2.1) Show that ℓ^2 with its norm is a complete metric space, therefor it is a Hilbert space.

در کلاس با کمک نامساوی کوشی-شوارتز نشان دادیم که ℓ^2 یک فضای خطی است. همچنین این فضا یک فضای ضرب داخلی است، پس می‌توان روی آن نرم تعریف کرد:

$$\|\cdot\| : \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(a_1, a_2, \dots) \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2}$$

حال می‌خواهیم ثابت کنیم ℓ^2 یک فضای متریک کامل است. فرض کنید $\{X_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$ دنباله‌ای کوشی باشد. فرض کنید $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots)$. به ازای هر n و i و j داریم:

$$|x_{in} - x_{jn}|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_{in} - x_{jn}|^2 = \|X_i - X_j\|^2$$

چون X_iها کوشی هستند می‌دانیم به ازای هر $\varepsilon > 0$، N_ε موجود است که اگر $i, j > N_\varepsilon$ آنگاه:

$$\|X_i - X_j\| < \varepsilon \implies |x_{in} - x_{jn}| < \varepsilon$$

در نتیجه برای هر $n \in \mathbb{N}$، دنباله‌ی مولفه‌های nام X_iها یعنی $\{x_{in}\}_{i=1}^{\infty}$ کوشی است. پس می‌توان گفت:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists y_n \in \mathbb{R} : \lim_{i \to \infty} x_{in} = y_n$$

حال ثابت می‌کنیم $Y = (y_1, y_2, \dots)$ حد دنباله‌ی $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ است. ابتدا نشان می‌دهیم $Y \in \ell^2$

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lim_{m \to \infty} |x_{mi}|^2 = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |x_{mi}|^2$$

چون X_mها کوشی هستند، $\|X_m\|$ کراندار است، مثلاً از بالا به M کراندار است. در این صورت

$$\sum_{i=1}^{n} |x_{mi}|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_{mi}|^2 = \|X_m\|^2 \leq M^2 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \leq M^2$$

در نتیجه $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2$ موجود است، داریم $Y \in \ell^2$. حال ثابت می‌کنیم Y حد X_iها است. فرض کنید

$$\sum_{k=1}^{n} |x_{ik} - x_{jk}|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_{ik} - x_{jk}|^2 = \|X_i - X_j\|^2$$

و اگر $i, j > N_\varepsilon$ خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_{ik} - x_{jk}|^2 \leq \varepsilon$$

حال j را به بی‌نهایت میل می‌دهیم:

$$\lim_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |x_{ik} - x_{jk}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_{ik} - y_k|^2 \leq \varepsilon$$

در نتیجه برای هر n:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_{ik} - y_k|^2 \leq \varepsilon$$

پس اگر n را به بی‌نهایت میل دهیم:

$$\|X_i - Y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{ik} - y_k|^2 \leq \varepsilon$$

در نتیجه Y حد دنباله‌ی X_iها است. پس نتیجه می‌شود که ℓ^2 فضای کامل است با متریک تعریف شده.

2.2) Show that the following space $V = \{ f \in C([0,1]) \mid \int_0^1 |f(t)|^2 < \infty \}$ equipped with (point-wise) addition of functions and multiplication by complex number is a linear space with the following inner product:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$$

Is this a complete metric space with the induced metric?

$$\int_0^1 |fg| \leq \sqrt{\int_0^1 |f|^2 \int_0^1 |g|^2}$$ ابتدا ثابت می‌کنیم

$$\hookrightarrow \int_0^1 |fg| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{|f(\frac{i}{n})g(\frac{i}{n})|}{n} \leq \lim \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(\frac{i}{n})^2}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{g(\frac{i}{n})^2}{n}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\frac{i}{n})^2}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{g(\frac{i}{n})^2}{n}\right)}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 |f|^2 \int_0^1 |g|^2}$$

حال داریم:

$$\int_0^1 |f+g|^2 \leq \int_0^1 (|f|+|g|)^2 = \int_0^1 (|f|^2 + |g|^2 + 2|f||g|)$$

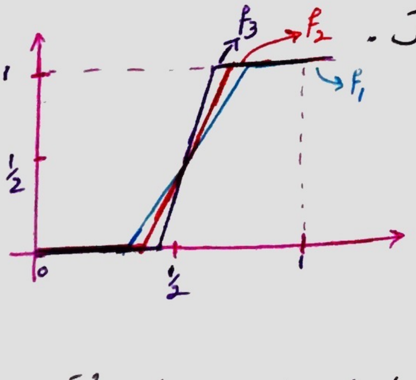
$$= \int_0^1 |f|^2 + \int_0^1 |g|^2 + 2\underbrace{\int_0^1 |f||g|} \leq \underbrace{\int_0^1 |f|^2}_{<\infty} + \underbrace{\int_0^1 |g|^2}_{<\infty} + 2\underbrace{\sqrt{\int_0^1 |f|^2 \int_0^1 |g|^2}}_{<\infty} < \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |f+g|^2 < \infty \longrightarrow$$ V نسبت به جمع بسته است

همچنین داریم:

$$\int_0^1 |\lambda f(t)|^2 = \int_0^1 |\lambda|^2 |f(t)|^2 = |\lambda|^2 \underbrace{\int_0^1 |f(t)|^2}_{<\infty} < \infty$$

V نسبت به ضرب اسکالر بسته است



در نتیجه V نسبت به جمع و همچنین ضرب اسکالر بسته است $\Rightarrow$ V خطی است.

اما V فضای complete نیست.

توابع $y = f_i(t)$ را بصورت در برد در نظر می‌گیریم:

در نتیجه:

$$\langle f_i - f_j, f_i - f_j \rangle = \int_0^1 |f_i - f_j|^2 dt = \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{\min\{i,j\}+1}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\min\{i,j\}+1}} |f_i - f_j|^2 dt$$

$$< \frac{2}{\min\{i,j\}+1}$$

پس دنباله $f_i(t)$ تحت نرم l^2 کوشی است ولی برای هر $x < \frac{1}{2}$ (یا $\frac{1}{2} < x$) دنباله‌ی از جایی به دنباله‌ی ثابت 0 (یا 1) تبدیل می‌شود. پس باید داشته باشیم $\lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x)$

$\forall x \in (0, \frac{1}{2}) : f(x) = 0$

$\forall x \in (\frac{1}{2}, 1) : f(x) = 1$ $\longrightarrow$ f در $\frac{1}{2}$ ناپیوسته است

پس فضا نسبت به متر القایی، کامل نیست :(

3

3.1) Show that if a norm $\|\cdot\|$ on a linear space is induced from an inner product, then it satisfies the following relations:

$$\|v+u\|^2+\|v-u\|^2=2\|v\|^2+2\|u\|^2$$

(polarization identity)

Prove it, if you think the inverse is also true.

$$\hookrightarrow \|v+u\|^2+\|v-u\|^2=\langle v+u,v+u\rangle+\langle v-u,v-u\rangle$$

$$=\langle v,v\rangle+\cancel{\langle v,u\rangle}+\cancel{\langle u,v\rangle}+\langle u,u\rangle+\langle v,v\rangle-\cancel{\langle v,u\rangle}-\cancel{\langle u,v\rangle}+\langle u,u\rangle$$

$$=2\langle v,v\rangle+2\langle u,u\rangle=2\|v\|^2+2\|u\|^2 \checkmark$$

حال ثابت می‌کنیم عکس این مسئله نیز برقرار است:

تعریف می‌کنیم:

$$\langle u,v\rangle:=\frac{\|u+v\|^2-\|u-v\|^2}{4}+i\,\frac{\|u+iv\|^2-\|u-iv\|^2}{4}$$

حال ثابت می‌کنیم $\langle u,u\rangle=\|u\|^2$:

$$\hookrightarrow \langle u,u\rangle=\frac{\|u+u\|^2-\cancel{\|u-u\|^2}+i\|u+iu\|^2-i\|u-iu\|^2}{4}$$

$$=\frac{\|2u\|^2+i\|(1+i)u\|^2-i\|(1-i)u\|^2}{4}$$

$$=\frac{4\|u\|^2+i\cancel{|1+i|}\|u\|^2-i\cancel{|1-i|}\|u\|^2}{4}\quad |1-i|=|1+i| \quad =\|u\|^2$$

$$\Rightarrow \langle u,u\rangle=\|u\|^2>0\ ,\quad \langle u,u\rangle=0 \Leftrightarrow u=0$$

