Equations de Maxwell

Table des matières

Nous avons à l'occasion des chapitres précédents étudié le champ électromagnétique statique en le déterminant à partir de lois intégrales. Nous allons à présent nous intéresser au champ électromagnétique en régime variable ; dans ce cadre, nous allons alors reprendre l'électromagnétisme à partir de lois locales qui permettent d'exprimer et d'utiliser le champ électromagnétique variable même en cas de dispositifs disposant de propriétés de symétrie beaucoup moins importantes que ce que nous avons rencontré jusqu'à présent.

I. Equations de Maxwell locales

L'électromagnétisme repose sur quatre équations locales, les équations de Maxwell. Ces équations s'écrivent :

$$\boxed{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ Equation de Maxwell – Gauss

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$ Equation de Maxwell – Faraday

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}$$ Equation de Maxwell – Ampère

$$\boxed{div(\vec{B}) = 0}$$ Equation de Maxwell – Thomson (ou flux)

En régimes dépendant du temps, il existe donc un couplage entre les champs électrique et magnétique : ce couplage apparait dans les équations de Maxwell – Faraday et Maxwell – Ampère.

De plus, $\boxed{\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1}$, avec $c = 299\ 792\ 458\ m.s^{-1}$ la célérité de la lumière.

Rappelons enfin qu'une charge q est soumise à la force de Lorentz :

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

__Remarque :__ les équations de Maxwell – Gauss et Maxwell – Ampère sont liées aux sources (ρ et $\vec{j}$) alors que les équations de Maxwell – Faraday et Maxwell – Thomson ne font intervenir que les champs, indépendamment du milieu.

II. Sources

A. Densité volumique de charge

Nous avons déjà vu que les charges réelles sont des charges volumiques. Elles peuvent être séparées en charges mobiles (électrons, « trous ») et charges fixes (ions). Nous avons alors, en un point M quelconque et à un instant t :

$$\boxed{\rho(M,t) = \rho_m(M,t) + \rho_f(M,t)}$$

Avec ρ_m la densité volumique de charges mobiles et ρ_f la densité volumique de charges fixes.

On peut noter que, pour un matériau électriquement neutre, $\rho_m(M,t) + \rho_f(M,t) = 0$.

B. Densité volumique de courant

Nous avons déjà vu que les courants réels étaient des courants volumiques, notés $\vec{j}$, tels que :

$$\boxed{\vec{j} = \rho_m \vec{v}}$$

C. Equation de conservation de la charge

Cette équation locale fondamentale lie les deux types de sources du champ électromagnétique, ρ et $\vec{j}$. Deux démonstrations sont envisageables.

<u>*Première démonstration :*</u> bilan

Considérons un volume V quelconque de l'espace défini par une surface fermée S. Ce volume contient à l'instant t une charge $q(t)$ et à l'instant $t + dt$ une charge $q(t + dt)$. La variation de la charge totale de ce volume V pendant dt est donc :

$$dq = q(t + dt) - q(t)$$

Cette variation ne peut être due qu'aux déplacements de charges pendant la durée dt, c'est-à-dire qu'elle correspond à la charge ayant traversé la surface S pendant la durée dt, donc $dq = i_{entrant}\, dt$. Or, par définition,

$$i_{sortant} = \oiint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS_{sortant}}$$

De plus, d'après le théorème de Green-Ostrograski

$$\oiint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS_{sortant}} = \iiint_V div(\vec{j})d\tau$$

Par ailleurs, par définition,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\iiint_V \rho(M,t)d\tau\right) = \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau$$

Puisque q (défini de manière globale pour le volume) ne dépend que du temps alors que ρ (défini localement) dépend du temps et de l'espace.

