به نام خدا

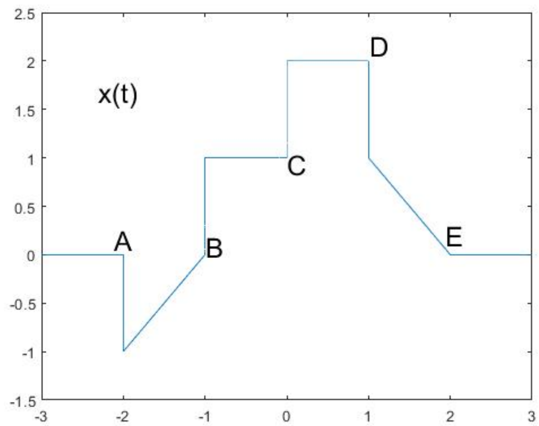
حل تمرین تحویلی سری اول درس تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

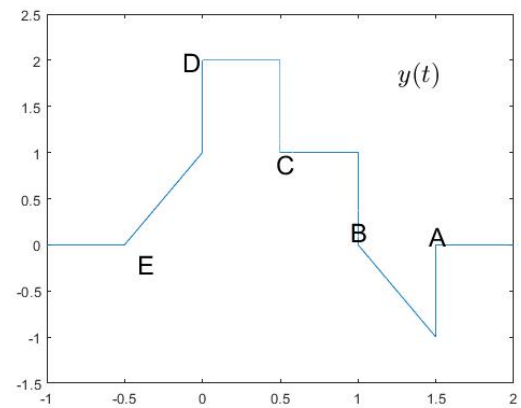
۱- بر اساس سیگنال‌های رسم شده در شکل‌های مسایل ۱-۲۱ و ۱-۲۲ کتاب درسی، سیگنال‌های زیر را رسم و مقدارگذاری کنید:

$a)\ y(t) = x(1-2t)$ $\quad b)\ z(t) = Odd\{x(2-t)\}$ $\quad c)\ w[n] = x[n+1]u[3-n]$

حل:

a) می‌دانیم که این عملیات‌های بر روی زمانِ یک سیگنال، فقط باعث تغییر مقیاس، شیفت زمانی و وارونگی زمانی می‌شود. لذا کافی است که جابجایی موقعیت دو نقطه را بر روی محور زمان مشخص کنیم تا نمودار جدید معلوم شود. البته برای تمرین بهتر، در این مثال برای همه نقاط شکستگی نمودار این کار را انجام می‌دهیم. با نامگذاری روی شکل ، برای نقطه A: $x(-2) = y\left(\frac{3}{2}\right)$، برای نقطه B: $x(-1) = y(1)$، برای نقطه C: $x(0) = y\left(\frac{1}{2}\right)$، برای نقطه D: $x(1) = y(0)$، و برای نقطه E: $x(2) = y\left(-\frac{1}{2}\right)$. بر اساس این نقاط راهنما، $y(t)$ به شکل زیر است (دقت کنید که مقیاس محور افقی متفاوت است):

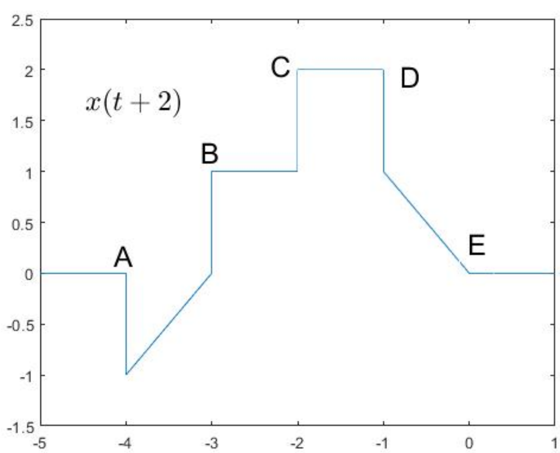


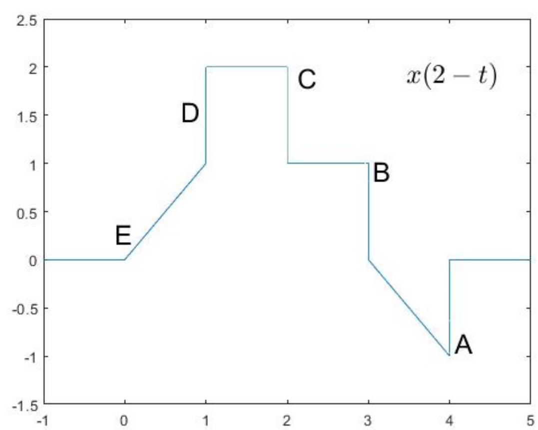


b) می‌دانیم همواره برای هر سیگنال $f(t)$، $Odd\{f(t)\} = (f(t) - f(-t))/2$، پس اینجا داریم

