

الگوریتم‌های پیشرفته

تمرین سری ششم

زمان آپلود: 1401/9/29

موعده تحویل: 1401/10/10

مسئول تمرین: شقایق توسلی (sh.tavassoli@ut.ac.ir)



(1) فرض کنید n عدد وسیله با وزن‌های w_1, \dots, w_n موجود باشند. این وسایل باید در جعبه‌هایی بسته‌بندی شوند و حداکثر وزن هر جعبه می‌تواند c باشد. به ازای $1 \leq i \leq n$ ، همواره $w_i \leq c$ است. هدف پیدا کردن حداقل تعداد جعبه‌های لازم برای بسته‌بندی همه‌ی این وسایل است. این مسئله NP-hard است. الگوریتم تقریبی زیر برای حل این مسئله وجود دارد:

به ازای هر وسیله (شروع از $i = 1$ تا $i = n$)، اگر این وسیله در جعبه‌ای که وسیله‌ی قبلی گذاشته شده جا می‌شود، آن را در همان جعبه می‌گذارد. در غیر این صورت، از یک جعبه‌ی جدید استفاده می‌کند.

مرتبه‌ی زمانی این الگوریتم چقدر است؟ مقدار تقریب این الگوریتم چقدر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

(2) فرض کنید که تعداد m پردازش وجود دارند به طوری که مدت زمان لازم برای انجام پردازش i ام، p_i است. تعداد n پردازنده‌ی یکسان موجود هستند. به طوری که:

- هر پردازنده در هر زمان فقط می‌تواند یک پردازش را انجام دهد.
- هر پردازش باید به صورت کامل توسط یک پردازنده انجام شود.

یک زمانبندی به صورت اختصاص دادن پردازش‌ها به پردازنده‌ها تعریف می‌شود. برای یک زمانبندی مشخص، فرض می‌شود که S_k مجموعه‌ی پردازش‌هایی باشد که توسط پردازنده‌ی k انجام می‌شوند. بنابراین مدت زمان فعالیت پردازنده‌ی k به صورت $T_k = \sum_{i \in S_k} p_i$ می‌باشد. فرض می‌شود که $M = T_k$ باشد. در این

مسئله، هدف آن است که یک زمانبندی (اختصاص پردازش‌ها به پردازنده‌ها) ارائه شود به طوری که مقدار M حداقل شود.

الف) برای حل این مسئله یک الگوریتم تقریبی¹ ارائه دهید.

ب) با استفاده از الگوریتم قسمت (الف) برای حالتی که دو پردازنده و 6 پردازش وجود داشته باشد و مدت زمان لازم برای پردازش‌ها به صورت $\{3, 1, 6, 4, 6, 4\}$ باشد، مسئله را حل کنید. در این مثال، مقدار تقریب الگوریتم چقدر است.

ج) یک کران بالا² برای مقدار تقریب این الگوریتم به دست آورید (ارائه‌ی اثبات لازم است).

3) گراف بدون جهت $G(V, E)$ مفروض است. یک پوشش رأسی³ مانند V' ، یک زیر مجموعه از گره‌های گراف است به طوری که به ازای هر یال $(a, b) \in E$ ، حداقل یکی از گره‌های a و b در مجموعه‌ی V' باشد. مسئله‌ی پوشش رأسی شامل پیدا کردن پوشش رأسی با کمترین سایز در گراف است که یک مسئله‌ی NP-complete می‌باشد. یک الگوریتم ابتکاری⁴ برای این مسئله به این صورت ارائه شده است: در هر مرحله، گره‌ی دارای بیشتری درجه به مجموعه‌ی پوشش رأسی اضافه شود و همه‌ی یال‌های مجاور آن از گراف G حذف شوند.

مثالی ارائه دهید که نشان دهد مقدار تقریب این الگوریتم 2 نیست.

4) مسئله‌ی TSP⁵ به این صورت تعریف شده است که گراف بدون جهت $G = (V, E)$ مفروض است که در آن وزن هر یال، یک عدد صحیح بزرگتر یا مساوی صفر است. هدف پیدا کردن دور همیلتونی با کمترین

¹ Approximation algorithm

² Upper bound

³ Vertex cover

⁴ Heuristic algorithm

⁵ Traveling-salesman problem

وزن در گراف G می باشد. فرض می شود که در گراف G شرط نامساوی مثلث برقرار است. برای حل این مسئله، راه حل ابتکاری زیر موجود است که یک الگوریتم تقریبی است:

حل مسئله با یک دور⁶ شروع می شود که در ابتدا فقط شامل یک گرهی دلخواه است. فاصله ی گرهی a تا دور به صورت حداقل وزن یال های متصل کننده ی a به گره های موجود در دور تعریف می شود. در هر مرحله از این الگوریتم، گرهی a در نظر گرفته می شود به طوری که a در دور تشکیل شده تا این مرحله وجود نداشته باشد و a دارای کمترین فاصله تا دور باشد (نسبت به سایر گره هایی که در دور وجود ندارند). فرض می شود b ، گره ای از دور باشد که کمترین فاصله را از گرهی a دارد. گرهی a به دور اضافه می شود. گرهی a در دور، دقیقاً بعد از گرهی b قرار داده می شود. این عمل تا زمانی که همه ی گره ها در دور قرار داده شوند، تکرار می شود. مقدار تقریب این الگوریتم چقدر است؟ پاسخ خود را به طور کامل توضیح دهید.

(5) فرض می شود k عدد flash memory موجود است و مقدار ظرفیت⁷ حافظه ی آنها به صورت $C = [c_1, \dots, c_k]$ است (برحسب گیگابایت) و وزن آنها به صورت $W = [w_1, \dots, w_k]$ می باشد. هدف آن است که تعدادی از این فلش ها خریداری شود به طوری که حداکثر مجموع وزن آنها M باشد و مجموع حجم فلش های خریداری شده ماکزیمم شود. این مسئله در حالت کلی NP-complete است و از مرتبه ی زمانی $O(kM)$ می باشد (روش برنامه نویسی پویا). برای حل این مسئله، یک الگوریتم تقریبی با زمان چند جمله ای ارائه دهید. مقدار تقریب الگوریتم ارائه شده چقدر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

(6) گراف همبند بدون جهت $G(V, E)$ مفروض است و وزن هر یال از این گراف یک عدد حقیقی مثبت است. یک برش از گراف به صورت یک زیر مجموعه از یال های گراف تعریف می شود که گره های گراف را به دو مجموعه ی مجزای V_1 و V_2 افراز⁸ می کنند، به طوری که هر یال موجود در برش، یکی از گره هایش در

⁶ Cycle

⁷ Capacity

⁸ Partition

مجموعه‌ی V_1 و گره‌ی دیگرش در مجموعه‌ی V_2 است. وزن هر برش به صورت مجموع وزن همه‌ی یال‌های موجود در آن برش محاسبه می‌شود.

با فرض آنکه $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq V$ باشد، مجموعه‌ی $B \subseteq E$ با کمترین وزن را پیدا کنید به طوری که اگر همه‌ی یال‌های موجود در B از گراف G حذف شوند، هر دو گره‌ی موجود در مجموعه‌ی A از یکدیگر جدا شوند. این مسئله در حالتی که $n = 2$ باشد، هم‌ارز مسئله‌ی برش کمینه⁹ است. اما به ازای هر مقدار ثابت برای n به طوری که $n > 2$ باشد، این مسئله NP-hard است. یک الگوریتم تقریبی برای حل این مسئله ارائه کنید و مقدار تقریب این الگوریتم را محاسبه کنید (اثبات لازم است).

⁹ Minimum-cut