Or $i_{entrant} = -i_{sortant}$ donc

$$\iiint_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\vec{j})\right)d\tau = 0$$

Cette relation étant valable pour tout volume V, nous pouvons en déduire l'***<u>équation de conservation de la charge</u>***,

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\vec{j}) = 0}$$

<u>Deuxième démonstration :</u> par les équations de Maxwell

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit : $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Donc $\rho = \varepsilon_0\, div\,(\vec{E})$. En dérivant par rapport au temps,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial\left(div(\vec{E})\right)}{\partial t}$$

En supposant le champ électrique C^2, il est possible d'inverser les dérivées temporelle et spatiale donc

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0 div\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Or, d'après l'équation de Maxwell-Ampère, $\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{rot}(\vec{B}) - \vec{j}$. Donc

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = div\left(\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = div\left(\frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{rot}(\vec{B}) - \vec{j}\right) = \frac{1}{\mu_0}div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) - div(\vec{j})$$

Or $div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = 0$ (propriété des opérateurs) donc

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{j}) = 0}$$

III. Equations de Maxwell : formes intégrales

A. Théorème de Gauss

L'équation de Maxwell – Gauss s'écrit : $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Considérons un volume V délimité par une surface S fermée. En intégrant sur le volume V, nous pouvons écrire :

$$\iiint_V div(\vec{E}) d\tau = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau$$

Or, d'après le théorème de Green – Ostrogradsky,

$$\iiint_V div(\vec{E}) d\tau = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS_{sortant}}$$

Et, en notant Q_{int} la charge contenue dans le volume V,

$$\iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau = Q_{int}$$

Ce qui mène au théorème de Gauss, toujours valable en régime variable :

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS_{sortant}} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

B. Conservation du flux du champ magnétique

L'équation de Maxwell – Thomson s'écrit : $div(\vec{B}) = 0$.

Considérons un volume V délimité par une surface S fermée. En intégrant sur le volume V, nous pouvons écrire :

$$\iiint_V div(\vec{B})d\tau = 0$$

Or, d'après le théorème de Green – Ostrogradsky,

$$\iiint_V div(\vec{B})d\tau = \oiint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS_{sortant}}$$

Ce qui mène à la conservation du flux de $\vec{B}$, toujours valable en régime variable :

$$\boxed{\oiint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS_{sortant}} = 0}$$

C. Théorème d'Ampère généralisé

En régime variable, l'équation de Maxwell – Ampère s'écrit : $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$.

Au courant volumique s'ajoute donc un terme, appelé ***courant de déplacement***,

$$\boxed{\overrightarrow{j_D} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

L'équation de Maxwell – Ampère devient alors : $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0(\vec{j} + \overrightarrow{j_D})$.

Considérons alors un contour (C) fermé, sur lequel s'appuie une surface (S) ouverte, orientée par l'orientation du contour (C). D'après le théorème de Stokes :

$$\oint_{(C)} \vec{B}.d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}(\vec{B}).d\vec{S} = \iint_{(S)} \mu_0(\vec{j} + \overrightarrow{j_D}).d\vec{S} = \mu_0(I_{int} + I_{Dint})$$

Nous obtenons dont le théorème d'Ampère généralisé :

$$\boxed{\oint_{(C)} \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_0(I_{int} + I_{Dint})}$$

En notant

$$I_{int} = \iint_{(S)} \vec{j}.d\vec{S} \qquad\qquad I_{Dint} = \iint_{(S)} \overrightarrow{j_D}.d\vec{S} = \iint_{(S)} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.d\vec{S}$$

Puisque $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$.

Nous pouvons alors remarquer que ***<u>la variation temporelle du champ électrique constitue une source du champ magnétique, au même titre que les courants</u>***.

<u>Remarques :</u>

- ainsi, un condensateur est alimenté par un courant « réel » mais, entre ses armatures, c'est un courant de déplacement qui existe.
- $\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_{(S)} \vec{E}.d\vec{S}\right) = \frac{\partial \Phi_{\vec{E},(S)}}{\partial t}$, où $\Phi_{\vec{E},(S)}$ est le flux de $\vec{E}$ à travers la surface (S).

D. Loi de Faraday

En régime variable, l'équation de Maxwell – Faraday s'écrit : $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Considérons alors un contour (C) fermé, sur lequel s'appuie une surface (S) ouverte, orientée par l'orientation du contour (C). D'après le théorème de Stokes :

$$\oint_{(C)} \vec{E}.d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}(\vec{E}).d\vec{S} = \iint_{(S)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_{(S)} \vec{B}.d\vec{S}\right) = -\frac{\partial \Phi_{\vec{B},(S)}}{\partial t}$$

Où $\Phi_{\vec{B},(S)}$ est le flux de $\vec{B}$ à travers la surface (S).

$$\boxed{\oint_{(C)} \vec{E}.d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_{\vec{B},(S)}}{\partial t}}$$

Nous pouvons alors remarquer que ***<u>la variation temporelle du champ magnétique constitue une source du champ électrique, au même titre que les charges</u>***.

