الف)

متغیرهای مسئله: کلاس ها $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

دامنه ی متغیرها (استادها): $D_1 = \{C\}$ $D_2 = \{B, C\}$ $D_3 = \{A, B, C\}$

$D_4 = \{A, B, C\}$ $D_5 = \{B, C\}$

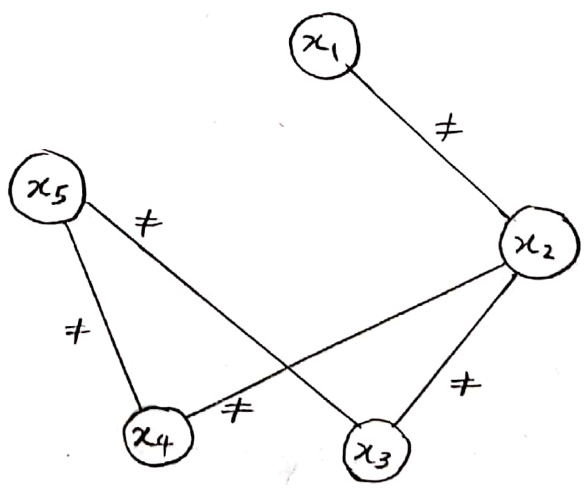
قیود CSP: (کلاس هایی که تداخل زمانی دارند توسط یک استاد مشترک نمی توانند برگزار شوند)

$x_1 \neq x_2$ $x_2 \neq x_3$ $x_2 \neq x_4$

$x_3 \neq x_5$ $x_4 \neq x_5$

1

ب)



Scanned by CamScanner

① پ)

$* \text{if} \quad x_2 = C \longrightarrow x_1 = ? \quad \Rightarrow D_2 = \{B\}$

$* \text{if} \quad x_3 = B \longrightarrow x_2 = ? \quad \Rightarrow D_3 = \{A, C\}$

$* \text{if} \quad x_4 = B \longrightarrow x_2 = ? \quad \Rightarrow D_4 = \{A, C\}$

با اصلاح این ۳ دامنه، CSP دارای سازگاری arc می‌شود.

---

① ت)

راه حل: $x_1 = C$ ، $x_2 = B$ ، $x_3 = A$ ، $x_4 = A$ ، $x_5 = B$

---

① ث) می‌توان با بهره‌گیری از structure نمونه CSP، آن را effective تر حل کرد.

یکی از این structure ها که مورد نظر ماست، درخت بودن گراف primal است.

وقتی که می‌خواهیم backtrack بزنیم، خیلی هزینه‌بر است و worst case آن نمایی است. اگر از این موقعیت ها استفاده نکنیم و مستقیم سراغ حل نمونه با استفاده از back track برویم، حل ما کارایی نخواهد داشت.

بنابراین بهتر است از ساختار مسئله استفاده کرد.

در مسئله های با structure درختی، می‌توان با بهره‌گیری از مفهوم DAC و با topological sort، به شکل back track-free، آن ها را حل کرد.

کل هزینه ی مربوط به حل کردن درخت و cycle cutset، از $O((n-c)d^{c+2})$ است.

Scanned by CamScanner

① ج) دو رویکرد برای انجام این کار وجود دارد :

۱) روش مبتنی بر حذف node ؛ به طوری که بعد از حذف تعدادی node ، گراف primal مسئله به درخت تبدیل شود. برای این ترتیب که node را انتخاب می‌کنیم ، یکی یکی value های داخل دامنه‌اش را امتحان می‌کنیم . و هر مقداری که فیکس می‌کنیم ، از داخل دامنه های متغیرهای مجاورش ، مقادیری که سازگاری ندارند را حذف می‌کنیم . اگر با حذف n تا node ، درخت ایجاد شود ، باید همه‌ی مقداردهی های ممکن به آن n راس را امتحان کنیم و این کار را انجام دهیم.
به این مجموعه node هایی که با حذف از گراف ، گراف تبدیل به درخت می‌شود ، cycle cutset می‌گویند.
پس از تبدیل گراف primal به درخت ، با الگوریتم هایی که برای حل مسئله‌های درختی استفاده می‌شوند ، مسئله را حل می‌کنیم.