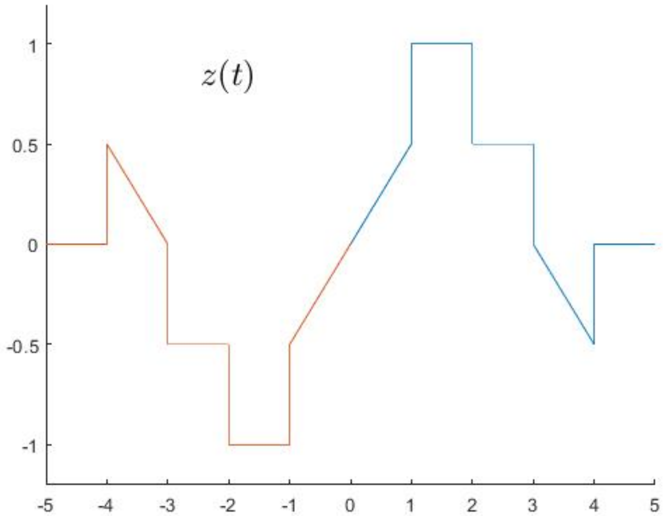
$$z(t) = \frac{x(2-t) - x(2+t)}{2}.$$

پس، ابتدا $x(2-t)$ و $x(2+t)$ را با تکنیک مشابه بند a و با همان نقاط راهنمای A تا E رسم می‌کنیم.





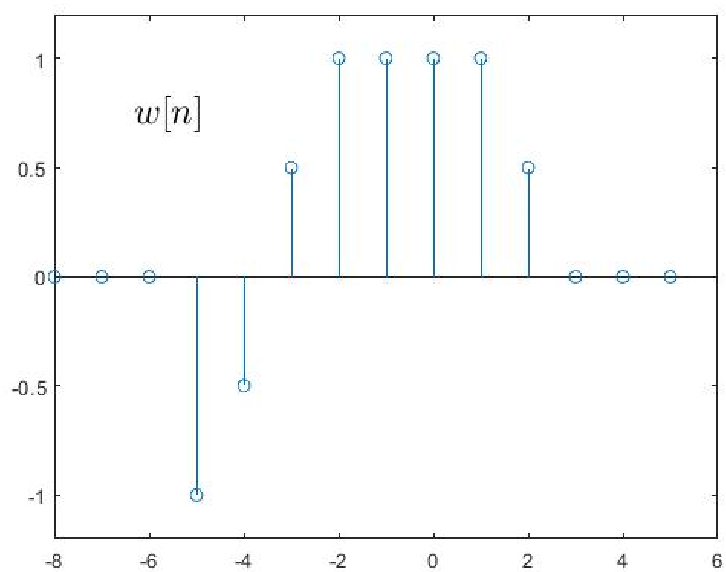
و در نتیجه:



c) اولا، با توجه به تعریف تابع پله،

$$w[n] = x[n+1]u[3-n] = \begin{cases} 0 & n \geq 4 \\ x[n+1] & n \leq 3 \end{cases}.$$

از طرف دیگر، $x[n+1]$ برابر است با شیفت یافته‌ی $x[n]$ به اندازه یک واحد به سمت چپ. پس:



۲- کدام یک از سیگنال‌های زیر متناوب هستند؟ پریود اصلی آن‌ها را به دست آورید:

$a)\ x(t) = sin(\pi t^2)$

$b)\ x[n] = cos(\pi 8 n^2) + cos\left(\pi 8\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)$

$c)\ x[n] = e^{jn}$

$d)\ x[n] = cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) cos\left(\frac{5\pi}{6}n\right)$

حل:

a) غیرمتناوب است. برهان: فرض کنید $x(t)$ متناوب با دوره تناوب اصلی T باشد. آنگاه باید برای هر t داشته باشیم:

$$x(t) = x(t+T) \Longrightarrow sin(\pi t^2) = sin(\pi(t+T)^2) = sin(\pi t^2 + 2\pi t T + \pi T^2). \quad (*)$$