<u>Remarques :</u>

- La circulation du champ électrique le long d'un contour fermé n'est évidemment pas nulle en régime variable, contrairement au régime permanent.
- On retrouve ici la loi de Faraday vue en première année (induction).
- En conséquence, en régime variable, $\vec{E} \neq -\overrightarrow{grad}(V)$

E. Equations de propagation

1. Champ électrique

En régime variable, l'équation de Maxwell – Faraday s'écrit : $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Donc $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}(\vec{B})}{\partial t}$.

Or l'équation de Maxwell – Ampère s'écrit : $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

Donc $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right) = -\mu_0 \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\right)$

Or $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{E})\right) - \Delta\vec{E} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) - \Delta\vec{E}$ puisque $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Donc $\overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) - \Delta\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ et enfin

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)}$$

__Remarque :__ l'équation de propagation fait intervenir l'opérateur laplacien. Le seul moyen que nous avons rencontré en analyse vectorielle afin de le faire apparaitre est la formule : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{E})\right) - \Delta\vec{E}$. Celle-ci nous impose l'équation de Maxwell à utiliser (Maxwell – Faraday ici) et comment la combiner. Le principe sera le même pour le champ magnétique.

2. Champ magnétique

L'équation de Maxwell – Ampère s'écrit : $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

Donc $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \mu_0 \left(\overrightarrow{rot}(\vec{j}) + \varepsilon_0 \overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\right) = \mu_0 \left(\overrightarrow{rot}(\vec{j}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{rot}(\vec{E})}{\partial t}\right)$

Or $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{B})\right) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$ puisque $div(\vec{B}) = 0$.

Et $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (équation de Maxwell – Faraday).

Donc $-\Delta\vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{rot}(\vec{j}) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ et enfin, en utilisant la relation $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$,

$$\boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overrightarrow{rot}(\vec{j})}$$

IV. Approximation des régimes quasi-stationnaires (magnétique)

A. Hypothèses

Considérons un signal de période T, se propageant à la vitesse c et de durée de propagation $\tau = \frac{r}{c}$ où r est la distance parcourue par l'onde lors de sa propagation pendant une durée τ.

Nous pourrons considérer que nous nous trouvons dans les conditions de l'approximation des régimes quasi-stationnaires si l'***<u>on peut négliger la durée de propagation devant la période du signal</u>***, c'est-à-dire si

$$\boxed{\tau \ll T}$$

Dans ces conditions, $\frac{r}{c} \ll T$ donc $r \ll cT$ c'est-à-dire

$$\boxed{r \ll \lambda}$$

<u>Exemples :</u>

- Si $f = 50\ Hz$, $\lambda = \frac{c}{f} = 6000\ km$
- Si $f = 1\ kHz$, $\lambda = 300\ km$
- Si $f = 5\ GHz$, $\lambda = 6\ cm$

B. Equations de Maxwell dans l'ARQS

Nous venons de voir que $\tau \ll T$ or $\tau = \frac{r}{c}$ donc cela signifie que nous pourrons considérer $c \to \infty$. En conséquence, les équations de Maxwell deviennent :

$$\boxed{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ Equation de Maxwell – Gauss

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$ Equation de Maxwell – Faraday

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \cancel{\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}}$$ Equation de Maxwell – Ampère (seule modifiée)

$$\boxed{div(\vec{B}) = 0}$$ Equation de Maxwell – Thomson (ou flux)

Il est alors possible de reprendre les différentes équations déjà vues pour les adapter à cette nouvelle forme de l'équation de Maxwell – Ampère. Nous pouvons toutefois noter que nous retrouvons le théorème d'Ampère déjà vu en régime permanent.

<u>Remarque :</u> $div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = div(\mu_0 \vec{j})$. Or, par propriété des opérateurs, $div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = 0$ donc $div(\vec{j}) = 0$. En intégrant sur un volume V délimité par une surface S, et par application du théorème de Green-Ostrogradski,

$$0 = \iiint_V div(\vec{j})d\tau = \oiint_S \vec{j}.d\vec{S} = I$$

Nous en déduisons que le courant traversant une surface fermée est nul, ce qui correspond à la ***loi des nœuds***.

