

Методы численного дифференцирования

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ, ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЯ

Цель работы: сформировать практические навыки анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования и использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов численной аппроксимации производных и обоснования выбора алгоритма аппроксимации.

Задачи: изучить методы аппроксимации производных, методы оценки точности аппроксимации, методы повышения точности аппроксимации, количественные характеристики методов, написать программы, указанные в вариантах.

Результатами работы являются:

Созданные в любой среде программирования функции

Сохраненные в файлах скрипты, тестовые входные данные и полученные выходные данные

Подготовленный отчет

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Численное дифференцирование

Формулы для численного вычисления производных важны в разработке алгоритмов при вычислении граничных значений в задачах, связанных с обычными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями частных производных. Часто в обычных примерах численного дифференцирования используются такие известные функции, что их численное приближение можно сравнивать с точным ответом. Для иллюстрации возьмем функцию Бесселя (Bessel) $J_1(x)$, таблицы значений которой можно найти в <https://infotables.ru/matematika/777-funktsii-besselya>. Восемь равностоящих точек из интервала $[0; 7]$ – это $(0; 0,0000)$, $(1; 0,4400)$, $(2; 0,5767)$, $(3; 0,3391)$, $(4; -0,0660)$, $(5; -0,3276)$, $(6; -0,2767)$ и $(7; -0,004)$. Основным принципом является дифференцирование интерполяционного полинома. Сосредоточим внимание на нахождении $J_1'(2)$. Интерполяционный полином $p_2(x) = -0,0710 + 0,6982x - 0,1872x^2$ проходит через точки $(1; 0,4400)$, $(2; 0,5767)$, $(3; 0,3391)$, и используется для получения $J_1'(2) \approx p_2'(2) = -0,0505$. Этот квадратичный полином $p_2(x)$ и касательная к нему линия в точке $(2; J_1(2))$ показаны на [рис. 1\(а\)](#). Если взять для интерполирования пять точек, то можно получить лучшее приближение. Полином $p_4(x) = 0,4986x + 0,011x^2 - 0,0813x^3 + 0,0116x^4$ проходит через точки $(0; 0,0000)$, $(1; 0,4400)$, $(2; 0,5767)$, $(3; 0,3391)$ и $(4; -0,0660)$ и используется для получения $J_1'(2) \approx p_4'(2) = -0,0618$. Полином четвертой степени $p_4(x)$ и касательная к нему линия в точке $(2; J_1(2))$ показаны на [рис 1\(б\)](#). истинное значение производной равно $J_1'(2) = -0,0645$ и ошибки в $p_2(x)$ и $p_4(x)$ равны $-0,0140$ и $-0,0026$ соответственно. В этой главе приведены основы теории, необходимой для изучения точности численного дифференцирования.

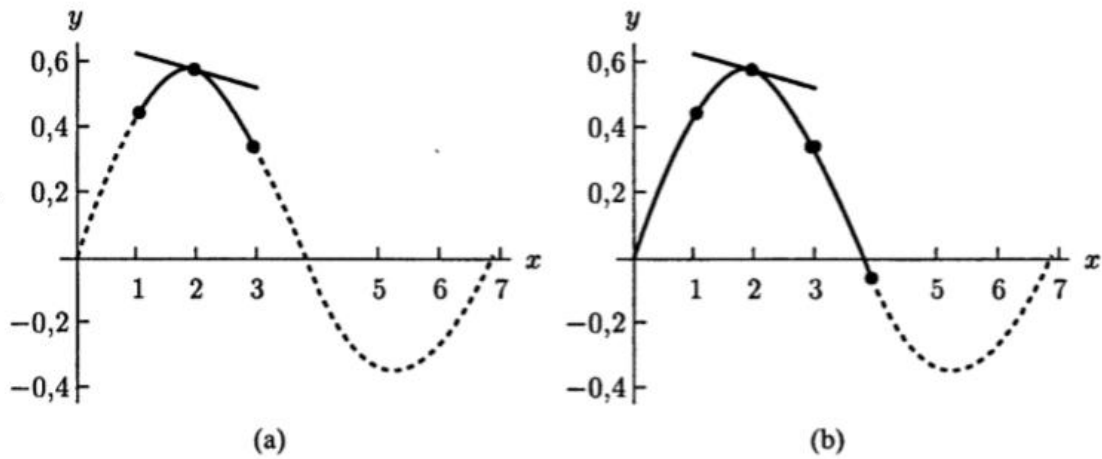


Рис. 1. (a) Касательная к $p_2(x)$ в точке $(2; 0,5767)$ с наклоном $p_2'(2) = -0,0505$. (b) Касательная $p_4(x)$ в точке $(2; 0,5767)$ с тангенсом угла наклона $p_4'(2) = -0,0618$

1. Приближение производной

Предел отношения приращений

Рассмотрим численный процесс приближения производной $f'(x)$:

$$(1) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Метод выглядит просто – выбираем последовательность $\{h_k\}$ так, что $h_k \rightarrow 0$, и вычисляем ее предел:

$$(2) \quad D_k = \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} \text{ для } k = 1, 2, \dots, n, \dots$$

Вычисляться будет только конечное количество членов D_1, D_2, \dots, D_N последовательности (2); значит, для ответа следует использовать D_N . Часто спрашивают: «Почему вычисляют D_1, D_2, \dots, D_{N-1} ?». Аналогично можно задать вопрос: «Почему следует выбирать значение h_N , чтобы D_N было хорошим приближением к производной $f'(x)$?». Чтобы ответить на этот вопрос, нужно рассмотреть пример, который показывает, почему не существует простого решения.

Для примера рассмотрим функцию $f(x) = e^x$ и используем длину шагов, равную $h = 1, 1/2$ и $1/4$, чтобы построить секущую линию, которая проходит между точками $(0; 1)$ и $(h; f(h))$ соответственно. Так как h уменьшается, то секущая приближается к касательной, как показано на [рис. 2](#). На этом рисунке хорошо виден процесс, описанный в (1). Нужно произвести вычисления при $h = 0,00001$, чтобы получить приемлемый численный ответ, и для этого значения h графики касательной и секущей должны быть неразличимы.

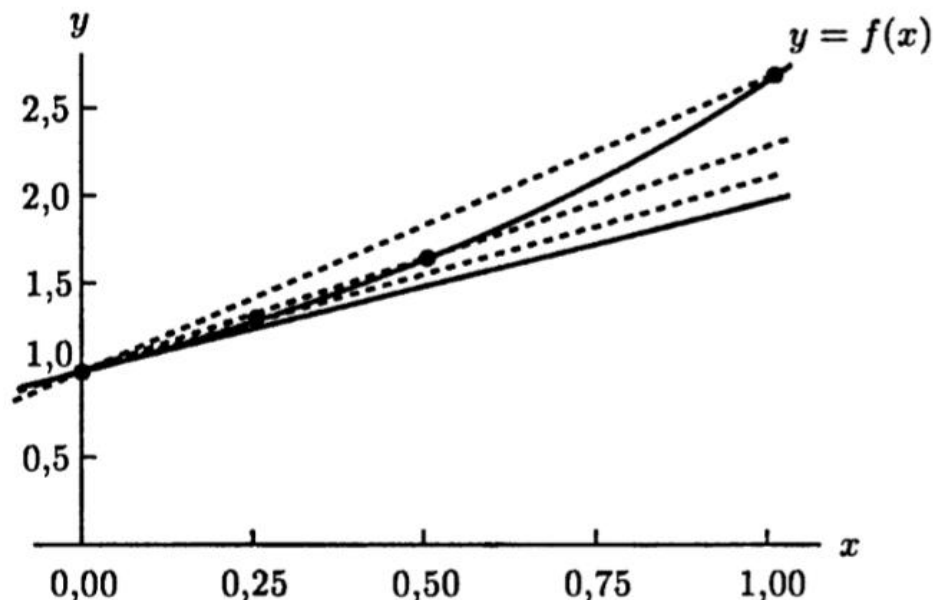


Рис. 2. Несколько секущих линий для $y = e^x$

Пример 1. Пусть $f(x) = e^x$ и $x = 1$. Вычислим отношение приращений D_k , используя длину шага $h_k = 10^{-k}$ для $k = 1, 2, \dots, 10$. Все вычисления выполнены с девятью десятичными знаками.

Ниже приведена таблица значений $f(1+h_k)$ и $(f(1+h_k) - f(1))/h_k$, которые использовались для вычислений D_k (табл. 1).

Наибольшее значение $h_1 = 0,1$ не дает хорошего приближения $D_1 \approx f'(1)$, потому что длина шага h_1 слишком велика и разностное отношение равно тангенсу угла наклона касательной, проходящей через две точки, которые недостаточно близки одна к другой. Когда формула (2) используется с фиксированной точностью, равной девяти десятичным знакам, h_9 дает приближение $D_9 = 3$ и $h_{10} - D_{10} = 0$. Если h_k слишком мало, то вычисленные значения функции $f(x+h_k)$ и $f(x)$ очень близки. Разность $f(x+h_k) - f(x)$ может служить демонстрацией потери точности при вычитании почти равных значений. $h_{10} = 10^{-10}$ так мала, что значения $f(x+h_{10})$ и $f(x)$ не изменяются, и поэтому отношение приращений равно нулю. В примере 1 математическое значение предела равно $f'(1) \approx 2,718281828$. Отметим, что значение $h_5 = 10^{-5}$ дает наилучшее приближение $D_5 = 2,7183$.

