روش تصویرسازی و گرادیان کاهش یافته

مرضیه عبدالحمدی

درس بهینه سازی غیرخطی

دیماه ۱۴۰۰

فهرست موضوعی

صورت کلی مسأله

در نظر میگیریم حل مساله برنامه ریزی غیرخطی زیر:

$$
\begin{aligned}
minimize \quad & f(x) \\
s.t. \quad & g(x) \leq 0 \\
& h(x) = 0
\end{aligned}
$$

- ✓ فرض: همه ی توابع دارای مشتقات جزیی پیوسته از مرتبه ۳ هستند.

منظور از روش های اولیه؟!

- یک روش جستجو است
- بطور مستقیم با جستجو در ناحیه شدنی برای جواب بهینه, بر روی مسأله اولیه انجام میشود
- هر نقطه در این فرایند شدنی است
- مقدار تابع هدف دائما کاهش میابد

مزیت ها و معایب روش های اولیه

❖ مزیت ها

۱. اگر فرایند قبل از رسیدن به جواب متوقف شود، نقطه فعلی شدنی است.
۲. اغلب میتوان تضمین نمود که اگر دنباله ای همگرا تولید کنند، نقطه ی حدی آن دنباله باید دست کم یک مینیمم مقید موضعی باشد.
۳. بیشتر روش های اولیه متکی بر ساختار خاصی، همچون تحدب، نیستند.

❖ معایب

۱. نیاز به نقطه شروع شدنی دارد.
۲. از نظر محاسباتی، قرار داشتن در ناخیه ی شدنی در روند اجرا، بسیار سخت است.

روش های جهت های شدنی

در هر گام داریم:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

- **جهت شدنی:**

بردار d_k را یک جهت شدنی گوییم اگر

$$\exists\, \gamma > 0 : \quad \forall\ 0 \le \alpha \le \gamma \qquad x_k + \alpha d_k \ \ feasible$$

- **جهت شدنی بهبود دهنده:**

بردار d_k را یک جهت شدنی بهبود دهنده گوییم اگر

$$\exists\, \gamma > 0 : \quad \forall\ 0 \le \alpha \le \gamma \qquad x_k + \alpha d_k \ \ feasible\, , \qquad f(x_k + \alpha d_k) < f(x_k)$$

روش زونتدیک (Zoutendijk Method)

مسأله برنامه ریزی زیر با قیود خطی را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} minimize \quad & f(x) \\ s.t. \quad & Ax \le b \\ & Qx = q \end{aligned} \qquad *$$

- **مقدار دهی اولیه:**

$$x_1 \ \ feasible: \ \ Ax_1 \le b \, , Qx_1 = q$$

$$k = 1$$

روش زونتدیک (Zoutendijk Method)

- **مرحله اصلی**

گام ۱:

- x_k را داریم
- $A^T = (A_1^T, A_2^T), b^T = (b_1^T, b_2^T)$
- d_k پاسخ بهینه برای مسأله زیر است:

$$\begin{aligned} &minimize \quad \nabla f(x)^T d \\ &s.t. \quad A_1 d \le 0 \\ &\qquad\quad Qd = 0 \\ &for\ j = 1,2,\dots,n \quad -1 \le d_j \le 1 \\ &(or\ d^T d \le 1\ or \nabla f(x)^T d \ge -1) \end{aligned}$$

P_1 P_2 P_3

- اگر $\nabla f(x)^T d = 0$ توقف کن و x_k نقطه KKTاست؛

در غیر اینصورت به گام ۲ می رویم

گام ۲:

- α_k را جواب مسأله جستجوی خطی زیر میگیریم:

$$\begin{aligned} &minimize \ \ f(x_k + \alpha d_k) \\ &s.t. \ \ 0 \le \alpha \le \alpha_{max} \end{aligned}$$

که داریم

$$\alpha_{max} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} : \hat{d}_i > 0\right\}, & if\, \hat{d} \not\le 0 \\ \infty, & if\ \hat{d} \ge 0 \end{cases}$$

- $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
- شناسایی قیودی که بطور تساوی برقرار میشوند(موثر)
- به روز رسانی A_1, A_2
- $k = k + 1$
- به گام ۱ میرویم

روش زونتدیک (Zoutendijk Method)

لم ۱:

مسأله (❈) را در نظر میگیریم. فرض کنید x یک نقطه شدنی باشد و $A_1x = b_1,\ \ A_2x < b_2$ که $A^T = (A_1^T, A_2^T), b^T = (b_1^T, b_2^T)$.
حال بردار نامنفی d جهت شدنی در x است اگر و تنها اگر $Qd = 0$ و $A_1d \leq 0$. همچنین اگر $\nabla f(x)^T d < 0$ آنگاه d یک جهت بهبود دهنده است.

لم ۲:

مسأله (❈) را در نظر میگیریم. فرض کنید x یک نقطه شدنی باشد و $A_1x = b_1,\ \ A_2x < b_2$ که $A^T = (A_1^T, A_2^T), b^T = (b_1^T, b_2^T)$.
حال برای هر $i = 1,2,3$، x نقطه KKT است اگر وتنها اگر مقدار بهینه تابع هدف مسائل P_i برابر ۰ باشد.

روش زونتدیک (Zoutendijk Method)

مثال۱:

$$\begin{aligned} &minimize\ \ 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\ &s.t. \quad x_1 + x_2 \le 2 \\ &\quad\quad x_1 + 5x_2 \le 5 \\ &\quad\quad -x_1 \le 0 \\ &\quad\quad -x_2 \le 0 \end{aligned}$$

$$\to \nabla f(x) = (4x_1 - 2x_2 - 4, 4x_2 - 2x_1 - 6)^T$$

$$x_1 = (0,0)^T$$

			Search Direction				*Line Search*		
Iter. k	x_k	$f(x_k)$	$\nabla f(x_k)$	I	d_k	$\nabla f(x_k)^T d_k$	α_{max}	α_k	x_{k+1}
1	$(0,0)$	0	$(-4,-6)$	$\{3,4\}$	$(1,1)$	-10	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$(\frac{5}{6},\frac{5}{6})$
2	$(\frac{5}{6},\frac{5}{6})$	-6.94	$(-\frac{7}{3},-\frac{13}{3})$	$\{2\}$	$(1,-\frac{1}{5})$	$-\frac{22}{15}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{55}{186}$	$(\frac{35}{31},\frac{24}{31})$
3	$(\frac{35}{31},\frac{24}{31})$	-7.16	$(-\frac{32}{31},-\frac{160}{31})$	$\{2\}$	$(1,-\frac{1}{5})$	0			

محاسبات روش زونتدیک برای مثال۱.