حال ثابت می‌کنیم $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$

$$\langle v,u\rangle=\frac{\|v+u\|^2-\|v-u\|^2+i\|v+iu\|^2-i\|v-iu\|^2}{4}$$

$$\Rightarrow \overline{\langle v,u\rangle}=\frac{\|v+u\|^2-\|v-u\|^2-i\|v-iu\|^2+i\|v+iu\|^2}{4}$$

$$=\frac{\|u+v\|^2-\|u-v\|^2-i(-i)^2\|u+iv\|^2+i(i)^2\|u-iv\|^2}{4}$$

$$=\frac{\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+i\|u+iv\|^2-i\|u-iv\|^2}{4}=\langle u,v\rangle$$

$$\Rightarrow \langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$$

ادامه‌ی 3.1)

حال ثابت می‌کنیم خطی است. برای اینکار مراحل زیر را پیش می‌گیریم:

1. $2\langle \frac{u_1+u_2}{2}, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$

2. $\langle (u_1+u_2), v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$

3. $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{Q}$

4. $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$

$$\hookrightarrow \langle \frac{u_1+u_2}{2}, v\rangle = \frac{1}{2}\langle u_1+u_2, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{u_1+u_2}{2}+v\right\|^2 - \left\|\frac{u_1-u_2}{2}-v\right\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{u_1+u}{2}+v\right\|^2 + \left\|\frac{u_1-u_2}{2}\right\|^2\right) - \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{u_1+u_2}{2}-v\right\|^2 + \left\|\frac{u_1-u_2}{2}\right\|^2\right)$$

طبق متوازی الاضلاع $\leftarrow (*)$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{4}\left(\left\|\frac{u_1+u_2}{2}+v+\frac{u_1-u_2}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u_1+u_2}{2}+v-\frac{u_1-u_2}{2}\right\|^2\right.$$

$$\left. - \left\|\frac{u_1+u_2}{2}-v+\frac{u_1-u_2}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{u_1-u_2}{2}-v-\frac{u_1-u_2}{2}\right\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|u_1+v\|^2 + \|u_2+v\|^2 - \|u_1-v\|^2 - \|u_2-v\|^2\right)$$

به همین ترتیب برای اعداد مختلط نیز ثابت می‌شود

حال اگر $u_2=0$ باشد $\quad 2\langle \frac{u_1}{2}, v\rangle = \langle u_1, v\rangle$

$$\Rightarrow \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle = 2\langle \frac{(u_1+u_2)}{2}, v\rangle = \langle u_1+u_2, v\rangle$$

$$\Rightarrow \langle u_1, v\rangle - \langle u_2, v\rangle = \langle u_1-u_2, v\rangle$$

در نتیجه جمع‌پذیری برای اعداد مختلط ثابت می‌شود:

$$\langle u_1+u_2, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u_1+v\| - \|u_1-v\|^2 + i\|u_1+iv\|^2 - i\|u_1-iv\|^2\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\|u_2+v\|^2 - \|u_2-v\|^2 + i\|u_2+iv\|^2 - i\|u_2-iv\|^2\right)$$

$$= \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$$

حال ثابت می‌کنیم $\quad \langle cu, v\rangle = c\langle u, v\rangle$

ادامه‌ی 3.I)

ابتدا فرض کنیم c گویا مثبت $c = \frac{p}{q}$

$$\rightarrow \langle cu, v\rangle = \frac{1}{4q^2}\left(\|pu+qv\|^2 - \|pu-qv\|^2 + i\|pu+iqv\|^2 - i\|pu-iqv\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{q^2}\langle \overbrace{u+\cdots+u}^{p\text{ مرتبه}}, \overbrace{v+\cdots+v}^{q\text{ مرتبه}}\rangle = \frac{pq}{q^2}\langle u, v\rangle = \frac{p}{q}\langle u, v\rangle$$

$$\Rightarrow \langle cu, v\rangle = c\langle u, v\rangle \quad c \in \mathbb{Q}$$

حال می‌دانیم $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ در $\mathbb{C}$، ($\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$) چگال است و همچنین $\|.\|$ تابعی پیوسته است
پس طبق نامساوی مثلث، رابطه‌ی $c\langle u, v\rangle = \langle cu, v\rangle$ به ازای اعضای $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ در $\mathbb{C}$ ($\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$)
برقرار است و چون نرم پیوسته است پس به ازای تمام اعداد مختلط (حقیقی) رابطه برقرار است.

3.2) Show that if $T, S \in \mathcal{L}(V,V)$, then $(TS)^* = S^*T^*$ and $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ and $(T^*)^* = T$.

$\hookrightarrow$ $(TS)^* = S^*T^*$ $\qquad T, S \in \mathcal{L}(V,V) \Rightarrow T^*, S^* \in \mathcal{L}(V,V)$

$\qquad\qquad TS \in \mathcal{L}(V,V) \Rightarrow (TS)^* \in \mathcal{L}(V,V)$

$$\langle TS(v), w\rangle = \langle T(S(v)), w\rangle = \langle S(v), T^*(w)\rangle = \langle v, S^*(T^*(w))\rangle$$
$$= \langle v, S^*T^*(w)\rangle$$

$$\Rightarrow (TS)^* = S^*T^*$$

$\hookrightarrow$ $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

$$\langle (\lambda T)v, w\rangle = \lambda\langle Tv, w\rangle = \lambda\langle v, T^*w\rangle = \langle v, \bar{\lambda} T^*w\rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$$

$\hookrightarrow$ $(T^*)^* = T$

می‌دانیم $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle = \overline{\langle T^*w, v\rangle} = \overline{\langle w, (T^*)^*v\rangle}$

$$= \langle (T^*)^*v, w\rangle$$

$$\Rightarrow (T^*)^* = T$$

3.3) If $T \in \mathcal{L}(V,W)$, then $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ and $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$

$u \in \ker(T^*) \Rightarrow \forall w \in W \quad \langle T^*u, w\rangle = 0$

$\Rightarrow \forall w \in W \quad \langle u, Tw\rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp Tw$

$u \in \ker T^* \Rightarrow u \in (\operatorname{Im} T)^\perp$ ① $\qquad$ تعریف

حال فرض می‌کنیم $u \in (\operatorname{Im} T)^\perp \Rightarrow \langle u, TT^*u\rangle = 0 \Rightarrow \langle T^*u, T^*u\rangle = 0$

$\Rightarrow \|T^*u\|^2 = 0 \Rightarrow u \in \ker T^*$ ②

①, ② $\Rightarrow \ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$

حال برای قسمت بعد داریم :

$u \in \ker T \Rightarrow Tu = 0 \Rightarrow \forall w \in W \quad \langle Tu, w\rangle = 0 \Rightarrow \forall w \in W \quad \langle u, T^*w\rangle = 0$

$\Rightarrow u \in (\operatorname{Im} T^*)^\perp$ ④

همچنین $u \in (\operatorname{Im} T^*)^\perp \Rightarrow \langle u, T^*Tu\rangle = 0 \Rightarrow \langle Tu, Tu\rangle = 0 \Rightarrow \|Tu\|^2 = 0 \Rightarrow$

$Tu = 0 \Rightarrow u \in \ker T$ ⑤

④, ⑤ $\Rightarrow \ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$

3.4) Prove that the one-dimensional laplacian $-\frac{d^2}{dx^2} : \beta \longrightarrow \beta$ is a (formally) self adjoint linear map, where:

$$\beta = \{ f \in C^\infty(0,1) \mid f(0) = f'(1) = 0 \}$$

فرض کنیم T الحاقی $-\frac{d^2}{dx^2}$ باشد پس داریم:

$$g \in \beta \,, \quad \left\langle -\frac{d^2}{dx^2} f, g \right\rangle = \langle f, Tg \rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 - \overset{f'}{f''(x)}\, \overset{g'}{\overline{g(x)}}\, dx}_{(*)} = \underbrace{\int_0^1 f(x) \overline{(Tg)(x)}\, dx}_{(1)}$$

$$(*) = \cancel{(-f' \cdot \bar{g})}\Big|_0^1 - \int_0^1 - f'(x)\, \overline{g'(x)}\, dx$$

$$= \int_0^1 f'(x)\, \overline{g'(x)}\, dx = \cancel{(f \bar{g}')}\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\, \overline{g''(x)}\, dx = \underbrace{-\int_0^1 f(x)\overline{g''(x)}\, dx}_{(2)}$$

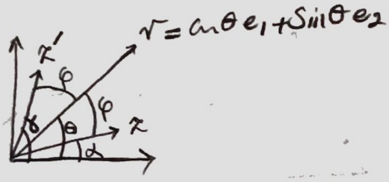
$$(1) = (2) \Rightarrow \int_0^1 f(x)\, \overline{(Tg)}(x)\, dx = -\int_0^1 f(x)\, \overline{g''(x)}\, dx$$

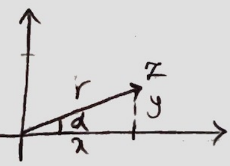
$$= \int_0^1 f(x)\, \overline{\left(-\frac{d^2}{dx^2} g\right)(x)}\, dx$$

$$\Rightarrow \overline{Tg} = \overline{-\frac{d^2}{dx^2} g} \Rightarrow T = -\frac{d^2}{dx^2}.$$

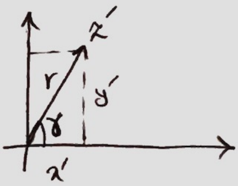
پس نتیجه می‌شود الحاقی $-\frac{d^2}{dx^2}$ که T در نظر گرفتیم، با خود $-\frac{d^2}{dx^2}$ برابر است و $\frac{d^2}{dx^2}$ خودالحاق است :)

4.1) Let $\{e_1, e_2\}$ denotes the standard basis of euclidean space $\mathbb{R}^2$ and let $r = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$. Find the matrix representation of $\sigma(r)$, the orthogonal reflection with respect to r. Show that $RR(\theta) = \sigma(r) R(\theta)$.