Таблица 1. Определение отношения приращений $D_k = (e^{1+h_k} - e) / h_k$

h_k	$f_k = f(1+h_k)$	$f_k - e$	$D_k = (f_k - e) / h_k$
$h_1 = 0,1$	3,004166024	0,285884196	2,858841960
$h_2 = 0,01$	2,745601015	0,027319187	2,731918700
$h_3 = 0,001$	2,721001470	0,002719642	2,719642000
$h_4 = 0,0001$	2,718553670	0,000271842	2,718420000
$h_5 = 0,00001$	2,718309011	0,000027183	2,718300000
$h_6 = 10^{-6}$	2,718284547	0,000002719	2,719000000
$h_7 = 10^{-7}$	2,718282100	0,000000272	2,720000000
$h_8 = 10^{-8}$	2,718281856	0,000000028	2,800000000
$h_9 = 10^{-9}$	2,718281831	0,000000003	3,000000000
$h_{10} = 10^{-10}$	2,718281828	0,000000000	0,000000000

В [примере 1](#) показано, что не так просто найти численный предел выражения (2). Последовательность начинает сходиться к e , и D_5 является ближайшим значение; затем члены последовательности удаляются от e . При программировании члены последовательности $\{D_k\}$ следует вычислять только до выполнения неравенства $|D_{N+1} - D_N| \geq |D_N - D_{N+1}|$. Это попытка определить наилучшее приближение прежде, чем члены последовательности начнут удаляться от предела. Если применить этот критерий в [примере 1](#), то получится $0,0007 = |D_6 - D_5| > |D_5 - D_4| = 0,00012$, поэтому и выбран ответ D_5 . А сейчас приступим к усовершенствованию формулы, которая даст приемлемую точность для больших значений h .

Формула центральной разности

Если функцию $f(x)$ можно вычислить для значений, которые лежат слева и справа от x , то наилучшая двухточечная формула будет содержать абсциссы, которые выбраны симметрично относительно x .

Теорема 1. (центрированная формула порядка $O(h^2)$). Предположим, что $f \in C^3[a; b]$ и что $x - h, x, x + h \in [a; b]$. Тогда

$$(3) \quad f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Более того, существует такое число $c = c(x) \in [a; b]$, что

$$(4) \quad f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + E_{\text{усеч}}(f, h),$$

Где «усеч» - это усечения:

$$E_{\text{усеч}}(f, h) = -\frac{h^2 f^{(3)}(c)}{6} = O(h^2).$$

Член $E(f, h)$ называется *ошибкой усечения*.

Доказательство. Начнем с разложения Тейлора второго порядка $f(x) = P_2(x) + E_2(x)$ в окрестности точки x для $f(x+h)$ и $f(x-h)$:

$$(5) \quad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(c_1)h^3}{3!}$$

И

$$(6) \quad f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} - \frac{f^{(3)}(c_1)h^3}{3!}.$$

Затем (6) вычтем из (5), в результате чего получим

$$(7) \quad f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{((f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2))h^3}{3!}.$$

Так как $f^{(3)}(x)$ непрерывна, можно воспользоваться теоремой о промежуточном значении, чтобы найти такое значение c , что

$$(8) \quad \frac{f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2)}{2} = f^{(3)}(c).$$

Можно подставить это выражение в (7) и перегруппировать члены так, чтобы получить

$$(9) \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f^{(3)}(c)h^2}{3!}.$$

Первый член в правой части (9) – формула (3) центральной разности, второй член – это усеченная ошибка. Таким образом, теорема доказана.

Предположим, что значение третьей производной $f^{(3)}(c)$ не слишком быстро изменяется, тогда усеченная ошибка в (4) стремится к нулю таким же образом, как и h^2 , что выражено в обозначении

$O(h^2)$. Когда вычисления выполняются на компьютере, то нежелательно, чтобы h выбиралось слишком малым. По этой причине полезно иметь формулу для приближения $f'(x)$, ошибка усечения которой имеет порядок $O(h^4)$.

Теорема 2 (центрированная формула порядка $O(h^4)$). Предположим, что $f \in C^5[a; b]$ и что $x - 2h, x - h, x, x + h, x + 2h \in [a; b]$. Тогда

$$(10) \quad f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}.$$

Более того, существует такое число $c = c(x) \in [a; b]$, что

$$(11) \quad f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + E_{\text{усеч}}(f, h),$$

где

$$E_{\text{усеч}}(f, h) = \frac{h^4 f^{(5)}(c)}{30} = O(h^4).$$

Доказательство. Следующий метод является одним из способов получения формулы (10). Начнем с разности между разложениями в ряд Тейлора до четвертой степени $f(x) = P_4(x) + E_4(x)$ в окрестности точки $x - f(x+h)$ и $f(x-h)$:

$$(12) \quad f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{2f^{(3)}(x)h^3}{3!} + \frac{2f^{(5)}(c_1)h^5}{5!}.$$

Затем возьмем длину шага, равную $2h$, вместо h , и запишем следующее приближение:

$$(13) \quad f(x+2h) - f(x-2h) = 4f'(x)h + \frac{16f^{(3)}(x)h^3}{3!} + \frac{64f^{(5)}(c_2)h^5}{5!}.$$

После этого умножаем члены выражения (12) на 8 и вычитаем из него (13). Члены, содержащие $f^{(3)}(x)$, будут исключены, и мы получим

$$-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h) = 12f'(x)h + \frac{(16f^{(5)}(c_1) - 64f^{(5)}(c_2))h^5}{120} \quad (14)$$

Если $f^{(5)}(x)$ не меняет знак и если его значения медленно изменяются, то можно найти такое значение c , которое лежит на интервале $[x - 2h; x + 2h]$, что

$$(15) \quad 16f^{(5)}(c_1) - 64f^{(5)}(c_2) = -48f^{(5)}(c).$$

Затем (15) подставляем в (14) и получаем в результате решение для $f'(x)$

$$(16) \quad f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + \frac{f^{(5)}(c)h^4}{30}.$$

Первый член в правой части (16) является формулой центрированной разности (10), а второй – ошибки усечения. Теорема доказана.

Предположим, что $|f^{(5)}(c)|$ ограничено для $c \in [a; b]$, тогда усеченная ошибка в (11) стремится к нулю таким же образом, как и h^4 , что выражено в обозначении $O(h^4)$. Теперь можно сравнить формулы (3) и (10). Предположим, что $f(x)$ имеет пять непрерывных производных и что $|f^{(3)}(c)|$ и $|f^{(5)}(c)|$ приблизительно одинаковы. Тогда ошибка усечения для формулы (10) равна $O(h^4)$ и стремится к нулю быстрее, чем ошибка усечения $O(h^2)$ для формулы второго порядка (3). Это позволяет использовать шаг большей длины.

Пример 2. Пусть $f(x) = \cos(x)$

(а) Используем формулы (3) и (10) с длиной шага $h = 0,1; 0,01; 0,001$ и $0,0001$ и вычислим приближения для $f'(0,8)$. Все вычисления выполняем с девятью десятичными знаками.

(б) Сравним с истинным значением $f'(0,8) = -\sin(0,8)$.

Таблица 2. Численное дифференцирование, в котором используются формулы (3) и (10)

Длина шага	Приближение по формуле (3)	Ошибка при формуле (3)	Приближение по формуле (10)	Ошибка при формуле (10)
0,1	-0,716161095	-0,001194996	-0,717353703	-0,000002389
0,01	-0,717344150	-0,000011941	-0,717356108	0,000000017
0,001	-0,717356000	-0,000000091	-0,717356167	0,000000076
0,0001	-0,717360000	-0,000003909	-0,717360833	0,000004742

(а) Используя формулу (3) с шагом $h = 0,01$, получим

$$f'(0,8) \approx \frac{f(0,81) - f(0,79)}{0,02} \approx \frac{0,689498433 - 0,703845316}{0,02} \approx -0,717344150.$$

Если использовать формулу (10) с шагов $h = 0,01$, то

$$\begin{aligned} f'(0,8) &\approx \frac{-f(0,82) + 8f(0,81) - 8f(0,79) + f(0,78)}{0,12} \approx \\ &\approx \frac{-0,682221207 + 8(0,689498433) - 8(0,703845316) + 0,710913538}{0,12} \approx \\ &\approx -0,717356108 \end{aligned}$$

(б) Ошибка приближения для формул (3) и (10) оказывается равной $-0,000011941$ и $0,000000017$ соответственно. В этом примере формула (10), когда шаг $h = 0,01$, дает лучшее приближение к $f'(0,8)$, чем формула (3). Проанализировав ошибки, можно будет объяснить этот пример и показать, почему так получается. Остальные вычисления представлены в табл. 2.

Анализ ошибок и оптимальная длина шага

Важным разделом численного дифференцирования является влияние ошибки округления в компьютере. Рассмотрим формулы более подробно. Предположим, что для вычислений использовался компьютер и что

$$f(x_0 - h) = y_{-1} + e_{-1} \text{ и } f(x_0 + h) = y_1 + e_1,$$

Где $f(x_0 - h)$ и $f(x_0 + h)$ приближены численными значениями y_{-1} и y_1 , а e_{-1} и e_1 - ошибки округления соответственно. Следующий результат показывает сложную природу анализа ошибок для численного дифференцирования.

