** p. 544 :

→ **Écrire la configuration électronique de l'atome** : déjà fait dans la question ③ a).

→ **Repérer le gaz noble le plus proche** : Le gaz noble le plus proche est le xénon dont la structure électronique est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6$.

→ **L'atome s'ionise de manière à acquérir la structure électronique de ce gaz noble** : Un atome de baryum doit perdre deux électrons pour acquérir cette structure électronique.

On forme donc l'ion Ba^{2+} .

④ S : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$
Os : $[\text{Xe}]6s^2 4f^{14} 5d^6$

Pour déterminer la configuration électronique fondamentale de Zn^{2+} , utiliser le **point méthode** p. 544 :

→ **Déterminer la configuration électronique fondamentale de l'atome**. $\text{Zn} : [\text{Ar}]4s^2 3d^{10}$

→ **Les cations sont obtenus en enlevant en premier les électrons de la sous-couche la plus externe de plus grande valeur de n , même s'il ne s'agit pas de la sous-couche qui a été remplie en dernier**.

$\text{Zn}^{2+} : [\text{Ar}]4s^0 3d^{10}$

⑤ a) Les triplets caractérisent le groupe d'orbitales **6p**.

b) On a pour le plomb la configuration électronique suivante : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^2$. Les 4 électrons de valence sont en **jaune** sur la configuration précédente.

3 Promenons-nous dans la classification

→ énoncé p. 548

① In : $_{[36]}\text{Kr} 5s^2 4d^{10} 5p^1$

Pour déterminer la position de l'indium on utilise le **point méthode** p. 545 :

→ **La plus grande valeur de n donne la ligne**.

$n_{\max} = 5 \Rightarrow$ **5^e ligne**

→ **La dernière sous-couche et son occupation donnent la colonne**.

$p^1 \Rightarrow 1^{\text{re}}$ colonne du bloc p ⇒ **13^e colonne de la classification périodique**

② a) Pour déterminer la configuration électronique du sélénium on utilise le **point méthode** p. 545 :

→ **La colonne indique la dernière sous-couche occupée de l'atome**.

Le sélénium est (comme l'oxygène) dans la 4^e colonne du bloc p ⇒ p^4

→ **La ligne donne la valeur de n_{\max}** .

Quatrième ligne ⇒ $4p^4$

→ **L'application de la règle de Klechkowski permet de retrouver la configuration électronique complète et de déterminer le numéro atomique Z de l'élément**.

$\text{Se} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^4 \Rightarrow$ **Z = 34**

b) Po est situé sur la 6^e ligne, 2 lignes en dessous du sélénium $\Rightarrow Z(\text{Po}) = Z(\text{Se}) + 18 + 32 = 84$

3) La dernière sous-couche occupée du Pd est la sous-couche 4d (car $n = 4$ et $\ell = 2$) contenant 8 électrons. Il se trouve donc dans la 8^e colonne du bloc d. Sa configuration est donc : $[_{36}\text{Kr}] 5s^24d^8$.

$$\Rightarrow Z(\text{Pd}) = 36 + 10 = 46 ; \text{ 5}^{\text{e}} \text{ ligne et } \text{10}^{\text{e}} \text{ colonne}$$

4 Étude des éléments du bloc s

→ énoncé p. 549

- 1) La première colonne est la colonne des **alcalins**. La deuxième colonne est celle des **alcalino-terreux**.
- 2) La configuration électronique du magnésium est $[_{10}\text{Ne}]3s^2$. Il est donc situé dans la 2^e colonne (alcalino-terreux) et sur la 3^e ligne \Rightarrow son électronégativité est faible \Rightarrow c'est un **réducteur**.
- 3) Sr se trouve dans la même colonne que Mg, c'est donc un réducteur. Étant plus bas dans la classification périodique, il est moins électronégatif que Mg \Rightarrow **Sr est plus réducteur que Mg.**
- 4) La configuration électronique du chlore est : $[_{10}\text{Ne}]3s^23p^5$. Il se trouve sur la 3^e ligne et la 5^e colonne du bloc p, soit la 17^e colonne de la classification périodique. L'anion est Cl^- et le cation est Cs^+ .

Résolution de problème : Imagerie par résonance magnétique

→ énoncé p. 549

Analyse rapide des documents :

L'élément métallique doit être présent sous la forme M^{3+} (*voir document 1*).

L'agent de contraste est efficace s'il possède un grand nombre d'électrons célibataires (*voir document 1*).

Démarche : L'élément le mieux adapté est celui pouvant donner un ion M^{3+} avec un grand nombre d'électrons célibataires.

Résolution du problème : D'après la règle de Hund, les éléments pouvant présenter le plus d'électrons célibataires sont ceux ayant une sous-couche f à demi-remplie.

Bloc	Orbitale caractéristique	Nombre maximal d'électrons célibataires
Bloc s	ns	1
Bloc p	np	3
Bloc d	$(n - 1)d$	5
Bloc f	$(n - 2)f$	7

On cherche donc un ion M^{3+} de configuration $(n - 2)f^7$. D'après le document 2 donnant les configurations électroniques générales et les règles d'ionisation, le métal associé à cet ion doit avoir une configuration du type : $ns^2(n - 2)f^7(n - 1)d^1$. Il s'agit donc du gadolinium (6^e période, $Z = 64$) ou du curium (7^e période, $Z = 96$).

Le curium n'est pas un élément naturel ($Z > 92$), il ne convient pas.

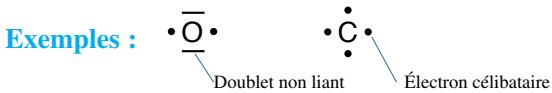
Conclusion : Le meilleur élément naturel pour fabriquer des agents de contraste est le **gadolinium**. C'est effectivement celui qui est utilisé en médecine.

Molécules – Forces intermoléculaires – Solvants

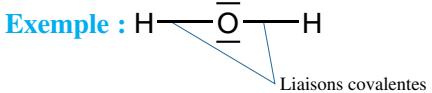
I La théorie de Lewis

1. La liaison covalente

- Schéma de Lewis d'un atome :** Représentation indiquant la configuration électronique de valence. Si le nombre total d'électrons de valence d'un atome est inférieur ou égal à quatre, comme pour le carbone, on considère qu'ils sont célibataires et on ne représente que des points.



- Une **liaison covalente** entre deux atomes résulte de la mise en commun de deux électrons.



2. Règle de l'octet et représentation de Lewis d'une molécule

- Dans la théorie de Lewis, les deux électrons d'un **doublet liant** appartiennent aux deux atomes liés. La formation d'une liaison permet alors à un atome d'augmenter le nombre d'électrons qui l'entourent.

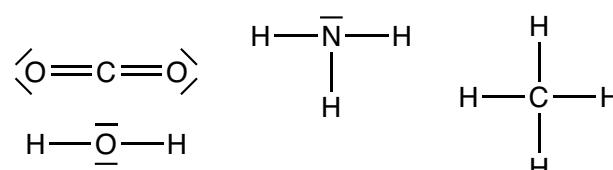
Énoncé

Règle de l'octet : Les atomes tendent à s'entourer de **huit électrons** (quatre doublets liants ou non liants) pour avoir la configuration d'un gaz noble de la forme ns^2np^6 ($n \geq 2$).

Remarques :

- L'hydrogène ($1s^1$) tend à avoir la configuration électronique de l'hélium ($1s^2$). Il doit donc « gagner » un seul électron et donc former une liaison covalente pour s'entourer d'un **duet** d'électrons.
- Il existe des exceptions à la règle de l'octet (voir I.5. p. 554).

- Pour établir la **représentation de Lewis d'une molécule**, on va assembler les schémas de Lewis des atomes en respectant la règle suivante : **un doublet d'électrons autour de l'hydrogène, quatre doublets d'électrons autour des autres atomes**.

Schéma de Lewis des atomes	Nombre de liaisons	Exemples des représentations de Lewis de NH ₃ , CO ₂ , H ₂ O et CH ₄
H •	1	
•C•	4	
•N•	3	
•O•	2	

Remarque : Compter le nombre total d'électrons représentés et s'assurer qu'il s'agit bien du nombre total d'électrons de valence de la molécule permet de vérifier la validité de la représentation de Lewis obtenue.

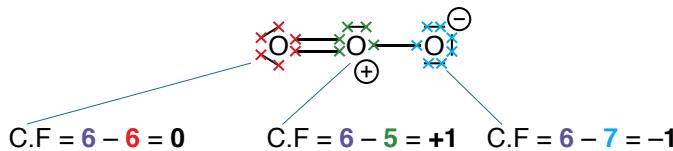
3. Notion de charge formelle

Un atome engagé dans une molécule ou un ion porte une **charge formelle** s'il n'est pas entouré du même nombre d'électrons qu'à l'état isolé. Pour calculer des charges formelles, on suppose que chaque doublet liant est partagé équitablement par les deux atomes :

$$\text{C.F} = N_{\text{seul}} - N_{\text{entité}}$$

N_{seul} est le nombre total d'électrons de valence de cet atome lorsqu'il est isolé, $N_{\text{entité}}$ est le nombre d'électrons appartenant en propre à l'atome dans l'entité (un électron par doublet liant et deux électrons par doublet non liant).

Exemple : Calcul des charges formelles dans l'ozone O_3 (O possède 6 électrons de valence $\Rightarrow N_{\text{seul}} = 6$)



4. Représentations de Lewis des ions polyatomiques

POINT MÉTHODE

Déterminer la représentation de Lewis d'un ion polyatomique

- Donner un schéma de Lewis de chaque atome.
- Si l'entité moléculaire est chargée :
 - Négativement, ajouter autant d'électrons que de charges négatives à l'atome (ou aux atomes) le(s) plus électronégatif(s). **Exemple :** NO_2^- ; $\bullet \overline{\text{N}} \cdot \bullet \overline{\text{O}}^{\ominus} \cdot \overline{\text{O}} \cdot$
 - Positivement, enlever autant d'électrons que de charges positives à l'atome (ou aux atomes) le(s) moins électronégatif(s). **Exemple :** NO_2^+ ; $\bullet \overline{\text{N}}^{\oplus} \cdot \bullet \overline{\text{O}} \cdot \bullet \overline{\text{O}} \cdot$
- Assembler les schémas de Lewis obtenus en créant des liaisons entre électrons non appariés.

Exemples : NO_2^- donne $\overset{\ominus}{\text{O}} \text{---} \overline{\text{N}}=\text{O}$; NO_2^+ donne $\langle \text{O}=\text{N}^{\oplus}=\text{O} \rangle$;

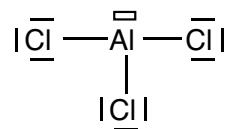
→ voir exercice n° 1 p. 561

Remarque : Dans la représentation de Lewis d'un ion polyatomique, la somme des charges formelles est toujours égale à la charge totale de l'ion.

5. Des exceptions à la règle de l'octet

→ Lacunes électroniques

- Dans le trichlorure d'aluminium AlCl_3 , l'aluminium ne forme que trois liaisons covalentes car il possède uniquement trois électrons de valence. Il lui manque un doublet pour respecter la règle de l'octet, il porte donc une **lacune électronique**.



→ Hypervalence

Définition

Dans une entité donnée, un atome est **hypervalent** s'il possède plus de doublets autour de lui que ne le prévoit la règle de l'octet.

Exemple : Dans l'hexafluorure de soufre (SF_6), le soufre forme six liaisons, il met donc en commun ses six électrons de valence et possède alors six doublets autour de lui au lieu de quatre.

Tous les atomes ne peuvent pas être hypervalents ; ils doivent pour cela posséder des orbitales proches non occupées pouvant être remplies par cet excès d'électrons.

C'est uniquement le cas des atomes appartenant aux périodes $n \geq 3$, à cause de l'existence des OA nd .

Conséquence : Lorsqu'on cherche à construire la représentation de Lewis d'une entité possédant un atome pouvant être hypervalent, on peut « casser » un doublet non liant en deux électrons célibataires.

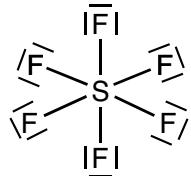
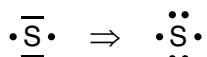


Schéma de Lewis	$\cdot\overline{\text{P}}\cdot$ $\cdot\ddot{\text{P}}\cdot$	$\cdot\overline{\text{S}}\cdot$ $\cdot\ddot{\text{S}}\cdot$ $\cdot\ddot{\text{S}}\cdot$	$\cdot\overline{\text{Cl}}\cdot$ $\cdot\ddot{\text{Cl}}\cdot$ $\cdot\ddot{\text{Cl}}\cdot$ $\cdot\ddot{\text{Cl}}\cdot$
Nombre de liaisons	3 ou 5	2 ou 4 ou 6	1 ou 3 ou 5 ou 7

Remarque : Pour construire la représentation de Lewis de l'hexafluorure de soufre, on a cassé les deux doublets non liants du soufre.



6. Longueur et énergie de liaison

Définitions

- La **longueur d'une liaison A–B** correspond à la distance d_{AB} entre les deux noyaux à l'équilibre. Ordre de grandeur : 100-200 pm.
- L'**énergie de la liaison A–B**, notée D_{AB} , est l'énergie à fournir pour réaliser la réaction suivante : $\text{A–B(g)} \rightarrow \text{A(g)} + \text{B(g)}$. D_{AB} est une grandeur toujours positive. Ordre de grandeur : 100-800 kJ.mol⁻¹.

- La longueur de liaison d_{AB} est d'autant plus grande que les atomes liés sont volumineux.
- Plus la longueur de liaison d_{AB} est grande, plus l'énergie de liaison D_{AB} est petite.
- L'énergie de liaison augmente et la longueur de liaison diminue lorsque la multiplicité des liaisons augmente.

Exemples :

Liaison	$\text{C}\equiv\text{C}$	$\text{C}=\text{C}$	$\text{C}-\text{C}$	$\text{H}-\text{Cl}$	$\text{H}-\text{F}$
d (pm)	120	134	154	127	92
D (kJ.mol ⁻¹)	835	602	346	432	570

II | Polarité et polarisabilité des molécules

1. Liaison polarisée

- Une **liaison** est **polarisée** si elle relie deux atomes d'électronégativités différentes.

Exemple : La liaison H–Cl est polarisée car $\chi_{\text{Cl}} > \chi_{\text{H}}$. On note la molécule : $\text{H}^{\delta+} — \text{Cl}^{\delta-}$.

- Le **moment dipolaire** d'une liaison polarisée A–B, noté $\overrightarrow{\mu}_{AB}$, est un vecteur dirigé le long de cette liaison, orienté de l'atome portant la charge $\delta-$ vers l'atome portant la charge $\delta+$. Sa norme se calcule grâce à la relation :

$$\left| \overrightarrow{\mu}_{AB} \right| = q d_{AB}$$

Moment dipolaire (C.m) Longueur de la liaison A–B (m)
 Valeur absolue de la charge portée par chaque atome (C)

- Le **pourcentage d'ionicité** ou le **caractère ionique partiel**, noté δ , est sans unité. Il est défini par :

$$\delta = \frac{|q|}{e} \quad \text{où } e \text{ est la charge élémentaire } (e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}).$$

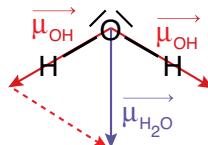
Remarque : Le moment dipolaire s'exprime aussi en Debye, noté D ($1 \text{ D} = 3,34 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$).

2. Molécule polaire

Définition

Le **moment dipolaire d'une molécule** est la somme vectorielle des moments dipolaires de chaque liaison polarisée de la molécule. Une molécule est dite **polaire** si elle a un moment dipolaire non nul.

Exemple :



Remarque : La méthode permettant de déterminer la géométrie d'une molécule est hors programme (méthode VSEPR), l'énoncé doit donc obligatoirement fournir la représentation dans l'espace de la molécule étudiée.

POINT MÉTHODE

Reconnaitre une molécule polaire

- Utiliser **impérativement** la représentation spatiale de la molécule.
- Repérer les liaisons polarisées et indiquer les charges partielles des atomes grâce aux valeurs d'électronégativité.
- Représenter les moments dipolaires des liaisons polarisées.
- Faire la somme vectorielle. Si cette somme est nulle, la molécule est apolaire. Dans le cas contraire, elle est polaire.

→ voir exercice n° 2 p. 561

3. Polarisabilité d'une molécule

Définition

On appelle **polarisabilité** d'une molécule l'aptitude de son nuage électronique à subir une déformation sous l'effet d'un champ électrique.

La **polarisabilité** d'une molécule est d'autant plus grande que la molécule est **volumineuse** et que les liaisons sont **multiples**.

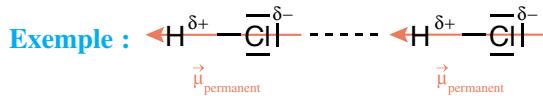
Exemple : La polarisabilité du diiode I_2 est plus grande que celle du dichlore Cl_2 car son nuage électro-nique est beaucoup plus gros et diffus, donc plus facilement déformable.

III | Forces intermoléculaires

1. Interactions dipôle – dipôle de Van der Waals

→ Interaction de Keesom

Lorsque deux molécules possèdent chacune un moment dipolaire permanent, elles s'attirent et s'orientent en raison d'interactions attractives entre charges partielles de signes opposés et d'interactions répulsives entre charges partielles de même signe.

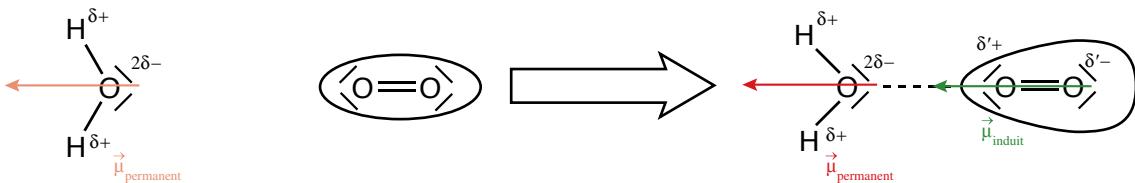


L'**interaction de Keesom**, ou interaction **dipôle permanent-dipôle permanent**, existe entre deux molécules polaires.

→ Interaction de Debye

Une molécule polaire crée autour d'elle un champ électrique qui peut polariser une molécule voisine (polaire ou apolaire) c'est-à-dire déformer son nuage électronique et faire apparaître un moment dipolaire induit. Une interaction attractive apparaît alors entre ces deux moments dipolaires.

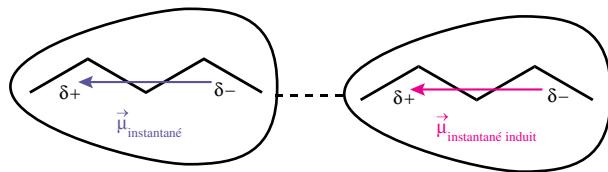
Exemple :



L'**interaction de Debye**, ou interaction **dipôle permanent-dipôle induit**, existe entre une molécule polaire et une molécule polarisable.

→ Interaction de London

Une molécule polarisable possède un moment dipolaire instantané dû à la déformation de son nuage électronique. La moyenne dans le temps de ce moment dipolaire instantané est nulle pour une molécule apolaire et non nulle pour une molécule polaire (présence d'un moment dipolaire permanent). Ce moment dipolaire instantané entraîne l'apparition d'un moment dipolaire induit sur la molécule voisine. On observera alors une interaction attractive entre les deux molécules.

Exemple :

L'interaction de London, ou interaction **dipôle instantané-dipôle induit**, existe entre deux molécules polarisables.

→ Conclusions

Nature des molécules en interaction	Interaction de Keesom	Interaction de Debye	Interaction de London
Polaire/polaire	Oui	Oui	Oui
Polaire/apolaire	Non	Oui	Oui
Apolaire/apolaire	Non	Non	Oui

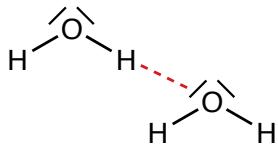
- L'ordre de grandeur de l'énergie d'une interaction de **Van der Waals** est de **1 à 10 kJ.mol⁻¹**.
- La **contribution de London** est la **plus importante**, sauf pour l'eau qui est très polaire mais peu polarisable.

Exemple : Pour HI, $E_K = 0,07 \text{ kJ.mol}^{-1}$, $E_D = 0,43 \text{ kJ.mol}^{-1}$ et $E_L = 73,1 \text{ kJ.mol}^{-1}$

2. La liaison hydrogène

Définition

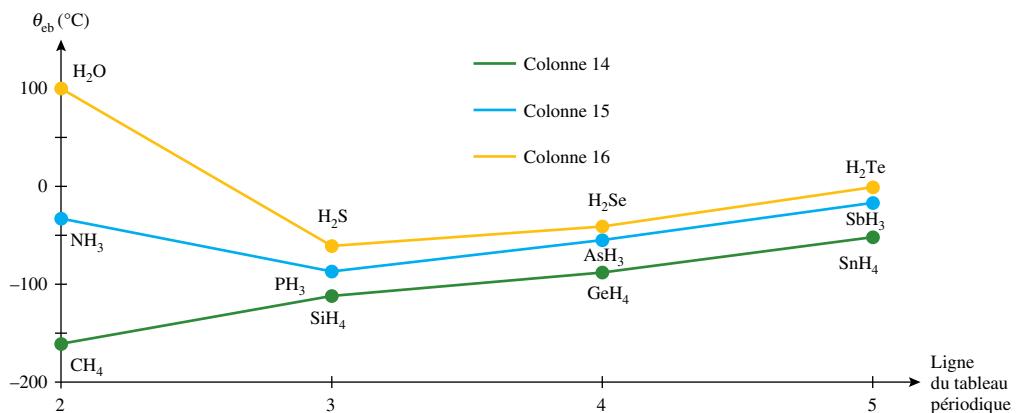
Une **liaison hydrogène** peut se former entre un atome d'hydrogène lié à un atome X fortement électronégatif (N, O ou F) et un atome Y, lui aussi fortement électronégatif et possédant un doublet non liant (N, O ou F) : $\begin{matrix} \delta- & \delta+ & \delta- \\ | & | & | \\ X & -H & -\cdots- & | Y \end{matrix}$

Exemple :

- L'ordre de grandeur de l'énergie d'une **liaison hydrogène (cas général)** est de **8 à 50 kJ.mol⁻¹**.
- La liaison hydrogène est **directionnelle** : son intensité est maximale quand X, H et Y sont alignés.

3. Cohésion des corps purs

- Les forces intermoléculaires (interactions de Van der Waals et liaisons hydrogène) assurent la **cohésion** des liquides et des solides moléculaires. **Plus ces interactions sont fortes, plus la cohésion est grande et donc plus les températures de changement d'état sont élevées.** En effet, la fusion ou la vaporisation d'un corps pur nécessitent la rupture de liaisons intermoléculaires.
- Le graphique ci-après représente la température d'ébullition des composés hydrogénés des éléments des colonnes 14, 15 et 16 du tableau périodique en fonction de la période à laquelle ils appartiennent.



Tendance générale : La température d'ébullition augmente quand on « descend » dans une colonne du tableau périodique car les interactions de type London (contribution la plus importante des trois interactions de Van der Waals) sont de plus en plus intenses (la polarisabilité des composés augmente car le rayon atomique de l'élément central augmente).

Deux anomalies observées : Pour H₂O et NH₃, les températures d'ébullition apparaissent anormalement élevées par rapport à la tendance générale. Cela s'explique par l'existence de liaisons hydrogène (d'intensité plus grande que les interactions de Van der Waals).

IV Les solvants moléculaires

1. Processus de mise en solution

- La **mise en solution** d'un soluté résulte de deux processus : la rupture des interactions soluté/soluté (ou **dissociation**), et l'établissement d'interactions soluté/solvant (ou **solvatation**).
- Pour qu'un soluté soit soluble dans un solvant, c'est-à-dire pour que la réalisation des processus de dispersion et de solvatation soit favorable, il faut que l'énergie des **interactions soluté/solvant** soit au moins du **même ordre de grandeur** que celle des **interactions soluté/soluté**.

Exemple : Le cyclohexane, molécule apolaire très polarisable associée par des interactions de London, est très peu soluble dans l'eau car la molécule d'eau est très peu polarisable.

Remarque : On parle de **miscibilité** (et non de solubilité) lorsqu'on mélange deux liquides en quantités comparables. Ces liquides peuvent être totalement miscibles (eau-éthanol), partiellement miscibles (eau-éther diéthylique) ou non miscibles (eau-cyclohexane).

2. Classification des solvants

- Un solvant est **polaire** lorsque les molécules qui le constituent possèdent un moment dipolaire permanent non nul. Sinon, il est **apolaire**.
- Un solvant est **protique (protogène)** si les molécules qui le constituent sont liées entre elles par des liaisons hydrogène. Sinon, il est **aprotique**.
- Un solvant est **dissociant** lorsque les ions provenant d'un soluté ionique sont libres en solution. Au contraire, si ces ions existent sous forme de **paires d'ions** de signes opposés, le solvant est dit **non dissociant**.
- La **permittivité relative** d'un solvant, notée ϵ_r , est une grandeur sans dimension qui traduit l'effet de ce solvant sur les interactions électrostatiques. Plus elle est grande, plus les interactions électrostatiques sont faibles. Ainsi, un solvant possédant une **grande permittivité relative** ($\epsilon_r > 30$) est un **solvant dissociant** alors qu'un solvant possédant une **faible permittivité relative** ($\epsilon_r < 10$) est un **solvant non dissociant**.

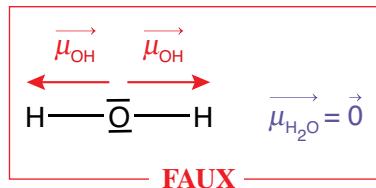
Remarque : Un solvant apolaire est nécessairement aprotique et non dissociant.

Questions de cours

- Énoncer la règle de l'octet et l'illustrer sur des exemples. Quelles en sont les limites ?
- Définir les termes « liaison polarisée » et « molécule polaire » et les illustrer sur des exemples.
- Décrire les interactions de Van der Waals et la liaison hydrogène.
- Classification de solvants. Exemples.

Erreurs à éviter

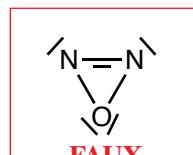
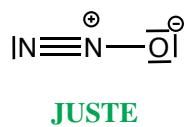
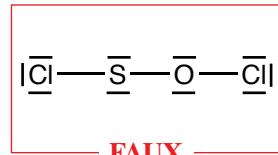
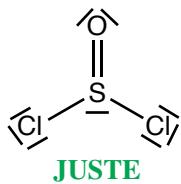
- Le phénomène d'hypervalence est impossible pour les éléments des 1^{re} et 2^e périodes de la classification périodique car il n'existe pas d'OA d pour $n < 3$.
- Pour déterminer si une molécule est polaire il faut absolument la représenter dans l'espace. Par exemple si H₂O était mal représentée, on pourrait la considérer apolaire.



- Les molécules polaires sont liées entre elles par les trois types d'interactions de Van der Waals. Ne surtout pas penser uniquement aux interactions de Keesom, d'autant que celles de London sont les plus importantes en général.
- Le phénomène de polarisabilité n'existe pas que pour les molécules apolaires. Le moment dipolaire induit se superpose au moment dipolaire permanent lorsque l'on considère une molécule polaire.

Quelques « trucs » utiles

- Lorsqu'un énoncé demande « la » structure de Lewis d'une molécule, seule la forme réelle la plus représentative est attendue. Sauf contre-indication de l'énoncé, éviter les molécules à longues chaînes (sauf les chaînes carbonées), les liaisons O–O trop fragiles (sauf dans les peroxydes) et les cycles :



- Pour classer des corps purs par températures de changement d'état croissantes, il faut bien lister au préalable toutes les forces intermoléculaires mises en jeu pour pouvoir ensuite bien les comparer.
- Une espèce qui ne possède pas d'hydrogène lié à N, O ou F, mais qui possède des doublets non liants sur un atome très électronégatif (N, O ou F), n'est pas protique, mais peut **accepter des liaisons hydrogènes** en présence d'une molécule protique. On dit qu'elle est **protopophile**. La solubilité dans l'eau d'une espèce polaire protophile est plus grande que celle d'une espèce polaire non protophile mais plus faible que celle d'une espèce protique.
- Pour étudier la solubilité d'un soluté dans un solvant, on se réfère souvent à l'expression « les semblables dissolvent les semblables » ou *like dissolves like* en anglais.

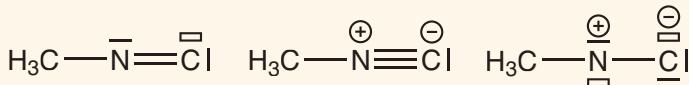
1 Représentations de Lewis (d'après Olympiades internationales 2013 et 2014) ★★ → corrigé p. 563

- ① Pour chaque molécule, identifier en justifiant la représentation de Lewis correcte. Expliquer pourquoi les autres représentations de Lewis données sont fausses.

a) Protoxyde d'azote N₂O



b) Méthylisonitrile CH₃—NC



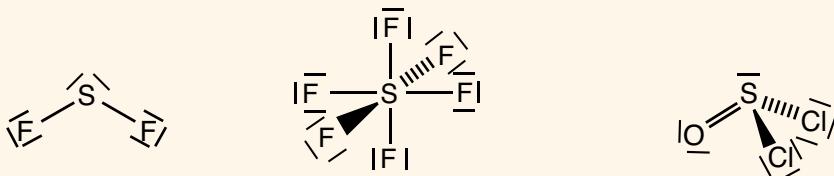
- ② Écrire la formule de Lewis des molécules et ions suivants : H₂S, HO⁻, O₃ et PCl₅.

- ③ Donner la représentation de Lewis de l'ion polyatomique SF₃⁺.

2 Déterminer la polarité d'une molécule ★

→ corrigé p. 564

On donne les structures de Lewis dans l'espace des molécules soufrées suivantes. Indiquer lesquelles sont polaires en justifiant et représenter, le cas échéant, leur moment dipolaire.



Données : $\chi(\text{F}) = 4,0$; $\chi(\text{O}) = 3,4$; $\chi(\text{Cl}) = 3,2$; $\chi(\text{S}) = 2,6$.

3 Monoxyde de carbone (d'après Agrégation externe de sciences physiques 2014) ★★★ → corrigé p. 565

- ① Donner deux structures de Lewis plausibles pour le monoxyde de carbone CO.
- ② À l'aide des données expérimentales ci-dessous, identifier la vraie structure de Lewis. Comment aurait-on pu prévoir que c'était celle-ci ?
- ③ Donner trois exemples de molécules ou ions isoélectroniques du monoxyde de carbone. On donnera leur représentation de Lewis.
- ④ Le pourcentage d'ionicité de la liaison CO est de 2,0 %. Déterminer puis représenter le moment dipolaire de la molécule de CO sachant que le signe des charges partielles est le même que celui donné par la représentation de Lewis.
- ⑤ D'après la formule de Lewis, quelle charge est portée par chaque atome ? Comment expliquer que le pourcentage d'ionicité, donné à la question précédente, soit seulement de 2,0 % ?

Données :

- Longueur de la liaison CO (dans la molécule de CO) : 112,8 pm
- Longueur de la liaison C=O (groupe carbonyle) : 123 pm
- $1 \text{ D} = 3,34 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

4 Températures d'ébullition de plusieurs corps purs ★

→ corrigé p. 565

Les températures d'ébullition de différents corps purs sont données dans le tableau suivant.

Corps pur	θ_{eb} (°C)
Diéthylsulfure ($\text{CH}_3\text{--CH}_2\text{--S--CH}_2\text{--CH}_3$)	92
Chlorure de sodium (NaCl)	1465
Butan-1-ol ($\text{CH}_3\text{--}(\text{CH}_2)_2\text{--CH}_2\text{--OH}$)	117
Argon (Ar)	-186
2-méthylbutane ($\text{CH}_3\text{--CH}(\text{CH}_3)\text{--CH}_2\text{--CH}_3$)	28
Pentan-1-ol ($\text{CH}_3\text{--}(\text{CH}_2)_3\text{--CH}_2\text{--OH}$)	138
Éther diéthylique ($\text{CH}_3\text{--CH}_2\text{--O--CH}_2\text{--CH}_3$)	35
Hélium (He)	-269

- Pour chacun de ces corps purs, indiquer les interactions responsables de la cohésion et s'il y en a plusieurs, préciser celle qui est la plus importante.
- Classer ces composés par température d'ébullition décroissante. Justifier l'évolution observée.

5 Solubilités ★

→ corrigé p. 566

- Classer par ordre croissant de solubilité dans l'eau : l'acide formique (méthanoïque), le chlorométhane et le méthanal.
- Expliquer la différence de solubilité dans l'eau à 0 °C de l'ozone $\text{O}_3(\text{g})$ ($1,0 \text{ g.L}^{-1}$) et du dioxygène $\text{O}_2(\text{g})$ ($1,5 \cdot 10^{-2} \text{ g.L}^{-1}$).

6 Extraction liquide – liquide ★★

→ corrigé p. 566

On appelle **extraction liquide-liquide** d'un soluté, le fait de retirer ce soluté d'un solvant dans lequel il est initialement en solution en le solubilisant dans un autre solvant. Cette opération se fait dans une **ampoule à décanter**. Deux conditions sont à remplir :

- le soluté doit être plus soluble dans le solvant dit extracteur que dans le solvant dans lequel il est initialement en solution ;
- les deux solvants ne doivent pas être miscibles.

On souhaite extraire le diiode I_2 d'une solution aqueuse par du cyclohexane.

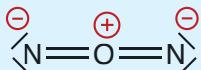
- Pourquoi le solvant extracteur et le solvant initial ne doivent-ils pas être miscibles ?
- Justifier le fait que le cyclohexane et l'eau ne soient pas miscibles.
- Justifier le fait que le diiode soit plus soluble dans le cyclohexane que dans l'eau. On précisera les interactions soluté-solvant mises en jeu.

Conseil

Les exercices n° 1 et 2 sont des illustrations des points méthodes du cours. La démarche est structurée à l'aide de symboles ↗, il est conseillé de s'en inspirer dans les exercices similaires.

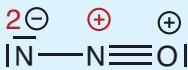
1 Représentations de Lewis (d'après Olympiades internationales)

→ énoncé p. 561

1 a) Protoxyde d'azote N₂O

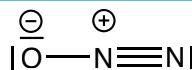
FAUX

- Il manque les charges formelles.
- Il s'agit en fait de N₂O⁺.
- Il faudrait que N soit central.

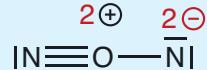


FAUX

- Problèmes sur les charges formelles.

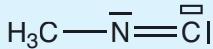


Représentation correcte.



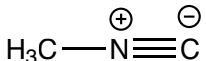
FAUX

- Problèmes sur les charges formelles.
- Il faudrait que N soit central.

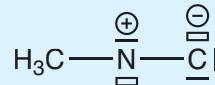
b) Méthylisonitrile CH₃—NC

FAUX car

- C ne respecte pas la règle de l'octet.



Représentation correcte.



FAUX car ni N ni C

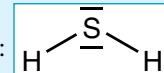
- ne respectent la règle de l'octet.

- 2** L'oxygène possède six électrons de valence. Le soufre, situé en dessous de lui dans le tableau périodique, aussi. L'hydrogène possède un électron de valence. Le chlore est un halogène, il possède sept électrons de valence. Le phosphore, situé sous l'azote, en possède cinq.

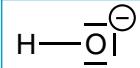
On peut donc donner les schémas de Lewis des différents atomes étudiés :



En appariant les électrons célibataires, on peut former directement H₂S :

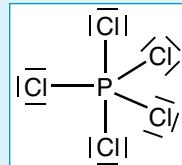


Pour HO⁻, on ajoute un électron à l'atome d'oxygène, qui devient : •O[−], on obtient alors :

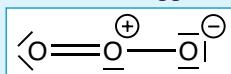


Pour obtenir PCl₅, il est nécessaire de casser le doublet du phosphore : •P• → •P•. Cela est possible car le phosphore est dans la troisième période et peut donc être hypervalent.

On obtient alors PCl₅ :



Pour l'ozone, il est nécessaire de faire apparaître des charges formelles pour obtenir une structure qui respecte la règle de l'octet :



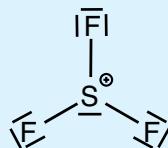
③ Pour déterminer la représentation de Lewis de SF_3^+ , on utilise le **point méthode** p. 554.

► Donner un schéma de Lewis de chaque atome : $\cdot \underline{\text{S}} \cdot \quad \cdot \underline{\text{F}} \mid$

► Si l'entité moléculaire est chargée positivement, enlever autant d'électrons que de charges positives à l'atome (ou aux atomes) le(s) moins électronégatif(s).

F étant l'élément le plus électronégatif de la classification périodique, on enlève un électron au soufre, ce qui donne : $\cdot \underline{\overset{\circ}{\text{S}}} \cdot$

► Assembler les schémas de Lewis obtenus en créant des liaisons entre électrons non appariés.



Bien comprendre

Il faut retenir par cœur la position dans la classification périodique des éléments courants : P est au-dessous de N, S est au-dessous de O, Cl est au-dessous de F.

2 Déterminer la polarité d'une molécule

→ énoncé p. 561

Pour déterminer la polarité d'une molécule, on utilise le **point méthode** p. 556.

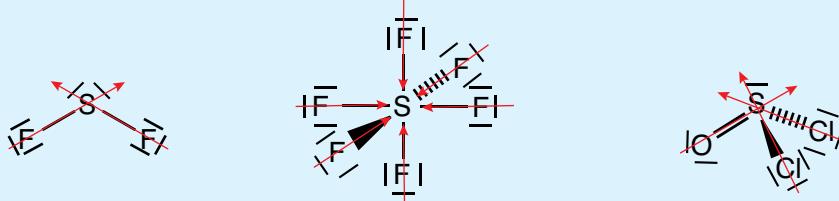
► Utiliser impérativement la représentation spatiale de la molécule. Elles sont données dans l'énoncé.

► Repérer les liaisons polarisées et indiquer les charges partielles des atomes grâce aux valeurs d'électronégativité.

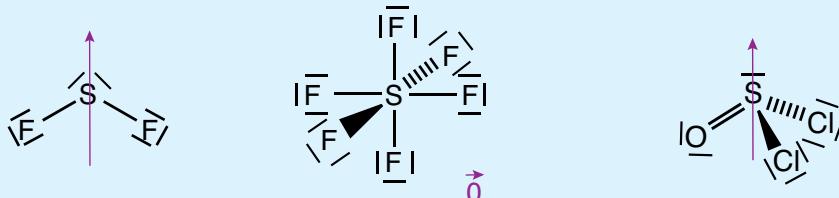
$\chi(\text{F}) > \chi(\text{S}) \Rightarrow$ La liaison SF est polarisée : $\delta^+\text{S} - \delta^-\text{F}$

$\chi(\text{O}), \chi(\text{Cl}) > \chi(\text{S}) \Rightarrow$ Les liaisons SO et SCl sont polarisées aussi : $\delta^+\text{S} = \text{O}^{\delta-}$; $\delta^+\text{S} - \text{Cl}^{\delta-}$

► Représenter les moments dipolaires des liaisons polarisées.



► Faire la somme vectorielle.



► Si cette somme est nulle, la molécule est apolaire. Dans le cas contraire, elle est polaire.

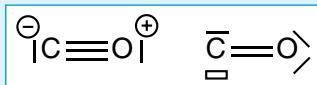
SF_2 et SOCl_2 sont polaires, SF_6 est apolaire.

3 Monoxyde de carbone

→ énoncé p. 561

- 1 Le carbone possède quatre électrons de valence et l'oxygène six. Le monoxyde de carbone possède donc au total 10 électrons de valence (5 doublets).

On peut proposer deux représentations possibles :

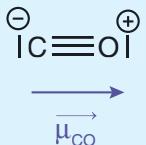


- 2 D'après les données expérimentales, la longueur de la liaison CO dans le monoxyde de carbone est plus courte qu'une liaison double C=O. On en déduit qu'il s'agit donc d'une liaison triple. La structure correcte est donc celle de gauche qui est chargée. On aurait pu le prévoir car c'est la seule où les deux atomes respectent la règle de l'octet.

- 3 Trois entités possédant dix électrons de valence : N₂, CN⁻, NO⁺ sont isoélectroniques de CO.



- 4 Le moment dipolaire de la molécule de CO est porté par la direction de la liaison CO, orienté de la charge négative (C), vers la charge positive (O).



Norme : $\|\overrightarrow{\mu_{\text{CO}}}\| = q \times d_{\text{CO}} = 0,02 \times e \times d_{\text{CO}} = 0,02 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 112,8 \cdot 10^{-12} = 3,6 \cdot 10^{-31} \text{ C.m}$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{\mu_{\text{CO}}}\| = 1,1 \cdot 10^{-1} \text{ D}$$

- 5 D'après la formule de Lewis, le carbone porte une charge négative -e et l'oxygène porte une charge positive +e ce qui devrait aboutir à 100 % d'ionicité. En réalité, comme l'oxygène est plus électronégatif que le carbone, il attire une partie des électrons de la liaison à lui, ce qui diminue en valeur absolue les charges portées et donc le pourcentage d'ionicité.

4 Températures d'ébullition de plusieurs corps purs

→ énoncé p. 562

- 1 Dans le cas où il existe plusieurs types d'interactions, celle qui a la contribution la plus importante est soulignée.

Corps pur	Interactions
Diéthylsulfure (CH ₃ -CH ₂ -S-CH ₂ -CH ₃)	Interactions de Keesom, Debye et London
Chlorure de sodium (NaCl)	Liaisons ioniques
Butan-1-ol (CH ₃ -(CH ₂) ₂ -CH ₂ -OH)	Liaisons H, interactions de Keesom, Debye et London
Argon (Ar)	Interactions de London
2-méthylbutane (CH ₃ -CH(CH ₃)-CH ₂ -CH ₃)	Interactions de London
Pentan-1-ol (CH ₃ -(CH ₂) ₃ -CH ₂ -OH)	Liaisons H, interactions de Keesom, Debye et London
Ether diéthylique (CH ₃ -CH ₂ -O-CH ₂ -CH ₃)	Interactions de Keesom, Debye et London
Hélium (He)	Interactions de London

- 2 Composés classés par θ_{eb} décroissante :

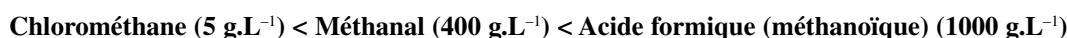
Chlorure de sodium NaCl > Pentan-1-ol CH₃-(CH₂)₃-CH₂OH > Butan-1-ol CH₃-(CH₂)₂-CH₂OH > Diéthylsulfure CH₃-CH₂-S-CH₂-CH₃ > Éther diéthylique CH₃-CH₂-O-CH₂-CH₃ > 2-méthylbutane CH₃-CH(CH₃)-CH₂-CH₃ > Argon Ar > Hélium He

- La **liaison ionique** est une liaison forte alors que les liaisons hydrogène et les interactions de Van der Waals sont des liaisons faibles, donc NaCl a la température d'ébullition la plus élevée.
- On trouve ensuite par ordre décroissant de températures d'ébullition, les composés **polaires protiques**, pouvant faire des liaisons hydrogène, puis ceux pouvant uniquement faire des interactions de Van der Waals, car les liaisons hydrogène sont plus intenses que les interactions de Van der Waals. Parmi les composés protiques, le pentanol a une température d'ébullition plus élevée que le butanol parce qu'il est plus gros donc plus polarisable. Ses interactions de London sont donc plus intenses.
- Parmi ceux liés par interactions de Van der Waals, il faut d'abord comparer l'interaction de London (la plus intense) et donc classer les composés par polarisabilité. Ainsi la température d'ébullition la plus faible correspond à l'hélium (composé le plus petit), puis on trouve l'argon. Ensuite, le 2-méthylbutane et l'éther diéthylique ont des polarisabilités comparables (sensiblement le même nombre d'atomes, de tailles comparables) mais l'éther diéthylique, polaire, possède en plus des interactions de Debye et de Keesom. Sa température d'ébullition est donc plus élevée que celle du 2-méthylbutane. Enfin, le diéthylsulfure et l'éther diéthylique sont très similaires mais comme le soufre est plus polarisable que l'oxygène, la température d'ébullition du diéthylsulfure est plus élevée que celle de l'éther diéthylique.

5 Solubilités

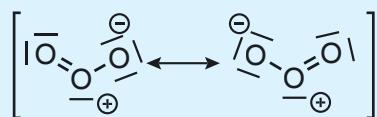
→ énoncé p. 562

- Classement par ordre de solubilité croissante dans l'eau (pour information, les valeurs de la solubilité dans l'eau sont données entre parenthèses) :



L'acide formique (méthanoïque) est le plus soluble dans l'eau car il est polaire et protique. Ensuite vient le méthanal qui est très polaire et qui peut accepter des liaisons hydrogène (le méthanal est protophile, voir *Vers la colle p. 560*). Enfin, le chlorométhane est peu polaire et ne peut pas réaliser de liaisons hydrogène, c'est donc l'espèce la moins soluble dans l'eau.

- Le dioxygène est apolaire donc peu soluble dans l'eau. En revanche, l'écriture de la structure de l'ozone met en évidence sa polarité, il est alors plus soluble dans l'eau que O_2 :



6 Extraction liquide – liquide

→ énoncé p. 562

- Le solvant extracteur et le solvant initial doivent être non miscibles pour pouvoir être séparés facilement par décantation.
- Les molécules de cyclohexane sont **apolaires**, elles sont donc associées par des **interactions de London**, alors que les molécules d'eau sont **polaires protiques**, donc associées par des **liaisons hydrogène**. Ce n'est pas du tout le même type d'interactions qui assurent la cohésion de ces deux liquides, qui ne sont donc pas miscibles.
- Le diiode est **apolaire** et **polarisable** comme le cyclohexane alors que l'eau est une molécule polaire et protique. Les interactions que le diiode peut réaliser avec le cyclohexane (London) sont donc plus intenses que celles qu'il peut réaliser avec l'eau (London et Debye dans une moindre mesure). Il est donc plus soluble dans le cyclohexane.