Ce résultat se retrouve en tenant compte, qu'en régime quasi-stationnaire, le terme $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ donc $div(\vec{j}) = 0$.

Remarque : il va de soit que cette approximation n'est pas valable si $\vec{j} = \vec{0}$. Dans ce cas, l'équation de Maxwell-Ampère devient $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On parle alors d'ARQS « électrique ».

C. Régimes stationnaires : cas statique

1. Equations de Maxwell

Dans le cas des régimes stationnaires (c'est-à-dire indépendants du temps, le cas statique), les équations de Maxwell deviennent :

$\boxed{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$	Equation de Maxwell – Gauss
$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = 0}$	Equation de Maxwell – Faraday
$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}}$	Equation de Maxwell – Ampère
$\boxed{div(\vec{B}) = 0}$	Equation de Maxwell – Thomson (ou flux)

Les équations de Maxwell – Gauss et Maxwell – flux sont inchangées : le théorème de Gauss est donc le même, de même que la conservation du flux de $\vec{B}$.

En revanche, le théorème d'Ampère en régime stationnaire ne comprend que les courants de conduction (« réels ») et non les courants de déplacement, nuls.

De plus, l'équation de conservation de la charge devient $div(\vec{j}) = 0$, les lignes de courant étant, comme dans l'ARQS, fermées (***loi des nœuds***).

2. Equations de Poisson et Laplace

Nous avons vu, en électrostatique, que $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ et que $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Donc $div\left(-\overrightarrow{grad}(V)\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Or $div\left(\overrightarrow{grad}(V)\right) = \Delta V$. Donc

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$ ***Equation de Poisson***

En l'absence de charges, cette équation devient $\boxed{\Delta V = 0}$, appelée ***équation de Laplace***.

Remarque : l'équation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,(V)$ n'est vraie qu'en régime permanent et en aucun cas, a priori, en régime variable.

V. Loi d'Ohm

A. Forme locale de la loi d'Ohm

Soit un conducteur soumis à un champ électrique $\vec{E}$ (dépendant a priori de la position et du temps) parcouru par des courants caractérisés par le vecteur densité de courant $\vec{j}$. L'expérience montre que pour un grand nombre de conducteurs et de nombreux cas, $\vec{j}$ est proportionnel à $\vec{E}$ et, dans ce cas, nous ***admettrons*** la relation :

$$\boxed{\vec{j} = \gamma\,\vec{E}}$$ Loi d'Ohm locale

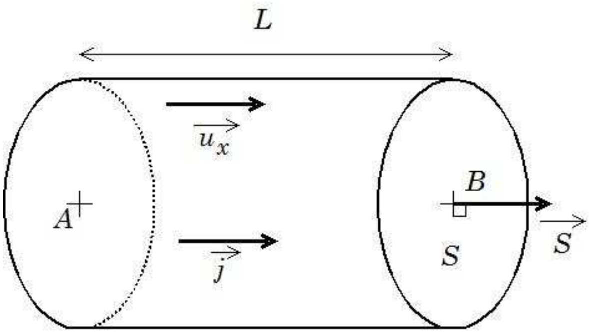
où γ est la ***conductivité électrique*** au point considéré.

Remarques :

- Il existe des milieux conducteurs pour lesquels la loi d'Ohm n'est pas valable (milieu non-ohmique, par exemple la jonction entre semi-conducteurs ou les milieux supraconducteurs) ou est plus compliqué (tenseur de conductivité).
- Les milieux que nous étudierons seront considérés homogènes et donc γ sera le même en tout point du conducteur ohmique.
- Unité de γ : $S.m^{-1}$.

B. Résistance d'un conducteur ohmique

Soit un conducteur cylindrique de base S soumis à un champ électrique $\vec{E}$ et parcouru par des courants caractérisés par le vecteur densité de courant $\vec{j}$. On suppose la loi d'Ohm valable et nous nous placerons en régime ***indépendant du temps***.