Следствие 1(а). Предположим, что функция f удовлетворяет условиям теоремы 1, и используем *вычислительную формулу*

$$(17) \quad f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}.$$

Анализ ошибки поясняется следующими выражениями:

$$(18) \quad f'(x_0) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + E(f, h),$$

Где

$$(19) \quad E(f, h) = E_{\text{окр}}(f, h) + E_{\text{усеч}}(f, h) = \frac{e_1 - e_{-1}}{2h} - \frac{h^2 f^{(3)}(c)}{6},$$

Где **общий остаточный член** $E(f, h)$ имеет часть, обусловленную ошибкой округления, плюс часть, обусловленную ошибкой усечения.

Следствие 1(б). Предположим, что функция f удовлетворяет условиям теоремы 1 и произведены численные расчеты. Если $|e_{-1}| \leq e$, $|e_1| \leq e$ и $M = \max_{a \leq x \leq b} \{|f^{(3)}(x)|\}$, то

$$(20) \quad |E(f, h)| \leq \frac{e}{h} + \frac{Mh^2}{6},$$

И значение h , которое минимизирует правую часть (19), равно

$$(21) \quad h = \left(\frac{3e}{M} \right)^{1/3}.$$

Когда h мало, часть (19), содержащая $(e_1 - e_{-1})/2h$, может быть относительно большой. В примере 2, когда $h = 0,0001$, мы столкнулись с этой трудностью. Ошибка округления равна

$$f(0,8001) = 0,696634970 + e_1, \quad \text{где } e_1 \approx -0,0000000003,$$

$$f(0,7999) = 0,696778442 + e_{-1}, \quad \text{где } e_{-1} \approx 0,0000000005.$$

Ошибка округления остаточного члена равна

$$\frac{-h^2 f^{(3)}(c)}{6} \approx -(0,0001)^2 \left(\frac{\sin(0,8)}{6} \right) \approx 0,000000001.$$

Теперь можно вычислить остаточный член $E(f, h)$ в (19):

$$E(f, h) \approx \frac{-0,0000000003 - 0,0000000005}{0,0002} - 0,000000001 = -0,000004001.$$

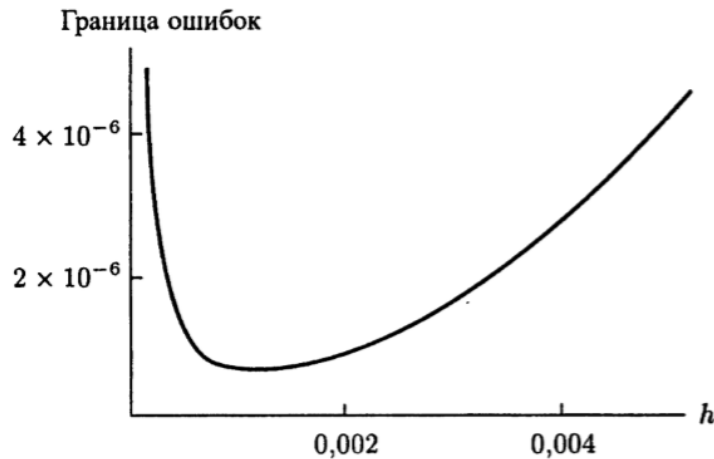


Рис. 3. Нахождение оптимальной длины шага $h = 0,001144714$ при применении формулы (21) к

$$f(x) = \cos(x) \text{ в примере 2}$$

Действительно, численное приближение для производной, использующее шаг $h = 0,0001$, находим в результате вычисления

$$f'(0,8) \approx \frac{f(0,8001) - f(0,7999)}{0,0002} = \frac{0,696634870 - 0,696778442}{0,0002} = -0,717360000,$$

И потеря приблизительно четырех значащих цифр очевидна. Ошибка равна $-3,909 \times 10^{-6}$, и это близко к предсказанной ошибке: $-4,001 \times 10^{-6}$.

Когда формула (21) применяется в примере 2, можно использовать грань $|f^{(3)}(x)| \leq |\sin(x)| \leq 1 = M$ и значение $e = 0,5 \times 10^{-9}$ для величины ошибки округления. Оптимальное значение h легко вычислить: $h = (1,5 \times 10^{-9} / 1)^{1/3} = 0,001144714$. Длина шага $h = 0,001$ близка к оптимальному значению $0,001144714$, и он дает наилучшее приближение к $f'(0,8)$ среди четырех выбранных шагов при вычислениях по формуле (3) (см. табл. 2 и рис. 3).

Аналогично анализируются ошибки для формулы (10). Предположим, что вычисления выполняются на компьютере и что $f(x_0 + kh) = y_k + e_k$.

Следствие 2(а). Предположим, что функция f удовлетворяет условиям теоремы 2 и производятся **численные вычисления по формуле**

$$(22) \quad f'(x_0) \approx \frac{-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}}{12h}.$$

Анализ ошибки поясняется следующими выражениями:

$$(23) \quad f'(x_0) \approx \frac{-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}}{12h} + E(f, h),$$

где

$$(24) \quad \begin{aligned} E(f, h) &= E_{\text{окр}}(f, h) + E_{\text{усеч}}(f, h) = \\ &= \frac{-e_2 + 8e_1 - 8e_{-1} + e_{-2}}{12h} + \frac{h^4 f^{(5)}(c)}{30}, \end{aligned}$$

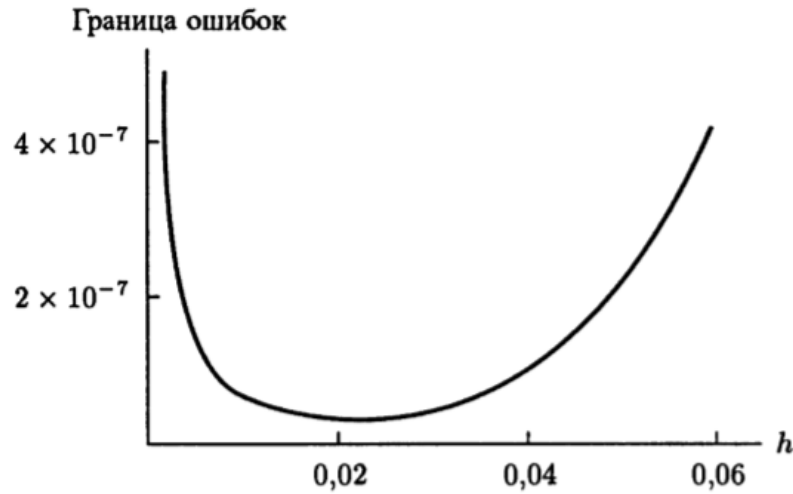


Рис. 4. Нахождение оптимальной длины шага $h = 0,022388475$ при применении формулы (26) к $f(x) = \cos(x)$ в примере 2

общий остаточный член $E(f, h)$ имеет часть, обусловленную ошибкой округления, плюс часть, обусловленную ошибкой усечения.

Следствие 2(b). Предположим, что функция f удовлетворяет условиям теоремы 2 и вычисления произведены. Если $|e_k| \leq e$ и $M = \max_{a \leq x \leq b} \{|f^{(5)}(x)|\}$, то

$$(25) \quad |E(f, h)| \leq \frac{3e}{2h} + \frac{Mh^4}{30},$$

и значение h , которое минимизирует правую часть (25), равно

$$(26) \quad h = \left(\frac{45e}{4M} \right)^{1/5}.$$

Если в [примере 2](#) применяется формула (25), то можно использовать грань $|f^{(5)}(x)| \leq |\sin(x)| \leq 1 = M$ и значение $e = 0,5 \times 10^{-9}$ для величины ошибки округления. Оптимальное значение h легко вычислить: $h = (22,5 \times 10^{-9} / 4)^{1/5} = 0,022388475$. Длина шага $h = 0,01$ близка к оптимальному значению $0,022388475$ и дает наилучшее приближение к $f'(0,8)$ среди четырех выбранных шагов для вычислений по формуле (10) (см. [табл. 2](#) и [рис. 4](#)).