۲) روش مبتنی بر تجمیع کردن node ها ؛ به طوری که پس از آن ، گراف primal تبدیل به درخت شود. این روش tree decomposition نام دارد.
در این روش ، با دسته بندی node ها ، یک درخت حاصل می‌شود . و به هر کدام از node های درخت حاصل ، یک bag می‌گویند که هر bag دربردارنده‌ی تعدادی node از گراف اولیه است.
که برای داشتن یک تجزیه درختی معتبر ، 3 شرط زیر لازم است :
- هر کدام از node های گراف اولیه ، باید حداقل در یک bag ظاهر شده باشد.
- هر کدام از یال های گراف اولیه ، باید حداقل در یک bag ظاهر شده باشد.
- bag هایی که دربردارنده‌ی یک node مشترک هستند ، باید با هم همبند باشند و subtree تشکیل دهند.

پس از تبدیل گراف primal به درخت ، با الگوریتم هایی که برای حل مسئله‌های درختی استفاده می‌شوند مسئله را حل می‌کنیم.

---

① چ) فایل q1p7.mzn پیوست شده است.

Scanned by CamScanner

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_{10}\}$$

$$D_i = \{1, 2, \dots, 10\}$$

$$C: \quad x_1 < x_2 \;,\; x_2 < x_3 \;,\; \dots \;,\; x_9 < x_{10}$$

الف) برای این مقداردهی به M و N ، فقط یک مقداردهی ارضا کننده برای نمونه وجود دارد :

$$x_1 = 1 \;,\; x_2 = 2 \;,\; \dots \;,\; x_{10} = 10$$

$$\Longrightarrow x_i = i \quad \forall\, 1 \leq i \leq 10$$

اگر مقدار M از N بیشتر بود ، مقدار دهی های ارضا کننده ی بیشتری وجود دارد.

ب) 2

$$* \text{if} \quad x_1 = 10 \longrightarrow x_2 = ? \Longrightarrow D_1 = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$\Downarrow$

به ازای مقدار 10 برای x_1 ، برای x_2 مقداری باقی نمی ماند.

پ) 2

$$* \text{if} \quad x_3 = 10 \longrightarrow x_4 = ? \Longrightarrow D_3 = \{1, 2, \dots, 9\}$$

$$* \text{if} \quad x_2 = 9 \text{ or } 10 \longrightarrow x_3 = ? \Longrightarrow D_2 = \{1, 2, \dots, 8\}$$

$$\overset{x_1 \sim x_2}{\Longrightarrow} * \text{if} \quad x_1 = 8 \text{ or } 9 \text{ or } 10 \longrightarrow x_2 = ? \Longrightarrow D_1 = \{1, 2, \dots, 7\}$$

Scanned by CamScanner

ت) 2

$* \text{if } x_9 = 10 \longrightarrow x_{10} = ? \implies D_9 = \{1, 2, \dots, 9\}$

$* \text{if } x_8 = 9 \text{ or } 10 \longrightarrow x_9 = ? \implies D_8 = \{1, 2, \dots, 8\}$

$* \text{if } x_7 = 8 \text{ or } 9 \text{ or } 10 \longrightarrow x_8 = ? \implies D_7 = \{1, 2, \dots, 7\}$

$\vdots$

$* \text{if } x_2 = 3 \text{ or } 4 \text{ or } \dots \text{ or } 10 \longrightarrow x_3 = ? \implies D_2 = \{1, 2\}$

$x_1 \sim x_2 \implies * \text{if } x_1 = 2 \text{ or } 3 \text{ or } \dots \text{ or } 10 \longrightarrow x_2 = ? \implies D_1 = \{1\}$

ث) 2

برای برقراری arc consistency دوطرفه و کامل در مسئله، باید روی همه‌ی یال‌ها ی گراف primal، سازگاری arc بررسی و برقرار شود. پس در واقع هرکدام از یال‌های گراف، حداقل ۲ بار مورد پردازش قرار می‌گیرند. در این مثال خاص، همواره تعداد یال‌ها، یکی کمتر از تعداد node ها است، پس حداقل به تعداد $2(n-1)$ تا یال توسط AC-3 مورد پردازش قرار می‌گیرند.