روش زونتدیک (Zoutendijk Method)

حال مسأله زیر را در نظر میگیریم که ناحیه شدنی توسط قیود نامساوی که لزوما خطی نیستند تعریف شده است:

$$\begin{aligned} minimize \quad & f(x) && ** \\ s.t. \quad & g_i(x) \le 0 \quad for\ i = 1,2, \dots, m \end{aligned}$$

قضیه۱: مسأله (**) را در نظر بگیرید. فرض کنید x یک جواب شدنی باشد و I مجموعه قیود موثر باشد که $I = \{i:\ g_i(x) = 0\}$. همچنین فرض کنید f و g_i برای $i \in I$مشتق پذیرند در x و هر g_i برای $i \notin I$ در xپیوسته است. اگر $\nabla f(x)^T d < 0$و $\nabla g_i{}^T d < 0$ برای $i \in I$ آنگاه dیک جهت شدنی بهبود دهنده است.

قضیه۲: مسأله (**) را در نظر بگیرید. فرض کنید x یک جواب شدنی باشد و I مجموعه قیود موثر باشد که $I = \{i:\ g_i(x) = 0\}$. مسأله یافتن جهت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} minimize \quad & z \\ s.t. \quad & \nabla f(x)^T d - z \le 0 \\ & \nabla g_i(x)^T d - z \le 0 \quad for\ i \in I \\ & -1 \le d_j \le 1 \quad for\ \ j = 1,2, \dots, m \end{aligned}$$

حال xیک نقطه $Fritz\ John$ است اگر و تنها اگر مقدار بهینه تابع هدف در مسأله فوق برابر ۰ باشد.

روش زونتدیک (Zoutendijk Method)

الگوریتم این روش برای قیود نامساوی غیرخطی:

- **مقدار دهی اولیه:** انتخاب نقطه شدنی اولیه x_1 و سپس قرار میدهیم $k = 1$ و به مرحله اصل می رویم.
- **مرحله اصلی:**

گام ۱:

- x_k را داریم
- قرار میدهیم$I = \{i:\ g_i(x) = 0\}$
- پاسخ بهینه برای مسأله زیر است: (z_k, d_k)

$$\begin{aligned} &minimize \quad z \\ &s.t. \quad \nabla f(x)^T d - z \le 0 \\ &\qquad\ \ \nabla g_i(x)^T d - z \le 0 \ \ for\ i \in I \\ &\qquad\ \ -1 \le d_j \le 1 \ \ for\ \ j = 1,2, \dots, m \end{aligned}$$

- اگر $z_k = 0$ توقف کن و x_k نقطه $Fritz\ John$ است؛

در غیر اینصورت اگر $z_k < 0$ به گام ۲ می رویم.

گام ۲:

- α_k را جواب مسأله جستجوی خطی زیر میگیریم:

$$\begin{aligned} &minimize \ \ f(x_k + \alpha d_k) \\ &s.t. \ \ 0 \le \alpha \le \alpha_{max} \end{aligned}$$

که داریم

$$\alpha_{max} = \sup\{\alpha: g_i(x_k + \alpha d_k) \le 0 \ \ \forall i\}$$

- قرار می دهیم $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
- $k = k + 1$
- به گام ۱ می رویم

روش زونتدیک (Zoutendijk Method)

مثال۲:

$$\begin{aligned} &minimize\ \ 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\ &s.t.\qquad 2x_1^2 - x_2 \le 0 \\ &\qquad\quad x_1 + 5x_2 \le 5 \\ &\qquad\quad -x_1 \le 0 \\ &\qquad\quad -x_2 \le 0 \end{aligned}$$

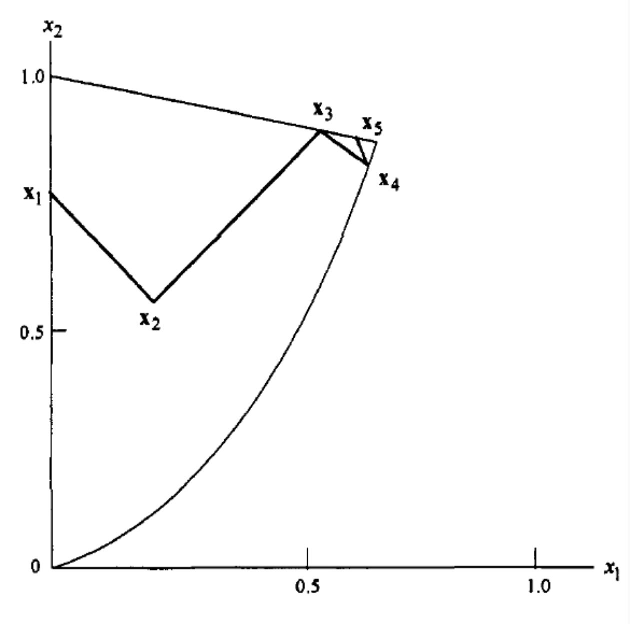
$$\rightarrow \nabla f(x) = (4x_1 - 2x_2 - 4, 4x_2 - 2x_1 - 6)^T$$

$$x_1 = (0.00, 0.75)^T$$

			Line Search					
Iter. k	x_k	$f(x_k)$	$\nabla f(x_k)$	d_k	z_k	α_{max}	α_k	x_{k+1}
1	$(0.00, 0.75)$	-3.3750	$(-5.50, -3.00)$	$(1.0000, -1.0000)$	-1.000	0.4140	0.2083	$(0.2083, 0.5417)$
2	$(0.2083, 0.5477)$	-3.6354	$(-4.25, -4.25)$	$(1.0000, 1.000)$	-8.500	0.3472	0.3472	$(0.5555, 0.8889)$
3	$(0.5555, 0.8889)$	-6.3455	$(-3.5558, -3.5554)$	$(1.0000, -0.5325)$	-1.663	0.09245	0.09245	$(0.6479, 0.8397)$
4	$(0.6479, 0.8397)$	-6.4681	$(-3.0878, -3.9370)$	$(-0.5171, 1.0000)$	-2.340	0.343	0.0343	$(0.6302, 0.8740)$

محاسبات روش زونتدیک برای مثال۲.