В завершение обсуждения примера 2 напомним, что формулы численного дифференцирования можно получить альтернативным дифференцированием. Их можно получить посредством дифференцирования интерполяционного полинома. Например, форма Лагранжа квадратичного полинома $p_2(x)$, который проходит через три точки, $(0,7; \cos(0,7))$, $(0,8; \cos(0,8))$ и $(0,9; \cos(0,9))$, имеет вид

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 38,2421094(x - 0,8)(x - 0,9) - 69,6706709(x - 0,7)(x - 0,9) + \\ &+ 31,0804984(x - 0,7)(x - 0,8) \end{aligned}$$

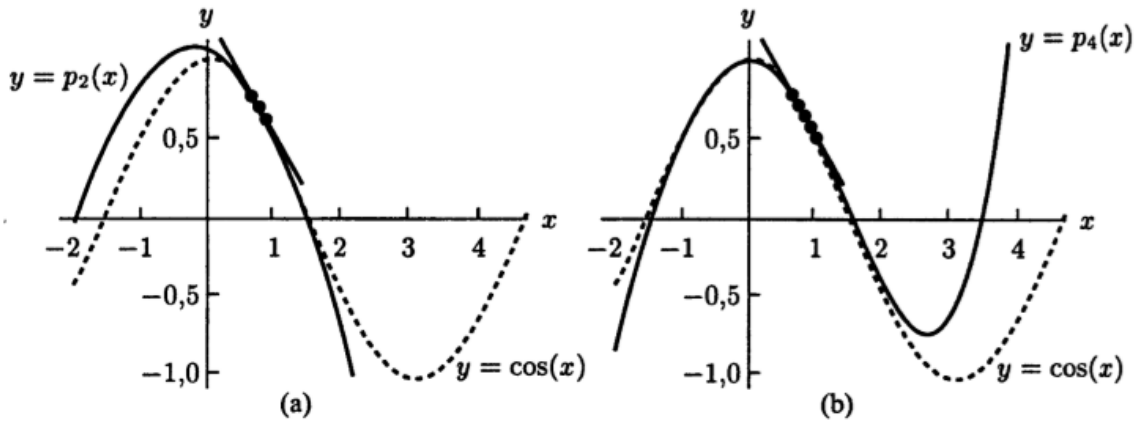


Рис. 5. (а) График $y = \cos(x)$ и интерполяционного полинома $p_2(x)$, используемого для вычисления $f'(0,8) \approx p_2'(0,8) = -0,716161095$. (б) График $y = \cos(x)$ и интерполяционного полинома $p_4(x)$, используемого для вычисления $f'(0,8) \approx p_4'(0,8) = -0,717353703$

Этот полином можно преобразовать, чтобы получить обычную форму:

$$p_2(x) = 1,046875165 - 0,159260044x - 0,348063157x^2.$$

Аналогичным образом можно получить полином четвертой степени $p_4(x)$, который проходит через точки $(0,6; \cos(0,6))$, $(0,7; \cos(0,7))$, $(0,8; \cos(0,8))$, $(0,9; \cos(0,9))$ и $(1,0; \cos(1,0))$:

$$p_4(x) = 0,998452927 + 0,009638391x - 0,523291341x^2 + 0,026521229x^3 + 0,028981100x^4$$

Когда эти полиномы будут продифференцированы, получим значения

$$p_2'(0,8) = -0,716161095 \text{ и } p_4'(0,8) = -0,717353703,$$

которые согласуются со значениями, приведенными в [табл. 2](#) под шагом $h = 0,1$. Графики $p_2(x)$ и $p_4(x)$ и касательные к ним линии в точке $(0,8; \cos(0,8))$ показаны соответственно на рис. 5.

Экстраполирование Ричардсона

В этом разделе выясняется соотношение между формулами [\(3\)](#) и [\(10\)](#). Пусть $f_k = f(x_k) = f(x_0 + kh)$. Используем запись $D_0(h)$ и $D_0(2h)$ для обозначения приближений к $f'(x_0)$, которые получим по формуле [\(3\)](#) при длине шага h и $2h$ соответственно:

$$(27) \quad f'(x_0) \approx D_0(h) + Ch^2$$

и

$$(28) \quad f'(x_0) \approx D_0(2h) + 4Ch^2.$$

Если умножить соотношение [\(27\)](#) на 4 и затем вычесть соотношение [\(28\)](#), то члены, содержащие C , сократятся и результатом будет

$$(29) \quad f'(x_0) \approx 4D_0(h) - D_0(2h) = \frac{4(f_1 - f_{-1})}{2h} - \frac{f_2 - f_{-2}}{4h}.$$

Затем решим [\(29\)](#) относительно $f'(x_0)$ и получим

$$(30) \quad f'(x_0) \approx \frac{4D_0(h) - D_0(2h)}{3} = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h}.$$

Последнее выражение в [\(30\)](#) является формулой центрированной разности [\(10\)](#).

Пример 3. Пусть $f(x) = \cos(x)$. Используем [\(27\)](#) и [\(28\)](#) с шагом $h = 0,01$ и покажем, как линейную комбинацию $(4D_0 - D_0(2h))/3$ из [\(30\)](#) можно использовать, чтобы получить приближение к $f'(0,8)$, заданное в формуле [\(10\)](#). Все вычисления выполнены с девятью десятичными знаками.

Воспользуемся [\(27\)](#) и [\(28\)](#) с шагом $h = 0,01$, чтобы получить

$$D_0(h) \approx \frac{f(0,81) - f(0,79)}{0,02} \approx \frac{0,689498433 - 0,703845316}{0,02} \approx -0,717344150$$

и

$$D_0(2h) \approx \frac{f(0,82) - f(0,78)}{0,04} \approx \frac{0,682221207 - 0,710913538}{0,04} \approx -0,717308275.$$

Вычислим линейную комбинацию из (30):

$$f'(0,8) \approx \frac{4D_0(h) - D_0(2h)}{3} \approx \frac{4(-0,717344150) - (-0,717308275)}{3} \approx -0,717356108.$$

Это решение такое же, как решение в [примере 2](#), в котором непосредственно используется формула (10) для приближения $f'(0,8)$.

Метод получения формулы для $f'(x_0)$ высшего порядка из формулы низшего порядка называется **экстраполяцией**. Для доказательства требуется, чтобы остаточный член формулы (3) можно было разложить в ряд, содержащий только четные степени h . Всегда можно показать, как использовать длину шага h и $2h$, чтобы извлечь члены, содержащие h^2 . Чтобы показать, как извлечь h^4 , предполагаем, что через $D_1(h)$ и $D_1(2h)$ обозначены приближения $f'(x_0)$ порядка $O(h^4)$, полученные по формуле (16) при длине шага h и $2h$ соответственно. Тогда

$$(31) \quad f'(x_0) = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{24h} + \frac{h^4 f^{(5)}(c_1)}{30} \approx D_1(h) + Ch^4$$

и

$$(32) \quad f'(x_0) = \frac{-f_4 + 8f_2 - 8f_{-2} + f_{-4}}{12h} + \frac{16h^4 f^{(5)}(c_2)}{30} \approx D_1(2h) + 16Ch^4.$$

Предположим, что $f^{(5)}(x)$ медленно изменяется и не меняет знак. Также предположим, что $f^{(5)}(c_1) \approx f^{(5)}(c_2)$ может использоваться для исключения членов, содержащих h^4 в (31) и (32). Результатом будет

$$(33) \quad f'(x_0) \approx \frac{16D_1(h) - D_1(2h)}{15}.$$

Общая схема улучшенных вычислений сформулирована в следующей теореме.

Теорема 3 (экстраполяция Ричардсона). Предположим, что существуют два приближения, $D_{k-1}(h)$ и $D_{k-1}(2h)$, порядка $O(h^{2k})$ для $f'(x_0)$ и они удовлетворяют отношениям

$$(34) \quad f'(x_0) = D_{k-1}(h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \dots$$

и

$$(35) \quad f'(x_0) = D_{k-1}(2h) + 4^k c_1 h^{2k} + 4^{k+1} c_2 h^{2k+2} + \dots$$

Тогда улучшенное приближение имеет форму

$$(36) \quad f'(x_0) = D_k(h) + O(h^{2k+2}) = \frac{4^k D_{k-1}(h) - D_{k-1}(2h)}{4^k - 1} + O(h^{2k+2}).$$

2. Формулы численного дифференцирования

Еще несколько формул центрированной разности

В предыдущем разделе в формулах для $f'(x_0)$ требовалось, чтобы функция вычислялась в абсциссах, лежащих по обе стороны от x , и их можно было рассматривать как формулы центрированной разности. Чтобы получить формулы центрированной разности для производных высших порядков, можно использовать ряд Тейлора. Самые распространенные из выбираемых порядков - $O(h^2)$ и $O(h^4)$ - приведены в [табл. 3](#) и [4](#). В таблицах использованы обозначения $f_k = f(x_0 + kh)$ для $k = 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Формула центрированной разности порядка $O(h^2)$

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

$$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{f_2 - f_1 + 2f_{-1} + f_{-2}}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}$$

Формула центрированной разности порядка $O(h^4)$

$$f'(x_0) \approx \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2}$$

$$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 8f_2 - 13f_1 + 13f_{-1} - 8f_{-2} + f_{-3}}{8h^3}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 12f_2 - 39f_1 + 56f_0 - 39f_{-1} - 12f_{-2} - f_{-3}}{64h^4}$$

Для иллюстрации получим формулу для $f''(x)$ порядка $O(h^2)$ из таблицы выше. Начнем с разложения Тейлора:

$$(37) f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} + \frac{h^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{24} + \dots$$

и

$$(38) f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} - \frac{h^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{24} - \dots$$

Суммируя выражения (37) и (38), исключаем члены, которые содержат нечетные производные $f'(x), f^{(3)}(x), f^{(5)}(x), \dots$:

$$(39) f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \frac{2h^2 f''(x)}{2} + \frac{2h^4 f^{(4)}(x)}{24} + \dots$$

Решаем уравнение (39) относительно $f''(x)$ и получаем:

$$(40) f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{2h^2 f^{(4)}(x)}{4!} - \frac{2h^4 f^{(6)}(x)}{6!} - \dots - \frac{2h^{2k-2} f^{(2k)}(x)}{(2k)!} - \dots$$

Если рассмотреть ряд (40) до четвертой производной, то существует также значение c , которое лежит на интервале $[x-h; x+h]$, что

$$(41) f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{h^2 f^{(4)}(c)}{12}$$

Это дает формулу для приближения $f''(x)$:

$$(42) f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

Пример 4: Пусть $f(x) = \cos(x)$

а) Используем формулу (42) с шагами $h = 0,1, h=0,01, h=0,001$ и найдем приближения к $f''(0.8)$.

