Labor 11 (Matlab oder Octave)
Numerische Methoden zur Lösung nichtlinearer Gleichungen

I. Sekantenverfahren
Gegeben sind eine stetig ableitbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und zwei Startwerte $x_0, x_1 \in [a,b], x_0 \neq x_1$. Sei $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Die Lösung z der Gleichung $f(x) = 0$ wird approximiert durch die Folge $(x_n)_n$ mit folgender Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n), \quad n \geq 1\,.$$

Algorithmus:

• Man wählt zwei Startwerte $x_0, x_1 \in [a,b]$, so dass $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$.
• Für $n = 1, 2, \ldots$ berechnet man

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)\,.$$

• Man beendet das Verfahren, wenn $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ oder wenn eine gegebene maximale Anzahl von Iterationen I_{max} erreicht wurde.
• Schlußfolgerung:
die Lösung oder die approximative Lösung der Gleichung ist $z \approx x_{n+1}$ (exakte Lösung falls $f(x_{n+1}) = 0$).

Aufgabe 1: a) Man stelle die Funktion $f(x) = x^3 - 2x - 5$ auf dem Intervall [1,3] graphisch dar. Auf demselben Bild zeichne man die Gerade $y = 0$.
b) Man approximiere die Lösung der Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$, aus dem Intervall [1,3] mit $\varepsilon = 10^{-5}$ ($I_{max} = 50$) und Startwerten $x_0 = 1.8$, $x_1 = 2.2$ mit dem Sekantenverfahren.
c) Man approximiere die Lösung der Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$, aus dem Intervall [1,3] mit dem Newton-Verfahren mit $\varepsilon = 10^{-5}$ ($I_{max} = 50$) und Startwert $x_0 = 1.8$.
d) Beim Sekanten-Verfahren oder beim Newton-Verfahren konvergiert die Approximationsfolge schneller zur Lösung der obigen Gleichung?

II. Das Fixpunktverfahren: Man möchte Gleichungen der Form $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$ numerisch lösen, wobei f eine nichtlineare, stetige Funktion ist.

Methode der sukzessiven Approximationen: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Startwert und man betrachtet die Iterationen

(1) $$x_{n+1} = f(x_n),\ n \geq 0.$$

Ist die Folge $(x_n)_n$ konvergent $\lim_{n\to\infty} x_n = z$, dann ist z Lösung der Gleichung $f(x) = x$.
Aufgabe 2: Gegeben ist die Gleichung $x - 2\ln(x) = 1$, $x \in [3,4]$.
a) Sei $f(x) = 1 + 2\ln(x)$, $x \in [3,4]$. Aus der grafischen Dartsellung von f schlußfolgere man dass $f([3,4]) \subseteq [3,4]$!
b) Es gilt $f'(x) = \frac{2}{x}$; man zeige, dass $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in [3,4]$.
c) Sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach (siehe Vorlesung 9) erfüllt? Falls ja, approximiere man die Lösung von $x - 2\ln(x) = 1$, $x \in [3,4]$, mit Hilfe des Fixpunktverfahrens (d.h. mit der Methode der sukzessiven Approximationen)!
d) Kann man die Gleichung $x - 2\ln(x) = 1$, $x \in [3,4]$ mit dem Sekanten-Verfahren / Newton-Verfahren / Bisektionsverfahren numerisch lösen? Falls ja, welches Verfahren konvergiert am schnellsten?

Übungen für die praktische Prüfung:
1) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom zu den vorgegebenen Werten

$$f(0) = 2, f'(0) = 1, f''(0) = 4, f(1) = -1.$$

2) Sei $f(x) = \sin(\pi x), x \in \mathbb{R}$.
a) Berechnen Sie die dividierten Differenzen $[x_0, x_1, x_2; f]$ mit den Knotenpunkten $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$. Man benutze die Tabelle für dividierte Differenzen.