Solides cristallins

La science des matériaux est au cœur des grandes révolutions technologiques récentes et participe à l'amélioration de notre quotidien au travers de ses applications dans les nanotechnologies, les énergies renouvelables, l'aéronautique, ou l'environnement. Afin de concevoir des matériaux ayant les propriétés recherchées, il est donc nécessaire de maîtriser la structure de la matière, et notamment de l'état solide. Ce chapitre présente le cadre d'étude des solides cristallins afin de décrire par la suite les quatre différentes catégories de cristaux : métalliques, covalents, ioniques et moléculaires.

Outils mathématiques

- Une sphère de rayon r a un volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Un cube d'arête a a un volume $V = a^3$.
- En appliquant le théorème de Pythagore dans un cube d'arête a , on démontre que la diagonale d'une face vaut $a\sqrt{2}$ et que la grande diagonale du cube vaut $a\sqrt{3}$.

I L'état cristallin

1. Cadre d'étude

→ Modèle du cristal parfait

Dans le **modèle du cristal parfait**, les entités (atomes, ions ou molécules) sont identiques et empilées dans l'espace de manière ordonnée et périodique à l'échelle atomique. Le cristal parfait est sans défaut et de dimension infinie. Le cristal parfait est un modèle car il ne correspond pas à la réalité. Cependant, ce modèle est valable dès lors que la périodicité est observable sur des distances de l'ordre de 100 μm .

→ Modèle des sphères dures

Afin de décrire la manière dont les atomes s'agencent dans un cristal métallique, on utilise le **modèle des sphères dures**, dans lequel les atomes métalliques sont assimilés à des sphères identiques, rigides et indéformables de rayon r .

2. Définitions fondamentales de cristallographie

La théorie moderne de la cristallographie repose sur la notion de périodicité spatiale du cristal et introduit plusieurs définitions fondamentales.

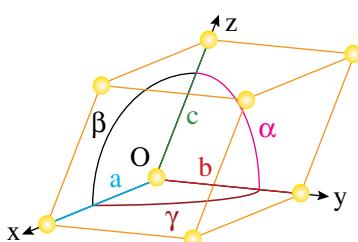


FIGURE 1 : Représentation d'une maille

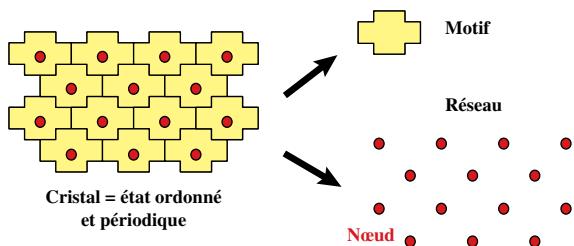


FIGURE 2 : Illustration des notions de motif et réseau

Définitions

- Une **maille** est une unité de base parallélépipédique à partir de laquelle on peut engendrer tout le cristal uniquement par des translations. Elle est définie par une origine O et trois vecteurs de base ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$).
- Les **paramètres de maille** sont les longueurs (a, b, c) des arêtes et les mesures (α, β, γ) des angles entre les vecteurs de base.
- À partir de la maille d'origine O, on peut définir l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{ON} = n\vec{a} + m\vec{b} + p\vec{c}$ avec (n, m, p) entiers relatifs. Les points N sont appelés des **nœuds**.
- L'ensemble des nœuds constitue le **réseau cristallin**. Le réseau est un « objet mathématique » descriptif de la périodicité du cristal.
- À chaque nœud de ce réseau se trouve un **motif**, c'est-à-dire un « objet physique » : atome, ion ou molécule.

Remarques :

- Il existe une infinité de mailles pouvant décrire un cristal donné. On appelle **maille élémentaire** le parallélépipède de volume minimal qui permet d'engendrer tout le cristal par translations.
- On appelle **maille conventionnelle** celle généralement utilisée pour étudier simplement le cristal.

3. Description de la maille et du cristal

Il existe 7 types de mailles différentes pouvant définir 14 types de réseaux. Quelle que soit la structure cristalline étudiée, on peut toujours définir 4 caractéristiques importantes : la **population**, la **coordonnance**, la **compacité** et la **masse volumique**.

a) Population de la maille**Définition**

La **population** (ou multiplicité) de la maille est notée **Z** et correspond au nombre de motifs totalement inclus dans la maille.

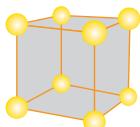
Exemple :

FIGURE 3 : Représentation éclatée de la maille

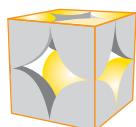


FIGURE 4 : Atomes inclus dans la maille

Dans cette structure appelée cubique simple, il y a un motif sur chaque sommet. Or chaque sommet de ce cube est partagé entre 8 mailles cubiques voisines. Seul 1/8^e du volume de chaque motif est totalement inclus dans la maille étudiée, d'où :

$$Z = 8 \times \frac{1}{8} = 1 \text{ motif par maille}$$

- Dans le cas des structures cubiques, plusieurs cas se présentent :

Résultat

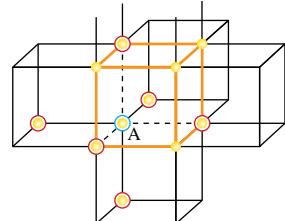
- Si le motif est sur un sommet (*voir ci-dessus*), il comptera pour 1/8.
- Si le motif est sur une arête, il comptera pour 1/4.
- Si le motif est sur une face, il comptera pour 1/2.
- Si le motif est dans le cube, il comptera pour 1.

b) Coordinence

Définition

La **coordinence** d'un atome dans une maille est le nombre de ses premiers plus proches voisins.

Exemple : Dans la structure cubique simple ci-contre, chaque atome (par exemple l'atome noté A) est entouré des atomes présents sur les sommets voisins (atomes entourés de rouge), soit 6 pour les plus proches. La coordinence vaut donc 6.



c) Masse volumique

Dans le modèle du cristal parfait, le cristal est obtenu par répétition périodique de la maille remplie de ses motifs. La masse volumique du cristal est donc égale à celle de la maille. Si une maille de volume V contient Z motifs de masse molaire M , alors la **masse volumique** du cristal vaut :

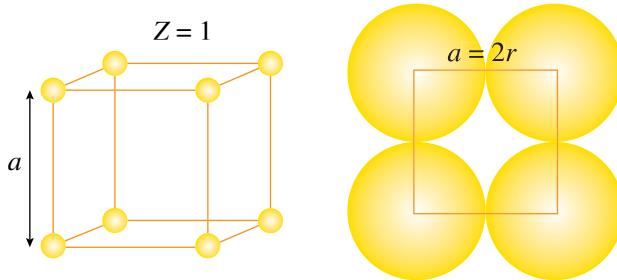
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Z \times \frac{M}{N_A}}{V} = \frac{Z \times M}{N_A \times V}$$

kg.m⁻³ kg.mol⁻¹
 Nombre d'Avogadro
 6,02.10²³ mol⁻¹ m³

d) Condition de contact (ou de tangence)

Dans les structures cristallines, les entités chimiques sont en contact. On peut donc facilement trouver une relation dite **condition de contact** entre le rayon r des sphères et les paramètres de maille (a, b, c).

Exemple : Dans la structure cubique simple d'arête a , les atomes se touchent sur les arêtes donc $2r = a$.



e) Compacité

Définition

La **compacité** est le taux de remplissage de la maille :

$$\mathcal{C} = \frac{\text{Volume occupé par la matière}}{\text{Volume de la maille}}$$

\mathcal{C} est toujours inférieur à 1, ce qui signifie qu'il y a des espaces vides dans les cristaux.

- Si la maille est un cube d'arête a qui contient Z motifs de type sphère dure de rayon r , alors la compacité s'exprime comme :

$$\mathcal{C} = \frac{Z \cdot \frac{4}{3} \pi r^3}{a^3}$$

- La condition de contact permet de simplifier l'expression. Ainsi dans le cas cubique simple ($2r = a$ et $Z = 1$), la compacité devient :

$$\mathcal{C} = \frac{1 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{(2r)^3} = \frac{\pi}{6} = 52\%$$

POINT MÉTHODE

Calculer la compacité d'une structure

- ▶ Calculer la population de la maille Z .
- ▶ Établir la condition de contact entre sphères les plus proches.
- ▶ Calculer la compacité. Le résultat est une valeur sans dimension indépendante de r et a .

→ exercice n° 1 p. 578

II Différents types de cristaux

1. Classification des cristaux

- La **cohésion d'un cristal** est assurée par des forces de natures et d'intensités différentes. On distingue les liaisons fortes (métalliques, ioniques, covalentes ; ordre de grandeur $E = 100$ à 1000 kJ.mol $^{-1}$) des liaisons faibles (ordre de grandeur $E = 1$ à 25 kJ.mol $^{-1}$).
- En fonction du type de liaison assurant la cohésion des cristaux, on les classe dans 4 catégories : **métalliques, ioniques, covalents ou moléculaires**. Il sera vu un peu plus loin dans ce chapitre les propriétés physiques propres à chaque catégorie de cristal.
- C'est l'**électronégativité** des éléments et donc leur position dans la classification périodique qui permet de prévoir la nature de l'interaction responsable de la cohésion du cristal.

Exemple : $\chi_{\text{Na}} = 0,93$ et $\chi_{\text{Cl}} = 3,16$ sont très différentes $\Rightarrow \text{NaCl}$ est un cristal ionique.

2. Allotropie

Définition

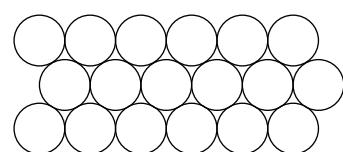
Certains composés adoptent à l'état solide différentes structures cristallines en fonction de la température et de la pression : on parle alors de différentes **variétés allotropiques**.

Exemple : À la pression standard le fer existe sous la forme α (cubique centrée) en dessous de 906 °C, et sous la forme γ (cubique à faces centrées) entre 906 °C et 1401 °C.

III Cristaux métalliques

1. Empilements compacts

- Il existe plusieurs manières d'empiler des sphères dures, selon que l'on cherche à obtenir la compacité maximale ou non. Ainsi, en 2 dimensions, la juxtaposition périodique des sphères de manière compacte s'obtient selon la figure ci-contre.
- La superposition en 3 dimensions de plans compacts conduit à deux types de structures différentes : **cubique à faces centrées (CFC)** et **hexagonale compacte (HC)**.



Empilement compact (à la base 3)

■ Nous nous intéresserons à la seule au programme de MPSI, la structure CFC, qui s'obtient par l'empilement de plans compact de la manière suivante :

– **1^{re} couche (notée A)** : Chaque atome est entouré de 6 sphères et de 6 creux. Chaque creux est généré par 3 sphères, on parle d'**empilement à base 3**.

– **2^e couche (notée B)** : Les sphères du plan B sont positionnées dans les creux du plan A. Seuls 3 creux, parmi les 6 autour d'une sphère, peuvent être occupés simultanément.

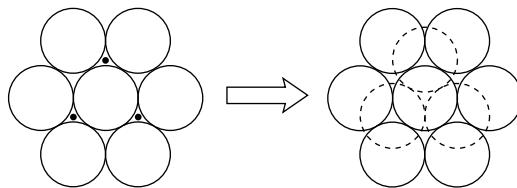


FIGURE 5 : Empilement compact de 2 plans (couches A et B)

– **3^e couche (notée C)** : Les sphères de la couche C sont à la verticale des creux inoccupés de la première couche. On parle d'empilement de type ABC-ABC.

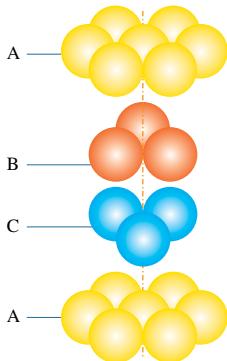


FIGURE 6A : Empilement de type ABC-ABC

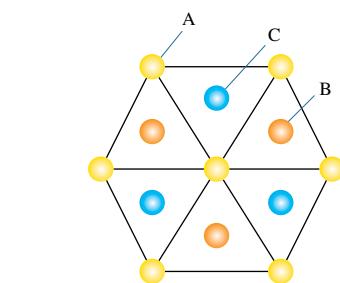
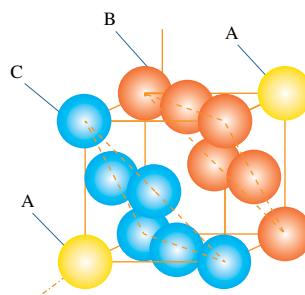


FIGURE 6B : Empilement de type ABC-ABC vu dans l'axe d'empilement

2. Liens structure-propriétés

→ Description

■ **Motifs** : Les cristaux métalliques ont pour motifs des atomes.

■ **Description du cristal** : Le cristal métallique est décrit comme un assemblage périodique de cations métalliques fixes qui partagent leurs électrons de valence.

■ **Cohésion du cristal** : La cohésion d'un cristal métallique est assurée par des **liaisons métalliques** (liaisons fortes d'énergie de liaison de l'ordre de 100 à 1 000 kJ.mol⁻¹). La liaison métallique est **non directionnelle** et les électrons sont libres, **délocalisés** sur l'ensemble du cristal.

→ Propriétés

	Propriétés	Explications
Propriétés mécaniques	Dureté variable	La liaison métallique est non directionnelle, ce qui confère au métal une certaine malléabilité.
Propriétés électriques	Excellent conduction électrique	Les électrons de valence sont délocalisés (libres), ce qui rend les métaux conducteurs.
Propriétés thermiques	Température de fusion souvent élevée	La liaison métallique est une liaison forte, l'énergie de liaison est donc élevée.

3. Exemple : la Structure Cubique à Faces centrées CFC

a) Description de la structure

La maille conventionnelle CFC est une maille cubique avec un motif sur chaque sommet et un au centre de chaque face. Elle peut être représentée de manière compacte, éclatée (ou en élévation) ou en projection pour plus de lisibilité :

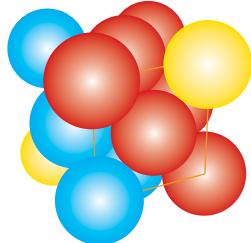


FIGURE 7A :
Représentation
compacte
de la structure CFC

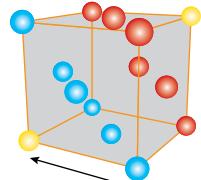


FIGURE 7B :
Représentation
éclatée
de la structure CFC

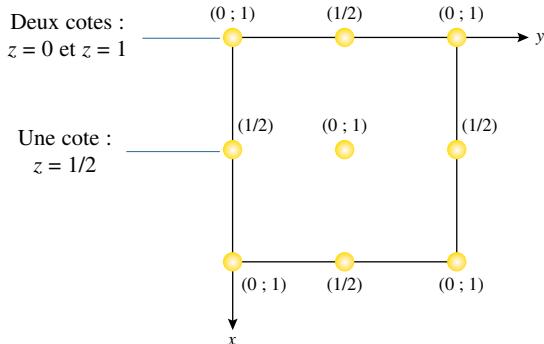
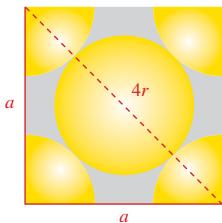


FIGURE 7C : Représentation en projection de la structure CFC dans le plan (xOy). Les chiffres positionnés à côté des sphères indiquent la cote des atomes sur l'axe z , exprimée en fraction du paramètre de maille a .

- **Coordinence :** La structure étant compacte, chaque atome a 6 voisins dans son plan, 3 voisins dans le plan du dessus et 3 dans le plan du dessous (*voir figure 6A*) \Rightarrow **coordinence 12**.
- **Population :** D'après la méthode de calcul des motifs inclus totalement dans la maille vue dans l'en-cadré résultat p. 568, la population de la structure CFC vaut $Z = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$
- **Relation entre r et a :**



Dans cette maille cubique d'arête a , les atomes de rayon r se touchent sur la diagonale des faces qui vaut $a\sqrt{2}$. La condition de contact s'écrit donc :

$$4r = a\sqrt{2} \text{ soit } r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

- **Compacité :** la compacité vaut : $C = \frac{Z \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{4 \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3}{a^3} = \pi \frac{\sqrt{2}}{6} = 74\%$. C'est la valeur maximale de la compacité puisque c'est celle des empilements compacts.

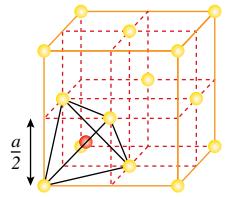
b) Sites interstitiels

- La structure CFC a une compacité de 74 % : elle contient donc 26 % de vide. Il existe alors des cavités dans la structure pouvant accueillir d'autres entités. On appelle ces cavités des **sites interstitiels**.
- **L'habitabilité** d'un site intersticiel est le rayon maximal d'une sphère pouvant s'insérer dans l'interstice, sans déformer la maille. Elle se calcule en considérant la condition de contact entre la sphère se logeant dans l'interstice et les sphères du réseau hôte.
- Dans le cas de la maille CFC, il existe deux types de sites interstitiels : les **sites tétraédriques** (au centre de 4 sphères du réseau CFC) et les **sites octaédriques** (au centre de 6 sphères du réseau CFC).

→ Sites interstitiels tétraédriques

■ Localisation :

Les **sites interstitiels tétraédriques** sont situés au centre de chacun des 8 petits cubes d'arête $\frac{a}{2}$.



■ Nombre de sites tétraédriques par maille Z_T :

Les 8 sites interstitiels tétraédriques étant dans le cube, ils sont totalement inclus dans la maille, donc $Z_T = 8$ sites tétraédriques par maille.

■ Habitabilité :

– Soit r le rayon des sphères du réseau CFC et r_T le rayon de la sphère placée dans le site tétraédrique. Le contact entre la sphère insérée et celles du réseau CFC a lieu sur la grande diagonale du cube qui vaut $a\sqrt{3}$. La condition de contact s'écrit donc :

$$\frac{a\sqrt{3}}{4} = r + r_T \quad (1)$$

– Le réseau CFC n'étant pas déformé, la condition de contact entre sphères du réseau est toujours vérifiée. On a : $4r = a\sqrt{2}$ (2).

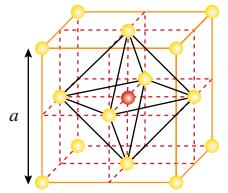
– La combinaison des relations (1) et (2) donne l'habitabilité d'un site tétraédrique :

$$r_T = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) r \simeq 0,225r$$

→ Sites interstitiels octaédriques

■ Localisation :

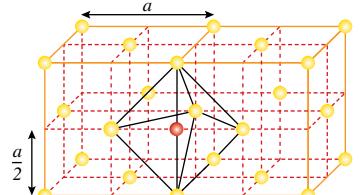
Les **sites interstitiels octaédriques** sont situés au centre du cube et au milieu de chaque arête.



■ Nombre de sites octaédriques par maille Z_O :

Le site au centre du cube est totalement inclus dans la maille. En revanche, chaque site sur une arête est partagé entre 4 mailles donc :

$Z_O = 1 + 12 \times \frac{1}{4} = 4$ sites octaédriques par maille.



■ Habitabilité :

– Soit r le rayon des sphères du réseau CFC et r_O le rayon de la sphère placée dans le site octaédrique. Le contact entre la sphère insérée et celles du réseau CFC a lieu sur l'arête du cube de longueur a . La condition de contact s'écrit donc :

$$a = 2(r_O + r) \quad (3)$$

– La condition de contact entre sphères du réseau CFC étant toujours vérifiée, on a : $4r = a\sqrt{2}$ (2)

– La combinaison des relations (2) et (3) donne l'habitabilité d'un site octaédrique :

$$r_O = (\sqrt{2} - 1) r \simeq 0,414r$$

Remarques :

- La taille des sites interstitiels est beaucoup plus petite que celle des atomes hôtes.
- On constate que les sites octaédriques sont plus « spacieux » que les tétraédriques.

IV Cristaux covalents**1. Lien structure – propriétés**

→ Description

- **Motifs :** Les cristaux covalents ont pour motifs des **atomes**.
- **Description du cristal :** Sauf exception telle que le graphite, les cristaux covalents sont formés d'une seule entité de taille macroscopique s'étendant dans les trois directions de l'espace. On parle de cristal macrocovalent.
- **Cohésion du cristal :** La cohésion d'un cristal covalent est assurée par des **liaisons covalentes** (liaisons fortes d'énergie de liaison de l'ordre de 200 à 1000 $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$). La liaison covalente est **directionnelle** (la densité électronique est maximale dans une direction privilégiée, celle reliant les deux centres atomiques) et les électrons sont **localisés** entre les atomes (sauf dans le cas du graphite).

→ Propriétés

	Propriétés	Explications
Propriétés mécaniques	Grande dureté (excepté le graphite)	La liaison covalente est une liaison directionnelle (qui empêche toute déformation) et forte.
Propriétés électriques	Isolants (excepté le graphite ou les semi-conducteurs tels que le silicium)	Les électrons de la liaison covalente restent localisés entre les atomes, ils ne sont donc pas mobiles.
Propriétés thermiques	Température de fusion très élevée Exemple : T_{fus} (diamant) = 3550 °C.	La liaison covalente étant une liaison forte, l'énergie de liaison qui en résulte est donc élevée.

2. Exemple : la structure de type diamant

- **Description de la structure :** Réseau cubique à faces centrées d'atomes de carbone avec des atomes de carbone dans la moitié des sites tétraédriques occupés de façon alternée (*voir figure 8*).

- **Coordinence :** Chaque atome est dans un environnement tétraédrique ⇒ **coordinence 4**.

- **Population :** $Z = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} + 4 = 8$

- **Relation entre r et a :** La condition de contact s'écrit $\frac{a\sqrt{3}}{4} = 2r$ avec r le rayon covalent d'un atome de carbone et a le paramètre de maille.

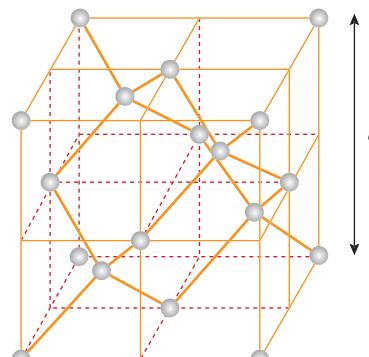


FIGURE 8 : Maille du diamant

V Cristaux ioniques**1. Lien structure – propriétés**

→ Description

- **Motifs :** Les cristaux ioniques ont pour motifs des **ions**. Le solide ionique étant électriquement **neutre**, il y a autant de charges positives que négatives.

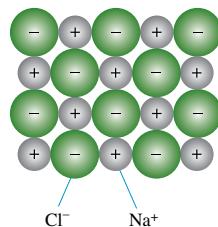


FIGURE 9 : Vue en coupe d'un cristal de NaCl

■ Modèle du cristal ionique parfait :

- Les ions sont assimilés à des sphères dures.
- Le rayon de l'anion r^- est en général supérieur au rayon du cation r^+ : $r^- > r^+$ (*voir figure 9*).
- Les ions de même signe se repoussent et les ions de signes opposés s'attirent.

■ Description usuelle du cristal : Dans un cristal ionique, les anions imposent le système d'empilement alors que les cations occupent les sites intersticiels de l'empilement ainsi défini.

■ Dans un cristal ionique, il y a non tangence entre les anions (*voir figure 9*) pour éviter de trop fortes répulsions. Il y a **tangence entre anions et cations** pour maximiser les interactions attractives (*voir figure 9*).

■ Cohésion du cristal : La cohésion d'un cristal ionique est assurée par des **liaisons ioniques** (liaisons fortes d'énergie de liaison de l'ordre de 100 à 600 $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$). Les ions de signes contraires s'attirent par des forces coulombiennes mais se repoussent quand les nuages électroniques se touchent. La liaison ionique est **non directionnelle** et la charge est **localisée** sur les ions.

➡ Propriétés

	Propriétés	Explications
Propriétés mécaniques	Cassants	Une déformation du cristal conduit à mettre face à face des ions de même signe ce qui entraîne l'apparition d'interactions coulombiennes répulsives très importantes (<i>voir figure 10</i>).
Propriétés électriques	Isolants	À l'état solide, les ions occupent des positions fixes et les charges sont localisées, ce qui explique le caractère isolant.
Propriétés thermiques	Température de fusion élevée Exemple : $T_{\text{fus}}(\text{NaCl}) = 801 \text{ }^\circ\text{C}$	La liaison ionique étant une liaison forte, l'énergie de liaison qui en résulte est donc élevée.

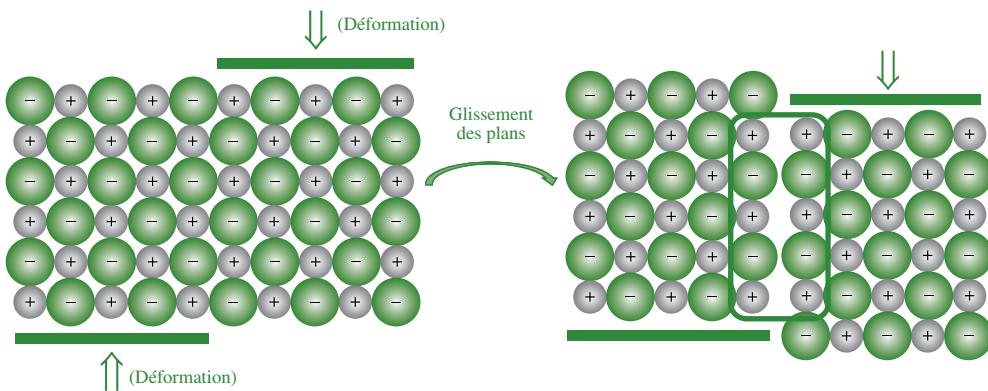


FIGURE 10 : Déformation d'un cristal ionique

2. Exemple : la structure de type NaCl

■ Le chlorure de sodium est constitué de cations Na^+ (de rayon r^+) et d'anions Cl^- (de rayon r^-).

■ Description de la structure : Réseau cubique à faces centrées (paramètre de maille a) d'ions Cl^- avec des ions Na^+ dans tous les sites octaédriques (*voir figure 11*).

■ Coordinence :

- Les cations occupent des sites octaédriques, ils sont donc en contact avec 6 anions \Rightarrow **coordinence 6**.
- Les anions sont quant à eux en contact avec 6 cations \Rightarrow **coordinence 6**.
- Pour les solides ioniques, on note en général la coordinence de la façon suivante : coordinence des cations/coordinence des anions. On parlera donc de **coordinence 6/6** pour la structure de type NaCl.

■ Population :

$$\left. \begin{array}{l} Z(\text{Cl}^-) = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4 \\ Z(\text{Na}^+) = \frac{1}{4} \times 12 + 1 = 4 \end{array} \right\} \text{Le solide est électriquement neutre.}$$

- **Vérification de la tangence anion-cation :** On considère les plus proches voisins placés sur une arête du cube. La tangence anion-cation permet d'écrire l'égalité ci-dessous.

$$a = 2r^+ + 2r^-$$

- **Vérification de la non-tangence anion-anion :** Les anions disposés selon la diagonale d'une face du cube ne doivent pas être en contact. La non-tangence anion-anion permet d'écrire l'inégalité ci-dessous.

$$a\sqrt{2} > 4r^-$$

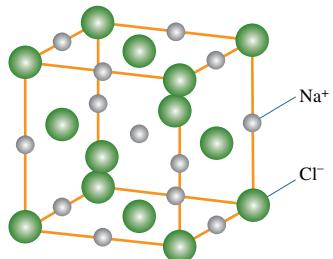


FIGURE 11 : Maille de la structure de type NaCl

VI Cristaux moléculaires

1. Lien structure – propriétés

➔ Description

- **Motifs :** Les cristaux moléculaires ont pour motifs des **molécules**.
- **Description du cristal :** Un cristal moléculaire est constitué de molécules en interaction les unes avec les autres.
- **Cohésion du cristal :** La cohésion d'un cristal moléculaire est assurée par des liaisons faibles **de Van der Waals** (énergie de liaison variant de 1 à 10 kJ.mol⁻¹) et éventuellement des **liaisons hydrogène** (énergie de liaison variant de 8 à 50 kJ.mol⁻¹). Les liaisons de Van der Waals sont **non directionnelles** alors que les liaisons hydrogène sont **directionnelles**.

➔ Propriétés

	Propriétés	Explications
Propriétés mécaniques	Fragiles	Les liaisons intermoléculaires (liaisons de Van der Waals et hydrogène) sont des liaisons faibles.
Propriétés électriques	Isolants	Les électrons ne sont pas mobiles car impliqués dans les liaisons covalentes (électrons localisés) au sein des molécules.
Propriétés thermiques	Température de fusion faible Exemple : $T_{\text{fus}}(\text{H}_2\text{O}) = 0^\circ\text{C}$	Les liaisons intermoléculaires (liaisons de Van der Waals et hydrogène) étant des liaisons faibles, l'énergie de liaison qui en résulte est donc faible.

2. Exemple : Une structure de la glace

- L'eau solide présente plusieurs variétés allotropiques. Pour des pressions élevées, la glace a une structure de type diamant : les atomes d'oxygène occupent les emplacements des atomes de carbone dans le diamant (*voir figure 12*).
- Dans la glace, la cohésion est principalement assurée par des liaisons hydrogène (mais aussi de Van der Waals).

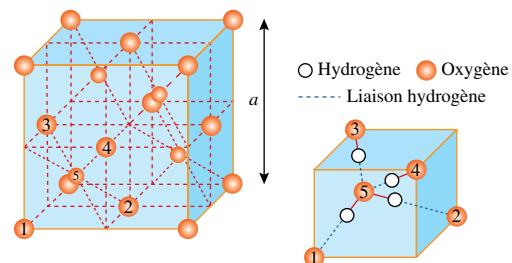


FIGURE 12 : Structure de la glace

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Définir les termes suivants : maille, noeud, réseau, motif, cristal.
- Indiquer les 4 types de solides cristallisés. Pour chacun d'eux, donner une propriété macroscopique spécifique et préciser la nature des forces de cohésion.
- Notion de variétés allotropiques ; exemples.
- Structure CFC : empilement, maille, population, coordinence et compacité.
- Définir la position et le nombre de sites interstitiels octaédriques et tétraédriques dans la structure CFC. Déterminer l'habitabilité de ces sites pour la structure CFC.
- Relation structure – propriétés pour les cristaux ioniques, moléculaires et covalents.

Remarque : Pour toutes les questions de cours, les structures autres que CFC sont fournies.

Erreurs à éviter

- Dans le calcul de la population d'une maille ou du nombre d'interstices par maille, il ne faut pas compter tous les atomes ou interstices dessinés, mais seulement la fraction des atomes ou interstices totalement inclus dans la maille.
- Masse volumique et densité donnent le même type d'information sur un solide cristallin. Pourtant, ce sont deux grandeurs différentes et il ne faut pas prendre la valeur numérique de l'une pour celle de l'autre. Exemple : si la densité d'un solide cristallin vaut 3 (sans dimension), la masse volumique vaut $3 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Quelques « trucs » utiles

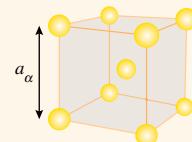
- Lors du calcul de masse volumique, on aura intérêt à prendre toutes les grandeurs dans les unités du système international. La masse molaire sera donc prise en kg.mol^{-1} , et le volume en m^3 pour obtenir ρ en kg.m^{-3} .
- Pour calculer la coordinence d'une structure CFC, il vaut mieux raisonner sur les plans d'empilement (on peut visualiser les contacts entre sphères) que sur la représentation éclatée de la maille.

1 Allotropie du fer ★★

→ corrigé p. 582

Le fer existe, à pression standard, sous plusieurs variétés allotropiques. Le fer α est stable au-dessous de 906 °C alors que le fer γ est stable entre 906 °C et 1401 °C.

- ① Le fer γ cristallise dans une structure cubique à faces centrées de paramètre de maille a_γ . Le rayon du fer dans cette structure est noté r_γ .
 - a) Calculer la coordinence d'un atome et la compacité de cette structure.
 - b) Calculer le paramètre de maille a_γ de cette structure.
 - c) Calculer la densité du fer γ .
 - d) Situer et dénombrer les sites interstitiels octaédriques et tétraédriques de cette structure.
 - e) Exprimer les rayons des sphères qui peuvent s'insérer dans ces interstices sans déformer l'empilement en fonction de r_γ . Calculer ces rayons.
- ② Le fer α de rayon métallique noté r_α cristallise dans une structure cubique centrée. La représentation de la maille conventionnelle est fournie ci-contre. Le paramètre de maille est noté a_α .



- a) Calculer la coordinence d'un atome et la compacité de cette structure. Comparer au fer γ .
- b) Sachant que la densité du cristal vaut 7,92, calculer la valeur de r_α .

Données : $M(\text{Fe}) = 55,85 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{C}) = 12,01 \text{ g.mol}^{-1}$; $r_\gamma = 126 \text{ pm}$; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

2 L'alliage Or-Nickel (d'après Mines-Ponts MP 2009) ★★

→ corrigé p. 583

L'or métallique cristallise dans un réseau cubique à faces centrées. On suppose que les atomes d'or, occupant les nœuds de ce réseau, sont des sphères rigides de rayon r_{Au} .

- ① Fournir une représentation en perspective de la maille conventionnelle. Situer précisément les atomes d'or.
- ② La structure est dite compacte. Que signifie cette affirmation ? Calculer numériquement le paramètre de maille a associé à la maille conventionnelle.
- ③ Déterminer la position des sites interstitiels octaédriques dans la maille conventionnelle de l'or. En déduire la condition d'habitabilité de ces sites, et conclure sur la possibilité d'introduction du nickel à l'intérieur de ces sites.
- ④ En fait, cet alliage peut être décrit à l'aide d'une maille cubique conventionnelle CFC dans laquelle un atome de nickel remplace un atome d'or sur chaque sommet. La masse volumique de cet alliage est notée ρ' . Exprimer la valeur du paramètre de maille a' relatif à la nouvelle maille conventionnelle en fonction de $M(\text{Au})$, $M(\text{Ni})$ et ρ' .
- ⑤ La masse volumique de l'alliage est d'environ 10 % inférieure à celle de l'or. En déduire a' avec une précision raisonnable.

Données : $M(\text{Au}) = 197 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{Ni}) = 58 \text{ g.mol}^{-1}$; $r_{\text{Au}} = 144 \text{ pm}$; $r_{\text{Ni}} = 124 \text{ pm}$; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

3 Variétés allotropiques du carbone ★★

→ corrigé p. 583

Le carbone, sous forme de charbon ou de suie, est connu depuis les temps préhistoriques mais la connaissance de ses formes pures comme le diamant ou le graphite ne date que de la fin du VIII^e siècle.

A. Préliminaire

- ① On peut classer les cristaux en différentes catégories selon la nature de la liaison principalement responsable de leur cohésion. Quelles sont ces catégories de cristaux ? Préciser la nature de la liaison associée.

B. Le diamant

La distance interatomique pour une simple liaison carbone-carbone dans le diamant est $d = 154 \text{ pm}$.

- ② Décrire en une phrase la structure cristallographique du diamant (*voir figure 13*).
 ③ Dans quelle catégorie de cristal classe-t-on le diamant ? Justifier.
 ④ Après avoir redéfini la notion de coordinence, indiquer quelle est celle des atomes de carbone dans cette structure.
 ⑤ Calculer la compacité et la masse volumique ρ_D du diamant.
 ⑥ Le diamant est-il un bon conducteur électrique ? Proposer une explication.

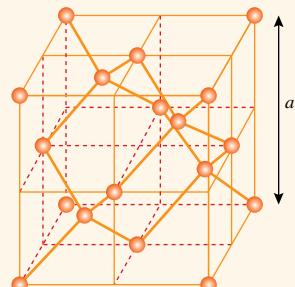


FIGURE 13 : Maille du diamant

4 Cristaux ioniques (d'après Centrale PC 2013 et CCP MP 2009) ★★★

→ corrigé p. 584

On donne ci-contre et ci-dessous trois grandes catégories de cristaux ioniques : le chlorure de césum CsCl, le chlorure de sodium NaCl et le sulfure de zinc ZnS (structure blende), soit en projection, soit en élévation. De nombreux cristaux ioniques possèdent ces structures. Par exemple le chlorure d'ammonium NH₄Cl cristallise selon une structure de type CsCl et l'iodure d'argent AgI cristallise selon une structure de type ZnS (blende).

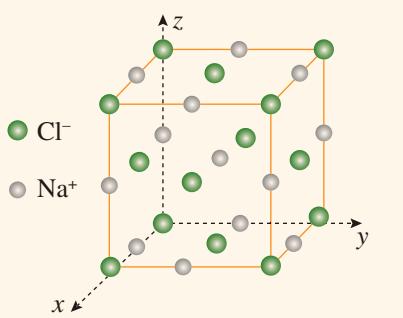
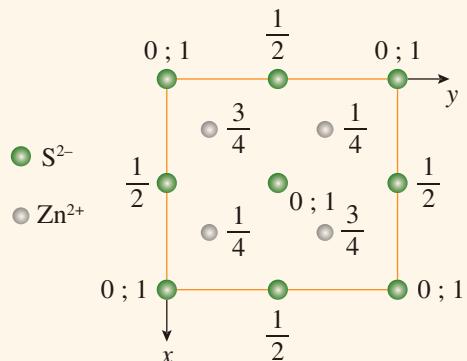
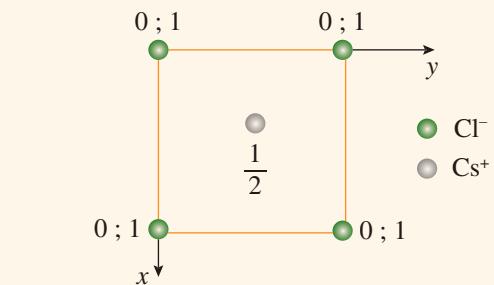


FIGURE 14A : Structure en élévation de NaCl



FIGURES 14B : Structures de CsCl et ZnS en projection. Les chiffres positionnés à côté des sphères indiquent la cote des atomes sur l'axe z, exprimée en fraction du paramètre de maille a

① Pour chaque structure en projection (respectivement en élévation), représenter la structure en élévation (respectivement en projection) correspondante.

② Pour chaque structure, donner le nombre de cations et d'anions par maille et préciser la coordinence des ions.

③ Étude des cristaux NH_4Cl et NH_4F

a) En adoptant, pour le rayon des ions ammonium NH_4^+ la valeur de 148 pm, montrer que le contact a lieu entre les anions et les cations et que le contact n'a pas lieu entre les anions. On donne le paramètre de maille $a_1 = 380$ pm de NH_4Cl .

b) Quel est, du chlorure ou du fluorure d'ammonium, le cristal qui présente le caractère ionique le plus marqué ? Justifier.

④ Étude du cristal AgI

a) Dans un premier temps, nous considérerons que la liaison AgI est purement ionique c'est-à-dire que la structure cristalline est décrite par un assemblage d'ions. Sachant qu'il y a contact entre les cations et les anions, donner l'expression du paramètre de maille a_2 en fonction des rayons ioniques. En déduire l'expression littérale et la valeur numérique de la masse volumique ρ_2 du cristal ionique d'iodure d'argent.

b) Calculer la valeur numérique de la masse volumique ρ_3 qu'aurait le cristal d'iodure d'argent s'il s'agissait d'un cristal purement covalent constitué par des atomes d'argent et d'iode.

c) En réalité, la masse volumique ρ_{exp} de l'iodure d'argent est de $5\ 710 \text{ kg.m}^{-3}$. Comment expliquer l'écart obtenu avec les valeurs calculées précédemment ? Que peut-on en conclure quant à la nature de la liaison entre l'argent et l'iode dans l'iodure d'argent ?

Données :

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Symbol de l'élément	F	Cl	I	Ag
Rayon ionique (pm)	136	181	216	126
Rayon covalent (pm)	41	78	133	134
Électronégativité	4,0	3,2	2,7	1,9
Masse molaire (g.mol^{-1})	19,0	35,5	126,9	107,9

5 Structure du diiode (d'après CCP PSI 2010) ★★

→ corrigé p. 585

① Quelle est la formule de Lewis de la molécule diatomique I_2 ?

② Quelles sont les interactions intermoléculaires justifiant la cohésion du diiode solide ?

③ Le diiode solide se transforme en diiode gazeux par faible élévation de la température. Comment appelle-t-on cette transformation ? Justifier pourquoi une faible élévation de température est suffisante.

④ Le diiode solide cristallise dans le système cristallin orthorhombique. Dans ce système, la maille élémentaire est un parallélépipède rectangle dont les trois dimensions sont différentes. La figure 15 présente la projection des atomes d'iode sur une des faces rectangulaires de la maille, avec leurs coordonnées associées. Combien cette maille contient-elle d'atomes d'iode ?

⑤ Calculer la distance I-I entre les atomes C et A ; C et D ; C et E ; C et F en fonction des données. En déduire le nombre de plus proches voisins d'un atome d'iode, confirmer la structure moléculaire du diiode solide et préciser la nature des liaisons C-A, C-D, C-E, C-F.

Données :

- Numéro atomique de l'iode : $Z(I) = 53$
- Paramètres de maille du diiode solide orthorhombique :

Selon (Ox)	$a = 727,00 \text{ pm}$
Selon (Oy)	$b = 979,34 \text{ pm}$
Selon (Oz)	$c = 479,00 \text{ pm}$

Atome	$x(a)$	$y(b)$	$z(c)$
A	1/2	0,8844	0,3507
B	0	0,8844	0,8507
C	0	0,6156	0,3507
D	1/2	0,6156	0,8507
E	1/2	0,3844	0,1493
F	0	0,3844	0,6493
G	0	0,1156	0,1493
H	1/2	0,1156	0,6493

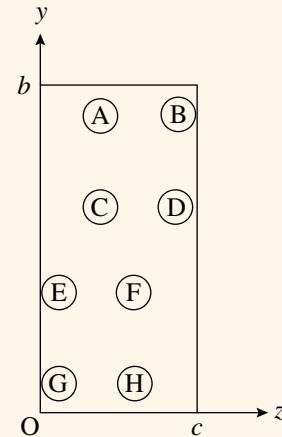


FIGURE 15 : Projection sur la face yOz des atomes contenus dans la maille orthorhombique du diiode et coordonnées de chaque atome, exprimées en fraction du paramètre de maille correspondant

Résolution de problème : Les céramiques supraconductrices ★★

→ corrigé p. 586

Un supraconducteur est un matériau qui, lorsqu'il est refroidi en dessous d'une température critique T_c , présente deux propriétés caractéristiques qui sont : une résistance nulle et un diamagnétisme parfait.

Les céramiques supraconductrices de formule générale $\text{YBa}_x\text{Cu}_y\text{O}_z$ (voir figure 16) sont les premiers supraconducteurs à haute température ($T_c > 77 \text{ K}$). Ces solides contiennent des anions oxydes O^{2-} , et des cations yttrium et baryum, ainsi que des ions Cu^{2+} et Cu^{3+} , en proportions variables.

Problème à résoudre : Déterminer la formule de cette céramique et déterminer la proportion de cuivre II et de cuivre III.

Données :

- Numéro atomique de l'yttrium : $Z = 39$
- Le baryum appartient à la deuxième colonne du bloc s

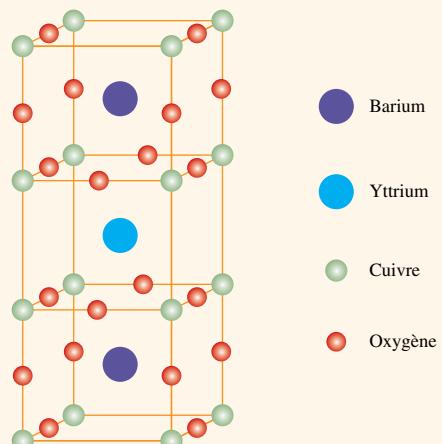


FIGURE 16 : Maille de la céramique supraconductrice $\text{YBa}_x\text{Cu}_y\text{O}_z$

Conseil

L'exercice n° 1 est une illustration du point méthode du cours. La démarche est structurée à l'aide de symboles ➔, il est conseillé de s'en inspirer dans les exercices similaires.

1 Allotropie du fer

➔ énoncé p. 578

- 1 a) • La structure CFC est issue d'un empilement de plans compacts. Un atome a donc 6 voisins dans son plan, 3 dans le plan du dessus et 3 dans le plan du dessous. **La coordinence vaut donc 12.**

- Pour calculer la compacité, il faut appliquer le **point méthode** p. 570 :

➔ **Calculer la population de la maille Z.**

Il y a un atome sur chaque sommet et un au milieu de chaque face. Comme cela a été vu dans le cours p. 568, les atomes sur les sommets comptent pour 1/8 et ceux sur les faces pour 1/2. Donc $Z = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$.

➔ **Établir la condition de contact entre sphères les plus proches.**

Le contact a lieu sur la diagonale d'une face donc $a_\gamma \sqrt{2} = 4r_\gamma$.