Dans ce conducteur règne une densité volumique de courant $\vec{j}$ que nous pouvons considérer uniforme, la section du conducteur étant constante et les pertes de courant latérales absentes. Comme la loi d'Ohm est supposée valable, le champ électrique est lui aussi uniforme.

On note I le courant circulant dans le conducteur, de A vers B.

Par définition, $\vec{j}$ étant colinéaire à $d\vec{S}$ et uniforme sur S,

$$I = \iint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \iint_S j\, dS = \iint_S j\, dS = j \iint_S dS = jS = \gamma SE$$

D'autre part :

$$U_{AB} = V_A - V_B = -\int_{V_A}^{V_B} dV = -\int_A^B \overrightarrow{grad}(V).d\overrightarrow{OM} = \int_A^B \vec{E}.d\overrightarrow{OM} = \int_A^B E.dOM = E\int_A^B dOM = EL$$

Or, par définition, la résistance R d'un conducteur est égale à $R = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{EL}{jS} = \frac{EL}{\gamma ES}$.

Donc $\boxed{R = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}}$.

γ s'exprime en $S.m^{-1}$.

__Remarque :__ on définit la résistivité ρ (à ne pas confondre avec la densité volumique de charge) du matériau par $\rho = \frac{1}{\gamma}$. (unité : $\Omega.m$)

__Ordre de grandeur :__

- dans les métaux, γ est de l'ordre de $10^7\ m.s^{-1}$, la valeur dépendant beaucoup du taux d'impuretés.
- dans les électrolytes, γ est de l'ordre de $10^2\ m.s^{-1}$.
- dans les semi-conducteurs, γ est de l'ordre de 10^{-4} à $10^{-6}\ m.s^{-1}$ suivant l'état de dopage.
- dans les isolants, γ est de l'ordre de $10^{-10}\ m.s^{-1}$.

C. Effet Joule

Déterminons la puissance totale P_{tot} dissipée par effet joule dans le conducteur précédent en fonction de ses dimensions, de γ et de E.

Nous avons vu en électrocinétique que la puissance dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique vaut : $P_{tot} = RI^2 = \frac{U^2}{R}$

Or nous avons vu précédemment que $U = EL$ et $R = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}$

Donc $P_{tot} = \gamma \frac{S}{L} E^2 L^2 = SL\,\gamma\, E^2$

Nous pouvons alors en déduire l'expression de la ***puissance volumique***, P_{vol}, en fonction de j et E : la puissance volumique est la ***puissance dissipée par unité de volume***, c'est-à-dire le rapport de la puissance totale sur le volume, donc $P_{vol} = \frac{P_{tot}}{SL} = \gamma E^2 = j\ E = \vec{j}.\vec{E}$

$$\boxed{P_{vol} = \vec{j}.\vec{E}}$$

VI. Energie du champ électromagnétique

A. Bilan énergétique et théorème de Poynting

Considérons une surface S fermée délimitant un volume V au sein duquel règne un champ électromagnétique. Notons ***W l'énergie électromagnétique totale du volume V et w sa densité volumique***.

Le champ électromagnétique exerce des forces (de Lorentz) sur les particules présentes dans le volume V : il y a des échanges énergétiques par transfert à la matière. Par ailleurs, un champ électromagnétique transporte de l'énergie (voir, par exemple, l'énergie rayonnée par le soleil).

Réalisons un bilan énergétique sur le volume V pendant un intervalle de temps dt :

[Variation de W] + [Energie des forces transférée à la matière pendant un intervalle de temps dt] + [Energie rayonnée pendant un intervalle de temps dt] = 0

Ce qui se traduit mathématiquement, en notant $P_t$la puissance transmise à la matière et P_r la puissance rayonnée, par :

$$dW + P_t dt + P_r dt = 0$$

$$\frac{dW}{dt} + P_t + P_r = 0$$

Intéressons-nous à chaque terme pris séparément :

- $P_t = \iiint_V \vec{v}.d\vec{f} = \iiint_V \vec{v}.dq_m(\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E})$, expression dans laquelle $d\vec{f}$ est la force exercée sur un volume $d\tau$, portant une charge mobile $dq_m = \rho_m\, d\tau$, par le champ électromagnétique (par définition, les charges fixes sont…fixes et, donc, leur vitesse est nulle et, donc, la puissance qui leur est transmise aussi). Or $\vec{v}.(\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$ donc $P_t = \iiint_V \vec{v}.\vec{E} dq_m$. Or $dq_m = \rho_m d\tau$ et $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$ donc $P_t = \iiint_V \vec{j}.\vec{E} d\tau$. Le champ magnétique n'intervient évidemment pas puisque la composante magnétique de la force de Lorentz ne communique pas d'énergie à la matière (cf. cours de PTSI). Nous pouvons alors noter que la puissance volumique transférée à la matière par la force de Lorentz a pour expression $\vec{j}.\vec{E}$: nous retrouvons alors la puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur.

