

11. WIĘCEJ O RELACJACH

W tym rozdziale kontynuujemy badanie relacji rozpoczęte dawno temu, w rozdziale 3. Rozsądnie byłoby pokrótce go przejrzeć dla przypomnienia sobie terminologii. Pierwsze dwa paragrafy tego rozdziału zajmują się relacjami, które porządkują elementy danego zbioru. Zaczniemy od częściowych porządków w przypadku ogólnym, a następnie zajmiemy się pewnymi szczególnymi relacjami porządku na zbiorach $S_1 \times \dots \times S_n$ i Σ^* . W paragrafie 11.3 omawiamy pojęcie złożenia dowolnych relacji i pokazujemy, jak stwierdzenia dotyczące relacji można wyrażać w języku macierzy. W ostatnim paragrafie zajmujemy się pojęciem najmniejszej relacji, spełniającej różnorodne własności i zawierającej daną relację R w zbiorze S . Opisana jest tam, w szczególności, najmniejsza relacja równoważności zawierająca R .

Paragrafy 11.3 i 11.4 są niezależne od pierwszych dwóch paragrafów tego rozdziału i mogą być studiowane osobno.

§ 11.1. Zbiory częściowo uporządkowane

W tym paragrafie zajmiemy się zbiorami, których elementy można ze sobą w pewien sposób porównywać. W typowej sytuacji jeden z elementów będziemy traktować jako mniejszy od drugiego bądź jako występujący przed nim w sensie pewnej kolejności.

PRZYKŁAD 1

(a) Przyzwyczajeni jesteśmy do porównywania liczb rzeczywistych. Na przykład liczba 3 jest mniejsza od liczby 5, liczba -1 jest mniejsza od liczby 4 i liczba -1 jest większa od liczby -3. Porównujemy dwie liczby stwierdzając, która z nich jest większa, a która mniejsza.

(b) Jeśli elementy jakiegoś zbioru S są wypisane z użyciem indeksów ze zbioru \mathbb{P} lub \mathbb{N} w taki sposób, że różne elementy mają różne indeksy, to możemy porównać dwa elementy zbioru S stwierdzając, który z nich ma mniejszy indeks. Różne sposoby indeksowania elementów S prowadzą do różnych sposobów ustalenia kolejności elementów S . Dany element raz może mieć najmniejszy indeks, innym razem zaś może być poprzedzony wieloma innymi elementami.

Zbiór, którego elementy można w ten sposób porównywać, nazywamy **uporządkowanym**, a strukturę, która niesie informację, jak jego elementy ze sobą porównywać, nazywamy **relacją porządku** w zbiorze S . Aby móc powiedzieć cokolwiek pożytecznego o zbiorach uporządkowanych, musimy uczynić te definicje bardziej precyzyjnymi. Na początek wszakże zauważymy, że w przypadku wielu pojawiających się w sposób naturalny zbiorów wiemy, jak porównywać pewne elementy z innymi, ale jednocześnie mamy do czynienia z parami elementów nieporównywalnych.

PRZYKŁAD 2

(a) Gdybyśmy chcieli porównywać ze sobą marki samochodów, to moglibyśmy się, być może zgodzić co do tego, że marka RR jest lepsza od marki H , ponieważ jest od niej lepsza pod każdym względem. Moglibyśmy jednak nie być w stanie powiedzieć czy lepsza jest marka F , czy marka C , ponieważ każda z nich może pod pewnymi względami drugą przewyższać.

(b) Możemy się umówić, że dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 73\}$ są porównywalne, jeśli jedna z nich jest dzielnikiem drugiej. Wówczas liczby 6 i 72, a także 6 i 3, są porównywalne. Natomiast liczby 6 i 8 nie są porównywalne, gdyż żadna z nich nie jest dzielnikiem drugiej.

(c) Możemy porównywać dwa podzbiory danego zbioru S (tzn. elementy zbioru $\mathcal{P}(S)$), jeśli jeden z nich jest zawarty w drugim. Jeśli zbiór S ma więcej, niż jeden element to zawiera jakieś nieporównywalne podzbiory. Na przykład, jeśli $s_1 \neq s_2$ oraz s_1 i s_2 należą do S , to zbiory $\{s_1\}$ i $\{s_2\}$ są nieporównywalne.

(d) Możemy porównywać funkcje punktowo. Jeśli, na przykład, funkcje f i g są określone na zbiorze S i przyjmują wartości w $\{0, 1\}$, to moglibyśmy traktować funkcję f jako mniejszą

lub równą g , gdy $f(s) \leq g(s)$ dla każdego $s \in S$. To jest w gruncie rzeczy ten porządek, który nadaliśmy zbiorowi \mathbb{B}^n w przykładzie 3 z §10.1. Jest on podobny do sposobu porównywania samochodów z punktu (a).

