پاسخ تمرین کلاسی جلسه‌ی نهم

پاییز ۹۹

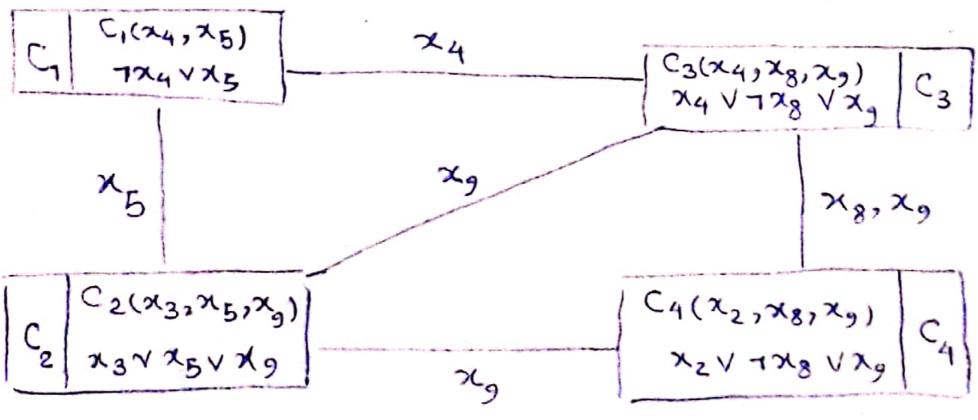
نمونه‌ی SAT:

$$(\neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_7 \vee x_9) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4 \vee x_7) \wedge (\neg x_2 \vee x_6 \vee \neg x_7 \vee \neg x_9) \wedge$$
$$(x_3 \vee \neg x_4 \vee x_7) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_6 \vee \neg x_7) \wedge (\neg x_4 \vee x_5) \wedge$$
$$(x_1 \vee x_5 \vee \neg x_6) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_5 \vee \neg x_9) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_6 \vee \neg x_8 \vee x_9) \wedge$$
$$(\neg x_2 \vee \neg x_6 \vee \neg x_8) \wedge (x_2 \vee \neg x_8 \vee x_9) \wedge (x_3 \vee \neg x_5 \vee x_8 \vee \neg x_9) \wedge$$
$$(x_2 \vee \neg x_5 \vee x_7 \vee \neg x_8) \wedge (x_4 \vee \neg x_8 \vee x_9) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_8 \vee \neg x_9) \wedge$$
$$(\neg x_2 \vee x_4 \vee \neg x_5 \vee x_8) \wedge (x_3 \vee x_5 \vee x_9) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4 \vee x_5) \wedge$$
$$(\neg x_1 \vee \neg x_5 \vee \neg x_9) \wedge (\neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_9) \wedge (x_2 \vee x_6 \vee x_7 \vee x_9) \wedge$$
$$(\neg x_3 \vee \neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7)$$

در نمونه‌ی SAT تعداد کلاوزها ۲۲ و ۹ متغیر x_1 تا x_9 وجود دارد

الف) اگر بخواهیم این مسئله را به روش Dual Transformation در بستر یک Binary CSP بیان کنیم، به تعداد کلاوزهای مسئله‌ی SAT یعنی ۲۲ تا متغیر خواهیم داشت و دامنه‌ی آن‌ها برابر با حالاتی است که کلاوز مربوط مقدار True اخذ نماید.

بخشی از گراف این تبدیل به صورت زیر است.



حال به ازای هر یال گراف (هر دو متغیر CSP که حداقل یک متغیر x مشترک دارند)،
یک قید خواهیم داشت که تضمین نماید متغیرهای SAT مشترک مقادیر متفاوت اخذ نکنند یا
به عبارت دیگر دو متغیر CSP با هم compatible باشند.
لذا ۳ قید خواسته شده در صورت سوال را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$\langle (C_1, C_2), \{ ((0,1),(1,1,1)), ((0,1),(0,1,1)), ((0,1),(1,1,0)),$
$((0,1),(0,1,0)), ((1,1),(1,1,1)), ((1,1),(0,1,1)),$
$((1,1),(1,1,0)), ((1,1),(0,1,0)), ((0,0),(0,0,1)),$
$((0,0),(1,0,0)), ((0,0),(1,0,1)) \} \rangle$