[n: تعداد متغیر ها (node)].

ج) 2

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

$$D_i = \{1, 2, 3, \dots, M\}$$

$$C: \quad x_1 < x_2 < \dots < x_N \quad \text{or} \quad x_1 > x_2 > \dots > x_N$$

Scanned by CamScanner

③ توصیف مسئله :

$X = \{ S, E, N, D, M, O, R, Y, C_1, C_2, C_3 \}$

$D_E = D_N = D_D = D_O = D_R = D_Y = \{ 0, 1, \dots, 9 \}$

$D_S = D_M = \{ 1, 2, \dots, 9 \}$

$D_{C_1} = D_{C_2} = D_{C_3} = \{ 0, 1, 2 \}$

$C_1 : D + E = Y + 10 * C_1$

$C_2 : C_1 + N + R = E + 10 * C_2$

$C_3 : C_2 + E + O = N + 10 * C_3$

$C_4 : C_3 + S + M = O + 10 * M$

$C_5 :$ alldifferent(S, E, N, D, M, O, R, Y)

Scanned by CamScanner

دامنه‌ی سه متغیر C_1 و C_2 و C_3 ، از بقیه کوچکتر است و هر کدام اندازه دامنه‌شان برابر ۲ است.

طبق MRV ، یکی از این ۳ متغیر باید به صورت تصادفی انتخاب شده و مقداردهی شود.

مثلاً C_1 انتخاب می‌شود. با توجه به جدول اول و دوم که C_1 در آن حضور دارد، مقداردهی 0 برای C_1 محدودیت کمتری برای بقیه‌ی متغیرها ایجاد می‌کند. پس طبق LVC ، مقدار 0 را به C_1 می‌دهیم.

با این مقداردهی، با استنتاج از قید شماره 2 ، دامنه‌ی C_2 تبدیل به $\{0, 1\}$ می‌شود.

پس طبق MRV ، متغیر بعدی که برای مقداردهی در نظر گرفته می‌شود، C_2 است. با توجه به دو قید ۳ و ۴ و با توجه به مقداردهی که قبلاً برای C_1 شده است، مقداردهی 0 برای آن، محدودیت کمتری برای بقیه‌ی متغیرها به وجود می‌آورد. پس مقدار 0 را به C_2 می‌دهیم.

با این مقداردهی، دامنه‌ی C_3 تبدیل به $\{0, 1\}$ می‌شود. دامنه‌ی بقیه تغییری نمی‌کند.

پس طبق MRV ، متغیر بعدی که انتخاب می‌شود، C_3 است. مقداردهی 0 به C_3 ، محدودیت کمتری برای بقیه‌ی متغیرها به وجود می‌آورد. پس مقدار 0 را به C_3 می‌دهیم.

بنابراین، دامنه‌ی M تبدیل به $\{1\}$ می‌شود.

پس طبق MRV ، متغیر بعدی که انتخاب می‌شود، M است. این متغیر فقط یک مقدار در دامنه‌اش دارد. پس همان مقدار 1 را به آن می‌دهیم.

با توجه به این مقداردهی به M ، مقدار 1 از دامنه‌ی بقیه‌ی متغیرها حذف می‌شود:

$$D_E = D_N = D_D = D_O = D_R = D_Y = \{0, 2, \dots, 9\} \quad \text{و} \quad D_S = \{2, \dots, 9\}$$

