Cinématique du point matériel

Avant d'attaquer le corps de ce cours, intéressons nous déjà à en définir les contours : la cinématique est 'étude des mouvements indépendamment des causes que les produisent, contrairement à la dynamique qui s'attache aux causes des mouvements et à leur prédictibilité. Par ailleurs, nous ne nous intéresserons ici qu'à la cinématique du point matériel, point géométrique (qui peut être associé à un système de corps) dont la position est parfaitement déterminée par la donnée de trois paramètres scalaires et auquel est associé un scalaire caractérisant son inertie, appelé masse.

I. Repérage d'un point dans l'espace et le temps

A. Notion de mouvement et de référentiel

Un référentiel est un repère, lié à un observateur muni d'une horloge (c'est-à-dire d'un moyen de mesurer le temps).

La notion de mouvement n'a aucun caractère absolu et est liée au référentiel dans lequel ce mouvement est étudié.

B. Temps absolu

En mécanique newtonienne, nous supposerons que le temps est indépendant du référentiel d'étude, c'est-à-dire que deux observateurs liés à deux référentiels différents peuvent attribuer les mêmes dates aux mêmes événements et constatent la même durée entre deux événements identiques.

C. Trajectoire

Soit un point M en mouvement par rapport à un référentiel donné.

On appelle trajectoire l'ensemble des positions successives occupées par le pont M dans le référentiel d'étude.

La trajectoire est généralement orientée dans le sens du mouvement.

On appelle abscisse curviligne (notée s) la longueur de trajectoire comprise entre une position donnée (considérée comme initiale) et la position de M à un instant donné.

En théorie, l'équation horaire du mouvement est l'expression de l'abscisse curviligne en fonction du temps. Dans la pratique l'équation horaire du mouvement du point M sera l'expression de ses coordonnées en fonction du temps, donnée généralement beaucoup plus exploitable que l'abscisse curviligne.

D. Longueur de trajectoire

Exprimons la longueur d'une trajectoire (L) en fonction de l'évolution des coordonnées du point M au cours du temps entre les instants t_0 et t_1. La longueur de la trajectoire entre deux instant correspond à la distance parcourue par le point matériel entre ces deux instants.

La longueur de trajectoire correspond, par définition, à la différence d'abscisse curviligne entre les instants t_0 et t_1

$$L = s(t_1) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \overrightarrow{M(t_0)M(t_1)} \right\| = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \overrightarrow{OM(t_1)} - \overrightarrow{OM(t_0)} \right\| = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \overrightarrow{dOM} \right\|$$

Or, $\overrightarrow{dOM} = dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z} = dr\,\overrightarrow{u_r} + r\,d\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + dz\,\overrightarrow{u_z}$

Donc $\left\|\overrightarrow{dOM}\right\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(dr)^2 + (r\,d\theta)^2 + (dz)^2}$

Donc

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(dr)^2 + (r\,d\theta)^2 + (dz)^2}$$

Il va de soit que la détermination complète de la distance parcourue n'est possible que si l'équation horaire du mouvement est connue.

II. Vecteur vitesse

A. Définition

Par définition :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

Remarques :

- Il va de soit que, tout comme la trajectoire la vitesse est définie dans un référentiel donné et dépend du référentiel.
- La vitesse est toujours tangente à la trajectoire.
- Un point et immobile si sa vitesse est constamment nulle et non si elle s'annulle en un instant donné.

- Le mouvement est rectiligne si la direction de la vitesse est constante.
- Le mouvement est uniforme si la norme de la vitesse est constante.

B. Composantes en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes,

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\overrightarrow{u_x} + x\,\frac{d\overrightarrow{u_x}}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\overrightarrow{u_y} + y\,\frac{d\overrightarrow{u_y}}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\overrightarrow{u_z} + z\,\frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt}$$

Or les vecteurs $\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ sont constants donc $\frac{d\overrightarrow{u_x}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_y}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt} = \vec{0}$.

De plus, on note fréquemment la dérivée temporelle d'une fonction en surmontant celle-ci d'un point (par exemple, $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$).

Donc

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dx}{dt}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{dy}{dt}\,\overrightarrow{u_y} + \frac{dz}{dt}\,\overrightarrow{u_z} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$$

C. Composantes en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques,

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\overrightarrow{u_z} + z\,\frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt}$$

Or $\frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt} = \vec{0}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

Donc

$$\boxed{\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}}}$$

III. Vecteur accélération

A. Définition

Par définition, dans un référentiel donné :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$

<u>*Remarques :*</u>

- Le mouvement est dit :
  - accéléré si $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} > 0$
  - décéléré si $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} < 0$
  - uniforme $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0$
- On peut montrer que le mouvement est :
  - accéléré si $\vec{a}.\vec{v} > 0$
  - décéléré si $\vec{a}.\vec{v} < 0$
  - uniforme $\vec{a}.\vec{v} = 0$

B. Composantes en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes,

$\vec{v} = \ \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$

Or $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Donc, en dérivant à nouveau cette expression, on obtient :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\overrightarrow{u_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\overrightarrow{u_z} = \ddot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$$

C. Composantes en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques,

$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$

Or $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Donc, en dérivant à nouveau cette expression, on obtient :

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\,\overrightarrow{u_r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\overrightarrow{u_z}$$

Or $\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_r}$

Donc

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\,\overrightarrow{u_r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\left(-\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_r}\right) + \frac{d^2z}{dt^2}\,\overrightarrow{u_z}$$

D'où

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$$

Remarque : $\boxed{r\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}\right)}$

IV. Mouvements particuliers

A. Mouvement à accélération constante

Soit un mouvement à accélération constante, $\vec{a}$.

