page 1

به نام خدا

مرضیه علیاری - 810101236

تکلیف سوم الگوریتم پیشرفته

(1)

الف) غلط؛ مسائل NP-complete به صورت polynomial، قابل کاهش به هم هستند. اگر یک مسئله NP-complete به نام A در زمان خطی (یعنی $O(n^1)$؛ که n لزوماً توانش 1 است)، قابل حل باشد، این مسئله در زمان polynomial (یعنی $O(n^k)$؛ که k لزوماً 1 نیست)، قابل تبدیل به مسائل NP-complete دیگر است. پس مسائل NP-complete دیگر که A به آن ها تبدیل می‌شود، در polynomial قابل حل هستند.

ب) غلط؛ این قضیه برای NP-Complete ها بیان می‌شود. با توجه به اینکه مسائل NP-Complete در زمان polynomial قابل تبدیل به یکدیگر هستند، اگر یکی از آن ها در polynomial حل شود، تمام مسائل NP-Complete در زمان polynomial قابل حل هستند. پس این قضیه برای NP-C ها فقط برقرار است، که زیرمجموعه ای از NP هستند. اگر این قضیه را درباره‌ی NP ها بیان کنیم، با توجه به اینکه مسئله‌های P، polynomial هستند، و نوعی NP هستند؛ باید تمام NP ها هم قابل حل در polynomial باشند که اینطور نیست.

ج) غلط؛ درباره‌ی مسائل NP-Complete داشتیم: اگر یک مسئله‌ی NP-Complete به اسم A و یک مسئله‌ی NP به اسم B داشته باشیم؛ اگر بتوان مسئله‌ی A را در زمان polynomial به مسئله‌ی B، reduce کرد ← آنگاه B هم یک مسئله‌ی NP-Complete است. اگر در این سوال قید شده بود که این کاهش در polynomial انجام می‌شود، درست بود ولی این شرط بیان نشده، و در حالت کلی این حرف برقرار نیست.

الف) اثبات NP بودن مسئله:

فرض: یک گراف به ما می‌دهند که K تا node از n تا node آن حذف شده است. باید بررسی شود که آیا گراف دور وجود دارد یا خیر. ← هزینه:

$$O(\underbrace{E}_{\text{تعداد یال‌ها} \Rightarrow \text{حداکثر } (n-K)^2} + \underbrace{(n-K)}_{\text{تعداد node ها}}) = O((n-K)^2)$$

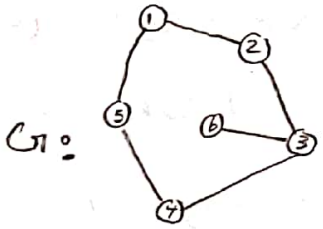
$\hookrightarrow$ Polynomial ✓

فرض: certificate را در polynomial time چک کنیم. پس این مسئله NP است. ✓

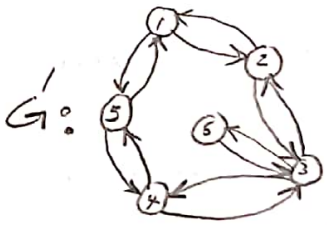
ب) در مسئله‌ی vertex cover (VC) گرافی که داریم، بدون جهت است. ولی مسئله‌ی مورد نظر ما در اینجا، گرافی جهت‌دار است. ← برای حل مسئله‌ی VC به مسئله‌ی مورد نظر، هر یال در گراف بین دو node v و u را با دو یال جهت‌دار یکی از v به u، جایگزین می‌کنیم.

مثلاً ←

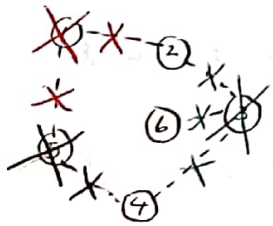
گراف مسئله‌ی VC



گراف مسئله‌ی مورد نظرمان در این سوال



⊕ فرض: مسئله‌ی VC را داریم، که گراف G، گراف متناظر آن است. vertex cover این گراف، مجموعه node های $\{1,3,5\}$ است. که با حذف این node ها، تمام یال‌های گراف حذف می‌شوند.