$\langle (C_1, C_3), \{ ((0,1),(0,0,0)), ((0,1),(0,0,1)), ((0,1),(0,1,1)),$
$((0,0),(0,0,0)), ((0,0),(0,0,1)), ((0,0),(0,1,1)),$
$((1,1),(1,0,0)), ((1,1),(1,0,1)), ((1,1),(1,1,0)),$
$((1,1),(1,1,1)) \} \rangle$

$\langle (C_2, C_3), \{ ((0,0,1),(0,0,1)), ((0,0,1),(1,0,1)),$
$((0,0,1),(1,1,1)), ((0,1,0),(0,0,0)),$
$((0,1,0),(1,0,0)), ((0,1,0),(1,1,0)),$
$((0,1,1),(0,0,1)), ((0,1,1),(1,0,1)),$
$((0,1,1),(1,1,1)), ((1,0,0),(0,0,0)),$
$((1,0,0),(1,0,0)), ((1,0,0),(1,1,0)),$
$((1,0,1),(0,0,1)), ((1,0,1),(1,0,1)),$
$((1,0,1),(1,1,1)), ((1,1,0),(0,0,0)),$
$((1,1,0),(1,0,0)), ((1,1,0),(1,1,0)),$
$((1,1,1),(1,1,1)), ((1,1,1),(1,0,1)),$
$((1,1,1),(0,0,1)) \} \rangle$

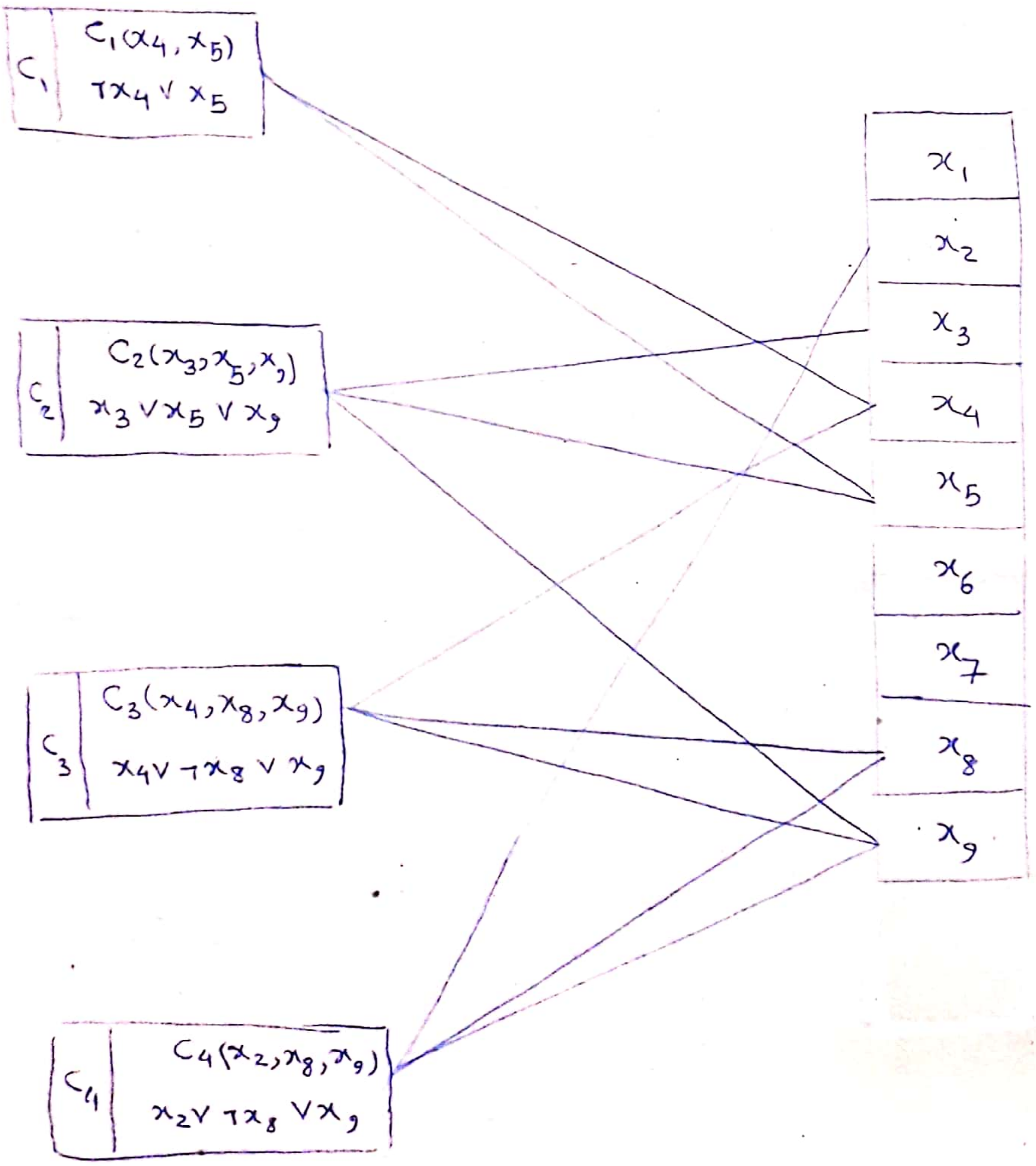
<((C_2, C_4), {((0,0,1), (0,0,1)), ((0,0,1), (1,0,1)),
((0,0,1), (1,1,1)), ((0,1,0), (1,1,0)),
((0,1,0), (1,0,0)), ((0,1,0), (0,0,0)),
((0,1,1), (0,0,1)), ((0,1,1), (1,0,1)),
((0,1,1), (1,1,1)), ((1,0,0), (0,0,0)),
((1,0,0), (1,0,0)), ((1,0,0), (1,1,0)),
((1,0,1), (0,0,1)), ((1,0,1), (1,0,1)),
((1,0,1), (1,1,1)), ((1,1,0), (0,0,0)),
((1,1,0), (1,0,0)), ((1,1,0), (1,1,0)),
((1,1,1), (0,0,1)), ((1,1,1), (1,0,1)),
((1,1,1), (1,1,1))}>