$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\gamma \\ r\sin\gamma \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \gamma = \varphi + \theta = \theta - \alpha + \theta = 2\theta - \alpha \rightarrow \boxed{\gamma = 2\theta - \alpha}$$

$$\theta = \varphi + \alpha \Leftrightarrow \varphi = \theta - \alpha$$

$$\Rightarrow x' = \begin{pmatrix} r\cos\gamma \\ r\sin\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(2\theta - \alpha) \\ r\sin(2\theta - \alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r(\cos(2\theta)\cos(\alpha) + \sin(2\theta)\sin(\alpha)) \\ r(\cos(2\theta)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(2\theta)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{r\cos(\alpha)}_{x}\cos(2\theta) + \underbrace{r\sin(\alpha)}_{y}\cos(2\theta) \\ \underbrace{r\cos(\alpha)}_{x}\sin(2\theta) - \underbrace{r\sin(\alpha)}_{y}\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos(2\theta) + y\sin(2\theta) \\ x\sin(2\theta) - y\cos(2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sigma(\theta) r \ ✓$$

حال سمت دوم را اثبات می‌کنیم :

$$\sigma(r)R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta & \cos 2\theta(-\sin\theta) + \sin 2\theta\cos\theta \\ \sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta & -\sin 2\theta\sin\theta - \cos 2\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta\cos(-\theta) - \sin 2\theta\sin(-\theta) & \cos 2\theta\sin(-\theta) + \sin 2\theta\cos(-\theta) \\ \sin 2\theta\cos(-\theta) + \cos 2\theta\sin(-\theta) & \sin 2\theta\sin(-\theta) - \cos 2\theta\cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(2\theta - \theta) & \sin(2\theta - \theta) \\ \sin(2\theta - \theta) & -\cos(2\theta - \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = RR(\theta) \ ✓$$

4.2) Let V_c be a complex vector space of dimension n and $T_c \in (V_c, V_c)$. Of course V_c can be considered as a real vector space if we consider just scaler multiplication by real numbers $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, and we denote this real space by V_r. The map T_c define a (real) linear map on V_r that we denote by T_r.

a) • Let $B_c = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ be a basis for V_c. Show that $B_r = \{v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n\}$ is a basis for V_r. Therfor the real dimension of V_r is $2n$.

b) • Let $M_c \in M_n(\mathbb{C})$ be the representation matrix of the (complex) linear map T_c with respect to the basis B_c. Put $M = A + iB$, where $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ and show that the representation matrix of T_r is given by $M_r = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ (0.2)

c) • Multiplication by i is a complex linear map on V_c that corresponds to a real linear map J on V_r satisfying $JJ = -I_{2n}$. Show that a linear map T_r on V_r is coming from a complex linear map T_c on V_c if $T_r J = J T_r$.
Show that, with respect to the basis B_r, the representation matrix of J is as follows:
$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

d) • If N is the representation matrix of a linear map T_r on V_r with respect to the basis B_r the $T_r J = J T_r$ if & only if N is of the following form
$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$
In this case T_r is coming from a linear map T_c on V_c and its matrix with respect to the basis B_c is given by $A + iB$:)

حل a) تولید کردن فضا : $\quad v \in V_r \Rightarrow v \in V_c$

$$\Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{C};\ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

$$\lambda_i = a_i + b_i i \to v = \sum_{i=1}^{n} (a_i + ib_i) v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i (iv_i) \in V_c$$

$$\to \exists\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ \alpha_i' \in \mathbb{R} : v = \sum \alpha_i v_i + \sum \alpha_i' (iv_i) \in V_r$$

حال استقلال خطی را بررسی می‌کنیم :

$$\text{در } V_r : \sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i (iv_i) = 0$$

$$\to \text{در } V_c : \sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i (iv_i) = 0$$

ادامه‌ی ۱۹.۲

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i i) r_i = 0 \Rightarrow \forall\, 1 \leq i \leq n : a_i + b_i i = 0$$
$$\Rightarrow \forall\, 1 \leq i \leq n : a_i = b_i = 0$$

پس بردارهای $r_1, \dots, r_n$ و $ir_1, \dots, ir_n$ مستقل خطی‌اند.

در نتیجه $B_r = \{r_1, \dots, r_n, ir_1, \dots, ir_n\}$ یک پایه برای V_r است و $\dim V_r = 2n$.

b) حال فرض کنید $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ ، در درایه‌ی i ام ۱ است :

$1 \leq i \leq n$:

$$\mu_r e_i = T_r r_i = T_c r_i = (A+Bi) e_i = A+Bi \text{ ستون } i \text{ ام}$$
$$= [i b_{ji} + a_{ji}]_{1 \leq j \leq n} = \sum_{1 \leq j \leq n} (a_{ji} + i b_{ji}) r_j$$
$$= \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ji} r_j + \sum_{1 \leq j \leq n} b_{ji} (i r_j) = \left[\frac{A}{B}\right] \text{ ستون } i \text{ ام}$$

$n+1 \leq i \leq 2n$:

$$\mu_r e_i = T_r i r_{i-n} = T_c i r_{i-n} = i T_c r_{i-n} = (A+Bi) i e_{i-n}$$
$$= (-B + iA) e_{i-n} = -B + Ai \text{ ستون } (i-n) \text{ ام}$$
$$= \sum (i a_{j(i-n)} - b_{j(i-n)}) r_j = \sum -b_{j(i-n)} r_j + \sum a_{j(i-n)} (i r_j)$$
$$= \left[\frac{-B}{A}\right] \text{ ستون } (i-n) \text{ ام}$$

در نتیجه برای هر $1 \leq i \leq 2n$:

$$\mu_r e_i = \left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right] \text{ ستون } i \text{ ام}$$

$$\Rightarrow [T_r] = \mu_r = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

c) اگر T_r از T_c بدست آمده باشد:

$$T_r J \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = T_c \left(i \begin{bmatrix} r_1 + iu_1 \\ \vdots \\ r_n + iu_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= i T_c \left(\begin{bmatrix} r_1 + iu_1 \\ \vdots \\ r_n + iu_n \end{bmatrix} \right) = J T_r \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \Rightarrow T_r J = J T_r$$

حال فرض کنید $T_r J = J T_r$. نگاشت T_c را از روی T_r می‌سازیم.

$$T_c \begin{bmatrix} r_1 + iu_1 \\ \vdots \\ r_n + iu_n \end{bmatrix} := T_r \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

ادامه‌ی (9.02)

$$\hookrightarrow T_c\begin{bmatrix} r_1+iu_1+r_1'+iu_1' \\ \vdots \\ r_n+iu_n+r_n'+iu_n' \end{bmatrix} = T_r\begin{bmatrix} r_1+r_1' \\ \vdots \\ r_n+r_n' \\ u_1+u_1' \\ \vdots \\ u_n+u_n' \end{bmatrix} = T_r\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + T_r\begin{bmatrix} r_1' \\ \vdots \\ r_n' \\ u_1' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix}$$

$$= T_c\begin{bmatrix} r_1+iu_1 \\ \vdots \\ r_n+iu_n \end{bmatrix} + T_c\begin{bmatrix} r_1'+iu_1' \\ \vdots \\ r_n'+iu_n' \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow T_c\begin{bmatrix} (a+bi)(r_1+u_1 i) \\ \vdots \\ (a+bi)(r_n+u_n i) \end{bmatrix} = aT_r\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + bT_rJ\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

از طرفی

$$(a+bi)T_c\begin{bmatrix} r_1+iu_1 \\ \vdots \\ r_n+iu_n \end{bmatrix} = aT_r\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + bJT_r\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

و چون $T_rJ = JT_r \Rightarrow$ پس T_c خطی است :)

برای بدست آوردن ماتریس J نیز از قسمت اول می‌دانیم : $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \mathcal{M}_c = 0 + Ii$ و ir ; $i(r): r \to ir$

ب) اگر $T_rJ = JT_r$ ، در اینصورت ثابت کردیم که T_r از یک T_c می‌آید و در نتیجه ماتریس T_c به فرم $\mathcal{M} = A + Bi$ است و ثابت کردیم

$$[T_r] = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = N$$

برعکس، اگر

$$N = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

در اینصورت اگر ماتریس $\mathcal{M}$ را در فضای مختلط در نظر بگیریم ، $\mathcal{M} = A + Bi$

در اینصورت $\mathcal{M}$ ماتریس یک نگاشت خطی مختلط مثل T_c است .

