



1. برای یافتن k -امین کوچکترین عدد در ترکیب دو آرایه مرتب شده با پیچیدگی $\theta(\lg n + \lg m)$ که m و n اندازه دو آرایه گفته شده هستند، یک الگوریتم تقسیم و غلبه ارائه دهید.

رامحل:

برای پیدا کردن k -امین کوچکترین عنصر در ترکیب دو آرایه به این صورت عمل میکنیم که عنصر میانی آرایه A_1 (با اندیس mid_1) و عنصر میانی آرایه A_2 (با اندیس mid_2) را با هم مقایسه میکنیم. فرض کنید که $A_1[\text{mid}_1] < A_2[\text{mid}_2]$ باشد در این صورت اگر $k \leq \text{mid}_1 + \text{mid}_2$ باشد می‌توان عناصر قبل از mid_1 را در A_1 از جست و جو حذف کرد، چرا که قطعاً k -امین کوچکترین عدد در بین آنها نیست. همچنین اگر $k \leq \text{mid}_1 + \text{mid}_2$ باشد در این صورت می‌توان گفت که قطعاً k -امین کوچکترین عنصر در بین عناصر بعد از mid_2 در A_2 نیست و می‌توان آنها را از جست و جو حذف کرد. به‌طور مشابه اگر $A_1[\text{mid}_1] \geq A_2[\text{mid}_2]$ باشد می‌توان همین گزاره‌ها را بیان کرد و در نتیجه در حالت مساله را می‌توان به زیر مساله‌ای تبدیل کرد که در آن اندازه‌ی یکی از آرایه‌ها نصف شده است. به این ترتیب پیچیدگی زمانی این الگوریتم برابر $O(\lg n + \lg m)$ خواهد بود

2. لیستی از اعداد را در نظر بگیرید که عملیات زیر را روی آن تعریف شده است؛

Insert (x) : Appends the number x to the front of the list

median() : Removes all numbers from the list, calculate their median, and then insert the median back onto the list.

فرض کنید این عملیات insert دارای هزینه ۱ و عملیات median دارای هزینه‌ای معادل با هزینه برابر با تعداد عناصر موجود در لیست به علاوه یک، است.

- فرض کنید n عملیات را در لیست انجام می‌دهیم. بدترین زمان اجرای یک عملیات واحد چقدر است؟
- هزینه‌ی سرشکن هر یک از عملیات insert و median را با استفاده از روش accounting نشان دهید.
- حال با استفاده از روش تابع پتانسیل هزینه‌ی سرشکن هر یک از عملیات insert و median را به‌دست آورید. (فرض کنید L_i لیست بعد از عملیات i -ام باشد و $\text{num}(S_i)$ تعداد عناصر موجود در L_i باشد تابع پتانسیل را به‌صورت $\text{num}(L_i) \phi_i =$ در نظر بگیرید)

رامحل:

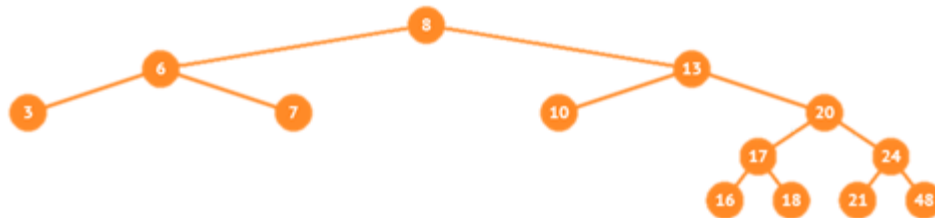
- بدترین حالت $\theta(n)$ است که زمانی اتفاق می‌افتد که insert را $n-1$ بار فراخوانی کنیم و سپس median را فراخوانی کنیم. فراخوانی median هزینه $\theta(n)$ دارد.

b. درج ۲ تومان شارژ می شود. median نیز ۱ تومان شارژ می شود. هنگامی که یک درج انجام می دهیم، از یک تومان برای پرداخت هزینه درج استفاده می کنیم و دلار دیگر را با عنصر ذخیره می کنیم. هنگامی که ما یک median انجام می دهیم، از تومان ذخیره شده با تمام آیتم های موجود در پشت به اضافه تومانی که برای median شارژ کرده ایم، برای پرداخت کل هزینه استفاده می کنیم. این نشان می دهد که هزینه مستهلک شده در هر عملیات O(۱) است.

c. یادآوری: $a_i = c_i + \varphi_i - \varphi_{i-1}$ ، فرض کنید L_i لیست بعد از عملیات i ام باشد و $\text{num}(L_i)$ تعداد عناصر موجود در L_i باشد تابع پتانسیل را به صورت $\varphi_i = \text{num}(L_i)$ در نظر بگیرید

تعداد موارد موجود در لیست ابتدا ۰ است و همیشه غیر منفی است، بنابراین φ معتبر است. ابتدا هزینه مستهلک شده در زمان i را محاسبه می کنیم. می دانیم که $1 = c_i$ همچنین $\varphi_i - \varphi_{i-1} = 1$ بنابراین $a_i = 2$ است، سپس هزینه مستهلک شده median را محاسبه می کنیم، می دانیم که $c_i = \text{num}(L_{i-1}) + 1$ همچنین $\varphi_i - \varphi_{i-1} = 1$ بنابراین $a_i = \text{num}(L_{i-1}) + 2$ می شود که این نشان می دهد که هزینه مستهلک شده هر دو عملیات O(۱) است.

3. درخت Splay زیر را در نظر بگیرید و عنصر ۱۷ را از آن حذف کنید، نحوه انجام هر عملیات را به صورت مرحله به مرحله نمایش دهید.



رامحل:

به ترتیب زیر عمل می کنیم،