➔ **Calculer la compacité. Le résultat est une valeur sans dimension indépendante de r et a.**

$$\mathcal{C} = \frac{Z \times \frac{4}{3} \pi r_\gamma^3}{a_\gamma^3} = \frac{4 \times \frac{4}{3} \pi r_\gamma^3}{\left(\frac{4r_\gamma}{\sqrt{2}}\right)^3} = \frac{\pi \sqrt{2}}{6} \Rightarrow \boxed{\mathcal{C} = 74\%}$$

b) $a_\gamma = \frac{4r_\gamma}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{a_\gamma = 356 \text{ pm}}$

c) $\rho_\gamma = \frac{m}{V} = \frac{Z \times M(\text{Fe})}{N_A \times a_\gamma^3} = \frac{4 \times M(\text{Fe})}{N_A \times \left(\frac{4r_\gamma}{\sqrt{2}}\right)^3} = 8,20 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3} \Rightarrow \boxed{d = \frac{\rho}{\rho_{\text{eau}}} = 8,20}$

- d) Sites interstitiels tétraédriques : au centre des petits 8 cubes d'arête $\frac{a_\gamma}{2}$. Ils sont totalement inclus dans la maille donc : $\boxed{Z_T = 8}$

Sites interstitiels octaédriques : un au centre du cube et un au milieu de chaque arête donc : $\boxed{Z_O = 1 + 12 \times \frac{1}{4} = 4}$

- e) L'habitabilité des sites interstitiels est (voir p. 573) :

– pour un site tétraédrique : $r_T = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) r_\gamma \simeq 0,225 r_\gamma \Rightarrow \boxed{r_T = 28 \text{ pm}}$

– pour un site octaédrique : $r_O = (\sqrt{2} - 1) r_\gamma \simeq 0,414 r_\gamma \Rightarrow \boxed{r_O = 52 \text{ pm}}$

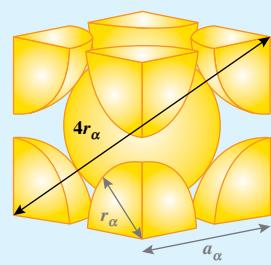
- 2 a) Dans une structure cubique centrée, un atome a donc 0 voisin dans son plan (les atomes ne sont pas tangents au sein d'un même plan), 4 voisins dans le plan du dessus et 4 dans le plan du dessous.

La coordinence vaut donc 8.

Population : $Z = 8 \times \frac{1}{8} + 1 = 2$ atomes par maille.

Le contact entre sphères a lieu sur la grande diagonale du cube, donc : $a_\alpha \sqrt{3} = 4r_\alpha$

La compacité vaut alors : $\mathcal{C} = \frac{Z \times \frac{4}{3} \pi r_\alpha^3}{a_\alpha^3} = \frac{2 \times \frac{4}{3} \pi r_\alpha^3}{\left(\frac{4r_\alpha}{\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{\pi \sqrt{3}}{8} \Rightarrow \boxed{\mathcal{C} = 68\%}$



La coordinence et la compacité du fer α sont plus faibles que celle du fer γ .

Bien comprendre

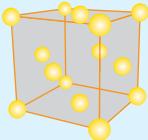
Le fer γ a une structure CFC issue d'un empilement compact. La compacité et la coordinence sont donc maximales, valant respectivement 74 % et 12.

$$\text{b)} \rho_\alpha = d_\alpha \times \rho_{\text{eau}} = \frac{m}{V} = \frac{Z \times M(\text{Fe})}{N_A \times a_\alpha^3} = \frac{2 \times M(\text{Fe})}{N_A \times \left(\frac{4r_\alpha}{\sqrt{3}} \right)^3} \Leftrightarrow r_\alpha = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3} \times M(\text{Fe})}{32 \times N_A \times d_\alpha \times \rho_{\text{eau}}}} \Rightarrow r_\alpha = 124 \text{ pm}$$

2 L'alliage Or-Nickel

→ énoncé p. 578

- 1 Maille CFC :



- 2 Un empilement compact est un empilement contenant le minimum d'espaces vides. La compacité d'un tel empilement est maximale. Les atomes sont en contact le long de la diagonale d'une face du cube donc :

$$a\sqrt{2} = 4r_{\text{Au}} \Leftrightarrow a = \frac{4r_{\text{Au}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = 407 \text{ pm}$$

- 3 Sites interstitiels octaédriques : un au centre du cube et un au milieu de chaque arête.

L'habitabilité des sites octaédriques est : $r_O = (\sqrt{2} - 1)r_{\text{Au}} \simeq 0,414r_{\text{Au}} = 60 \text{ pm}$

$r_O < r_{\text{Ni}}$ donc l'atome de nickel ne peut pas s'insérer à l'intérieur du site.

Bien comprendre

Il n'est pas nécessaire de retenir par cœur les formules des habitabilités, pourvu de savoir refaire les démonstrations du cours.

$$\text{4) } Z_{\text{Au}} = 6 \times \frac{1}{2} = 3 \text{ et } Z_{\text{Ni}} = 8 \times \frac{1}{8} = 1 \text{ donc : } \rho' = \frac{Z_{\text{Au}} \times M(\text{Au}) + Z_{\text{Ni}} \times M(\text{Ni})}{N_A \times a'^3} \Leftrightarrow a' = \sqrt[3]{\frac{3 \times M(\text{Au}) + M(\text{Ni})}{N_A \times \rho'}}$$

$$\text{5) } \rho' = 0,9 \times \rho = 0,9 \times \frac{4 \times M(\text{Au})}{N_A \times a^3} \Leftrightarrow a' = a \times \sqrt[3]{\frac{3 \times M(\text{Au}) + M(\text{Ni})}{0,9 \times 4 \times M(\text{Au})}} \Rightarrow a' = 395 \text{ pm}$$

3 Variétés allotropiques du carbone

→ énoncé p. 579

A. Préliminaires

1

Type de cristal	Cristal métallique	Cristal covalent	Cristal ionique	Cristal moléculaire
Liaison associée	Liaison métallique	Liaison covalente	Liaison ionique	Liaison de Van der Waals et/ou liaison hydrogène

B. Le diamant

- 2 Structure cristallographique du diamant : Réseau cubique à faces centrées d'atomes de carbone avec des atomes de carbone dans la moitié des sites tétraédriques occupés de façon alternée.
- 3 Ce cristal a pour motif des atomes de carbone reliés entre eux par des liaisons covalentes. Il s'agit d'un **cristal covalent**.
- 4 La coordinence d'un atome dans une maille est le nombre de ses premiers plus proches voisins. Les atomes de carbone ont 4 voisins dans cette structure \Rightarrow **coordinence 4**

5 Condition de contact : $2r = d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Population : $Z = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} + 4 = 8$

Compacité du diamant :

$$\mathcal{C} = \frac{Z \times \frac{4}{3} \pi r^3}{a^3} = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi r^3}{\left(\frac{8r}{\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{\pi \sqrt{3}}{16} \Rightarrow \text{A.N. : } \boxed{\mathcal{C} = 0,34}$$

Masse volumique ρ_D du diamant :

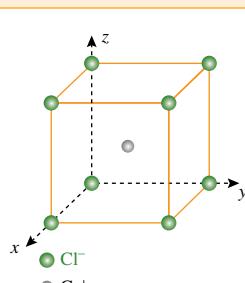
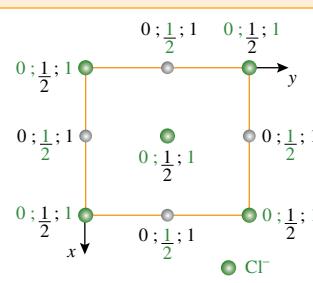
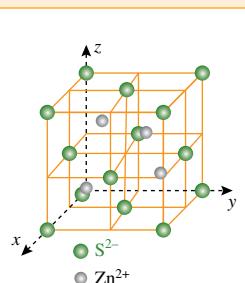
$$\rho_D = \frac{m}{V_{\text{maille}}} = \frac{Z \times M_C}{N_A \times a^3} = \frac{8 \times M_C}{N_A \times \left(\frac{8r}{\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{8 \times M_C}{N_A \times \left(\frac{8d}{2\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{8 \times 12 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23} \times \left(\frac{8 \times 154 \cdot 10^{-12}}{2\sqrt{3}}\right)^3}$$

$\Rightarrow \text{A.N. : } \boxed{\rho_D = 3,54 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}}$

- 6 Les électrons des liaisons covalentes restent localisés entre les atomes, ils ne sont donc pas mobiles. On en déduit que le diamant est un **isolant électrique**.

4 Cristaux ioniques

→ énoncé p. 579

1	CsCl	NaCl	ZnS
Représentations	 ● Cl ⁻ ○ Cs ⁺	 ○ Na ⁺ ● Cl ⁻	 ● S ²⁻ ○ Zn ²⁺
2	CsCl $Z(\text{Cl}^-) = 8 \times \frac{1}{8} = 1$ $Z(\text{Cs}^+) = 1$	NaCl $Z(\text{Cl}^-) = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$ $Z(\text{Na}^+) = 12 \times \frac{1}{4} + 1 = 4$	ZnS $Z(\text{S}^{2-}) = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$ $Z(\text{Zn}^{2+}) = 4$
Population	8/8	6/6	4/4
Coordinence cation/ Coordinence anion			

3 Étude des cristaux NH_4Cl et NH_4F

a) NH_4Cl a une structure de type CsCl .

$$r^+ + r^- = 148 + 181 = 329 \text{ pm} \text{ et } \frac{a_1 \sqrt{3}}{2} = 329 \text{ pm} \Rightarrow \text{il y a donc bien tangence cation-anion.}$$

$$2r^- = 362 \text{ pm} < a_1 = 380 \text{ pm} \Rightarrow \text{Il y a bien non-tangence anion-anion.}$$

b) Le caractère ionique est plus fort pour le fluorure d'ammonium que pour le chlorure d'ammonium car l'électronégativité du fluor est plus grande que celle du chlore.

4 Étude du cristal AgI

a) AgI a une structure de type ZnS . La condition de tangence entre les anions et les cations s'écrit :

$$r^+ + r^- = \frac{a_2 \sqrt{3}}{4}$$

Masse volumique ρ_2 de AgI (cristal ionique) :

$$\rho_2 = \frac{m}{V_{\text{maille}}} = \frac{Z \times M_{\text{AgI}}}{N_A \times a_2^3} = \frac{Z \times M_{\text{AgI}}}{N_A \times \left(\frac{4(r^+ + r^-)}{\sqrt{3}} \right)^3} = \frac{4 \times (126,9 + 107,9) \cdot 10^{-3}}{6,023 \cdot 10^{23} \times \left(\frac{4(126 + 216) \cdot 10^{-12}}{\sqrt{3}} \right)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_2 = 3,17 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}}$$

b) Pour calculer la masse volumique ρ_3 de AgI (cristal covalent), on utilise cette fois les rayons covalents :

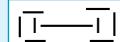
$$\rho_3 = \frac{m}{V_{\text{maille}}} = \frac{Z \times M_{\text{AgI}}}{N_A \times a_3^3} = \frac{Z \times M_{\text{AgI}}}{N_A \times \left(\frac{4(r_{\text{Ag}} + r_{\text{I}})}{\sqrt{3}} \right)^3} = \frac{4 \times (126,9 + 107,9) \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23} \times \left(\frac{4(134 + 133) \cdot 10^{-12}}{\sqrt{3}} \right)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_3 = 6,65 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}}$$

c) $\rho_2 < \rho_{\text{exp}} < \rho_3 \Rightarrow$ la liaison $\text{Ag}-\text{I}$ n'est ni purement ionique ni purement covalente : c'est une **liaison covalente polarisée**.

5 Structure du diiode

→ énoncé p. 580

1 Formule de Lewis du diiode I_2 : 

2 Le diiode est une molécule apolaire donc, les interactions intermoléculaires justifiant la cohésion du diiode solide sont des **interactions de Van der Waals de type de London**.

3 La transformation $\text{I}_2(\text{s}) \rightarrow \text{I}_2(\text{g})$ est une **sublimation**. Elle se produit à faible température car les liaisons de London sont des **liaisons faibles**.

4 D'après la projection fournie : A, D, E et H sont à l'intérieur de la maille alors que B, C, F et G sont sur une face. La maille élémentaire décrite contient 6 atomes d'iode :

$$\boxed{Z = 4 + 4 \times \frac{1}{2} = 6}$$

5

$$d_{CA} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + ((0,8844 - 0,6156) \times b)^2 + (0 \times c)^2}$$

$$d_{CD} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (0 \times b)^2 + ((0,8507 - 0,3507) \times c)^2}$$

$$d_{CE} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + ((0,6156 - 0,3844) \times b)^2 + ((0,3507 - 0,1493) \times c)^2}$$

$$d_{CF} = \sqrt{(0 \times a)^2 + ((0,6156 - 0,3844) \times b)^2 + ((0,3507 - 0,6493) \times c)^2}$$

A.N. : $d_{CA} = 448,81 \text{ pm}$; $d_{CD} = 435,31 \text{ pm}$; $d_{CE} = 438,98 \text{ pm}$ et $d_{CF} = 267,81 \text{ pm}$

La distance d_{CF} est nettement inférieure aux trois autres distances. Chaque atome d'iode est lié de façon covalente à un autre atome d'iode ($d_{CF} = 267,81 \text{ pm}$) : cela confirme la structure moléculaire du cristal. La liaison C–F est une liaison covalente alors que les liaisons C–A, C–D et C–E sont des liaisons de London. Un atome d'iode a un seul plus proche voisin (au sens covalent) auquel on ajoute trois plus proches voisins au sens de Van Der Waals.

Résolution de problème : Les céramiques supraconductrices

→ énoncé p. 581

- Le baryum appartient à la deuxième colonne du bloc s, il a donc tendance à former l'ion Ba^{2+} pour avoir la configuration électronique du xénon.
- L'yttrium ($Z = 39$) a pour configuration électronique $[\text{Kr}]5s^23d^1$. Il a donc tendance à former l'ion Y^{3+} pour avoir la configuration électronique du krypton.

Atome	Ba	Y	Cu	O
Ion formé	Ba^{2+}	Y^{3+}	Cu^{2+} et Cu^{3+}	O^{2-}
Nombre d'ions dans la maille	2	1	$8 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{1}{4} = 3$	$12 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{2} = 7$

La formule brute de cette céramique est donc : $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$

Soit x le nombre d'ions Cu^{2+} et y le nombre d'ions Cu^{3+} dans la formule brute de la céramique :

$$\begin{cases} 1 \times (+3) + 2 \times (+2) + 3 \times (x \times (+2) + y \times (+3)) + 7 \times (-2) = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

On en déduit la proportion suivante de cuivre II et de cuivre III : $2 \text{ Cu}^{2+} \text{ et } 1 \text{ Cu}^{3+}$

À méditer

On ne fait jamais attention à ce qui a été fait ; on ne voit que ce qui reste à faire.

MARIE CURIE (1867-1934)

Réactions d'oxydo-réduction

Les réactions d'oxydo-réduction mettent en jeu des transferts d'électrons. Un grand nombre de développements technologiques (générateurs électrochimiques, lutte contre la corrosion, traitements des eaux, élaboration des métaux et des alliages, etc.) mais aussi de processus biochimiques, à la base du métabolisme humain, reposent sur les phénomènes d'oxydo-réduction en solution aqueuse.

OUTILS MATHÉMATIQUES

$$\log(a) = \frac{\ln a}{\ln 10}$$

$$\log(a) = b \Rightarrow a = 10^b$$

$$\log(10^n) = n$$

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

I Oxydants et réducteurs

1. Rappels de Lycée

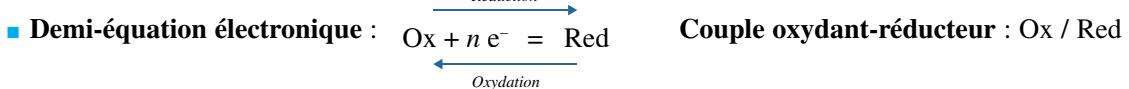
Oxydant : Accepteur d'électrons.

Réducteur : Donneur d'électrons.

Liste des oxydants et réducteurs à connaître

Oxydants : ion permanganate MnO_4^- ; ion dichromate $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$; ion hypochlorite ClO^- ; peroxyde d'hydrogène H_2O_2 .

Réducteur : ion thiosulfate $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$.



POINT MÉTHODE

Équilibrer une demi-équation électronique

- Si nécessaire, équilibrer l'élément principal. $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} = 2 \text{ Cr}^{3+}$
 - Équilibrer l'élément O avec H_2O . $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} = 2 \text{ Cr}^{3+} + 7 \text{ H}_2\text{O}$
 - Équilibrer l'élément H avec des protons H^+ . $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14 \text{ H}^+ = 2 \text{ Cr}^{3+} + 7 \text{ H}_2\text{O}$
 - Équilibrer les charges avec des électrons. $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14 \text{ H}^+ + 6 \text{ e}^- = 2 \text{ Cr}^{3+} + 7 \text{ H}_2\text{O}$
- exercice n° 2 p. 593

- **Réaction d'oxydo-réduction** : Réaction chimique au cours de laquelle il s'effectue un transfert d'électrons entre l'oxydant d'un couple et le réducteur d'un autre couple. Pour équilibrer le bilan d'une réaction d'oxydo-réduction, il faut combiner les deux demi-équations des couples impliqués, de façon à éliminer les électrons.

2. Nombre d'oxydation d'un élément (n.o.)

Définition

Le **nombre d'oxydation (n.o.) d'un élément**, dans un édifice chimique, est défini comme la charge (fictive) que porterait cet élément si, pour chaque liaison covalente dans laquelle celui-ci est engagé, le (ou les) doublet(s) liant(s) étaient attribués à l'atome le plus électronégatif.

■ Le **nombre d'oxydation d'un élément (n.o.)** caractérise l'état d'oxydation d'un élément au sein d'un édifice chimique (molécule ou ion). Plus le n.o. d'un élément est élevé, plus cet élément est à un état oxydé. Le n.o., par convention, est écrit en chiffres romains.

■ Calcul du n.o. d'un élément :

- Pour un édifice chimique : $\sum_{\text{Éléments}} \text{n.o.} = z$, où z est la charge de l'édifice.
- **n.o.(O) = -II** sauf pour O₂ et les peroxydes (H₂O₂, ROOR).
- **n.o.(H) = +I** sauf pour H₂ et les hydrures métalliques (LiH, NaH, AlH₃, etc.).

POINT MÉTHODE

Calculer le n.o. d'un élément dans un édifice chimique (ex. : H₂CrO₄)

- Écrire $\sum \text{n.o.} = z$ $\text{n.o.}(\text{Cr}) + 4 \times \text{n.o.}(\text{O}) + 2 \times \text{n.o.}(\text{H}) = 0$
- Remplacer n.o.(O) par -II et n.o.(H) par +I. $\text{n.o.}(\text{Cr}) + 4 \times (-\text{II}) + 2 \times (+\text{I}) = 0$
- En déduire n.o.(élément). $\text{n.o.}(\text{Cr}) = -4 \times (-\text{II}) - 2 \times (+\text{I}) = +\text{VI}$

→ exercice n° 1 p. 593

■ n.o. extrêmes d'un élément

- Pour un non-métal, le n.o. minimal correspond au remplissage maximal de ses sous-couches de valence et le n.o. maximal correspond au vidage complet de tous ses électrons de valence.
- Le n.o. d'un métal est forcément positif, par conséquent son n.o. minimal vaut zéro. Le n.o. maximal correspond, comme pour un non-métal, au vidage complet de tous les électrons de valence.

Exemple : Le soufre S ($Z = 16$), non métal, de configuration $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$ a 6 électrons de valence donc **n.o._{max} = +VI** (vidage des 6 e⁻ des sous-couches 3s et 3p) et **n.o._{min} = -II** (remplissage de la sous-couche 3p).

■ Utilisation des n.o.

- Pour identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple :

n.o.(élément) le plus élevé ⇒ oxydant

n.o.(élément) le plus faible ⇒ réducteur

Exemple : Dans le couple MnO₄⁻ / Mn²⁺, MnO₄⁻ (n.o.(Mn) = +VII) et Mn²⁺ (n.o.(Mn) = +II), l'oxydant du couple est MnO₄⁻ et le réducteur Mn²⁺.

- Pour identifier la nature de la réaction subie par un élément dans une réaction d'oxydo-réduction :

$\Delta(\text{n.o.}) > 0 \Rightarrow \text{l'élément est oxydé}$

$\Delta(\text{n.o.}) < 0 \Rightarrow \text{l'élément est réduit}$

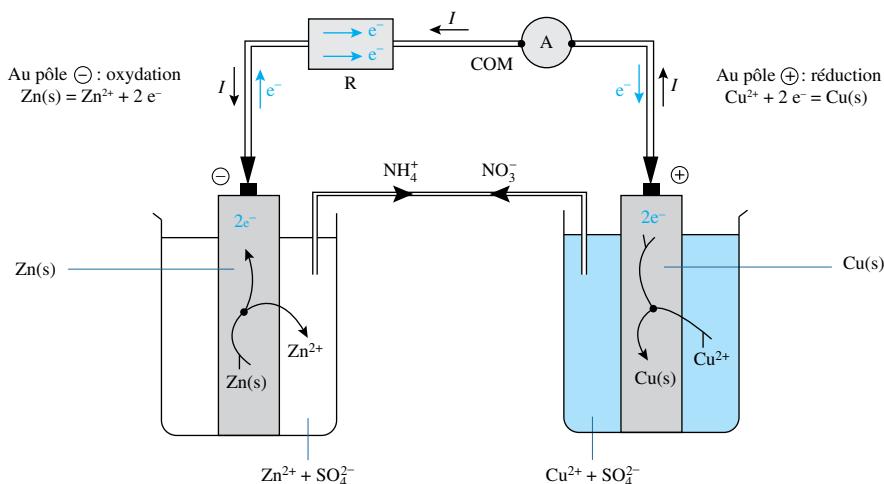
Exemple : Lors de la réaction d'équation $5 \text{Fe}^{2+} + \text{MnO}_4^- + 8 \text{H}^+ \rightarrow 5 \text{Fe}^{3+} + \text{Mn}^{2+} + 4 \text{H}_2\text{O}(\ell)$, MnO₄⁻ (n.o.(Mn) = +VII) est réduit en Mn²⁺ (n.o.(Mn) = +II) tandis que Fe²⁺ (n.o.(Fe) = +II) est oxydé en Fe³⁺ (n.o.(Fe) = +III).

II | Pile électrochimique

1. Définitions

- Pile électrochimique :** Ensemble de deux **demi-piles** séparées par une **jonction électrolytique** (membrane, pont ionique ou verre fritté) permettant le passage des ions d'un compartiment à l'autre. Une pile électrochimique produit un courant électrique à partir d'une réaction chimique spontanée (sans intervention extérieure). **De l'énergie chimique est transformée en énergie électrique.**
- Demi-pile :** Ensemble constitué par l'oxydant et le réducteur d'un même couple et par un électrolyte (conducteur ionique) assurant le contact avec un conducteur métallique.
- Électrode :** Conducteur métallique, au contact d'un électrolyte, qui assure le transfert d'électrons vers le milieu extérieur de la pile électrochimique. Par extension, le terme électrode est aussi utilisé pour désigner l'ensemble constitué par la demi-pile et l'électrode qui y plonge.
- Cathode :** Demi-pile où se déroule la **réduction** (pôle positif de la pile).
- Anode :** Demi-pile où se déroule l'**oxydation** (pôle négatif de la pile).

Exemple : Pile Daniell dans laquelle se produit la réaction d'équation bilan $\text{Zn(s)} + \text{Cu}^{2+} \rightarrow \text{Zn}^{2+} + \text{Cu(s)}$



Remarque : Un électrolyseur est une cellule électrochimique reliée à une source externe lui fournissant un courant électrique, et dans laquelle se produit une réaction chimique non spontanée. **De l'énergie électrique est transformée en énergie chimique.**

Mode	Réaction	Anode		Cathode		
		Réaction	Signe de l'électrode	Réaction	Signe de l'électrode	
Pile	Générateur	Spontanée	Oxydation	-	Réduction	+
Électrolyseur	Récepteur	Non spontanée	Oxydation	+	Réduction	-

2. Caractéristiques d'une pile

- Force électro-motrice (fém) d'une pile :** Tension à vide ($i = 0$) de la pile. Usuellement la fém d'une pile est positive et vaut : $\Delta E = E_{\text{cathode}} - E_{\text{anode}}$. Lorsque la pile est usée, la fém de la pile est nulle.

■ **Détermination de la polarité d'une pile :**

- On peut accéder à la polarité d'une pile à partir du signe de la fém mesurée expérimentalement.
- On peut aussi accéder à la polarité d'une pile à partir du calcul des potentiels d'oxydo-réduction de chaque demi-pile à l'aide de la formule de Nernst (*voir III.2. p. 591*) car $E_{\text{cathode}} > E_{\text{anode}}$.

■ **Capacité d'une pile Q :** Quantité maximale d'électricité (exprimée en Coulomb) que la pile peut délivrer au circuit extérieur.

$$Q = I \times \Delta t$$

Capacité de la pile (C)

$Q = n \times \xi_f \times F$

Avancement final associé
à la réaction bilan
de la pile (mol)

Courant débité par la pile (A)
pendant un temps Δt (s)

Nombre d'électrons échangés
pour écrire le bilan de la pile

Constante de Faraday :
 $F = N_A \times e = 96500 \text{ C.mol}^{-1}$

III Potentiel d'oxydo-réduction

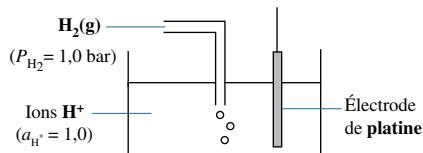
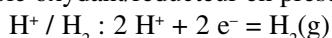
1. Définitions

■ **Le potentiel d'oxydo-réduction d'un couple**, noté $E_{\text{Ox/Red}}$, correspond à la fém de la pile dont l'une des demi-piles est constituée des espèces chimiques constitutives de ce couple, tandis que l'autre demi-pile est une électrode de référence, l'électrode standard à hydrogène (ou ESH), de potentiel nul. En effet, dans ce cas :

$$\Delta E = E_{\text{Ox/Red}} - E_{\text{ESH}} = E_{\text{Ox/Red}} \text{ car } E_{\text{ESH}} = 0,00 \text{ V}$$

■ **Électrode standard à hydrogène (ESH) :**

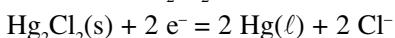
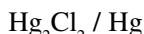
Couple oxydant/réducteur en présence :



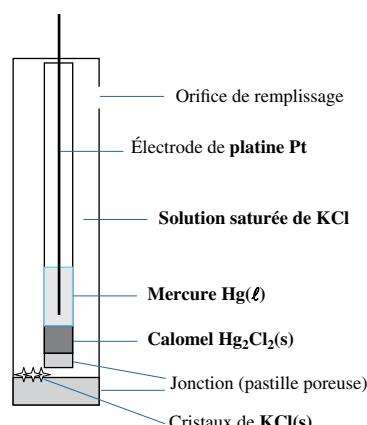
■ L'ESH est une électrode hypothétique. Pour déterminer en pratique un potentiel d'oxydoréduction, l'ESH est remplacée par une autre électrode de référence, dont le potentiel E_{ref} est constant mais non nul. La plus utilisée est l'**électrode au calomel saturé ou ECS**. Le voltmètre mesure alors : $\Delta E = E_{\text{Ox/Red}} - E_{\text{ref}}$, ce qui permet d'en déduire $E_{\text{Ox/Red}}$.

■ **L'électrode au calomel saturée (ECS) :**

Couple oxydant/réducteur en présence :



Remarque : $E_{\text{ECS}} = 0,25 \text{ V}$ à 25°C



2. Expression : formule de Nernst

Énoncé

La **formule de Nernst** fournit l'expression du potentiel d'oxydo-réduction, noté $E_{\text{Ox} / \text{Red}}$, d'un couple oxydant/réducteur dont la demi-équation s'écrit $\alpha \text{ Ox} + n e^- = \beta \text{ Red}$:

$$E_{\text{Ox} / \text{Red}} = E_{\text{Ox} / \text{Red}}^0 + \frac{0,06}{n} \log \left(\frac{a_{\text{Ox}}^\alpha}{a_{\text{Red}}^\beta} \right)$$

– $E_{\text{Ox} / \text{Red}}^0$: **Potentiel standard du couple oxydant/réducteur.** C'est une grandeur constante donnée dans la littérature, et caractéristique du couple oxydant/réducteur considéré.

– a_{Ox} : Activité de l'oxydant et a_{Red} : Activité du réducteur.

Remarque : Lorsque la demi-équation électronique fait intervenir d'autres espèces que Ox et Red, leurs activités correspondantes doivent être prises en compte dans la formule de Nernst, côté oxydant ou réducteur.

Exemple :

– **Couple MnO₂ / Mn²⁺** : $\text{MnO}_2(\text{s}) + 4 \text{ H}^+ + 2 e^- = \text{Mn}^{2+} + 2 \text{ H}_2\text{O}(\ell)$

$$E_{\text{MnO}_2 / \text{Mn}^{2+}} = E_{\text{MnO}_2 / \text{Mn}^{2+}}^0 + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{a_{\text{MnO}_2}^1 \times a_{\text{H}^+}^4}{a_{\text{Mn}^{2+}}^1 \times a_{\text{H}_2\text{O}}^2} \right) = E_{\text{MnO}_2 / \text{Mn}^{2+}}^0 + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{H}^+]^4}{[\text{Mn}^{2+}]} \right)$$

– **Couple O_{2(g)} / H₂O** : $\text{O}_2(\text{g}) + 4 \text{ H}^+ + 4 e^- = 2 \text{ H}_2\text{O}(\ell)$

$$E_{\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}} = E_{\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}}^0 + \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{a_{\text{O}_2}^1 \times a_{\text{H}^+}^4}{a_{\text{H}_2\text{O}}^2} \right) = E_{\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}}^0 + \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{P_{\text{O}_2} \times [\text{H}^+]^4}{P^0} \right)$$

3. Unicité du potentiel d'une solution aqueuse à l'équilibre

■ Lorsqu'une solution aqueuse contenant plusieurs couples oxydant/réducteur est **à l'équilibre**, alors tous les potentiels d'oxydoréduction de chacun des couples présents sont égaux. On dit qu'il y a **unicité du potentiel à l'équilibre**.

■ Une application est le calcul de la **constante d'équilibre K** d'une réaction redox.

Exemple : $\text{Cu}^{2+} + \text{Zn}(\text{s}) \rightarrow \text{Cu}(\text{s}) + \text{Zn}^{2+}$

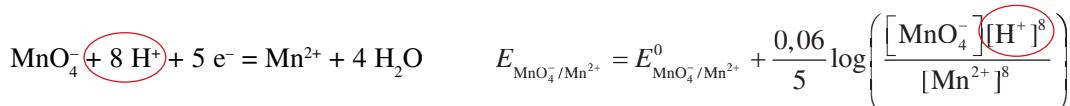
$$E_{\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}}^0 + \frac{0,06}{2} \log [\text{Cu}^{2+}]_{\text{éq}} = E_{\text{Zn}^{2+} / \text{Zn}}^0 + \frac{0,06}{2} \log [\text{Zn}^{2+}]_{\text{éq}} \Rightarrow K = \frac{[\text{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{[\text{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}} = 10^{\frac{2}{0,06}(E_{\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}}^0 - E_{\text{Zn}^{2+} / \text{Zn}}^0)}$$

Questions de cours

- Qu'appelle-t-on nombre d'oxydation ? Comment calculer le nombre d'oxydation d'un élément dans un édifice chimique ?
- À quoi correspond le potentiel d'oxydo-réduction ? Donner la formule de Nernst pour un couple oxydant/réducteur choisi.
- Présenter les électrodes de référence : ESH et ECS.
- Grandeur caractérisant le fonctionnement d'une pile.

Erreurs à éviter

- Lorsque la demi-équation électronique fait intervenir d'autres espèces que *Ox* et *Red*, leurs activités correspondantes doivent être prises en compte dans la formule de Nernst, côté oxydant ou réducteur :



- En vue d'écrire la formule de Nernst, il faut toujours équilibrer les demi-équations avec des protons pour utiliser les potentiels standards disponibles dans la littérature, qui sont donnés à pH = 0.
- Pour équilibrer les demi-équations électroniques faisant intervenir un solide ionique, penser à faire intervenir le cation ou l'anion constituant ce solide (ne surtout pas inventer d'autres espèces chimiques non présentes). Exemple : Pb(s) + SO₄²⁻ = PbSO₄(s) + 2 e⁻.
- Dans ce chapitre, le terme « capacité » est homogène à une charge électrique (en Coulomb) et ne doit pas être confondu avec la capacité d'un condensateur (définie p. 114 et qui s'exprime en Farad) ou avec les capacités thermiques (définies p. 349 et 376, qui s'expriment en J.K⁻¹).

Quelques « trucs » utiles

- Il faut absolument maîtriser le calcul des n.o. L'intérêt peut paraître limité dans ce chapitre mais il sera indispensable de savoir effectuer ce calcul dans le chapitre des diagrammes potentiel-pH.
- Il faut maîtriser le lien entre les unités : 1 C = 1 A.s, pour effectuer le calcul d'une capacité d'une pile. En effet, les capacités sont souvent données en mA.h ou A.h.
- Pour les épreuves d'activités expérimentales, il faut absolument maîtriser la composition des électrodes de référence (par exemple : électrode au calomel saturé). Il faut aussi savoir choisir une électrode de mesure : le platine si les deux espèces du couple sont en solution, le réducteur du couple s'il s'agit d'un métal.

EXERCICES**1 Déterminer le nombre d'oxydation d'un élément ★**

→ corrigé p. 595

Le vanadium est un élément chimique utilisé dans les additifs pour les aciers, mais potentiellement intéressant pour des applications en catalyse, céramiques et batteries. Parmi les espèces suivantes, indiquez celles pour lesquelles le nombre d'oxydation du vanadium est identique : $\text{V(OH)}_3(\text{s})$; VOH^{2+} ; VO^{2+} ; VO_4H_2^- ; $\text{VO(OH)}_2(\text{s})$; VO_4H^{2-} ; V^{3+} ; VO_2^+ .

2 Écrire le bilan d'une réaction d'oxydo-réduction ★

→ corrigé p. 595

- 1 L'eau de Javel est une solution aqueuse d'hypochlorite de sodium ($\text{Na}^+ + \text{ClO}^-$) et de chlorure de sodium ($\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$) en milieu basique. Elle est préparée par réaction directe entre du dichlore et une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium. Écrire le bilan de la réaction d'oxydo-réduction correspondante.

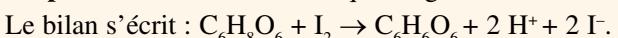
Donnée : Les couples oxydant/réducteur mis en jeu sont $\text{ClO}^- / \text{Cl}_2(\text{g})$ et $\text{Cl}_2(\text{g}) / \text{Cl}^-$.

- 2 Les éthylotests chimiques sont composés d'un réactif chimique changeant de couleur selon le taux d'alcool (éthanol : $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$) dans l'air expiré. Ce réactif chimique est le dichromate de potassium $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$. Écrire le bilan de la réaction d'oxydo-réduction illustrant ce changement de couleur.

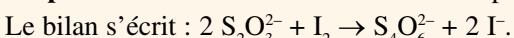
Donnée : Les couples oxydant/réducteur impliqués sont $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} / \text{Cr}^{3+}$ et $\text{CH}_3\text{COOH} / \text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$.

- 3 La vitamine C (dont le nom chimique est acide ascorbique) est une vitamine hydrosoluble de formule brute $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6$. La concentration molaire d'une solution d'acide ascorbique peut être déterminée par dosage d'oxydo-réduction en 2 étapes :

Étape 1 : Tout l'acide ascorbique réagit avec du diiode I_2 en excès.



Étape 2 : Le diiode en excès est alors dosé par une solution de thiosulfate de sodium ($2 \text{Na}^+ + \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$).



Identifier les couples mis en jeu lors de ce dosage, en précisant pour chacun d'eux l'oxydant et le réducteur. Pourquoi la vitamine C est-elle appelée anti-oxydant ?

3 Décharge d'un accumulateur au plomb (d'après CCP PC 2014) ★★★

→ corrigé p. 596

Parmi les utilisations du plomb, la fabrication des accumulateurs est l'une des plus importantes.

- La demi-pile 1 contient du dioxyde de plomb $\text{PbO}_2(\text{s})$ et du sulfate de plomb $\text{PbSO}_4(\text{s})$ déposés sur une grille de plomb $\text{Pb}(\text{s})$ plongeant dans une solution d'acide sulfurique ($2 \text{H}_3\text{O}^+ + \text{SO}_4^{2-}$) de concentration égale à $4,0 \text{ mol.L}^{-1}$. On considérera que dans ce cas, la concentration en ions oxonium H_3O^+ est de $8,0 \text{ mol.L}^{-1}$ et celle en ions sulfate SO_4^{2-} de $4,0 \text{ mol.L}^{-1}$. Le couple impliqué est : $\text{PbO}_2 / \text{PbSO}_4$.
- La demi-pile 2 contient du plomb $\text{Pb}(\text{s})$ au contact de sulfate de plomb(II) $\text{PbSO}_4(\text{s})$ et de la solution d'acide sulfurique précédente. Les 2 compartiments de l'accumulateur ne sont pas séparés.

On s'intéresse à la décharge de l'accumulateur où celui-ci se comporte comme une pile.

- 1 Déterminer le nombre d'oxydation de l'élément plomb dans les différentes espèces citées.
- 2 a) Donner l'expression des potentiels d'oxydo-réduction pour les deux couples oxydant/réducteur impliqués. Calculer leur valeur.
 - b) En déduire la valeur de la force électromotrice de l'accumulateur.
- 3 a) Caractériser le fonctionnement de l'accumulateur au plomb en situation de décharge : réactions aux électrodes, nom et polarité des électrodes.
 - b) Écrire le bilan de la réaction globale et calculer la constante d'équilibre associée.

c) L'accumulateur étudié comporte plusieurs plaques recouvertes de dioxyde de plomb $\text{PbO}_2(s)$ pour une masse totale de 120 g en dioxyde de plomb. Calculer la capacité Q de l'accumulateur en ampère-heure (A.h) en considérant que le dioxyde de plomb est le réactif en défaut.

Données : $E^0(\text{PbO}_2 / \text{PbSO}_4) = 1,69 \text{ V}$; $E^0(\text{PbSO}_4 / \text{Pb}) = -0,37 \text{ V}$; $M(\text{PbO}_2) = 239 \text{ g.mol}^{-1}$; Constante de Faraday : $F = 96500 \text{ C.mol}^{-1}$.

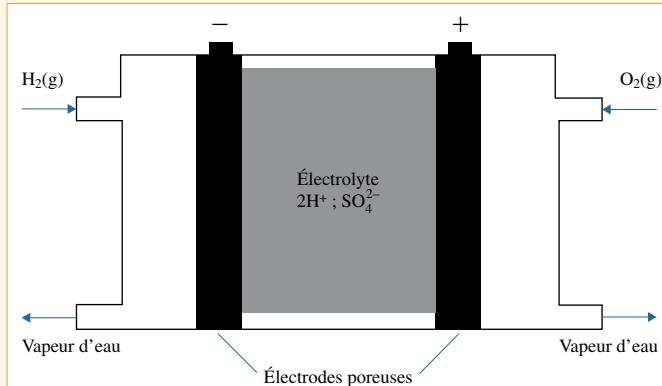
Résolution de problème : Pile à combustible ★★

→ corrigé p. 597

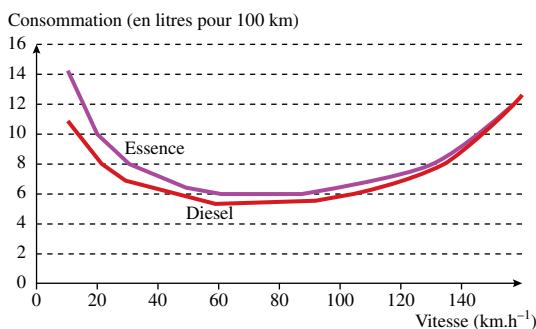
DOCUMENT 1 : Les piles à combustible

Le principe des piles à combustible a été découvert par l'électrochimiste William Grove en 1839, mais leur utilisation réelle ne date que des années 1960, à l'occasion des programmes spatiaux de la NASA. Ces piles alimentaient en électricité les ordinateurs de bord des vaisseaux Gemini et Apollo et fournissaient l'eau de consommation. Les piles à combustible, type hydrogène-oxygène, présentent deux avantages : faire appel à des réactifs (dioxygène de l'air et dihydrogène) disponibles en grande quantité et être non polluantes car libérant de l'eau uniquement.

Les premiers véhicules de tourisme fonctionnant grâce aux piles à combustibles seront bientôt commercialisés. Dans les prototypes, 100 cellules électrochimiques sont placées en série. Le courant débité par chacune des cellules vaut 200 A. L'autonomie du véhicule est de 500 km à la vitesse de 100 km.h^{-1} .



DOCUMENT 2 : Schéma de la pile à combustible



DOCUMENT 3 : Consommation en fonction de la vitesse pour un véhicule de tourisme

Couples oxydant/réducteur de l'eau : $\text{O}_2(g) / \text{H}_2\text{O}(l)$ et $\text{H}_2\text{O}(l) / \text{H}_2(g)$

Données : Constante de Faraday : $F = 96500 \text{ C.mol}^{-1}$; Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

Problème à résoudre : On s'intéresse au dimensionnement du réservoir dans lequel sera stocké le dihydrogène. Pour un trajet donné, sous quelle pression faut-il stocker le dihydrogène dans cette voiture pour qu'il n'occupe pas plus de volume que l'essence ordinaire ?

CORRIGÉS**Conseil**

Les exercices n° 1 et 2 sont des illustrations des points méthodes du cours. La démarche est structurée à l'aide de symboles ↗, il est conseillé de s'en inspirer dans les exercices similaires.

1 Détermination du nombre d'oxydation d'un élément

→ énoncé p. 593

Pour calculer le n.o. du vanadium dans V(OH)_3 , il faut appliquer le **point méthode** p. 588 :

→ Écrire $\sum_{\text{éléments}} \text{n.o.} = z$. $\text{n.o.}(\text{V}) + 3 \times \text{n.o.}(\text{O}) + 3 \times \text{n.o.}(\text{H}) = 0$

→ Remplacer **n.o.(O)** par **-II** et **n.o.(H)** par **+I**. $\text{n.o.}(\text{V}) + 3 \times (-\text{II}) + 3 \times (+\text{I}) = 0$

→ En déduire **n.o.(élément)**. $\boxed{\text{n.o.}(\text{V}) = +\text{III}}$

De la même manière, on trouve :

$$\begin{aligned} \text{n.o.}(\text{V}) &= +\text{III} \text{ pour } \text{VOH}^{2+} \text{ et } \text{V}^{3+}; \text{n.o.}(\text{V}) = +\text{IV} \text{ pour } \text{VO}^{2+} \text{ et } \text{VO(OH)}_2; \\ \text{n.o.}(\text{V}) &= +\text{V} \text{ pour } \text{VO}_4\text{H}^{2-}, \text{VO}_4\text{H}_2^- \text{ et } \text{VO}_2^+ \end{aligned}$$

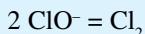
2 Écrire le bilan d'une réaction d'oxydo-réduction

→ énoncé p. 593

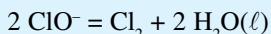
Pour écrire les demi-équations électroniques et le bilan d'une réaction d'oxydo-réduction, il faut appliquer le **point méthode** p. 587.

- 1 • Couple $\text{ClO}^- / \text{Cl}_2$:

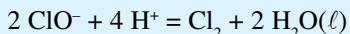
→ Équilibrer l'élément principal Cl.



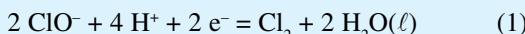
→ Équilibrer l'élément O avec $\text{H}_2\text{O}(\ell)$.



→ Équilibrer l'élément H avec des protons H^+ .



→ Équilibrer les charges avec des e^- .



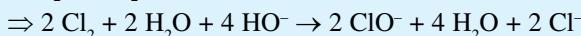
- Couple $\text{Cl}_2 / \text{Cl}^-$: même démarche.

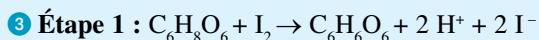
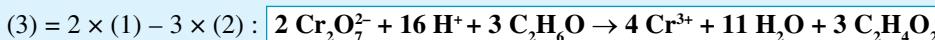
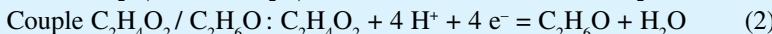


- Combiner les deux demi-équations de façon à éliminer les électrons.



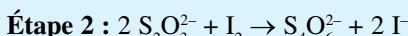
- En milieu basique :





- n.o.(I) = 0 pour I_2 et n.o.(I) = -I pour I^- , par conséquent I_2 est l'oxydant du couple, et I^- le réducteur du couple. Le couple oxydant/réducteur s'écrit donc : I_2 / I^- .

- n.o.(C) = +2/3 pour $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6$ et n.o.(C) = +I pour $\text{C}_6\text{H}_6\text{O}_6$, par conséquent $\text{C}_6\text{H}_6\text{O}_6$ est l'oxydant du couple, et $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6$ le réducteur du couple. Le couple oxydant/réducteur s'écrit donc : $\text{C}_6\text{H}_6\text{O}_6 / \text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6$. La vitamine C ($\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6$) étant un réducteur, elle est considérée comme un anti-oxydant.



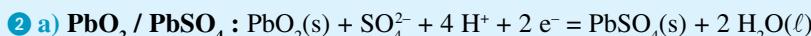
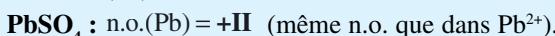
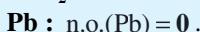
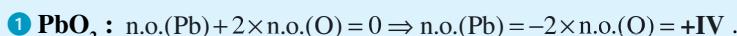
n.o.(S) = +II pour $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ et n.o.(S) = +5/2 pour $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$, par conséquent $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$ est l'oxydant du couple, et $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ le réducteur du couple. Le couple oxydant/réducteur s'écrit donc : $\text{S}_4\text{O}_6^{2-} / \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$.