و همینطور دامنه‌ی S و O با توجه به قید 4 اصلاح می‌شود: $0 + S + 1 = O + 10$

$$\Rightarrow S = O + 9 \Rightarrow D_S = \{9\} \quad , \quad D_O = \{0\}$$

Scanned by CamScanner

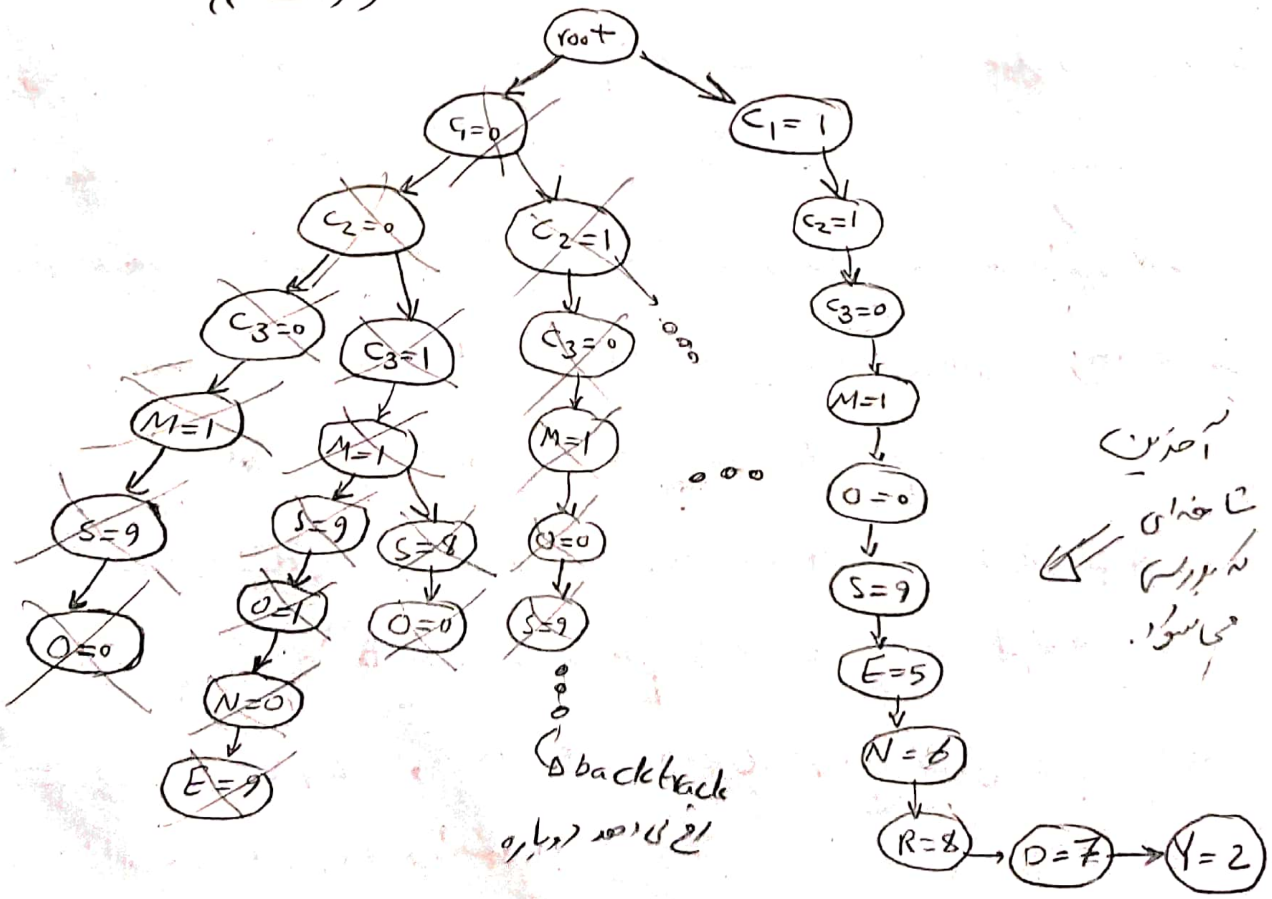
پس یکی از دو متغیر O و S باید انتخاب شود. مثلاً S انتخاب می‌شود. با توجه به اینکه فقط یک مقدار در دامنه‌اش دارد، همان مقدار 9 برایش در نظر گرفته می‌شود. دامنه‌ی متغیری تحت تاثیر قرار نمی‌گیرد.

پس متغیر بعدی را O در نظر می‌گیریم. این متغیر هم فقط یک مقدار در دامنه‌اش دارد، پس همان مقدار ϕ را به آن می‌دهیم.

با توجه به این مقداردهی‌ها، در قید 3 داریم: $E = N$. که این قید با قید 5 سازگاری ندارد. پس باید backtrack انجام دهیم.

