Devoir à la maison

Données :

-Vitesse de la lumière : $c = 3.10^8 m.s^{-1}$

- A une grandeur sinusoïdale $f(t) = F_0.cos(\omega t + \varphi)$, on associe le complexe souligné $\underline{f}(t) = F_0.e^{i.(\omega t+\varphi)}$, avec $i^2 = -1$ et $f(t) = Re(\underline{f}(t))$.

- Formule d'analyse vectorielle pour un vecteur $\overrightarrow{V}$: $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V})$ = $\overrightarrow{grad}(div\overrightarrow{V})$ - $\Delta\overrightarrow{V}$.

- On donne l'intégrale $I = \int \sqrt{1+x^2}.dx = \frac{1}{2}.[x.\sqrt{1+x^2} + Ln(x+\sqrt{1+x^2})]$.

I 1 ère partie : transmission de signaux par voie hertzienne

Une antenne émet une onde électromagnétique qui se propage dans l'atmosphère terrestre ; celle-ci est modélisée schématiquement en une couche d'air assimilé au vide , et d'une couche appelée ionosphère située à l'altitude h=80 km.

L'ionosphère est un plasma électriquement neutre caractérisé par une permittivité diélectrique ε_0 et une perméabilité magnétique μ_0 identiques à celle du vide. Il comporte par unité de volume n électrons libres de charge $q_e = -e$ et n ions de charge $q_e = e$. Les masses de ces deux particules sont notées respectivement m_e et m_i ; on supposera les ions immobiles ($m_i \gg m_e$).

I.1. Donner, dans le cas général, les quatre relations de Maxwell en régime variable.

Une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation ω se propage dans l'ionosphère et son champ électrique est : $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0.cos(\omega t - kz).\overrightarrow{u}_y$.

I.2. A l'aide de la relation Maxwell-Faraday, donner l'expression complexe, $\underline{\overrightarrow{B}}(M,t)$, du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$ associé à l'onde considérée.

I.3. Dans le référentiel terrestre $\Re(OXYZ)$ supposé galiléen, appliquer le principe fondamental de la dynamique à un électron, soumis au champ électromagnétique de l'onde ($\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$). On supposera que tous les électrons ont même vitesse $\overrightarrow{v}$ ($v \ll c$) et on négligera les chocs entre particules.

I.4. Montrer que l'influence du champ magnétique est négligeable devant celle du champ électrique. Dans toute la suite, on suppose que l'électron n'est soumis qu'au seul champ électrique précédent. Déterminer alors le vecteur $\underline{\overrightarrow{v}}$.

I.5. Donner le vecteur densité volumique de courant volumique $\underline{\overrightarrow{j}}$, et en déduire l'expression de la conductivité complexe $\underline{\gamma}$.

I.6. Calculer la puissance moyenne volumique p cédée par le champ électromagnétique au plasma. Commenter.

I.7. En utilisant les relations de Maxwell, établir la relation liant la norme du vecteur d'onde k et la pulsation ω.

On posera $\omega_p^2 = \frac{n.e^2}{m.\varepsilon_0}$, pour l'ionosphère, on donne $\omega_p = 5,65.10^7 rd.s^{-1}$.

I.8. Que se passe-t-il si $\omega < \omega_p$?

Comment s'écrit le champ électrique ? Est-ce une onde progressive ? Conclure.

I.9. On se place dans le cas : $\omega > \omega_p$,

I.9.1. Montrer qu'une onde plane monochromatique peut effectivement se propager dans le plasma.

I.9.2. Donner la représentation graphique du module du vecteur d'onde k en fonction de la pulsation ω.

I.9.3. Donner les expressions de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g. Tracer schématiquement sur le même graphe $v_\varphi(\omega)$ et $v_g(\omega)$.

I.10. On considère deux stations radio émettant sur les longueurs d'ondes $\lambda_1 = 300m$ et $\lambda_2 = 15m$.

I.10.1. Pour quelle longueur d'onde peut-on avoir réflexion par l'ionosphère ? Quel est alors l'avantage attendu ?