در رابطه $(*)$ برای سه مقدار $t = 0$، $t = 1$ و $t = \sqrt{2}$ به ترتیب به سه شرط زیر روی T می‌رسیم

$$sin(0) = sin(0 + 0 + \pi T^2) \Rightarrow sin(\pi T^2) = 0 \Rightarrow T^2 \in \mathbb{Z}$$
$$sin(\pi) = sin(\pi + 2\pi T + \pi T^2) \Rightarrow sin(2\pi T + \pi T^2) = 0 \Rightarrow 2T + T^2 \in \mathbb{Z}$$
$$sin(2\pi) = sin\left(2\pi + 2\sqrt{2}T\pi + \pi T^2\right) \Rightarrow sin\left(2\sqrt{2}T\pi + \pi T^2\right) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2}T + T^2 \in \mathbb{Z}$$

که شروط اول و دوم نتیجه می دهند که $2T \in \mathbb{Z}$، و شروط اول و سوم نتیجه می دهند که $2\sqrt{2}T \in \mathbb{Z}$. برقراری هر دو غیرممکن است. پس سیگنال نمی تواند متناوب باشد.

b) متناوب است با دوره تناوب ۱. برای اثبات اول عبارت سیگنال را ساده می کنیم. با توجه به صحیح بودن n، داریم:

$$x[n] = cos(\pi 8n^2) + cos\left(\pi 8\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) = cos(\pi 8n^2) + cos(\pi 8n + \pi 4) = 2\,.$$

یعنی در واقع با سیگنال زمان-گسسته‌ی ثابت مواجه هستیم که متناوب با دوره تناوب یک است.

c) غیرمتناوب است. برهان: فرض کنید $x[n] = e^{jn}$ متناوب با دوره تناوب اصلی N باشد. برای هر n خواهیم داشت

$$x[n] = x[n+N] \Rightarrow e^{jn} = e^{j(n+N)} \Rightarrow \cos n + j\sin n = \cos(n+N) + j\sin(n+N)$$
$$\Rightarrow \cos n = \cos(n+N)$$

که برای $n = 0$ نتیجه می‌دهد $\cos(N) = \cos(0) = 1$ و بنابراین لازم است که N به فرم $2k\pi$ باشد که عددی صحیح نیست. در حالی که زمان در حالت گسسته حتما مقداری صحیح است. پس سیگنال غیرمتناوب است.

d) این سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی ۶ است. برای اثبات، ابتدا ضابطه سیگنال را ساده می کنیم:

$$x[n] = cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)cos\left(\frac{5\pi}{6}n\right) = \frac{cos(\pi n) + cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)}{2}$$

که در آن از اتحاد $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ استفاده شده است. حال فرض کنید که $x[n]$ متناوب با دوره تناوب اصلی N باشد. برای هر n می توان نوشت:

$$x[n] = x[n+N] \Leftrightarrow \frac{cos(\pi n) + cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)}{\cancel{2}} = \frac{cos\left(\pi(n+N)\right) + cos\left(\frac{2\pi}{3}(n+N)\right)}{\cancel{2}}$$
$$\Leftrightarrow cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) - cos\left(\frac{2\pi}{3}(n+N)\right) = cos\left(\pi(n+N)\right) - cos(\pi n)$$

با استفاده از اتحاد $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$ نتیجه می شود:

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{\pi}{3}N\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}N\right) = 2\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}N\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}N\right)$$

برای این که عبارت فوق بری هر n برقرار باشد، شرط لازم و کافی آن است که $\sin\left(\frac{\pi}{3}N\right) = 0$ و $\sin\left(-\frac{\pi}{2}N\right) = 0$. پس باید $\frac{\pi}{2}N$ و $\frac{\pi}{3}N$ هر دو مضارب صحیحی از π باشند که کوچکترین N با این شرط، $N = 6$ است.

۳- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

$$a)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+1)\delta(t+1)dt$$
$$b)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\delta(t-u)\delta(t-2)du$$

حل:

$$a)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+1)\delta(t+1)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta(\tau)d\tau = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)d\tau = f(0)$$

که درآن، تساوی اول از تغییر متغیر $\tau = t + 1$، تساوی دوم از رابطه $f(t)\delta(t+t_0) = f(t_0)\delta(t+t_0)$ برای هر سیگنال $f(t)$ و هر زمان t_0، و تساوی چهارم از خاصیت سطح زیر ضربه، به دست آمده است.

$$b)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\delta(t-u)\delta(t-2)du = \delta(t-2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\delta(t-u)du = \delta(t-2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-u)du$$
$$= \delta(t-2)f(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-u)du = \delta(t-2)f(t) = \delta(t-2)f(2)$$

که درآن، تساوی دوم از رابطه $f(t)\delta(t+t_0) = f(t_0)\delta(t+t_0)$ برای هر سیگنال $f(t)$ و هر زمان t_0، و تساوی چهارم از خاصیت سطح زیر ضربه، و تساوی پنجم مجددا از رابطه $f(t)\delta(t+t_0) = f(t_0)\delta(t+t_0)$ به دست آمده است.