Nous supposerons qu'à l'instant initial, le point matériel se trouve en un point quelconque noté M_0 avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$.

Déterminons l'équation horaire du mouvement.

Nous pouvons choisir le repère tel que $\vec{a} = a\,\overrightarrow{u_x}$, avec $a > 0$.

Nous pouvons alors choisir $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ n'importe comment, à la condition que le trièdre $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ soit orthonormé direct.

Dans ces conditions, notons (x_0, y_0, z_0) les coordonnées initiales de M_0 et (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) les composantes de la vitesse initiale de M_0 suivant les trois axes choisis.

On a alors, en coordonnées cartésiennes : $\begin{cases} \ddot{x} = a \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$

Pour déterminer l'équation horaire du mouvement, nous allons intégrer ces équations deux fois par rapport au temps :

$$\begin{cases} \dot{x} = at + v_{x0} \\ \dot{y} = v_{y0} \\ \dot{z} = v_{z0} \end{cases}$$

Puis :

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_{x0}t + x_0 \\ y = v_{y0}t + y_0 \\ z = v_{z0}t + z_0 \end{cases}}$$

Exemple : soit un point matériel de masse m lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur h. En choisissant $\overrightarrow{u_x}$ vertical descendant (donc $x_0 = -h$ en choisissant l'origine au sol), nous montrerons au chapitre suivant que :

$$\begin{cases} \ddot{x} = g \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Donc, en intégrant deux fois par rapport au temps,

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{2}gt^2 - h \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$$

B. Mouvement rectiligne sinusoïdal

Soit un point M astreint à se déplacer sur un axe Ox tel que son mouvement soit décrit par l'équation $x(t) = X_m\, cos(\omega t + \varphi)$ où ω est la pulsation$\left(\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\right)$, X_m l'amplitude (réel positif) et φ la phase à l'origine ($\omega t + \varphi$ est la phase).

On a alors, en dérivant par rapport au temps :

- $\dot{x}(t) = -\omega X_m\, sin(\omega t + \varphi)$
- $\ddot{x}(t) = -\omega^2 X_m\, cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2\, x(t)$

Donc cela signifie que $x(t)$ vérifie l'équation différentielle $\ddot{x}(t) + \omega^2\, x(t) = 0$.

Réciproquement, si $x(t)$ vérifie l'équation différentielle $\ddot{x}(t) + \omega^2\, x(t) = 0$, alors $x(t)$ peut se mettre sous la forme : $x(t) = X_m\, cos(\omega t + \varphi)$ où X_m et φ sont alors des constantes déterminées par les conditions initiales.

Remarque : $\frac{\dot{x}^2(t)}{\omega^2} + x^2(t) = X_m^2$

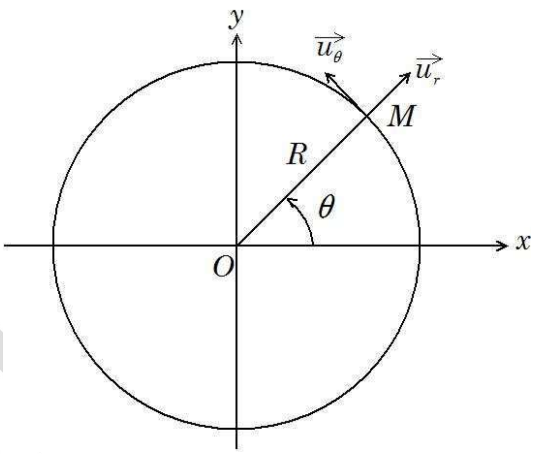
C. Mouvement circulaire

Soit un point matériel M astreint à se déplacer sur un cercle de centre O, de rayon R et d'axe (Oz).

Déterminons la vitesse et l'accélération de M.

Compte-tenu de la symétrie du problème, les coordonnées polaires s'imposent.

Choisissons l'axe polaire tel que, à l'instant initial, $\theta(0) = 0$.



$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{u_r}$

Dérivons par rapport au temps pour déterminer la vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dR}{dt}\,\overrightarrow{u_r} + R\,\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}$$

Or $\frac{dR}{dt} = 0$ et $\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{}\,\overrightarrow{u_\theta}$

Donc $\boxed{\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$

On appelle $\dot{\theta}$ (souvent notée ω) la ***<u>vitesse angulaire</u>***.

Dérivons à nouveau par rapport au temps pour déterminer l'accélération :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

Si le mouvement est uniforme (vitesse constante donc vitesse angulaire aussi donc $\ddot{} = 0$), alors $\vec{a} = -R\,\dot{}^{2}\overrightarrow{u_r}$: l'accélération est centripète.

Table des matières