در اینصورت اگر T_r' را در فضای حقیقی با استفاده از T_c بسازیم ، خواهیم داشت :

$$[T_r'] = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = [T_r] = N \quad , \quad JT_r' = T_r'J$$

پس T_r' همان T_r است و داریم : $T_rJ = JT_r$

4.3) Now let v_c has an inner product structure & let B_c be an orthonormal basis, Show that we can define a real inner product on v_r by assuming B_r be orthonormal.
If T_c is a self adjoint operator on v_c, show that T_r is self adjoint on v_r and its matrix given by (0.2) is symmetric, ie. $A^*=A$ while $B^*=-B$. Formulate similar statement if T_c is unitary.

اگر B_C را مستقل بگیریم فرض کنیم باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} \langle v_i, v_j\rangle_r = \delta_{ij} \\ \langle iv_i, iv_j\rangle_r = \delta_{ij} \\ \langle iv_i, v_j\rangle_r = \delta_{ij} \end{cases}$$

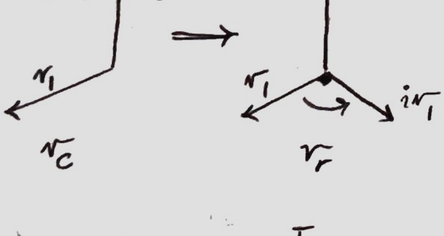
دقت شود که در فضای v_C داریم :

$$\begin{cases} \langle v_i, v_j\rangle_c = \delta_{ij} \\ \langle iv_i, iv_j\rangle_c = \delta_{ij} \\ \langle iv_i, v_j\rangle_c = i\delta_{ij} \end{cases}$$

پس در هر حالت داریم :

$$\langle v,u\rangle_r = \frac{1}{2}\left(\langle v,u\rangle_c + \langle u,v\rangle_c\right) = Re\langle v,u\rangle_c$$

در نتیجه تنها فرض اضافه شده در حالت حقیقی، عمود بودن iv_j بر v_j است و با توجه به تعریف زاویه از روی ضرب داخلی، می‌توان iv_j را دوران 90° از v_j در نظر گرفت که همچنان بر سایر بردارها عمود است.



حال اگر دو بردار $v_1, v_2 \in v_r$ باشند تعریف می‌کنیم :

$$v_1 = (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)^T \longleftrightarrow u_1 = (x_1+iy_1,\dots,x_n+iy_n)$$

$$v_2 = (x_1',\dots,x_n',y_1',\dots,y_n')^T \longleftrightarrow u_2 = (x_1'+iy_1',\dots,x_n'+iy_n')$$

$$\langle v_1,v_2\rangle_r := Re\langle u_1,u_2\rangle_c$$

۱) اگر $v_1 = v_2$ آنگاه $u_1 = u_2$ داریم :

$$\hookrightarrow \langle v_1,v_1\rangle_r = Re\langle u_1,u_1\rangle_c = \langle u_1,u_1\rangle_c \geq 0$$

$$, \langle u_1,u_1\rangle_c = 0 \iff u_1 = 0 \iff v_1 = 0$$

برای راحتی v ها را با $\tilde{v}$ نشان می‌دهیم:

$$\hookrightarrow \langle v_1+v_2, w\rangle_r = Re\langle \tilde{v}_1+\tilde{v}_2, \tilde{w}\rangle_c$$
$$= Re\langle \tilde{u}_1, \tilde{w}\rangle_c + Re\langle \tilde{v}_2, \tilde{w}\rangle_c$$
$$= \langle v_1, w\rangle_r + \langle v_2, w\rangle_r$$

$$\hookrightarrow \langle v, w\rangle_r = Re\langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle_c = Re\overline{\langle \tilde{w}, \tilde{v}\rangle_c} = Re\langle \tilde{w}, \tilde{v}\rangle_c = \langle w, v\rangle_r$$

$$\hookrightarrow \langle av, w\rangle = Re\langle a\tilde{v}, \tilde{w}\rangle_c = Re\, a\langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle_c = a\, Re\langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle_c = a\langle v, w\rangle$$

در نتیجه $\langle \cdot,\cdot\rangle_r$ یک ضرب داخلی روی V_r است و B_r نسبت به آن متعامد یکه است.

حال فرض کنید T_c خودالحاقی باشد. یعنی

$$\forall \tilde{v}, \tilde{w} \in V_c : \langle T_c\tilde{v}, \tilde{w}\rangle_c = \langle \tilde{v}, T_c\tilde{w}\rangle_c$$

$$\tilde{v} = v_i, \tilde{w} = v_j \Rightarrow \langle T_c v_i, v_j\rangle_c = \langle v_i, T_c v_j\rangle$$

$$\begin{cases} T_c v_i = \sum_{k=1}^{n} T_{ik} v_k \\ T_c v_j = \sum_{k=1}^{n} T_{jk} v_k \end{cases} \Longrightarrow T_{ij} = \overline{T_{ji}} \Rightarrow [T_{ij}] = [T_c]$$

یک ماتریس هرمیتی است

یعنی $[T_c]^* = [T_c]$ یا $M^* = M$

$$\Rightarrow A^* - iB^* = A + iB \Rightarrow A^* = A \,,\, B^* = -B$$

$$\Rightarrow M_r^* = \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ -B^* & A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = M_r$$

$$\hookrightarrow \langle T_r v, w\rangle_r = Re\langle T_c\tilde{v}, \tilde{w}\rangle = Re\langle \tilde{v}, T_c^*\tilde{w}\rangle = Re\langle \tilde{v}, T_c\tilde{w}\rangle = \langle v, T_r w\rangle$$

پس T_r نیز خودالحاقی است:

حال اگر T_c یکانی باشد، داریم:

$$\forall \tilde{v}, \tilde{w} \in V_c : \langle T_c\tilde{v}, T_c\tilde{w}\rangle_c = \langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle_c \Rightarrow \langle T_c^* T_c \tilde{v}, \tilde{w}\rangle_c = \langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle_c$$

$$\Rightarrow [T^*T] = I_{n\times n}$$

$$\Rightarrow M^*M = A^2 + B^2 + i(-BA + AB) = I \Rightarrow \begin{cases} A^2 + B^2 = I \\ AB = BA \end{cases}$$

(ادامه ی 9.3

$$\Rightarrow M_r^T M_r = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2+B^2 & BA-AB \\ AB-BA & A^2+B^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

$\Rightarrow M_r$ ماتریس متعامد است

$$\langle T r, T w\rangle_r = \mathrm{Re}\,\langle T\tilde{r}, T\tilde{w}\rangle_c = \mathrm{Re}\,\langle \tilde{r}, \tilde{w}\rangle = \langle r, w\rangle$$

$\Rightarrow T_r$ عملگر متعامد است.

5.1) Show that multiplication by i is an anti-self-adjoint and unitary operator on any complex vector space V_C with hermitian structure.

V_C , $\langle \cdot \rangle_C$ $\qquad T: V_C \to V_C$

$T(v) = iv \qquad T(-iv) = v \Rightarrow$ آپوشا است

$$\langle v, T(w)\rangle = \langle v, iw\rangle = \langle -iv, w\rangle = \langle -T(v), w\rangle = \langle T^*(v), w\rangle$$

$$\Rightarrow T^* = -T \Rightarrow T \text{ is ant-self-adjoint}$$

$$\langle Tv, Tw\rangle = \langle iv, iw\rangle = \langle v, -iiw\rangle = \langle v, T^*Tw\rangle = \langle v, w\rangle$$

$$\Rightarrow T^*T = \mathbb{I} \Rightarrow T \text{ is unitary}$$

5.2) Assuming the spectral decomposition for the self adjoint operators on real spaces with euclidian structure, prove it for the complex linear spaces with hermitian operator!

دیدیم در حالت مختلط اگر یک عنصر هرمیتی مختلط داشته باشیم مانند T_c آنگاه یک عنصر حقیقی مانند T_r داریم

در پایه‌ی حقیقی متناظر با پایه مختلط $v_1, \dots, v_n$ که پایه‌ی $v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n$ است.

