page 1

به نام خدا

تکلیف پنجم الگوریتم پیشرفته

مرضیه علیداری - 810101236

(1)

⊕ متغیرها: x_1 , x_2 , x_3

$x_1 \rightarrow$ نخود

$x_2 \rightarrow$ ذرت

$x_3 \rightarrow$ آرد لوبیا

⊕ تابع هدف: $\min \; 164x_1 + 463x_2 + 1250x_3$

⊕ محدودیت‌ها: $0{,}8 \leqslant 0{,}38x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3 \leqslant 1{,}2$

$$0{,}09x_2 + 0{,}5x_3 \geqslant 0{,}22$$

$$0{,}02x_2 + 0{,}08x_3 \leqslant 0{,}5$$

page2

⊕ متغیرها :

x_i = تعداد محصولات تولید شده در ساعات عادی در فصل i → $\begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{cases}$

y_i = تعداد محصولات تولید شده در ساعات اضافه کاری در فصل i → $\begin{cases} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{cases}$

S_i = تعداد محصولاتی که در انتهای فصل i در انبار وجود دارند → $\begin{cases} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{cases}$

⊕ تابع هدف : $\text{Min } 400x_1 + 400x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 450y_1 + 450y_2 + 450y_3 + 450y_4 + 20S_1 + 20S_2 + 20S_3 + 20S_4$

⊕ مقادیر ثابت : d_i = میزان تقاضا در فصل i → $\begin{cases} d_1 = 60 \\ d_2 = 20 \\ d_3 = 30 \\ d_4 = 25 \end{cases}$

$S_0 = 10$

⊕ محدودیت ها :

$$S_i = S_{i-1} + (x_i + y_i) - d_i \rightarrow i = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S_1 = 10 + x_1 + y_1 - 60 \\ S_2 = S_1 + x_2 + y_2 - 20 \\ S_3 = S_2 + x_3 + y_3 - 30 \\ S_4 = S_3 + x_4 + y_4 - 25 \end{cases}$$

$$S_{i-1} + (x_i + y_i) \geq d_i \rightarrow i = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10 + x_1 + y_1 \geq 60 \\ S_1 + x_2 + y_2 \geq 20 \\ S_2 + x_3 + y_3 \geq 30 \\ S_3 + x_4 + y_4 \geq 25 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 40$$

$$x_i, y_i, S_i \geq 0 \rightarrow i = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \\ S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0 \end{cases}$$

⊕ مقادیر ثابت : c_{ij} = هزینه‌ی رفتن از شهر i به شهر j

⊕ متغیرها : x_{ij}

- 1 : اگر از شهر i به شهر j برود.
- 0 : اگر از شهر i به شهر j نرود.

x_{ij} → boolean

⊕ تابع هدف : $\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

⊕ محدودیت ها :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \rightarrow j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \rightarrow i = 1, 2, \dots, n$$

⟹ فقط یک بار از هر شهر عبور کند.

$$0 \le x_{ij} \le 1 \,,\ \text{int} \rightarrow i, j = 1, 2, \dots, n$$

⟶ مسئله ILP است

← اگر محدودیت ها را تا اینجا توصیف کنیم، همچنان یک نقص دارد. ممکن است به جای یک دور واحد، چند دور ایجاد شود.

پس باید یک محدودیت دیگر هم ایجاد کنیم:

به ازای هر دو بخش (دور) که ممکن است تولید شود، یک شرط به شکل زیر اضافه می‌کنیم:

$$\sum_{i} \sum_{j} x_{ij} \ge 1$$

⟶ که i، node های موجود در یک دور و j، node های موجود در یک دور دیگر است.

1) صحیح - جواب بهینه حتماً بر روی اضلاع است.

2) غلط - در مسائل LP، یا یک جواب بهینه وجود دارد یا بی‌نهایت جواب بهینه. این به دلیل خاصیت محدب بودن فضای شدنی در مسائل LP است. در فضاهای محدب، میانگین دو نقطه که در آن فضا قرار دارند، هم در آن فضا قرار دارد. پس اگر دو جواب بهینه‌ی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) را داشته باشیم، میانگین آن‌ها یعنی $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ هم که مقدارش با آن‌ها برابر است، در این فضا قرار دارد. پس هیچ‌گاه فقط دو جواب optimal نخواهیم داشت.

