

الگوریتم‌های پیشرفته

تمرین سری هفتم

زمان آپلود: 1401/10/17

موعده تحویل: 1401/10/23

مسئول تمرین: شقایق توسلی (sh.tavassoli@ut.ac.ir)



(1) گراف بدون جهت $G = (V, E)$ مفروض است. وزن هر یال از این گراف یک عدد مثبت است. هدف آن است که مجموعه‌ی گره‌های این گراف به دو مجموعه‌ی V_1 و V_2 افراز شود به طوری که مجموع وزن یال‌هایی که گره‌ی یک سر آن‌ها در V_1 و گره‌ی سر دیگر آن‌ها در V_2 است، حداکثر شود.
الف) برای حل این مسئله، یک الگوریتم تقریبی تصادفی ارائه دهید.
ب) مقدار تقریب الگوریتم قسمت (الف) چقدر است؟ پاسخ خود را اثبات کنید.

(2) گراف $G = (V, E)$ مفروض است. هدف آن است که $V' \subseteq V$ تعیین شود به طوری که بین هیچ یک از دو گره‌ی موجود در V' ، یالی در گراف G وجود نداشته باشد و $|V'|$ حداکثر باشد.
الف) برای حل این مسئله، یک راه حل تقریبی تصادفی ارائه دهید.
ب) مقدار تقریب الگوریتم قسمت (الف) چقدر است؟ ارائه‌ی اثبات لازم است (راهنمایی: برای اثبات می‌توانید امید ریاضی $|V'|$ را محاسبه کنید).

(3) مجموعه‌ی $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ مفروض است. مجموعه‌ی $M = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ مفروض است به طوری که:

$$\forall 1 \leq i \leq k. S_i \subseteq A$$

یک تابع هزینه به صورت $w: M \rightarrow R^+$ تعریف شده است. بنابراین وزن هر یک از S_i ها یک عدد مثبت است:

$$\forall 1 \leq i \leq k. w(S_i) > 0$$

در این مسئله، هدف پیدا کردن M' است ($M' \subseteq M$ می باشد) به طوری که همه‌ی آیتم‌های موجود در مجموعه‌ی A حداقل در یکی از مجموعه‌های موجود در M' موجود باشند و مجموع هزینه‌ی مجموعه‌های موجود در M' حداقل شود.

(الف) این مسئله را به صورت یک مسئله‌ی برنامه‌نویسی خطی عدد صحیح¹ مدل‌سازی کنید.
 (ب) با در نظر گرفتن پاسخ قسمت (الف)، پس از انجام LP relaxation، فرم برنامه‌نویسی خطی² این مسئله را بنویسید.

(ج) روشی برای گرد کردن پاسخ برنامه‌نویسی خطی این مسئله ارائه دهید. مقدار تقریب این روش چقدر است؟ اثبات مقدار تقریب لازم نیست.

(4) مجموعه‌ی A به صورت زیر تعریف شده است:

$$A = \{(c_1, d_1, e_1), (c_2, d_2, e_2), \dots, (c_k, d_k, e_k)\}$$

عدد صحیح m مفروض است به طوری که:

$$\forall 1 \leq i \leq k. c_i, d_i, e_i \in \{1, \dots, m\}$$

در این مسئله تعریف می‌شود که یک جایگشت از اعداد $\{1, \dots, m\}$ ، سه‌تایی (c_i, d_i, e_i) را می‌پذیرد اگر در این توالی، d_i بین دو عدد c_i و e_i قرار داشته باشد. مثال: با فرض آنکه $m = 7$ باشد، جایگشت $\{4, 2, 6, 3, 1, 7, 5\}$ ، سه‌تایی‌های $\{2, 1, 7\}$ و $\{7, 6, 4\}$ را می‌پذیرد، اما سه‌تایی $\{6, 1, 3\}$ را نمی‌پذیرد. هدف آن است که جایگشتی از اعداد $\{1, \dots, m\}$ پیدا شود که بیشترین تعداد از سه‌تایی‌های موجود در مجموعه‌ی A را

¹ Integer Linear Programming (ILP)

² Linear Programming (LP)

بپذیرد. برای حل این مسئله، یک الگوریتم تصادفی ارائه کنید. مقدار تقریب این الگوریتم چقدر است؟ پاسخ خود را اثبات کنید.

(5) یک فرمول boolean به فرم نرمال عطفی³ مفروض است که دارای n عدد کلز⁴ می باشد و هر کلز می تواند به تعداد دلخواه متغیر داشته باشد. فرض می شود که هر کلز فقط یک نمونه از هر متغیر (literal) دارد. همچنین فرض می شود یک متغیر و not آن متغیر به صورت همزمان در یک کلز وجود ندارند. در این مسئله هدف آن است که مقادیر متغیرهای موجود در این فرمول به طوری تعیین شوند که بیشترین تعداد ممکن از کلزها، مقدارشان true شود. یک الگوریتم تصادفی با مقدار تقریب ثابت برای این مسئله ارائه دهید. مقدار تقریب این الگوریتم چقدر است؟ پاسخ خود را به طور کامل توضیح دهید.

(6) گراف بدون جهت $G = (V, E)$ مفروض است و تابع هزینه به صورت $c: V \times V \rightarrow R^+$ تعریف شده است. دو گرهی $a \in V$ و $b \in V$ مفروض هستند. هدف آن است که مجموعه ی V به دو مجموعه ی V_1 و V_2 افراز شود به طوری که $a \in V_1$ و $b \in V_2$ باشد و $C(V_1, V_2)$ حداقل شود. مقدار $C(V_1, V_2)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$C(V_1, V_2) = \sum_{(u,v) \in E: u \in V_1, v \in V_2} c(u, v)$$

الف) این مسئله را به صورت یک مسئله ی برنامه نویسی خطی عدد صحیح مدل سازی کنید.
 ب) با در نظر گرفتن پاسخ قسمت (الف)، پس از انجام LP relaxation، فرم برنامه نویسی خطی این مسئله را بنویسید.

ج) روش حل این مسئله با استفاده از روش گرد کردن تصادفی را توضیح دهید.

³ Conjunctive normal form (CNF)

⁴ Clause