$T_C = A + iB$ و دیدیم که $T_r w = \lambda w$ معادل است که $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} (Aw_1 - Bw_2) = \lambda w_1 \\ (Bw_1 + Aw_2) = \lambda w_2 \end{matrix} \quad \underset{\sim}{\text{معادل است با}} \quad (A+iB)(w_1 + iw_2) = \lambda(w_1 + iw_2) \quad \begin{cases} Aw_1 - Bw_2 = \lambda w_1 \\ Aw_2 + Bw_1 = \lambda w_2 \end{cases}$$

یعنی $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ معادل با $w_1 + iw_2$ می‌شود که مقدار ویژه‌ی یکسانی دارند. از طرفی

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_2 \\ -w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aw_2 + Bw_1 \\ Bw_2 - Aw_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda w_2 \\ -\lambda w_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_2 \\ -w_1 \end{pmatrix}$$

در نتیجه $\begin{pmatrix} w_2 \\ -w_1 \end{pmatrix}$ نیز مقدار ویژه‌ی λ دارد و متناظر با $-i(w_1 + iw_2) = w_2 - iw_1$ است. این دو بردار، مضرب از یکدیگرند چون در V_C یک بردار ویژه محسوب می‌شوند. به عبارتی دو بردار ویژه‌ی $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} w_2 \\ -w_1 \end{pmatrix}$ با مقدار ویژه‌ی λ به یک بردار ویژه‌ی $w_1 + iw_2$ با مقدار ویژه‌ی λ نگاشته می‌شوند:)

$i = 1, \dots, n$

در نتیجه در T_C در واقع v_i و iv_i با یکدیگر مستقل خطی نیستند و مضرب از یکدیگر است پس داریم: $T(v_i) = \lambda_i (v_i)$

بنابراین در پایه‌ی $\{v_1, \dots, v_n\}$ تبدیل $T_C: V_C \to V_C$ قطری می‌شود:

$$\underset{\{v_1, \dots, v_n\}}{T} \to \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ادامه‌ی (5.2

حال از این نتیجه‌ی مهم می‌گیریم و آن هم اینکه می‌توان زیرفضاهای زیر را داشت:

$$\mathbb{C}v_k = \{cv_k \mid c \in \mathbb{C}\} \subseteq V_{\mathbb{C}}$$

$L_1 := \mathbb{C}v_1$

$L_2 := \mathbb{C}v_2$

$\vdots$

$L_n := \mathbb{C}v_n$

حال چون

داریم:
$$\begin{cases} T(v_i) = \lambda_i v_i \\ T(iv_i) = \lambda_i v_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(\underbrace{cv_k}_{L_k}) = cT(v_k) = c\lambda_k v_k \subseteq L_k \\ T(civ_k) = c\,T(iv_k) = c\lambda_k v_k \subseteq L_k \end{cases}$$

$TL_1 \subseteq L_1$

$TL_2 \subseteq L_2$

$\vdots$

$TL_n \subseteq L_n$

بنابراین فضای ما تجزیه می‌شود و داریم:

$$V_{\mathbb{C}} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

و

$$T|_{L_i} = \lambda_i \mathbb{1}_{L_i}$$

6.1) application of spectral decomposition in systems of linear differential equations:

Consider the following system of differential equation: $\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

The coefficient matrix is symmetric, so it has two real eigenvalues. Diagonalize the matrix and solve the differential equation. Investigate how the behaviour & stability of the solutions depend on the nature of the eigenvalues. Draw the phase portrait of the solutions & highlight the eigenvectors.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow M' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = V^{-1} M V \longrightarrow$$

$V = (v_1 | v_2)$ که v_1 و v_2 بردارهای ویژه متناظر با λ_1 و λ_2 هستند.

$$M v_1 = \sqrt{2}\, v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M v_2 = -\sqrt{2}\, v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & -\sqrt{2}+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{2}+2}{4} \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \dot{X} = M X \Rightarrow V^{-1}\dot{X} = V^{-1} M X \xrightarrow{X = VY} \underbrace{V^{-1}\dot{X}}_{\dot{Y}} = V^{-1} \underbrace{M V}_{M'} Y$$

$$\Rightarrow \dot{Y} = M' Y \rightsquigarrow \text{uncoupled}$$

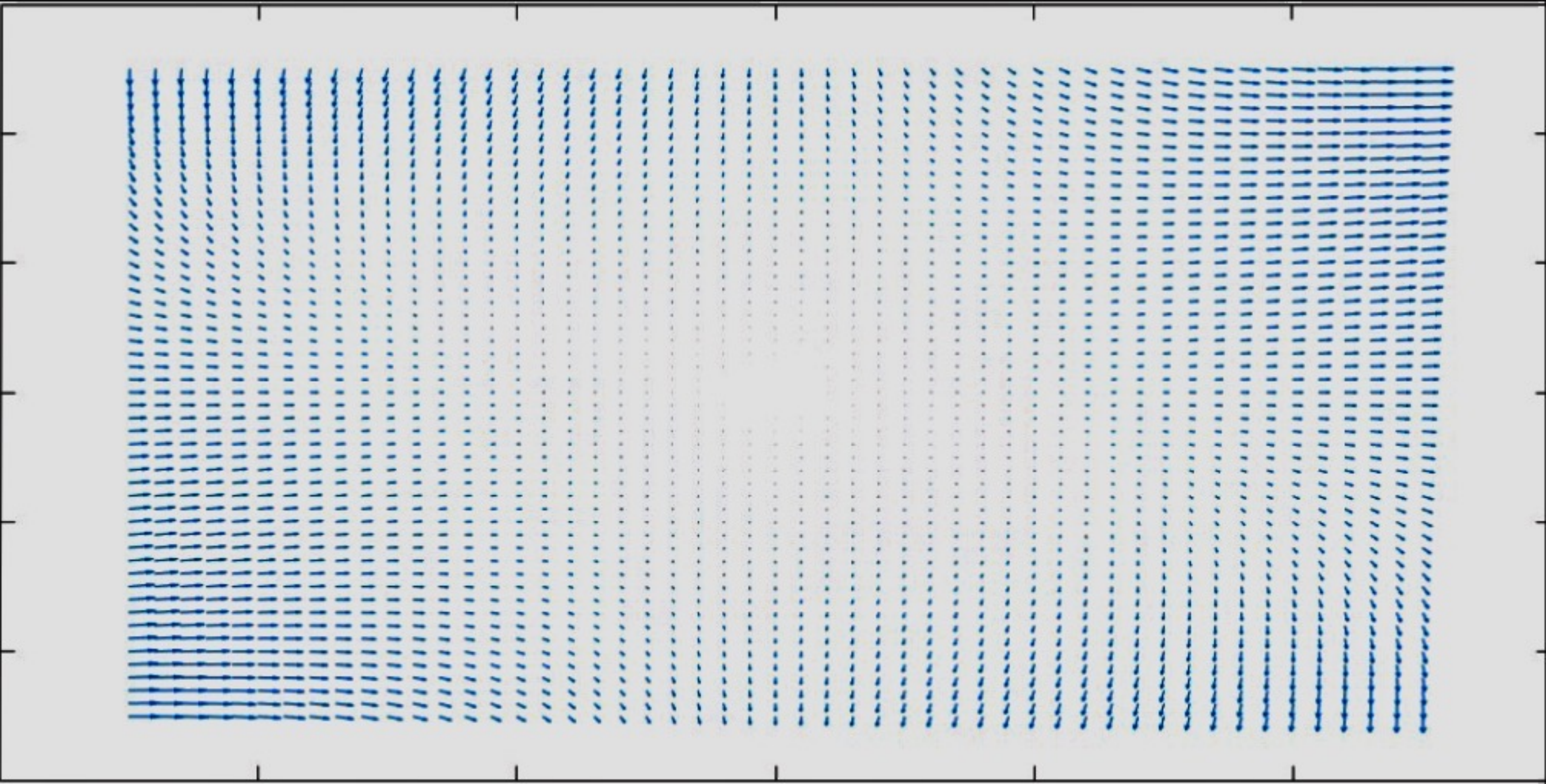
$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} Y \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} c_1 e^{\sqrt{2}t} \\ c_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}$$