3) صحیح - با اضافه کردن یک محدودیت جدید، فضای شدنی یا کوچکتر می‌شود یا تغییری نمی‌کند، بنابراین یا تابع بهینه بدتر می‌شود و یا تغییری نمی‌کند. پس هیچ‌گاه بهتر نمی‌شود.

4) غلط - خیر؛ درست نیست. جواب بهینه‌ی یک مسئله و دوآل آن مسئله باید کاملاً باهم برابر باشند. اگر جواب مسئله‌ی dual، integer نیست، پس برابر 17 نبوده. پس غلط محاسبه شده. باید 17 می‌شد.

Scanned with CamScanner

page 5

(1

$\max\ m=4x+10y$

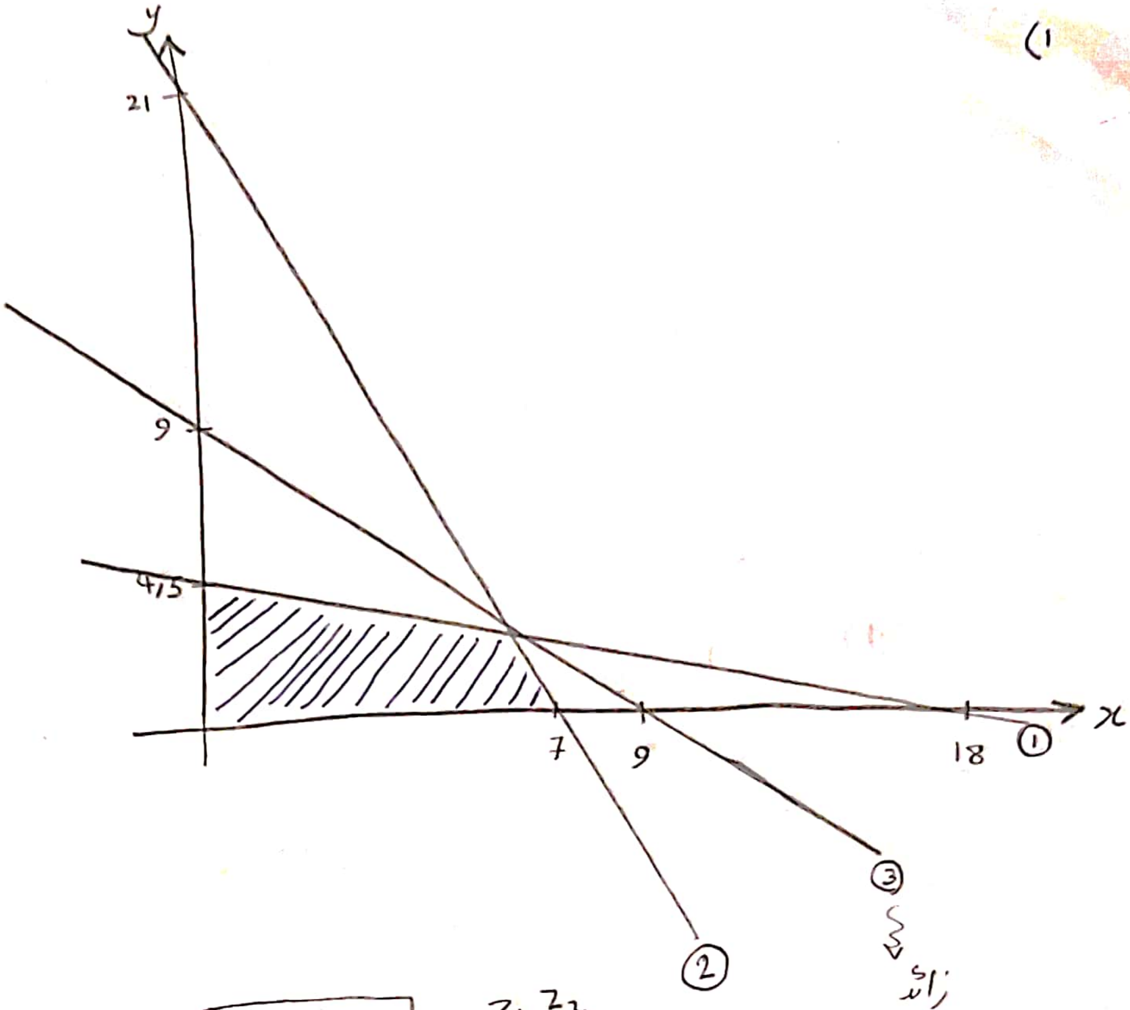
① $x+4y\leqslant 18$

② $3x+y\leqslant 21$

③ $x+y\leqslant 9$

④ $x\geqslant 0$

⑤ $y\geqslant 0$



$\begin{pmatrix} x & y \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$ constraints $(4, 5)$ $\xrightarrow{\text{ثابت } x}$ افزایش y

$y\leqslant \frac{18}{4}=4,5$

$y\leqslant 21$

$y\leqslant 9$

$\begin{pmatrix} x & y \\ 0, & 4,5 \end{pmatrix}$ constraints $(4, 1)$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$

(2

1) $\rightarrow x+4y\leqslant 18\rightarrow Z_1=18-x-4y$

4) $\rightarrow x\geqslant 0\rightarrow -x\leqslant 0\rightarrow Z_2=x$

$\Rightarrow \boxed{x=Z_2}$

$4y=18-x-Z_1=18-Z_2-Z_1$