I.10.2. Déterminer alors la portée maximale théorique après une réflexion sur l'ionosphère ? Faire un schéma et préciser analogies et approximations utilisées. Faire l'application numérique, sachant que le rayon de la terre est $R_t = 6400km$.

I.11. Dans cette question,on tient compte d'une force de frottement qui s'exerce sur les électrons du plasma : $\overrightarrow{F}_f = -m.\omega_f.\overrightarrow{v}$, où ω_f est une constante positive.

I.11.1. Déterminer l'expression complexe du vecteur densité volumique du courant $\overrightarrow{\underline{j}}$.

I.11.2. Déterminer la nouvelle relation de dispersion.

I.11.3. On se place dans le cas de basses fréquences $\omega^2 \ll \omega_f^2 \ll \omega_p^2$.

Simplifier cette relation et déterminer l'expression complexe du champ électrique de l'onde. Commenter.

CORRIGÉ

I- Transmission de signaux par voie hertzienne

Dans cette partie, la masse de l'électron a été noté par m_e dans certaines questions et par m dans d'autres...finalement j'ai pris $m_e = m$! !

I.1.

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\overrightarrow{E}(M,t) &= \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_o} \quad ; \quad \mathrm{div}\overrightarrow{B}(M,t) = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E}(M,t) &= -\frac{\partial\overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t} \quad ; \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_o\left(\overrightarrow{j}(M,t) + \varepsilon_o\frac{\partial\overrightarrow{E}(M,t)}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

$\rho(M,t)$: densité volumique de charges et $\overrightarrow{j}(M,t)$: vecteur densité de courant volumique.

I.2. En représentation complexe : $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = E_o \exp i(\omega t - kz)\overrightarrow{u}_y$.

Equation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = -\dfrac{\partial\underline{\overrightarrow{B}}(M,t)}{\partial t} = -i\omega\underline{\overrightarrow{B}}(M,t)$, soit :

$$\underline{\overrightarrow{B}}(M,t) = \frac{k}{\omega}\overrightarrow{u}_z \wedge \underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = -\frac{k}{\omega}E_o \exp i(\omega t - kz)\overrightarrow{u}_x$$

I.3. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron dans $\mathcal{R}$:

$$m_e\overrightarrow{g} - e\overrightarrow{E} - e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = m_e\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}$$

$\overrightarrow{g}$ est l'accélération de pesanteur.

I.4. $\overrightarrow{f}_e = -e\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{f}_m = -e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$:

$$\frac{\|\overrightarrow{f}_e\|}{\|\overrightarrow{f}_m\|} = \frac{1}{v}\frac{\|\overrightarrow{E}\|}{\|\overrightarrow{B}\|} = \frac{1}{v}\frac{\omega}{k} \gg 1 \ \text{ car } \ \frac{\omega}{k} = v_\varphi \geq c \ \text{ et } \ v \gg c \quad \Rightarrow \quad \|\overrightarrow{f}_e\| \gg \|\overrightarrow{f}_m\|$$

Le poids étant négligeable devant la force électromagnétique, soit :

$$-e\underline{\overrightarrow{E}} = m_e\frac{\partial\underline{\overrightarrow{v}}}{\partial t} = m_e i\omega\underline{\overrightarrow{v}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\overrightarrow{v}} = \frac{ie}{m_e\omega}\underline{\overrightarrow{E}}$$

I.5. Le vecteur densité de courant : $\underline{\overrightarrow{j}} = \rho_m\underline{\overrightarrow{v}} = -ne\underline{\overrightarrow{v}}$, soient :

$$\underline{\overrightarrow{j}} = -\frac{ine^2}{m_e\omega}\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\gamma}\underline{\overrightarrow{E}} \ \text{ avec } \ \underline{\gamma} = -\frac{ine^2}{m_e\omega}$$

I.6.

$$p = <\overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}>_t = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}^*) = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{\gamma}\|\overrightarrow{E}\|^2) = \frac{E_o^2}{2}\mathcal{R}e(\underline{\gamma})$$

$\mathcal{R}e(X)$ désigne la partie réelle de X ; et $\underline{\gamma}$ est imaginaire : d'où $p = 0$.
<u>Commentaire</u> : l'onde ne communique aucune puissance au milieu (plasma).