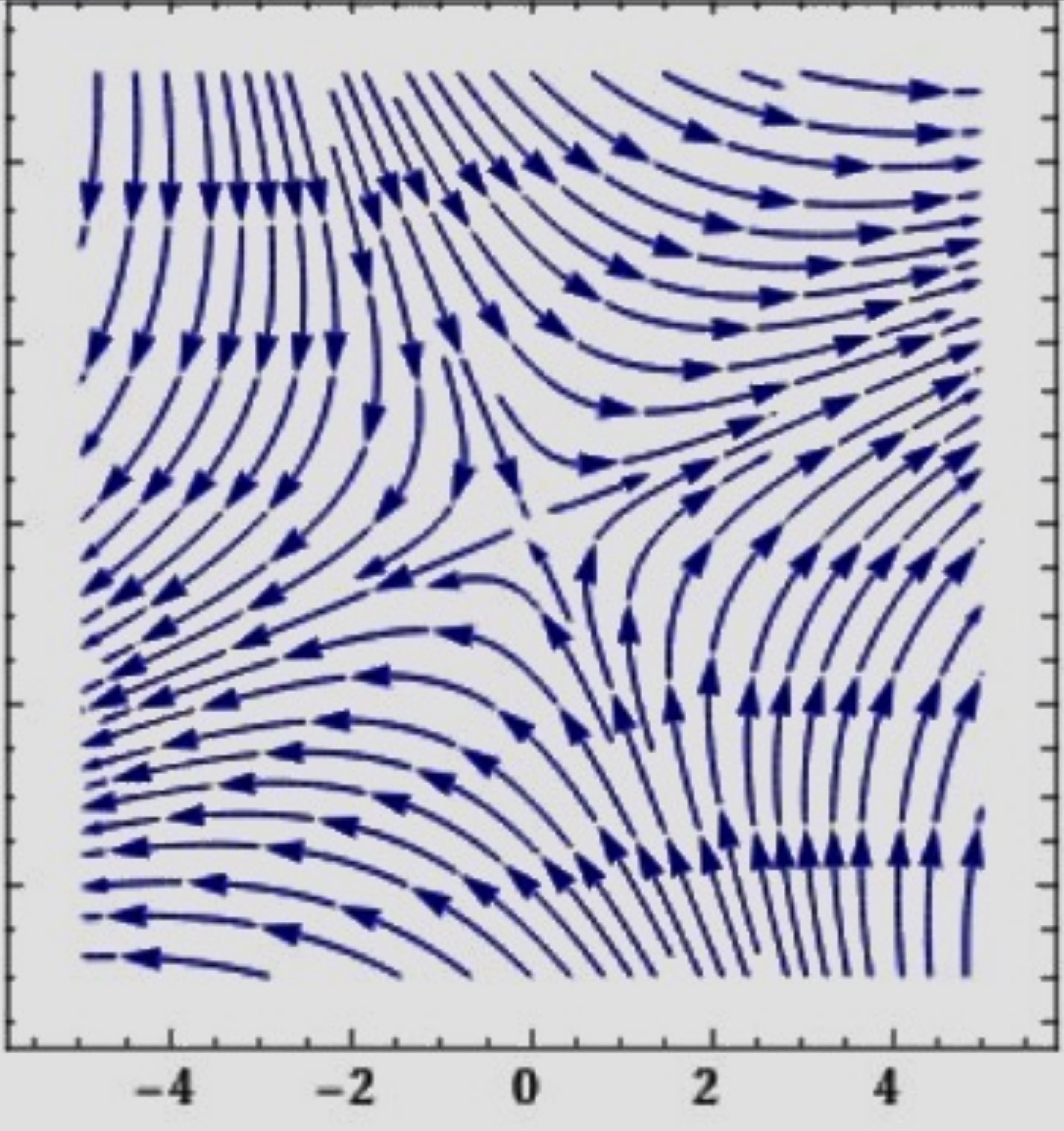
$$\Rightarrow X = VY = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & -\sqrt{2}+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{\sqrt{2}t} \\ c_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} c_1(\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t} + c_2(-\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t} \\ c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}$$

در این مسئله، $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ است پس نقطه تعادل unstable است و saddle point است.

phase portrait نیز در صفحه بعد کشیده شده در نرم افزار MATLAB.





−4
−2
0
2
4

6.2) Solve the same problem when the coefficient matrix is given by the Jordan block

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Here λ is a complex number. Discuss the how the solution's stability depend on the real part of λ. Indeed each linear map T on a complex vector space can be written as the direct sum of Jordan's blocks as follows

$$T = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

this is the Jordan Canonical form of the transformation T. Assuming this form for the linear map T, try to figure out how to find the basis that produce this representation and what are λ_j?

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \det(J_\lambda - \alpha I) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-\alpha)^3 = 0 \Rightarrow$$ λ ریشه با مرتبه تکرار 3 است

با کمک روش بردارهای ویژه تعمیم یافته داریم :

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A-\lambda I)v_k^i = v_{k-1}^i \quad (v_0^i = 0)$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

پس 3 بردار ویژه تعمیم یافته مستقل خطی بدست آوردیم :

$$v = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{\alpha t} + c_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}te^{\alpha t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{\alpha t}\right) + c_3\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^{\alpha t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}te^{\alpha t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{\alpha t}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + \frac{1}{2}c_3 t^2 e^{\lambda t} \\ y = c_2 e^{\lambda t} + c_3 t e^{\lambda t} \\ z = c_3 e^{\lambda t} \end{cases}$$

ادامه ص 6.2)

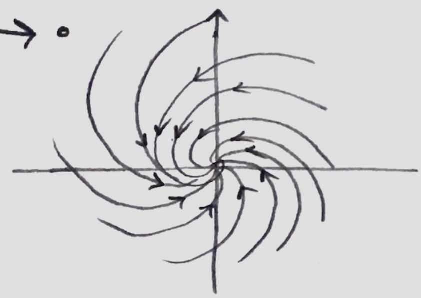
که در آن $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$.

حال اگر $\lambda_1<0$ و $\lambda_2\neq0$

در این صورت هیچ بردار ویژه‌ی حقیقی نداریم و نقطه‌ی تعادل، stable focus است و همگی

مسیرها به صورت مارپیچ حول مبدا هستند و همگی به سمت درون هستند.

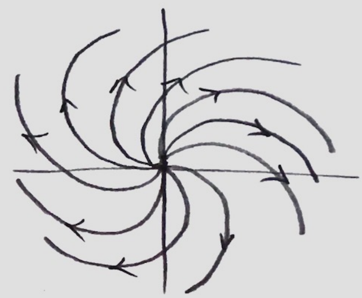
$$t\to\infty \qquad e^{\lambda t}=e^{(-|\lambda_1|+i\lambda_2)t}\longrightarrow 0$$



اگر $\lambda_1>0$ و $\lambda_2\neq0$ داریم:

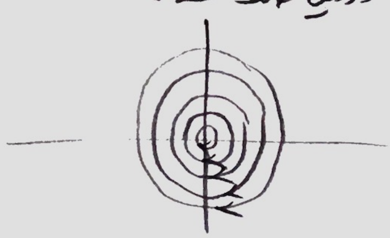
باز هم سیستم هیچ بردار ویژه‌ی حقیقی ندارد و نقطه‌ی تعادل، unstable focus است و مسیرها مانند حالت قبل مارپیچ حول مبدا هستند اما جهت به سمت بیرون است.

$$t\to-\infty \qquad e^{\lambda t}=e^{(\lambda_1+i\lambda_2)t}\longrightarrow 0$$



حال اگر $\lambda_1=0$ و $\lambda_2\neq0$ باشد:

سیستم در این حالت دو مقدار ویژه‌ی موهومی دارد و بردار ویژه‌ی حقیقی ندارد. در این حالت، مسیرها به صورت مسیرهای بسته حول مبدا هستند. در این حالت نقطه‌ی تعادل stable است و center است.



7.1) In above calculation find the explicit expression for $h_1(x)$, $h_2(x)$, and $h_3(x)$.

$$\psi_k(x) = h_k(x)\, e^{-\frac{ax^2}{2}} \qquad a = \hbar\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\alpha = m\omega$$

$$\psi_0 = C_0 e^{-\frac{1}{2}ax^2}$$

$$\psi_k = A^* \psi_{k-1} \times \frac{1}{\sqrt{2ka}} \quad , \quad A^* = ax - \frac{d}{dx}$$

اگر قرار دهیم $\psi_k = h_k e^{-\frac{1}{2}ax^2}$ در این صورت

$$h_k(x) e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \frac{1}{\sqrt{2ka}}\left(ax\psi_{k-1} - \frac{d\psi_{k-1}}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2ka}}\left(ax\, h_{k-1}(x) - h'_{k-1}(x) + ax\, h_{k-1}(x)\right) e^{-\frac{1}{2}ax^2}$$

$$\Rightarrow \quad h_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2ka}}\left(2ax\, h_{k-1}(x) - h'_{k-1}(x)\right)$$

$$h_0 = C_0 \, ,$$

$$\Rightarrow h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}(2axC_0)$$

$$h_2(x) = \frac{1 \times C_0}{(\sqrt{2a})^2\sqrt{2!}}(4a^2x^2 - 2a)$$

$$h_3(x) = \frac{C_0}{(\sqrt{2a})^3\sqrt{3!}}(8a^3x^3 \underbrace{- 4a^2x - 8a^2x}_{-12a^2x})$$

7.2) Time Depending Schrödinger Equation: Imagine that the initial state of a harmonic oscillator is given by $\psi(0,x) = \psi_k(x)$. Solve the following Schrödinger equation to find the state at time t:

روش اول

$$\psi(t,x) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}} \underbrace{\psi(0,x)}_{\psi_k(x)}$$

$$\dot{\psi}(t,x) = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,\psi(t,x)$$

ما مقادیر ویژه و بردارهای ویژه عملگر $\hat{H}$ را یافتیم. پس اگر $\hat{H}$ را در پایه ها بنویسیم

$$\psi_0, \psi_1, \dots$$
$$(1+2k)a$$

$$\rightarrow \hat{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \psi = \sum a_i \psi_i$$

بطوریکه $\psi(t,x) = \sum a_i(t)\,\psi_i$

$$\rightarrow a_i(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\lambda_i}\, a_i(0)$$

حال $\hat{H}$ قطری شده را این به DE و اینکه وقتی برحسب مقادیر ویژه $\hat{H}$ تجزیه می‌شود.