Bien comprendre

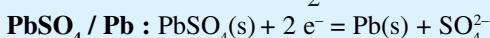
Le n.o. du soufre dans les édifices $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ et $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$, et le n.o. du carbone dans les édifices $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6$ et $\text{C}_6\text{H}_6\text{O}_6$ sont en réalité des n.o. « moyens », entre différents atomes de soufre ou de carbone, ayant des n.o. entiers différents.

3 Décharge de l'accumulateur au plomb

→ énoncé p. 593



$$E_{\text{PbO}_2 / \text{PbSO}_4} = E_{\text{PbO}_2 / \text{PbSO}_4}^0 + \frac{0,06}{2} \log \left[\text{H}^+ \right]^4 \left[\text{SO}_4^{2-} \right] ; \Rightarrow E_{\text{PbO}_2 / \text{PbSO}_4} = \boxed{1,82 \text{ V}}$$



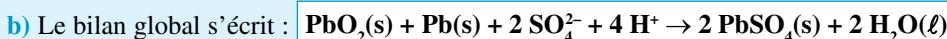
$$E_{\text{PbSO}_4 / \text{Pb}} = E_{\text{PbSO}_4 / \text{Pb}}^0 + \frac{0,06}{2} \log \frac{1}{\left[\text{SO}_4^{2-} \right]} ; \Rightarrow E_{\text{PbSO}_4 / \text{Pb}} = \boxed{-0,39 \text{ V}}$$

b) $\Delta E = E_{\text{PbO}_2 / \text{PbSO}_4} - E_{\text{PbSO}_4 / \text{Pb}} = \boxed{2,2 \text{ V}}$



– La demi-pile 1 est le siège d'une réduction et correspond à la borne positive de la pile ; l'électrode est la **cathode** : $\text{PbO}_2(\text{s}) + \text{SO}_4^{2-} + 4 \text{H}^+ + 2 \text{e}^- = \text{PbSO}_4(\text{s}) + 2 \text{H}_2\text{O}(\ell)$.

– La demi-pile 2 est le siège d'une oxydation et correspond à la borne négative de la pile ; l'électrode est la **anode** : $\text{Pb}(\text{s}) + \text{SO}_4^{2-} = \text{PbSO}_4(\text{s}) + 2 \text{e}^-$.



La constante d'équilibre peut être calculée en utilisant l'unicité du potentiel à l'équilibre :

$E_{\text{PbO}_2 / \text{PbSO}_4} = E_{\text{PbSO}_4 / \text{Pb}}$, qui donne, en utilisant la formule de Nernst :

$$E_{\text{PbO}_2 / \text{PbSO}_4}^0 - E_{\text{PbSO}_4 / \text{Pb}}^0 = \frac{0,06}{2} \log \frac{1}{\left[\text{H}^+ \right]^4 \left[\text{SO}_4^{2-} \right]^2} = \frac{0,06}{2} \log K \Rightarrow K = 10^{\frac{2}{0,06} \times (E_{\text{PbO}_2 / \text{PbSO}_4}^0 - E_{\text{PbSO}_4 / \text{Pb}}^0)}$$

K = 4,6 × 10⁶⁸ > 10⁴ : La réaction peut être considérée comme quantitative (ce résultat est attendu pour une pile en fonctionnement).

c) La capacité de l'accumulateur en décharge s'écrit : $Q = n_e F = n \xi_{\max} F$, avec ici $n = 2$ et $\xi_{\max} = n_{\text{PbO}_2,0} = \frac{m_{\text{PbO}_2,0}}{M(\text{PbO}_2)}$. On en déduit : $Q = nF \frac{m_{\text{PbO}_2,0}}{M(\text{PbO}_2)}$

A.N. : $Q = 2 \times 96500 \times \frac{120}{239} = 9,69 \times 10^4 \text{ C} = \frac{9,69 \times 10^4}{3600} \text{ Ah} = 26,9 \text{ Ah}$

Bien comprendre

Pour équilibrer les demi-équations électrochimiques faisant intervenir un solide ionique (ici PbSO₄(s)), penser à faire intervenir le cation ou l'anion constituant ce solide (ici SO₄²⁻).

Résolution de problème : Pile à combustible ★★

→ énoncé p. 594

Analyse rapide des documents :

- Les piles à combustible produisent de l'eau à partir du dihydrogène et du dioxygène.
- Le dihydrogène est utilisé comme carburant.
- Le problème posé consiste à trouver à quelle pression ce dihydrogène doit être stocké pour occuper un volume donné.

Démarche :

Considérer un trajet de 500 km parcouru à 100 km.h⁻¹.

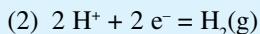
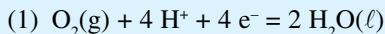
- À partir du document 3, chercher le volume minimal du réservoir occupé par une essence classique (par exemple diesel), pour ce trajet.
- À partir des documents 1 et 2, chercher quelle quantité de dihydrogène est utilisée, pour ce même trajet à cette même vitesse, par les piles à combustible embarquées dans les véhicules de tourisme.
- La loi des gaz parfait permet alors de répondre au problème posé.

Résolution du problème :

1 Le document 3 permet de déterminer le volume de diesel nécessaire pour parcourir 500 km à 100 km.h⁻¹ : 6 L pour 100 km donc $V = 30 \text{ L}$.

2 Sur 5h (500 km à 100 km.h⁻¹), la capacité, pour une cellule, vaut : $Q_{\text{cell}} = I \times \Delta t = 200 \times 5 \times 3600 = 3,6 \times 10^6 \text{ C}$.

Le bilan global de la pile à combustible s'écrit :



	2 H ₂ (g)	+	O ₂ (g)	→	2 H ₂ O(ℓ)
E.I. (mol)	$n_{\text{H}_2,0}$		$n_{\text{O}_2,0}$		excès
E.F. (mol)	$n_{\text{H}_2,0} - 2\xi$		$n_{\text{O}_2,0} - \xi$		excès

Hypothèses : la réaction est quasi quantitative ; le dihydrogène est le réactif limitant.

$$n_{\text{H}_2,f} = n_{\text{H}_2,0} - 2\xi_{\max} = 0 \Rightarrow \xi_{\max} = \frac{n_{\text{H}_2,0}}{2}$$

Par conséquent pour une cellule électrochimique : $Q_{\text{cell}} = n\xi_{\max} F = 4 \times \frac{n_{\text{H}_2,0}}{2} \times F \Rightarrow n_{\text{H}_2,0} = \frac{Q_{\text{cell}}}{2F}$

Pour les 100 cellules, la quantité de dihydrogène nécessaire est donc de :

$$n_{\text{H}_2,\text{tot}} = 100 \times \frac{Q_{\text{cell}}}{2F} \Rightarrow \text{A.N. : } n_{\text{H}_2,\text{tot}} = 100 \times \frac{3,6 \times 10^6}{2 \times 96500} = 1,9 \times 10^3 \text{ mol}$$

- ③ Si on désire un volume de 30 L de carburant, la loi des gaz parfait donne (en faisant les **hypothèses** que le dihydrogène se comporte comme un gaz parfait, et que la température de stockage est de 25 °C donc 298 K) :

$$PV = n_{\text{H}_2,\text{tot}} RT \Rightarrow P = \frac{n_{\text{H}_2,\text{tot}} RT}{V} \Rightarrow \text{A.N. : } P = \frac{1,9 \times 10^3 \times 8,31 \times 298}{30 \times 10^{-3}} = 1,5 \times 10^8 \text{ Pa}$$

$P = 1,5 \times 10^3 \text{ bar}$

Conclusion et commentaire : En considérant les hypothèses précédentes, le dihydrogène doit être stocké sous environ $1,5 \times 10^3$ bar pour répondre au problème posé. La valeur de cette pression est élevée. En pratique, aujourd’hui le volume des réservoirs à dihydrogène dépasse les 100 L, ce qui réduit la pression de stockage autour de quelques centaines de bars.

À méditer

Je ne suis pas découragé car tout nouvel échec constitue un pas de plus vers la victoire.

THOMAS EDISON (1847-1931)

Réactions en solution aqueuse

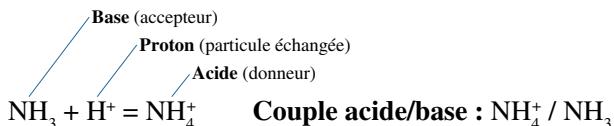
Les transformations chimiques en solution aqueuse jouent un rôle essentiel en chimie, en biochimie et dans les processus environnementaux. Les phénomènes d'oxydo-réduction en solution aqueuse ont été présentés dans le chapitre précédent. L'influence du milieu (pH, possibilité de formation de composés insolubles, etc.) est primordiale dans la compréhension et la prévision des phénomènes mis en jeu. L'objectif de ce chapitre est de présenter les différents types de réactions susceptibles d'intervenir en solution aqueuse.

CADRE D'ÉTUDE : Dans ce chapitre, les concentrations des espèces chimiques A_i figurant dans les expressions des constantes d'équilibre, seront prises à l'équilibre mais notées $[A_i]$ (au lieu de $[A_i]_{eq}$).

I | Les différentes réactions en solution aqueuse

Les réactions en solution aqueuse peuvent être décrites comme l'échange d'une **particule** entre un **donneur** et un **accepteur**.

1. Réactions acido-basiques

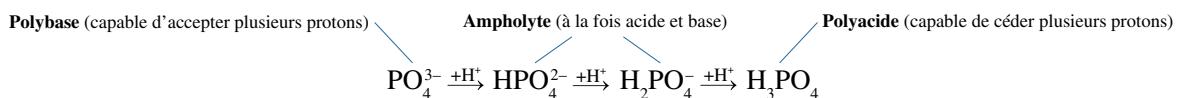


■ **Réaction acido-basique** : Transfert de protons entre l'acide d'un couple, et la base d'un autre couple.

Exemple : $\text{CH}_3\text{COOH} + \text{NH}_3 \rightarrow \text{CH}_3\text{COO}^- + \text{NH}_4^+$

■ **Acide fort et base forte** : Espèces chimiques réagissant totalement avec l'eau.

■ **Acide faible et base faible** : Espèces chimiques réagissant partiellement avec l'eau.



Remarque : L'eau est un ampholyte, c'est l'acide du couple $\text{H}_2\text{O} / \text{HO}^-$ et la base du couple $\text{H}_3\text{O}^+ / \text{H}_2\text{O}$.

Liste des acides et des bases à connaître

Acides forts : Acide sulfurique H_2SO_4 ; acide nitrique HNO_3 ; acide chlorhydrique HCl .

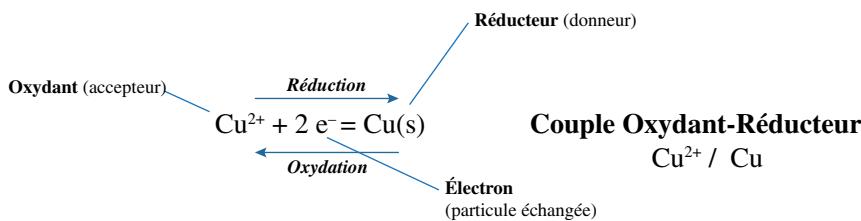
Acides faibles : Acide acétique (ou éthanoïque) CH_3COOH ; acide phosphorique H_3PO_4 .

Bases fortes : Soude NaOH ; potasse KOH .

Bases faibles : Ammoniac NH_3 ; ion acétate CH_3COO^- .

Ampholytes : Ion hydrogénocarbonate HCO_3^- ; eau H_2O .

2. Réactions d'oxydo-réduction

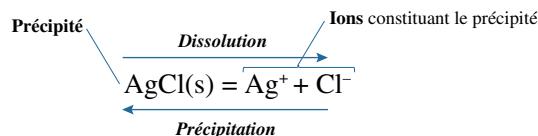


■ **Réaction d'oxydo-réduction :** Transfert d'électrons entre l'oxydant d'un couple et le réducteur d'un autre couple.

Exemple : $\text{Cu}^{2+} + \text{Zn(s)} \rightarrow \text{Cu(s)} + \text{Zn}^{2+}$

3. Réactions de précipitation

■ Certains composés ioniques peuvent se révéler peu solubles en solution aqueuse. Un équilibre hétérogène apparaît alors en solution entre le solide ionique, appelé **précipité**, et les ions qui le constituent. La solution aqueuse est dite **saturée**.



Définition

La **solubilité s** (en mol.L⁻¹ ou en g.L⁻¹), est la quantité maximale (en mol ou en g) de solide que l'on peut dissoudre dans 1,0 L d'eau à une température donnée.

II | Grandeurs caractéristiques et calcul de constantes d'équilibre

1. Réactions acido-basiques

→ Constante d'acidité K_A

Constante d'acidité K_A d'un couple Acide/Base : Constante d'équilibre de la réaction entre l'acide du couple et l'eau.

$$\text{Acide} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{Base} + \text{H}_3\text{O}^+ \Rightarrow K_A = \frac{[\text{Base}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{Acide}]}$$

■ **p K_A d'un couple Acide/Base :** $\text{p}K_A = -\log K_A \Leftrightarrow K_A = 10^{-pK_A}$

→ Produit ionique de l'eau K_e

p K_A des couples de l'eau : $\text{p}K_A(\text{H}_2\text{O} / \text{HO}^-) = 14$ et $\text{p}K_A(\text{H}_3\text{O}^+ / \text{H}_2\text{O}) = 0$

Produit ionique de l'eau K_e : $2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{HO}^- + \text{H}_3\text{O}^+ \Rightarrow K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-] = 10^{-14} \Rightarrow \text{p}K_e = -\log K_e = 14$

→ pH

Définition : $\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+]$ pour des solutions diluées. En solution aqueuse : $0 \leq \text{pH} \leq 14$.

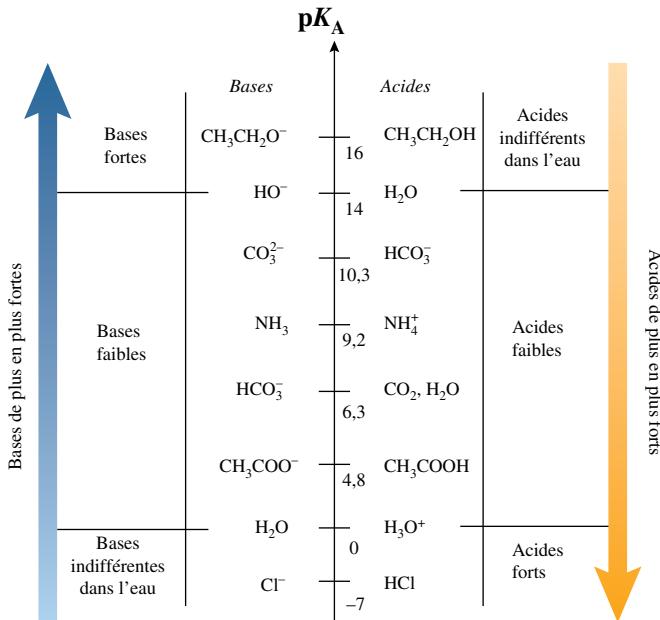
Relation entre pH et pK_A : $\text{pH} = pK_A + \log \frac{[\text{Base}]}{[\text{Acide}]}$

Définition

Une solution dont le pH varie peu par ajout modéré d'acide, de base ou par dilution est qualifiée de **solution tampon**. Elle est obtenue par exemple en mélangeant, en quantité équivalente, les formes acide et base d'un même couple (*voir exercice n° 5 p. 608*).

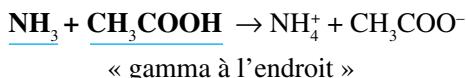
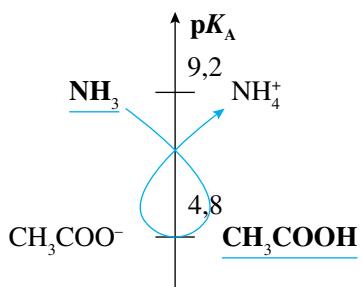
→ Échelle de pK_A dans l'eau

L'échelle verticale de pK_A permet de classer les couples Acide/Base selon la force de l'acide et de la base :

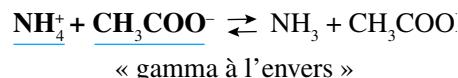
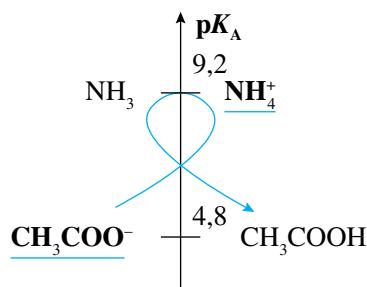


→ Prévision du caractère favorisé ou défavorisé d'une réaction acido-basique

- #### ■ **Aspect qualitatif** : À partir de l'échelle d'acidité



Thermodynamiquement favorisée



Thermodynamiquement défavorisée

- **Aspect quantitatif :** À partir du calcul de la constante d'équilibre

POINT MÉTHODE

Calculer la constante d'équilibre K d'une réaction acido-basique

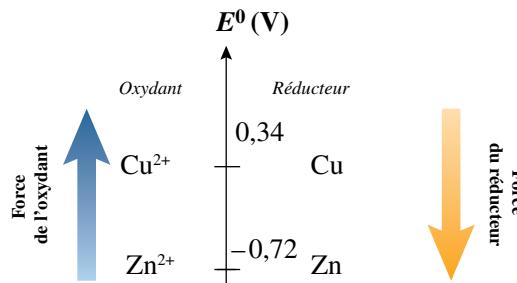
- Tracer l'échelle des pK_A avec les couples concernés par la réaction étudiée.
- Souligner les espèces réactives.
- Si le « gamma » est à l'endroit, alors la constante s'écrit : $K = 10^{\pm \Delta pK_A} > 1$
- Si le « gamma » est à l'envers, alors la constante s'écrit : $K = 10^{-\Delta pK_A} < 1$

→ exercice n° 1 p. 608

2. Réactions d'oxydo-réduction

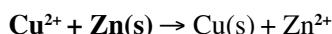
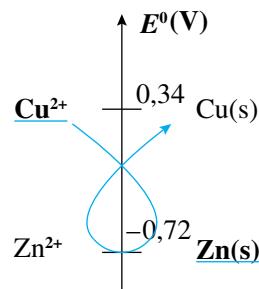
→ Échelle des potentiels standard

Par analogie avec les réactions acido-basiques, pour classer les couples oxydant/réducteur selon la force de l'oxydant et du réducteur, on trace une échelle verticale des potentiels standards E^0 .



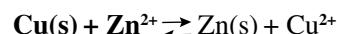
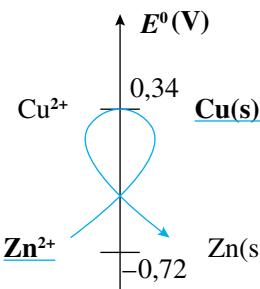
→ Prévision du caractère favorisé ou défavorisé d'une réaction d'oxydo-réduction

- **Aspect qualitatif :** À partir de l'échelle des potentiels standard



« gamma à l'endroit »

Thermodynamiquement **favorisée**



« gamma à l'envers »

Thermodynamiquement **défavorisée**

POINT MÉTHODE

Calculer la constante d'équilibre K d'une réaction redox

→ Tracer l'échelle des E^0 avec les couples concernés par la réaction étudiée.

→ Souligner les espèces réactives.

→ Si le « gamma » est à l'endroit, alors la constante s'écrit : $K = 10^{\frac{+n}{0,06}|\Delta E^0|} > 1$

Si le « gamma » est à l'envers, alors la constante s'écrit : $K = 10^{\frac{-n}{0,06}|\Delta E^0|} < 1$

où n est le nombre d'électrons échangés pour écrire le bilan de la réaction d'oxydo-réduction.

→ exercice n° 2 p. 608

3. Réactions de précipitation

■ **Produit de solubilité K_s d'un précipité :** constante de l'équilibre de dissolution du précipité.

Exemple : $\text{Ag}_2\text{CrO}_4(s) \rightleftharpoons 2 \text{Ag}^+ + \text{CrO}_4^{2-}$; $K_s = [\text{Ag}^+]^2 [\text{CrO}_4^{2-}] = 10^{-12}$

■ **p K_s d'un précipité :** $\text{p}K_s = -\log K_s$

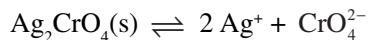
Résultat

En notant Q_r le quotient de la réaction de dissolution du précipité, il y a **précipitation si $Q_r > K_s$** .

POINT MÉTHODE

Calculer une solubilité à partir de K_s

→ Écrire l'équilibre de dissolution du précipité.



→ Dresser le tableau d'avancement en considérant que la solution contient initialement le solide en excès. On notera s la solubilité.

$\text{Ag}_2\text{CrO}_4(s)$	\rightleftharpoons	2Ag^+	CrO_4^{2-}
E.I.			
Excès		0	0

→ Écrire le produit de solubilité et en déduire la solubilité.

$$K_s = [\text{Ag}^+]^2 [\text{CrO}_4^{2-}]$$

$$= (2s)^2 \times s = 4s^3 \Rightarrow s = \sqrt[3]{\frac{K_s}{4}}$$

→ exercice n° 4 p. 608

Remarque : Si le $\text{p}K_s$ est élevé, alors le précipité est peu soluble.

■ La solubilité d'un précipité dépend de plusieurs facteurs :

– Elle augmente généralement avec la **température**.

– Elle diminue par ajout d'un ion présent dans le précipité : c'est **l'effet d'ion commun** (*voir exercice n° 4 p. 608*).

– Si le précipité est constitué d'un anion ayant des propriétés acido-basiques, sa solubilité dépend du **pH** (*voir exercice n° 4 p. 608*).

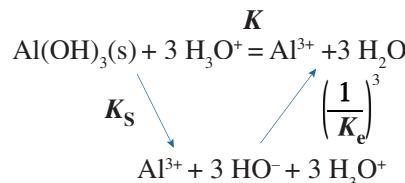
4. Calcul d'une constante d'équilibre pour une réaction quelconque

À partir des grandeurs caractéristiques (K_A , K_e , E^0 , K_s , etc.) des réactions acido-basiques, d'oxydo-réduction ou de précipitation, il est possible de calculer la constante d'équilibre de toute réaction chimique en solution aqueuse.

POINT MÉTHODE

Calculer la constante d'équilibre d'une réaction quelconque

- Écrire le bilan de la réaction d'étude.
- Construire un cycle permettant de passer des réactifs aux produits, en faisant intervenir des réactions de constantes connues.
- En déduire la constante d'équilibre K .



$$K = \frac{K_s}{K_e^3}$$

III Diagrammes de prédominance et d'existence

1. Espèce prédominante ou majoritaire dissoute en solution

- Une espèce chimique A **prédomine** devant une espèce chimique B si $[A] > [B]$.
- Une espèce chimique A est **majoritaire** devant une espèce chimique B si $[A] > 10[B]$.

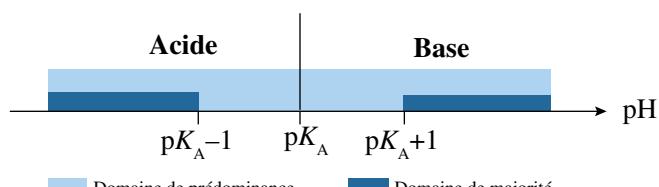
2. Diagramme de prédominance ou d'existence

- Le domaine pour lequel une espèce chimique A prédomine devant une espèce chimique B est appelé **domaine de prédominance** de l'espèce A.
- Un solide ne peut prédominer devant une espèce dissoute en solution : soit il existe, soit il n'existe pas. On parle, pour le solide, de **domaine d'existence**.

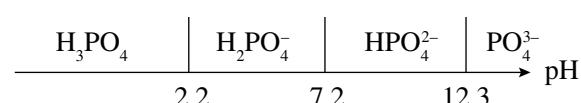
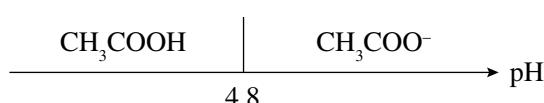
3. Réactions acido-basiques

→ Diagramme de prédominance

$$\text{pH} = \text{p}K_A + \log \frac{[\text{Base}]}{[\text{Acide}]}$$



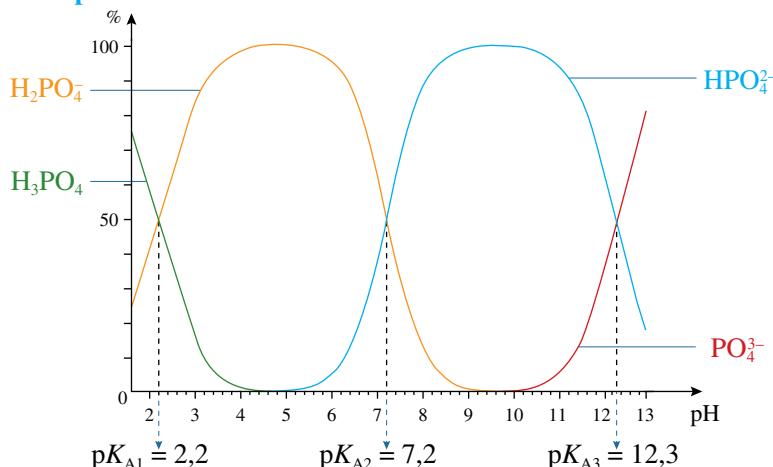
Exemples :



→ Diagramme de distribution

Les diagrammes de distribution représentent les pourcentages des différentes espèces en fonction du pH.

Exemple :



Remarque : À l'intersection des courbes de distribution pour un acide et sa base conjuguée ($[A^-] = [AH]$), on retrouve graphiquement la valeur des pK_A des différents couples ($pH = pK_A$).

4. Réactions d'oxydo-réduction

■ Diagramme de prédominance ou d'existence

$$E_{\text{Ox}/\text{Red}} = E_{\text{Ox}/\text{Red}}^0 + \frac{0,06}{n} \log \frac{a_{\text{Ox}}^\alpha}{a_{\text{Red}}^\beta}$$

	Red	Ox
	$E_{\text{frontière}}$	$E \text{ (V)}$

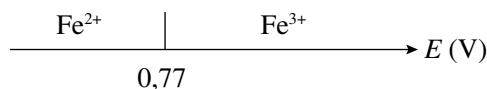
Exemples :

→ **Cas du couple $\text{Fe}^{3+} / \text{Fe}^{2+}$** ($E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0 = 0,77 \text{ V}$) : $\text{Fe}^{3+} + e^- = \text{Fe}^{2+} \Rightarrow E = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0 + 0,06 \log \left[\frac{\text{Fe}^{3+}}{\text{Fe}^{2+}} \right]$

À la frontière : $\left[\text{Fe}^{3+} \right] = \left[\text{Fe}^{2+} \right] \Rightarrow E_{\text{frontière}} = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0 = 0,77 \text{ V}$

Fe^{3+} prédomine si : $\left[\text{Fe}^{3+} \right] > \left[\text{Fe}^{2+} \right] \Rightarrow E > E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0$; Fe^{2+} prédomine si : $\left[\text{Fe}^{3+} \right] < \left[\text{Fe}^{2+} \right] \Rightarrow E < E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0$

Diagramme de prédominance :



→ **Cas du couple $\text{Fe}^{2+} / \text{Fe}$** ($E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^0 = -0,44 \text{ V}$) : $\text{Fe}^{2+} + 2e^- = \text{Fe(s)} \Rightarrow E = E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^0 + \frac{0,06}{2} \log \left[\text{Fe}^{2+} \right]$

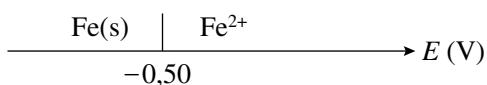
Il est nécessaire pour tracer le diagramme d'existence, de fixer une convention de tracé à la frontière. La concentration en espèce dissoute, c'est-à-dire Fe^{2+} , sera prise égale à une valeur donnée : $C_{\text{tracé}} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ (par exemple).

À la frontière : $\left[\text{Fe}^{2+} \right] = C_{\text{tracé}} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow E_{\text{frontière}} = E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^0 + \frac{0,06}{2} \log C_{\text{tracé}} = -0,50 \text{ V}$

Fe^{2+} est stable à la concentration $C_{\text{tracé}}$ si : $E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}} > E_{\text{frontière}}$

Fe(s) existe si : $E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}} < E_{\text{frontière}}$

Diagramme d'existence :



5. Réactions de précipitation

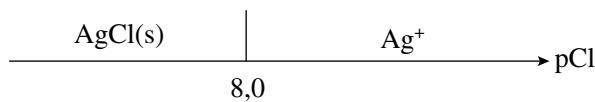
■ Diagramme d'existence :

En présence d'un précipité, on trace uniquement des **diagrammes d'existence**. Il est nécessaire pour cela de fixer une concentration pour l'une des espèces dissoutes pour déterminer la frontière entre le précipité et les espèces dissoutes.

Exemple : Tracé du diagramme d'existence de AgCl(s) ($pK_s = 10$).

Considérons une solution d'ions argent avec $[\text{Ag}^+]_0 = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. À cette solution, on ajoute, sans variation de volume, une solution concentrée d'ions chlorure. Au premier grain de précipité AgCl(s), on a toujours $[\text{Ag}^+] = [\text{Ag}^+]_0$ et donc $Q_r = K_s = [\text{Ag}^+][\text{Cl}^-]$

À la frontière : $[\text{Cl}^-] = \frac{K_s}{[\text{Ag}^+]_0} = 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow p\text{Cl} = 8,0$



6. Application : prévision des espèces incompatibles et prédominantes à l'équilibre

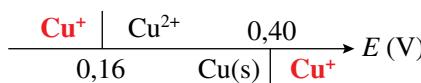
→ Espèces incompatibles

- Deux espèces, A et B, ayant leurs domaines de prédominance (ou d'existence) disjoints, sont dites **incompatibles**. La solution n'est pas à l'équilibre et une réaction chimique favorisée ($K > 1$) se produit entre A et B.
- Deux espèces A et B, ayant au moins une partie de leurs domaines de prédominance (ou d'existence) en commun, sont dites **compatibles** : la réaction entre A et B est défavorisée ($K < 1$), et A et B prédominent à l'état d'équilibre.

→ Exemple : dismutation des ions cuivre I

Soit une solution aqueuse contenant les ions Cu^+ . Ces ions constituent, à la fois, l'oxydant du couple Cu^+ / Cu et le réducteur du couple $\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}^+$. On trace sur un même axe horizontal de potentiel, les domaines de prédominance et d'existence des espèces concernées avec $[\text{Cu}^+] = C_{\text{tracé}} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ pour la frontière entre $\text{Cu}(\text{s})$ et Cu^+ .

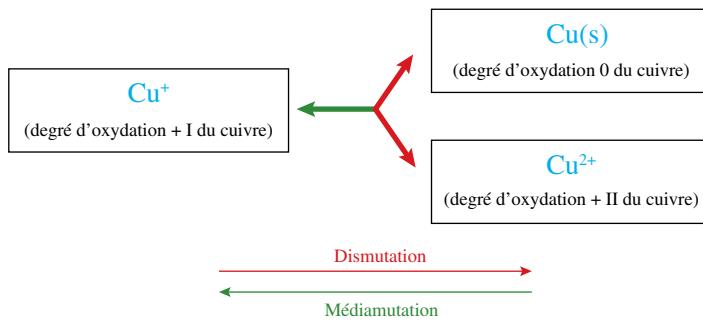
Données : $E_{\text{Cu}^+ / \text{Cu}}^0 = 0,52 \text{ V}$ et $E_{\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}^+}^0 = 0,16 \text{ V}$



Le diagramme montre qu'une solution contenant initialement les ions Cu^+ ne peut être à l'équilibre. En effet, les ions Cu^+ appartiennent à deux domaines disjoints. Ils sont donc instables et subissent la réaction : $2 \text{Cu}^+ \rightarrow \text{Cu}^{2+} + \text{Cu}(\text{s})$. Les produits obtenus Cu^{2+} et $\text{Cu}(\text{s})$ sont compatibles et sont donc les espèces présentes à l'équilibre.

Définition

Toute réaction d'oxydo-réduction dans laquelle une espèce joue à la fois le rôle d'oxydant et de réducteur s'appelle une réaction de **dismutation**. L'inverse d'une telle réaction s'appelle une réaction de **médiامutation**.

**VERS LA COLLE****Questions de cours**

- Citer des acides et bases usuels en solution aqueuse. Distinguer les acides forts des acides faibles, et les bases fortes des bases faibles.
- Qu'appelle-t-on précipité ? solution saturée ? solubilité ? produit de solubilité ? À quelle condition un précipité se forme-t-il en solution aqueuse ?
- Comment prévoir qualitativement et quantitativement le caractère favorisé ou défavorisé d'une réaction d'oxydo-réduction ou d'une réaction acido-basique ?
- Comment calculer la constante d'équilibre d'une réaction quelconque ? Exemple.
- Définir : diagramme de prédominance, diagramme d'existence et diagramme de distribution. À quelle condition une espèce est-elle majoritaire ? prédominante ? À quelle condition des espèces sont-elles incompatibles ? Exemples.
- Facteurs influençant la solubilité. Exemples.

Erreurs à éviter

- Un acide fort ou une base forte se dissocient entièrement dans l'eau avant toute autre réaction chimique.
- Dans le cas des équilibres de précipitation, pour pouvoir écrire : $Q_{r, \text{éq}} = K_s$, il faut que toutes les espèces soient présentes à l'équilibre, y compris le solide, même si celui-ci n'apparaît pas dans l'expression de $Q_{r, \text{éq}}$.
- Tenir compte des coefficients stoechiométriques dans le calcul de la solubilité d'un précipité ionique.
- Un précipité existe ou n'existe pas ; il ne prédomine jamais devant une autre espèce.

Quelques « trucs » utiles

- Penser à utiliser de manière systématique les échelles de $\text{p}K_A$ ou de E^0 pour étudier rapidement un système chimique siège de réactions acido-basiques ou d'oxydo-réduction.
- La constante d'une réaction d'oxydo-réduction peut être très grande ($> 10^{30}$) ; il ne faut pas s'en étonner.
- Pour déterminer la concentration d'une espèce à l'équilibre, utiliser les constantes d'équilibre.

1 Calculer un pH ★★

→ corrigé p. 611

Calculer le pH d'une solution d'acide éthanoïque à 0,10 mol.L⁻¹.

Donnée : $pK_A(\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-) = 4,8$

2 Calculer une constante d'équilibre ★

→ corrigé p. 612

- ① On dispose d'une solution S constituée d'un mélange d'hydrogénosulfate de sodium ($\text{Na}^+ + \text{HSO}_4^-$) et de chlorure d'ammonium ($\text{NH}_4^+ + \text{Cl}^-$). On ajoute, à cette solution S, un excès de soude. Écrire les différentes réactions se produisant et donner la valeur de leur constante.

Données : $pK_{A1} = pK_A(\text{HSO}_4^- / \text{SO}_4^{2-}) = 2,0$; $pK_{A2} = pK_A(\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3) = 9,2$; produit ionique de l'eau : $K_e = 10^{-14}$

- ② On mélange une solution de sulfate de fer ($\text{Fe}^{2+} + \text{SO}_4^{2-}$) avec une solution de nitrate d'argent ($\text{Ag}^+ + \text{NO}_3^-$). Écrire le bilan de la réaction se produisant et calculer sa constante d'équilibre.

Données : $E^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag}) = 0,80 \text{ V}$; $E^\circ(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) = 0,77 \text{ V}$

3 Formation d'un précipité ★★★

→ corrigé p. 612

La très grande toxicité des ions fluorure s'explique par la formation d'un composé très stable avec le calcium, la fluorine $\text{CaF}_2(s)$.

- ① Calculer la solubilité du fluorure de calcium $\text{CaF}_2(s)$ dans l'eau pure.
- ② Dans 100 mL d'une solution de nitrate de calcium ($\text{Ca}^{2+} + 2 \text{NO}_3^-$) de concentration $1,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$, combien de gouttes de solution de fluorure de sodium ($\text{Na}^+ + \text{F}^-$) à $1,00 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ faut-il ajouter pour que le fluorure de calcium solide $\text{CaF}_2(s)$ apparaisse en solution ?

- ③ Dans 100 mL de solution S_0 de nitrate de calcium ($\text{Ca}^{2+} + 2 \text{NO}_3^-$) de concentration $1,00 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$, on verse 100 mL d'une solution de fluorure de sodium ($\text{Na}^+ + \text{F}^-$) à $1,00 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$. On obtient une solution S_1 à laquelle sont ajoutés, sans variation de volume, $1,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$ de nitrate de baryum ($\text{Ba}^{2+} + 2 \text{NO}_3^-$). On obtient une solution S_2 . La solution S_2 contient-elle du fluorure de baryum solide ?

Données : $pK_{S_1}(\text{CaF}_2) = 10,5$; $pK_{S_2}(\text{BaF}_2) = 6,0$; $V_{\text{goutte}} \approx 40 \mu\text{L}$

4 Étudier l'influence de facteurs sur la solubilité ★★

→ corrigé p. 614

Pour chacun des cas ci-dessous, comparer la solubilité calculée à celle du solide ionique dans l'eau pure (notée s) et conclure.

- ① Calculer la solubilité s_1 du précipité $\text{AgCl}(s)$ dans une solution aqueuse contenant déjà des ions chlorure à la concentration $C = 1,00 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.
- ② Calculer la solubilité s_2 du précipité $\text{AgCH}_3\text{COO}(s)$ dans une solution aqueuse acidifiée, telle que $[\text{H}_3\text{O}^+] = C = 1,0 \text{ mol.L}^{-1}$.

Données : $pK_s(\text{AgCl}) = 10,0$; $pK_A(\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-) = 4,2$; $pK_s(\text{AgCH}_3\text{COO}) = 2,7$

5 Le pH sanguin (d'après Centrale PSI 2009 et CCP PC 2014) ★★★

→ corrigé p. 614

Dans cette partie, tous les calculs seront effectués à 37°C , température du corps humain.

L'activité métabolique et l'ingestion d'aliments peuvent introduire des espèces acido-basiques dans le sang. Or, la survie des cellules nécessite que le pH varie très peu autour d'une valeur optimale. Ainsi le sang humain constitue un milieu tamponné : le pH reste compris dans l'intervalle 7,36 – 7,44 en temps normal.

- ① Tracer le diagramme de prédominance des espèces H_2CO_3 , HCO_3^- , CO_3^{2-} , $\text{CH}_3\text{CHOHCOOH}$ et $\text{CH}_3\text{CHOHCOO}^-$ sur un même axe de pH.
- ② Le sang est en partie tamponné par le couple $\text{H}_2\text{CO}_3 / \text{HCO}_3^-$ de concentration totale égale à $0,0280 \text{ mol.L}^{-1}$. Sachant que le pH du sang vaut 7,40, calculer les concentrations en H_2CO_3 et HCO_3^- avec trois chiffres significatifs.
- ③ Dans certains cas, après des efforts physiques intenses, des crampes apparaissent. Il se forme alors dans les muscles de l'acide lactique ($\text{CH}_3\text{CHOHCOOH}$) qui est transféré dans le sang.
 - a) Écrire l'équation de la réaction ayant lieu dans le sang et déterminer la valeur de sa constante d'équilibre.
 - b) Dans le sang, avant l'effort musculaire et donc avant que l'équilibre décrit dans la question ③a) ne s'établisse, les concentrations des différentes espèces sont les suivantes : $[\text{HCO}_3^-]_0 = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{H}_2\text{CO}_3]_0 = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$. Après l'effort musculaire, dans un volume de 100 mL, apparaît alors $3,0 \cdot 10^{-4}$ mole d'acide lactique. Faire le bilan de matière, à l'équilibre, des différentes espèces présentes dans le sang, et en déduire alors la valeur du pH local du sang. Conclure.
 - c) Afin d'éviter cette variation du pH sanguin, l'hémoglobine (notée Hb), ainsi que le phénomène de respiration, interviennent pour éliminer l'excès de dioxyde de carbone dissous (H_2CO_3 correspond à du dioxyde de carbone dissous dans l'eau). Les échanges entre les gaz dissous dans le sang peuvent être modélisés par la réaction d'équation : $\text{HbO}_2 + \text{CO}_2 \rightarrow \text{HbCO}_2 + \text{O}_2$. Expliquer comment la respiration permet de maintenir constante la valeur du pH sanguin.

Données (à 37 °C) :

- Produit ionique de l'eau : $\text{pK}_\text{e} = 13,7$
- $\text{pK}_{\text{A}1}(\text{H}_2\text{CO}_3 / \text{HCO}_3^-) = 6,1$
- $\text{pK}_{\text{A}2}(\text{HCO}_3^- / \text{CO}_3^{2-}) = 10,2$
- $\text{pK}_{\text{A}3}(\text{CH}_3\text{CHOHCOOH} / \text{CH}_3\text{CHOHCOO}^-) = 3,9$
- L'espèce H_2CO_3 s'identifie à $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$

6 Détermination d'un produit de solubilité (d'après G2E BCPST 2008) ★★ → corrigé p. 615

Dans un bêcher (noté 1), on verse 100 cm³ d'une solution de nitrate d'argent ($\text{Ag}^+ + \text{NO}_3^-$) de concentration molaire $C_1 = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$, puis on y plonge une électrode d'argent. Cette électrode constitue le pôle positif de la pile.

Dans un second bêcher (noté 2), on verse 100 cm³ d'une solution de chlorure de cobalt ($\text{Co}^{2+} + 2 \text{Cl}^-$) de concentration molaire $C_2 = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$, puis on y plonge une électrode de cobalt.

On relie les deux bêchers par un pont salin contenant du nitrate d'ammonium ($\text{NH}_4^+ + \text{NO}_3^-$). On mesure alors une force électromotrice, notée ΔE , aux bornes de la pile ainsi constituée. L'expérience donne $\Delta E = 1,05 \text{ V}$ à une température de 25 °C.

- ① Écrire l'équation de la réaction ayant lieu dans la pile quand celle-ci débite.
- ② Déterminer, dans les conditions de l'expérience, la valeur du potentiel standard du couple $\text{Co}^{2+} / \text{Co}$.

On ajoute dans le bêcher 2, contenant les ions Co^{2+} en solution aqueuse, une pastille d'hydroxyde de sodium NaOH(s) . L'hydroxyde de cobalt $\text{Co(OH)}_2\text{(s)}$ précipite. On mesure alors la force électromotrice de la pile ainsi constituée et on obtient une valeur $\Delta E' = 1,18 \text{ V}$. Par ailleurs, le pH mesuré vaut 8,9.

- ③ Déterminer la valeur du produit de solubilité de l'hydroxyde de cobalt (II).

Données : $E^0(\text{Ag}^+/\text{Ag}) = 0,80 \text{ V}$

Résolution de problème : Potabilisation d'une eau polluée



→ corrigé p. 616

DOCUMENT 1 : L'arsenic, un polluant de l'eau potable

Un habitant consomme en moyenne 150 L d'eau potable par jour. Ces eaux sont initialement contaminées par différents polluants, dont l'arsenic. L'arsenic peut être d'origine naturelle mais lorsqu'il se trouve à une concentration anormalement élevée, c'est qu'il résulte d'une contamination engendrée par les activités humaines (eaux usées, rejets industriels, etc.).

L'arsenic III est la forme la plus毒ique de l'arsenic et c'est aussi sa forme majoritaire dans les eaux souterraines. La directive européenne 98/83/CE du 3 novembre 1998 fixe à $10 \mu\text{g.L}^{-1}$ la concentration maximale en arsenic III admissible dans les eaux destinées à la consommation humaine.

L'arsenic III peut être éliminé en plusieurs étapes :

- 1) Préoxydation de l'arsenic III en arsenic V en présence de dioxyde de chlore (ClO_2).
- 2) Précipitation de l'arsenic V au sulfate de fer $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ (s) (entièrement soluble en solution aqueuse).
- 3) Filtration du mélange obtenu.

En présence d'un large excès de dioxyde de chlore, cette méthode permet d'éliminer plus de 80 % de l'arsenic III initialement présent.

DOCUMENT 2 : Données sur l'eau de forage à potabiliser

Une campagne d'analyses effectuée sur l'eau de forage à potabiliser, a donné initialement les caractéristiques ci-dessous.

Caractéristique	Valeurs
pH	8,0
Arsenic III	$80 \mu\text{g.L}^{-1}$

Données

Constantes d'acidité :



Potentiels standards à pH = 8,0 :

$$E^0(\text{ClO}_2 / \text{ClO}_2^-) = 0,95 \text{ V} ; \quad E^0(\text{HAsO}_4^{2-} / \text{H}_3\text{AsO}_3) = 0,83 \text{ V}$$

Produit de solubilité :

$$pK_s(\text{FeAsO}_4) = 20$$

Masses molaires :

$$M(\text{As}) = 75 \text{ g.mol}^{-1} ; M(\text{Fe}) = 56 \text{ g.mol}^{-1} ; M(\text{S}) = 32 \text{ g.mol}^{-1} ; M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$$

Problème à résoudre : Quelle quantité d'agent précipitant faut-il ajouter quotidiennement à cette eau, initialement polluée à l'arsenic et destinée à approvisionner une ville de 10 000 habitants ?

CORRIGÉS

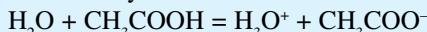
Conseil

Les exercices n° 1, 2 et 3 sont des illustrations des points méthodes du cours. La démarche est structurée à l'aide de symboles ↗, il est conseillé de s'en inspirer dans les exercices similaires.

1 Calculer un pH

→ énoncé p. 608

Le bilan de la réaction ayant lieu en solution est :



Pour calculer la constante d'équilibre, il faut appliquer le **point méthode** p. 602.

→ Tracer l'échelle des $\text{p}K_A$ avec les couples concernés par la réaction étudiée.

→ Souligner les espèces réactives.