که در گراف متناظر (G')، با حذف همین node ها، تمام یال‌های G' نیز حذف می‌شوند. و دوری در این گراف باقی نمی‌ماند.

⊕ فرض: مسئله‌ی مورد نظرمان در این سوال را داریم، که گراف G'، گراف متناظر آن است. در این گراف، هر دو node v و v' که بین شان یال است، یک دور به این شکل وجود دارد:

$((v \to v' \to v))$

که برای حذف این دور، باید یکی از node های v یا v' حذف شود. که با حذف یکی از آن ها، هر دو یال بین شان حذف می‌شود. پس برای حذف دورهای G'، تمام یال ها باید حذف شود. ← پس برای گراف متناظر (G)، با حذف همین node ها، یالی باقی نمی‌ماند. و همین مجموعه یال‌ها، vertex cover گراف G هستند.

اثبات شد که این reduction از VC به مسئله‌ی مورد نظرمان، در polynomial time قابل انجام است.

[1] ابتدا باید اثبات کنیم که آیا عضو NP است یا خیر:

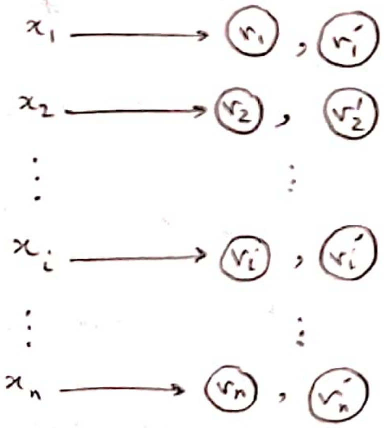
اگر یک جواب از این مسئله به ما داده شود و گفته شود مجموع وزن یال های اعضای این زیر مجموعه یال های گراف (یک دور)، ۰ است، در polynomial میتوانیم آن ها را باهم جمع کنیم و چک کنیم که آیا برابر ۰ می شود یا خیر.

[2] سپس باید NP-hard بودن آن را هم اثبات کنیم:

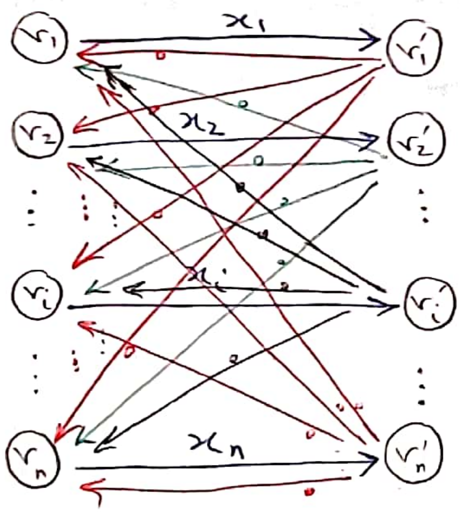
برای این اثبات از reduce کردن مسئله subset sum کمک میگیریم.

در این مسئله subset sum را داریم: یک مجموعه از اعداد مثبت و منفی داریم. میخواهیم ببینیم آیا زیرمجموعه ای از آن وجود دارد که مجموع اعضایش برابر ۰ شود یا خیر. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

با استفاده از این مجموعه میخواهیم یک گراف تولید کنیم. به ازای هر عضو از این مجموعه، دو node در گراف تولید میکنیم. در کل گراف، 2n تا node خواهد داشت:



یال های گراف را به این صورت تولید می کنیم: (1) به ازای هر دو node v_i و v_i'، یک یال با وزن x_i از v_i به v_i' با وزن x_i ایجاد میکنیم. (2) n تا یال از هر v_i' به تمام v_i ها، با وزن ۰ ایجاد میکنیم. ← در نهایت، گراف تولید شده به این شکل خواهد بود:

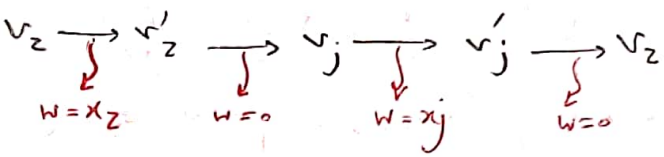


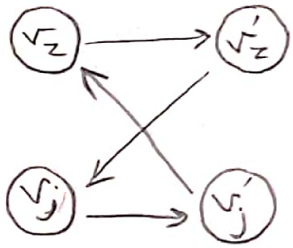
+ با استفاده از این یال های تولید شده، دور هایی به این شکل خواهیم داشت :

$$v_z \to v'_z \to v_j \to v'_j \to \cdots \to v_k \to v'_k$$

به کمک یال های بین $v'_i \to v_i$ ها، دارای وزن x_i هستند. و یال های بین $v_j \to v'_i$ ها دارای وزن ۰ هستند.

و برای مثال، هزینه ی دور زیر، برابر با $x_z + x_j$ خواهد بود :





پس به راحتی می توان دید که :

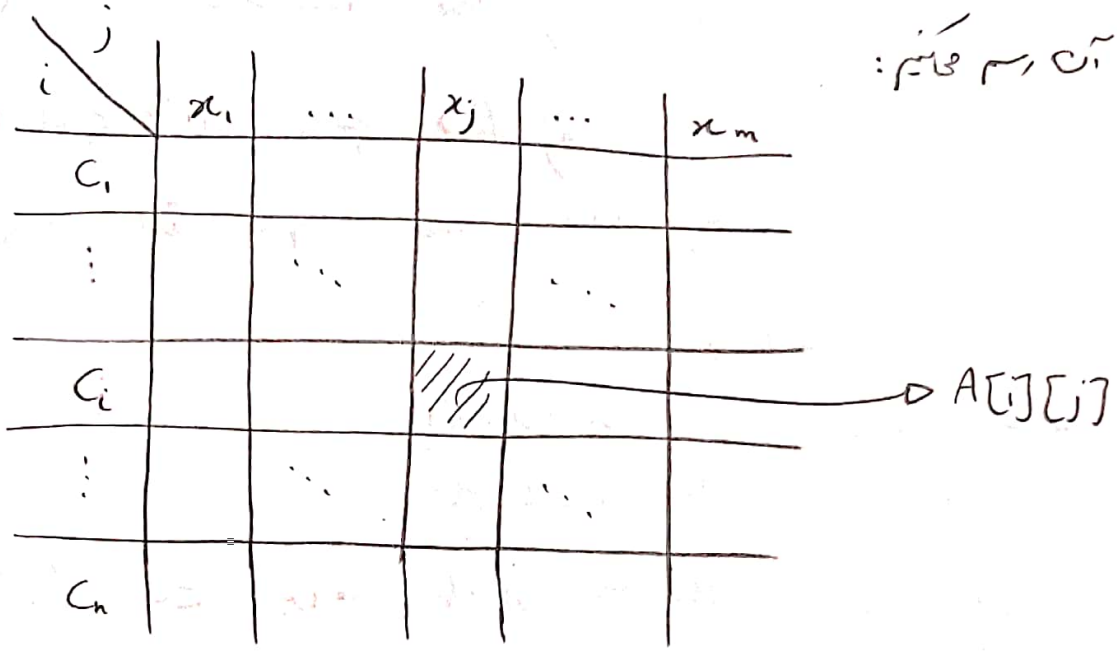
⊕ اگر مجموع عناصر زیر مجموعه $\{x_z, x_j\}$ از مجموعه ی مکعبان در subset sum، برابر صفر باشد، هزینه ی دور متناظر در گراف مان هم برابر صفر است.

⊕ و اگر هزینه ی دور یافت شده در گراف $(x_z + x_j)$ برابر ۰ باشد، زیر مجموعه $\{x_z, x_j\}$ در مجموعه ی مکعبان در subset sum هم برابر ۰ است.

پس در polynomial time توانستیم subset Sum را به مسئله ی مورد نظرمان تبدیل کنیم. ← پس این مسئله، NP-complete است. ✓

⊕ مسئله‌ی 3-CNF-SAT را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم NP-Complete است.