I.7. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\overrightarrow{B}} = -i\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{B}} = -ik\underline{B}\overrightarrow{u}_y = +i\frac{k^2}{\omega}\underline{\overrightarrow{E}} \ \text{ (Maxwell-Faraday et structure de } \underline{\overrightarrow{B}}\text{)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\overrightarrow{B}} = \mu_o\underline{\gamma}\underline{\overrightarrow{E}} + i\mu_o\varepsilon_o\omega\underline{\overrightarrow{E}} \ \text{ (Maxwell-Ampère)}$$

Soit, par simple identification, et avec $\mu_o\varepsilon_o c^2 = 1$:

$$i\frac{k^2}{\omega} = \mu_o\underline{\gamma} + i\frac{\omega}{c^2} \qquad \Rightarrow \qquad k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \qquad \text{(équation I-1)}$$

I.8. Si $\omega < \omega_p$:

- k est imaginaire pur : $k = \pm i\dfrac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$ (pas de propagation de l'onde dans le plasma) ;
- Si on considère la propagation suivant les z croissant, la structure possible de $\underline{\overrightarrow{E}}$ est telle que $k = -i\dfrac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$:

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_o \exp(-\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} z) e^{i\omega t} \overrightarrow{u}_y$$

- L'onde n'est pas progressive ;
- <u>Conclusion</u> : L'onde est totalement réfléchie par le plasma.

I.9.

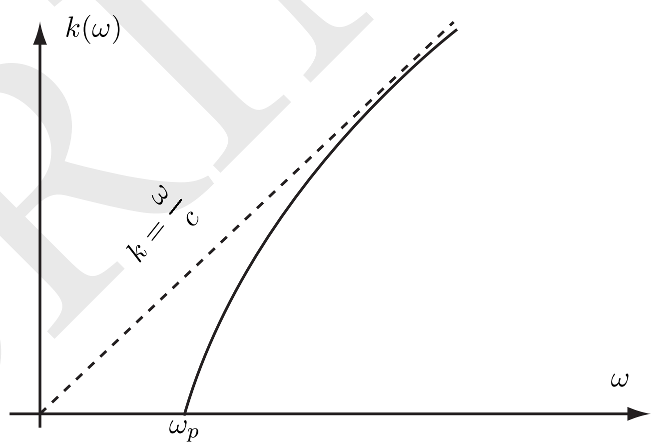
I.9.1. Si $\omega > \omega_p$:

- k est réel : $k = \pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$;
- Si on considère la propagation suivant les z croissant, la structure possible de $\underline{\overrightarrow{E}}$ est telle que $k = +\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$:

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_o \exp i\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} z\right) \overrightarrow{u}_y$$

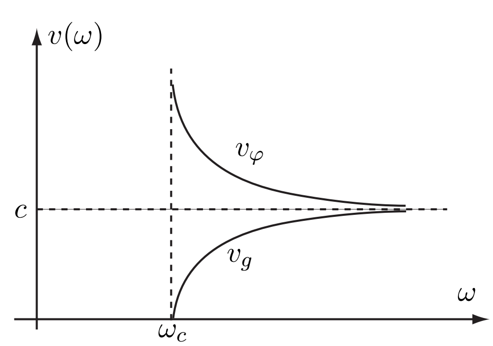
- C'est la structure d'une onde plane progressive qui se propage à la vitesse $\dfrac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$;

I.9.2.



I.9.3.

- Vitesse de phase : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$
- Vitesse de groupe : $v_g = \dfrac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_c^2}}$



I.10.