Zbiory, takie jak te z przykładu 2, z relacjami pozwalającymi porównywać ze sobą elementy, ale dopuszczającymi istnienie elementów nieporównywalnych nazywamy częściowo uporządkowanymi. Tworzą one ważną klasę, którą teraz zdefiniujemy w ścisły sposób.

Przypomnij sobie, że relacja R w zbiorze S jest to podzbiór zbioru $S \times S$. **Częściowy porządek** w zbiorze S to relacja R , która jest zwrotna antysymetryczna i przechodnia. Jeśli będziemy pisać $x \preceq y$ zamiast $(x, y) \in R$, to warunki te stwierdzają, że częściowy porządek spełnia:

$$(Z) \quad s \preceq s \text{ dla każdego } s \in S;$$

$$(AS) \quad s \preceq t \text{ i } t \preceq s \text{ implikują } s = t;$$

$$(P) \quad s \preceq t \text{ i } t \preceq u \text{ implikują } s \preceq u.$$

To są dokładnie te własności zwykłego porządku \leq , które wyróżniliśmy w przykładzie 4 z § 3.1.

Jeśli \preceq jest częściowym porządkiem w zbiorze S , to parę (S, \preceq) nazywamy **zbiorem częściowo uporządkowanym**. Używamy symbolu " \preceq " jako ogólnego oznaczenia dla częściowego porządku. Jeśli dla danego szczególnego częściowego porządku istnieje już oznaczenie, takie jak " \leq " lub " \subseteq ", to będziemy raczej używali właśnie jego zamiast " \preceq ".

W przykładzie 2 chodziło o relacje "jest nie tak dobry jak", "jest dzielnikiem", "jest podzbiorem" i "w żadnym punkcie nie jest większa". Moglibyśmy równie dobrze rozważać relacje "jest co najmniej tak dobry jak", "jest wielokrotnością", "zawiera", i "w każdym punkcie jest co najmniej równa", ponieważ relacje te dostarczają tych samych informacji dotyczących porównywania elementów, co relacje przez nas wybrane. Każdy częściowy porządek w danym zbiorze wyznacza **relację odwrotną**, która wiąże x z y wtedy i tylko wtedy, gdy y pozostaje w relacji wyjściowej z x . Relacja odwrotna do częściowego porządku \preceq jest na ogół oznaczana przez \succeq . Zatem $x \succeq y$ znaczy to samo, co $y \preceq x$. Ta relacja odwrotna również jest częściowym porządkiem (ćwiczenie 7(a)). Jeśli spojrzymy na relację \preceq w zbiorze S jako na podzbiór R zbioru $S \times S$,

to relacja \succeq odpowiada relacji odwrotnej R^{\leftarrow} , zdefiniowanej w § 3.1.

Mając dany częściowy porządek \preceq w zbiorze S , możemy zdefiniować jeszcze jedną relację, \prec , w S w następujący sposób:

$$x \prec y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \preceq y \text{ i } x \neq y$$

Jeśli, na przykład, \preceq oznacza inkluzję, to $A \prec B$ znaczy, że A jest właściwym podzbiorem B , tzn. $A \subset B$. Relacja \prec jest przeciwzwrotna i przechodnia:

(PZ) $s \prec s$ nie zachodzi dla żadnego s w S ;

(P) $s \prec t$ i $t \prec u$ implikują $s \preceq u$.

Relację przeciwzwrotną i przechodnią nazywamy **quasi-porządkiem**. Każdy częściowy porządek w zbiorze S wyznacza pewien quasi-porządek i, na odwrót, jeśli \prec jest quasi-porządkiem w S , to relacja \preceq zdefiniowana formułą

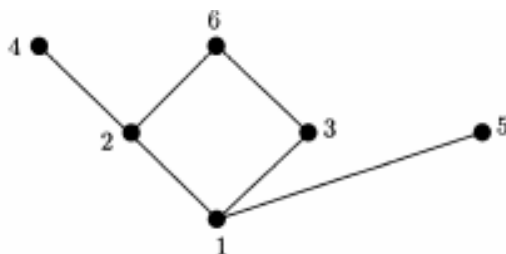
$$x \preceq y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \prec y \text{ lub } x = y$$

jest częściowym porządkiem w S (ćwiczenie 7(b)). To, czy do porównywania elementów danego zbioru częściowo uporządkowanego wybierze się częściowy porządek, czy też związany z nim quasi-porządek, zależy od problemu, z którym mamy w danym momencie do czynienia. Będziemy na ogół używali częściowego porządku, ale jeśli tak będzie wygodnie, będziemy również używać na zmianę obu relacji.