→ Le « gamma » est à l'envers, alors la constante s'écrit
 $K = 10^{-|\Delta\text{p}K_A|}$

$$K = 10^{-|\Delta\text{p}K_A|} = 10^{-|4,8-0|} = 10^{-4,8} < 10^{-4}; \text{ réaction très peu déplacée.}$$

Tableau d'avancement de cette réaction très peu déplacée :

(mol.L ⁻¹)	H_2O	+	CH_3COOH	=	H_3O^+	+	CH_3COO^-
E.I.	excès		0,10		0		0
E.F.	excès		$0,10 - x \approx 0,10$		x		x

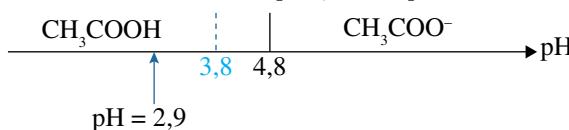
L'avancement volumique est calculé à partir de l'expression de la constante d'équilibre :

$$K = 10^{-4,8} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} = \frac{x^2}{0,10} \Rightarrow x = \sqrt{0,10 \times 10^{-4,8}} = 10^{-2,9} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{A.N. : } \text{pH} = -\log x = -\log(\sqrt{0,10 \times 10^{-4,8}}) = 2,9$$

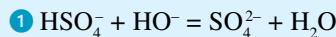
Bien comprendre

Le tracé du diagramme de prédominance nous confirme que CH_3COOH est majoritaire en solution devant CH_3COO^- à pH = 2,9, et donc que $[\text{CH}_3\text{COOH}] \approx 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$:

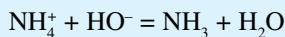
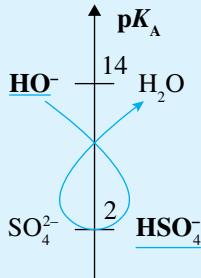


2 Calculer une constante d'équilibre

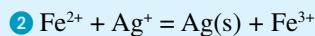
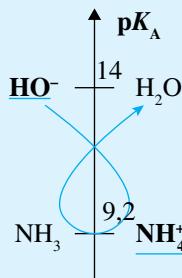
→ énoncé p. 608



$$K = 10^{\frac{1}{2}(14-2)} = 10^{12}$$



$$K' = 10^{\frac{1}{2}(14-9,2)} = 10^{4,8}$$



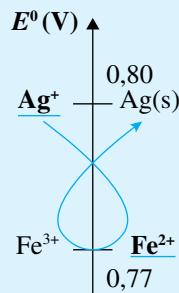
Pour calculer la constante d'équilibre, il faut appliquer le **point méthode** p. 603.

→ Tracer l'échelle avec les E^0 des couples intervenant dans la réaction étudiée.

→ Souligner les espèces réactives.

→ Le « gamma » est ici à l'endroit, donc la constante s'écrit $K = 10^{\frac{+n}{0,06}\Delta E^0}$

$$K = 10^{\frac{1}{0,06}[0,80-0,77]} = 10^{0,5}$$



3 Formation d'un précipité

→ énoncé p. 608

❶ Pour calculer la solubilité, il faut appliquer le **point méthode** p. 603.

→ Écrire l'équilibre de dissolution du précipité : $\text{CaF}_2(\text{s}) = \text{Ca}^{2+} + 2 \text{F}^-$

→ Dresser le tableau d'avancement en considérant que la solution contient initialement le solide en excès. On notera s la solubilité.

	$\text{CaF}_2(\text{s})$	=	Ca^{2+}	+	2F^-
E.I.	excès		0		0
E.F.	excès		s		$2s$

→ Écrire le produit de solubilité et en déduire la solubilité.

$$K_s = [\text{Ca}^{2+}][\text{F}^-]^2 = s \times (2s)^2 = 4s^3 \Rightarrow s = \sqrt[3]{\frac{K_s}{4}}$$

$$\Rightarrow \text{A.N. : } s = \sqrt[3]{\frac{10^{-10,5}}{4}} = 1,99 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

- 2 En faisant l'hypothèse que le volume ajouté de solution aqueuse d'ions fluorure est négligeable devant le volume initial de solution, on a : $\left[\text{Ca}^{2+}\right]_0 = 1,00 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ et $\left[\text{F}^-\right]_0 = \frac{C_{\text{F}^-,0} V_F}{V_{\text{Ca}} + V_F} \approx \frac{C_{\text{F}^-,0} V_F}{V_{\text{Ca}}}$, avec $C_{\text{F}^-,0} = 1,00 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$, $V_{\text{Ca}} = 100 \text{ mL}$ et V_F , le volume de solution aqueuse d'ions fluorure ajouté.

À la limite d'apparition du précipité :

$$\begin{aligned} Q_r &= \left[\text{Ca}^{2+}\right]_0 \left[\text{F}^-\right]_0^2 = K_s \Rightarrow \left[\text{F}^-\right]_0 = \frac{C_{\text{F}^-,0} V_F}{V_{\text{Ca}}} = \sqrt{\frac{K_s}{\left[\text{Ca}^{2+}\right]_0}} \Rightarrow V_F = \frac{V_{\text{Ca}}}{C_{\text{F}^-,0}} \sqrt{\frac{K_s}{\left[\text{Ca}^{2+}\right]_0}} \\ &\Rightarrow \text{A.N. : } V_F = \frac{100 \times 10^{-3}}{1,00 \times 10^{-1}} \times \sqrt{\frac{10^{-10,5}}{1,00 \times 10^{-2}}} = 5,62 \times 10^{-5} \text{ L} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_F = 56,2 \mu\text{L}$$

Par conséquent, le volume de solution aqueuse d'ions fluorure nécessaire à la formation du précipité de CaF_2 est de $56,2 \mu\text{L}$. Pour que ce précipité apparaisse, il suffit donc d'ajouter **deux gouttes** de cette solution.

- 3 La première réaction correspond à la précipitation de $\text{CaF}_2(\text{s})$: $\text{Ca}^{2+} + 2 \text{F}^- \rightarrow \text{CaF}_2(\text{s})$ de constante d'équilibre $K_1 = \frac{1}{K_{S_1}} = 10^{10,5} > 10^4$: cette réaction est donc totale. Le tableau d'avancement (en mol.L^{-1}) s'écrit :

	Ca^{2+}	$+ 2 \text{F}^-$	$\rightarrow \text{CaF}_2(\text{s})$
E.I.	0,0500	0,0500	0
E.F.	0,0250	$\varepsilon \rightarrow 0$	0,0250

La concentration ε résiduelle en ions fluorure est obtenue en écrivant la constante d'équilibre :

$$K_1 = \frac{1}{\left[\text{Ca}^{2+}\right]_0 \left[\text{F}^-\right]^2} \Rightarrow \left[\text{F}^-\right]_0 = \sqrt{\frac{1}{\left[\text{Ca}^{2+}\right]_0 K_1}} = \sqrt{\frac{K_{S_1}}{\left[\text{Ca}^{2+}\right]_0}} \quad \text{A.N. : } \left[\text{F}^-\right] = \varepsilon = \sqrt{\frac{K_{S_1}}{\left[\text{Ca}^{2+}\right]_0}} = \sqrt{\frac{10^{-10,5}}{0,0250}} = 3,56 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

Pour savoir si le précipité $\text{BaF}_2(\text{s})$ se forme, il faut vérifier sa condition de précipitation :

$$Q_{r2} = \left[\text{Ba}^{2+}\right]_0 \left[\text{F}^-\right]_0^2 = \frac{n_{\text{Ba}}}{V_{\text{tot}}} \times \varepsilon^2 \quad \text{avec } n_{\text{Ba}} = 1,00 \times 10^{-2} \text{ mol et } V_{\text{tot}} = 200 \text{ mL}$$

$$\text{A.N. : } Q_{r2} = \frac{1,00 \times 10^{-2}}{200 \times 10^{-3}} \times (3,56 \times 10^{-5})^2 = 6,32 \times 10^{-11} < K_{S_2} = 10^{-6} \quad \text{donc } \text{BaF}_2(\text{s}) \text{ ne se forme pas.}$$

Bien comprendre

- Pensez à vérifier les hypothèses formulées : à la question 2, l'hypothèse initiale est vérifiée : $V_F \ll V_{\text{Ca}}$.
- Même si une transformation est totale, la concentration de toute espèce dissoute en solution à l'équilibre est non nulle strictement. Ceci est vrai même si cette espèce constitue le réactif limitant. Ainsi, à la question 3, la concentration en ions fluorure n'est pas strictement nulle mais égale à ε .

4 Étudier l'influence de facteurs sur la solubilité

→ énoncé p. 608

- 1 En absence d'ions chlorure : $s = \sqrt{K_s} = 10^{-5}$ mol.L⁻¹ (voir point méthode p. 603).

En présence d'ions chlorure :

		AgCl(s)	\rightleftharpoons	Ag^+	+	Cl^-	
E.I.	excès		0			C	
E.F.	excès		s_1			$s_1 + C \approx C$	

$$K_s = 10^{-10}$$

$$K_s = s_1 \times C$$

On en déduit : $s_1 = 1,00 \cdot 10^{-9}$ mol.L⁻¹ $\ll s$

La solubilité de AgCl(s) diminue donc en présence d'ions Ag⁺, c'est l'**effet d'ion commun**.

Remarque : L'hypothèse $s_1 + C \approx C$ est vérifiée.

- 2 Dans l'eau pure (pH = 7), CH₃COO⁻ est majoritaire (pH > pK_A + 1 = 5,2).

$$\Rightarrow s = \sqrt{K_s} = 4,5 \cdot 10^{-2}$$
 mol.L⁻¹

La transformation se déroulant en solution peut être modélisée par une réaction chimique unique :

$\text{AgCH}_3\text{COO(s)} + \text{H}_3\text{O}^+ = \text{Ag}^+ + \text{CH}_3\text{COOH} + \text{H}_2\text{O}$					
E.I.	excès	C	0	0	excès
E.F.	excès	$C - s_3$	s_3	s_3	excès

$$K = \frac{K_s}{K_A} = 10^{1,5}$$
 (voir point méthode p. 604)

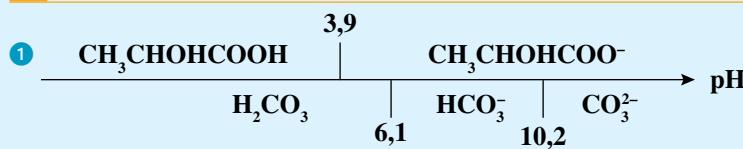
$$K = \frac{s_3^2}{C - s_3}$$
 soit $s_3^2 + Ks_3 - KC = 0$

On en déduit : $s_3 = 0,97$ mol.L⁻¹ $\gg s$

La solubilité de AgCH₃COO(s) augmente lorsque le pH diminue.

5 Le pH sanguin

→ énoncé p. 608



$$2 \quad \text{pH} = \text{p}K_{\text{A}1} + \log \frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} \Rightarrow \frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} = 10^{\text{pH} - \text{p}K_{\text{A}1}} \text{ et } [\text{HCO}_3^-] + [\text{H}_2\text{CO}_3] = 0,0280 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow (1 + 10^{\text{pH} - \text{p}K_{\text{A}1}})[\text{H}_2\text{CO}_3] = 0,0280 \Rightarrow [\text{H}_2\text{CO}_3] = \frac{0,0280}{(1 + 10^{\text{pH} - \text{p}K_{\text{A}1}})}$$

$$\text{A.N. : } [\text{H}_2\text{CO}_3] = \frac{0,0280}{(1 + 10^{7,40 - 6,1})} = 1,34 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \text{ et } [\text{HCO}_3^-] = 0,0280 - [\text{H}_2\text{CO}_3] = 0,0267 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{H}_2\text{CO}_3] = 1,34 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} ; [\text{HCO}_3^-] = 0,0267 \text{ mol.L}^{-1}$$

Remarque : $[\text{HCO}_3^-] > 10[\text{H}_2\text{CO}_3]$, ce qui est attendu car $\text{pH} > \text{p}K_{\text{A}1} + 1$.

3 a) Le diagramme de prédominance montre que l'acide lactique et les ions hydrogénocarbonate sont incompatibles, la réaction ayant lieu entre ces deux espèces est donc favorisée :



b) Le tableau d'avancement de la réaction précédente, en supposant la réaction totale (hypothèse qu'il faudra vérifier car $K = 10^{2,2} < 10^4$) s'écrit :

(mmol)	$\text{CH}_3\text{CHOHCOOH}$	HCO_3^-	$\text{CH}_3\text{CHOHCOO}^-$	H_2CO_3
E.I.	0,30	2,7	0	0,14
E.F.	$\varepsilon \rightarrow 0$	2,4	0,30	0,44

$$\text{pH} = \text{p}K_{\text{A}1} + \log \frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} \Rightarrow \text{pH} = 6,1 + \log \frac{2,4 \times 10^{-2}}{4,4 \times 10^{-3}} = 6,8$$

Le caractère total de la réaction est vérifié en calculant la quantité résiduelle d'acide lactique :

$$K = \frac{[\text{CH}_3\text{CHOHCOO}^-][\text{H}_2\text{CO}_3]}{[\text{CH}_3\text{CHOHCOOH}][\text{HCO}_3^-]} \Rightarrow [\text{CH}_3\text{CHOHCOOH}] = \frac{[\text{CH}_3\text{CHOHCOO}^-][\text{H}_2\text{CO}_3]}{K[\text{HCO}_3^-]}$$

$$\Rightarrow \text{A.N. : } [\text{CH}_3\text{CHOHCOOH}] = \frac{0,30 \times 10^{-2} \times 0,44 \times 10^{-2}}{10^{2,2} \times 2,4 \times 10^{-3}} = 3,5 \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1} \ll 3,0 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

La réaction est donc bien totale et le pH de la solution égal à 6,8.

Conclusion : Après un ajout modéré d'acide lactique, le pH est passé de 7,4 à 6,8. Par conséquent, le couple $\text{H}_2\text{CO}_3 / \text{HCO}_3^-$ ne joue pas bien son rôle de tampon.

Bien comprendre

Une réaction peut être totale même si $K < 10^4$. En effet, cette condition n'est pas stricte et dépend des concentrations en réactifs.

c) La respiration permet l'expiration de CO_2 , et donc de l'acide H_2CO_3 , ce qui permet au pH de ne pas diminuer malgré la production d'acide lactique.

6 Détermination d'un produit de solubilité

→ énoncé p. 609

1 Demi-pile 1 (pôle positif) : réduction $\Rightarrow \text{Ag}^+ + \text{e}^- = \text{Ag(s)}$

Demi-pile 2 (pôle négatif) : oxydation $\Rightarrow \text{Co(s)} = \text{Co}^{2+} + 2\text{e}^-$

L'équation bilan de la réaction ayant lieu dans la pile est donc : $2\text{Ag}^+ + \text{Co(s)} \rightarrow \text{Co}^{2+} + 2\text{Ag(s)}$

$$2 \Delta E = E(\text{Ag}^+ / \text{Ag}) - E(\text{Co}^{2+} / \text{Co}) = E^0(\text{Ag}^+ / \text{Ag}) + 0,06 \log \left[\frac{\text{Ag}^+}{\text{Ag}} \right] - E^0(\text{Co}^{2+} / \text{Co}) - \frac{0,06}{2} \log \left[\frac{\text{Co}^{2+}}{\text{Co}} \right]$$

$$\Rightarrow E^0(\text{Co}^{2+} / \text{Co}) = E^0(\text{Ag}^+ / \text{Ag}) + 0,06 \log \left[\frac{\text{Ag}^+}{\text{Ag}} \right] - \frac{0,06}{2} \log \left[\frac{\text{Co}^{2+}}{\text{Co}} \right] - \Delta E$$

$$\text{A.N. : } E^0(\text{Co}^{2+} / \text{Co}) = -0,80 + 0,06 \log 0,10 - 0,03 \log 0,10 - 1,05 = 0,28 \text{ V}$$

3 Soit $[\text{Co}^{2+}]'$ la concentration résiduelle en ions Co^{2+} dans le becher 2 après ajout de la pastille d'hydroxyde de sodium.

$$\begin{aligned}\Delta E' &= E^0(\text{Ag}^+ / \text{Ag}) + 0,06 \log[\text{Ag}^+] - E^0(\text{Co}^{2+} / \text{Co}) - \frac{0,06}{2} \log[\text{Co}^{2+}]' \\ &\Rightarrow 0,03 \log[\text{Co}^{2+}]' = E^0(\text{Ag}^+ / \text{Ag}) + 0,06 \log[\text{Ag}^+] - E^0(\text{Co}^{2+} / \text{Co}) - \Delta E' \\ &\Rightarrow [\text{Co}^{2+}]' = 10^{\frac{E^0(\text{Ag}^+ / \text{Ag}) + 0,06 \log[\text{Ag}^+] - E^0(\text{Co}^{2+} / \text{Co}) - \Delta E'}{0,03}} \Rightarrow \text{A.N. : } [\text{Co}^{2+}]' = 4,6 \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}\end{aligned}$$

Le produit de solubilité de l'hydroxyde de cobalt (II) s'écrit :

$$K_s = [\text{Co}^{2+}][\text{HO}^-]^2 = [\text{Co}^{2+}]' \frac{K_e^2}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2} = [\text{Co}^{2+}]' \frac{K_e^2}{10^{-2\text{pH}}}$$

$$\text{A.N. : } K_s = 4,6 \times 10^{-6} \times \frac{10^{-28}}{10^{-2 \times 8,9}} = 2,9 \times 10^{-16} \Rightarrow \boxed{\text{p}K_s = 16}$$

Résolution de problème : Potabilisation d'une eau polluée

→ énoncé p. 610

Analyse rapide des documents et de la question posée :

- L'eau à potabiliser est contaminée par de l'arsenic au degré d'oxydation III.
- La teneur de l'eau de forage en arsenic III, est de $80 \mu\text{g.L}^{-1}$ alors qu'elle devrait être inférieure à $10 \mu\text{g.L}^{-1}$.
- Pour potabiliser l'eau de forage, on utilise un traitement au dioxyde de chlore puis au sulfate de fer. Le rendement de ce traitement est de 80%.
- Le problème posé consiste à trouver la quantité de sulfate de fer à ajouter, afin de rendre potable cette eau.

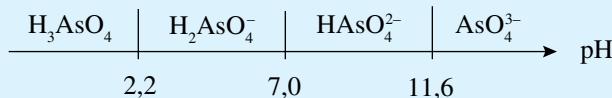
Démarche :

- À partir des documents 2 et 3, on va chercher à identifier les espèces chimiques à base d'arsenic intervenant dans le traitement de l'eau potable.
- À partir du document 3, on va ensuite chercher à écrire le bilan des réactions se déroulant lors du traitement de l'eau. Le caractère total ou non de ces réactions sera alors précisé.
- En s'aidant des documents 1 et 2, l'étude des bilans de ces réactions va nous permettre de répondre au problème posé.

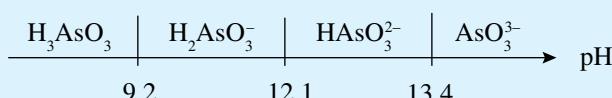
Résolution du problème :

- Le document 2 nous indique que l'eau de forage à potabiliser a un pH de 8,0. Il faut chercher les espèces à base d'arsenic III et V prédominantes en solution à ce pH. Pour cela, il est utile de tracer les diagrammes de prédominance correspondants :

– pour l'arsenic V :



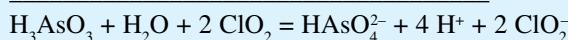
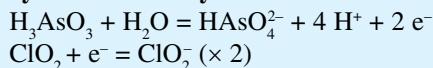
– pour l'arsenic III :



À pH = 8,0, l'arsenic V se trouve majoritairement sous la forme HAsO_4^{2-} et l'arsenic III, sous la forme H_3AsO_3 .

- 2 Les bilans des réactions se déroulant lors du traitement de l'eau sont :

a) Préoxydation au dioxyde de chlore

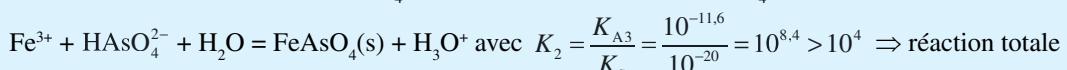


$$\text{Avec } K_1 = 10^{\frac{2}{0.06} \left(E_{\text{ClO}_2/\text{ClO}_2^-}^0 - E_{\text{HAsO}_4^{2-}/\text{H}_3\text{AsO}_3}^0 \right)} \text{ A.N. : } K_1 = 10^{\frac{2}{0.06} [0.95 - 0.83]} = 10^4 \Rightarrow \text{réaction totale}$$

b) Précipitation au sulfate de fer

Le sulfate de fer est entièrement soluble en solution aqueuse : $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3 = 2 \text{Fe}^{3+} + 3 \text{SO}_4^{2-}$

Les ions Fe^{3+} réagissent ensuite avec HAsO_4^{2-} pour donner le précipité $\text{FeAsO}_4(s)$ selon le bilan :



Les réactions se produisant au cours du traitement de l'eau potable peuvent être considérées comme totales.

- 3 D'après les documents 1 et 2, la masse d'arsenic III à éliminer par litre d'eau est de $t_{\text{As}} = 80 - 10 = 70 \mu\text{g.L}^{-1}$. Le volume d'eau consommée par la ville quotidiennement est $V = 150 \times 10000 = 1,50 \times 10^6 \text{ L}$. Par conséquent, la quantité de matière en arsenic III à éliminer est :

$$n_{\text{As}} = \frac{m_{\text{As}}}{M(\text{As})} = \frac{t_{\text{As}} V}{M(\text{As})} \text{ A.N. : } n_{\text{As}} = \frac{70 \times 10^{-6} \times 1,50 \times 10^6}{75} = 1,4 \text{ mol}$$

Les réactions de préoxydation et de précipitation étant totales, une quantité identique d'ions Fe^{3+} doit être apportée : $n_{\text{Fe}^{3+}} = 1,4 \text{ mol}$. Et d'après l'équation de dissolution du sulfate de fer :

$$n_{\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3} = \frac{n_{\text{Fe}^{3+}}}{2} = 0,70 \text{ mol} \Rightarrow m_{\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3} = n_{\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3} \times M(\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3) \text{ A.N. : } m_{\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3} = 0,70 \times 400 = 2,8 \cdot 10^2 \text{ g}$$

Conclusion : le rendement global du traitement étant de 80 %, il faut traiter l'eau avec $(100/80) \times 280 = 3,5 \cdot 10^2 \text{ g de sulfate de fer}$ pour rendre potable l'eau initialement contaminée à l'arsenic.

Dosages

Dans de nombreux domaines, tels que la santé et l'environnement, il est nécessaire de contrôler la présence et la quantité d'espèces chimiques (composition d'un médicament, qualité d'une eau potable, etc.). Les dosages, par étalonnage ou par titrage, sont utilisés pour déterminer les quantités d'espèces chimiques présentes en solution.

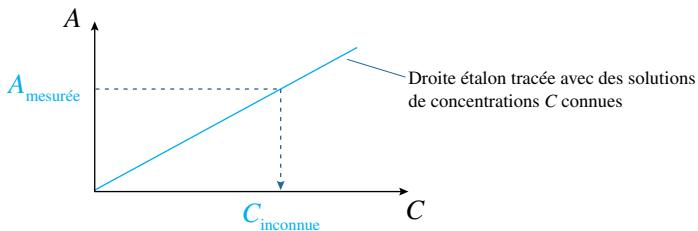
I | Les différents types de dosage

1. Rappels de Lycée

a. Dosage par étalonnage

Le dosage par étalonnage est une méthode **non destructive** qui consiste à utiliser une **grandeur physique mesurable** (absorbance A , conductivité σ , etc.) dépendant de la concentration C de l'espèce que l'on souhaite doser.

Exemple : Dosage par étalonnage spectrophotométrique



b. Dosage par titrage direct

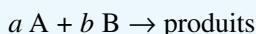
- Le dosage par titrage direct est une méthode **destructive** qui consiste à utiliser une **réaction chimique support** du titrage.
- L'espèce chimique à doser, aussi appelée **espèce titrée**, réagit avec une autre espèce chimique, appelée **espèce titrante**.

Remarques :

- La réaction support du titrage doit être **spécifique de l'espèce titrée, rapide et quantitative** ($K > 10^4$).
- Une réaction support de titrage peut être une réaction acido-basique, d'oxydo-réduction ou de précipitation.
- La quantité inconnue est déterminée à l'**équivalence du titrage**, qui se produit lorsque les réactifs ont été introduits dans les **proportions stœchiométriques**.

Résultat

Si A est l'espèce titrée, B l'espèce titrante et que la réaction de titrage s'écrit :



alors la **relation à l'équivalence** est :
$$\frac{n(\text{A})_{\text{titré}}}{a} = \frac{n(\text{B})_{\text{ajouté à l'équivalence}}}{b}$$

Exemple : Titrage des ions Fe^{2+} (réactif titré) par les ions MnO_4^- (réactif titrant).

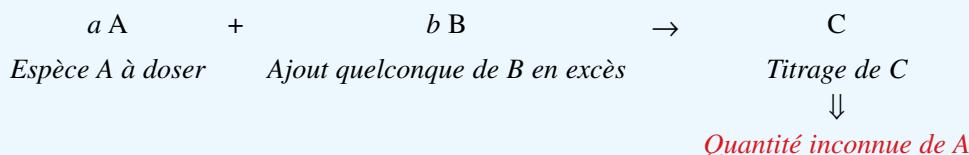
- Bilan de la réaction support du titrage : $5 \text{Fe}^{2+} + \text{MnO}_4^- + 8 \text{H}^+ \rightarrow 5 \text{Fe}^{3+} + \text{Mn}^{2+} + 4 \text{H}_2\text{O}$ ($K = 4,6 \cdot 10^{61}$)
- Relation à l'équivalence : $\frac{n(\text{Fe}^{2+})}{5} = \frac{n(\text{MnO}_4^-)}{1}$

2. Dosage par titrage indirect et par titrage en retour

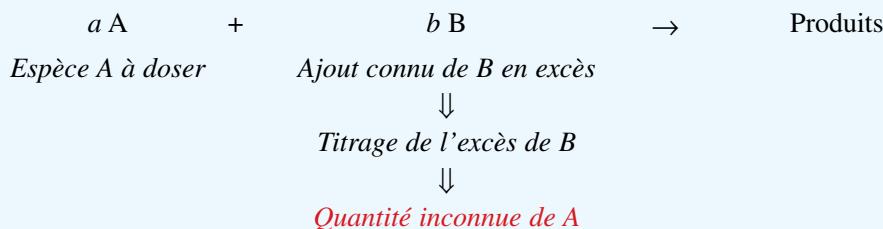
Lorsqu'un titrage direct n'est pas adapté, par exemple si la détection de l'équivalence est difficile, on peut utiliser un dosage par titrage indirect ou par titrage en retour.

Définition

Dosage par titrage indirect :



Dosage par titrage en retour :

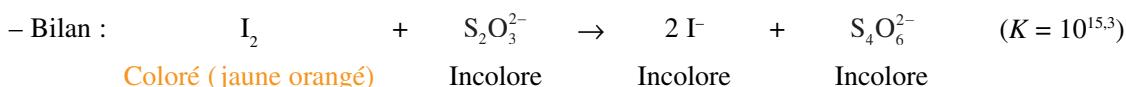


II Détection de l'équivalence d'un titrage

1. Le réactif titrant ou le réactif titré est coloré

L'équivalence est détectée par changement de couleur de la solution.

Exemple : Titrage du diiode par les ions thiosulfate.



- À l'équivalence, la solution vire du jaune orangé à l'incolore. Pour mieux détecter l'équivalence, il est, dans cet exemple, usuel de rajouter de l'embois d'amidon, la solution passe alors du bleu-noir à l'incolore.

2. Aucun des réactifs n'est coloré

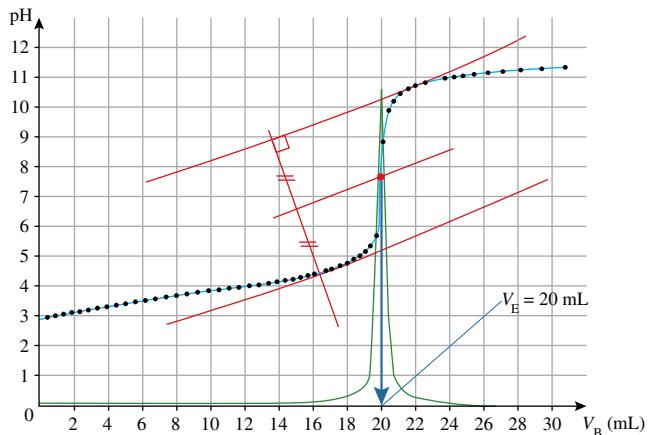
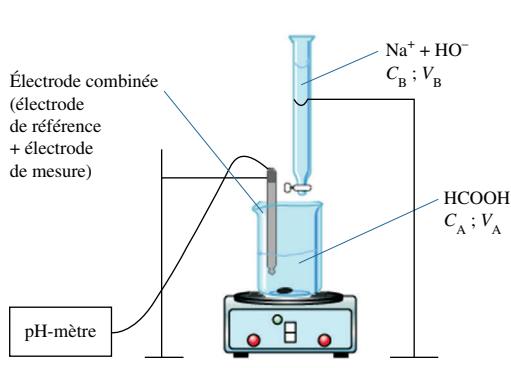
La détection de l'équivalence d'un titrage dépend des propriétés physico-chimiques de l'espèce chimique à doser.

a. pH-métrie

La **pH-métrie** est adaptée si l'espèce titrée est un acide ou une base.

Exemple : Titrage de l'acide méthanoïque par la soude ($\text{Na}^+ + \text{OH}^-$).

- Bilan de la réaction support du titrage : $\text{HCOOH} + \text{HO}^- \rightarrow \text{HCOO}^- + \text{H}_2\text{O}$ ($K = 10^{10.2} > 10^4$)
- La présence d'un saut sur la courbe $\text{pH} = f(V)$ est spécifique du caractère total de cette réaction.



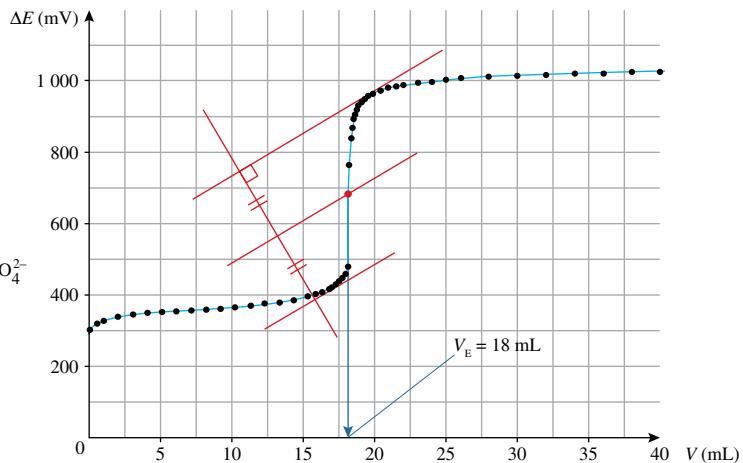
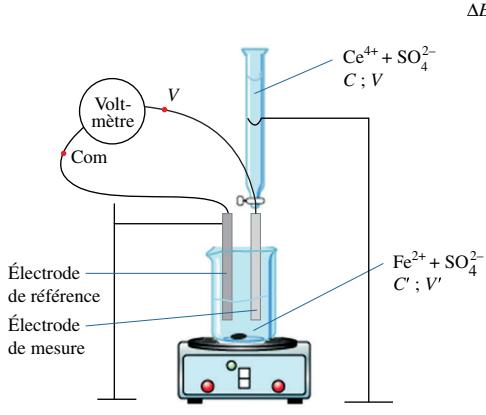
- La mesure du volume de réactif titrant, versé à l'équivalence, noté V_E , se fait en utilisant la méthode des tangentes ou en prenant l'abscisse du maximum de la courbe $\frac{\text{d}\text{pH}}{\text{d}V} = f(V)$.
- L'analyse de la courbe d'un titrage pH-métrique peut permettre de déterminer des constantes thermodynamiques d'équilibre. Ainsi dans l'exemple présenté, à la demi-équivalence (c'est-à-dire lorsque $V_B = \frac{V_E}{2}$), le pH de la solution est égal au $\text{p}K_A$ du couple $\text{HCOOH} / \text{HCOO}^-$.

b. Potentiométrie

La **potentiométrie** est adaptée si l'espèce à titrer est un oxydant ou un réducteur, ou encore si l'on dispose d'une électrode spécifique de l'espèce à titrer (et ce, même si l'espèce n'a pas de propriété oxydo-réductrice). Ainsi, la pH-métrie est une potentiométrie pour laquelle on utilise une électrode spécifique aux protons.

Exemple : Titrage des ions Fe^{2+} par les ions Ce^{4+} .

- Bilan de la réaction support du titrage : $\text{Fe}^{2+} + \text{Ce}^{4+} \rightarrow \text{Fe}^{3+} + \text{Ce}^{3+}$ ($K = 10^{11.2} > 10^4$)
- La présence d'un saut sur la courbe $\Delta E = E - E_{\text{référence}} = f(V)$ est spécifique du caractère total de cette réaction.



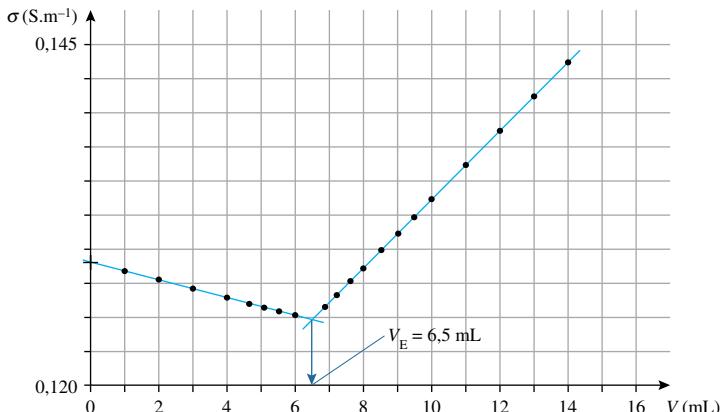
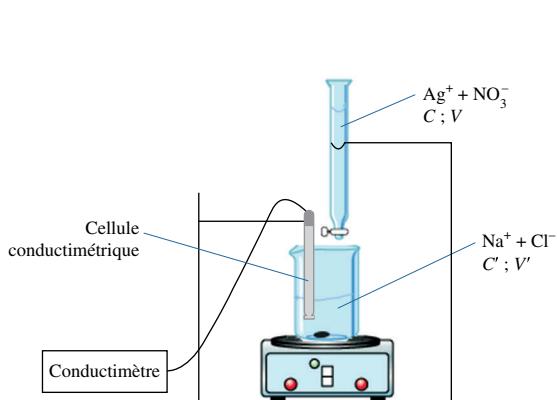
- La mesure du volume de réactif titrant, versé à l'équivalence, noté V_E , se fait en utilisant la méthode des tangentes ou en prenant l'abscisse du maximum de la courbe $\frac{d(\Delta E)}{dV} = f(V)$.

c. Conductimétrie

La **conductimétrie** est adaptée si l'espèce titrée est ionique.

Exemple : Titrage des ions Cl^- par les ions Ag^+ .

Bilan de la réaction support du titrage : $\text{Ag}^+ + \text{Cl}^- \rightarrow \text{AgCl(s)}$ ($K = 10^{10} > 10^4$)



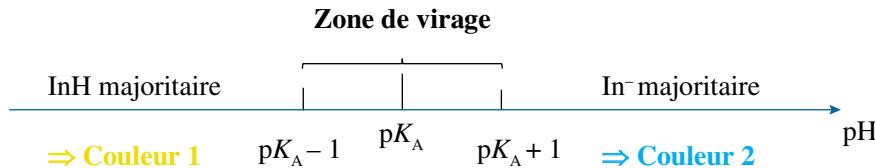
- La mesure du volume de réactif titrant, versé à l'équivalence, noté V_E , est prise au point d'intersection des segments de droite.

d. Indicateur coloré de fin de titrage

Définition

Dans le cas des titrages acido-basiques, un **indicateur coloré** de fin de titrage correspond à un couple Acide/Base, dont les formes Acide (notée InH) et Base (notée In^-) ont des couleurs différentes.

- Le diagramme de prédominance associé au couple InH / In^- est :



- L'indicateur coloré est choisi de manière qu'à l'équivalence du titrage la solution change de couleur.

Propriété

L'indicateur coloré est donc adapté si sa zone de virage est inclue dans le saut de pH

$$\Rightarrow \text{pH}_{\text{équivalence}} \approx \text{pK}_A (\text{InH} / \text{In}^-).$$

- Des indicateurs colorés de fin de titrage peuvent aussi être utilisés pour repérer l'équivalence de titrages d'oxydo-réduction ou de précipitation.

III Titrages simultanés et successifs

1. Mise en évidence

Résultat

Soient deux espèces A et A' susceptibles de réagir quantitativement avec le réactif titrant B suivant les réactions acido-basiques :

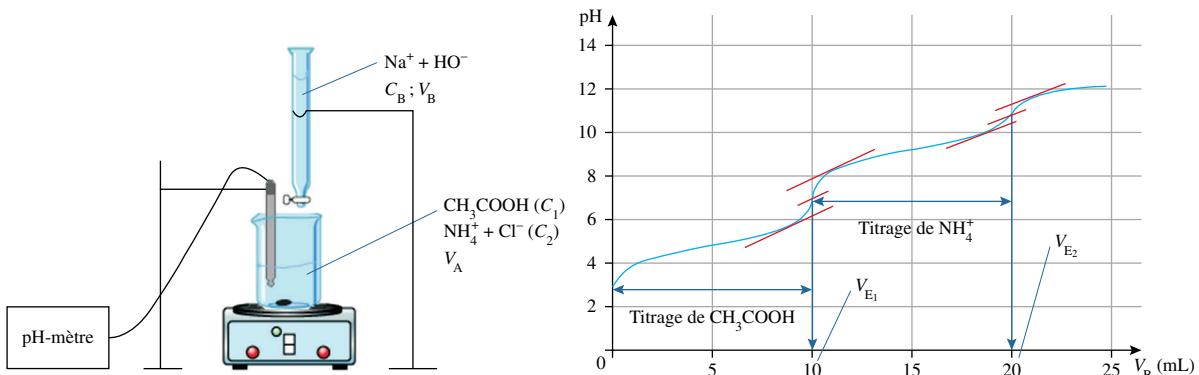


- si $\frac{K}{K'} < 10^4$: A et A' sont titrées **simultanément** et un seul saut apparaît sur la courbe $\text{pH} = f(V)$.
- si $\frac{K}{K'} > 10^4$: A et A' sont titrées **successivement** (A est titré avant A'), et deux sauts apparaissent sur la courbe $\text{pH} = f(V)$.

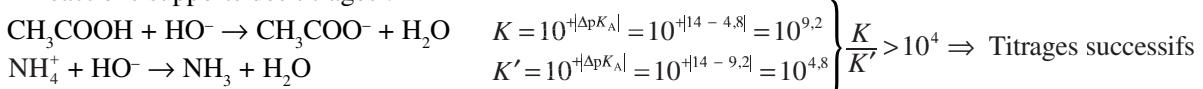
Remarque : Ce résultat peut être généralisé aux titrages par précipitation mais il faut, pour cela, faire en sorte que le nombre de particules échangées dans les deux réactions de titrage soit identique.

2. Exemple de titrages successifs

- Titrage d'un mélange d'acide éthanoïque ($\text{p}K_A(\text{CH}_3\text{COOH} / \text{CH}_3\text{COO}^-) = 4,8$) et d'ions ammonium ($\text{p}K_A(\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3) = 9,2$) par la soude.



- Réactions supports des titrages :



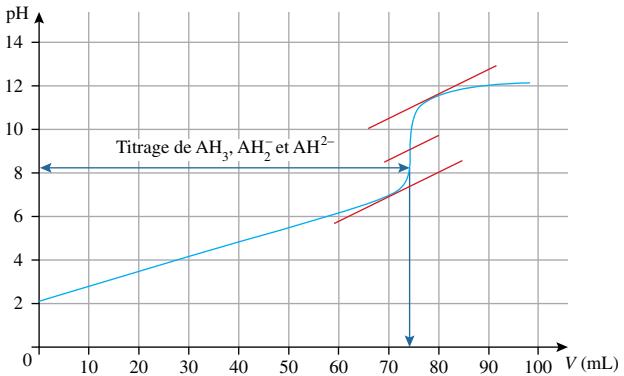
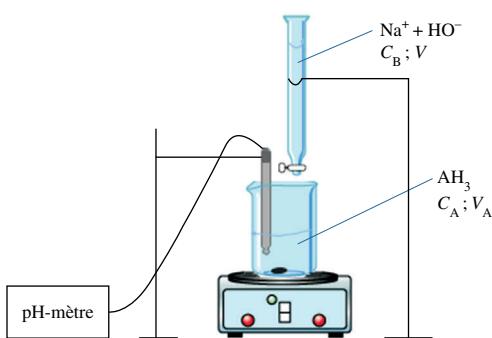
- Relations aux équivalences :

$$\text{Équivalence 1 : } \frac{n(\text{CH}_3\text{COOH})}{1} = \frac{n(\text{OH}^-)_{0 \rightarrow E_1}}{1} \Rightarrow C_1 V_A = C_B V_{E_1}$$

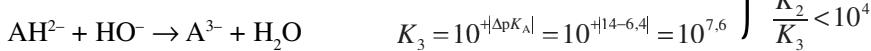
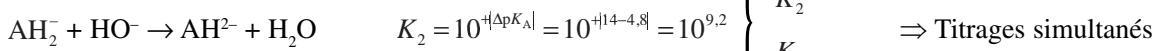
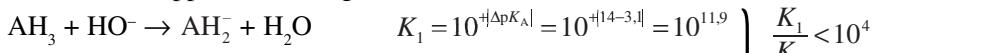
$$\text{Équivalence 2 : } \frac{n(\text{NH}_4^+)}{1} = \frac{n(\text{OH}^-)_{E_1 \rightarrow E_2}}{1} \Rightarrow C_2 V_A = C_B (V_{E_2} - V_{E_1})$$

3. Exemple de titrages simultanés

- Titrage de l'acide citrique noté AH₃ ($\text{p}K_{A_1} = 3,1$; $\text{p}K_{A_2} = 4,8$; $\text{p}K_{A_3} = 6,4$) par la soude.



■ Réactions supports des titrages :



■ Relation à équivalence :

$$n(\text{OH}^-) = n(\text{AH}_3) + n(\text{AH}_2^-) + n(\text{AH}^{2-}) = 3n(\text{AH}_3) \Rightarrow n(\text{AH}_3) = \frac{n(\text{OH}^-)}{3} \Rightarrow C_A V_A = \frac{C_B V_E}{3}$$

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Différents types de dosages (par étalonnage, titrage direct, etc.).
- Différentes méthodes permettant de détecter l'équivalence d'un titrage. Dans quel cas chacune d'entre elles est-elle adaptée ?
- Qu'est-ce qu'un indicateur coloré ? Dans quel cas doit-on utiliser un indicateur coloré ? Comment le choisir pour un titrage acido-basique ?
- Titrages simultanés ou successifs.

Erreurs à éviter

- Ne pas confondre équivalence (d'un titrage) et équilibre (d'un système chimique).
- Penser aux coefficients stoechiométriques lors de l'écriture des relations aux équivalences.
- Un acide fort ou une base forte ne sont pas présents initialement en solution ; ils réagissent (en dehors de toute réaction de titrage) de manière totale avec l'eau.
- En conductimétrie, il faut prendre en compte les ions spectateurs.

Quelques « trucs » utiles

- Pour calculer la constante d'équilibre d'une réaction, retenir les formules $K = 10^{\pm|\Delta pK_A|}$ et $K = 10^{\frac{\pm n}{0,06}\Delta E^\circ}$ permet de gagner du temps.
- Une réaction totale ($K > 10^4$) donnera un saut (de pH ou de ΔE) sur la courbe de titrage. Au contraire, si $K < 10^4$, le saut ne sera pas visible.
- La présence d'un point anguleux indique l'apparition ou la disparition d'un précipité.

EXERCICES

1 Titrage et incertitudes ★★

→ corrigé p. 629

Un élève réalise le titrage des ions fer (II), en milieu acide, par les ions permanganate. Le bilan de la réaction s'écrit : $\text{MnO}_4^- + 8 \text{H}^+ + 5 \text{Fe}^{2+} \rightarrow \text{Mn}^{2+} + 4 \text{H}_2\text{O} + 5 \text{Fe}^{3+}$

Pour cela, il prélève un volume $V = 20,0 \text{ mL}$ de solution de sulfate de fer ($\text{Fe}^{2+} + \text{SO}_4^{2-}$) acidifiée, à l'aide d'une pipette jaugée, qu'il introduit dans un erlenmeyer. Il effectue le titrage à l'aide d'une solution de permanganate de potassium ($\text{K}^+ + \text{MnO}_4^-$) de concentration $C_2 = 2,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Le volume équivalent qu'il relève sur la burette graduée est $V_E = 12,0 \text{ mL}$.

1 Incertitude de type B

On indique que :

- le volume V est donné à $\pm 0,030 \text{ mL}$;
- la burette est graduée tous les $0,1 \text{ mL}$ et sa tolérance est de $\pm 0,030 \text{ mL}$;
- la concentration C_2 est donnée à $\pm 0,01 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$;
- la détection du changement de couleur à l'équivalence se fait à 2 gouttes près, soit $\pm 0,05 \text{ mL}$.

Exprimer la concentration C_1 en ions fer(II), dans les conditions de l'expérience, pour un niveau de confiance de 95 % (le coefficient d'élargissement k sera pris égal à 2).

2 Incertitude de type A

Les volumes équivalents relevés sur les 12 binômes sont les suivants :

Binôme	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$V_E \text{ (mL)}$	12,0	12,5	11,8	12,0	7,0	12,1	12,4	12,5	11,7	12,1	11,9	15,4

Exprimer la concentration C_1 en ions fer(II), dans les conditions de l'expérience, pour un niveau de confiance de 95% (le coefficient d'élargissement k sera pris égal à 2).