$\hookrightarrow \boxed{y=4,5-\frac{Z_1}{4}-\frac{Z_2}{4}}$

$\max\ m=4Z_2+45-\frac{5}{2}Z_1-\frac{5}{2}Z_2=\boxed{45-2,5Z_1+1,5Z_2}$

① $\cancel{Z_2}+18-Z_1-\cancel{Z_2}\leqslant 18\Rightarrow \boxed{Z_1\geqslant 0}$

② $3Z_2+4,5-\frac{Z_1}{4}-\frac{Z_2}{4}\leqslant 21$

$\boxed{\frac{11}{4}Z_2-\frac{Z_1}{4}\leqslant 16,5}$

③ $Z_2+4,5-\frac{Z_1}{4}-\frac{Z_2}{4}\leqslant 9$

$\boxed{-\frac{Z_1}{4}+\frac{3}{4}Z_2\leqslant 4,5}$

④ $\boxed{Z_2\geqslant 0}$

⑤ $4,5-\frac{Z_1}{4}-\frac{Z_2}{4}\geqslant 0$

$-\frac{Z_1}{4}-\frac{Z_2}{4}\geqslant -4,5\rightarrow \boxed{\frac{Z_1}{4}+\frac{Z_2}{4}\leqslant 4,5}$

page 6

$z_1 \quad z_2$

$(0, 0)$

Constraints

$(1, 4)$

$\xrightarrow[\text{افزایش } z_2]{\text{ثابت } z_1}$

$z_1 \quad z_2$

$(0, 6)$

Constraints

$(1, 3)$

$\rightarrow$ ادامه‌ی 2) 5)

$w_1 \quad w_2$

$(0, 0)$

$\frac{11}{4} z_2 \leq 16/5 \Rightarrow z_2 \leq 6$

$\frac{3}{4} z_2 \leq 4/5 \Rightarrow z_2 \leq 6$

$\frac{z_2}{4} \leq 4/5 \Rightarrow z_2 \leq 18$

می‌توانستم به جای
2 و 3 را هم بگذارم
هر دو یک محدودیت
$z_2 \leq 6$ ایجاد کرده‌اند.