روش زونتدیک (Zoutendijk Method)



روش زونتدیک برای مثال۲.

نوسان زیادی را مشاهده میکنیم (پدیده ی ازدحام یا zigzagging)
بدلیل تقریبات مرتبه اولی که در این روش داریم.

روش زونتدیک (Zoutendijk Method)

نارسایی های روش جهت های شدنی:

- در مسائل کلی ممکن است هیچ جهت شدنی وجود نداشته باشد.

عدم وجود جهت شدنی

- بیشتر این روشها در ساده ی خودشان همگرای سراسری نیستند و در معرض پدیده ی ازدحام یا زیگراگ هستند. این پدیده را بدلیل بسته نبودن نگاشت الگوریتمی می توان توجیه کرد.

راهکار: بکارگیری روش مجموعه موثر

روش مجموعه مؤثر

ایده اساسی این روش: افراز کردن قیود نامساوی به دو گروه:

- آن هایی که قرار است موثر در نظر گرفته شوند
- آن هایی که قرار است ناموثر در نظر گرفته شوند ✖(صرف نظر)

مسأله مقید زیر را در نظر میگیریم:

$$\begin{aligned} &minimize\ f(x) \\ &s.t\ \ g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

شرایط لازم:

$$\begin{aligned} &\nabla f(x) + \lambda^T \nabla g(x) = 0 \\ &g(x) \leq 0 \\ &\lambda^T g(x) = 0 \\ &\lambda \geq 0 \end{aligned} \quad \xRightarrow{A=\{i:\, g_i(x^*)=0\}} \quad \begin{aligned} &\nabla f(x) + \sum_{i \in A} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ &g_i(x) = 0 \ \ i \in A \\ &g_i(x) < 0 \ \ i \notin A \\ &\lambda_i \geq 0 \ \ i \in A \\ &\lambda_i = 0 \ \ i \notin A \end{aligned}$$

روش مجموعه مؤثر

- **مجموعه کاری:** زیرمجموعه ای از قیود که در نقطه جاری مؤثرند و بنابراین نقطه جاری برای مجموعه کاری، شدنی است.
- **رویه کاری:** به رویه ای که توسط مجموعه کاری مشخص میشود، رویه کاری گوییم.

گام های هر روش مجموعه مؤثر:

i. تعیین یک مجموعه کاری فعلی که زیرمجموعه ای است متشکل از قیود مؤثر فعلی.

ii. حرکت بر رویه ای که بوسیله مجموعه کاری مشخص می شود به سوی نقطه ای بهتر.

برای مجموعه کاری مفروض W از حل مسأله زیر با قیود تساوی، نقطه x_W بدست میاید:

$$minimize\ f(x)$$

$$s.t\ \ g_i(x) = 0\ \ i \in W$$

روش مجموعه مؤثر

استراتژی مجموعه مؤثر برای حذف و اضافه کردن قیود:

I. مجموعه مؤثر اولیه داده شده
II. مینیمم سازی بر رویه کاری
III. اگر با مرز قید جدیدی مواجه شدیم، آن را به مجموعه کاری اضافه میکنیم و در غیر این صورت به گام بعد می رویم
IV. یافتن نقطه ای که f را نسبت به مجموعه کاری قیود فعلی مینیمم می سازد
V. تعیین ضرایب لاگرانژ مربوطه
VI. اگر همه ضرایب لاگرانژ نامنفی باشند، جواب موجود بهینه است؛ در غیر اینصورت قیود با ضرایب لاگرانژ منفی از مجموعه کاری حذف میشوند
VII. فرایند با مجموعه کاری جدید دوباره آغاز می شود و f در تکرار بعدی اکیدا کاهش میابد.

روش مجموعه مؤثر

قضیه ی مجموعه مؤثر: فرض کنید به ازای هر زیرمجموعه W از اندیس های قیود، مسأله مقید

$$minimize \;\; f(x)$$
$$s.t. \;\; g_i(x) = 0 \;\; i \in W$$

خوش تعریف و دارای یک ناتباهیده است. در این صورت دنباله نقاط تولید شده با استراتژی مجموعه مؤثر بنیادی به نقطه KKT همگرا می شود.

مشکلات:

- باید چندین مسأله با مجموعه مؤثرهای نادرست حل شوند.
- جواب های مسأله های میانی باید در حالت کلی، می نیمم سراسری دقیق باشند.
- برای روش هایی که با یک سری تغییرات از این روش حاصل می شوند، همگرایی را نمیتوان تضمین کرد و با پدیده ازدحام یا زیگراگ روبرو می شویم که باعث می شود مجموعه کاری نامتناهی بار تغییر یابد.

روش تصویر گرادیان

روش را مبتنی بر یک استراتژی مجموعه مؤثر بیان می کنیم.

حالت قیود خطی: مسأله زیر را داریم:

$$\begin{aligned} & minimize \;\; f(x) \\ & s.t. \;\; a_i^T x \le b_i \; i \in I_1 \\ & s.t. \;\; a_i^T x = b_i \; i \in I_2 \end{aligned}$$

تعریف: ماتریس $P_{n\times n}$ یک ماتریس تصویر (Projection) است اگر $P = P^T$ و $PP = P$.

لم: فرض کنید P یک ماتریس $n \times n$، آنگاه داریم:

1. اگر P یک ماتریس تصویر باشد، P نیمه معین مثبت است.
2. P ماتریس تصویر است اگر و تنها اگر $I - P$ ماتریس تصویر باشد.
3. فرض کنید P ماتریس تصویر است و $Q = I - P$. آنگاه $L = \{Px: x \in R^n\}$ و $L^{\perp} = \{Qx: x \in R^n\}$ زیرفضاهای خطی عمودبرهم می باشند. بعلاوه هر $x \in R^n$ را بصورت منحصربفرد می توان بصورت $p + q$ نمایش داد که $p \in L$ و $q \in L^{\perp}$.