Données : Formulaire incertitudes (voir p. 658)

2 Titrage d'un mélange d'acides (d'après ENSTIM 2009) ★★

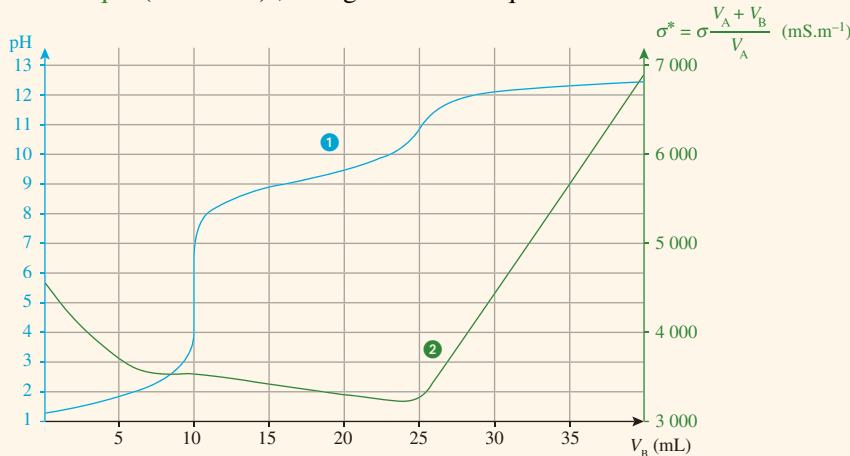
→ corrigé p. 630

On dispose d'une solution S constituée d'un mélange :

- d'acide sulfurique (H_2SO_4) de concentration C_A (1^{re} acidité forte ; $\text{p}K_A(\text{HSO}_4^- / \text{SO}_4^{2-}) = 2,0$) ;
- de chlorure d'ammonium ($\text{NH}_4^+ + \text{Cl}^-$) de concentration C'_A ($\text{p}K_A(\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3) = 9,2$).

On titre un volume $V_A = 10,0 \text{ mL}$ de solution S par une solution de soude de concentration $C_B = 1,00 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$. On note V_B le volume de solution titrante ajoutée.

On propose de comparer les résultats de trois techniques de dosage : dosage **pH-métrique** (courbe ①) ; dosage **conductimétrique** (courbe ②) ; dosage colorimétrique.



- ① Écrire les équations des réactions ayant lieu au cours du dosage en précisant les valeurs de leurs constantes d'équilibre. Indiquer celle(s) qui se déroule(nt) pour $0 \text{ mL} \leq V_B \leq 10 \text{ mL}$, puis pour $10 \text{ mL} \leq V_B \leq 25 \text{ mL}$.
- ② Justifier qualitativement la variation de la conductivité pour $V_B \geq 25 \text{ mL}$.
- ③ Déterminer graphiquement les volumes versés à l'équivalence en précisant la courbe exploitée. En déduire les valeurs des concentrations C_A et C'_A .
- ④ Pourrait-on déterminer graphiquement la valeur d'un des pK_A des couples concernés lors de ce titrage ? Si oui, indiquer lequel et justifier.
- ⑤ Aurait-il été possible d'utiliser un indicateur coloré pour repérer la première équivalence ? La deuxième équivalence ? Si oui le(s)quel(s) ?

Indicateur coloré	Zone de virage	Teinte acide → Teinte basique
Bleu de thymol	1,2 à 2,8 8,0 à 9,6	Rouge → Jaune Jaune → Bleu
Hélianthine	3,2 à 4,4	Rouge → Jaune
Rouge de méthyle	4,8 à 6,0	Rouge → Jaune
Phénolphtaléine	8,2 à 10	Incolore → Rose
Jaune d'alizarine	10,1 à 12,0	Jaune → Rouge

3 Teneur en chlore d'une eau de Dakin (d'après CCP TSI 2012) ★★

→ corrigé p. 631

L'eau de Dakin est un antiseptique vendu en pharmacie dont le nom provient du chimiste britannique Dakin. L'eau de Dakin est composée d'eau de javel et d'une petite quantité de permanganate de potassium qui donne la couleur rosée à la solution et la stabilise car elle peut vieillir et perdre ses principes actifs sous l'effet de la lumière. Cette eau de Dakin, qui n'est autre qu'une eau de javel très diluée, sert pour le lavage des plaies mais aussi des instruments médicaux. On souhaite vérifier la teneur en chlore actif d'une eau de Dakin, condition nécessaire à son efficacité.

Données :

- Eau de Javel : solution aqueuse de chlorure de sodium ($\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$) et d'hypochlorite de sodium ($\text{Na}^+ + \text{ClO}^-$) en quantité équimolaire.
- Teneur en chlore actif : masse en gramme de dichlore Cl_2 formé lorsqu'on verse un excès d'acide chlorhydrique dans $V = 100 \text{ mL}$ de la solution.

Protocole expérimental :

1^{re} étape : Dilution de la solution mère au 1/5^e

La solution commerciale S_{com} d'eau de Dakin pharmaceutique, indiquant 0,5 g de chlore actif est diluée 5 fois. On obtient la solution S_1 .

2^e étape : Réduction des ions ClO^-

Dans un erlenmeyer, on introduit dans cet ordre, $V_1 = 20,0 \text{ mL}$ de solution S_1 , $V_2 = 10 \text{ mL}$ d'une solution d'iode de potassium ($\text{K}^+ + \text{I}^-$) de concentration molaire $0,10 \text{ mol.L}^{-1}$ et 2 à 3 mL de solution d'acide chlorhydrique concentrée à $0,5 \text{ mol.L}^{-1}$. Les ions iodure sont introduits en excès. Une couleur brune caractéristique du diiode I_2 est observée.

3^e étape : Dosage du diiode formé

Le diiode I_2 formé est ensuite dosé par une solution de thiosulfate de sodium ($2 \text{ Na}^+ + \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$) de concentration molaire $C_3 = 1,00 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$. Lorsque la solution devient jaune pâle, on ajoute quelques gouttes d'empois d'amidon. L'équivalence est détectée pour un volume versé $V_3 = 5,50 \text{ mL}$.

① Quelles sont les réactions se produisant au cours des étapes 2 et 3 ? Ces réactions sont-elles totales ? Comment qualifier ce titrage ?

② Déterminer la quantité de matière de diiode I_2 formé à la fin de la 2^e étape.

③ En déduire la quantité de matière d'ions ClO^- présents dans la solution S_1 , puis la concentration C_{com} de la solution commerciale en ions ClO^- .

La teneur en chlore actif de l'eau de Dakin s'obtient en déterminant la masse de dichlore obtenue par la réaction suivante considérée comme totale : $ClO^- + 2 H^+ + Cl^- \rightarrow Cl_2 + H_2O$

④ En déduire la teneur en chlore actif de la solution commerciale d'eau de Dakin. Conclure quant à la composition de l'eau de Dakin fournie par le fabricant.

Données :

– Potentiels standards (à 25 °C) :

$$E_{I_2 / I^-}^0 = E_1^0 = 0,62 \text{ V} ; \quad E_{ClO^- / Cl^-}^0 = E_2^0 = 0,89 \text{ V} ; \quad E_{S_4O_6^{2-} / S_2O_3^{2-}}^0 = E_3^0 = 0,090 \text{ V}$$

– Masse molaire du chlore : $M = 35,5 \text{ g.mol}^{-1}$

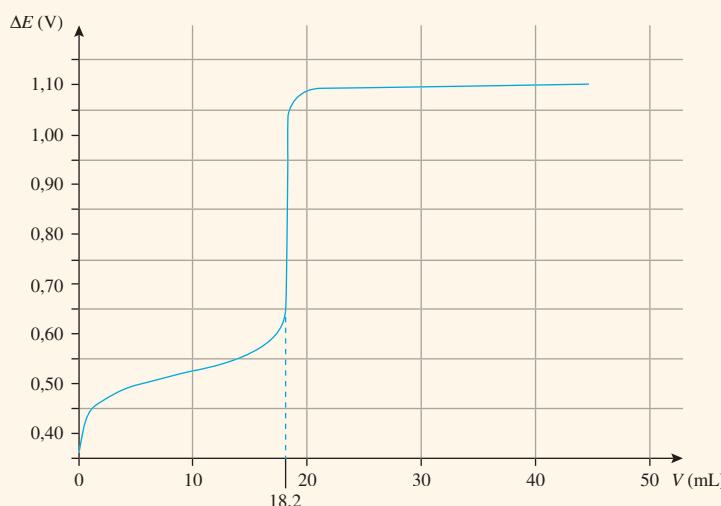
– I_2 est coloré en solution aqueuse (jaune orangé) ; en présence d'empois d'amidon (ou de thiode), il prend une teinte bleu-noir.

4 Titre massique en fer d'un antimousse (d'après CCP TSI 2013) ★★

→ corrigé p. 632

Le sulfate de fer (II) est couramment utilisé comme produit phytosanitaire permettant de lutter contre la prolifération de mousse. On trouve par exemple dans le commerce des solutions prêtées à l'emploi. L'étiquette d'un produit de ce type précise que le pourcentage massique en ions fer (II) vaut 6 %, la solution ayant pour densité 1,05. On se propose de vérifier le pourcentage annoncé par le fabricant en titrant les ions fer (II), contenu dans une solution préparée à partir du produit phytosanitaire par une solution de dichromate de potassium ($2 K^+ + Cr_2O_7^{2-}$).

Pour cela, on prélève 10,0 mL de la solution commerciale d'antimousse (solution S) que l'on introduit dans une fiole jaugée de 100 mL. On complète jusqu'au trait de jauge avec de l'eau distillée. Après homogénéisation, on obtient la solution S' . On prélève alors $V_0 = 20,0 \text{ mL}$ de la solution S' que l'on introduit dans un bêcher. On ajoute 5 mL d'acide sulfurique concentré. On titre alors le contenu du bêcher par une solution de dichromate de potassium de concentration $C_1 = 2,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Ce titrage est suivi par potentiométrie à l'aide d'une électrode de platine et d'une électrode au calomel saturé (ECS).



- ① Écrire le bilan de la réaction support du titrage. Calculer sa constante d'équilibre et conclure.
- ② Justifier l'allure de la courbe $\Delta E = f(V)$. Peut-on remonter graphiquement à la valeur du potentiel standard du couple $\text{Fe}^{3+} / \text{Fe}^{2+}$? Si oui, indiquer en quel point du graphique se placer et justifier.
- ③ Déterminer la concentration C en ions fer (II) dans la solution commerciale d'antimousse.
- ④ Déterminer alors la valeur expérimentale du pourcentage massique, $P = \frac{m_{\text{fer}}}{m_{\text{solution}}} \times 100$, en ions fer (II) de la solution commerciale d'antimousse. Comparer cette valeur à celle donnée par le fabricant.

Données :

- $E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0 = E_1^0 = 0,77 \text{ V}$; $E_{\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}}^0 = E_2^0 = 1,33 \text{ V}$ et $E_{\text{ECS}} = 0,25 \text{ V}$
- Masse molaire du fer : $M = 55,9 \text{ g.mol}^{-1}$

5 Titrages des ions chlorure (d'après ENSTIM 2009) ★★★

→ corrigé p. 633

On effectue le dosage de $V_1 = 200 \text{ mL}$ d'une solution S_1 , de chlorure de sodium ($\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$) de concentration $C_1 = 5,00 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ par une solution S_2 de nitrate d'argent ($\text{Ag}^+ + \text{NO}_3^-$) de concentration $C_2 = 8,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

- ① Écrire la réaction de dosage. Calculer sa constante d'équilibre. La précipitation débute-t-elle dès la première goutte ?
- ② Calculer le volume V_{2E} de la solution de nitrate d'argent versé à l'équivalence.

Dans la suite, on s'intéresse à deux méthodes permettant de détecter l'équivalence du titrage.

- ③ On ajoute dans le bêcher, en guise d'indicateur coloré, $V_3 = 2,0 \text{ mL}$ d'une solution de chromate de potassium K_2CrO_4 , ($2 \text{K}^+ + \text{CrO}_4^{2-}$) de concentration $C_3 = 1,0 \text{ mol.L}^{-1}$, susceptible de donner le précipité $\text{Ag}_2\text{CrO}_4(s)$, de couleur rouge.
 - a) Écrire la réaction de précipitation de $\text{Ag}_2\text{CrO}_4(s)$. Montrer que $\text{AgCl}(s)$ précipite avant $\text{Ag}_2\text{CrO}_4(s)$.
 - b) Quelle est la concentration en ions Cl^- dans le bêcher quand $\text{Ag}_2\text{CrO}_4(s)$ commence à précipiter ? Conclure.
- ④ Le titrage est maintenant réalisé par conductimétrie. Expliquer de façon simple comment varie la conductivité de la solution contenue dans le bêcher au cours du titrage et tracer l'allure de la courbe du titrage conductimétrique précédent. Conclure.

Données :

- $V_{\text{goutte}} \approx 50 \mu\text{L}$
- $pK_s(\text{AgCl}) = pK_{S_1} = 10,0$; $pK_s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4) = pK_{S_2} = 11,8$
- Conductivités molaires ioniques (en $\text{mS.m}^2.\text{mol}^{-1}$) : $\lambda^\circ(\text{Cl}^-) = 7,6$; $\lambda^\circ(\text{Ag}^+) = 6,2$; $\lambda^\circ(\text{NO}_3^-) = 7,1$; $\lambda^\circ(\text{Na}^+) = 5,0$

CORRIGÉS

1 Dosage et incertitudes

→ énoncé p. 625

- Calcul de C_1 :

$$\frac{n_{\text{Fe}^{2+}}}{5} = \frac{n_{\text{MnO}_4^-}}{1} \Rightarrow \frac{C_1 V}{5} = \frac{C_2 V_{2E}}{1} \Rightarrow C_1 = 5 \times V \Rightarrow \text{A.N. : } C_1 = 5 \times \frac{2,00 \times 10^{-2} \times 12,0}{20,0} = 6,00 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

- Évaluation de l'incertitude-type $u(C_1)$:

D'après la formule de propagation des incertitudes : $\left(\frac{u(C_1)}{C_1} \right)^2 = \left(\frac{u(C_2)}{C_2} \right)^2 + \left(\frac{u(V)}{V} \right)^2 + \left(\frac{u(V_{2E})}{V_{2E}} \right)^2$

Avec : $u(C_2) = \frac{0,01 \times 10^{-2}}{\sqrt{3}} = 5,8 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$; $u(V) = \frac{0,03}{\sqrt{3}} = 1,7 \times 10^{-2} \text{ mL}$;

$u(V_{2E}) = \sqrt{u_{\text{burette}}^2 + u_{\text{zero}}^2 + u_{\text{lecture}}^2 + u_{\text{équivalence}}^2}$ où $u_{\text{burette}} = \frac{0,03}{\sqrt{3}}$ (tolérance de la burette); $u_{\text{zero}} = u_{\text{lecture}} = \frac{0,1}{2\sqrt{3}}$

(réglage du zéro et lecture du volume à l'équivalence); $u_{\text{équivalence}} = \frac{0,05}{\sqrt{3}}$: détection du changement de couleur à l'équivalence. A.N. : $u(V_{2E}) = 5,3 \times 10^{-2} \text{ mL}$

$$\Rightarrow \left(\frac{u(C_1)}{C_1} \right)^2 = \left(\frac{5,8 \times 10^{-5}}{2,00 \times 10^{-2}} \right)^2 + \left(\frac{1,7 \times 10^{-2}}{20,0} \right)^2 + \left(\frac{5,3 \times 10^{-2}}{12,0} \right)^2 = 2,9 \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow u(C_1) = 3,2 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

- Écriture de C_1 pour un niveau de confiance de 95 % :

$$C_1 = 6,00 \cdot 10^{-2} \pm k \times u(C_1) \text{ mol.L}^{-1}$$

En prenant $k = 2,0$ comme facteur d'élargissement et en conservant un chiffre significatif pour l'incertitude élargie, on obtient :

$$C_1 = (6,00 \pm 0,07) \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

- Il faut, au préalable, enlever les deux valeurs aberrantes dues certainement à des erreurs grossières de manipulation ou à un matériel défectueux (7,0 mL et 15,4 mL).

- Calcul des valeurs expérimentales de C_1 : $C_1 = 5 \times \frac{C_2 V_{2E}}{V}$

Binôme	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11
V_E (mL)	12,0	12,5	11,8	12,0	12,1	12,4	12,5	11,7	12,1	11,9
C_1 (mol.L ⁻¹)	$6,00 \cdot 10^{-2}$	$6,25 \cdot 10^{-2}$	$5,90 \cdot 10^{-2}$	$6,00 \cdot 10^{-2}$	$6,05 \cdot 10^{-2}$	$6,20 \cdot 10^{-2}$	$6,25 \cdot 10^{-2}$	$5,85 \cdot 10^{-2}$	$6,05 \cdot 10^{-2}$	$5,95 \cdot 10^{-2}$

- Calcul de la valeur moyenne de C_1 : $\bar{C}_1 = 6,05 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$
- Calcul de l'écart type expérimental : $\sigma = 1,414 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$
- Évaluation de l'incertitude-type $u(C_1)$: $u(C_1) = \sigma / \sqrt{10} = 4,472 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$
- Écriture de C_1 pour un niveau de confiance de 95 % :

$$C_1 = 6,05 \cdot 10^{-2} \pm k \times u(C_1) = (6,05 \pm 0,09) \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

Bien comprendre

L'incertitude de type A, aussi appelée incertitude de répétabilité, doit être estimée à partir de mesures obtenues dans les mêmes conditions. Dans cet exemple, les mesures ont été effectuées par des expérimentateurs distincts avec un matériel différent. Aussi, pour effectuer ce calcul, nous faisons l'hypothèse forte que les binômes travaillent de la même manière avec un matériel identique.

2 Titrage d'un mélange d'acides

→ énoncé p. 625

- 1 La première acidité de H_2SO_4 est forte. Par conséquent, avant tout ajout de soude : $\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{HSO}_4^- + \text{H}_3\text{O}^+$

Les espèces actives, d'un point de vue acido-basique, présentes initialement sont donc : HSO_4^- et H_3O^+ (concentration C_A) et NH_4^+ (concentration C'_A).

Les réactions ayant lieu après ajout de soude sont donc :

- $$(1) \text{HO}^- + \text{H}_3\text{O}^+ \rightarrow 2 \text{H}_2\text{O} ; K_1 = 10^{\frac{1}{2}\Delta pK_A} = 10^{\frac{1}{2}(14-0)} = 10^{14}$$
- $$(2) \text{HO}^- + \text{HSO}_4^- \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{SO}_4^{2-} ; K_2 = 10^{\frac{1}{2}\Delta pK_A} = 10^{\frac{1}{2}(14-2)} = 10^{12}$$
- $$(3) \text{HO}^- + \text{NH}_4^+ \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{NH}_3 ; K_3 = 10^{\frac{1}{2}\Delta pK_A} = 10^{\frac{1}{2}(14-9,2)} = 10^{4,8}$$

$\forall i, K_i > 10^4 \Rightarrow$ les 3 réactions sont totales \Rightarrow 3 sauts de pH, au maximum sont attendus.

		$\text{p}K_A$
HO^-	H_2O	14
NH_3	NH_4^+	9,2
SO_4^{2-}	HSO_4^-	2,0
H_2O	H_3O^+	0

$\frac{K_1}{K_2} < 10^4 \Rightarrow$ les réactions (1) et (2) sont simultanées.
 $\frac{K_2}{K_3} > 10^4 \Rightarrow$ les réactions (2) et (3) sont successives. } \Rightarrow Seuls deux sauts de pH seront donc observés.

Bilan :

- 1^{re} équivalence : $V_B = V_{E1} = 10,0 \text{ mL}$ $0 \text{ mL} \leq V_B \leq 10,0 \text{ mL}$: réactions (1) et (2)
- 2^e équivalence : $V_B = V_{E2} = 25,0 \text{ mL}$ $10,0 \text{ mL} \leq V_B \leq 25,0 \text{ mL}$: réaction (3)

Bien comprendre

Pour écrire les réactions support d'un titrage acido-basique, il faut penser à utiliser les échelles verticales de $\text{p}K_A$, et à souligner les espèces présentes dans le bêcher contenant la solution à titrer.

- 2 Après la 2^{de} équivalence, il y a accumulation d'ions hydroxyde, qui ne réagissent plus, et d'ions sodium : **la conductivité augmente**.

Bien comprendre

La conductivité d'une solution ionique est donnée par la loi de Kohlrausch : $\sigma = \sum_{\text{ions}} \lambda_{\text{ion}}^0 C_{\text{ion}}$. La représentation graphique $\sigma = f(V_B)$ donne des segments de droite, pour des points suffisamment éloignés de l'équivalence, si le volume du mélange titré est quasi constant au cours du titrage.

Dans ce but, il est usuel soit :

- d'utiliser un volume initial de réactif titré très grand devant le volume de réactif titrant ajouté autour de l'équivalence ;
- de tracer la conductivité corrigée $\sigma^* = \sigma \times \frac{V_A + V_B}{V_A}$ comme dans cet exercice.

- 3 La 1^{re} équivalence est particulièrement visible sur la courbe de pH-métrie, tandis que la seconde est plus facilement détectable sur la courbe de conductimétrie. Graphiquement : $V_{E1} = 10,0 \text{ mL}$ et $V_{E2} = 25,0 \text{ mL}$. À la 1^{re} équivalence, (1) et (2) étant simultanées, les ions H_3O^+ et HSO_4^- ont été titrés :

$$n_{\text{HO}^-} = n_{\text{H}_3\text{O}^+} + n_{\text{HSO}_4^-} \Rightarrow C_B V_{E1} = 2C_A V_A \Rightarrow C_A = \frac{C_B V_{E1}}{2V_A} = 5,00 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

Entre la 1^{re} et la 2^{nde} équivalence, la réaction (3) a lieu. À la 2^{nde} équivalence, les ions NH_4^+ ont été titrés :

$$n_{\text{HO}^-} = n_{\text{NH}_4^+} \Rightarrow C_B (V_{E2} - V_{E1}) = C'_A V_A \Rightarrow C'_A = \frac{C_B (V_{E2} - V_{E1})}{V_A} = 1,50 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

- 4 À la deuxième demi-équivalence ($V_B = 17,5 \text{ mL}$), il est possible de déterminer graphiquement le pK_A du couple $\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3$. En effet, en ce point, les ions NH_4^+ ont été à moitié consommés et $[\text{NH}_4^+] = [\text{NH}_3]$.
- $$\Rightarrow \text{pH} = \text{pK}_A (\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3) + \log \frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} = \text{pK}_A (\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3). \text{ On lit bien : } \boxed{\text{pK}_A (\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3) = 9,2}$$

- 5 Un indicateur coloré est adapté pour détecter une équivalence si le pH à l'équivalence est inclus dans sa zone de virage.

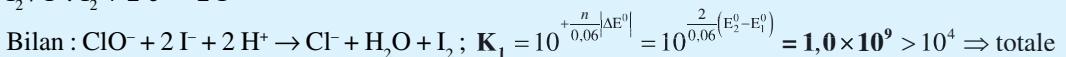
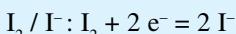
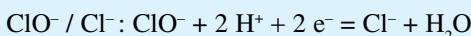
Pour détecter la 1^{re} équivalence ($\text{pH}_{E1} = 5,0$), on peut utiliser le **rouge de méthyle**.

Pour détecter la 2^{de} équivalence ($\text{pH}_{E2} = 11,0$), on peut utiliser le **jaune d'alizarine**, mais le saut de pH étant peu prononcé, cette méthode n'est pas adaptée.

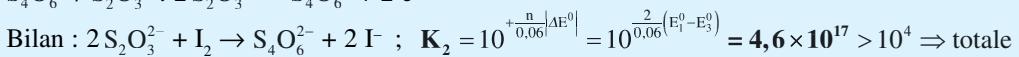
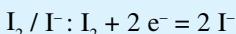
3 Teneur en chlore d'une eau de Dakin

→ énoncé p. 626

- 1 Étape 2 : Réduction des ions ClO^-



Étape 3 : Dosage du diiode formé



Ce tirage est un tirage **indirect**.

- 2 Quantité de matière de I_2 formée à la fin de la 2^e étape :

$$n_{\text{I}_2} = \frac{n_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-}}}{2} = \frac{C_3 V_3}{2} = \frac{1,00 \times 10^{-1} \times 5,50 \times 10^{-3}}{2} \Rightarrow \boxed{n_{\text{I}_2} = 2,75 \times 10^{-4} \text{ mol}}$$

- 3 Quantité de matière n_{ClO^-} d'ions ClO^- initialement présente dans 20,0 mL de solution S₁. La réaction support de l'étape 2 étant totale, et les ions iodure étant introduits en excès, on a :

$$n_{\text{ClO}^-} = n_{\text{I}_2} = 2,75 \times 10^{-4} \text{ mol}$$

Concentration C_{com} de la solution commerciale en ions ClO^- :

$$\text{On en déduit : } C_{\text{com}} = 5 \times \frac{n_{\text{ClO}^-}}{V_1} = 5 \times \frac{2,75 \times 10^{-4}}{20 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{C_{\text{com}} = 6,88 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}}$$

- ④ D'après la définition de la teneur en chlore actif :

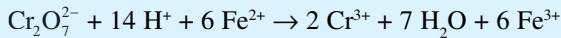
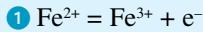
$$n_{\text{Cl}_2} = n_{\text{ClO}^-} = C_{\text{com}} \times V \Rightarrow m_{\text{Cl}_2} = n_{\text{Cl}_2} \times M(\text{Cl}_2) = C_{\text{com}} \times V \times M(\text{Cl}_2)$$

$$n_{\text{Cl}_2} = 6,88 \times 10^{-2} \times 100 \times 10^{-3} \times (2 \times 35,5) \Rightarrow m_{\text{Cl}_2} = 0,488 \text{ g}$$

La donnée du fabricant est donc juste.

4 Titre massique en fer d'un antimousse

→ énoncé p. 627



$$K = 10^{\frac{n}{0,06}|\Delta E^0|} = 10^{\frac{6}{0,06}|1,33-0,77|} \Rightarrow K = 10^{56} > 10^4 \Rightarrow \text{Réaction totale}$$

- ② Le potentiel de la solution augmente avec le volume de réactif titrant versé, celui-ci étant l'oxydant le plus fort. On observe un saut de potentiel, la réaction support du titrage étant totale. Le volume équivalent est lu au niveau du saut de potentiel : $V_E = 18,2 \text{ mL}$.

À la demi-équivalence du titrage ($V = \frac{V_E}{2} = 9,1 \text{ mL}$), les ions Fe^{3+} ont été à moitié consommés.

$$\Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] = [\text{Fe}^{2+}]$$

On peut donc, en ce point, accéder au potentiel standard du couple $\text{Fe}^{3+} / \text{Fe}^{2+}$:

$$E = E^0(\text{Fe}^{3+} / \text{Fe}^{2+}) + \frac{0,06}{1} \log \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} = E^0(\text{Fe}^{3+} / \text{Fe}^{2+})$$

$$\Rightarrow \Delta E = E - E_{\text{ECS}} = E^0(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) - E_{\text{ECS}} \Rightarrow E^0(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) = \Delta E + E_{\text{ECS}}$$

Par lecture graphique $\Delta E = 0,52 \text{ V} \Rightarrow E^0(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) = 0,77 \text{ V}$

- ③ Soit $n'_{\text{Fe}^{2+}}$ la quantité d'ions Fe^{2+} contenus dans les 20,0 mL de solution S' :

$$\text{À l'équivalence : } \frac{n'_{\text{Fe}^{2+}}}{6} = \frac{n_{\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}}}{1} \Rightarrow n'_{\text{Fe}^{2+}} = 6 \times n_{\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}} \Rightarrow C'V_0 = 6C_1V_E \Rightarrow C' = \frac{6C_1V_E}{V_0}$$

$$\text{Dans la solution S : } C = 10C' = \frac{60C_1V_E}{V_0} = \frac{60 \times 2,00 \times 10^{-2} \times 18,2}{20,0} \Rightarrow C = 1,09 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$④ P = \frac{m_{\text{Fe}}}{m_{\text{solution}}} \times 100 = \frac{n_{\text{Fe}} \times M_{\text{Fe}}}{\rho \times V} \times 100 = \frac{n_{\text{Fe}} \times M_{\text{Fe}}}{\rho_{\text{eau}} \times d \times V} \times 100 = \frac{C \times M_{\text{Fe}}}{\rho_{\text{eau}} \times d} \times 100 \Rightarrow P = \frac{1,09 \times 55,9}{1,00 \times 10^3 \times 1,05} \times 100$$

$$\Rightarrow P = 5,81 \% \text{, valeur en accord avec les données du fabricant}$$

5 Titrages des ions chlorure

→ énoncé p. 628

Dans l'ensemble de l'exercice, le volume de la solution pourra être considéré constant et égal au volume initial du bêcher : $V_1 = 200 \text{ mL}$.

- 1 La réaction de dosage s'écrit : $\text{Ag}^+ + \text{Cl}^- \rightarrow \text{AgCl(s)}$; $K = \frac{1}{K_{\text{S}_1}} = 10^{10} > 10^4 \Rightarrow \text{réaction totale}$

Le quotient de réaction après l'ajout d'une goutte de réactif titrant est $Q_r = [\text{Ag}^+] [\text{Cl}^-]$ avec :

$$[\text{Ag}^+] = \frac{C_2 V_{\text{goutte}}}{V_1} \text{ et } [\text{Cl}^-] = C_1$$

$$Q_r = \frac{8,00 \times 10^{-2} \times 0,050}{200} \times 5,00 \times 10^{-3} \Rightarrow Q_r = 1,0 \times 10^{-7} > K_{\text{S}_1}$$

Par conséquent, la précipitation débute dès la 1^{re} goutte.

- 2 À l'équivalence : $n_{\text{Ag}^+} = n_{\text{Cl}^-}$

$$\Rightarrow C_2 V_{2E} = C_1 V_1 \Rightarrow V_{2E} = \frac{C_1 V_1}{C_2} = \frac{5,00 \times 10^{-3} \times 200}{8,00 \times 10^{-2}} \Rightarrow V_{2E} = 12,5 \text{ mL}$$

- 3 a) La réaction de précipitation de $\text{Ag}_2\text{CrO}_4(\text{s})$ s'écrit :



Le volume de nitrate d'argent V'_2 pour lequel $\text{AgCl}(\text{s})$ précipite est calculé à partir de la condition de précipitation :

$$Q_{r_1} = K_{\text{S}_1} \Rightarrow [\text{Ag}^+] [\text{Cl}^-] = K_{\text{S}_1} \Rightarrow \frac{C_2 V'_2}{V_1} \times C_1 = K_{\text{S}_1} \Rightarrow V'_2 = \frac{K_{\text{S}_1} V_1}{C_2 C_1} = \frac{10^{-10} \times 200}{8 \times 10^{-2} \times 5 \times 10^{-3}} = 5,0 \times 10^{-5} \text{ mL}$$

De la même manière, le volume de nitrate d'argent V''_2 pour lequel $\text{Ag}_2\text{CrO}_4(\text{s})$ précipite s'écrit :

$$Q_{r_2} = K_{\text{S}_2} \Rightarrow [\text{Ag}^+] [\text{CrO}_4^{2-}] = K_{\text{S}_2} \Rightarrow \left(\frac{C_2 V''_2}{V_1} \right)^2 \times \frac{C_3 V_3}{V_1} = K_{\text{S}_2} \Rightarrow V''_2 = \frac{200}{8 \times 10^{-2}} \sqrt{\frac{10^{-11,8} \times 200}{1,0 \times 2,0}}$$

$$\text{A.N. : } V''_2 = 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ mL} \quad V'_2 \ll V''_2, \text{ par conséquent } \text{AgCl}(\text{s}) \text{ précipite avant } \text{Ag}_2\text{CrO}_4(\text{s}).$$

- b) En début de précipitation de $\text{Ag}_2\text{CrO}_4(\text{s})$, on a :

$$Q_{r_1} = K_{\text{S}_2} \Rightarrow [\text{Ag}^+]^2 [\text{CrO}_4^{2-}] = K_{\text{S}_2}$$

$$Q_{r_1} = K_{\text{S}_1} = [\text{Ag}^+] [\text{Cl}^-] \Rightarrow [\text{Cl}^-] = \frac{K_{\text{S}_1}}{[\text{Ag}^+]} = K_{\text{S}_1} \sqrt{\frac{[\text{CrO}_4^{2-}]}{K_{\text{S}_2}}}$$

$$\text{Or } [\text{CrO}_4^{2-}] = \frac{C_3 V_3}{V_1} \Rightarrow [\text{Cl}^-] = K_{\text{S}_1} \sqrt{\frac{C_3 V_3}{K_{\text{S}_2} V_1}}$$

$$\Rightarrow \text{A.N. : } [\text{Cl}^-] = 10^{-10} \times \sqrt{\frac{1,0 \times 2,0}{10^{-11,8} \times 200}} = 7,9 \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$$

La concentration résiduelle en ions chlorure à l'apparition du précipité $\text{Ag}_2\text{CrO}_4(\text{s})$, et donc de la couleur rouge, est négligeable par rapport à leur concentration initiale. Par conséquent, les ions chlorure ont bien été entièrement titrés à l'apparition de la couleur rouge en solution, et ce titrage est adapté pour en déterminer leur concentration.

④ La loi de Kohlrausch donne : $\sigma = \sum_{\text{ions}} \lambda_{\text{ion}}^0 C_{\text{ion}} = \lambda_{\text{Na}^+}^0 [\text{Na}^+] + \lambda_{\text{Cl}^-}^0 [\text{Cl}^-] + \lambda_{\text{Ag}^+}^0 [\text{Ag}^+] + \lambda_{\text{NO}_3^-}^0 [\text{NO}_3^-]$

Les évolutions des concentrations des différents ions et donc de la conductivité de la solution sont les suivantes :

	Ag^+	NO_3^-	Na^+	Cl^-	σ
$\lambda_i^0 (\text{mS.m}^2.\text{mol}^{-1})$	6,2	7,1	5,0	7,6	
$0 < V_2 < V_{2E}$	≈ 0	\nearrow	\rightarrow	\searrow	\searrow (faible) (car $\lambda_{\text{Cl}^-}^0 > \lambda_{\text{NO}_3^-}^0$)
$V_{2E} < V_2$	\nearrow	\nearrow	\rightarrow	≈ 0	\nearrow (fort)

L'allure de la courbe du titrage conductimétrique est donnée ci-dessous.

L'équivalence du titrage pourra être facilement caractérisée au croisement des deux demi-droites. Ce titrage est donc aussi adapté pour déterminer la concentration en ions chlorure en solution.

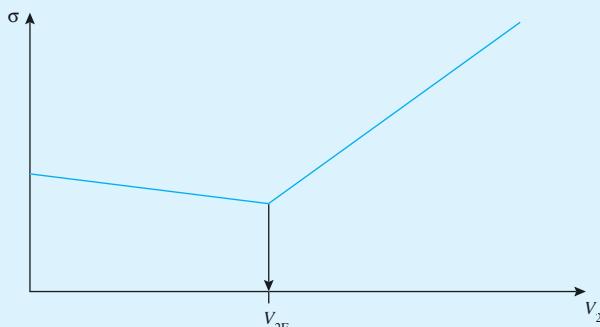


Diagramme potentiel-pH (E-pH)

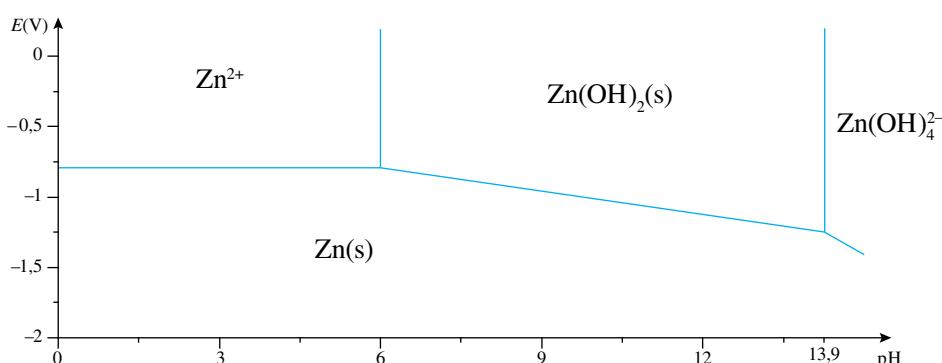
Les divers diagrammes de prédominance ou d'existence vus précédemment montrent quelles espèces existent ou prédominent en fonction d'un paramètre extérieur comme le pH ou le potentiel d'oxydoréduction E . Ils permettent ainsi de comprendre le comportement du système dans un environnement donné et servent de support pour la prévision de réactions en solution. Le potentiel et le pH sont des paramètres facilement modifiables et indépendants. Il apparaît donc intéressant, sur le modèle des diagrammes de prédominance, de construire une « carte » d'existence ou de prédominance des différentes espèces associées à un élément chimique en fonction simultanément du potentiel E et du pH.

I | Principe de construction d'un E-pH : exemple de l'élément Zn

1. Qu'est-ce qu'un diagramme potentiel-pH ?

- Un diagramme E -pH est relatif à un élément chimique donné, présent en solution aqueuse à divers nombres d'oxydation dans différentes espèces chimiques. Pour chaque couple redox envisagé, on représente les variations du potentiel redox E en fonction du pH. Les droites obtenues délimitent des domaines de prédominance ou d'existence des différentes espèces.
- À titre d'exemple, on donne ci-dessous le diagramme E -pH de l'élément zinc. Cet élément peut se trouver sous forme métallique Zn(s) , ionique Zn^{2+} et Zn(OH)_4^{2-} ou de précipité $\text{Zn(OH)}_2(\text{s})$.

Remarque : Les domaines de Zn^{2+} et Zn(OH)_4^{2-} sont des **domaines de prédominance**, alors que ceux de Zn(s) et $\text{Zn(OH)}_2(\text{s})$ sont des **domaines d'existence**.



Comment a-t-on tracé les frontières qui délimitent chacun des domaines ? Comment les espèces ont-elles été associées à chaque domaine ?

Données à 298 K :

$$E^\circ(\text{Zn}^{2+} / \text{Zn}) = -0,76 \text{ V} \quad ; \quad \text{p}K_s(\text{Zn(OH)}_2) = 17,0$$

2. Conventions de tracé et principe de construction

- À la frontière entre les domaines de prédominance de deux espèces dissoutes, la concentration de chaque espèce est égale :

$$[\text{Espèce 1}] = [\text{Espèce 2}] = \frac{C_{\text{tra}}}{2}$$

- À la frontière entre le domaine d'existence d'un solide et le domaine de prédominance d'une espèce dissoute : la concentration en espèce dissoute est égale à C_{tra} .

- Pour les cas où des gaz sont impliqués, la pression partielle de chaque gaz vaut P_{tra} . La pression de travail est souvent égale à 1,0 bar.

Remarque : Dans cet exemple, le diagramme a été tracé avec $C_{\text{tra}} = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$.

- D'autres conventions de tracé existent et elles peuvent être différentes d'un exercice à un autre. Il convient donc de respecter les consignes.

Résultats

Sur un diagramme E -pH, les domaines de prédominance ou d'existence des différentes espèces s'organisent ainsi :

- De bas en haut les espèces sont classées par degré d'oxydation croissant.
- De gauche à droite (donc pour un même degré d'oxydation), les espèces sont classées par basicité croissante.
- Deux espèces pour lesquelles l'élément étudié est au même degré d'oxydation sont séparées par une frontière verticale.
- Les espèces pour lesquelles l'élément étudié est à des degrés d'oxydation différents sont séparées par des frontières horizontales ou obliques.

3. Détermination des frontières verticales

Exemple : Frontière verticale entre Zn^{2+} et $\text{Zn}(\text{OH})_2(\text{s})$

Il s'agit de déterminer le pH correspondant à l'apparition ou à la disparition de $\text{Zn}(\text{OH})_2(\text{s})$.

À cette frontière l'équilibre $\text{Zn}(\text{OH})_2(\text{s}) \rightleftharpoons \text{Zn}^{2+} + 2 \text{OH}^-$ est établi $\Rightarrow K = K_s = [\text{Zn}^{2+}][\text{OH}^-]^2$.

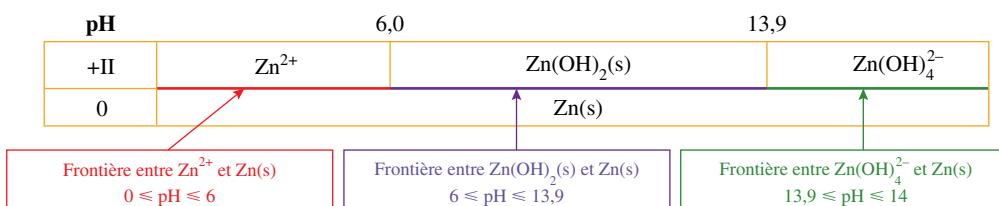
La convention de tracé impose qu'à la frontière entre Zn^{2+} et $\text{Zn}(\text{OH})_2(\text{s})$, $[\text{Zn}^{2+}] = C_{\text{tra}} = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$

$$\Rightarrow [\text{OH}^-] = \sqrt{\frac{K_s}{C_{\text{tra}}}} = 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1} \text{ soit } \boxed{\text{pH} = 6,0}$$

4. Détermination des frontières non verticales

- On observe autant de frontières non verticales qu'il existe de couples redox. Ainsi, dans le cas du zinc, trois frontières sont à déterminer.

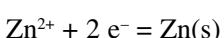
- Visualisation schématique des frontières non verticales à déterminer :



POINT MÉTHODE*Déterminer les équations des frontières non verticales*

- Écrire la demi-équation électronique associée au couple considéré **en milieu acide**.
- Écrire la formule de Nernst.
- Appliquer les conventions de tracé pour obtenir l'équation des frontières.

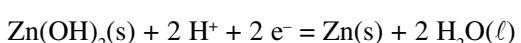
→ exercice n° 2 p. 642

■ Frontière entre Zn^{2+} et Zn(s) ($0 \leq \text{pH} \leq 6$)

$$E = E^\circ(\text{Zn}^{2+} / \text{Zn}) + 0,03 \log [\text{Zn}^{2+}]$$

Par application de la convention de tracé à cette frontière $[\text{Zn}^{2+}] = C_{\text{tra}} = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$

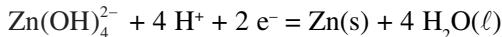
$$E = E^\circ(\text{Zn}^{2+} / \text{Zn}) + 0,03 \log C_{\text{tra}} \Rightarrow E = -0,79 \text{ V}$$

■ Frontière entre $\text{Zn(OH)}_2(\text{s})$ et Zn(s) ($6 \leq \text{pH} \leq 13,9$)

$$E = E^\circ(\text{Zn(OH)}_2 / \text{Zn}) + 0,03 \log [\text{H}^+]^2$$

$$E = E^\circ(\text{Zn(OH)}_2 / \text{Zn}) - 0,06 \text{ pH} \Rightarrow E = \text{Cte} - 0,06 \text{ pH}$$

Le potentiel étant une fonction continue du pH, la détermination de la constante n'est pas nécessaire pour tracer le diagramme.

■ Frontière entre Zn(OH)_4^{2-} et Zn(s) ($13,9 \leq \text{pH} \leq 14$)

$$E = E^\circ(\text{Zn(OH)}_4^{2-} / \text{Zn}) + 0,03 \log ([\text{Zn(OH)}_4^{2-}] [\text{H}^+]^4)$$

Par application de la convention de tracé à cette frontière $[\text{Zn(OH)}_4^{2-}] = C_{\text{tra}} = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$

$$E = E^\circ(\text{Zn(OH)}_4^{2-} / \text{Zn}) + 0,03 \log C_{\text{tra}} - 0,12 \text{ pH} \Rightarrow E = \text{Cte}' - 0,12 \text{ pH}$$

II | Exploitation des diagrammes E-pH**1. Détermination des grandeurs thermodynamiques**

Des données thermodynamiques peuvent être obtenues à partir de la lecture des diagrammes E-pH.

POINT MÉTHODE*Déterminer un potentiel standard E°*

- Déterminer graphiquement l'ordonnée à l'origine E_{lu} de la frontière entre les espèces du couple.
- Écrire la loi de Nernst et la simplifier en appliquant les conventions de tracé.
- Remplacer le potentiel E de la loi de Nernst par E_{lu} et en déduire E° .

→ exercices n° 1 et n° 2 p. 642

- Pour déterminer E^0 on peut utiliser la continuité du diagramme avec un couple dont E^0 est connu.

Exemple :

- Pour $6 \leq \text{pH} \leq 13,9$: $E = E^0(\text{Zn(OH)}_2 / \text{Zn}) - 0,06 \text{ pH}$
 - À pH = 6, par continuité du potentiel $E(\text{Zn(OH)}_2 / \text{Zn}) = E(\text{Zn}^{2+} / \text{Zn})$, soit :
- $$-0,79 = E^0(\text{Zn(OH)}_2 / \text{Zn}) - 0,06 \times 6 \Rightarrow E^0(\text{Zn(OH)}_2 / \text{Zn}) = -0,43 \text{ V}$$

POINT MÉTHODE

Déterminer un pK_A

- Se placer sur la frontière verticale relative au couple acide-base considéré et lire la valeur du pH.
- Exprimer la constante d'acidité K_A .
- Simplifier à l'aide de la convention utilisée et remplacer $[\text{H}_3\text{O}^+]$ par $10^{-\text{pH}}$.

Déterminer un K_s

- Se placer sur la frontière verticale qui séparer le précipité de l'espèce dissoute et lire la valeur du pH.
- Exprimer la constante de solubilité K_s .
- Appliquer les conventions de tracé et utiliser la valeur lue du pH pour déterminer la valeur de K_s .

