به نام خدا

مرضیه علیداری _ 810101236

تکلیف دوم مدلسازی

① تمرین 3.5 کتاب :

$\boxed{a}$ false : → هیچ رشته‌ای را شامل نمی‌شود. → bad prefix $= (2^{AP})^+$

هر رشته‌ای به هر صورتی که وجود داشته باشد bad pref محسوب می‌شود. min bad Pref هم یک رشته‌ی تک کاراکتری است.

$E = \{\ \}$ پس این property حتما safety است.

$pref(E) = \{\ \}$ → تهی

$cl(E) = \{\ \}$ → closure اش با خودش برابر است.

پس safety است. $(E = cl(E))$

+ متعلق : $\{\ \}$ → هیچ رشته‌ای متعلق به آن نیست

+ غیرمتعلق : $(\{x>1\})^\omega$ & $(\{x=0\})^\omega$ → همواره badPref دارند (همه‌ی رشته‌ها)

$\boxed{b}$ initially x is equal to zero :

$$E = \{x=0\}(2^{AP})^\omega = \{A_0 A_1 \ldots \mid A_0 \models (x=0)\}$$

$$pref(E) = \{x=0\} + \{x=0\}(2^{AP})^* = \{x=0\}(2^{AP})^*$$

$$badPref(E) = \{A_0 \ldots A_n \mid A_0 \not\models (x=0)\} = (\{x>1\} + \varnothing)(2^{AP})^*$$

$$cl(E) = \{x=0\}(2^{AP})^\omega$$ → $E = cl(E) \Rightarrow$ پس safety است

+ متعلق : $\{x=0\}\varnothing^\omega$ & $\{x=0\}\{x>1\}(\{x=0\})^\omega$

+ غیرمتعلق : $(\{x>1\})^\omega$ & $\{x>1\}(\{x=0\})^\omega$ → همواره badpref دارند

page 2

$\boxed{c}$ initially x differs from zero:

$$E = (\{x>1\} + \emptyset)\,(2^{AP})^{\omega} = \{A_0 A_1 \cdots \mid A_0 \not\models (x=0)\}$$

$$badPref(E) = \{x=0\}(2^{AP})^{*} = \{A_0 \cdots A_n \mid A_0 \models (x=0)\}$$

$$pref(E) = (\{x>1\} + \emptyset)\,(2^{AP})^{*}$$

$$cl(E) = (\{x>1\} + \emptyset)\,(2^{AP})^{\omega} \longrightarrow E = cl(E) \rightarrow$$ پس safety است

+ مثال : $\{x>1\}\{x=0\}\emptyset^{\omega}$ & $\emptyset(\{x=0\})^{\omega}$

+ غیر مثال : $\{x=0\}^{\omega}$ & $\{x=0\}\emptyset^{\omega}$ $\longrightarrow$ اگر bad pref دارند.

$\boxed{d}$ initially x is equal to zero, but at some point x exceeds one:

$$E = \{A_0 A_1 \cdots \mid A_0 \models (x=0) \wedge \exists_{k>0}\, k \;\; A_k \models (x>1)\}$$

$$E = \{x=0\}(2^{AP})^{*}(\{x>1\} + \{x>1, x=0\})(2^{AP})^{\omega}$$

$$E_{safety} = cl(E) = \{x=0\}(2^{AP})^{\omega} + \{x=0\}(2^{AP})^{*}(\{x>1\} + \{x>1, x=0\})(2^{AP})^{\omega}$$

$$pref(E) = \{x=0\}(2^{AP})^{*} + \{x=0\}(2^{AP})^{*}(\{x>1\} + \{x>1, x=0\})(2^{AP})^{*}$$

$$E_{liveness} = E \cup (2^{AP})^{\omega} \setminus cl(E) = (2^{AP})^{\omega} \setminus \{x=0\}(2^{AP})^{\omega}$$

$$\longrightarrow E = E_{safety} \cap E_{liveness} \longrightarrow$$ ترکیبی است

+ مثال : $\{x=0\}\{x>1\}^{\omega}$ & $\{x=0\}\{x>1\}(\{x=0\})^{\omega}$

+ غیر مثال : $\underbrace{\{x>1\}}_{\text{دارد bad pref}}\{x=0\}^{\omega}$ & $\underbrace{\{x=0\}^{\omega}}_{\text{ندارد bad pref}}$

page 3

$\boxed{e}$ x exceeds one only finitely many times:

$$E=\Big(\underbrace{\big(2^{AP}\big)^{*}\big(\{x=0, x>1\}+\{x>1\}\big)}_{\text{حتما } \models(x>1)}\Big)^{+}\big(\underbrace{\emptyset+\{x=0\}}_{\not\models(x>1)}\big)^{\omega}$$

(فرض کردم که $x>1$ و $x=0$ ، تنها label هستند. و در مجموعه 2^{AP} ، $\{x=0, x>1\}$ را هم قرار دادم. فرض کردم که هر دو label نمی‌توانند همزمان وجود داشته باشند)

$$pref(E)=\Big(\big(2^{AP}\big)^{*}\big(\{x=0, x>1\}+\{x>1\}\big)\Big)^{+}+$$

این بخش را نمی‌توان حذف کرد

$$\underbrace{\Big(\big(2^{AP}\big)^{*}\big(\{x=0, x>1\}+\{x>1\}\big)\Big)^{+}\big(\emptyset+\{x=0\}\big)^{*}}_{A}=A=\big(2^{AP}\big)^{+}$$

