

# الگوریتم‌های پیشرفته

## تمرین سری اول

زمان آپلود: 1401/7/18

موعد تحویل: 1401/7/25

مسئول تمرین: پویا جمشیدی (pooya.jamshidi@ut.ac.ir)



1. فرض کنید یک آرایه نامرتب از اعداد صحیح در بازه‌ی صفر تا  $n$  به شما داده شده است، از میان اعداد داده شده یک عدد مفقود شده است، الگوریتمی با پیچیدگی  $O(n)$  و با رویکرد تقسیم و غلبه برای پیدا کردن این عدد ارائه دهید، در مورد پیچیدگی الگوریتم خود نیز بحث کنید.

2. در یک آرایه دلخواه ( نامرتب ) الگوریتمی برای پیدا کردن یک مینیمم محلی، با پیچیدگی  $O(\lg n)$  ارائه دهید.

3. یک آرایه از اعداد طبیعی به شما داده شده است، الگوریتمی با رویکرد تقسیم و غلبه و پیچیدگی  $O(n \lg n)$  طراحی کنید که تعداد اعداد کوچکتر از هر عدد که ایندکس آنها در آرایه بزرگتر از ایندکس عدد فعلی باشد را مشخص کند، برای مثال:

Input : [ 8, 9, 2, 3, 4, 1 ]

Output : [ 4, 4, 1, 1, 1, 0 ]

4. یک لیست پیوندی را در نظر بگیرید که عملیات‌های زیر را در آن تعریف شده است:

Insert (x) : Adds the element x to the end of the list

oddDelete() : Removes every element at a location which is an odd number in the list. i.e.

removes the first, third, fifth, etc., elements of the list.

فرض کنید این عملیات insert دارای هزینه 1 و عملیات oddDelete دارای هزینه‌ای معادل با هزینه برابر با تعداد عناصر موجود در لیست است

a. فرض کنید  $n$  عملیات را انجام می‌دهیم. بدترین زمان فراخوانی oddDelete چیست؟

b. هزینه‌ی سرشکن هر یک از عملیات insert و oddDelete را با استفاده از روش accounting نشان دهید.

c. حال با استفاده از روش تابع پتانسیل هزینه‌ی سرشکن هر یک از عملیات insert و oddDelete را به‌دست آورید.

5. فرض کنید در حال ایجاد یک ساختار داده آرایه‌ای هستید که دارای اندازه ثابت  $n$  است. می‌خواهیم پس از هر تعداد عملیات درج، از این آرایه یک نسخه پشتیبان تهیه کنیم. متأسفانه، عملیات پشتیبان‌گیری بسیار پرهزینه است، انجام این عملیات دارای پیچیدگی  $O(n)$  است. درج بدون پشتیبان فقط 1 واحد زمان می‌برد.

a. چگونه می‌توان یک نسخه پشتیبان تهیه کرد و همچنان تضمین داشته باشیم که هزینه سرشکن شده درج  $O(1)$  است؟

b. ثابت کنید که می‌توان عملیات پشتیبان‌گیری را در زمان سرشکن شده  $O(1)$  انجام داد. از روش پتانسیل برای اثبات استفاده کنید.

6. فرض کنید یک "شمارنده سه‌گانه" به این صورت تعریف شده که هر یک از ارقام آن 0، 1 یا -1- می‌تواند باشد و ارقام آن مشابه شمارنده‌ی دودویی مبنای 2 هستند. به‌طور مثال عدد 3 را در این شمارنده می‌توان به دو صورت 11 و 10(-1) نشان داد. عمل افزایش در این شمارنده مشابه شمارنده‌ی دودویی بوده و به کم ارزش‌ترین رقم 1 را اضافه می‌کنیم. اگر این رقم دو شد، آن را صفر کرده و یکی به رقم بعدی اضافه می‌شود و این کار ادامه می‌یابد تا این که رقمی که به آن اضافه شده کمتر از 2 شده باشد. عمل کاهش در این شمارنده نیز به همین صورت است. عدد 1 را از کم ارزش‌ترین رقم کم می‌کنیم، اگر -2- شد، آن را صفر کرده و از رقم بعدی یکی کم می‌کنیم، تا جایی که رقم حاصل بزرگتر

از 2- باشد، با استفاده از روش پتانسیل، هزینه‌ی سرشکن عمل افزایش و کاهش در این شمارنده را محاسبه کنید.

7. درخت Splay زیر را در نظر بگیرید و عملیات‌های خواسته شده را بر روی آن انجام دهید، نحوه انجام هر عملیات را به صورت مرحله به مرحله نمایش دهید.



a. حذف عنصر 15

b. اضافه کردن عنصر 19

c. عملیات split با توجه به عنصر 13