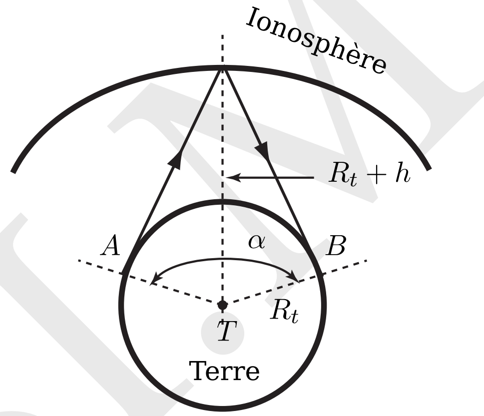
I.10.1. La condition de réflexion par l'ionosphère des ondes émises par les stations radio est $\omega_i < \omega_p$ (Cf. I.8.) ; soit pour une longueur d'onde telle que :

$$\frac{2\pi c}{\lambda} < \omega_p \qquad \text{ou} \qquad \lambda > \frac{2\pi c}{\omega_p}$$

Application numérique : $\lambda > 33,35\,m$. Ce qui correspond à la longueur d'onde $\lambda_1 = 300\,m$.

I.10.2.

On suppose la sphéricité de la terre et que l'espace entre la terre et l'ionosphère est homogène et transparent...
La portée maximale : $\text{arc}(AB) = \alpha R_t$;



$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{R_t}{R_t+h} \\ 1-\frac{\alpha^2}{8} &= 1-\frac{h}{R_t} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{h}{R_t}} \end{aligned}$$

Soit :

$$\text{arc}(AB) \simeq 2\sqrt{2hR_t} \approx 2024\,km$$

I.11. La force de frottement : $\overrightarrow{F}_f = -m_e\omega_f\overrightarrow{v}$.

I.11.1.

▶ Le principe fondamental de la dynamique :

$$m_e\frac{\partial \underline{\overrightarrow{v}}}{\partial t} = -e\underline{\overrightarrow{E}} - m_e\omega_f\,\underline{\overrightarrow{v}}$$

▶ Expression de $\underline{\overrightarrow{v}}$:

$$im_e\omega\,\underline{\overrightarrow{v}} = -e\underline{\overrightarrow{E}} - m_e\omega_f\,\underline{\overrightarrow{v}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\overrightarrow{v}} = -\frac{e\underline{\overrightarrow{E}}}{m(i\omega+\omega_f)}$$

▶ Expression de $\underline{\overrightarrow{j}}$:

$$\underline{\overrightarrow{j}} = -ne\underline{\overrightarrow{v}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\overrightarrow{j}} = \frac{ne^2}{m_e\omega_f}\frac{\underline{\overrightarrow{E}}}{1+i\dfrac{\omega}{\omega_f}}$$

I.11.2. En utilisant le résultat de l'équation I-1 :

$$i\frac{k^2}{\omega} = \frac{ne^2\mu_o}{m_e\omega_f}\frac{1}{1+i\dfrac{\omega}{\omega_f}} + i\frac{\omega}{c^2} \qquad \Rightarrow \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\frac{i\omega}{\omega_f + i\omega}$$

I.11.3. $\omega^2 \ll \omega_f^2 \ll \omega_p^2$:

- Relation de dispersion : $k^2 \simeq -i\dfrac{\omega_p^2}{c^2}\dfrac{\omega}{\omega_f}$;
- Structure de $\underline{\overrightarrow{E}}$: l'expression de k est $k = \pm(1-i)\sqrt{\dfrac{\omega_p^2\omega}{2\omega_f c^2}}$; La solution acceptable physiquement est :

$$k = +(1-i)\sqrt{\frac{\omega_p^2\omega}{2\omega_f c^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\overrightarrow{E}} = E_o\exp\left(-\frac{\omega_p}{c}\sqrt{\frac{\omega}{2\omega_f}}z\right)\exp i\left(\omega t - \frac{\omega_p}{c}\sqrt{\frac{\omega}{2\omega_f}}z\right)\overrightarrow{u}_y$$

○ <u>Commentaire</u> : L'onde dans l'ionosphère a la structure d'une onde plane progressive qui s'atténue après une profondeur de pénétration caractéristique $\delta = \left(\dfrac{c}{\omega_p}\sqrt{\dfrac{2\omega_f}{\omega}}\right)$ au delà de laquelle l'onde est évanescente !