روش دوم

ابتدا اثر $e^{-\frac{i}{\hbar}tH}$ را روی ψ_k محاسبه می‌کنیم:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\psi_k = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{-iH}{\hbar}\right)^n \frac{H^n\psi_k}{n!} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{-iH}{\hbar}\right)^n \frac{E_k^n\psi_k}{n!} = e^{\frac{-itE_k}{\hbar}}\psi_k \,,\; E_k = (2n+1)a$$

حال اثر این عملگر را روی $\psi(x,0)$ محاسبه می‌کنیم

$$\psi(x,t) = e^{\frac{-iHt}{\hbar}}\psi(x,0)$$

$$= e^{\frac{-itH}{\hbar}}\sum_{k\geq 0}\alpha_k\psi_k$$

$$= \sum_{k\geq 0}\alpha_k e^{\frac{-itH}{\hbar}}\psi_k = \sum_{k\geq 0}\alpha_k e^{\frac{-itE_n}{\hbar}}\psi_k$$

8.2) Find the SVD for the following matrix:

$$M = U \Sigma V^T \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^TM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times4} \Rightarrow \det(M^TM - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 1 \quad \lambda_4 = 1$$

$$\Rightarrow M^TM v_i = \lambda_i v_i \Rightarrow \begin{cases} v_1^T = [0,\ 0.5774,\ -0.5774,\ -0.5774] \\ v_2^T = [-1,\ 0,\ 0,\ 0] \\ v_3^T = [0,\ 0.8165,\ 0.4082,\ 0.4082] \\ v_4^T = [0,\ 0,\ 0.7071,\ -0.7071] \end{cases}$$

ستون های V $\leftarrow$

حال برای بدست آوردن u_i ها که ستون های U هستند، هم می‌توان از رابطه‌ی $u_i = \frac{1}{s_i} M v_i$ استفاده کرد و هم می‌توان مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی متناظر آن را برای ماتریس MM^T بدست آورد که اینجا چون ماتریس 5x4 است و فقط 4 تا v_i داریم از طریق فرمول اول فقط می‌توان 4 تا را محاسبه کرد و برای پنجمی از v_i ها مجبوریم برداری مستقل خطی از 4 بردار دیگر و همچنین عمود بر آن‌ها پیدا کنیم، به همین دلیل از راه دوم یعنی محاسبه‌ی بردارهای ویژه‌ی MM^T استفاده می‌کنیم (ماتریس کوچک است و نتیجتاً سختی چندانی ندارد)

$$MM^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(MM^T - \lambda I) = 0$$

مقادیر ویژه‌ی MM^T مانند مقادیر ویژه‌ی M^TM هستند و چون MM^T ماتریسی 5x5 است، یک مقدار ویژه بیشتر از M^TM دارد و آن هم 0 است.

$$\hookrightarrow \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 1 \quad \lambda_4 = 1 \quad \lambda_5 = 0$$

حال بردارهای ویژه:

$$MM^T u_i = \lambda_i u_i \Rightarrow \begin{cases} u_1^T = [0,\ -0.5774,\ 0,\ 0.5774,\ -0.5774] \\ u_2^T = [0.7071,\ 0,\ -0.7071,\ 0,\ 0] \\ u_3^T = [0,\ -0.4082,\ 0,\ 0.4082,\ 0.8165] \\ u_4^T = [0,\ -0.7071,\ 0,\ -0.7071,\ 0] \\ u_5^T = [-0.7071,\ 0,\ 0.7071,\ 0,\ 0] \end{cases}$$

ستون های U $\leftarrow$

مقادیر منفرد $\longrightarrow$ $s_1 = 2 \quad s_2 = 1.4142 \quad s_3 = 1 \quad s_4 = 1$

$$U=\begin{bmatrix} 0 & -0.7071 & 0 & 0 & -0.7071 \\ -0.5774 & 0 & -0.4082 & -0.7071 & 0 \\ 0 & -0.7071 & 0 & 0 & 0.7071 \\ 0.5774 & 0 & 0.4082 & -0.7071 & 0 \\ -0.5774 & 0 & 0.8165 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5\times5}$$

$$S=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4142 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5\times4}$$

$$V=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.5774 & 0 & 0.8165 & 0 \\ -0.5774 & 0 & 0.4082 & 0.7071 \\ -0.5774 & 0 & 0.4082 & -0.7071 \end{bmatrix} \rightsquigarrow V^T=\begin{bmatrix} 0 & 0.5774 & -0.5774 & -0.5774 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8165 & 0.4082 & 0.4082 \\ 0 & 0 & 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M = USV^T$$

8.2) Let M be a 2×2 invertible matrix with real coefficients, then the relation (8.1) can be rewritten as follows:

$$M = U\Sigma V^* \text{ where } \Sigma=\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

A unitary matrix on $\mathbb{R}^2$ is a rotation or a rotation following a reflection, make sure you clearly understand the geometric interpretation of the action of the matrix M that the following diagram is depicting

درحالت کلی برای $M^{m\times n}$ ثابت می‌کنیم :

U یک ماتریس unitary است، همچنین V نیز ماتریس unitary است

$$UU^* = I \Rightarrow U^* = U^{-1}$$

$$VV^* = I \Rightarrow V^* = V^{-1}$$

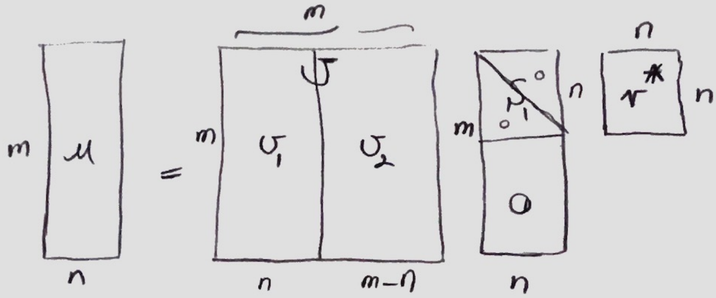
درنتیجه داریم :

$$U^*MV=\left(\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\times V^{-1}} U^*M\underbrace{VV^{-1}}_{I}=\left(\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)V^{-1}$$

$$\Rightarrow \overbrace{UU^*}^{I}M = U\left(\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)V^{-1} \Rightarrow M = U\left(\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)V^{-1}$$

$$\xRightarrow{V^{-1}=V^*} M = U\left(\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)V^*$$

حال ماتریس‌ها رو بصورت صریح‌تر می‌نویسیم :



در ماتریس $S=\left(\begin{array}{c|c}\Sigma & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$ ، بلوک پایینی که $\underline{0}$ است را جدا می‌کنیم و بلوک بالا را S_1 در نظر می‌گیریم.