روش تصویر گرادیان

الگوریتم تصویر گرادیان:

نقطه شدنی x را داریم:

۱. M، زیرفضای قیود مؤثر را بدست آور و $A_q, W(x)$ را تشکیل بده.
۲. محاسبه کن:

$$d = -P\nabla f(x)^T\ , \qquad P = I - A_q^T(A_qA_q^T)^{-1}A_q$$

۳. اگر $d \neq 0$، α_1, α_2 را پیدا کن بطوریکه به ترتیب در موارد زیر صدق کند:

$$\alpha_1 = arg\ max\{\alpha:\ x + \alpha d\ \ feasible\}$$
$$\alpha_2 = \arg min\{f(x + \alpha d): 0 \leq \alpha \leq \alpha_1\}$$

$x + \alpha_2 d$ را در x قراره بده و به (۱) برو.

۴. اگر $d = 0$ محاسبه کن: $\lambda = -(A_qA_q^T)^{-1}A_q\nabla f(x)^T$

الف) اگر به ازای هر j مربوط به قیود نامساوی، $\lambda_j \geq 0$ توقف کن؛ xدر شرایط کیون-تاکر صدق میکند.

ب) در غیر اینصورت، سطر متناظر نامساوی با کوچکترین مولفه λرا از A_q حذف کن(و قید متناظر را از $W(x)$حذف کن) و به ۲ برو.

روش تصویر گرادیان

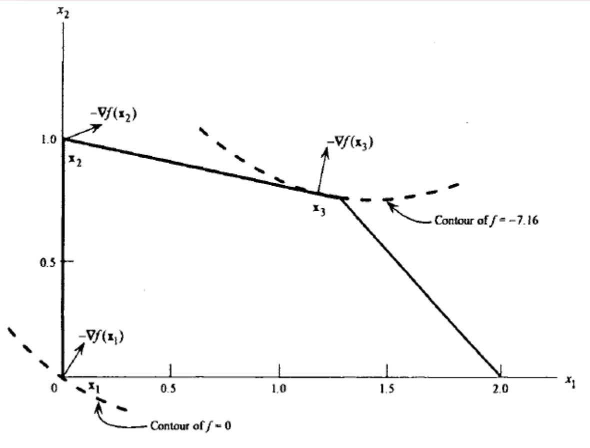
مثال۳:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\
&s.t. \qquad x_1 + \ x_2 \le 2 \\
&\qquad\qquad x_1 + 5x_2 \le 5 \\
&\qquad\qquad -x_1 \le 0 \\
&\qquad\qquad -x_2 \le 0
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow \nabla f(x) = (4x_1 - 2x_2 - 4, 4x_2 - 2x_1 - 6)^T$$

$$x_1 = (0,0)^T$$

Iter. k	x_k	$f(x_k)$	Search Direction						Line Search		
			$\nabla f(x_k)$	I	A_1	P	d_k	u	α_{max}	α_k	x_{k+1}
1	$(0,0)$	0	$(-4,-6)$	$\{3,4\}$ $\{3\}$	$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ $[-1,0]$	$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$(0,0)$ $(0,6)$	$(-4,-6)$ $-$	$-$ $\frac{1}{6}$	$-$ $\frac{1}{6}$	$-$ $(0,1)$
2	$(0,1)$	-4.00	$(-6,-2)$	$\{2,3\}$ $\{2\}$	$\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ $[1,5]$	$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\frac{25}{26} & -\frac{5}{26}\\ -\frac{5}{26} & \frac{1}{26}\end{bmatrix}$	$(0,0)$ $(\frac{70}{13},-\frac{14}{13})$	$(\frac{2}{5},-\frac{28}{5})$ $-$	$-$ $\frac{1}{4}$	$-$ $\frac{7}{31}$	$-$ $(\frac{35}{31},\frac{24}{31})$
3	$(\frac{35}{31},\frac{24}{31})$	-7.16	$(-\frac{32}{31},-\frac{160}{31})$	$\{2\}$	$[1,5]$	$\begin{bmatrix}\frac{25}{26} & -\frac{5}{26}\\ -\frac{5}{26} & \frac{1}{26}\end{bmatrix}$	$(0,0)$	$(\frac{32}{31})$	$-$	$-$	$-$



محاسبات روش تصویر گرادیان برای مثال۳.

روش تصویر گرادیان

مثال۴:

$$minimize \;\; f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$6x_1 + x_2 \leq 7$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Initial Objective Function Value: -3

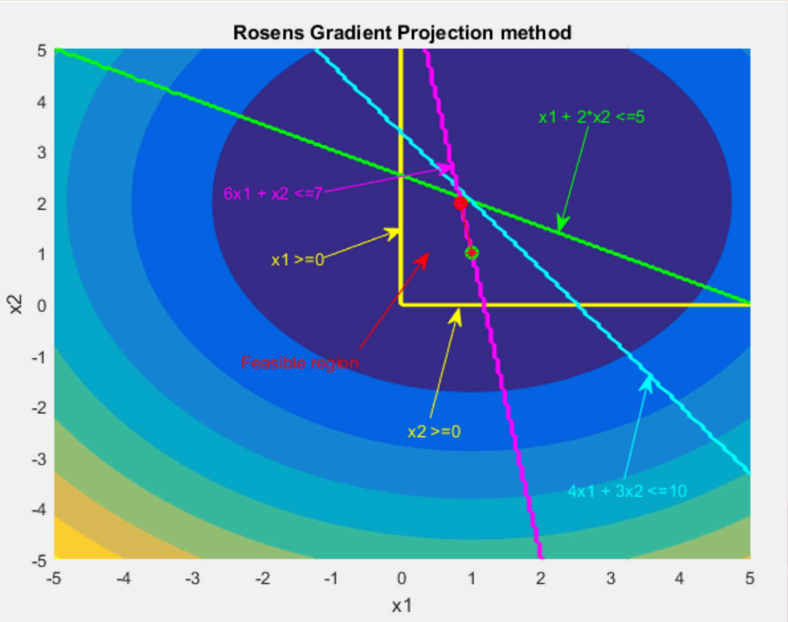
Minimum succesfully obtained...