1) $z_1 \geq 0 \rightarrow -z_1 \leq 0$

$\hookrightarrow w_1 = z_1$

3) $-\frac{z_1}{4} + \frac{3}{4} z_2 \leq 4/5$

$\hookrightarrow w_2 = 4/5 + \frac{z_1}{4} - \frac{3}{4} z_2$

$\Rightarrow \boxed{z_1 = w_1}$

$\frac{3}{4} z_2 = 4/5 + \frac{w_1}{4} - w_2$

$\boxed{z_2 = 6 + \frac{w_1}{3} - \frac{4}{3} w_2}$

max $\quad m = 45 - 2/5 w_1 + 9 + \frac{w_1}{2} - 2 w_2$

$\boxed{= \boxed{54} - 2 w_1 - 2 w_2}$

① $\boxed{w_1 \geq 0}$

② $\frac{33}{2} + \frac{11}{12} w_1 - \frac{11}{3} w_2 - \frac{w_1}{4} \leq 16/5$

$\boxed{\frac{2}{3} w_1 - \frac{11}{3} w_2 \leq 0}$

③ $-\frac{w_1}{4} + 4/5 + \frac{w_1}{4} - w_2 \leq 9$

$\boxed{-w_2 \leq 4/5}$

④ $6 + \frac{w_1}{3} - \frac{4}{3} w_2 \geq 0$

$\boxed{-\frac{w_1}{3} + \frac{4}{3} w_2 \leq 6}$

⑤ $\frac{w_1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{w_1}{12} - \frac{w_2}{3} \leq 4/5$

$\frac{w_1}{3} - \frac{w_2}{3} + \frac{3}{2} \leq 4/5$

$\boxed{\frac{w_1}{3} - \frac{w_2}{3} \leq 3}$

$\longrightarrow$ با توجه به اینکه ضرایب
همگی منفی شده‌اند، دیگر
لازم نیست Origin را تغییر
داد. فقط کافی است
x و y را بدست بیاوریم.

$m = 4x + 10y = 54 \rightarrow x = 6, \; y = 3$

$4(3) + 10(3) = 54 \oslash$

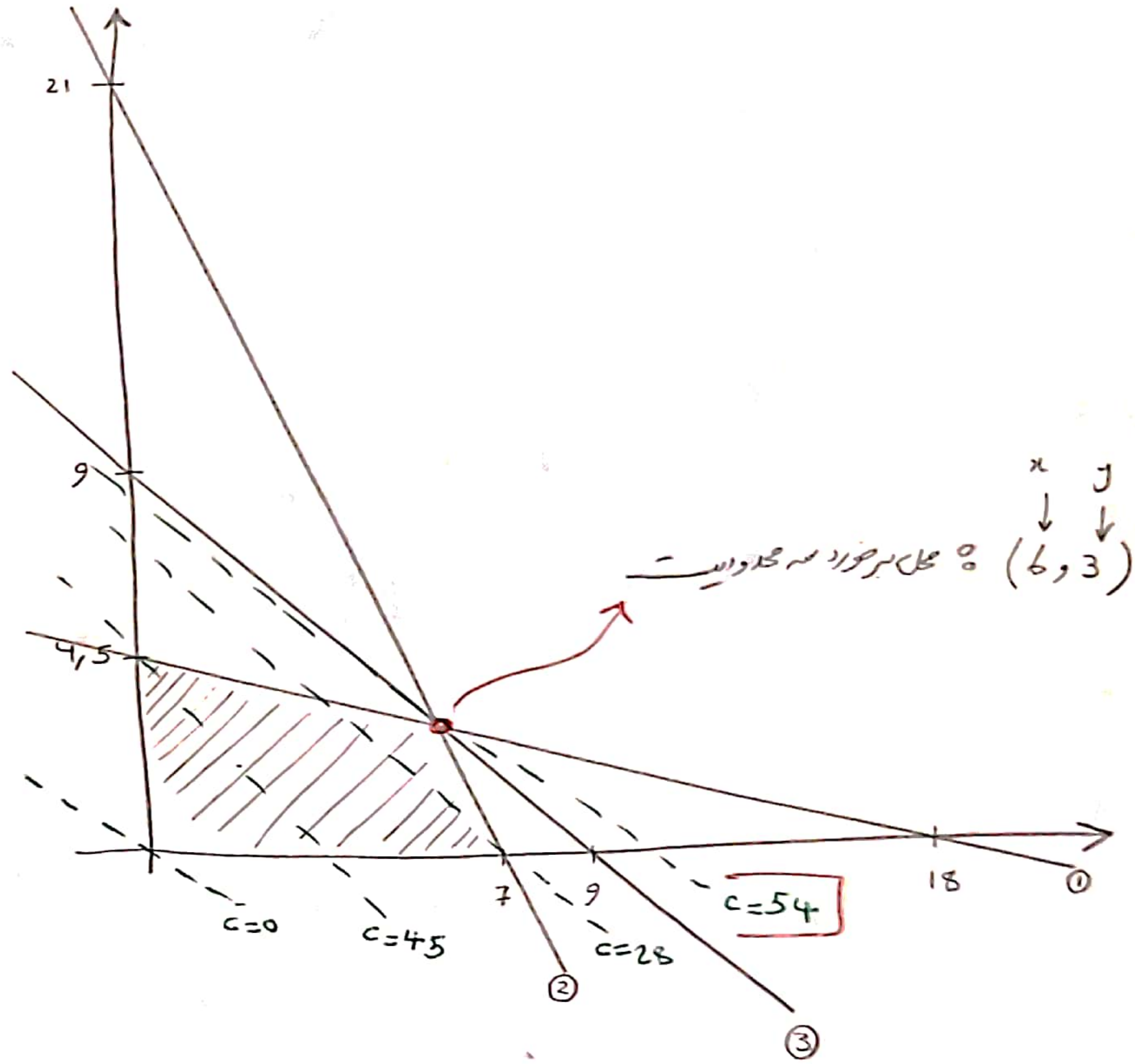
که نقطه‌ی اکسترمم (6,3) است که
$Z = 54$ را تولید می‌کند.