Все вычисления проведены с девятью десятичными знаками.

б) Сравним полученное приближение с истинным значением

$$f''(0.8) = -\cos(0.8)$$

а) Приведем вычисления для шага $h=0.01$

$$f''(0,8) = \frac{f(0.81) - 2f(0.80) + f(0.79)}{0.0001} \approx \frac{0.689498433 - 2(0.696706709) + 0.703845316}{0.0001} = -0.696690000$$

б) Ошибка приближения в этом случае равна $-0,000016709$. Остальные вычисления объединены в табл.5. При анализе ошибок рассмотрим этот пример и покажем, почему шаг, равный $h=0,01$, лучший.

Таблица 5. Численные приближения к $f''(x)$

Длина шага	Приближение по формуле (42)	Ошибка при использовании (42)
$h=0,1$	$-0,696126300$	$-0,000580409$
$h=0,01$	$-0,696690000$	$-0,000016709$
$h=0,001$	$-0,696000000$	$-0,000706709$

Анализ ошибок

Пусть $f_k = y_k + e_k$, где e_k – ошибка вычисления $f(x_k)$, содержащая помехи в измерениях и округленную ошибку. Тогда формулу (42) можно записать в виде

$$(43) f''(x_0) \approx \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + E(f, h)$$

Остаточный член $E(h, f)$ для численной производной (43) состоит из части, обусловленной ошибкой округления, и части, обусловленной ошибкой усечения:

$$(44) E(f, h) \approx \frac{e_1 - 2e_0 + e_{-1}}{h^2} - \frac{h^2 f^{(4)}(c)}{12}$$

Если предположить, что каждая ошибка e_k равна величине ε с соответствующим знаком и что $|f^{(4)}(x)| \leq M$, то можно получить следующую грань ошибки:

$$(45) E(f, h) \leq \frac{4\varepsilon}{h^2} + \frac{Mh^2}{12}$$

Если h мало, то вклад $\frac{4\varepsilon}{h^2}$ делает ошибку округления большой. Когда h велико, то велик и вклад $\frac{Mh^2}{12}$. Оптимальная длина шага будет минимизировать величину

$$(46) g(h) = \frac{4\varepsilon}{h^2} + \frac{Mh^2}{12}$$

Если приравнять $g'(h)=0$, то результатом будет $-8\varepsilon/h^3 + Mh/6=0$, что приведет к уравнению $h^4=48\varepsilon/M$, из которого можно получить оптимальное значение h :

$$(47) h = \left(\frac{48\varepsilon}{M}\right)^{1/4}$$

Если формулу (47) применить в [примере 4](#), а также использовать грани $|f^{(4)}(x)| \leq |\cos(x)| \leq 1 = M$ и значение $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-9}$, то оптимальная длина шага будет равна $h = (24 \cdot 10^{-9} / 1)^{1/4} = 0.01244666$, и видно, что шаг $h = 0,01$ ближе всего к оптимальному значению.

Так как часть ошибки, обусловленная ошибкой округления, обратно пропорциональна квадрату h , этот член возрастает, когда h становится малым. Иногда об этом говорят, как о дилемме длины шага. Частично эта проблема решается с помощью формулы столь высокого порядка, чтобы большое значение h приводило к требуемой точности. Формула для $f''(x_0)$ порядка $O(h^4)$ из [табл. 4](#) имеет вид

$$(48) f''(x_0) \approx \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + E(f, h)$$

Остаточный член для (48) равен

$$(49) E(f, h) = \frac{16\varepsilon}{3h^2} + \frac{h^4 f^{(6)}(c)}{90}$$

где c лежит на интервале $[x-2h; x+2h]$. Грань для $|E(f, h)|$ равна

$$(50) E(f, h) \leq \frac{16\varepsilon}{3h^2} + \frac{h^4 M}{90}$$

где $|f^{(6)}(x)| \leq M$. Оптимальное значение h задается формулой

$$(51) h = \left(\frac{240\varepsilon}{M} \right)^{1/6}$$

Пример 5: Пусть $f(x) = \cos(x)$

а) Используем формулу (48) с шагами $h=0,1$, $h=0,01$, $h=0,001$ и найдем приближения к $f''(0.8)$.

Все вычисления проведены с девятью десятичными знаками.

б) Сравним полученное приближение с истинным значением $f''(0.8) = -\cos(0.8)$.

с) Найдем оптимальную длину шага.

а) Вычисление для шага $h=0,1$

$$\begin{aligned} f''(0.8) &\approx \frac{-f(1.0) + 16f(0.9) - 30f(0.8) + 16f(0.7) - f(0.6)}{0.12} \\ &\approx \frac{-0.540302306 + 9.945759488 - 20.90120127 + 12.23747499 - 0.825335615}{0.12} \approx -0.696705985 \end{aligned}$$

б) Ошибка приближения равна $-0,000000751$. Остальные вычисления сведены в [табл. 6](#)

с) В случае применения формулы (51) можно использовать грань $|f^{(6)}(x)| \leq |\cos(x)| \leq 1 = M$ и

значение $\varepsilon = 0,5 * 10^{-9}$. Эти значения дают оптимальную длину

$$h = (120 * 10^{-9} / 1)^{1/6} = 0,070231219.$$

Таблица 6. Численные приближения к $f''(x)$

Длина шага	Приближение по формуле (48)	Ошибка при использовании (48)
$h=0.1$	-0,689625413	-0,007081296
$h=0.01$	-0,696705958	-0,000000751
$h=0.001$	-0,696690000	-0,000016709

Вообще, при выполнении численного дифференцирования получаем приблизительно только половину точности, которую допускает компьютер. Эта крупная потеря значащих цифр будет почти всегда происходить, если не удастся найти оптимальную длину шага. Поэтому следует всегда проявлять осторожность при выполнении численного дифференцирования. Трудности чаще всего проявляются при работе с экспериментальными данными, когда значения функции округляются только до нескольких цифр. Если численное значение производной нужно получить по наблюдениям, то следует пользоваться построением кривой по точкам с использованием техники метода наименьших квадратов и формулой дифференцирования для кривой.

Дифференцирование полинома Лагранжа

Для вычисления значения функции в абсциссе, которая лежит с одной стороны от точки, нельзя использовать формулу центрированной разности. Формулы для равноотстоящих абсцисс, которые лежат справа (или слева) от точки, называют формулами для правых (или левых) разностей. Эти формулы можно получить дифференцированием интерполяционного полинома Лагранжа. Некоторые общие формулы для правых и левых разностей приведены в табл. 7.

Формулы для правой и левой разностей $O(h^2)$

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} \quad (\text{правая разность})$$

$$f'(x_0) \approx \frac{3f_0 - 4f_{-1} - f_{-2}}{2h} \quad (\text{левая разность})$$

$$f'''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2} \quad (\text{правая разность})$$

$$f'''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2} \quad (\text{левая разность})$$

$$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-5f_0 + 18f_1 - 24f_2 + 14f_3 - 3f_4}{2h^3}$$

$$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{5f_0 + 18f_{-1} + 24f_{-2} - 14f_{-3} + 3f_{-4}}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{3f_0 - 14f_1 + 26f_2 - 24f_3 + 11f_4 - 2f_5}{h^4}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{3f_0 - 14f_{-1} + 26f_{-2} - 24f_{-3} + 11f_{-4} - 2f_{-5}}{h^4}$$

Пример 6. Получим формулу

$$f'''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}$$

Начнем с интерполяционного полинома Лагранжа для $f(t)$, построенного по точкам x_0, x_1, x_2 и x_3 :

$$\begin{aligned} f(t) \approx & f_0 \frac{(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f_1 \frac{(t-x_0)(t-x_2)(t-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ & + f_2 \frac{(t-x_0)(t-x_1)(t-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{(t-x_0)(t-x_1)(t-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \end{aligned}$$

Продифференцируем дважды произведения в числителях и получим

$$\begin{aligned} f''(t) \approx & f_0 \frac{2((t-x_1)+(t-x_2)+(t-x_3))}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f_1 \frac{2((t-x_0)+(t-x_2)+(t-x_3))}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ & + f_2 \frac{2((t-x_0)+(t-x_1)+(t-x_3))}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{2((t-x_0)+(t-x_1)+(t-x_2))}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \end{aligned}$$

Затем подстановка $t=x_0$ и тот факт, что $x_i - x_j = (i-j)h$, дадут

$$\begin{aligned} f''(t) \approx & f_0 \frac{2((x_0-x_1)+(x_0-x_2)+(x_0-x_3))}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f_1 \frac{2((x_0-x_0)+(x_0-x_2)+(x_0-x_3))}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ & + f_2 \frac{2((x_0-x_0)+(x_0-x_1)+(x_0-x_3))}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{2((x_0-x_0)+(x_0-x_1)+(x_0-x_2))}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_0 \frac{2((-h) + (-2h) + (-3h))}{(-h)(-2h)(-3h)} + f_1 \frac{2((0) + (-2h) + (-3h))}{(h)(-h)(-2h)} + \\
&+ f_2 \frac{2((0) + (-h) + (-3h))}{(2h)(h)(-h)} + f_3 \frac{2((0) + (-h) + (-2h))}{(3h)(2h)(h)} = \\
&= f_0 \frac{-12h}{-6h^3} + f_1 \frac{-10h}{2h^3} + f_2 \frac{-8h}{-2h^3} + f_3 \frac{-6h}{6h^3} = \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}.
\end{aligned}$$

Итак, формула получена.