Możliwe jest, przynajmniej teoretycznie, narysowanie diagramu, który pozwala jednym rzutem oka objąć całą relację porządku w skończonym zbiorze częściowo uporządkowanym. Mając dany częściowy porządek \preceq w S , powiemy, że element t **nakrywa** element s , gdy $s \prec t$ i nie ma w S elementu u takiego, że $s \prec u \prec t$. **Diagram Hassego** zbioru częściowo uporządkowanego (S, \preceq) jest to rysunek grafu skierowanego, którego wierzchołkami są elementy zbioru S i w którym od wierzchołka t do wierzchołka s krawędź biegnie wtedy i tylko wtedy, gdy t nakrywa s . Diagramy Hassego, podobnie jak drzewa z wyróżnionym korzeniem, są zazwyczaj rysowane z krawędziami skierowanymi w dół i bez strzałek.

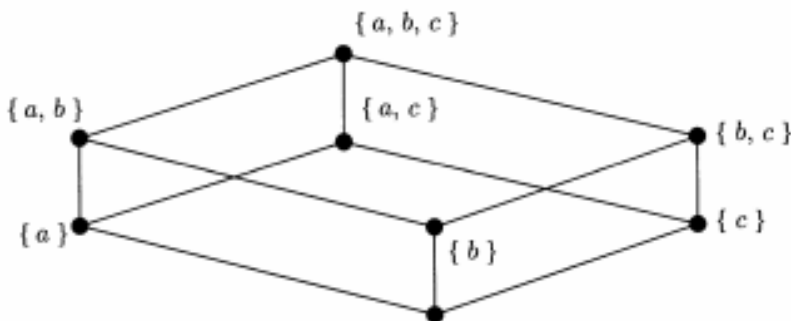
PRZYKŁAD 3

(a) Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Będziemy pisać $m|n$, gdy m dzieli n , tzn. gdy n jest całkowitą wielokrotnością m . Diagram z rysunku 11.1 jest diagramem Hassego zbioru częściowo uporządko-



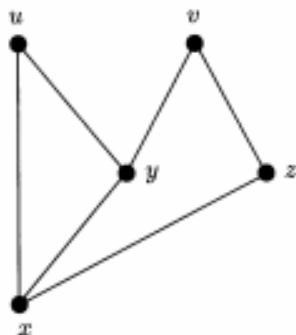
Rysunek 1:

wanego $(S, |)$. Między 1 i 6 nie ma krawędzi, ponieważ 6 nie nakrywa 1. Możemy wszakże wywnioskować z tego diagramu, że $1|6$, ponieważ relacja $|$ jest przechodnia i istnieje w diagramie łańcuch krawędzi odpowiadający temu, że $1|2$ i $2|6$. Podobnie możemy zobaczyć, że $1|4$ biorąc pod uwagę drogę $1|2|4$. Zauważ, że, ogólnie w przypadku relacji przechodnich stosować można takie łączone zapisy i nie prowadzi to do nieporozumień: $x \preceq y \preceq z$ znaczy to samo, co $x \preceq y$, $y \preceq z$ i $x \preceq z$.



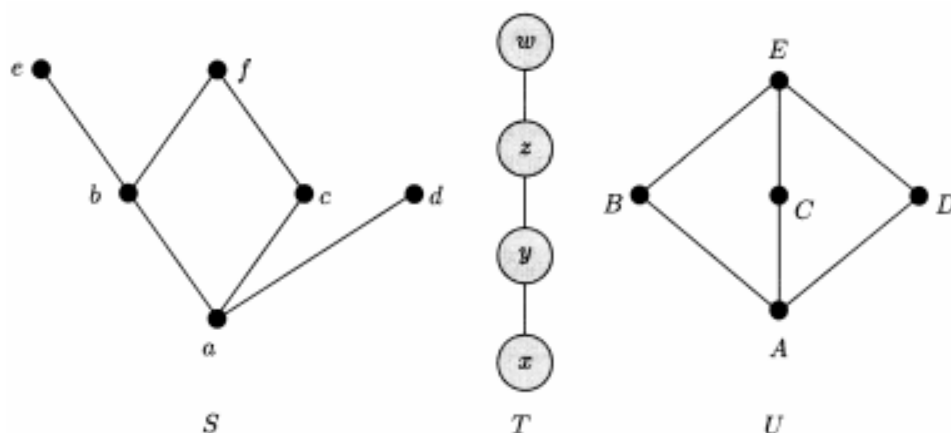
Rysunek 2:

(b) Rozważmy zbiór potęgowy $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ z częściowym porządkiem \subseteq . Rysunek 2. przedstawia diagram Hassego zbioru $(P(a, b, c), \subseteq)$. Zauważ, że linia łącząca $\{a, c\}$ z $\{a\}$ przecina się z linią łączącą $\{a, b\}$ z $\{b\}$, ale przecięcie to jest po prostu cechą tego rysunku i jest bez znaczenia z punktu widzenia własności przedstawianego częściowego porządku. W szczególności, przecięcie tych dwóch linii nie reprezentuje elementu naszego zbioru.