Scanned with CamScanner

page 7

(4)

اطلاعی ⑤ (3



ب) نقطه‌ی اکستریم باید یکی از ۴ نقطه‌ی (6,3)، (7,0)، (0,4,5) و یا (0,0) باشد، که گوشه‌های ناحیه شدنی مسئله ما هستند.

ج) محور $c=4x+10y$ را به طوری که با گوشه‌های مختلف ناحیه شدنی تلاقی کند، رسم می‌کنیم و c را محاسبه می‌کنیم. در هر نقطه که c بیشینه شود، همان نقطه اکستریم است.

در شکل بالا مشاهده می‌شود که در (6,3) مقدار 54 بدست آمده که بیشینه است.

4) الف: محدودیت شماره 3 $(x+y \leq 9)$ زائد است. زیرا هیچ تاثیری روی ناحیه شدنی ندارد.

ب) چه این محدودیت را داشته باشیم، چه نداشته باشیم، ناحیه شدنی مسئله فرقی ندارد. حذف آن تاثیری روی LP ما ندارد.

Scanned with CamScanner

برای توصیف مسئله‌ی network flow در LP ، به این شکل داشتیم :

$$\max |f| = \sum_{v \in V} f_{sv}$$

① capacity constraint : $\forall u,v \in V \quad f_{uv} \le c_{uv}$

② skew symmetry : $\forall u,v \in V \quad f_{uv} = -f_{vu}$

③ flow conservation : $\forall u \in V \quad f_{uV} = \phi$

④ $\forall uv \in E \quad f_{uv} \ge 0$

اساسی در این سوال x_{uv} همان f_{uv} است.

+ پس تابع هدف قید شده در سوال ، همان تابع هدفی است که بالا توصیف کردم.

+ شرط $x_{uv} \le c_{uv}$ هم معادل شرط capacity const. است. ← d①

+ شرط $x_{uv} \ge 0$ هم معادل شرط ④ توصیف شده در بالا ست. ← d④

+ شرط $\sum_{u \in A} x_{uv} - \sum_{w \in A} x_{vw} = 0$ با توجه به اینکه دوتا $\sum$ داریم هم شرط skew sym. و هم flow cons. را شامل می‌شود ← d②,③

* پس این سوال LP داده شده، مسئله‌ی network flow را مدل می‌کند. و حل آن معادل حل ford fulkerson گفته شده معادل است.

ادامه‌ی (b) جواب و نادرست است، و در نهایت بیشترین flow ای که می‌تواند از این شبکه عبور کند به شرح زیر است :

max flow = 7