- La puissance P_r est une puissance rayonnée à travers la surface S, il s'agit donc d'un flux. Nous ne connaissons cependant pas le vecteur responsable de ce flux et le noterons $\vec{\pi}$ (il est parfois aussi noté $\vec{R}$ ou $\vec{S}$) et l'appellerons ***vecteur de Poynting***. Nous pouvons alors écrire, en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\boxed{P_r = \oint\!\!\oint_S \vec{\pi} d\overrightarrow{S_{sortant}} = \iiint_V div(\vec{\pi}) d\tau}$$

- Pour finir, $W = \iiint_V w d\tau$ donc $\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\iiint_V w\, d\tau\right) = \iiint_V \frac{\partial w}{\partial t} d\tau$ (la dérivée temporelle droite devient une dérivée partielle, w pouvant dépendre de l'espace).

L'équation issue du bilan devient alors :

$$\iiint_V \frac{\partial w}{\partial t} d\tau + \iiint_V div(\vec{\pi}) d\tau + \iiint_V \vec{j}.\vec{E} d\tau = 0$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial w}{\partial t} + div(\vec{\pi}) + \vec{j}.\vec{E}\right) d\tau = 0$$

Cette intégrale étant nulle ***pour tout volume V***, on peut en déduire :

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + div(\vec{\pi}) + \vec{j}.\vec{E} = 0}$$

Cette égalité traduit le ***bilan énergétique local et est appelée théorème de Poynting***.

B. Vecteur de Poynting

Afin de déterminer l'expression du vecteur de Poynting, retrouvons cette équation par les équations locales de l'électromagnétisme (équations de Maxwell). L'équation de Maxwell – Ampère s'écrit : $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Multiplions scalairement cette égalité par le vecteur $\vec{E}$, afin de faire apparaitre le produit scalaire $\vec{j}.\vec{E}$:

$$\vec{E}.\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}.\vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\vec{E} = \mu_0(\vec{j}.\vec{E}) + \mu_0 \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)}{\partial t}$$

Exprimons d'autre part $\vec{B}.\overrightarrow{rot}(\vec{E})$ grâce à l'équation de Maxwell – Faraday :

$$\vec{B}.\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\vec{B} = -\mu_0 \frac{\partial\left(\frac{1}{2\mu_0}B^2\right)}{\partial t}$$

Or $div(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{rot}(\vec{E}) - \vec{E}.\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial\left(\frac{1}{2\mu_0}B^2\right)}{\partial t} - \mu_0(\vec{j}.\vec{E}) - \mu_0 \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)}{\partial t}$.

Donc $\frac{\partial\left(\frac{1}{2\mu_0}B^2+\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)}{\partial t} + div\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) + \vec{j}.\vec{E} = 0$.

En identifiant les différents termes avec l'expression précédente,

$$div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial(w)}{\partial t} + \vec{j}.\vec{E} = 0$$

$$\boxed{w = \frac{1}{2\mu_0}B^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

$$\boxed{\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}$$

Par ailleurs, la densité volumique d'énergie peut être décomposée en :

- ***<u>densité volumique d'énergie électrique</u>*** : $\boxed{w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$
- ***<u>densité volumique d'énergie magnétique</u>*** : $\boxed{w_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2}$

Nous pouvons alors écrire $\boxed{w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2}$.

Le vecteur de Poynting est le vecteur qui transporte l'énergie électromagnétique : il correspond à une puissance rayonnée par unité de surface. En conséquence, la puissance rayonnée à travers une surface quelconque peut s'écrire :

$$\boldsymbol{P_r = \iint_S \vec{\pi}.d\vec{S}}$$