پس liveness است. (bad prefix ندارد. نمی‌توان گفت safety است)

+ متعلق: $\{x>1\}^{+}\{x=0\}^{\omega}$ & $\{x>1\}\{x=0\}^{+}\{x>1\}^{+}\emptyset^{\omega}$

+ غیرمتعلق: $\{x=0\}^{\omega}$ & $\{x>1\}^{\omega}$

$\boxed{f}$ x exceeds one infinitely often:

$$E=\{A_0\ldots \mid \overset{\infty}{\exists} i\geq 0,\ A_i\models(x>1)\}=\big(2^{AP}\big)^{*}\Big(\{x>1\}\big(2^{AP}\big)^{*}\Big)^{\omega}=\Big(\big(2^{AP}\big)^{*}\{x>1\}\Big)^{\omega}$$

$$pref(E)=\big(2^{AP}\big)^{+}+\Big(\big(2^{AP}\big)^{*}\{x>1\}\Big)^{+}=\big(2^{AP}\big)^{+}\xrightarrow{\text{so}}$$ liveness است.

+ متعلق: $\big(\{x>1\}\big)^{\omega}$ & $\big(\{x=0\}\{x>1\}\big)^{\omega}$

+ غیرمتعلق: $\{x>1\}\big(\{x=0\}\big)^{\omega}$ & $\emptyset^{\omega}$

page 4

$\boxed{g}$ the value of x alternates between zero and two:

$$E = \{A_0 A_1 \dots \mid (\forall_{i \geq 0}\ A_i \not\models \emptyset) \wedge (\forall_{i \geq 0}\ A_i \models (x=0) \,.\, A_{i+1} \models (x \geq 1) \ \vee$$

$$\forall_{i \geq 0}\ A_i \models (x \geq 1)\ A_{i+1} \models (x=0))\}$$

$$E = (\{x=0\}\{x \geq 1\})^{\omega} + (\{x \geq 1\}\{x=0\})^{\omega} = (\{x \geq 1\} + \varepsilon)(\{x=0\}\{x \geq 1\})^{\omega}$$

به هر دو شکل می‌توان نوشت

$$pref(E) = (\{x=0\}\{x \geq 1\})^{+} + (\{x \geq 1\}\{x=0\})^{+} + (\{x=0\}\{x \geq 1\})^{*}\{x=0\} + (\{x \geq 1\}\{x=0\})^{*}\{x \geq 1\}$$

$$cl(E) = (\{x=0\}\{x \geq 1\})^{\omega} + (\{x \geq 1\}\{x=0\})^{\omega} \longrightarrow cl(E) = E \longrightarrow$$ safety است

$$badPref(E) = \{A_0 A_1 \dots A_n \mid (\exists_i\ A_i \models (x=0) \,.\, A_{i+1} \not\models (x \geq 1)) \ \vee$$

$$(\exists_i\ A_i \models (x \geq 1) \,.\, A_{i+1} \not\models (x=0))\}$$

+ متعلق : $(\{x=0\}\{x \geq 1\})^{\omega}$ & $(\{x \geq 1\}\{x=0\})^{\omega}$

+ غیر متعلق : $(\{x=0\})^{\omega}$ & $\emptyset^{\omega}$

$\boxed{h}$ true : $\longrightarrow$ همه رشته‌ها را شامل می‌شود $\xrightarrow{so}$ $pref(E) = (2^{AP})^{+} \longrightarrow$ پس liveness است

$cl(E) = (2^{AP})^{\omega} \longrightarrow$ همه چیز را شامل می‌شود $\longrightarrow$ true برابر خود است $\longrightarrow$ پس safety است

$badPref(E) = \{\} \longrightarrow$ هیچ bad prefix ای ندارد $\longrightarrow$ اگر یک رشته‌ی خاص داشته باشیم این یک bad prefix است برایش

پس هم Safety و هم Liveness است

+ متعلق : $\{x \geq 1\}^{\omega}$ & $\{x=0\}^{\omega} \longrightarrow$ همه رشته‌ها را شامل می‌شود

+ غیر متعلق : $\{\} \longrightarrow$ هیچ رشته‌ای.

page5

② تمرین 3.13 کتاب :

$$AP = \{a,b\} \longrightarrow 2^{AP} = \{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \phi$$

$$P = \{A_0 A_1 \dots \in (2^{AP})^{\omega} \mid \underset{0 \leq i < n}{a \in A_i} \wedge \{a,b\} = A_n \wedge \overset{\infty}{\exists} j \geq 0 \; b \in A_j \}$$

$$P = (\{a\})^* \{a,b\} \left((2^{AP})^* \{b\} \right)^{\omega}$$

$$P = P_{Safety} \cap P_{liveness}$$

$$P_{liveness} = \left((2^{AP})^* \{b\} \underbrace{(2^{AP})^*}_{\text{چون b رو داری قابل حذف است.}} \right)^{\omega} = \left((2^{AP})^* \{b\} \right)^{\omega}$$

$$P_{Safety} = (\{a\} + \underbrace{\{a,b\}}_{\text{ط}})^* \{a,b\} = (\{a\})^* \{a,b\}$$

می‌توان $\{a,b\}$ سمت راست را جایگزین
این دانست . و این را حذف کرد.
(برای سادگی)