Number of Iterations for Convergence: 2

Point of Minima: [8.378378e-01,1.972973e+00]

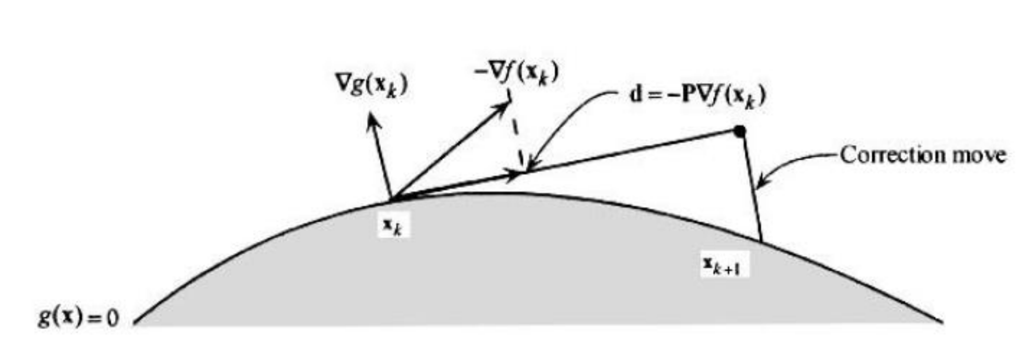
Objective Function Minimum Value: -3.972973e+00

Iterations	X_coordinate	Y_coordinate	Objective_value
1	1	1	-3
2	0.83784	1.973	-3.973



روش تصویر گرادیان

حالت قیود غیرخطی:



تصویر گرادیان در حضور قیدهای غیرخطی

$$\begin{aligned} &minimize\ f(x) \\ &s.t\ h(x) = 0 \\ &\quad g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

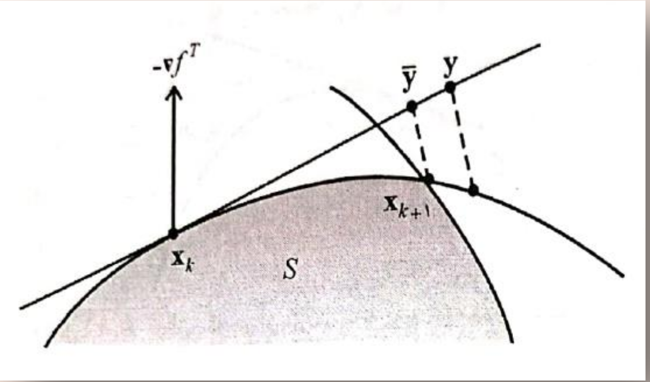
اما این روند یعنی خروج از ناحیه شدنی و بازگشت به آن باعث بروز مشکلاتی می شود!

روش تصویر گرادیان

مشکلات روش مطرح شده:

- هنگام بازگشت به نقطه ای که در قیود مؤثر قدیمی صدق میکند، ممکن است برخی نامساوی ها که ابتدا برقرار بودند، دیگر برقرار نباشند.
- محاسبه تصویرها در حالت غیرخطی مشکل تر است.

$$P_k = I - \nabla h(x_k)^T[\nabla h(x_k)\nabla h(x_k)^T]^{-1}\nabla h(x_k)$$



درون یابی برای دستیابی به نقطه شدنی

روش تصویر گرادیان

خصوصیت جدید این روش: مسأله بازگشت به ناحیه شدنی از نقاط خارج از این ناحیه است.

ایده روش تکراری:

- از نقطه ای در نزدیکی x_k در جهتی عمود بر صفحه مماس به رویه قیدی باز میگردیم:

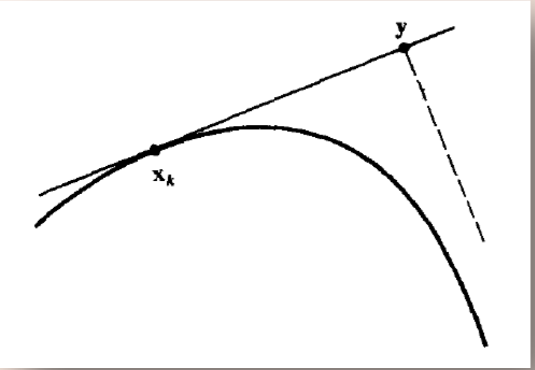
$$h(y + \nabla h(x_k)^T \alpha) \simeq h(y) + \nabla h(x_k) \nabla h(x_k)^T \alpha$$

$$\rightarrow \alpha_1 = -[\nabla h(x_k) \nabla h(x_k)^T]^{-1} h(y)$$

$$\rightarrow y_1 = y - \nabla h(x_k)^T [\nabla h(x_k) \nabla h(x_k)^T]^{-1} h(y)$$

- حال y_1 را بجای y قرار میدهیم و فرایند را تکرار میکنیم
- دنباله $\{y_i\}$توسط رابطه بازگشتی زیر بدست میاید:

$$y_{j+1} = y_j - \nabla h(x_k)^T [\nabla h(x_k) \nabla h(x_k)^T]^{-1} h(y_j)$$



حالتی که بازگشت به رویه غیرممکن است

روش تصویر گرادیان

مثال۵:

$$minimize\ f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1 - 3x_4$$
$$s.t.\ \ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 7 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3^2 + x_4 - 5.1 \geq 0$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4$$

$f(x_k)$	x_k	$iter.$ k
5.0	(2,2,1,0)	1
4.64	(2.036,1.822,1.126,0)	2

محاسبات روش تصویر گرادیان برای مثال۵.

روش تصویر گرادیان

آهنگ همگرایی روش تصویر گرادیان:

- ✓ کافی است الگوریتم ساده شده ی دیگری را که بطور مجانبی مثل تصویرگرادیان عمل میکند در نزدیکی جواب، تحلیل کنیم.
- ✓ نشان می دهیم آهنگ همگرایی اش به ساختار ویژه مقداری ماتریس هسی لاگرانژی محدود به زیرفضای مماس قیدی وابسته است.

کاهش ژئودزیک:

$$minimize\ f(x)$$
$$s.t.\ h(x)=0$$

- ✓ تغییر دیدگاه: دیدن مسأله از دید حشره روی رویه قیدی ← از دید او مسأله نامقید و $n-m$ بعدی است← تندترین کاهش
- ✓ ژئودزیک: منحنی که دارای طول کمان می نیمم بین دو نقطه مفروض است.