۴- خاصیت‌های علیت، پایداری، بی‌حافظه بودن، تغییرناپذیری با زمان و خطی بودن را برای دو سیستم از سیستم‌های زیر (انتخاب به دلخواه) بررسی کنید:

$$a)\ y(t) = \begin{cases} tx(t) & t < |x(t)| \\ x(-t) & t \geq |x(t)| \end{cases}, \qquad b)\ y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]\delta[n-2k],$$
$$c)\ y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 1, \qquad d)\ y(t) = \int_{-t}^{2t} x(\tau)d\tau.$$

حل:

a) الف) علی است. برهان: فرض کنید برای یک t_0 خاص و دو ورودی داشته باشیم $x_1(t) = x_2(t)$ برای هر $t \leq t_0$. نشان می دهیم که $y_1(t_0) = y_2(t_0)$. برحسب مقادیر t_0 و $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ دو حالت ممکن است رخ دهد:

حالت اول: $t_0 < |x_2(t_0)| = |x_1(t_0)|$ و و در نتیجه: $y_2(t_0) = t_0x_2(t_0) = t_0x_1(t_0) = y_1(t_0)$

حالت دوم: $t_0 \geq |x_2(t_0)| = |x_1(t_0)|$ و و در نتیجه: $y_2(t_0) = x_2(-t_0) \overset{m}{=} x_1(-t_0) = y_1(t_0)$. تساوی $\overset{m}{=}$ به این دلیل برقرار است که در این حالت، $t_0 \geq 0$ و در نتیجه $t_0 \geq -t_0$ است و در نتیجه ورودیها در لحظه $-t_0$ برابر هستند.

پس در هر حالت، خروجی ها در این لحظه برابر هستند و اثبات کامل است.

{توجه: فرم ضابطه $t \geq |x(t)|$ در تعریف سیستم، در اثبات بالا مهم است. مثلا اگر به جای آن داشتیم $t \geq |x(2t)|$، آنگاه در لحظات $t_0 > 0$، ممکن است $|x_1(2t_0)| \neq |x_2(2t_0)|$ و در نتیجه اصلا حالت‌های اول و دوم رخ نمی‌دهد.}

ب) ناپایدار است. برهان: برای ورودی کران دار $x(t) = 1$، داریم $\lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty} t\,x(t) = -\infty$. یعنی ورودی کراندار ولی خروجی بیکران است.

ج) حافظه دار است. زیرا اگر برای یک ورودی $x(1) = 0$ باشد آنگاه $y(1) = x(-1)$ خواهد شد. یعنی خروجی در این لحظه به ورودی در لحظه دیگری نیز وابسته است.

د) تغییرپذیربازمان است. برهان: ورودی‌های $x_1(t) = u(t)$ و $x_2(t) = x_1(t-1)$ را در نظر بگیرید. از یک طرف، $y_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ و از طرف دیگر، $y_2\left(\frac{3}{2}\right) = x_2\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$. پس زمانی را یافتیم که $y_2(t) \neq y_1(t-1)$ و نتیجه می گیریم که سیستم تغییرپذیر با زمان است.

ه) غیرخطی است. برهان: دو ورودی $x_1(t) = u(t)$ و $x_2(t) = -1$ را در نظر بگیرید. در لحظه $t = \frac{1}{2}$ داریم:

$$y_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \qquad y_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

از طرف دیگر اگر ورودی $x_3(t) \triangleq x_1(t) + x_2(t)$ را به سیستم اعمال کنیم، خروجی در لحظه $t = \frac{1}{2}$ برابر است با

$$y_3\left(\frac{1}{2}\right) = x_3\left(-\frac{1}{2}\right) = x_1\left(-\frac{1}{2}\right) + x_2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

که برابر با $y_1\left(\frac{1}{2}\right) + y_2\left(\frac{1}{2}\right)$ نیست.

b) اول ضابطه سیستم را ساده می کنیم. با توجه به تعریف تابع ضربه، $\delta[n-2k] = 0$ مگر زمانی که $n - 2k = 0$ شود که این حالت هم فقط به شرط این که n زوج باشد و به ازاء $k = n/2$ رخ می دهد. پس،

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ x^*\left[\frac{n}{2}\right] & \text{زوج } n \end{cases}.$$

حال به سراغ خواص این سیستم می رویم:

الف) غیرعلی است زیرا $y[-4] = x[-2]$.