Получим формулу: $f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-5f_0 + 18f_1 - 24f_2 + 14f_3 - 3f_4}{2h^3}$

Начнем с интерполяционного полинома Лагранжа для $f(t)$, построенного по точкам x_0, x_1, x_2 и x_3 :

$$\begin{aligned}
f(t) \approx & f_0 \frac{(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)(t-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} + f_1 \frac{(t-x_0)(t-x_2)(t-x_3)(t-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + \\
& + f_2 \frac{(t-x_0)(t-x_1)(t-x_3)(t-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + f_3 \frac{(t-x_0)(t-x_1)(t-x_2)(t-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + \\
& + f_4 \frac{(t-x_0)(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}.
\end{aligned}$$

Трижды продифференцируем числители, затем в знаменатели подставим $x_i - x_j = (i - j)h$ и получим:

$$\begin{aligned}
f'''(t) \approx & f_0 \frac{6((t-x_1) + (t-x_2) + (t-x_3) + (t-x_4))}{(-h)(-2h)(-3h)(-4h)} + f_1 \frac{6((t-x_0) + (t-x_2) + (t-x_3) + (t-x_4))}{(h)(-h)(-2h)(-3h)} + \\
& + f_2 \frac{6((t-x_0) + (t-x_1) + (t-x_3) + (t-x_4))}{(2h)(h)(-h)(2h)} + f_3 \frac{6((t-x_0) + (t-x_1) + (t-x_2) + (t-x_4))}{(3h)(2h)(h)(-h)} + \\
& + f_4 \frac{6((t-x_0) + (t-x_1) + (t-x_2) + (t-x_3))}{(4h)(3h)(2h)(h)}.
\end{aligned}$$

Затем подставим $t=x_0$ в выражение $t - x_j = x_0 - x_j = -jh$

$$\begin{aligned}
f'''(t) \approx & f_0 \frac{6((-h) + (-2h) + (-3h) + (-4h))}{24h^4} + f_1 \frac{6((0) + (-2h) + (-3h) + (-4h))}{-6h^4} + \\
& + f_2 \frac{6((0) + (-h) + (-3h) + (-4h))}{4h^4} + f_3 \frac{6((0) + (-h) + (-2h) + (-4h))}{-6h^4} + \\
& + f_4 \frac{6((0) + (-h) + (-2h) + (-3h))}{24h^4} = \\
& = f_0 \frac{-60h}{24h^4} + f_1 \frac{54h}{6h^4} + f_2 \frac{-48h}{4h^4} + f_3 \frac{42h}{6h^4} + f_4 \frac{-36h}{24h^4} = \frac{-5f_0 + 18f_1 - 24f_2 + 14f_3 - 3f_4}{2h^3}.
\end{aligned}$$

и формула получена.

Дифференцирование полинома Ньютона

В этом разделе будет найдено соотношение между тремя формулами порядка $O(h^2)$ для приближения $f'(x_0)$ и приведен общий алгоритм вычисления производной. Полином Ньютона $P(t)$ степени $N=2$, который приближает функцию $f(t)$ по узлам t_0, t_1, t_2 имеет вид

$$(52) \quad P(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)(t - t_1)$$

$$\text{где } a_0 = f(t_0), a_1 = (f(t) - f(t_0))/(t_1 - t_0), \text{ и } a_2 = \frac{\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}}{(t_2 - t_0)}$$

Производная $P(t)$ равна

$$(53) \quad P'(t) = a_1 + a_2((t - t_0) + (t - t_1))$$

и если ее вычислить в точке $t=t_0$, то в результате можно получить

$$(54) \quad P'(t_0) = a_1 + a_2(t_0 - t_1) \approx f'(t_0)$$

Отметим, что узлы $\{t_k\}$ необязательно должны быть расположены на равном расстоянии, чтобы были справедливы формулы (52)-(54). Выбирая абсциссы соответствующим образом, получим различные формулы для приближения $f'(x)$.

Случай (i). Если $t_0=x$, $t_1=x+h$ и $t_2=x+2h$, то

$$a_1 = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad a_2 = \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{2h^2}$$

Затем подставим эти значения в (54) и получим

$$P'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{-f(x) - 2f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

Упростим выражение и получим

$$(55) \quad P'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} \approx f'(x)$$

Это и есть формула правой разности второго порядка для $f'(x)$.

Случай (ii). Если $t_0=x$, $t_1=x+h$ и $t_2=x-2h$, то

$$a_1 = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad a_2 = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h^2}$$

Затем подставим эти значения в (54) и получим

$$P'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{-f(x+h) - 2f(x) - f(x-h)}{2h}$$

Упростим выражение и получим

$$(56) \quad P'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \approx f'(x)$$

формулу центрированной разности второго порядка для $f'(x)$.

Случай (iii). Если $t_0=x$, $t_1=x-h$ и $t_2=x-2h$, то

$$a_1 = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad a_2 = \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{2h^2}$$

Подставим эти значения в (54) и упростим, тогда получим

$$P'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} \approx f'(x) \quad (57)$$

формулу левой разности второго порядка для $f'(x)$.

Полином Ньютона $P(t)$ степени N , которой приближает функцию $f(t)$, используя узлы t_0, t_1, \dots, t_N , имеет вид

$$(58) \quad P(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)(t - t_1) + \dots + a_N(t - t_0)\dots(t - t_{N-1})$$

Производная $P(t)$ равна

$$(59) \quad P'(t) = a_1 + a_2((t - t_0) + (t - t_1)) + \dots + a_N \sum_{k=0}^{N-1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} (t - t_j)$$

Когда $P'(t)$ вычисляют в точке $t=t_0$, некоторые члены суммы равны нулю и $P'(t_0)$ имеет более простой вид:

$$(60) \quad P'(t) = a_1 + a_2(t_0 - t_1) + a_3(t_0 - t_1)(t_0 - t_2) + \dots + a_N(t_0 - t_1)(t_0 - t_2) \dots (t - t_{N-1})$$

k -я частичная сумма в правой части равенства (60) – это производная полинома Ньютона k -го порядка, построенная на первых k узлах. Если

$|t_0 - t_1| \leq |t_0 - t_2| \leq \dots \leq |t_0 - t_N|$ и если $\{(t_j, 0)\}_{j=0}^N$ является совокупностью $N+1$ равноотстоящей

точки не действительной оси, то k -я частичная сумма – это приближение к $f'(t_0)$ порядка $O(h^{k-1})$.

Предположим, что $N=5$. Если пять узлов равны $t_k = x + h \cdot k$ для $k = 0, 1, 2, 3$ и 4 , то (60) является эквивалентом формулы правой разности порядка $O(h^4)$ для $f'(x)$. Если выбрать пять узлов $\{t_k\}$ равными $t_0=x$, $t_1 = x+h$, $t_2 = x - h$, $t_3=x+2h$ и $t_4=x-2h$, то (60) будет формулой центрированной разности порядка $O(h^4)$ для $f'(x)$. Когда пять узлов равны $t_k = x - kh$, то (60) является формулой левой разности порядка $O(h^4)$ для $f'(x)$.

ЗАДАНИЕ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ

Решить задачи, указанные в варианте, в среде программирования.

Разработать алгоритмы:

- дифференцирования, использующего пределы. Вход: f – функция, вводимая в виде строки; x – точка дифференцирования; toler – допустимое отклонение для ошибки. Выход: H – вектор длин шагов; D – вектор приближений производной; E – вектор граней ошибок; n – координата "наилучшего приближения".

Чтобы получить численное приближение $f'(x)$, сгенерируйте последовательность $f'(x) \approx D_k$ для $k = 0, \dots, n$ до тех пор, пока не будет выполнено неравенство $|D_{n+1} - D_n| \geq |D_n - D_{n-1}|$ или $|D_n - D_{n-1}|$ не будет меньше допустимого отклонения, что является попыткой найти наилучшее приближение $f'(x) \approx D_n$.

- дифференцирования с использованием экстраполяции Ричардсона. Чтобы найти численное приближение $f'(x)$, сгенерируйте таблицу приближений $D(j, k)$ для $k \leq j$ и используйте $f'(x) \approx D(n, n)$ в качестве окончательного ответа. Вход: f – функция, вводимая как строка; delta – допустимое отклонение для ошибки; toler – допустимое отклонение для относительной ошибки. Выход: D – матрица приближений производных; err – грань ошибки; relerr – грань относительной ошибки; n – координата "наилучшего приближения".

- численного приближения $f'(x)$ полиномом Ньютона N -й степени:

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + a_N(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{N-1})$$

и использует значение $f'(x_0) \approx P'(x_0)$ в качестве ответа. Метод следует использовать для точки x_0 . Для вычисления $f'(x_k) \approx P'(x_k)$ точки можно перегруппировать $\{x_k, x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N\}$.

Вход: X – вектор абсцисс размера $1 \times n$; Y – вектор ординат размера $1 \times n$. Выход: A – вектор размера $1 \times n$, который содержит коэффициенты полинома Ньютона N -й степени; df – приближение производной

Реализовать разработанный алгоритм, реализовать ввод данных из файла и вывод результата в файл. Протестировать работу алгоритма.