→ exercices n° 1 et n° 2 p. 642

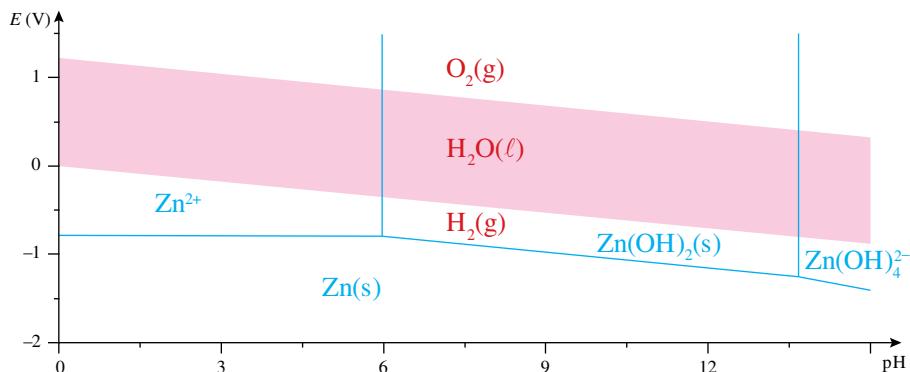
2. Stabilité des espèces dans l'eau

- En procédant de la même façon que dans le I.4., on obtient les équations des frontières du diagramme E-pH de l'eau :

	Demi-équation électronique	Équation de la frontière
$\text{H}^+ / \text{H}_2(\text{g}) ; E^0 = 0,00 \text{ V}$	$2 \text{ H}^+ + 2 \text{ e}^- = \text{H}_2(\text{g})$	$E = -0,06 \text{ pH} (\text{en V})$
$\text{O}_2(\text{g}) / \text{H}_2\text{O}(\ell) ; E^0 = 1,23 \text{ V}$	$\text{O}_2(\text{g}) + 4 \text{ H}^+ + 2 \text{ e}^- = 2 \text{ H}_2\text{O}(\ell)$	$E = 1,23 - 0,06 \text{ pH} (\text{en V})$

Résultat

Si, au pH d'étude, le domaine d'une espèce n'a **aucun point commun** avec celui de l'eau (leurs domaines sont disjoints) alors l'espèce est **instable dans l'eau**. Si, au pH d'étude, le domaine de l'espèce considérée présente au moins un point commun avec le domaine de l'eau alors l'espèce est **stable dans l'eau**.

Exemple :

– Zn(s) a un domaine d'existence disjoint de celui de $\text{H}_2\text{O(l)}$. Il est donc instable dans l'eau et réagira de manière quantitative (il est oxydé par l'eau).

– Zn^{2+} , $\text{Zn(OH)}_2(\text{s})$ et Zn(OH)_4^{2-} sont stables dans l'eau car leurs domaines de prédominance ou d'existence se recouvrent avec celui de $\text{H}_2\text{O(l)}$.

Remarques :

- Une espèce peut être stable à un certain pH et instable à un autre.
- Il peut être fait la distinction entre solution aérée (présence de O_2 dissous) et désaérée (sans O_2 dissous). Une espèce peut être stable en solution désaérée mais instable en solution aérée du fait d'une réaction d'oxydation avec le dioxygène dissous.

3. Généralisation

- Seules des espèces ayant des domaines de prédominance (ou d'existence) disjoints peuvent réagir entre elles. La réaction est considérée comme totale.
- Si les espèces ont une partie de leur domaine en commun, elles peuvent coexister sans réagir.

POINT MÉTHODE

Prévoir une réaction à partir des diagrammes E-pH

- Superposer les diagrammes E-pH des différentes espèces.
- Regarder si les domaines des réactifs sont disjoints ou pas.
- Dans le cas où les domaines sont disjoints, écrire la réaction se produisant (passer obligatoirement par les demi-équations redox).

→ exercice n° 2 p. 642

- **Aspects cinétique et thermodynamique :** Les diagrammes E-pH sont des outils thermodynamiques. Ils permettent de prédire si une réaction peut se faire ou non mais ne donnent aucune information sur la cinétique. Ainsi il arrive que des réactions favorisées thermodynamiquement, ne soient pas observées à cause d'un blocage cinétique. L'aspect cinétique des réactions redox sera étudié en deuxième année.

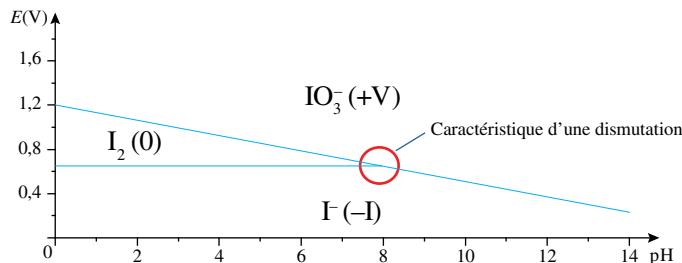
4. Phénomène de dismutation

Définition

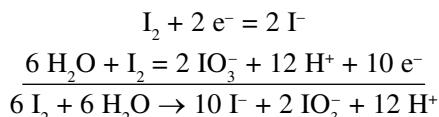
Lorsqu'un degré d'oxydation de l'élément étudié n'est pas présent sur toute la gamme de pH alors, l'espèce associée à ce degré d'oxydation se **dismute**. Graphiquement, on observe alors l'existence d'un point où trois frontières non verticales se rejoignent.

Exemple :

- Le diiode I_2 se dismute à pH élevé.



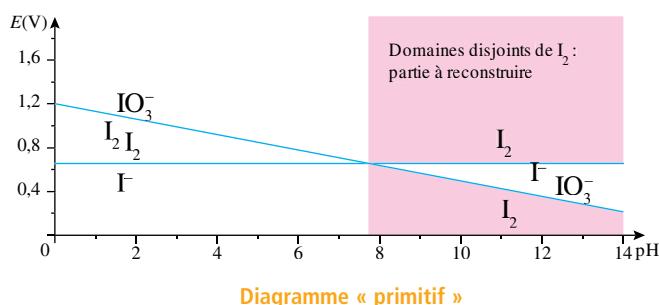
- L'équation de la réaction de dismutation est :



- Soit en milieu basique : $6 I_2 + 12 OH^- \rightarrow 10 I^- + 2 IO_3^- + 6 H_2O$

Remarque : Cela vient du fait que lors de la construction du diagramme E -pH, on arrive à une situation où une même espèce apparaît dans des domaines disjoints, cette espèce se dismute. Il faut alors corriger le diagramme en supprimant cette espèce sur la gamme de pH où la dismutation se produit.

Exemple de l'élément iodé :



Questions de cours

- Utilisation des diagrammes *E*-pH dans la prévision du comportement des espèces en solution aqueuse (réaction entre deux espèces et stabilité d'une espèce chimique dans l'eau).
- Dismutation : définitions, exemples.
- Détermination de constantes caractéristiques à l'aide d'un diagramme *E*-pH.

Erreurs à éviter

- Lorsqu'on veut exprimer le potentiel d'oxydo-réduction *E* d'un couple, toujours écrire les demi-équations redox en milieu acide (même si le pH est relativement élevé) car les E° sont tabulés à pH = 0.
- Bien repérer les conventions de tracé du diagramme car elles peuvent être différentes d'un exercice à un autre.
- Bien faire la distinction entre domaine de prédominance (concerne les espèces solubles dans l'eau) et domaine d'existence (concerne les espèces solides et gazeuses).
- À pH = 0 la valeur de l'ordonnée ne donne pas le potentiel standard E° d'un couple du type M^{p+} / M . Cette ordonnée est la valeur du potentiel *E* de ce couple calculé avec les concentrations de tracé. Pour avoir la valeur numérique du E° il faut donc appliquer la loi de Nernst.
- Lors de l'écriture d'une réaction entre deux espèces ayant des domaines disjoints ou lors de l'écriture d'une réaction de dismutation, toujours repasser par les demi-équations redox pour ne laisser aucun électron dans l'équation bilan. Par exemple, une erreur classique pour la réaction de dismutation du diiode (*voir III.4.*), serait d'écrire :



Quelques « trucs » utiles

- Les espèces sont classées vers la droite par basicité croissante. Pour un degré d'oxydation donné, en cas d'hésitation entre la forme acide et basique, on recommande d'écrire la demi-équation acido-basique entre les deux espèces et de statuer grâce à la position des H⁺.

Exemple : Pour Cr₂O₇²⁻ et CrO₄²⁻ on a Cr₂O₇²⁻ + H₂O = 2 CrO₄²⁻ + 2 H⁺ donc Cr₂O₇²⁻ est l'acide du couple.

- Très souvent, à la frontière verticale qui séparer les domaines de prédominance d'un acide et d'une base, on peut écrire pH = pK_A.
- Les espèces séparées par une frontière verticale ont le même degré d'oxydation.
- Si seule la pente d'une frontière est demandée, elle peut être déterminée simplement à partir de la demi-équation redox :
 - si elle ne fait pas intervenir H⁺, alors la pente est nulle et la frontière est horizontale.
 - si elle est du type $\alpha Ox + n e^- + q H^+ = \beta Red$, alors l'application de la formule de Nernst donne pour la pente $p = -\frac{0,06q}{n}$ avec $q > 0$ si H⁺ se trouve du côté de l'oxydant et $q < 0$ sinon. La frontière sur le diagramme est alors oblique.

1 Tracé du diagramme E-pH du cadmium ★

→ corrigé p. 646

Pour tracer le diagramme E -pH du cadmium, on considère les espèces $\text{Cd}(\text{s})$, Cd^{2+} , $\text{Cd}(\text{OH})_2(\text{s})$.

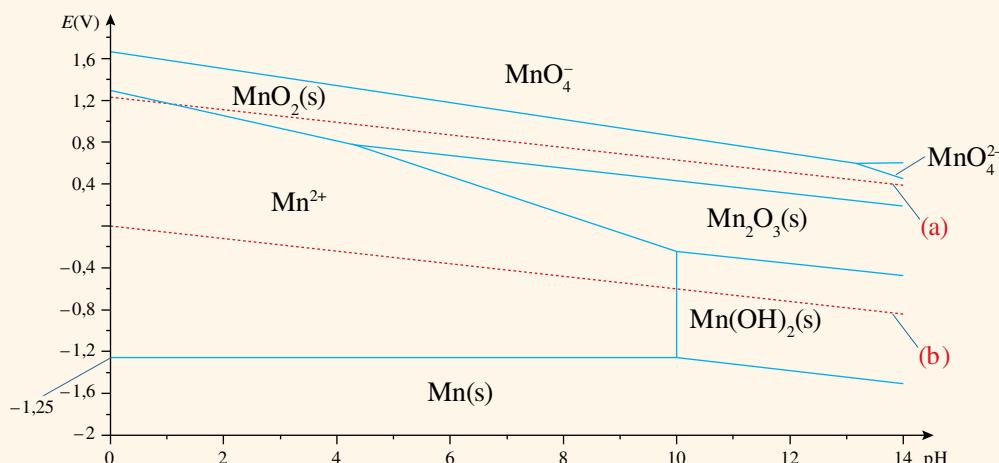
- ① Déterminer les nombres d'oxydation du cadmium dans les espèces considérées.
- ② Déterminer l'équation de la frontière verticale puis construire le « tableau des espèces ».
- ③ Déterminer l'équation de la frontière horizontale et la pente de la frontière oblique.
- ④ Tracer le diagramme E -pH du cadmium.

Données à 298 K : $E^\circ(\text{Cd}^{2+} / \text{Cd}) = -0,40 \text{ V}$; $pK_s(\text{Cd}(\text{OH})_2) = 14,3$; $C_{\text{tra}} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

2 Exploitation du diagramme E-pH du manganèse ★

→ corrigé p. 647

On donne ci-dessous le diagramme E -pH du manganèse tracé avec $C_{\text{tra}} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Les droites en pointillés représentent les frontières associées aux couples de l'eau.



- ① Déterminer l'équation des frontières associées aux couples de l'eau H^+ / H_2 et $\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}$ puis identifier à quel couple est associée chacune des droites (a) et (b).
- ② Déterminer le potentiel standard du couple $\text{Mn}^{2+} / \text{Mn}$.
- ③ Déterminer le potentiel standard du couple $\text{Mn}(\text{OH})_2 / \text{Mn}$.
- ④ Montrer, à partir du diagramme, que les solutions aqueuses de permanganate de potassium ($\text{K}^+ + \text{MnO}_4^-$) sont instables et écrire l'équation de la réaction. Pourquoi peut-on quand même les utiliser pour des dosages ?

3 Lecture et utilisation des diagrammes E-pH ★★★

→ corrigé p. 648

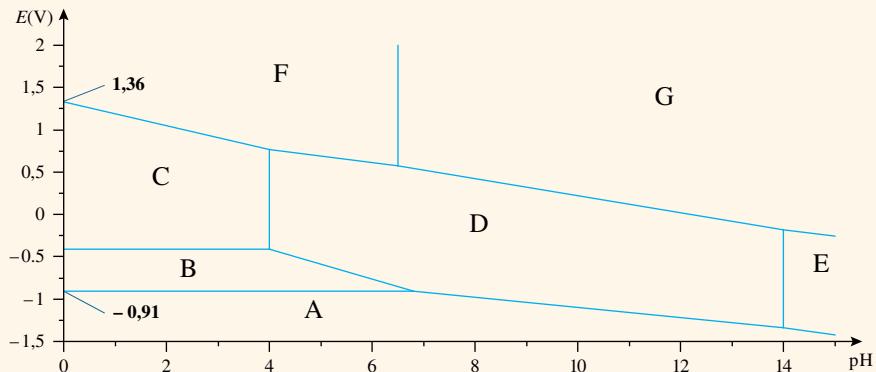
On donne ci-après le diagramme E -pH du chrome limité aux espèces suivantes :

- En solution : Cr^{3+} , CrO_4^{2-} , $\text{Cr}(\text{OH})_4^-$, Cr^{2+} , $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$
- Solides : $\text{Cr}(\text{s})$ et $\text{Cr}(\text{OH})_3(\text{s})$

Le diagramme a été tracé en prenant la concentration totale **en élément** chrome dissous est égale à C_{tra} . Sur une frontière séparant deux espèces dissoutes, les concentrations **en élément** chrome dans chacune de ses espèces sont égales.

Données à 298 K :

- $E^\circ(\text{Cr}^{2+} / \text{Cr}) = -0,91 \text{ V}$
- $E^\circ(\text{H}^+ / \text{H}_2) = 0,00 \text{ V}$
- $E^\circ(\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$

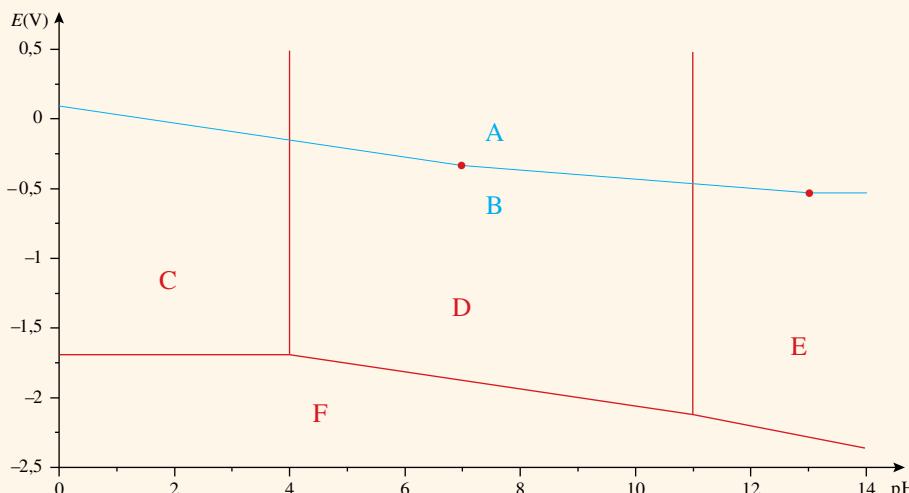


- ① Attribuer à chaque domaine du diagramme une des espèces considérées.
- ② En exploitant le diagramme, déterminer C_{tra} .
- ③ Déterminer le $\text{p}K_s$ de $\text{Cr(OH)}_3(s)$.
- ④ Déterminer le potentiel standard du couple $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} / \text{Cr}^{3+}$.
- ⑤ Déterminer la pente de la frontière entre A et D.
- ⑥ Superposer les droites correspondant aux couples de l'eau et discuter la stabilité des différentes espèces dans l'eau.
- ⑦ Quel phénomène se produit quand on augmente le pH d'une solution contenant l'espèce B ? Écrire l'équation bilan de la réaction.

4 Nettoyer son saxophone (d'après Centrale MP 2011) ★★

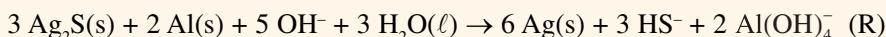
→ corrigé p. 649

Les instruments à vent en laiton (saxophone par exemple) sont recouverts d'une fine couche d'argent en surface, qui se ternit avec le temps. Il se forme un composé noir ou gris foncé de sulfure d'argent. Ce ternissement est dû à la présence de sulfure de dihydrogène H_2S dans l'atmosphère. L'eau vient s'adsorber en surface et forme un film qui permet la solvatation du sulfure de dihydrogène selon : $\text{H}_2\text{S(g)} \rightleftharpoons \text{H}_2\text{S(aq)}$. Le diagramme E-pH de l'argent dans une solution de sulfures est donné (en bleu sur le diagramme). Il a été tracé pour une concentration en soufre dissous égale à $1,0 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$. Les espèces prises en compte sont : Ag(s) et $\text{Ag}_2\text{S(s)}$.



- ① Préciser les domaines d'existence des deux espèces Ag(s) et Ag₂S(s).
- ② Comment expliquer les changements de pente à pH = 7 et pH = 13 ? Retrouver par le calcul les valeurs numériques des différentes pentes.
- ③ En utilisant le diagramme, interpréter l'oxydation de l'argent par le dioxygène de l'atmosphère sous forme de sulfure d'argent.

On peut lire dans la littérature que l'on peut faire disparaître le sulfure d'argent noir en faisant chauffer une solution aqueuse de carbonate de sodium ($2 \text{Na}^+ + \text{CO}_3^{2-}$) avec l'objet à traiter dans une casserole en aluminium. Une telle solution présente un pH de 11,6. On cherche à montrer que la réaction se produisant est :



Sur le diagramme précédent, on a également tracé le diagramme E-pH de l'aluminium (en rouge). Il est tracé pour une concentration de travail en élément aluminium de $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ en l'absence de phase solide. On s'intéresse aux espèces : Al(s), Al³⁺, Al(OH)₃(s) et Al(OH)₄⁻.

- ④ Attribuer une espèce chimique à chaque domaine.
- ⑤ La réaction (R) est-elle réaliste ? Justifier en utilisant le diagramme E-pH.
- ⑥ **Synthèse :** Expliquer en quelques phrases pourquoi le fait de faire chauffer l'argenterie dans une casserole en aluminium en présence de carbonate de sodium permet de la nettoyer. On s'interrogera notamment sur le rôle que peut avoir le carbonate de sodium.

Données :

- H₂S est un diacide dont les pK_A valent 7,0 et 13,0.
- pH = 0 et à 298 K :

	O ₂ / H ₂ O	H ⁺ / H ₂	Ag ⁺ / Ag
E°(V)	1,23	0,00	0,80

Résolution de problème : Eau de Javel et ménage



→ corrigé p. 650

DOCUMENT 1 : Données toxicologiques des différentes espèces du chlore

Dichlore	H270 Peut provoquer ou aggraver un incendie; comburant. H280 Contient un gaz sous pression; peut exploser sous l'effet de la chaleur. H315 Provoque une irritation cutanée. H319 Provoque une sévère irritation des yeux. H331 Toxique par inhalation. H335 Peut irriter les voies respiratoires. H410 Très toxique pour les organismes aquatiques, entraîne des effets néfastes à long terme.	
Ion chlorure	Pas de risque en utilisation normale.	
Acide hypochloreux	Pas de risque en utilisation normale.	
Solution d'hypochlorite de sodium	H314 Provoque des brûlures de la peau et des lésions oculaires graves. H400 Très toxique pour les organismes aquatiques.	

DOCUMENT 2 : Composition de l'eau de Javel

L'eau de Javel est une solution d'hypochlorite de sodium ($\text{Na}^+ + \text{ClO}^-$) et de chlorure de sodium ($\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$). L'eau de Javel est une solution basique, dont le pH varie en fonction de la concentration : pH = 11,5 pour l'eau de Javel à 2,6 % de chlore actif ; pH = 12,5 pour l'eau de Javel concentrée à 9,6 % de chlore actif.

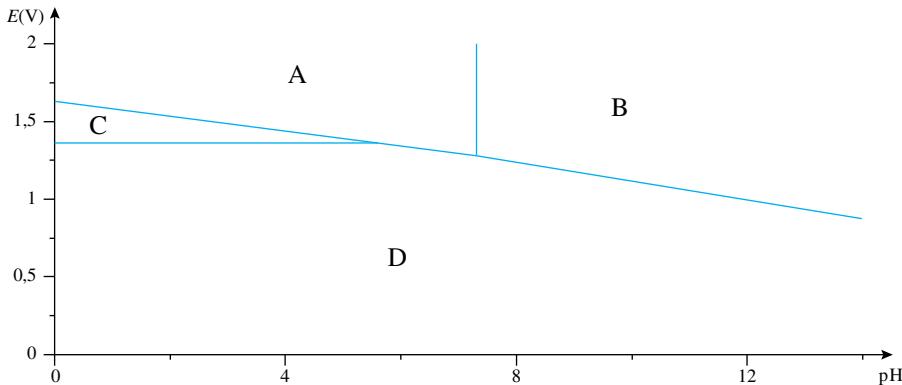
DOCUMENT 3 : Diagramme E-pH de l'élément chlore

Les espèces considérées sont $\text{Cl}_2(g)$, Cl^- , HClO , ClO^- . Le diagramme est tracé pour une concentration en espèces dissoutes $C_{\text{tra}} = 1,0 \text{ mol.L}^{-1}$ et une pression des espèces gazeuses $P_{\text{tra}} = 1,0 \text{ bar}$.

Données thermodynamiques à 298 K :

- $E^\circ(\text{Cl}_2 / \text{Cl}^-) = 1,36 \text{ V}$
- $E^\circ(\text{HClO} / \text{Cl}_2) = 1,63 \text{ V}$
- $E^\circ(\text{HClO} / \text{Cl}^-) = 1,49 \text{ V}$
- $pK_A(\text{HClO} / \text{ClO}^-) = 7,3$

Diagramme E-pH à compléter :



Problème à résoudre : Tout étudiant effectuant le ménage dans son studio devrait savoir qu'il ne faut pas associer l'eau de Javel à un produit d'entretien acide.

- Expliquer pourquoi en écrivant l'ensemble des réactions se produisant.
- Estimer le pH à partir duquel le phénomène indésirable a lieu.

Conseil

Les exercices n° 1, 2, 3 et 4 sont des illustrations des points méthodes du cours. La démarche est structurée à l'aide de symboles ➔ : il est conseillé de s'en inspirer dans les exercices similaires.

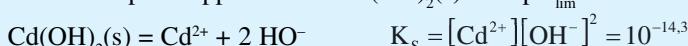
1 Tracé du diagramme E-pH du cadmium

➔ énoncé p. 642

1

Espèce	Cd(s)	Cd ²⁺	Cd(OH) ₂ (s)
n.o.	0	+II	+II

- 2 La frontière verticale sépare les deux espèces pour lesquelles n.o.(Cd) = +II. Pour déterminer son équation il faut connaître le pH d'apparition de Cd(OH)₂(s) noté pH_{lim}.



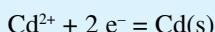
$$[\text{OH}^-] = \sqrt{\frac{K_s}{C_{\text{tra}}}} = 10^{-6,15} \text{ mol.L}^{-1} \text{ soit } \boxed{\text{pH}_{\text{lim}} = 7,9}$$

pH	7,9	
+II	Cd ²⁺	Cd(OH) ₂ (s)
0	Cd(s)	

3 • Équation de la frontière entre Cd²⁺ et Cd(s) (pH < 7,9)

Pour répondre à cette question, on utilise le **point méthode** p. 637 :

➔ **Écrire la demi-équation électronique associée au couple considéré en milieu acide.**

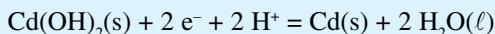


➔ **Écrire la formule de Nernst.**

$$E = E^\circ(\text{Cd}^{2+} / \text{Cd}) + \frac{0,06}{2} \log [\text{Cd}^{2+}]$$

➔ **Appliquer les conventions de tracé pour obtenir l'équation des frontières.**

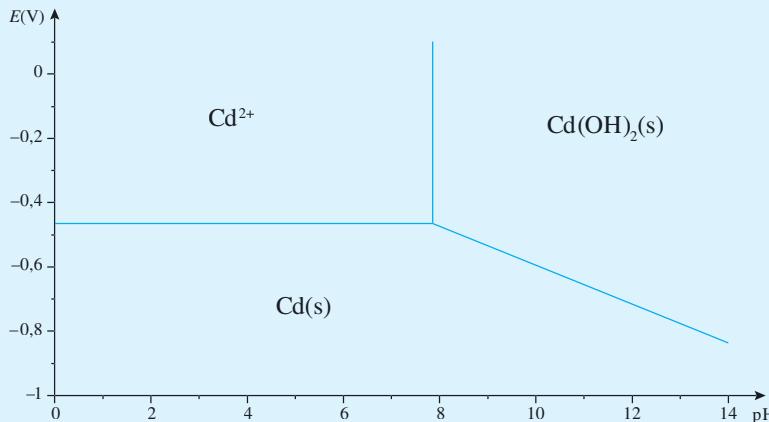
$$E = E^\circ(\text{Cd}^{2+} / \text{Cd}) + 0,03 \log C_{\text{tra}} = -0,40 + 0,03 \times (-2) \Rightarrow \boxed{E = -0,46 \text{ V}}$$

• Pente de la frontière entre Cd(OH)₂(s) et Cd(s) (pH > 7,9)

On applique la formule donnée dans quelques « trucs » utiles p. 641 : Pente = $\pm \frac{0,06q}{n}$

$$\boxed{\text{Pente} = -\frac{0,06 \times 2}{2} = -0,06 \text{ V / unité de pH}}$$

④ Diagramme *E*-pH du cadmium :

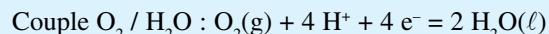


2 Exploitation du diagramme *E*-pH du manganèse

→ énoncé p. 642

- ① Pour répondre à cette question on utilise le **point méthode** p. 637 :

⇒ Écrire la demi-équation électronique associée au couple considéré en milieu acide.



⇒ Écrire la formule de Nernst.

$$\text{Couple } \text{H}^+ / \text{H}_2 : E = E^\circ(\text{H}^+ / \text{H}_2) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{H}^+]^2}{P_{\text{H}_2}} \right)$$

$$\text{Couple } \text{O}_2 / \text{H}_2\text{O} : E = E^\circ(\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}) + \frac{0,06}{4} \log ([\text{H}^+]^4 P_{\text{O}_2})$$

⇒ Appliquer les conventions de tracé pour obtenir l'équation des frontières.

D'après la convention de tracé $P_{\text{H}_2} = P_{\text{O}_2} = 1,0 \text{ bar}$, on obtient les deux équation suivantes :

– Couple H^+ / H_2 : $E = E^\circ(\text{H}^+ / \text{H}_2) - 0,06 \text{ pH} = -0,06 \text{ pH}$; cela correspond à la droite (b).

– Couple $\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}$: $E = E^\circ(\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}) - 0,06 \text{ pH} = 1,23 - 0,06 \text{ pH}$; cela correspond à la droite (a).

- ② Pour répondre à cette question, on utilise le **point méthode** p. 637 :

⇒ Déterminer graphiquement l'ordonnée à l'origine E_{lu} de la frontière entre Mn^{2+} et Mn(s) .

$$E_{\text{lu}} = -1,25 \text{ V}$$

⇒ Écrire la loi de Nernst et la simplifier en appliquant les conventions de tracé.

$$E = E^\circ(\text{Mn}^{2+} / \text{Mn}) + 0,03 \log [\text{Mn}^{2+}] = E^\circ(\text{Mn}^{2+} / \text{Mn}) + 0,03 \log C_{\text{tra}}$$

⇒ Remplacer le potentiel E de la loi de Nernst par E_{lu} et en déduire E° .

$$\Rightarrow E^\circ(\text{Mn}^{2+} / \text{Mn}) = E_{\text{lu}} - 0,03 \log C_{\text{tra}} = -1,25 + 0,06 \Rightarrow \boxed{E^\circ(\text{Mn}^{2+} / \text{Mn}) = -1,19 \text{ V}}$$

- ③ Le couple $\text{Mn(OH)}_2(\text{s}) / \text{Mn(s)}$ n'existe pas à $\text{pH} = 0$ mais la frontière associée à ce couple présente une continuité avec celle du couple $\text{Mn}^{2+} / \text{Mn}$ dont le potentiel standard est connu.

– Pour $\text{pH} < 10$, on considère le couple $\text{Mn}^{2+} / \text{Mn} \Rightarrow E = -1,25 \text{ V}$

– Pour $\text{pH} > 10$, on considère le couple $\text{Mn(OH)}_2(\text{s}) / \text{Mn} \Rightarrow \text{Mn(OH}_2(\text{s}) + 2 \text{H}^+ + 2 \text{e}^- = \text{Mn(s)} + 2 \text{H}_2\text{O}(\ell)$

$$\Rightarrow E = E^\circ(\text{Mn(OH}_2(\text{s}) / \text{Mn}) + 0,03 \log [\text{H}^+]^2 = E^\circ(\text{Mn(OH}_2(\text{s}) / \text{Mn}) - 0,06 \text{ pH}$$

En exploitant la continuité en pH = 10 on obtient :

$$E^\circ(\text{Mn(OH}_2\text{) / Mn}) = -1,25 + 0,06 \times 10 \Rightarrow E^\circ(\text{Mn(OH}_2\text{) / Mn}) = -0,65 \text{ V}$$

- ④ Pour répondre à cette question, on utilise le **point méthode** p. 639 :

→ **Superposer les diagrammes E-pH du manganèse et de l'eau.**

Les équations des frontières relatives aux deux couples de l'eau sont :

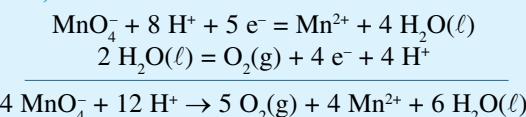
$$E = 1,23 - 0,06 \text{ pH et } E = -0,06 \text{ pH}$$

Le diagramme E-pH de l'eau a déjà été superposé à celui du Mn.

→ **Regarder si les domaines des réactifs sont disjoints ou pas.**

MnO_4^- a un domaine disjoint de celui de $\text{H}_2\text{O} \Rightarrow \text{MnO}_4^-$ peut oxyder H_2O .

→ **Dans le cas où les domaines sont disjoints, écrire la réaction se produisant (passer obligatoirement par les demi-équations redox).**



Les solutions de permanganate de potassium existent et peuvent être utilisées lors de dosage car la réaction est **bloquée cinétiquement**.

3 Lecture et utilisation des diagrammes E-pH

→ énoncé p. 642

- ① Les espèces sont classées :

– de bas en haut par nombre d'oxydation croissant ;

Espèce	Cr(s)	Cr^{2+}	Cr^{3+}	$\text{Cr(OH)}_3(\text{s})$	Cr(OH)_4^-	$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$	CrO_4^{2-}
n.o.	0	+II	+III	+III	+III	+VI	+VI

– de gauche à droite par basicité croissante :

• $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + \text{H}_2\text{O} = 2 \text{ CrO}_4^{2-} + 2 \text{ H}^+$ ⇒ $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ est l'acide et CrO_4^{2-} la base.

• Dans le cas des hydroxydes métalliques, plus l'espèce comporte de OH^- , plus elle est basique.

$$\mathbf{A = Cr(s); B = Cr^{2+}; C = Cr^{3+}; D = Cr(OH)_3(s); E = Cr(OH)_4^-; F = Cr_2O_7^{2-}; G = CrO_4^{2-}}$$

- ② À la frontière entre Cr^{2+} et Cr(s), $[\text{Cr}^{2+}] = C_{\text{tra}}$ donc :

$$E = E^\circ(\text{Cr}^{2+} / \text{Cr}) + \frac{0,06}{2} \log [\text{Cr}^{2+}] = E^\circ(\text{Cr}^{2+} / \text{Cr}) + 0,03 \log C_{\text{tra}}$$

$$\text{Graphiquement } E = -0,91 \text{ V} \Rightarrow C_{\text{tra}} = 1,0 \text{ mol.L}^{-1}$$

- ③ Pour répondre à cette question, on utilise le **point méthode** p. 638 :

→ **Se placer sur la frontière verticale qui sépare le précipité de l'espèce dissoute.**

Le précipité $\text{Cr(OH)}_3(\text{s})$ apparaît à pH = 4.

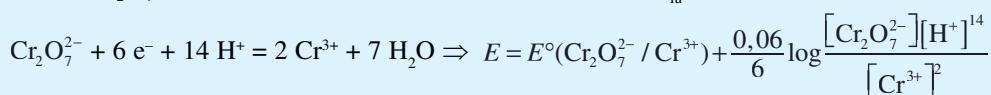
→ **Exprimer K_s .**

L'équilibre associé à cette frontière est $\text{Cr(OH)}_3(\text{s}) = \text{Cr}^{3+} + 3 \text{ OH}^- \Rightarrow K = [\text{Cr}^{3+}] [\text{OH}^-]^3 = K_s$

→ **Appliquer les conventions de tracé pour déterminer la valeur de K_s .**

À la frontière $[\text{OH}^-] = 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1}$ (car pH = 4) et $[\text{Cr}^{3+}] = C_{\text{tra}} = 1,0 \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow \mathbf{pK_s = 30}$

- 4 Pour le couple $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} / \text{Cr}^{3+}$ à pH = 0 on détermine graphiquement $E_{\text{lu}} = 1,36 \text{ V}$.

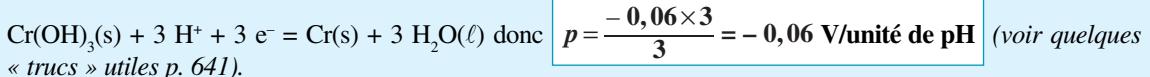


La convention de tracé impose : $2[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] + [\text{Cr}^{3+}] = C_{\text{tra}}$ et $2[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] = [\text{Cr}^{3+}]$

$$\Rightarrow [\text{Cr}^{3+}] = \frac{C_{\text{tra}}}{2} \text{ et } [\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] = \frac{C_{\text{tra}}}{4}$$

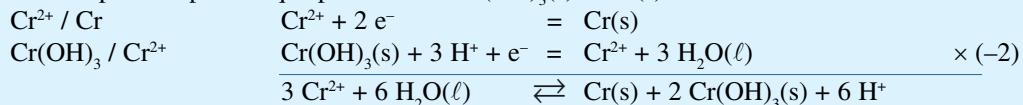
$$\text{À pH} = 0 \text{ on a } [\text{H}^+] = 1 \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} / \text{Cr}^{3+}) = E_{\text{lu}} + 0,01 \times \log C_{\text{tra}} \Rightarrow E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} / \text{Cr}^{3+}) = 1,36 \text{ V}$$

- 5 La frontière entre A et D sépare les espèces $\text{Cr(OH)}_3(\text{s})$ et $\text{Cr}(\text{s})$. La demi-équation redox est :

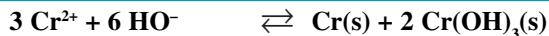


- 6 On superpose au diagramme E-pH du Cr celui de l'eau ($E = 0,06 \text{ pH}$ et $E = 1,23 - 0,06 \text{ pH}$). Les espèces C, D, E et G ont un domaine joint avec celui de l'eau pour tout pH de leur domaine. Cr^{3+} , $\text{Cr(OH)}_3(\text{s})$, Cr(OH)_4^- et CrO_4^{2-} sont donc stables dans l'eau. Les espèces A et B ont un domaine disjoint avec celui de l'eau pour tout pH. $\text{Cr}(\text{s})$ et Cr^{2+} ne sont donc pas stables dans l'eau. $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ présente un domaine joint avec celui de l'eau au-dessus de pH = 1 mais son domaine est disjoint en dessous. $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ est instable dans des solutions très acides (pH < 1) mais stable sinon.

- 7 Cr^{2+} se dismute pour un pH basique pour donner $\text{Cr(OH)}_3(\text{s})$ et $\text{Cr}(\text{s})$:



Soit en milieu basique :



Bien comprendre

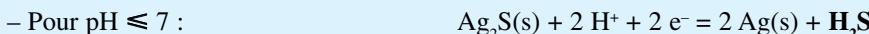
- Attention aux conventions de tracé : dans cet exercice il y a égalité de la concentration en **élément chrome** à la frontière et non pas égalité des concentrations des espèces contenant du chrome.
- Cr(OH)_4^- existe dans l'eau mais il ne sera prédominant que pour des pH très élevés : $[\text{OH}^-] > 1 \text{ mol.L}^{-1}$.

4 Nettoyer son saxophone

→ énoncé p. 643

- 1 Au-dessus de la courbe bleue on a le domaine d'existence de $\text{Ag}_2\text{S}(\text{s})$ (n.o.(Ag) = +I) : **domaine A**. En dessous de la courbe bleue, on a celui de $\text{Ag}(\text{s})$ (n.o.(Ag) = 0) : **domaine B**.

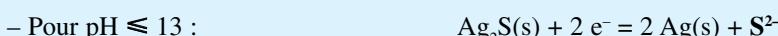
- 2 Les changements de pente correspondent aux différentes formes prédominantes des espèces soufrées.



$$\text{donc } p = \frac{-0,06 \times 2}{2} = -0,06 \text{ V/unité de pH}$$



$$\text{donc } p = \frac{-0,06 \times 1}{2} = -0,03 \text{ V/unité de pH}$$



Il n'y a pas de H^+ échangés donc la **pente est nulle**.

❸ En superposant la droite du couple O_2 / H_2O , d'équation $E = 1,23 - 0,06 \text{ pH}$ (en V) au diagramme fourni, on s'aperçoit que les domaines de $O_2(g)$ et $Ag(s)$ sont disjoints. Il se produit une réaction quantitative et on forme $Ag_2S(s)$.

❹ Les espèces contenant l'élément argent ont déjà été placées précédemment. Il faut placer les espèces contenant l'élément aluminium en appliquant les règles : n.o. croissant de bas en haut et basicité croissante de gauche à droite.

Remarque : Dans le cas d'un hydroxyde d'aluminium, plus il comporte de OH^- , plus il est basique.

Espèce	$Al(s)$	Al^{3+}	$Al(OH)_3(s)$	$Al(OH)_4^-$
n.o.	0	+III	+III	+III

Domaine	C	D	E	F
Espèce	Al^{3+}	$Al(OH)_3(s)$	$Al(OH)_4^-$	$Al(s)$

❺ La réaction est réaliste car à $pH = 11,6$ c'est bien HS^- qui prédomine. De plus, à $pH = 11,6$, on est bien dans le domaine de prédominance de $Al(OH)_4^-$ qui est le produit de la réaction donnée.

❻ Le nettoyage de l'argent se fait par réaction entre le sulfure d'argent de la surface et l'aluminium de la casseole. Cette réaction est totale comme l'assure le caractère disjoint des domaines d'existence de $Ag_2S(s)$ et de $Al(s)$. La présence de carbonate de sodium a pour effet d'assurer un milieu basique qui permet de garder l'espèce soufrée sous la forme HS^- et d'éviter le dégagement de H_2S .

Cela permet également de ne pas avoir le précipité $Al(OH)_3(s)$ qui resterait collé aux parois de manière peu esthétique.

Résolution de problème : Eau de Javel et ménage

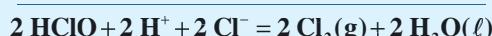
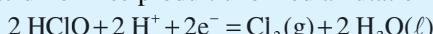
→ énoncé p. 644

Si on complète le diagramme E -pH du chlore du document 2 on obtient le tableau ci-contre.

Quand on acidifie de l'eau de Javel, les ions ClO^- sont transformés en $HClO$ selon la réaction :



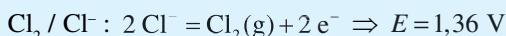
$HClO$ se trouve alors en présence d'ions Cl^- qui en milieu acide ont un domaine de prédominance disjoint de celui de $HClO$. Si on continue à acidifier il se produit une médiamutation selon la réaction :



Domaine	A	B	C	D
Espèce	$HClO$	ClO^-	Cl_2	Cl^-

Le dichlore produit étant toxique (voir pictogrammes et phrases de danger), c'est la raison pour laquelle il ne faut pas mélanger eau de Javel et produits d'entretien acides.

L'effet indésirable apparaît au pH où la médiamutation du dichlore se met en place, c'est-à-dire au pH où les frontières non verticales relatives aux couples $HClO / Cl_2$ et Cl_2 / Cl^- se coupent. Avec la convention de tracé de 1 mol.L⁻¹ :



Quand les droites se coupent $1,63 - 0,06 \text{ pH} = 1,36 \Rightarrow pH = 4,5$

La production indésirable de dichlore se produit pour $pH < 4,5$.

Base de données

La plupart des données suivantes ne sont pas rappelées dans les énoncés. La recherche systématique des valeurs de grandeurs répertoriées dans les bases de données (*handbook*) est une pratique que le scientifique met en œuvre au quotidien, et que l'étudiant doit maîtriser.

I Le Système International d'unités

→ Unités de base

GRANDEUR	UNITÉ	SYMBOLE
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Intensité électrique	Ampère	A
Température	Kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

→ Unités supplémentaires

GRANDEUR	UNITÉ	SYMBOLE
Angle plan	radian	rad
Angle solide	stéradian	sr

→ Unités dérivées

GRANDEUR	UNITÉ	SYMBOLE
Fréquence	Hertz	Hz
Vitesse	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	
Accélération	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	
Vitesse angulaire	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	
Accélération angulaire	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$	
Force	Newton	N
Pression	Pascal	Pa
Moment d'inertie	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	
Energie, Travail, chaleur	Joule	J
Puissance	Watt	W
Entropie	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Capacité thermique	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$	

GRANDEUR	UNITÉ	SYMBOLE
Charge électrique	Coulomb	C
Champ électrique	$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$	
Potentiel, Tension	Volt	V
Capacité	Farad	F
Champ magnétique	Tesla	T
Flux magnétique	Weber	W
Inductance	Henry	H
Résistance, impédance	Ohm	Ω
Conductance, admittance	Siemens	S
Eclairement lumineux	lux	Lx
Vergence	dioptre	δ
Activité radioactive	Becquerel	Bq

→ Multiples

FACTEUR	PRÉFIXE	SYMBOLE
10^1	déca	da
10^2	hecto	h
10^3	kilo	k
10^6	méga	M
10^9	giga	G
10^{12}	téra	T
10^{15}	péta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zetta	Z
10^{24}	yotta	Y

→ Sous-multiples

FACTEUR	PRÉFIXE	SYMBOLE
10^{-1}	déci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

→ Unités hors système

GRANDEUR	UNITÉ	SYMBOLE	ÉQUIVALENT
Temps	minute heure jour (<i>day</i> en anglais)	min h d	1 min = 60 s 1 h = 3600 s 1 d = 86400 s
Chaleur	calorie (<i>déconseillée</i>)	cal	1 cal = 4,18 J
Volume	litre	L	$1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$
Longueur	année-lumière (<i>tolérée</i>) unité astronomique (<i>tolérée</i>) Angström (<i>tolérée</i>)	a.l UA Å	$1 \text{ a.l} = 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m}$ $1 \text{ UA} = 1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$ $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$
Energie	électron-Volt	eV	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Masse	masse-énergie correspondante unité de masse atomique	MeV/c ² u	$1 \text{ MeV/c}^2 = 1,8 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ $1 \text{ u} = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Pression	atmosphère (<i>déconseillée</i>) bar	atm bar	$1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

II | Base de données en physique

Ces constantes fondamentales sont connues avec une grande précision, on se contente ici de quatre chiffres significatifs. Le cas de la célérité de la lumière est à part, c'est la seule constante définie exactement (depuis 1983), elle sert de base à toute la physique : $c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$

Les constantes suivantes ont parfois des unités assez lourdes, c'est pourquoi le symbole USI (pour Unité du Système International) est souvent utilisé.

- Période de révolution T = durée d'un tour autour du centre attracteur.
- Période de rotation τ = durée d'un tour de l'astre sur lui-même.
- Vitesse de libération = vitesse nécessaire pour échapper à l'attraction de l'astre depuis sa surface.