- ✓ الگوریتم:
  - ○ P تصویر $-\nabla f(x)^T$را بر روی صفحه مماس در x_k بدست آور
  - ○ ژئودزیک $x(t), t\geq 0$ از رویه قیدی را با ضوابط $x(0)=x_k$ و $x(0)=P$ بدست آور
  - ○ مقدار t_kمی نیمم کننده $f(x(t))$ را نسبت به $t\geq 0$ بدست آور و قرار ده $x_{k+1}=x(t_k)$

آهنگ همگرایی: $(\frac{A-a}{A+a})^2$

روش تصویر گرادیان

قضیه اصلی آهنگ همگرایی:

فرض کنید x^* یک جواب موضعی برای مسأله با قیود تساوی است و $A\ , a > 0$ به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقداروپژه های $L(x^*)$محدود شده به زیرفضای مماس $M(x^*)$ است. اگر $\{x_k\}$ دنباله ای تولید شده از روش کاهشی ژئودزیک باشد که همگرا به x^* است، آنگاه دنباله ی مقادیر هدف $\{f(x_k)\}$ بطور خطی با نسبتی نابزرگتر از

$$\left(\frac{A-a}{A+a}\right)^2$$

به $f(x^*)$ همگرا می شود.

روش گرادیان تقلیل یافته

- از دیدگاه محاسباتی ← ارتباط نزدیکی با روش سیمپلکس برنامه ریزی خطی دارد
- از دیدگاه نظری ← خیلی شبیه به روش تصویر گرادیان عمل میکند

قیود خطی:

$$\begin{gathered} minimize \;\; f(x) \\ s.t. \; Ax = b \\ x \geq 0 \end{gathered}$$

✓ فرض ناتبهگونی: هر مجموعه m ستونی از Aمستقل خطی است و هر جواب پایه ای برای قیود، m متغیر اکیدا مثبت دارد.

✓ افراز: $x = (y, z)$

$$\begin{gathered} minimize \;\; f(y, z) \\ s.t. \; By + Cz = b \\ y \geq 0, z \geq 0 \end{gathered}$$

$$\begin{cases} z \rightarrow \text{مستقل} \\ y \rightarrow \text{وابسته} \end{cases}$$

روش گرادیان تقلیل یافته

✓ این روش مبتنی بر ایده ای است که مسأله در هر مرحله تنها برحسب متغیرهای مستقل در نظر گرفته می شود.

- تابع هدف: منحصرا تابعی از z
- در نظر گرفتن قیود: استفاده از روش تندترین کاهش

گرادیان نسبت به متغیرهای مستقل(گرادیان تقلیل یافته) با محاسبه گرادیان $f(B^{-1}b - B^{-1}Cz, z)$ بدست میاید:

$$r^T = \nabla_x f(y,z) - \nabla_y f(y,z) B^{-1} C$$

- نقطه ای در شرایط لازم مرتبه اول برای بهینگی صدق میکند اگر وتنها اگر

$$r_i = 0 \quad \forall z_i > 0$$
$$r_i \geq 0 \quad \forall z_i = 0$$

- در هرتکرار جهتی بصورت زیر تعیین و کاهشی ایجاد می شود:

$$\Delta z_i = \begin{cases} -r_i & i \notin W(z) \\ 0 & i \in W(z) \end{cases}$$

روش گرادیان تقلیل یافته

یک تکرار از الگوریتم:

- قرار ده: $\Delta z_i = \begin{cases} -r_i & r_i < 0 \ or \ z_i > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$
- اگر Δz برابر با ۰ است توقف کن؛ نقطه جاری یک جواب است. در غیر اینصورت محاسبه کن:

$$\Delta y = -B^{-1}C\Delta z$$

- مقادیر $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ را به ترتیب زیر پیدا کن:

$$\alpha_1 = arg\,max\{\alpha: y + \alpha\Delta y \geq 0\}$$
$$\alpha_2 = arg\,max\{\alpha: z + \alpha\Delta z \geq 0\}$$
$$\alpha_3 = \arg min\{f(x + \alpha\Delta x): 0 \leq \alpha \leq \alpha_1, 0 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$$

قرار ده: $\overline{x} = x + \alpha_3\Delta x$

- اگر $\alpha_3 < \alpha_1$ به ۱ برو. در غیر این صورت متغیر صفر شونده در مجموعه وابسته را مستقل کن و یک متغیر اکیدا مثبت در مجموعه مستقل را وابسته کن. B, C را بهنگام کن.

روش گرادیان تقلیل یافته

همگرایی سراسری:

☹ در واقع الگوریتم مطرح شده، برای پیدا کردن جهت، بسته نیست و در معرض ازدحام است.

تعدیل الگوریتم گرادیان تقلیل یافته:

با دو تعدیل زیر میتوان به همگرایی سراسری دست یافت:

- متغیرهای پایه ای در شروع هر تکرار همواره m تا از بزرگترین متغیرها (به ترتیب) احتیار می شوند.
- فرمول Δz بصورت زیر جایگزین می شود:

$$\Delta z_i = \begin{cases} -r_i & r_i \leq 0 \\ -x_i r_i & r_i > 0 \end{cases}$$

روش گرادیان تقلیل یافته

مثال ۶:

$$\begin{aligned} &minimize \ \ 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\ &s.t. \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ &\qquad\qquad x_1 + 5x_2 + x_4 = 5 \\ &\qquad\qquad x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \nabla f(x) = (4x_1 - 2x_2 - 4, 4x_2 - 2x_1 - 6,0,0)^T$$

$$x_1 = (0,0,2,5)^T$$

$iter.$ k	x_k	$f(x_k)$
1	$(0,0,2,5)$	0.0
2	$(\frac{10}{17},\frac{15}{17},\frac{9}{17},0)$	-6.436
3	$(\frac{35}{31},\frac{24}{31},\frac{3}{31},0)$	-7.16

محاسبات روش گرادیان تقلیل یافته برای مثال۶.