ب) پایدار است. زیرا اگر ورودی کران دار با کرانی مانند M باشد، داریم: برای هر n

$$|y[n]| \le \left|x^*\left[\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]\right]\right| = \left|x\left[\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]\right]\right| \le M$$

که در آن، $[\![.]\!]$ نماد جز صحیح است و برای این اضافه شده که حالت زمان فرد و زوج یکجا نوشته شود.

پس به ازا هر ورودی کرانداری، خروجی نیز کراندار است.

ج) حافظه دار است. زیرا غیرعلی است.

د) تغییرپذیربازمان است. برهان: دو ورودی $x_1[n] = \delta[n]$ و $x_2[n] = x_1[n-1]$ را در نظر بگیرید. به راحتی، $y_1[0] = 1$ و $y_2[1] = 0$. پس $y_2[n] \neq y_1[n-1]$ و اثبات کامل است.

ه) غیرخطی است. برهان: دو ورودی $x_1[n] = 1$ و $x_2[n] = j\, x_1[n]$ را در نظر بگیرید. به راحتی،

$$y_1[n] = \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ 1 & \text{زوج } n \end{cases}, \qquad y_2[n] = \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ -j & \text{زوج } n \end{cases},$$

پس داریم $x_2[n] = j\, x_1[n]$ اما $y_2[n] \neq j\, y_1[n]$، یعنی خاصیت همگنی برقرار نیست و لذا سیستم خطی نیست.

c) الف) علیت بستگی به تعریف مشتق دارد. با تعریف مشتق چپ سیستم علی است و در غیر این صورت غیرعلی خواهد بود.

ب) ناپایدار است چون به ازا ورودی پله که کراندار است، خروجی ضربه می شود که بیکران است.

ج) حافظه دار است. چون برای محاسبه مشتق در یک لحظه خاص، فقط دانستن مقدار سیگنال در آن لحظه کفایت نمی‌کند، بلکه نیاز به یک همسایگی از آن لحظه‌ی سیگنال داریم.

د) تغییرناپذیربازمان است. برهان: ورودی دلخواه $x_1(t)$ و تاخیر دلخواه t_0 را در نظر بگیرید. اولا $y_1(t) = dx_1(t)/dt + 1$ و ثانیا به ازا ورودی $x_2(t) = x_1(t-t_0)$ داریم: $y_2(t) = dx_2(t)/dt + 1 = dx_1(t-t_0)/dt + 1 = y_1(t-t_0)$ و اثبات کامل است.

ه) غیرخطی است. زیرا برای $x_1(t) = 1$ و $x_2(t) = 2x_1(t) = 2$ داریم $y_1(t) = 0 + 1 = 1$ و $y_2(t) = 0 + 1 = 1$. پس $y_2(t) \neq 2y_1(t)$.

---

d) الف) غیرعلی است. زیرا $y(1)=\int_{-1}^{2}x(\tau)d\tau$، یعنی خروجی در این لحظه به ورودی در لحظات آینده وابسته است.

ب) ناپایدار است. زیرا برای ورودی کراندار $x(t)=1$ داریم $y(t)=\int_{-t}^{2t}1d\tau=3t$ به بینهایت میل می‌کند و بیکران است.

ج) حافظه دار است، چون غیرعلی است.

د) تغییرپذیر با زمان است. برهان: ورودی $x_1(t)=u(t)$ را در نظر بگیرید. خروجی در لحظه ۱ برابر است با $y_1(1)=\int_{-1}^{2}u(\tau)d\tau=2$. حال برای ورودی $x_2(t)=x_1(t-1)$ داریم $y_2(2)=\int_{-2}^{4}u(\tau-1)d\tau=3$. بنابراین $y_2(2)\neq y_1(2-1)$، پس $y_2(t)\neq y_1(t-1)$ و اثبات کامل است.