ТРЕБОВАНИЯ К РЕАЛИЗАЦИИ

Вариант задания назначается преподавателем.

Все функции, входные и выходные данные алгоритма должны быть сохранены в файлы.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

1. Упражнения к разделу 1.

1.1. Пусть $f(x) = \sin(x)$, где x измеряется в радианах.

- Вычислите приближение к $f'(0,8)$, используя формулу (3) с шагами $h = 0,1$, $h = 0,01$ и $h = 0,001$. Вычисления проведите с восемью или девятью десятичными знаками.

- (b) Сравните полученное приближение со значением $f'(0,8) = \cos(0,8)$.
- (c) Вычислите грани для ошибки усечения по формуле (4). Используйте
- $$|f^{(3)}(c)| \leq \cos(0,7) \approx 0,764842187$$
- для всех случаев.

1.2. Пусть $f(x) = e^x$.

- (a) Вычислите приближение к $f'(2,3)$, используя формулу (3) с шагами $h = 0,1$, $h = 0,01$ и $h = 0,001$. Вычисления проведите с восемью или девятью десятичными знаками.
- (b) Сравните полученное приближение со значением $f'(2,3) = e^{2,3}$.
- (c) Вычислите грани для ошибки усечения по формуле (4). Используйте
- $$|f^{(3)}(c)| \leq e^{2,4} \approx 11,02317638$$
- для всех случаев.

1.3. Пусть $f(x) = \sin(x)$, где x измеряется в радианах.

- (a) Вычислите приближение к $f'(0,8)$, используя формулу (10) с шагами $h = 0,1$, $h = 0,01$ и $h = 0,001$ и сравните со значением $f'(0,8) = \cos(0,8)$.
- (b) Воспользуйтесь экстраполяционной формулой (29) для вычисления приближения к $f'(0,8)$ п.(a).
- (c) Вычислите грани для ошибки усечения по формуле (11). В обоих случаях используйте
- $$|f^{(5)}(c)| \leq \cos(0,6) \approx 0,825335615.$$

1.4. Пусть $f(x) = e^x$.

- (a) Вычислите приближение к $f'(2,3)$, используя формулу (10) с шагами $h = 0,1$, $h = 0,01$ и $h = 0,001$ и сравните со значением $f'(2,3) = e^{2,3}$.
- (b) Воспользуйтесь экстраполяционной формулой (29) для вычисления приближения к $f'(2,3)$ п.(a).
- (c) Вычислите грани для ошибки усечения по формуле (11). В обоих случаях используйте
- $$|f^{(5)}(c)| \leq e^{2,5} \approx 12,18249396.$$

1.5. Сравните формулы (3) и (10) численного дифференцирования. Пусть $f(x) = x^3$. Найти приближение к $f'(2)$.

- (a) Используйте формулу (3) с шагом $h = 0,05$.
- (b) Используйте формулу (10) с шагом $h = 0,05$.
- (c) Вычислите грани ошибки усечения по формулам (4) и (11).

1.6.

- (a) Используйте теорему Тейлора, чтобы показать, что

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f^{(2)}(c)}{2}, \text{ где } |c-x| < h.$$

- (b) Используйте п. (a), чтобы показать, что отношение приращений в выражении (2) имеет ошибку порядка $O(h) = -hf^{(2)}(c)/2$.
- (c) Почему лучше использовать формулы (3), чем формулу (2)?

1.7. *Формула частной производной.* Частную производную $f_x(x, y)$ функции $f(x, y)$ по x получаем, если при фиксированном y дифференцируем функцию по x . Аналогично

находим $f_y(x, y)$, фиксируя x и дифференцируя функцию по y . Формулу (3) можно следующим образом записать в частных производных:

$$(i) \quad \begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h} + O(h^2), \\ f_y(x, y) &= \frac{f(x, y+h) - f(x, y-h)}{2h} + O(h^2) \end{aligned}$$

- (a) Пусть $f(x, y) = xy/(x+y)$. Вычислите приближение к $f_x(2,3)$ и $f_y(2,3)$, используя формулы (i) с шагами $h=0,1$, $h=0,01$ и $h=0,001$. Сравните со значениями, полученными дифференцированием $f(x, y)$ по x и y .
- (b) Пусть $z = f(x, y) = \arctan(y/x)$, где z измеряется в радианах. Вычислите приближение к $f_x(3,4)$ и $f_y(3,4)$, используя формулы (i) с шагами $h=0,1$, $h=0,01$ и $h=0,001$. Сравните со значениями, полученными дифференцированием $f(x, y)$ по x и y .

1.8. Подробно распишите, как из формул (31) и (32) получить формулу (33).

- (a) Покажите, что формула (21) задает значение h , которое минимизирует правую часть формулы (20).
- (b) Покажите, что формула (26) задает значение h , которое минимизирует правую часть формулы (25).

1.9. Напряжение $E = E(t)$ в электрической сети удовлетворяет уравнению $E = L(dI/dt) + RI(t)$, где R - сопротивление и L - индукция. Используйте значения $L = 0,05$ и $R = 2$ и приведенные в таблице значения $I(t)$.

t	$I(t)$
1,0	8,2277
1,1	7,2428
1,2	5,9908
1,3	4,5260
1,4	2,9122

- (a) Найдите $I'(1,2)$, выполнив численное дифференцирование, и для проученного значения вычислите $E(1,2)$.
- (b) Сравните ваш ответ со значением $I(t) = 10e^{-t/10} \sin(2t)$.

1.10. Дальность полета снаряда $D = D(t)$ приведена в таблице.

t	$D(t)$
8,0	17,453
9,0	21,460
10,0	25,752
11,0	30,301
12,0	35,084

- (a) Найдите скорость $V(10)$, выполнив численное дифференцирование.
- (b) Сравните ваш ответ со значением производной, если $D(t) = -70 + 7t + 70e^{-t/10}$.

1.11. Значение $f(x)$ приведены в таблице. Неустраняемая ошибка округления имеет грани $|e_k| \leq 5 \times 10^{-6}$. Используйте округления в своих вычислениях.

x	$f(x) = \cos(x)$
1,100	0,45360
1,190	0,37166
1,199	0,36329
1,200	0,36236
1,201	0,36143

1,210	0,35302
1,300	0,26750

- (a) Найдите приближения к $f'(1,2)$ по формуле (17) с шагами $h = 0,1$, $h = 0,01$ и $h = 0,001$.
 (b) Сравните ответ со значением $f'(1,2) = -\sin(1,2) \approx -0,93204$.
 (c) Найдите грань общей ошибки (19) для трех случаев из п. (a).

1.12. Значение $f(x)$ приведены в таблице. Неустраняемая ошибка округления имеет грани $|e_k| \leq 5 \times 10^{-6}$. Используйте округления в своих вычислениях.

x	$f(x) = \cos(x)$
2,900	1,06471
2,990	1,09527
2,999	1,09828
3,000	1,09861
3,001	1,09895
3,010	1,10194
3,100	1,13140

- (a) Найдите приближения к $f'(3,0)$ по формуле (17) с шагами $h = 0,1$, $h = 0,01$ и $h = 0,001$.
 (b) Сравните ответ со значением $f'(3,0) = \frac{1}{3} \approx 0,33333$.
 (c) Найдите грань общей ошибки (19) для трех случаев из п. (a).

1.13. Предположим, что значения функции $f(x_k)$ в таблице вычислялись с округлением до трех знаков и неустраняемая ошибка округления равна 5×10^{-4} . Предположим также, что $|f^{(3)}(c)| \leq 1,5$ и $|f^{(5)}(c)| \leq 1,5$.

- (a) Найдите наилучшую длину шага h для формулы (17).
 (b) Найдите наилучшую длину шага h для формулы (22).

1.14. Значение $f(x)$ приведены в таблице. Неустраняемая ошибка округления имеет грани $|e_k| \leq 5 \times 10^{-6}$. Используйте округления в своих вычислениях.

x	$f(x) = \cos(x)$
1,000	0,54030
1,100	0,45360
1,198	0,36422
1,199	0,36239
1,200	0,36236
1,201	0,36143
1,202	0,36049
1,300	0,26750
1,400	0,16997

- (a) Найдите приближения к $f'(1,2)$ по формуле (22) с шагами $h = 0,1$ и $h = 0,001$.
 (b) Найдите грань общей ошибки (24) для обоих случаев из п. (a).

1.15. Значение $f(x)$ приведены в таблице. Неустраняемая ошибка округления имеет грани $|e_k| \leq 5 \times 10^{-6}$. Используйте округления в своих вычислениях.

x	$f(x) = \ln(x)$
2,800	1,02962
2,900	1,06471
2,998	1,09795
2,999	1,09828
3,000	1,09861

3,001	1,09895
3,002	1,09928
3,100	1,13140
3,200	1,16315

(с) Найдите приближения к $f'(3,0)$ по формуле (22) с шагами $h = 0,1$ и $h = 0,001$

(d) Найдите грань общей ошибки (24) для обоих случаев из п. (а).

1.16. Составьте таблицу погрешности трехточечной формулы центрированной разности (3) для $f'(0)$, где $f(x) = \sin x - \cos x$, с $h = 10^{-1}, \dots, 10^{-12}$. Нарисуйте график результатов. Соответствует ли минимальная ошибка теоретическому ожиданию?