مقداردهی O را بررسی کردیم. چون در دامنه O مقدار دیگری نیست، مقداردهی S را هم بررسی کردیم. با توجه به اینکه در دامنه‌ی S هم مقدار دیگری وجود ندارد، مقدار M را هم بررسی کردیم. مقداردهی C_3 هم برگردانده می‌شود. دامنه‌ی C_3 برابر $\{0,1\}$ بود، پس مقدار 1 را حالا به C_3 می‌دهیم.

و همان روند قبلی را برای پیدا کردن جواب ادامه می‌دهیم. در درخت نشان داده‌ام: (از سمت چپ backtrack شده است)



Scanned by CamScanner

④ الف) [فقط محدودیت سطر و ستونی را در نظر گرفتم - چون محدودیت در مربع‌های کوچک بیان نشده بود.]

$X = \{A, B, C, D, E, F, G\}$

دامنه‌ها:

$D_A = \{1, 4\}$ $\quad D_B = \{4\}$ $\quad D_C = \{3\}$

$D_D = \{2, 3, 4\}$ $\quad D_E = \{2\}$ $\quad D_F = \{3, 4\}$ $\quad D_G = \{2\}$

قیود:

$A \neq B \quad A \neq C \quad A \neq D \quad A \neq G \quad B \neq F$

$C \neq D \quad C \neq G \quad D \neq G \quad D \neq E \quad D \neq F \quad E \neq F$

---

④ ب)

	A	B	C	D	E	F	G
مقادیر باقی مانده	1, 4	4	3	2, 3, 4	2	3, 4	2
دارای محدودیت با متغیر(های) دیگر	4	—	—	2, 3	—	4	—

---

④ پ) با توجه به دامنه‌ی متغیرها، یکی از ۴ متغیر B و C و E و G باید در ابتدا انتخاب شود. چون دامنه‌ی آن‌ها اندازه‌اش 1 و از همه کوچک‌تر است.

---

④ ت) در گراف primal، درجه‌ی D برابر 5 است و دامنه‌ی A برابر 4 است. و دامنه‌ی B و E برابر 2 است، و دامنه‌ی C و G و F برابر 3 است. بنابراین، طبق DH، متغیر D در ابتدا انتخاب می‌شود که درجه‌ی بیشتری دارد.

Scanned by CamScanner

4 ج)

انتشار محدودیت	A	B	C	D	E	F	G
مقادیر ممکن	1, 4	4	3	2, 3, 4	2	3, 4	2
محدودیت بین B, A	1	4	3	2, 3, 4	2	3, 4	2
محدودیت بین C, D	1	4	3	2, 4	2	3, 4	2
محدودیت بین E, D	1	4	3	4	2	3, 4	2
محدودیت بین F, D	1	4	3	4	2	3	2

Scanned by CamScanner

⑤ الف)

$$\text{مقدار ثابت} = \frac{n^2(n^2+1)}{2n} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

---

⑤ ب)

$X = \{x_{i,j}\} \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n$

برای همه‌ی متغیرها : $D = \{1, 2, 3, \dots, n^2\}$

قیدها :

$C_1 : \text{alldifferent}(x_{i,j}) \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n$

$C_2 : \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = \frac{n(n^2+1)}{2} \quad 1 \leqslant j \leqslant n$ ستونی

$C_3 : \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = \frac{n(n^2+1)}{2} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$ سطری