روش گرادیان تقلیل یافته

قیود غیرخطی:

$$\begin{gathered} minimize\ \ f(x) \\ s.t.\ hx = 0 \\ a \le x \le b \end{gathered}$$

✓ فرض ناتبهگونی: در هر نقطه x افرازی بصورت $x = (y, z)$ با خواص زیر وجود دارد:

1. y دارای بعد mو z دارای بعد $n - m$ است
2. اگر $a = (a_y, a_z)$ و $b = (b_y, b_z)$ افرازهای متناظر a, b باشند آنگاه $a_y < y < b_y$
3. ماتریس $\nabla_y h(y, z)$، $m \times m$ در $x = (y, z)$ ناتکین است.

گرادیان تقلیل یافته نسبت به z:

$$r^T = \nabla_x f(y, z) + \lambda^T \nabla_z h(y, z)$$

λنیز در رابطه زیر صدق میکند:

$$\nabla_y f(y, z) + \lambda^T \nabla_y h(y, z) = 0$$

روش گرادیان تقلیل یافته

محاسبات:

- ابتدا با یک حرکت خطی در امتداد مماس بر رویه تعریف شده توسط $z \to z + \Delta z\ , y \to y + \Delta y$ با

$$\Delta y = -[\nabla_y h]^{-1} \nabla_z h \Delta z$$

انجام میگیرد.

- سپس یک رویه اصلاحی مانند روش تصویر گرادیان بکار میبریم
- مانند تصویر گرادیان حدودی برای پذیرش شدنی بودن باید معرفی شود
- یک الگوی تکرار ی برای بازگشت به رویه بکار گرفته میشود:

$$y_{j+1} = y_j - \left[\nabla_y h(x_k)\right]^{-1} h(y_j, W)$$

این روش همان مشکلات روش تصویر گرادیان را دارد اما میتوان آن ها را کمابیش برطرف کرد.

محاسبات در گرادیان تقلیل یافته نسبتا پیچیدگی کمتری دارد چون برای محاسبه $[\nabla h(x_k) \nabla h(x_k)^T]^{-1}$ در هرگام, ماتریس $[\nabla_y h(y, z)]^{-1}$ بکار می رود.

روش گرادیان تقلیل یافته

آهنگ همگرایی گرادیان تقلیل یافته:

مسأله با قیود تساوی زیر را در نظر میگیریم:

$$\begin{gathered} minimize\ f(x) \\ s.t.\ h(x) = 0 \end{gathered}$$

دیدگاه حشره را باز بکار میگیریم و یک روش ایده ال میدهیم.

قضیه: فرض کنید x^* یک جواب موضعی برای مسأله باشد. فرض کنید روش گرادیان تقلیل یافته ایده آل دنباله $\{x_k\}$ را همگرا به x^* تولید کند و در سرتاسر دنباله افراز $x = (y, z)$ داریم. L را میاتریس هسی لاگرانژی در x^* بگیرید . ماتریس C را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$C = \begin{bmatrix} Y(Z^*) \\ - \\ I \end{bmatrix}$$

$$Y(z) = -[\nabla_y h(y, z)]^{-1} \nabla_z h(y, z)$$

در اینصورت دنباله مقادیر هدف $\{f(x_k)\}$ بطور خطی با نسبتی نابزرگتر از

$$\left(\frac{B - b}{B + b}\right)^2$$

که b و B به ترتیب کوچکترین و بزرگترین مقداروبژه های ماتریس $Q = C^T L C$ هستند به $f(x^*)$ همگرا میشود.

روش گرادیان تقلیل یافته

مثال۷:

$$minimize \sum_{i=1}^{20}(20-i+0.5)y_i$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{20} y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{20}\sqrt{1-y_i^2} = 16$$

$$y_i = \begin{cases}-0.6 & 1 \le i \le 10 \\ 0.6 & 11 \le i \le 20\end{cases}$$

Iteration	Value	Solution (½ of chain)
0	−60.00000	$y_1 = -.8148260$
10	−66.47610	$y_2 = -.7826505$
20	−66.52180	$y_3 = -.7429208$
30	−66.53595	$y_4 = -.6930959$
40	−66.54154	$y_5 = -.6310976$
50	−66.54537	$y_6 = -.5541078$
60	−66.54628	$y_7 = -.4597160$
69	−66.54659	$y_8 = -.3468334$
70	−66.54659	$y_9 = -.2169879$
		$y_{10} = -.07492541$

Lagrange multipliers −9.993817, −6.763148

محاسبات روش گرادیان کاهش یافته برای مثال۷.

مقایسه دو روش گرادیان تقلیل یافته و تصویر گرادیان

مثال۸:

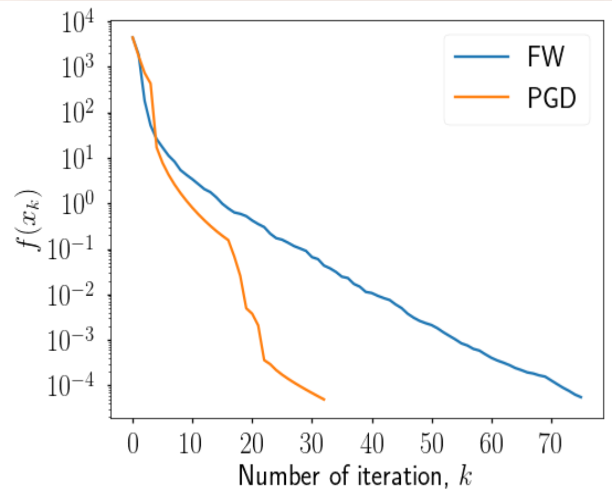
$$\begin{aligned} &minimize \quad \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2 \\ &s.t. \quad\ \ 0 \le x_i \le 1 \end{aligned}$$

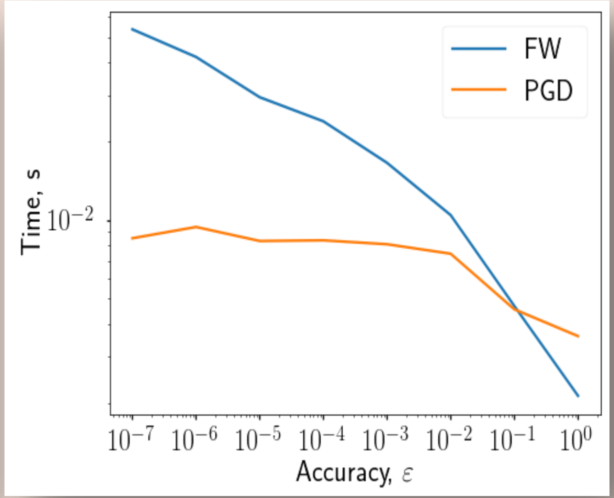
$$A \to m \times n\ (m = 50, n = 100)$$
$$x_0 \to random\ \&\ feasible$$