b) Wie lautet das entsprechende Newton Interpolationspolynom $(N_2 f)(x)$?
c) Wie lautet das entsprechende Lagrange Interpolationspolynom $(L_2 f)(x)$?
3) Man bestimme ein Polynom $P : [-1,1] \to \mathbb{R}$, so dass $P(0) = -1, P'(0) = 0, P''(0) = 0, P'''(0) = 6$. Was für ein Interpolationspolynom ist P? Man stelle es grafisch dar. Man berechne $\int_0^1 P(x)dx$ mit spezifischen Befehlen *für Polynome* aus Matlab/Octave. Welches sind die Nullstellen von P?
4) Man approximiere $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx$ anhand der
a) Trapezregel; Rechteckregel; Simpsonregel.
b) summierten Trapezregel; summierten Rechteckregel; summierten Simpsonregel (zB. mit $n = 50$).
5) Kann man folgende Gleichung $x = e^{-x}$ mit Hilfe sukzessiver Approximation auf dem Intervall [0.1,1] numerisch lösen? Kann man hierfür als Startwert $x_0 = 0$ wählen? Falls ja, approximiere man die Lösung der obigen Gleichung mit Hilfe sukzessiver Approximationen. Falls nein, wähle man einen geeigneten Startwert und approximiere die Lösung der obigen Gleichung mit Hilfe sukzessiver Approximationen.

6) Schätzen Sie das Integral $\int_{-1}^1 f(x)dx$ aus den Daten $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, f(x_0) = 6, f(x_1) = 1, f(x_2) = 2$ mit Hilfe quadratischer Interpolation (d.h. man benutzt ein Interpolationspolynom 2. Grades).
7) Zu welchem Wert konvergiert die Folge $(x_n)_n$, mit $x_{n+1} = \sqrt[3]{8 - x_n}, n \geq 0$ mit $x_0 = 0$? Welcher Satz aus der Vorlesung wird hierfür benutzt?
8) Man schreibe ein Programm, welches eine ganzahlige positive Dezimalzahl in eine Zahl in der 4-Basis umwandelt!

$$9_{(10)} = 21_{(4)};\ 48_{(10)} = 300_{(4)}\ .$$

8) Ohne den Matlab/Octave-Befehl `bernstein` zu benutzen, bestimme man mit Hilfe der Befehle für Polynome, die Koeffizienten der Bernstein Polynome: B_1^6, B_4^6. Man stelle diese Polynome auf dem Intervall $[0,1]$ grafisch dar!
9) Man berechne die Normen $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$ für $x = (1,-1,0,0,4)^T \in \mathbb{R}^5$.
10) Man berechne $[1,1,2,2;f] =?$ für $f(x) = x^4 - 3$ mit Hilfe einer Tabelle für dividierte Differenzen mit doppelten Knotenpunkten.
11) Man berechne $[1,1,1,2;f] =?$ für $f(x) = 1 - x^5$.
12) Gegeben ist die Gleichung $x^3 + 2x - 6 = 0,\ x \in [1,2]$.
a) Kann man diese Gleichung mit dem Sekanten-Verfahren / Newton-Verfahren / Bisektionsverfahren numerisch lösen? Falls ja, gebe man in jedem Fall eine Approximation der Lösung an.
b) Kann man die obige Gleichung in eine Fixpunktaufgabe umwandeln? Sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach (siehe Vorlesung 9) erfüllt? Falls ja, konstruire man eine approximierende Folge mit der Methode der sukzessiven Approximationen!
13) Anhand von Matlab/Octave Befehlen für Polynome bestimme man welches die Koeffizienten des Tschebyscheff Polynomes (erster Art) T_8 sind! Welches sind die Nullstellen von T_8?
14) Man berechne $V(1,0,0,2,3,3)$! Man berechne die Inverse dieser Matrix! Welches sind die Konditionszahlen dieser Matrix (in den $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ Normen)?
15) Sei

$$L = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{\ldots \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}}_{n-\text{mal}}.$$

Man approximiere L mit Hilfe eines geeigneten Iterationsverfahrens

$$x_{n+1} = f(x_n), n \geq 0, \text{ wobei } f : I \to I,$$

wobei f und I angegeben werden sollen, so dass das Verfahren für alle $x_0 \in I$ gegen L konvergieren soll (man wählt ein geeignetes Stoppkriterium).
Für ein $x_0 \in I$ (nach eigener Wahl) finde man das kleinste $n \in \mathbb{N}^*$, so dass $|x_n - L| < 0.00001$.
Welches ist der exakte Wert von L?