➡ Constantes fondamentales

GRANDEUR	VALEUR
Célérité de la lumière	$c = 2,998.10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Constante de gravitation	$G = 6,674.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$
Constante de Planck	$h = 6,626.10^{-34} \text{ J.s}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,381.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Nombre d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,022.10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602.10^{-19} \text{ C}$

➡ Constantes usuelles

GRANDEUR	VALEUR
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,854.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ $1/4\pi\epsilon_0 = 8,986.10^9 \text{ USI}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ $\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1$
Pesanteur normale	$g_0 = 9,807 \text{ m.s}^{-2}$
Volume molaire	$V_M = 2,241.10^{-2} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$
Constante du gaz parfait	$R = N_A k_B = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Zéro absolu	$T_0 = -273,15 \text{ }^\circ\text{C} = 0 \text{ K}$

➡ Système solaire

ASTRE	Demi-grand axe a (UA)	d_{A-S} moyenne (10^6 km)	Période de révolution T	Rayon R (km)	Masse (M/M_{terre})	Période de rotation τ	$\mathcal{V}_{libération}$ (km.s^{-1})
Mercure	0,387	57,9	88 j	2 439	0,055	58 j 16 h	4,3
Vénus	0,723	108,2	225 j	6 552	0,815	243 j ¹	10,4
Terre	1,000	149,6	1,00 an	6 378	1,000	23 h 56 min	11,2
Mars	1,524	229,0	1,88 an	3 398	0,107	24 h 37 min	5,0
Jupiter	5,210	779,4	11,87 ans	71 493	317,9	9 h 55 min	60,2
Saturne	9,585	1433,9	29,48 ans	60 269	95,2	10 h 39 min	32,3
Uranus	19,233	2877,2	84,07 ans	25 560	14,6	15 h 35 min	22,5
Neptune	30,110	4504,4	164,90 ans	25 269	17,2	18 h 25 min	23,9
Soleil				696 000	332 946	25 à 35 j ²	619

➡ Soleil-Terre-Lune

ASTRE	Demi-grand axe a (km)	Trajectoire	Période de révolution T	Rayon R (km)	Masse M (kg)	Période de rotation τ	$\mathcal{V}_{libération}$ (km.s^{-1})
Soleil	$2,50.10^{17}$	Galactique	$2,26.10^8$ ans	$6,96.10^8$	$1,99.10^{30}$	25 à 35 j ²	619
Terre	$1,50.10^8$	/Soleil	1,00 an	$6,37.10^6$	$5,98.10^{24}$	23 h 56 min	11,2
Lune	$3,84.10^5$	/Terre	27 j 7 h 43 min	$1,74.10^6$	$7,35.10^{22}$		2,38

➡ Données atomiques

PARTICULE	Électron	Proton	Neutron
Masse (kg)	$9,1095.10^{-31}$	$1,6727.10^{-27}$	$1,6750.10^{-27}$

1. Rotation rétrograde
2. 25 jours à l'équateur –35 jours aux pôles

➡ L'eau

GRANDEUR	VALEUR
Masse volumique	$\mu = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
Capacité thermique massique de l'eau liquide	$c_l = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Capacité thermique massique de l'eau solide	$c_s = 2,1 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Enthalpie de fusion (0°C)	$\Delta_{\text{fus}} h = 333 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Enthalpie de vaporisation (100°C)	$\Delta_{\text{vap}} h = 2257 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Température point triple	$T_{\text{T}} = 273,16 \text{ K}$
Pression point triple	$P_{\text{T}} = 611 \text{ atm}$

➡ Divers

GRANDEUR	VALEUR
Vitesse du son dans l'air sec à 20°C	$v = 340 \text{ m.s}^{-1}$
Vitesse du son dans l'eau à 20°C	$v = 1400 \text{ m.s}^{-1}$
Champ magnétique terrestre	$B_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
Fréquences audibles (ondes mécaniques)	20 Hz (grave) à 20 000 Hz (aigu)
Fréquences visibles ³ (ondes électromagnétiques)	$4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ (rouge) à $8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ (violet)
Vitesses cosmiques	Voir p. 313
Indices de réfraction	Voir p. 61

POINT MÉTHODE

■ La **recherche de données** numériques pertinentes est une démarche qui oblige à cerner le problème que l'on se pose. En effet, si des données figurent dans un énoncé, on aura tendance à chercher par un moyen quelconque à les utiliser plutôt qu'à réfléchir réellement au problème. C'est pourquoi la plupart des grandeurs qui figurent dans cette annexe ne sont pas rappelées dans les exercices. Ainsi le lecteur est invité à venir « piocher » dans ces pages lorsque l'exercice l'y conduit.

■ Il est essentiel de **connaître par cœur les valeurs**, avec 2 décimales, des constantes fondamentales, ainsi que **les ordres de grandeurs** (au moins la puissance de 10) de la plupart des données des pages précédentes. D'une part, on gagnera ainsi beaucoup de temps dans les calculs, et, d'autre part, on aura des outils d'analyse et de critique de résultat très utiles. Il est toujours important de comparer un résultat à une valeur connue, que ce soit pour appuyer la pertinence d'un calcul ou alors au contraire le mettre en doute (l'hypothèse simplificatrice n'est-elle pas à reconsidérer ?) ou enfin de préciser au correcteur qu'on a sûrement fait une erreur (et qu'on n'a pas forcément le temps de la corriger). Ce genre d'aveu rapporte toujours l'adhésion du lecteur, qui aura tendance à ne pas apprécier qu'on laisse sans commentaire un résultat manifestement faux (masse d'un atome = 1,5 kg, chaleur pour faire fondre un glaçon dans un verre = 1,5 mJ, distance Terre/Jupiter = 2,5 km...).

■ Par ailleurs un **rapide calcul d'ordre de grandeur préalablement à un calcul compliqué** permet de repérer rapidement une faute, avant de se lancer dans l'usage intempestif inutile de la calculatrice.

■ L'utilisation des **dimensions des grandeurs** offre aussi une analyse des erreurs à travers les équations aux dimensions et la vérification de l'homogénéité des formules (voir point méthode p. 18).

3. Il est facile de retenir l'ordre de grandeur de la gamme de longueur d'onde dans le vide (400-800 nm du violet au rouge) et une gamme de fréquence (400-800 THz du rouge au violet). On retiendra que les rayonnements ultra-violets en-deçà du violet sont plus « méchants » que les infra-rouges au-delà du rouge. On n'aura aucun mal alors à se rappeler que le violet correspond aux ondes « plus agressives » (faible longueur d'onde/haute fréquence) et le rouge aux ondes « plus douces » (grande longueur d'onde/faible fréquence).

III Base de données en chimie

→ pK_A des couples acide-base dans l'eau

FORME ACIDE / FORME BASIQUE	ACIDE / BASE	pK_A
acide chlorhydrique / ion chlorure	HCl / Cl ⁻	ACIDE FORT
acide bromhydrique / ion bromure	HBr / Br ⁻	ACIDE FORT
acide iodhydrique / ion iodure	HI / I ⁻	ACIDE FORT
acide nitrique / ion nitrate	HNO ₃ / NO ₃ ⁻	ACIDE FORT
acide sulfurique / ion hydrogénosulfate	H ₂ SO ₄ / HSO ₄ ⁻	ACIDE FORT
ion hydronium / eau	H₃O⁺ / H₂O	0
dioxyde de soufre / ion hydrogénosulfite	SO ₂ / HSO ₃ ⁻	1,8
ion hydrogénosulfate / ion sulfate	HSO ₄ ⁻ / SO ₄ ²⁻	2,0
acide phosphorique / ion dihydrogénophosphate	H ₃ PO ₄ / H ₂ PO ₄ ⁻	2,1
acide chloroéthanoïque / ion chloroéthanoate	CH ₂ ClCOOH / CH ₂ ClCOO ⁻	2,9
acide méthanoïque / ion méthanoate	HCOOH / HCOO ⁻	3,8
acide benzoïque / ion benzoate	C ₆ H ₅ COOH / C ₆ H ₅ COO ⁻	4,2
ion anilinium / aniline	R-NH ₃ ⁺ / R-NH ₂	4,6
acide éthanoïque / ion éthanoate	CH ₃ COOH / CH ₃ COO ⁻	4,8
dioxyde de carbone / ion hydrogénocarbonate	CO ₂ / HCO ₃ ⁻	6,4
ion dihydrogénophosphate / ion hydrogénophosphate	H ₂ PO ₄ ⁻ / HPO ₄ ²⁻	7,2
ion hydrogénosulfite / ion sulfite	HSO ₃ ⁻ / SO ₃ ²⁻	7,2
ion ammonium / ammoniac	NH ₄ ⁺ / NH ₃	9,2
ion triméthylammonium / triméthylamine	(CH ₃) ₃ NH ⁺ / (CH ₃) ₃ N	9,9
ion hydrogénocarbonate / ion carbonate	HCO ₃ ⁻ / CO ₃ ²⁻	10,3
ion méthylammonium / méthylamine	CH ₃ NH ₃ ⁺ / CH ₃ NH ₂	10,7
ion diméthylammonium / diméthylamine	(CH ₃) ₂ NH ₂ ⁺ / (CH ₃) ₂ NH	10,7
ion éthylammonium / éthylamine	(C ₂ H ₅)NH ₃ ⁺ / (C ₂ H ₅)NH ₂	11,0
ion diéthylammonium / diéthylamine	(C ₂ H ₅) ₂ NH ₂ ⁺ / (C ₂ H ₅) ₂ NH	11,0
ion triéthylammonium / triéthylamine	(C ₂ H ₅) ₃ NH ⁺ / (C ₂ H ₅) ₃ N	11,0
ion hydrogénophosphate / ion phosphate	HPO ₄ ²⁻ / PO ₄ ³⁻	12,4
eau / ion hydroxyde	H₂O / OH⁻	14
éthanol / ion éthanolate	C ₂ H ₅ OH / C ₂ H ₅ O ⁻	BASE FORTE

➡ Potentiels standards des couples redox

DEMI-ÉQUATION REDOX	COUUPLE	REDOX E° (Volt)
$S_2O_8^{2-} + 2e^- = 2 SO_4^{2-}$	$S_2O_8^{2-} / SO_4^{2-}$	2,01
$H_2O_2 + 2 H_3O^+ + 2 e^- = 4 H_2O$	H_2O_2 / H_2O	1,77
$MnO_4^- + 4 H_3O^+ + 3 e^- = MnO_2(s) + 6 H_2O$	MnO_4^- / MnO_2	1,68
$MnO_4^- + 8 H_3O^+ + 5 e^- = Mn^{2+} + 12 H_2O$	MnO_4^- / Mn^{2+}	1,51
$Cl_2(g) + 2 e^- = 2 Cl^-$	Cl_2 / Cl^-	1,36
$Cr_2O_7^{2-} + 14 H_3O^+ + 6 e^- = 2 Cr^{3+} + 21 H_2O$	$Cr_2O_7^{2-} / Cr^{3+}$	1,33
$O_2(g) + 4 H_3O^+ + 4 e^- = 6 H_2O$	O_2 / H_2O	1,23
$Br_2 + 2 e^- = 2 Br^-$	Br_2 / Br^-	1,08
$NO_3^- + 4 H_3O^+ + 3 e^- = NO(g) + 6 H_2O$	NO_3^- / NO	0,96
$Ag^+ + e^- = Ag(s)$	Ag^+ / Ag	0,80
$Fe^{3+} + e^- = Fe^{2+}$	Fe^{3+} / Fe^{2+}	0,77
$O_2(g) + 2 H_3O^+ + 2 e^- = H_2O_2 + 2 H_2O$	O_2 / H_2O_2	0,69
$I_2 + 2 e^- = 2 I^-$	I_2 / I^-	0,62
$Cu^+ + e^- = Cu(s)$	Cu^+ / Cu	0,52
$Cu^{2+} + 2 e^- = Cu(s)$	Cu^{2+} / Cu	0,34
$S_4O_6^{2-} + 2 e^- = 2 S_2O_3^{2-}$	$S_4O_6^{2-} / S_2O_3^{2-}$	0,09
$2 H_3O^+ + 2 e^- = H_2(g) + 2 H_2O$	H_3O^+ / H_2	0,00
$Fe^{2+} + 2 e^- = Fe(s)$	Fe^{2+} / Fe	-0,44
$2 CO_2(g) + 2 H_3O^+ + 2 e^- = H_2C_2O_4 + 2 H_2O$	$CO_2 / H_2C_2O_4$	-0,49
$Cr^{3+} + 3 e^- = Cr(s)$	Cr^{3+} / Cr	-0,74
$Zn^{2+} + 2 e^- = Zn(s)$	Zn^{2+} / Zn	-0,76
$Al^{3+} + 3 e^- = Al(s)$	Al^{3+} / Al	-1,66

➡ Zones de virages et pK_A des indicateurs colorés

		$pH_1 < ZONE DE VIRAGE < pH_2$				pK_A
NOM DE L'INDICATEUR	TEINTE ACIDE	pH_1	TEINTE SENSIBLE	pH_2	TEINTE BASIQUE	
Bleu de thymol (1 ^{er} virage)	rouge	1,2	orange	2,8	jaune	1,7
Jaune de méthyl	rouge	2,5	orange	4,5	jaune	3,5
Hélianthine	rouge	3,1	orange	4,4	jaune	3,7
Bleu de bromophénol	jaune	2,9	vert	4,8	bleu	3,8
Rouge de méthyle	rouge	4,2	orange	6,2	jaune	5,1
Rouge de bromophénol	jaune	5,0	orange	7,0	rouge	6,0
Bleu de bromothymol	jaune	6,0	vert	7,6	bleu	7,0
Rouge de phénol	jaune	6,8	orange	8,0	rouge	7,2
Bleu de thymol (2 ^e virage)	jaune	7,8	vert	9,8	bleu	8,8
Phénolphtaléine	incolore	8,0	rose	9,9	rose-violet	9,6
Thymolphtaléine	incolore	9,4	bleu	10,6	bleu	9,8
Jaune d'alizarine	jaune	10,1	rose-orange	12,0	lilas	11

Formulaire incertitudes

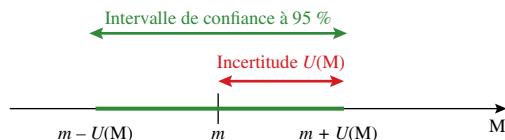
En sciences expérimentales il n'est pas possible de déterminer la valeur vraie m_{vraie} d'une grandeur M. De nombreuses causes expérimentales font qu'une mesure est nécessairement entachée d'erreurs aléatoires, même si elle est réalisée avec le plus grand soin et avec du matériel de qualité convenablement étalonné.

A Erreurs de mesure et incertitudes

Définition

L'**incertitude de mesure** ou **incertitude élargie** est une estimation de l'erreur pouvant être introduite par les différentes sources d'erreur. L'incertitude de mesure liée à la grandeur (ou mesurande) M est notée $U(M)$ (U pour *uncertainty*).

- L'incertitude $U(M)$ permet de définir un **intervalle de confiance**, c'est-à-dire un ensemble de valeurs raisonnablement attribuable au mesurande M. Le centre de cet intervalle est le résultat m de la mesure de M (ou la moyenne \bar{m} des mesures dans le cas d'une série de mesures). La largeur de cet intervalle dépend du niveau de confiance désiré. En général, le niveau de confiance est de 95 %. Cela signifie que dans le cas où toutes les erreurs sont de **nature aléatoires**, on a 95 % de chance que la valeur vraie de la grandeur M se trouve dans cet intervalle.



On considère par la suite que le mesurande M est fonction d'autres mesurandes X_i (mesure indirecte) :

$$M = f(X_1, X_2, X_3, \dots)$$

B 1^{re} étape : Évaluation de l'incertitude type $u(X_i)$ pour chaque mesurande X_i

Évaluation de type A	Évaluation de type B ⁽¹⁾						
Cas où on a réalisé N mesures x_i	Cas d'une mesure unique x_i						
<ul style="list-style-type: none"> Meilleure estimation de X_i: valeur moyenne \bar{x}_i des mesures. L'écart type expérimental σ_{n-1} mesure la dispersion d'un ensemble de valeurs autour de la moyenne. Il se détermine facilement à l'aide d'une calculatrice. L'incertitude type $u(X_i)$ associée au mesurande X_i peut être évaluée grâce à la relation : $u(X_i) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{N}}$	<ul style="list-style-type: none"> Dans le cas d'une mesure unique, il faut repérer les différentes sources d'erreurs liées au processus de mesure. Exemples : <table border="1"> <tr> <td>Simple erreur de lecture⁽²⁾ (ex : sur une pipette graduée).</td> <td>$u(X_i) = \frac{d}{\sqrt{3}}$</td> </tr> <tr> <td>Double erreur de lecture⁽²⁾ (ex : sur une burette graduée avec ajustage au zéro et lecture de V_{eq}).</td> <td>$u(X_i) = \sqrt{2} \frac{d}{\sqrt{3}}$</td> </tr> <tr> <td>Cas d'une mesure obtenue à l'aide d'un instrument dont la tolérance t est donnée par le constructeur (ex : fiole jaugée, etc.).</td> <td>$u(X_i) = \frac{t}{\sqrt{3}}$</td> </tr> </table> <ul style="list-style-type: none"> S'il y a plusieurs sources d'erreurs (ER_1, ER_2, etc.), les incertitudes-type, s'ajoutent de manière quadratique : $u(X_i)^2 = u(X_i)_{ER_1}^2 + u(X_i)_{ER_2}^2 + \dots$ 	Simple erreur de lecture ⁽²⁾ (ex : sur une pipette graduée).	$u(X_i) = \frac{d}{\sqrt{3}}$	Double erreur de lecture ⁽²⁾ (ex : sur une burette graduée avec ajustage au zéro et lecture de V_{eq}).	$u(X_i) = \sqrt{2} \frac{d}{\sqrt{3}}$	Cas d'une mesure obtenue à l'aide d'un instrument dont la tolérance t est donnée par le constructeur (ex : fiole jaugée, etc.).	$u(X_i) = \frac{t}{\sqrt{3}}$
Simple erreur de lecture ⁽²⁾ (ex : sur une pipette graduée).	$u(X_i) = \frac{d}{\sqrt{3}}$						
Double erreur de lecture ⁽²⁾ (ex : sur une burette graduée avec ajustage au zéro et lecture de V_{eq}).	$u(X_i) = \sqrt{2} \frac{d}{\sqrt{3}}$						
Cas d'une mesure obtenue à l'aide d'un instrument dont la tolérance t est donnée par le constructeur (ex : fiole jaugée, etc.).	$u(X_i) = \frac{t}{\sqrt{3}}$						

1. Les relations sont données dans le cas fréquent d'une loi uniforme. 2. d correspond à la plus petite graduation de l'instrument de mesure.

C | 2^e étape : Détermination de l'incertitude type $u(M)$

Pour calculer $u(M)$ à partir des incertitudes types $u(X_i)$ il faut utiliser les relations données dans le tableau ci-dessous.

Relation	Incertitude
$M = X_1 + X_2 + X_3$	$u(M)^2 = u(X_1)^2 + u(X_2)^2 + u(X_3)^2$
$M = \frac{X_1 \times X_2}{X_3}$	$\left(\frac{u(M)}{m}\right)^2 = \left(\frac{u(X_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(X_2)}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{u(X_3)}{x_3}\right)^2$
$M = a \times X$ a est une constante	$u(M) = a \times u(X)$

D | 3^e étape : Détermination de l'incertitude élargie $U(M)$

- Une fois calculée l'incertitude-type $u(M)$ de la grandeur M , il faut calculer l'incertitude élargie $U(M)$:

$$U(M) = k \times u(M)$$

k est le **facteur d'élargissement**, il dépend du niveau de confiance souhaité, de la méthode d'évaluation de l'incertitude, de la répartition (gaussienne ou rectangulaire) des valeurs.

Incertitude de type A	• Pour $N < 60$, k correspond au facteur de Student :																	
	<table border="1"> <tr> <td>N</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr> <td>k</td><td>2,776</td><td>2,571</td><td>2,447</td><td>2,365</td><td>2,306</td><td>2,262</td><td>2,228</td><td>2,201</td></tr> </table>	N	5	6	7	8	9	10	11	12	k	2,776	2,571	2,447	2,365	2,306	2,262	2,228
N	5	6	7	8	9	10	11	12										
k	2,776	2,571	2,447	2,365	2,306	2,262	2,228	2,201										
	• Pour $N > 60$, $k = 1,96$.																	
Incertitude de type B	Pour un mesurande M avec une distribution gaussienne ⁽³⁾ des valeurs mesurées m_i et un intervalle de confiance de 95 % : $k = 1,96$																	

3. C'est généralement le cas pour un mesurande fonction d'autres mesurandes, ce sera le cas le plus fréquent en chimie.

E | 4^e étape : Écriture du résultat d'un mesurage

Cas d'une mesure unique :

$$M = (m \pm U(M)) \text{ unité}$$

Cas d'une série de mesures :

$$\bar{M} = (\bar{m} \pm U(M)) \text{ unité}$$

- L'incertitude de la mesure $U(M)$ est **arrondie par excès** en ne conservant en général qu'**un seul chiffre significatif**.

- $U(M)$ doit être exprimée dans la même unité que m (ou \bar{m} dans le cas d'une série de mesures). On prendra comme dernier chiffre significatif de m (ou \bar{m}), celui qui est à la même position que celui de l'incertitude.

F | Précision d'une mesure

Il peut être pertinent de calculer juste après l'étape 1, les incertitudes relatives pour chaque source X_i et ainsi voir laquelle est la plus élevée et au besoin modifier le matériel ou le protocole.

$$\frac{u(X_i)}{x_i} \times 100$$

→ Pour s'entraîner, faire l'exercice n° 1 du chapitre 34 p. 625

Questions expérimentales en chimie

Dans cette annexe intitulée « questions expérimentales » sont abordés sous forme de questions-réponses des points de chimie expérimentale venant compléter ceux qui ont déjà été abordés au sein de plusieurs chapitres. Ces questions-réponses abordent les *notions incontournables* que doit maîtriser un élève de prépa avant d'être évalué en travaux pratiques. Cette liste n'est cependant pas exhaustive.

I Titrages conductimétriques

1. Décrire une cellule de conductimétrie et expliquer brièvement le principe de fonctionnement d'un conductimètre.

La cellule de conductimétrie est constituée de deux plaques de platine platiné, de surface S distantes d'une longueur ℓ et délimitant un volume V de solution à étudier. L'application de la loi d'Ohm aux électrolytes montre que la conductance G ($G = I/U$) de cette portion de solution ainsi délimitée est proportionnelle à sa conductivité :

$$\sigma = K_{\text{cell}} \times G \quad (G \text{ en Siemens} ; \sigma \text{ en } \text{S.m}^{-1} \text{ et } K_{\text{cell}} : \text{constante de cellule en m}^{-1}).$$

K_{cell} est appelée constante de cellule et dépend des dimensions de la cavité constituée par les deux plaques :

$$K_{\text{cell}} = \frac{\ell}{S} \quad (\ell \text{ en m}, S \text{ en m}^2 \text{ et } K_{\text{cell}} \text{ en m}^{-1})$$

2. Pourquoi étalonne-t-on un conductimètre ?

L'étalonnage du conductimètre permet de déterminer la valeur K_{cell} de la constante de cellule du conductimètre en utilisant une solution éalon dont la conductivité en fonction de la température est connue.

3. Comment faire pour obtenir des segments de droites ?

Comment repère-t-on l'équivalence ?

■ Pour que la courbe $\sigma = f(V_B)$ (avec V_B le volume de solution titrante versée) soit constituée de segments de droites, il faut soit :

– Ajouter un grand volume d'eau dans le bêcher pour pouvoir négliger l'augmentation du volume lors du dosage.

– Reporter en ordonnée la conductivité corrigée : $\sigma \times \frac{V_A + V_B}{V_A}$ avec V_A le volume de solution titrée.

■ L'équivalence est atteinte lorsqu'on observe une rupture de pente (voir exercice n° 2 p 625).

4. Lors d'un dosage conductimétrique, est-il nécessaire d'étonner le conductimètre ?

Lors d'un dosage conductimétrique, il est inutile d'étonner le conductimètre puisque les seules ruptures de pentes suffisent pour déterminer des volumes équivalents.

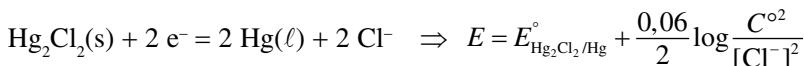
II Titrages potentiométriques

5. Quel est le principe d'un titrage potentiométrique ?

Lors d'un dosage potentiométrique, on mesure à l'aide d'un voltmètre une différence de potentiel entre une électrode indicatrice (ou électrode de mesure) et une électrode de référence. Le potentiel de l'électrode de référence est fixe alors que le potentiel de l'électrode de travail est fonction de la concentration des espèces en solution.

6. Qu'est-ce qu'une électrode de référence ? Décrire l'électrode de référence au calomel saturé.

Une électrode de référence est une électrode dont le potentiel est connu et est indépendant de la composition de la solution que l'on cherche à doser. L'électrode au calomel saturé fait intervenir le couple $\text{Hg}_2\text{Cl}_2 / \text{Hg}$:



$[\text{Cl}^-]$ est maintenue constante car la solution interne est une solution saturée en chlorure de potassium $\Rightarrow E_{\text{ECS}} = \text{cste}$.

7. Quelle électrode indicatrice doit-on utiliser ?

Titrage	Électrode indicatrice
Dosage impliquant des ions M^{n+} (ex : Ag^+).	Électrode métallique M (ex : électrode d'argent Ag).
Dosage impliquant une espèce en solution (ex : Fe^{2+}) donc l'espèce conjuguée est aussi en solution (ex : Fe^{3+}).	Électrode inerte de platine (Pt).

Voir exercice n° 4 p. 627

III Titrages pH-métriques

8. Expliquer brièvement le principe de fonctionnement d'un pH-mètre.

- Le pH-mètre n'est rien d'autre qu'un millivoltmètre relié à deux électrodes :
 - L'électrode de verre dont le potentiel dépend de la concentration en ion oxonium (H_3O^+) dans la solution ; c'est donc l'électrode indicatrice.
 - L'électrode au calomel saturée (ECS) qui a un potentiel fixe ; c'est donc l'électrode de référence.
- En travaux pratiques, on utilise le plus souvent une seule électrode dite combinée dans laquelle les deux électrodes sont rassemblées.

9. Pourquoi ajoute-t-on souvent de l'eau dans le bêcher lors d'un dosage pH-métrique ?

Cela change-t-il le volume de solution titrante versée à l'équivalence ? Peut-on rajouter autant d'eau que l'on veut ?

On ajoute souvent de l'eau dans le bêcher lors d'un dosage pH-métrique pour que l'électrode combinée soit bien immergée. Cela ne change pas le volume de solution titrante versée à l'équivalence car la quantité de matière d'espèce titrée n'est pas modifiée par l'ajout d'eau. Si on ajoute trop d'eau, on dilue fortement l'espèce titrée et le saut de pH sera moins visible et le dosage moins précis.

10. Expliquer pourquoi on étalonne un pH-mètre.

L'étalonnage du pH-mètre est nécessaire afin que la tension mesurée entre les électrodes soit convertie justement en valeur de pH. En effet, l'électrode de verre a un potentiel qui est une fonction affine du pH donc, la tension mesurée l'est aussi : $U = a - b \times \text{pH}$. Les constantes a et b sont propres au matériel utilisé, ce qui rend un étalonnage nécessaire pour que la conversion de U en pH soit exacte. Pour déterminer a et b , on utilise deux solutions tampons.

11. Quels avantages apporte la conductimétrie par rapport à la pH-métrie ?

Dans certains titrages, la conductimétrie permet une meilleure précision pour le repérage de l'équivalence que la pH-métrie (ruptures de pentes très visibles alors que les sauts de pH sont faibles : voir exercice n° 2 p 625). La conductimétrie, grâce à une modélisation par des segments de droite, nécessite un petit nombre de points de mesure, au contraire de la pH-métrie, qui nécessite un resserrage des points de mesure autour de l'équivalence.

IV Titrages colorimétriques, avec indicateur coloré, ou spectrophotométriques

12.a. Qu'est-ce qu'un indicateur coloré acido-basique ? Pourquoi doit-on toujours minimiser la quantité d'indicateur coloré acido-basique lors d'un dosage ?

Un indicateur coloré acido-basique est un couple acide/base pour lequel les solutions aqueuses des formes acide et basique ont des couleurs différentes. Un indicateur coloré possède des propriétés acido-basiques, il fausse le dosage s'il est introduit en trop grandes quantités.

b. Comment choisir l'indicateur coloré acido-basique adapté pour un dosage donné.

Un indicateur acido-basique est adapté si le pH à l'équivalence est compris dans sa zone de virage. L'étendu de cette zone correspond approximativement à l'intervalle de pH : $[pK_A - 1 ; pK_A + 1]$. Voir exercice n° 2 p. 625.

13. Qu'est-ce qu'un indicateur coloré de fin de réaction ? Donner un exemple.

Un indicateur de fin de réaction est une espèce chimique qui interagit spécifiquement avec le réactif à titrer ou avec le réactif titrant en formant une espèce colorée. Par exemple une solution de chromate de potassium permet de mettre en évidence la présence d'ions Ag^+ dans le milieu (voir exercice n° 5 p. 628).

14. Proposer une méthode de dosage du diiode.

Le diiode I_2 peut être dosé par les ions thiosulfate $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$. L'équivalence du dosage est repérée par colorimétrie. À l'équivalence la couleur brune du diiode (réactif titré) disparaît. Pour avoir un meilleur contraste lors du virage à l'équivalence on peut aussi utiliser de l'empois d'amidon (ou du thiocyanate) qui forme un complexe bleu nuit avec I_2 , voir exercice n° 3 p. 626.

15. Quelles sont les réglages préliminaires à effectuer avant de mesurer une absorbance à l'aide d'un spectrophotomètre ?

Avant de mesurer une absorbance il faut :

- Régler la longueur d'onde du faisceau incident au maximum d'absorption (pour avoir le maximum de précision sur les mesures), d'où la nécessité de tracer au préalable le spectre d'absorption $A = f(\lambda)$.
- Faire le blanc avec une cuve remplie de solvant afin de soustraire l'absorbance de la cuve et du solvant à l'absorbance mesurée.

Lettres grecques

Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	alpha
β	B	béta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ	E	epsilon
ζ	Z	dzêta
η	H	êta
θ	Θ	thêta
ι	I	iota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
ν	N	nu
ξ	Ξ	ksi
\omicron	O	omicron
π	Π	pi
ρ	P	rhô
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	upsilon
ϕ	Φ	phi
χ	X	khi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	oméga

Index des mots-clés

A

aberrations 67
accélération 215, 219
acide 599
activité chimique 513
acuité de la résonance 166
admittance 168
alcalins 546
allongement 16
allotropie 570
alternateur 491
amplitude complexe 160
analogie électromécanique 139
analyse spectrale 32
anode 589
aplanétisme approché 66
aplanétisme rigoureux 66
approximation des régimes
quasi stationnaires (ARQS) 109
associations de dipôles 118, 170
athermane ou calorifugée 344
atome 541
axe optique 65

B

bande passante 166, 187
barrière de potentiel 264, 312
base 599
battements 153, 303
bilan d'enthalpie 446
bilan d'entropie 446
bilan entropique 397
bobine 115, 466-467

C

capacité 114
capacité d'une pile 590
capacité thermique à pression constante 376
capacité thermique à volume constant 349
capacités thermiques du gaz parfait 377
caractéristique de dipôle 111
catadioptre 62
cathode 589
centre d'inertie 326
centre de force 306
chaleur 366

champ magnétique 463
champ stationnaire 276, 462
champ uniforme 276, 462
changement d'état 438
charge électrique 107
charge formelle 554
classification périodique des éléments 544
coefficient adiabatique 376
coefficient de Laplace 376
coefficient de Student 659
compacité 569
concentration molaire 513
condensateur 114
condition de contact 569
condition de normalisation 97
conditions de Gauss 66
conductance 114
conducteur 107
conductimétrie 622, 660
coniques 305
constante d'acidité 600, 638, 655
constante d'équilibre 514, 592, 604
constante de raideur 15
constante des aires 307
convention générateur 111
convention récepteur 111
conversion électromécanique 494
coordinence 569
corps pur 437
courant électrique 107
courant électromoteur 117
courant induit 484
courbe de saturation 441
cristaux covalents 574
cristaux ioniques 574
cristaux moléculaires 576
cubique à faces centrée (structure) 571

D

débit massique 428
décade 189
décomposition de Fourier 183
demi-équation électronique 587
demi-pile 589
déplacement élémentaire 214
dérivateur 195

détente de Joule-Gay-Lussac 379
détente de Joule-Kelvin 380
diagramme d'état 512
diagramme de Bode 189
diagramme de Bode asymptotique 189
diagramme de Clapeyron 361, 365
diagramme de Mollier 428
diagramme de Raveau 416
diagramme de Watt 361
diagramme entropique 400
diathermane 344
différence de marche 46
différence de potentiel 110
diffraction 50
dioptre 62
diphasé 439
dipôle électrique 111
dipôle magnétique 467
dismutation 606, 607, 639
dispersif 62
dissociation, dissociant 559
diviseur de courant 118, 170
diviseur de tension 118, 170
domaine d'existence 605, 606, 635
domaine de prédominance 604, 605, 635
dosage par étalonnage 619
dualité onde-corpuscule 93

E

écart type 658
échelon 129
écoulement stationnaire 425
effet photo-électrique 94
efficacité 416, 424
électrode 589
électrode au calomel saturé 590, 661
électrode standard à hydrogène 590
électron-Volt 277
électronégativité 546
électrons de cœur 543
électrons de valence 543
élément chimique 541
empilements compacts 570
énergie cinétique 258, 328
énergie d'activation 528
énergie de liaison 555
énergie électrique 112
énergie interne 349, 373
énergie mécanique 259
énergie potentielle 259
énergie potentielle effective 307
enthalpie 375
entropie 394

entropie créée 397
entropie échangée 398
équation d'état 345
équation différentielle 17, 19, 23, 127, 134
équations horaires 215
équivalence 619
erreurs aléatoires 658
état libre 264, 308
état lié 264, 308
état supercritique 512
état thermodynamique 345

F

facteur d'amortissement 135
facteur d'élargissement 659
facteur de qualité 135
filtre 185, 194
filtre coupe-bande 187
filtre du premier ordre 190
filtre du second ordre 190
filtre passe-bande 187
filtre passe-bas 187
filtre passe-haut 187
filtre toute-bande 187
fluide 346
fluide supercritique 439
flux d'un vecteur 463
flux mutuel 487
flux propre 486
fonction d'état 345
fonction d'onde 97
fonction de transfert 185
fondamental 31, 49
force centrale 306
force conservative 258
force de Laplace 468
force de Lorentz 276
force de rappel 16
force électrique 276
force électromotrice (fém) 589
force électromotrice 116
force magnétique 276
force newtonienne 309
formule de Nernst 591, 637
Fourier 31, 159, 183
fraction molaire 513
fréquence de coupure 166, 187
fuseau 48

G

gain 185
gain en décibel 185
gaz de Van der Waals 353

gaz nobles 546
gaz parfait 350, 382
gaz parfait diatomique 351
gaz parfait monoatomique 351
gaz parfait polyatomique 350
gaz parfaits (loi des) 512, 526
générateur 112
générateur de Norton 117
générateur de Thévenin 117
grandeurs d'état 345
grandeur extensives 345
grandeur intensives 345

H

habitabilité d'un site 573
halogènes 546
harmoniques 31, 49
haut-parleur 496
hypervalence 555

I

identité thermodynamique 394
impédance 168
incertitude élargie 659
incertitude type 658
indicateur coloré de fin de titrage 622, 657, 662
indice 61
inductance 115, 486
inductance mutuelle 487
inégalité de Clausius 416
inertie 231
instrument optique 65
intégrateur 195
intensité électrique 108
intensité lumineuse 98
interaction de Debye 557
interaction de Keesom 557
interaction de London 557
interaction de Van der Waals 557
interférences 44
intervalle de confiance 658
isentropique 399
isolant 107
isothermes d'Andrews 440
isotopes 541

L

lacune électronique 554
liaison hydrogène 558
liaison polarisée 556
ligne de champ 462
loi cinétique 529

loi d'Arrhenius 528
loi d'Ohm 114
loi de Beer Lambert 526
loi de Cauchy 62
loi de Faraday 485
loi de Kohlrausch 526
loi de Lenz 483
loi de Snell-Descartes 63, 64
loi de vitesse 527
loi des aires 307
loi des gaz parfaits 512, 526
loi des mailles 114, 170
loi des nœuds 113, 170
loi du retour inverse
de la lumière 60
lois de Joule 380, 381, 382
lois de Képler 310
lois de Kirchhoff 113
lois de Laplace 399, 400
longueur d'onde 35
longueur de liaison 555

M

machine ditherme 415
machine frigorifique 422
machine monotherme 414
machine thermique 413
maille 568
masse volumique 513, 569
médiamutation 606, 607
mésoscopique 343
mesurande 658
métaux 546, 570
méthode de la dégénérescence de l'ordre 533
méthode des conditions stoechiométriques 533
méthode des temps de demi-réaction 531
méthode des vitesses initiales 532
méthode différentielle 531
méthode intégrale 530
milieu transparent 61
modèle des sphères dures 567
modèle du cristal parfait 567
modes propres 49
molécule polaire 556, 559
moment cinétique 295, 327
moment de la force 294
moment dipolaire 556
moment magnétique 467
monobare 361
monophasé 439
monotherme 361
moteur 414
motif 568

mouvement uniforme 216
moyenne 658
moyenne d'un signal 183
moyenneur 195

N

nœud 568
nœud 48
nombre (ou degrès) d'oxydation 588, 636
nombre d'onde 35
nombres quantiques 542

O

onde 29
onde de matière 95
onde longitudinale 29
onde progressive 33
onde stationnaire 47
onde transversale 29
orbitale atomique 542
ordre global 527, 533
ordre partiel 527, 533
oscillateur 128
oscillateur forcé 128, 159
oscillateur harmonique 18
oscillateurs couplés 145, 298
oxydants 546, 587, 600

P

paraxiaux 66
Pauli (principe d'exclusion) 542
permittivité relative 559
pH 600, 635, 661
pH-métrie 620, 661
phase 511
phase condensée 346, 353, 377
phase d'un corps pur 437
photons 94
pile électrochimique 589
plan d'incidence 62
point critique 439
point de fonctionnement 119
point triple 439, 512
polarisabilité 557
pompe à chaleur 422
population de la maille 568
portrait de phase 140
potentiel d'oxydo-réduction 590, 635, 637, 656
potentiométrie 621, 661
pourcentage d'ionicité 556
poussée d'Archimède 239
précipitation (réaction de), précipité 600, 603
premier principe de la thermodynamique 374

premier principe industriel 427
pression cinétique 347
pression partielle 512
principe d'inertie 232
principe de Fermat 59
principe fondamental de la dynamique 234, 331
probabilité de présence 97
produit de solubilité 603, 638
prototique 559
puissance d'une force 258
puissance électrique 112
puits de potentiel 98, 264
pulsation 18
pulsation propre 135
pulsations de coupure 187

Q

quantification de l'énergie 95
quantité de mouvement 231, 326
quotient de réaction 514, 603

R

rail de Laplace 488, 492, 495
rayons lumineux 59
réaction acido-basique 599, 600, 604
réaction chimique 513
réaction d'oxydo-réduction 587, 600, 602
récepteur 112, 414
réducteurs 546, 587, 600
référentiel 211
référentiel galiléen 232
réflexion 63
réflexion totale 64
réfraction 63
réfringent 61
régime 129, 136
régime établi 129
régime libre 130
régime permanent 129
régime transitoire 129
règle de Hund 543
règle de Klechkowski 543
règle de l'octet 553
relation de de Broglie 95
relation de Guldberg et Waage 514
relation de Mayer 378
rendement 416, 418, 424
repère 213
réponse à un échelon 130
représentation de Fresnel 43, 171
représentation de Lewis 553, 554
réseau cristallin 568
résistance 114

résonance 166
rotation 221

S

second principe de la thermodynamique 397
signal 29, 183
sites intersticiels octaédriques 573
sites intersticiels tétraédriques 573
solvatation 559
sous-couche électronique 542
spectre d'un champ 462
spectre de la lumière 60
spectre du signal 32
spectrophotométrie 526, 662
spectroscopie 541
stabilité de l'équilibre 262
stigmatisme approché 65
stigmatisme rigoureux 65
synchrones 44
synthèse spectrale 32
systèmes de coordonnées 213

T

tableau d'avancement 515
température cinétique 394
temps caractéristique 134
temps de demi-réaction 529
tension électrique 110
théorème de l'énergie cinétique 260, 333
théorème de l'énergie mécanique 260
théorème de la puissance cinétique 260, 333
théorème de la résultante cinétique 234, 331
théorème de Millman 119, 170
théorème de Parseval 184
théorème des actions réciproques 235
théorème des moments 442, 446
théorème du moment cinétique 234, 296, 331
thermostat 367
titrage direct 619
titrage en retour 620

titrage indirect 620
titrages simultanés 623
titrages successifs 623
titres massiques 441
titres molaires 441
trajectoire 215
transfert mécanique 363
transfert thermique 366
transformateur 489
transformation adiabatique 360
transformation dite quasi statique 359
transformation isobare 360
transformation isochore 360
transformation isotherme 360
transformation réversible 359
transformation thermodynamique 359
transition de phase 437
translation 220
travail des forces de pression 363
travail élémentaire 257
travail utile 426
tube de champ 462

V

valeur efficace 184
vapeur saturante 439
vapeur sèche 439
vecteur d'onde 35
vecteur rotation 221
ventre 48
vitesse 215, 527
vitesse angulaire 219, 221, 328
vitesse aréolaire 307
vitesse de disparition 527
vitesse de formation 527
vitesse de réaction 527
vitesses cosmiques 313
volume massique 348
volume molaire 348

Liste des points méthodes

CHAPITRE	POINT MÉTHODE	
1	Apprendre son cours	9-10
1	Valeurs numériques des exercices	12
2	Définir l'allongement d'un ressort	16
2	Identifier une équation différentielle	17
2	Utiliser une équation aux dimensions	18
2	Résoudre une équation différentielle	19
2	Simplifier une équation différentielle	23
3	Exprimer l'onde progressive	34
4	Étudier le phénomène d'interférences	47
5	Schématiser en optique	65
6	Construire une image par une lentille mince	79
6	Construire l'image d'un point objet à l'infini	80
6	Obtenir un agrandissement unité	81
6	Utiliser un schéma synoptique dans une association de lentilles	83
8	Choisir un sens et une notation du courant	108
8	Schématiser les circuits électriques	111
8	Respecter la cohérence entre formule et schéma	116
8	Bien démarrer en électrocinétique	120
9	Choisir une variable électrique	130
9	Étudier l'état initial et prévoir l'état final d'un régime transitoire	131
9	Résoudre une équation différentielle du premier ordre par séparation des variables	134
10	Comprendre le lien entre équation différentielle et équation complexe	161
10	Exprimer la solution forcée	162
10	Exprimer la phase de la solution forcée	163
11	Comprendre la signification et l'intérêt de la fonction de transfert	186
11	Tracer un diagramme de Bode	189
12	Représenter les axes et la base d'un système de coordonnées	214
13	Choisir un référentiel galiléen	233
13	Résoudre un problème de mécanique	236
13	Projeter un vecteur	237
13	Exprimer la poussée d'Archimède	240
14	Résoudre un problème de mécanique à l'aide d'un théorème énergétique	261
15	Étudier le mouvement d'une particule dans un champ électrique	278
16	Utiliser le TMC	296
17	Exploiter les invariants d'un mouvement	308
17	Exprimer l'énergie potentielle	311
18	Exprimer la vitesse angulaire	327
18	Étudier le mouvement du solide	331
19	Distinguer les grandeurs extensives et intensives	345
19	Représenter et exprimer les forces de pressions	347
19	Convertir les unités volumiques	348
20	Choisir une notation pertinente : Δ , δ , d ou rien	362
20	Calculer le travail des forces de pression sur un gaz	365
20	Distinguer la transformation adiabatique et la transformation isotherme	367
21	Calculer les grandeurs d'échanges	375
22	Exploiter le second principe et le bilan entropique	399
23	Effectuer un schéma de principe d'une machine thermique	414
23	Calculer un rendement ou une efficacité	417
24	Déterminer l'état (physique et thermodynamique) d'un système	442
24	Établir un bilan enthalpique ou entropique avec changement d'état	446
25	Représenter le champ magnétique	468

- 26 ■ Choisir une orientation et utiliser un circuit équivalent 485
- 26 ■ Exprimer le couplage à l'aide de l'équation électrique et de l'équation mécanique 494
- 26 ■ Exploiter les bilans énergétiques 495
- 27 ■ Déterminer la composition finale d'un système physico-chimique 516
- 28 ■ Exprimer une concentration en fonction d'une grandeur physique 526
- 28 ■ Déterminer une énergie d'activation E_a 528
- 28 ■ Déterminer l'ordre d'une réaction et la valeur de k avec la méthode intégrale 530
- 28 ■ Déterminer l'ordre d'une réaction et la valeur de k avec la méthode différentielle 531
- 28 ■ Déterminer l'ordre d'une réaction et la valeur de k avec la méthode des vitesses initiales 532
- 29 ■ Calculer un écart énergétique entre deux états ou calculer une longueur d'onde absorbée ou émise 541
- 29 ■ Déterminer la configuration électronique fondamentale d'un ion 544
- 29 ■ Prévoir la formule des ions monoatomiques d'un élément 544
- 29 ■ Déterminer la configuration électronique d'un élément à partir de sa position dans le tableau 545
- 29 ■ Déterminer la position d'un élément à partir de la configuration électronique 545
- 30 ■ Déterminer la représentation de Lewis d'un ion polyatomique 554
- 30 ■ Reconnaître une molécule polaire 556
- 31 ■ Calculer la compacité d'une structure 570
- 32 ■ Équilibrer une demi-équation électronique 587
- 32 ■ Calculer le n.o. d'un élément dans un édifice chimique (ex. : H_2CrO_4) 588
- 33 ■ Calculer la constante d'équilibre K d'une réaction acido-basique 602
- 33 ■ Calculer la constante d'équilibre K d'une réaction redox 603
- 33 ■ Calculer une solubilité à partir de K_s 603
- 33 ■ Calculer la constante d'équilibre d'une réaction quelconque 604
- 35 ■ Déterminer les équations des frontières non verticales 637
- 35 ■ Déterminer un potentiel standard E° 637
- 35 ■ Déterminer un pK_A 638
- 35 ■ Déterminer un K_s 638
- 35 ■ Prévoir une réaction à partir des diagrammes E -pH 639