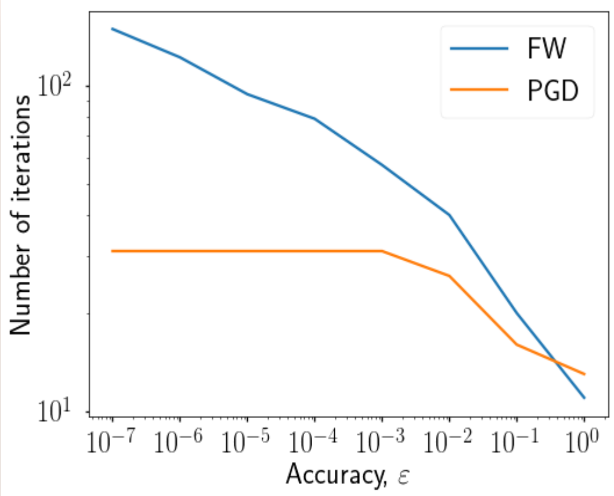
Resuts

FW method
Convergence in 75 iterations
Function value = 5.503265417124177e-05
Time = 31 ms ± 2.87 ms per loop

PG method
Convergence in 32 iterations
Function value = 4.911789065741271 5e-05
Time = 8.89 ms ± 458 µs per loop







مقایسه دو روش گرادیان تقلیل یافته و تصویر گرادیان

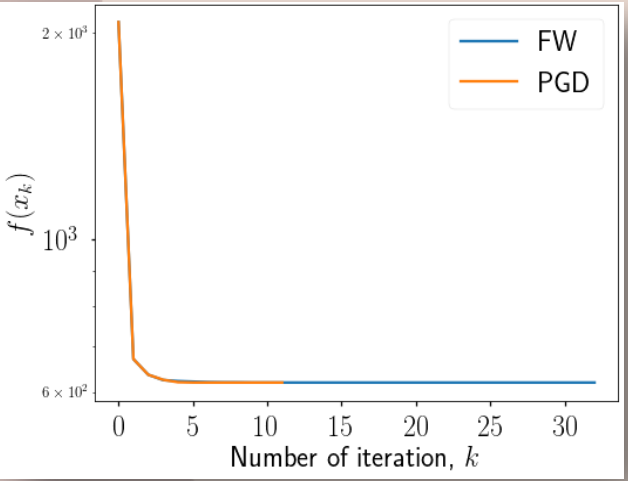
مثال۹:

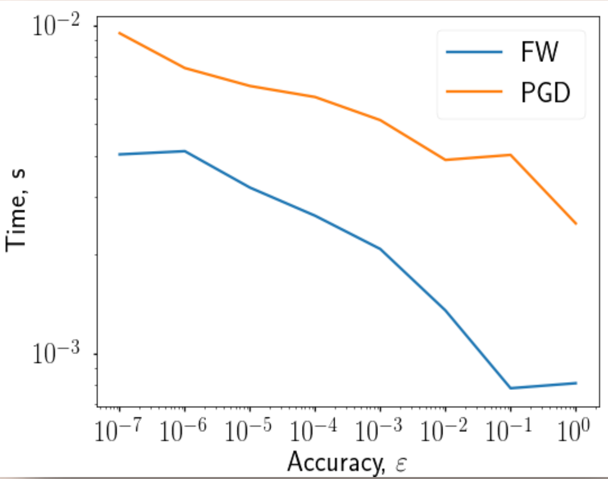
$$\begin{aligned}&minimize \quad \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2\\ &s.t. \quad \|x\|_1 \le 1\\ &x_i \ge 0\end{aligned}$$

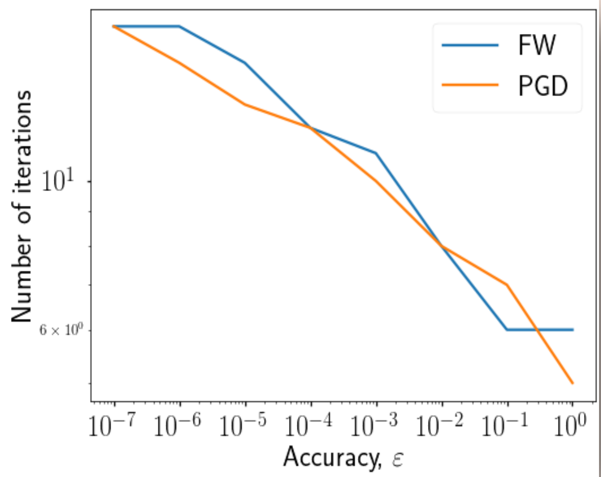
Resuts

FW method
Convergence in 32 iterations
Function value = 619.1425573630355
Time = 3.33 ms ± 327 µs per loop

PG method
Convergence in 11 iterations
Function value = 619.1425429905358
Time = 6.58 ms ± 222 µs per loop







نتیجه گیری

- ✓ عملی ترین روش های اولیه: روش تصویر گرادیان و روش گرادیان تقلیل یافته
- ✓ این دو روش بصورت بنیادی کاربردی از روش تندترین کاهش بر رویه تعریف شده توسط قیود هستند
- ✓ می توان انتظار داشت آهنگ همگرایی این دو روش تقریبا مساوی باشد
- ✓ بنظر می رسد گرادیان تقلیل یافته روش بهتری باشد؛ به آسانی ترمیم میشود تا از ازدحام اجتناب شود و در هر تکرار محاسبات کمتری نیاز دارد و در زمان کمتری از روش تصویر گرادیان احتمالا همگرا می شود

منابع

- Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali, C. M. Shetty, 3rd edition

- Linear and Nonlinear Programming, David G. Luenberger, Yinyu Ye, 3rd edition

با تشکر فراوان از توجه شما