$C_4 : \sum_{i=1}^{n} x_{i,i} = \frac{n(n^2+1)}{2}$ قطر اصلی

$C_5 : \sum_{i=1}^{n} x_{i,n-i+1} = \frac{n(n^2+1)}{2}$ قطر فرعی

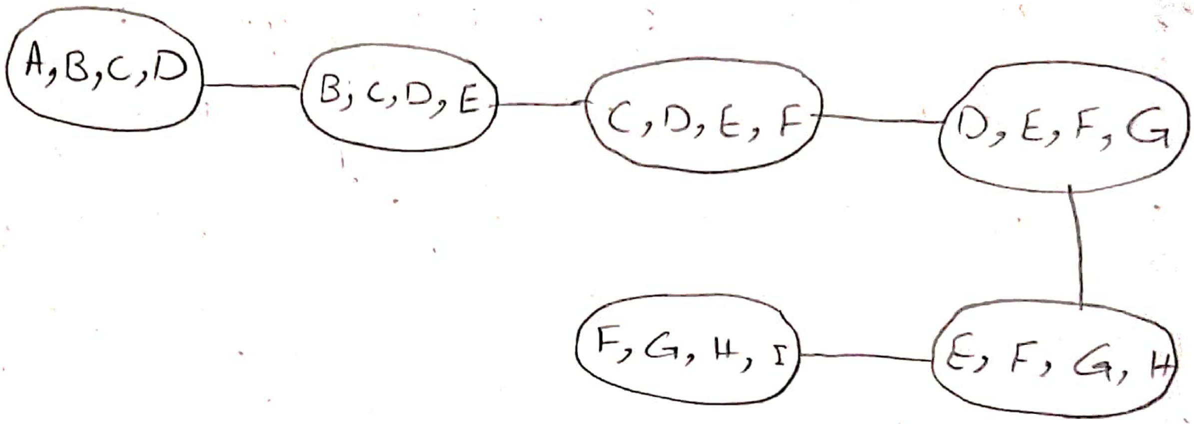
Scanned by CamScanner

6) برای یک grid $k \times k$ ، عرض کمینه‌ی درخت برابر k است.

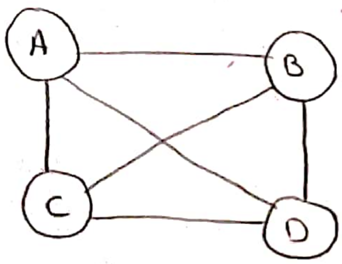
و به طور کلی، برای یک $m \times n$ grid ، عرض کمینه‌ی درختی، برابر $\min(m,n)$ است.

← برای این مثال: گرید 3x3 ⟸ عرض = 3

تجزیه‌ی درختی:



7) K_4:



قیود:

$A \neq B$, $A \neq C$, $A \neq D$

$B \neq C$, $B \neq D$, $C \neq D$

برای همه: $D = \{1, 2, 3\}$

الف) * با توجه به اینکه، اگر هر یک از متغیرها، هرکدام از ۳ رنگ را از دامنه اش اختیار کند، برای باقی متغیرها می‌توان از دامنه شان مقداری را در نظر گرفت؛ این مسئله arc-consistent است.

* همچنین، اگر به هر دو متغیر از متغیرهای این مسئله مقدار بدهیم، با توجه به اینکه تعداد value های موجود در دامنه شان ۳ تاست و با توجه به قیدها، برای باقی متغیرها حتماً مقداری از دامنه اش باقی می‌ماند. پس این مسئله path-consistent هم هست.

* با یک مثال می‌توان نشان داد که این مسئله 4-consistent نیست: اگر به A مقدار ۱ را بدهیم و به B مقدار ۲ را بدهیم و به C مقدار ۳ را بدهیم، با توجه به ۳ قید $A \neq D$ ، $B \neq D$ ، $C \neq D$ ، هیچ مقداری از دامنه D باقی نمی‌ماند تا بتواند مقداردهی ارضایی برداشته باشد.

(7) ب) 2-Consistency همیشه برقرار است. چون وقتی 3 تا رنگ داشته باشیم برای رنگ آمیزی، هرکدام از node ها را که در نظر بگیریم و یک رنگ به آن اختصاص دهیم، دو رنگ دیگر برای هرکدام از node های دیگر باقی می‌مانند. به طور کلی هرگاه در مسئله ی k رنگ آمیزی، K از 2 بیشتر باشد، مسئله 2-Consistent هست.

برای چک کردن 4-consistency باید درجه ی رئوس را در نظر بگیریم. اگر node ای در گراف وجود داشته باشد که درجه ی آن بیشتر از 2 باشد، مسئله 4-Consistent نیست. پس به طور کلی همیشه ما بزرگترین درجه ی گراف را در نظر می‌گیریم و با توجه به آن درباره ی سازگاری 4 تصمیم گیری می‌کنیم.

Scanned by CamScanner