<((C_3, C_4), {((1,0,0), (1,0,0)), ((1,0,0), (0,0,0)),
((0,0,0), (1,0,0)), ((0,0,0), (0,0,0)),
((1,0,1), (1,0,1)), ((1,0,1), (0,0,1)),
((0,0,1), (1,0,1)), ((0,0,1), (0,0,1)),
((1,1,0), (1,1,0)), ((1,1,1), (1,1,1)),
((1,1,1), (0,1,1)), ((0,1,1), (1,1,1)),
((0,1,1), (0,1,1))}>

هر قید به گونه ای نوشته می‌شود که هر دو متغیر CSP در دامنه‌ی خود باشند و متغیرهای SAT مشترک میان آن‌ها مقادیر یکسانی بگیرند.

ب) همان گونه که مشاهده نمودیم ؛ در نمونه ی SAT تعداد ۲۲ کلاز و ۹ متغیر x_i موجود است. اگر بخواهیم این مسئله را به روش Hidden Transformation در بستر یک CSP بیان کنیم ، به تعداد جمع کلاوزها و متغیرهای SAT (یعنی به تعداد ۳۱ تا) متغیر برای CSP خواهیم داشت. گراف این تبدیل ، یک گراف دوبخشی است که در یک سو کلاوزها و در بخش دیگر متغیرهای نمونه ی SAT اولیه قرار می گیرند به گونه ای که هر کدام از این متغیرها با یال هایی به گره ی کلاوزی که در آن حضور دارند متصل می شوند و به ازای هر یال گراف یک قید در Binary CSP نهایی خواهیم داشت.

بخشی از گراف معرفی شده به صورت زیر است:



با توجه به گراف کشیده شده، ۵ قید زیر را می‌توان معرفی کرد :

$\langle (x_4, C_1), \{(0,(0,1)), (0,(0,0)), (1,(1,1))\} \rangle$

$\langle (x_2, C_4), \{(0,(0,1,1)), (0,(0,0,1)), (0,(0,0,0)),$
$(1,(1,0,0)), (1,(1,0,1)), (1,(1,1,0)),$
$(1,(1,1,1))\} \rangle$

$\langle (x_5, C_2), \{(0,(0,1,1)), (0,(0,0,1)), (0,(0,1,0)),$
$(1,(1,0,0)), (1,(1,0,1)), (1,(1,1,0)),$
$(1,(1,1,1))\} \rangle$

$\langle (x_8, C_3), \{(0,(0,0,1)), (0,(0,0,0)), (0,(1,0,0)),$
$(0,(1,0,1)), (1,(1,1,1)), (1,(1,1,0)),$
$(1,(0,1,1))\} \rangle$

$\langle (x_9, C_4), \{(0,(0,0,0)), (0,(1,0,0)), (0,(1,1,0)),$
$(1,(1,0,1)), (1,(1,1,1)), (1,(0,1,1)),$
$(1,(0,0,1))\} \rangle$