همچنین متناظر با این بلوک‌بندی (افراز) برای U هم همان افراز را در نظر می‌گیریم (روی ستون‌ها) و n بلوک اول را U_1 و $m-n$ بلوک بعدی را U_2 می‌نامیم. حال وقتی U را در S ضرب می‌کنیم، بلوک U_1 در S_1 ضرب می‌شود و بلوک U_2 در بلوک $\underline{0}$ در ماتریس S ضرب می‌شود. پس U_2 در حاصلضرب عملاً هیچ تأثیری ندارد.

$$U=(U_1\,U_2)\quad \begin{cases}U_1\in\mathbb{R}^{m\times n}\\ U_2\in\mathbb{R}^{m\times(m-n)}\end{cases}$$

$$S=\begin{pmatrix}S_1\\0\end{pmatrix}\rightsquigarrow S_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}M=USV^*&=(U_1\,U_2)\begin{pmatrix}S_1\\0\end{pmatrix}(V_1^*\ V_2^*)\\&=U_1S_1V^*\\&=[u_1\,u_2\cdots u_n]\begin{bmatrix}\sigma_1&&&\\&\sigma_2&&\\&&\ddots&\\&&&\sigma_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1^*\\\vdots\\v_n^*\end{bmatrix}\\&=U\Sigma V^*\end{aligned}$$

حال چون در صورت مسئله ماتریس 2×2 داریم پس $2=m=n$ است و در نتیجه داریم:

$$[M]_{2\times2}=[U]_{2\times2}[\Sigma]_{2\times2}[V^*]_{2\times2}$$

تمام ماتریس‌های ما یعنی U و Σ و V^*، 2×2 هستند و دیگر حتی در ماتریس S، در پایین آن بلوک صفری نداریم و ماتریس قطری است. در نتیجه تجزیه به واقع به صورت زیر است:

$$M=U\Sigma V^*\qquad \Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1&0\\0&\sigma_2\end{pmatrix}$$

9. Exercise 1) Give a basis-independent proof for this equality! Let $\{e_1, \dots, e_n\}$ and $\{f_1, \dots, f_n\}$ be two orthonormal basis. Then the map A defined by $A(e_i) = f_i$ is an orthonormal map and $\det(A) = \pm 1$. This can be used to conclude that $e_1^* \wedge e_2^* \wedge \dots \wedge e_n^* = \pm f_1^* \wedge f_2^* \wedge \dots \wedge f_n^*$

$$\det(T) = \det(T^*))$$

می‌دانیم که A ایزومتری است یعنی هم زاویه و هم طول تحت T حفظ می‌شود. پس اگر $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه‌ی orthonormal باشد آن گاه $\{A(e_1), \dots, A(e_n)\}$ نیز پایه‌ی orthonormal است.

ابتدا ثابت می‌کنیم $A^* f_i^* = e_i^*$. برای اینکار کافی است فقط روی پایه‌ها چک کنیم.

$$\begin{cases} e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \\ A^* f_i^*(e_j) = f_i^*(A e_j) = f_i^*(f_j) = \delta_{ij} \end{cases} \implies A^* f_i^* = e_i^*$$

از طرفی می‌دانیم

$$A^* f_1^* \wedge \dots \wedge f_n^* = \det A \; f_1^* \wedge \dots \wedge f_n^*$$
$$= \pm f_1^* \wedge \dots \wedge f_n^*$$

$$\implies \pm f_1^* \wedge \dots \wedge f_n^* = A^* f_1^* \wedge \dots \wedge f_n^*$$
$$= (A^* f_1^*) \wedge \dots \wedge (A^* f_n^*)$$
$$= e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$$

9. Exercise 2) Let P be the parallelogram in V generated by $(r_1, \dots, r_n)$ the $T(P)$ is a parallelogram generated by $(Tr_1, \dots, Tr_n)$. Show that

$$Vol(P(T)) = |\det(T)|\, Vol(P)$$

Notice that this relation holds for any parallelogram. Verify if this relation hold for any shape in V.

$\hookrightarrow \quad Vol(P(T)) = |\det(T)|\, Vol(P)$

در کلاس در حالتی که پایه orthonormal بود رابطه‌ی فوق اثبات شد.

فرض کنیم L تبدیلی باشد که $e_1, \dots, e_n$ را به $r_1, \dots, r_n$ می‌برد و همچنین T نیز تبدیلی باشد که $r_1, \dots, r_n$ را به $Tr_1, \dots, Tr_n$ می‌برد. در نتیجه ترکیب این دو تبدیل یعنی TL، پایه‌ی $(e_1, \dots, e_n)$ را به $(Tr_1, \dots, Tr_n)$ می‌برد.

می‌دانیم $\det(TL) = \det(T)\det(L)$ پس داریم:

$$Vol(L(A)) = |\det(L)|\, \overset{1}{Vol\,A} = |\det(L)|$$

$$Vol(TL(A)) = |\det(TL)|\, \overset{1}{Vol\,A} = |\det(TL)|$$
$$= |\det(T)|\,|\det(L)|$$

$$\Rightarrow Vol(T\overset{P}{L(A)}) = |\det(T)|\, Vol(\overset{P}{L(A)})$$

$$\Rightarrow Vol(T(P)) = |\det(T)|\, Vol(P)$$

9 . Exercise 3) Let $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ and $e_3=(0,0,1)$ be the standard unit vectors of $\mathbb{R}^3$ and let $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ be the linear map given by $T(x,y,z)=(2x-z,\ y+z-x,\ x+y)$.

1) For $j=1,2,3$ express $T^*e_j^*$ as a linear combination of e_1^*, e_2^* and e_3^*.

2) Find the determinant of T by comparing $T^*e_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^*$ with $e_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^*$.

3) Find the volume of the parallelogram generated by the vectors $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,2,-1)$ and $v_3=(-1,-1,0)$ and generated by Tv_1, Tv_2 and Tv_3.

4) Find the area of the parallelogram generated by v_1 and v_2.

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$
$$T^*:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$

1) $T(x,y,z)=(2x-z,\ y+z-x,\ x+y)$

$\hookrightarrow e_1^*(x,y,z)=x \qquad e_2^*(x,y,z)=y \qquad e_3^*(x,y,z)=z$

$\hookrightarrow T^*e_1^*(x,y,z) = e_1^*(T(x,y,z)) = e_1^*(2x-z,\ y+z-x,\ x+y) = 2x-z$

$= (2e_1^*-e_3^*)(x,y,z)$:)

$\hookrightarrow T^*e_2^*(x,y,z) = e_2^*(T(x,y,z)) = e_2^*(2x-z,\ y+z-x,\ x+y) = y+z-x$

$= (e_2^*+e_3^*-e_1^*)(x,y,z)$:)

$\hookrightarrow T^*e_3^*(x,y,z) = e_3^*(T(x,y,z)) = e_3^*(2x-z,\ y+z-x,\ x+y) = x+y$

$= (e_1^*+e_2^*)(x,y,z)$:)))

****

2) $T^*(e_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^*) = T^*(e_1^*)\wedge T^*(e_2^*)\wedge T^*(e_3^*)$

$= (2e_1^*-e_3^*)\wedge(e_2^*+e_3^*-e_1^*)\wedge(e_1^*+e_2^*)$

$= 2e_1^*\wedge e_2^*\wedge e_1^* + 2e_1^*\wedge e_2^*\wedge e_2^* + 2e_1^*\wedge e_3^*\wedge e_1^* + 2e_1^*\wedge e_3^*\wedge e_2^*$

$- 2e_1^*\wedge e_1^*\wedge e_1^* - 2e_1^*\wedge e_1^*\wedge e_2^* - e_3^*\wedge e_2^*\wedge e_1^* - e_3^*\wedge e_2^*\wedge e_2^*$

$- e_3^*\wedge e_3^*\wedge e_1^* - e_3^*\wedge e_3^*\wedge e_2^* + e_3^*\wedge e_1^*\wedge e_1^* + e_3^*\wedge e_1^*\wedge e_2^* = 0$

$\Rightarrow \det(T^*) = \det(T) = 0$

$3)\ Vol(T(P)) = det(T)\,Vol(P) = 0 \leftarrow$ توسط Tr_1, Tr_2, Tr_3

حاصل توسط r_1, r_2, r_3 :

$$r = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \implies Vol(P) = 1.$$

$4)\quad r_1 = (1,1,1) \quad r_2 = (1,2,-1)$

$$r_1 \times r_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1-2)i + (1+1)j + (2-1)k = -3i + 2j + k = r^{\perp}$$

$$|r_1 \times r_2| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$\implies r_1^{\perp} = \frac{(-3,2,1)}{\sqrt{14}}$$

$$\implies Area(r_1, r_2) = Vol(r_1, r_2, r^{\perp}) = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{12}{\sqrt{14}}$$

9. Exercise 4)

1) Show that the linear map $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ given by $T(x,y) = (ax, by)$ maps the unite disc $x^2+y^2 \leq 1$ to the interior of ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ then compute the area enclosed by ellipse.

$$T(x,y) = (ax, by) = (X, Y) \qquad x = X/a,\ y = Y/b$$

$$x^2 + y^2 \leq 1 \implies (X/a)^2 + (Y/b)^2 \leq 1$$

$$S(T(B)) = det(T)\,(\pi \times 1^2) = ab\pi$$

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad det(T) = ab$$

2) what will be the image of the disc if it is centred in the point $(3,2)$?

$$T(x_0, y_0) = (ax_0, by_0) = (X_0, Y_0) \qquad \begin{matrix} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{matrix}$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq 1 \rightsquigarrow \left(\frac{X-X_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y-Y_0}{b}\right)^2 \leq 1$$

$(ax_0, by_0) = (3x_0, 2y_0)$ بیضی به شعاع های a و b و مرکز