1.17. Составьте таблицу и постройте график ошибки двухточечной формулы разности вперед для $f'(1)$, где $f(x) = x^{-1}$, с $h = 10^{-1}, \dots, 10^{-12}$. Сравните ваши ответы с теорией, разработанной выше.

2. Упражнения к разделу 2

2.1. Пусть $f(x) = \ln(x)$ и вычисления следует производить с восемью или девятью десятичными знаками.

(а) Найдите приближение $f''(41)$ по формуле (42) с шагом $h=0,05$.

(b) Найдите приближение $f''(41)$ по формуле (42) с шагом $h=0,01$.

(с) Найдите приближение $f''(41)$ по формуле (48) с шагом $h=0,1$.

(d) Какой из ответов (а), (b) или (с) – наиболее точный?

2.2. Пусть $f(x) = \ln(x)$ и вычисления следует производить с восемью или девятью десятичными знаками.

(а) Найдите приближение $f''(37)$ по формуле (42) с шагом $h=0,05$.

(b) Найдите приближение $f''(37)$ по формуле (42) с шагом $h=0,01$.

(с) Найдите приближение $f''(37)$ по формуле (48) с шагом $h=0,1$.

(d) Какой из ответов (а), (b) или (с) – наиболее точный?

2.3. Рассмотрите таблицу значений $f(x) = \ln(x)$, округленных до четырех десятичных знаков.

x	$f(x) = \ln(x)$
4.90	1.5892
4.95	1.5994
5.00	1.6094
5.05	1.6194
5.10	1.6292

(а) Найдите приближение $f''(41)$ по формуле (42) с шагом $h=0,05$.

(b) Найдите приближение $f''(41)$ по формуле (42) с шагом $h=0,01$.

(с) Найдите приближение $f''(41)$ по формуле (48) с шагом $h=0,05$.

(d) Какой из ответов (а), (b) или (с) – наиболее точный?

2.4. Рассмотрите таблицу значений $f(x) = \cos(x)$, округленных до четырех десятичных знаков.

x	$f(x) = \cos(x)$
0.90	0.6216
0.95	0.5817
1.00	0.5403
1.05	0.4976
1.10	0.4536

- (a) Найдите приближение $f''(37)$ по формуле (42) с шагом $h=0.05$.
 (b) Найдите приближение $f''(37)$ по формуле (42) с шагом $h=0.01$.
 (c) Найдите приближение $f''(37)$ по формуле (48) с шагом $h=0.05$.
 (d) Какой из ответов (a), (b) или (c) – наиболее точный?

2.5. Найдите приближение $f''(37)$ по формуле численного дифференцирования (42) с шагом $h=0,01$ для следующих функций.

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = x^4$

2.6. Найдите приближение $f''(37)$ по формуле численного дифференцирования (48) с шагом $h=0,01$ для следующих функций.

(a) $f(x) = x^4$

(b) $f(x) = x^6$

2.7. Используйте разложение в ряд Тейлора функций $f(x+h)$, $f(x-h)$, $f(x+2h)$ и $f(x-2h)$ и найдите формулу центрированной разности:

$$f^{(3)}(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3}$$

2.8. Используйте разложение в ряд Тейлора функций $f(x+h)$, $f(x-h)$, $f(x+2h)$ и $f(x-2h)$ и найдите формулу центрированной разности:

$$f^{(4)}(x) \approx \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4}$$

2.9. Найдите приближение порядка $O(h^2)$ к $f'(x_k)$ в каждой из четырех точек приведенных ниже в таблицах

а)

x	f(x)
0.0	0.989992
0.1	0.999135
0.1	0.998295
0.3	0.987480

б)

x	f(x)
0.0	0.141120
0.1	0.041581
0.1	-0.058374
0.3	-0.157746

2.10. Используйте приближения

$$f'(x+h/2) \approx \frac{f_1 - f_0}{h} \quad \text{и} \quad f'(x-h/2) \approx \frac{f_0 - f_{-1}}{h}$$

и получите приближение

$$f''(x) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

2.11. Используйте формулы (52)-(54), найдите построенную на абсциссах $t_0 = x, t_1 = x + h, t_2 = x + 3h$ формулу для $f'(x)$.

2.12. Используйте формулы (52)-(54), найдите построенную на абсциссах $t_0 = x, t_1 = x - h, t_2 = x + 2h$ формулу для $f'(x)$.

2.13. Для численного решения определенного дифференциального уравнения требуется приближение к $f''(x) + f'(x)$ порядка $O(h^2)$.

(a) Найдите формулу центрированной разности для $f''(x) + f'(x)$, сложив формулы для $f'(x)$ и $f''(x)$ порядка $O(h^2)$.

(b) Найдите формулу правой разности для $f''(x) + f'(x)$, сложив формулы для $f'(x)$ и $f''(x)$ порядка $O(h^2)$.

(c) Что произойдет, если формулу для $f'(x)$ порядка $O(h^2)$ сложить с формулой для $f''(x)$ порядка $O(h^2)$?

2.14. Опровергните следующее суждение. Формулу Тейлора можно использовать, чтобы получить представления

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} + \frac{h^3 f'''(c)}{6}$$

и

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} - \frac{h^3 f'''(c)}{6}$$

Сложим эти величины и в результате получим уравнение

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x)$$

которое можно решить и получить точную формулу для $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

ТАБЛИЦА ВАРИАНТОВ

Вариант	Выполняемые задачи	Вариант	Выполняемые задачи
1	1.15; 2.5(b); 2.14	11	1.2; 2.9(b); 1.6
2	1.13; 2.6(b); 1.9	12	1.4; 2.5(b); 2.14
3	1.7(a); 2.6(a); 1.6	13	1.12; 2.6(a); 2.7
4	1.1; 2.3; 2.13; 2.7	14	1.5; 2.9(a); 2.8
5	1.17; 2.9(b); 2.8	15	1.17; 2.2; 1.8
6	1.3; 2.2; 1.8	16	1.5; 2.6(a); 2.11
7	1.14; 2.1; 2.11	17	1.16; 2.5(b); 2.7
8	1.10; 2.9(a); 2.12	18	1.4; 2.5(a); 2.11
9	1.11; 2.5(a); 2.1	19	1.14; 2.2; 2.7
10	1.16; 2.6(a);	20	1.7(b); 2.6(b); 1.6

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каким образом при заданной последовательности приближений к значению $f'(x)$ в точке x_0 через вычисление предела отношения приращений функции $f(x)$ и аргумента x в окрестности точки x_0 определить простейшим образом наиболее точное значение? Покажите на примере.
2. Как показать погрешность формулы численного дифференцирования функции одной переменной используя формулу Тейлора? Покажите на примере.
3. Как показать погрешность формулы численного дифференцирования функции двух переменных используя формулу Тейлора? Покажите на примере.
4. Как показать погрешность формулы численного дифференцирования функции трех переменных используя формулу Тейлора? Покажите на примере.
5. На примере решенной задачи покажите, каким образом отражается ошибка усечения на длине шага численного дифференцирования.
6. На примере решенной задачи покажите, каким образом отражается ошибка округления на длине шага численного дифференцирования.
7. Как определить оптимальный для расчета шаг численного дифференцирования? Покажите на примере.
8. Каким образом можно получить формулу численного дифференцирования высокого порядка из формулы численного дифференцирования более низкого порядка? Покажите на примере.
9. Что такое сетка? Сеточная функция?
10. Как вы думаете, что является лучшим подходом к численному дифференцированию при массовых вычислениях?
 - 1) использование формул высокого порядка точности при большом шаге;
 - 2) использование формул низкого порядка точности при малом шаге.
11. Если вы не согласны с предложенными выше подходами, то предложите свое видение проблемы. Аргументируйте свой ответ.

ФОРМА ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

На выполнение лабораторной работы отводится 2 занятия (4 академических часа: 3 часа на выполнение и сдачу лабораторной работы и 1 час на подготовку отчета).

Номер варианта студенту выдается преподавателем.

Отчет на защиту предоставляется в печатном виде.

Структура отчета (на отдельном листе(-ах)): титульный лист, формулировка задания (вариант), этапы выполнения работы (со скриншотами), результаты выполнения работы (скриншоты и содержимое файлов), выводы.

Основная литература

1. Вагер, Б. Г. Численные методы [Электронный ресурс] : учебное пособие / Б. Г. Вагер. — Электрон. текстовые данные. — СПб. : Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2017. — 152 с. — 978-5-9227-0786-2. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/78584.html>

Дополнительная литература

2. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближённые методы математической физики - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 704 с.
3. Крепкогорский В.Л. Функциональный анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/В.Л. Крепкогорский. — Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2014. — 116 с. URL: <http://www.iprbookshop.ru/62016.html>
4. Куликов, Г. М. Метод Фурье в уравнениях математической физики [Электронный ресурс]: учебное пособие / Г. М. Куликов, А. Д. Нахман. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 91 с.: <http://www.iprbookshop.ru/71568.html>
5. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 368 с.
6. Тарасов, В. Н. Численные методы. Теория, алгоритмы, программы [Электронный ресурс]: учебное пособие / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева. — Электрон. текстовые данные. — Самара: Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. — 266 с.: <http://www.iprbookshop.ru/71903.html>

7. Треногин, В.А. Уравнения в частных производных [Электронный ресурс]: учебное пособие/
В.А. Треногин, И.С. Недосекина. - М.: Физматлит, 2013. - 227 с.:
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275574>