ه) خطی است. برهان: دو ورودی دلخواه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ و دو ضریب دلخواه a_1 و a_2 را در نظر بگیرید.

$$y_1(t)=\int_{-t}^{2t}x_1(\tau)d\tau,\qquad y_2(t)=\int_{-t}^{2t}x_2(\tau)d\tau,$$

حال به ازا ورودی $x_3(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$ داریم

$$y_3(t)=\int_{-t}^{2t}x_3(\tau)d\tau=\int_{-t}^{2t}a_1x_1(\tau)+a_2x_2(\tau)d\tau=a_1\int_{-t}^{2t}x_1(\tau)d\tau+a_2\int_{-t}^{2t}x_2(\tau)d\tau=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$$

و اثبات کامل است.

۵- سیستم $y[n]=\begin{cases}0 & n=2k+1\\ x[n/2] & n=2k\end{cases}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر دو سیستم $y[n]=x[2n]$ و $y[n]=x[2n]+x[2n+1]$ معکوس این سیستم هستند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که در حالت کلی برای هر سیستم معکوس پذیر، سیستم معکوس یکتا نیست؟

حل:

ابتدا برای شفافیت در متن، برای سیستمهای مختلف، نمادهای متفاوتی برای سیگنال ورودی و خروجی استفاده میکنیم:

سیستم۱: ورودی x – خروجی y.   سیستم۲: ورودی y – خروجی z.   سیستم۳: ورودی y – خروجی w.

اولا، اگر خروجی سیستم۱ به سیستم۲ وارد شود، در خروجی سیستم۲ داریم:

$$z[n]=y[2n]=\begin{cases}0 & 2n\ \text{فرد باشد}\\ x[2n/2] & 2n\ \text{زوج باشد}\end{cases}=x[2n/2]=x[n]$$

پس سیستم۲، وارون سیستم۱ است.

دوما، اگر خروجی سیستم۱ به سیستم۳ وارد شود، در خروجی سیستم۳ داریم:

$$w[n]=y[2n+1]+y[2n]$$

از طرف دیگر داریم

$$y[2n+1]=\begin{cases}0 & 2n+1\ \text{فرد باشد}\\ x[2n+1/2] & 2n+1\ \text{زوج باشد}\end{cases}=0$$

$$y[2n]=\begin{cases}0 & \text{فرد باشد } 2n \\ x[2n/2] & \text{زوج باشد } 2n\end{cases}=x[n]$$

پس $w[n]=x[n]$. یعنی سیستم۳، وارون سیستم۱ است.

پس سیستم۱حداقل دو وارون دارد.

البته به راحتی می‌توان سیستمهای زیادی را مثال زد که وارون یکتا دارند. مثل $y[n]=2x[n]$ با تنها یک وارون $y[n]=\frac{1}{2}x[n]$.

۶- کدام‌یک از سیستم‌های زیر وارون پذیر هستند؟(در صورت وارون ناپذیری دو ورودی با خروجی یکسان ارائه دهید)

$a)\ y[n]=(n+1)x[n]$ $\qquad b)\ y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}x[k]$ $\qquad c)\ y(t)=x(t-1)-x(3-t)$

حل:

a) وارون ناپذیر است. زیرا به ازا هر دو ورودی $x_1[n]=0$ و $x_2[n]=\delta[n+1]$، داریم $y_1[n]=(n+1)0=0$ و $y_2[n]=(n+1)\delta[n+1]=0$. یعنی با دو ورودی متفاوت، خروجیهایی یکسان دارد.

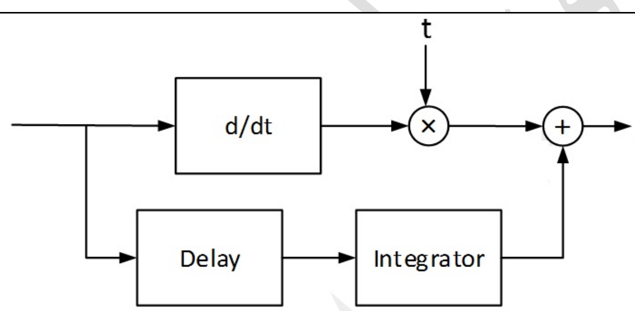
b) وارون پذیر است. برهان:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}x[k]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n}x[n]+\sum_{k=-\infty}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}x[k]=x[n]+\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}x[k]$$
$$=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]$$

پس $x[n]=y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]$ که نشان می‌دهد سیستم وارون پذیر است و وارون آن ، $y[n]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$ است.

c) وارون ناپذیر است. برهان: به ازاء دو ورودی متفاوت $x_1(t)=0$ و $x_2(t)=1$ داریم $y_1(t)=y_2(t)=0$. تمام.