Rysunek 3:

(c) Diagram przedstawiony na rysunku 3. nie jest diagramem Hassego, ponieważ u nie może nakrywać x , skoro u nakrywa także y , a y nakrywa x . Gdyby którakolwiek z krawędzi łączących u, x i y została usunięta, rysunek stałby się diagramem Hassego.



Rysunek 4:

(d) Diagramy przedstawione na rys. 4. są diagramami Hassego pewnych zbiorów częściowo uporządkowanych. Ich relacje porządku mogą być odczytane bezpośrednio z odpowiednich diagramów. Wszystkie elementy są w relacji same ze sobą. Ponadto:

Dla zbioru $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ mamy $a \preceq b, a \preceq c, a \preceq d, a \preceq e, a \preceq f, b \preceq e, b \preceq f, c \preceq f$. Widzieliśmy ten rysunek już wcześniej, w części (a) tego przykładu.

Dla zbioru $T = \{x, y, z, w\}$ mamy $x \preceq y, x \preceq z, x \preceq w, y \preceq z, y \preceq w, z \preceq w$. Taki właśnie rysunek otrzymalibyśmy dla zbioru wszystkich dzielników liczby 8, albo 27 lub 125 z relacją porządku $|$.

Dla zbioru $U = \{A, B, C, D, E\}$ mamy $A \preceq B, A \preceq C, A \preceq D, A \preceq E, B \preceq E, C \preceq E, D \preceq E$. Ten rysunek jest diagramem Hassego zbioru częściowo uporządkowanego składającego się ze zbiorów $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$ z inkluzją jako relacją porządku.

(e) Relacja $<$, którą zdefiniowaliśmy w algebrze Boole'a w § 10.1 jest quasi-porządkiem. Atomy są to dokładnie te elementy algebry, które nakrywają element 0. Zbiór częściowo uporządkowany $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), C)$, rozważany powyżej części (b), stanowi przykład algebry Boole'a traktowanej jako zbiór częściowo uporządkowany.

Ogólnie, jeśli dany jest diagram Hassego pewnego zbioru częściowo uporządkowanego, to widzimy, że $s \preceq t$, gdy bądź $s = t$, bądź istnieje (biegnąca w dół) droga od t do s . Pamiętając, że porządek jest zwrotny i przechodni dowiemy się o nim wszystkiego na podstawie informacji dotyczących wzajemnego nakrywania elementów.

Fakt, że każdy skończony zbiór częściowo uporządkowany ma diagram Hassego, jest może intuicyjnie oczywisty, ale mimo to podamy jego dowód, opierając się na własnościach acyklicznych grafów skierowanych.

Twierdzenie

Każdy skończony zbiór częściowo uporządkowany ma diagram Hassego.

Dowód. Dla danego zbioru częściowo uporządkowanego (P, \preceq) niech H będzie grafem skierowanym o zbiorze wierzchołków P i w którym od wierzchołka x do wierzchołka y biegnie krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy x nakrywa y . Typowa droga w grafie H ma ciąg wierzchołków $x_1 x_2 \dots x_{n+1}$, w którym x_1 nakrywa x_2 , x_2 nakrywa x_3 itd., a więc $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_{n+1}$. Na mocy przechodności i antysymetrii, $x_1 \succ x_{n+1}$; w szczególności $x_1 \neq x_{n+1}$ i nasza droga nie jest zamknięta. Zatem H jest acyklicznym grafem skierowanym. Pokazaliśmy w paragrafach 7.3 i 8.1, że każdy acykliczny graf skierowany ma etykietowanie uporządkowane. Wybierając dla grafu H takie etykietowanie i robiąc jego rysunek wten sposób, by wierzchołki z większymi liczbami były wyżej, otrzymamy diagram Hassego dla (P, \preceq) .

Niektóre nieskończone zbiory częściowo uporządkowane również mają diagramy Hassego. Diagram Hassego zbioru \mathbb{Z} ze

zwykłym porządkiem składa się z kropek rozmieszczonych w jednakowych odstępach wzdłuż pionowej prostej. Z drugiej strony, ponieważ żadna liczba rzeczywista nie nakrywa żadnej innej w sensie zwykłego porządku, więc zbiór częściowo uporządkowany $(\mathcal{R},)$ nie ma diagramu Hassego.