تعداد variable ها را m و تعداد clause ها را برابر n در نظر می‌گیریم. جدول زیر را برای آن رسم می‌کنیم:



⟸ جدول را با این سه قانون پر می‌کنیم:

1. اگر لیترال x_j در کلاز C_i وجود داشته باشد ⟸ $A[i][j] = O$
2. اگر لیترال $\neg x_j$ در کلاز C_i وجود داشته باشد ⟸ $A[i][j] = X$
3. در غیر این صورت ⟸ $A[i][j]$ را خانه خالی می‌گذاریم.

⟸ اگر 3-CNF-SAT ما satisfiable باشد، این بازی جواب دارد و بالعکس.

⊛ یک true assignment برای 3-CNF-SAT بدست می‌آوریم. و این عملیات را انجام می‌دهیم:

1. اگر x_j=true باشد ⟸ X ها را از ستون x_j حذف می‌کنیم.
2. اگر x_j=false باشد ⟸ O ها را از ستون x_j حذف می‌کنیم.

⟸ با توجه به اینکه هر variable حداقل در یک clause (خودش یا not اش) وجود دارد، هر ستون، حداکثر یک نوع از علامت‌ها را دارد. + به علاوه، هر clause حداقل یک لیترال اش true است. بنابراین هر سطر حداقل یک علامت را دارد. ⟸ بنابراین، این بازی satisfiable است.

ادامه ی ④

⊛ فرض میکنیم که این پازل قابل حل است. برای هر ستون از این موارد بررسی می‌شود:

△1 اگر ستون شامل O باشد ⟸ $x_j = true$

△2 اگر ستون شامل X باشد ⟸ $x_j = false$

△3 اگر ستون خالی باشد ⟸ $x_j = false$ or $true$ (به دلخواه)

به دلخواه ← اگر هنوز clause ای باشد که true نشده باشد، این متغیرهای باقی مانده را به طور مناسب مقدار دهی می‌کنیم تا همه‌ی clause ها true شوند.

← هر سطر حداقل یک علامت دارد، پس هر clause در 3-CNF-SAT ما، حداقل یک لیترال اش true است. پس 3-CNF-SAT مورد نظر، Satisfiable است. ✓

⟸ واضح است که این reduction در polynomial time انجام می‌شود. پس با توجه به اینکه مسئله‌ی 3-CNF-SAT یک NP-Complete است و در زمان polynomial به این مسئله تبدیل شود ← پس این مسئله، یک NP-hard است ✓

← مثال:

⊕ → 3-CNF-SAT: $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4)$

متغیرها: x_1, x_2, x_3, x_4

i \ j	x_1	x_2	x_3	x_4
c_1	O (c_1 در x_1)	X (c_1 در $\neg x_2$)		O (c_1 در x_4)
c_2		O (c_2 در x_2)	O (c_2 در x_3)	X (c_2 در $\neg x_4$)

⟹

i \ j	x_1	x_2	x_3	x_4
c_1	O			
c_2		O	O	X

↓

پس دیدیم که 3-CNF، satisfy شد.

⇕

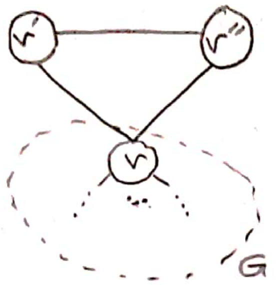
پازل هم جوابش valid شد و شرایطش برقراره. ✓

true assignment:

$x_1 = x_2 = true$

$x_3 = x_4 = false$

برای این اثبات، از مسئله HAM استفاده می‌کنیم. مسئله Ham را به این شکل تغییر می‌دهیم: به هر node v از گراف G به این شکل، دو node دیگر اضافه می‌کنیم:



یعنی به ازای هر گره، 2 گره و 3 یال جدید به این شکل اضافه می‌شود. و گراف جدید را G' می‌نامیم.

باید اثبات کنیم که گراف G دارای یک دور همیلتونی است، اگر و تنها اگر، گراف G' دارای یک دور همیلتونی دوبل باشد.