۷- در سیستم روبرو، بلوک Delay یک واحد تاخیردهنده به اندازه یک ثانیه، بلوک d/dt یک مشتق‌گیر، و بلوک Integrator یک بلوک انتگرال‌گیر $\int_{-\infty}^{t}d\tau$ است. بررسی کنید که آیا این سیستم، LTI هست یا خیر؟



حل:

سیستم LTI نیست چون TI نیست به برهان زیر:

اولا داریم

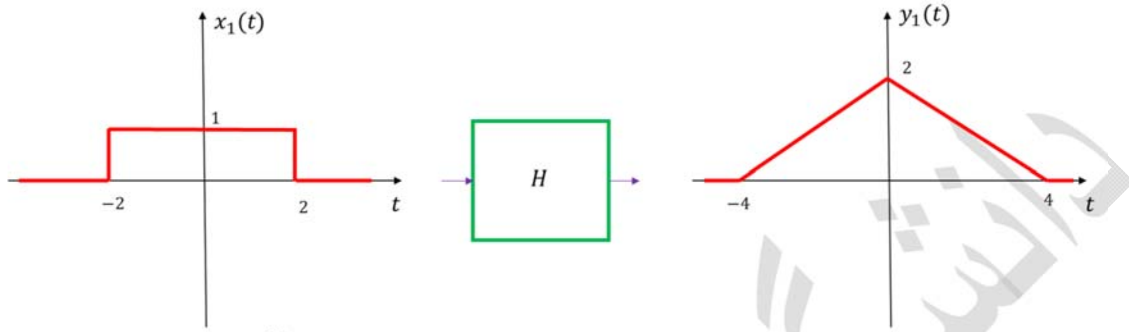
$$y(t)=t\times\frac{dx(t)}{dt}+\int_{-\infty}^{t}x(\tau-1)d\tau=t\frac{dx(t)}{dt}+\int_{-\infty}^{t-1}x(\tau)d\tau.$$

حال ورودی‌های $x_1(t)=tu(t)$ و $x_2(t)=x_1(t-1)$ را در نظر بگیرید.

$$y_1(t)=t\times u(t)+\int_{-\infty}^{t-1}\tau u(\tau)d\tau$$
$$y_2(t)=t\times u(t-1)+\int_{-\infty}^{t-2}\tau u(\tau)d\tau$$

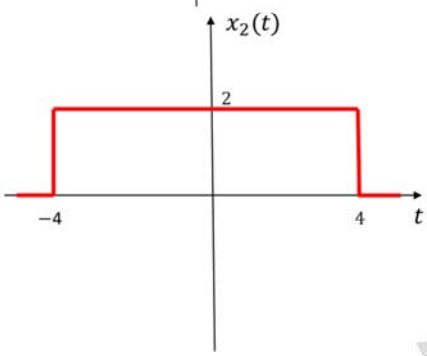
به طور خاص، $y_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}\tau u(\tau)d\tau$ و $y_2\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}+\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}\tau u(\tau)d\tau$. پس $y_2\left(\frac{3}{2}\right)\neq y_1\left(\frac{3}{2}-1\right)$. بنابراین $y_2(t)\neq y_1(t-1)$ در حالی که $x_2(t)=x_1(t-1)$. نتیجه آن که سیستم TI نیست.

۸- H یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) است. چنانچه پاسخ آن به ورودی $x_1(t)$ به صورت $y_1(t)$ باشد:



الف. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2(t)$ را به دست آورید.

ب. در مورد بی‌حافظه بودن و علیت این سیستم چه می‌توان گفت؟



حل:

الف) از روی شکل مشاهده می شود که $x_2(t)=2x_1(t+2)+2x_1(t-2)$. پس با توجه به LTI بودن سیستم خواهیم داشت: $y_2(t)=2y_1(t+2)+2y_1(t-2)$.

ب) سیستم در ورودی $x_1(t)$ تا لحظه منهای دو، ورودی‌اش صفر بوده است اما خروجی قبل از منهای دو غیر صفر شده است (از منهای چهار به بعد). پس سیستم آرامش اولیه ندارد و طبق نکته بیان شده در درس چون خطی بدون آرامش اولیه است، علی نیست. و چون غیرعلی است، حافظه دار است.

۹- درباره هر یک از گزاره‌های زیر بحث کنید:

a) اگر یک سیستم حافظه دار و وارون پذیر باشد آنگاه درباره حافظه دار بودن یا نبودنِ وارون سیستم چه می‌توان گفت؟

b) اگر یک سیستم علی و وارون پذیر باشد آنگاه درباره علی بودن یا نبودنِ وارون سیستم چه می‌توان گفت؟

c) اگر از یک سیگنال پیوسته و متناوب نمونه برداری شود (به صورت $x[n]=x(n\Delta)$ که Δ مقداری مثبت است)، سیگنال گسسته‌ی حاصل حتماً متناوب است.

حل:

a) وارون سیستم همواره حافظه دار است، برای توجیه (البته نه استدلال دقیق!) فرض کنید در یک سیستم چنین نباشد یعنی بتوان برای هر لحظه زمان n_0، فقط از روی $y[n_0]$ ، مقدار $x[n_0]$ را تعیین کرد. این حالت یعنی که بین $y[n_0]$ با هیچ $x[n], n \neq n_0$ رابطه‌ای وجود ندارد که به معنی بدون حافظه بودن سیستم اولیه است و خلاف فرض.

b) هر دو حالت ممکن است. اگر سیستم علی $y(t) = x(t-1)$ را داشته باشیم، وارونِ غیر علی $y(t) = x(t+1)$ را داریم؛ اما اگر سیستم علیِ $y(t) = 2x(t)$ را در نظر بگیریم، دارای وارون علی $y(t) = \frac{1}{2}x(t)$ است (آیا می توانید برای این حالت مثال حافظه دار بیابید؟).

c) نادرست است. مثال e^{jn} در سوالات قبلی.

۱۰-موارد زیر را به صورت کوتاه (استدلال یا مثال مناسب) پاسخ دهید:

(الف) آیا نمایش یک سیگنال به صورت مجموع بخش‌های زوج و فرد یکتا است؟

(ب) $x[n]$ سیگنالی متناوب با پریود اصلی N است و $y[n] \triangleq x[kn]$ که در آن، k عدد صحیح و بزرگتر از یک است. آیا $y[n]$ نیز متناوب است؟ پریود اصلی آن چیست؟

(پ) آیا سیستم حاصل از اتصال سری دو سیستم LTI، حتما یک سیستم LTI است؟

حل:

الف) بله. فرض کنید $x(t)$ دارای بخش زوج و فرد به ترتیب $x_e(t)$ و $x_o(t)$ باشد. یعنی $x_e(t) = x_e(-t)$، $x_o(t) = -x_0(-t)$، و $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$. در آن صورت می توان نوشت:

$$\begin{cases} x(t) = x_e(t) + x_o(t) \\ x(-t) = x_e(-t) + x_o(-t) = x_e(t) - x_o(t) \end{cases}$$

با در نظر گرفتن $x_o(t)$ و $x_e(t)$ به عنوان مجهول در دستگاه فوق و حل دستگاه بر حسب $x(t)$، تنها یک جواب داریم:

$$\begin{cases} x_e(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2} \\ x_o(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2} \end{cases}.$$

ب) بله. تناوب اصلی می‌تواند از ۱ تا N متغیر باشد. برهان: اولا $y[n+N] = x[kn+kN] = x[kn] = y[n]$. یعنی $y[n]$ متناوب با دوره N است. اما دوره تناوب اصلی تواند کوچکتر باشد. ولی باید N را بشمارد. در حالت خاص اگر $k = N$ باشد، دوره تناوب سیگنال جدید یک می‌شود (یعنی سیگنال ثابت حاصل شود).

پ) بله. فرض کنید سیستم اول با ورودی $x_i(t)$، خروجی $z_i(t)$ بدهد و سیستم دوم با ورودی $z_i(t)$، خروجی $y_i(t)$ داشته باشد. حال اگر $x(t) = ax_1(t-t_0) + bx_2(t-t_0)$ ورودی به سیستم اول باشد، سیستم اول چون LTI است خروجی $z(t) = az_1(t-t_0) + bz_2(t-t_0)$ می دهدو سپس با اعمال این سیگنال به سیستم دوم، چون سیستم دوم هم LTI است به خروجی $y(t) = ay_1(t-t_0) + by_2(t-t_0)$ می رسیم. پس ترکیب سری این دو سیستم، LTI است.

فاضل، مدرس هاشمی، مویدیان، نریمانی