⊕ فرضاً گراف G دارای یک دور همیلتونی به شکل $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_i \to \dots \to v_n \to v_1$ باشد. در گراف G' با پیمایش یال‌های جدید که اضافه شده، دور همیلتونی دوبل در گراف G' به این شکل خواهد بود:

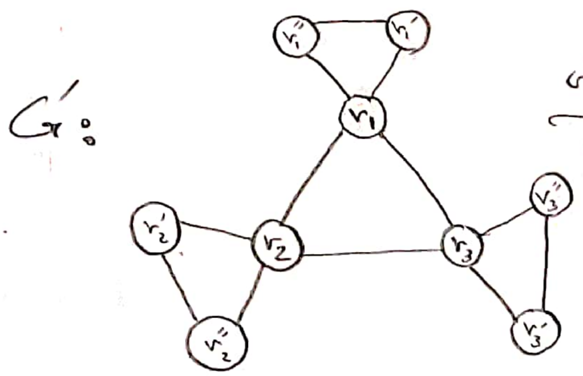
$$((v_1 \to v_1' \to v_1'' \to v_1' \to v_1'' \to v_1 \to v_2 \to \dots \to v_i \to v_i' \to v_i'' \to v_i' \to v_i'' \to v_i \to \dots \to$$

(جایگزین v_1) (جایگزین v_i)

$$v_n \to v_n' \to v_n'' \to v_n' \to v_n'' \to v_n \to v_1))$$

(جایگزین v_n) (مسیر بسته)

⊕ برای اثبات در جهت برعکس، گراف G' را در نظر می‌گیریم، که دور همیلتونی دوبل دارد:



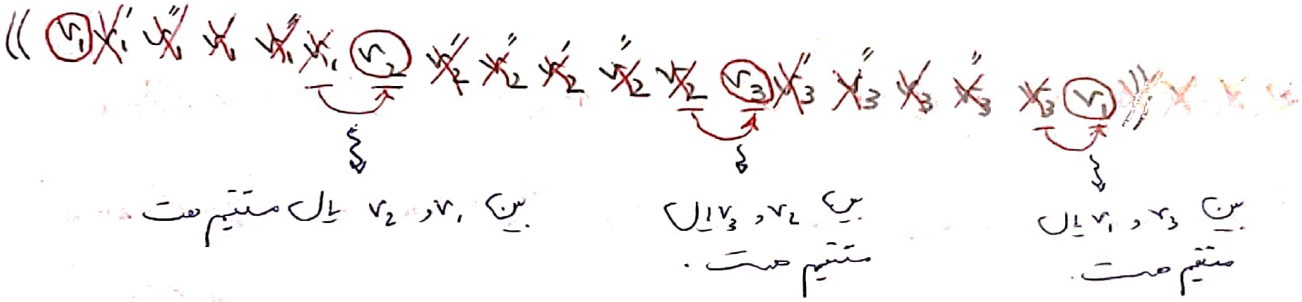
دور همیلتونی دوبل → G': $((v_1\ v_1'\ v_1''\ v_1'\ v_1''\ v_1\ v_2\ v_2'\ v_2''\ v_2'\ v_2''\ v_2\ v_3\ v_3'\ v_3''\ v_3'\ v_3''\ v_3\ v_1))$

ادامه‌ی (5)

می‌خواهیم هر node در گراف اصلی G را دریک دور همیلتونی، دقیقاً یکبار ملاقات کنیم. (یعنی v_1, v_2, v_3)

طوری که مشخص است، node های v_i و v_i' فقط از طریق node v_i به دیگر node ها متصل می‌شوند. پس برای رفتن از این ها به دیگر node ها، باید حتماً از v_i گذشت.

اگر از ابتدا تا انتهای دور همیلتونی دوبل را پیدا کنیم، هربار که به v_i جدید می‌رسیم، node های بعد از آن را پاک می‌کنیم، تا وقتی که دوباره آن v_i را مجدداً ملاقات کنیم.



پس خواهیم داشت: $(v_1\ v_2\ v_3\ v_1)$ ← یک دور همیلتونی است.

پس توانستیم در polynomial time، این reduction را از Ham به double Ham انجام دهیم. پس اثبات می‌شود، با توجه به اینکه Ham، NP-complete است، و double Ham، NP-hard است. ✓