



Understanding Cryptography

Answers of Homework No.2

فصل سوم

1.

حل:

1.1.

به ازای هر x داریم: $DES_k(x) = DES_k^{-1}(x)$
در این جا باید عمل رمزنگاری و رمزگشایی یکسان باشد. ترتیب کلیدهای مورد استفاده در رمزنگاری به صورت $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_{16})$ است و ترتیب کلیدهای مورد استفاده در رمزگشایی به صورت $(k_{16}, k_{15}, \dots, k_1)$ است. پس نتیجه می شود که زیرکلیدهای تولید شده باید دارای رابطه زیر با یکدیگر باشند:

$$k_{i+1} = k_{16-i} \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, 7$$

1.2.

DES دارای ۴ عدد $weak\ keys$ از نوع ۶۴ بیتی است. طبق نکته قسمت قبل برای اینکه شیفت بیت ها اثری نداشته باشد لذا داریم:

Keys before parities drop (64 bits)	Actual key (56 bits)
0101 0101 0101 0101	0000000 0000000
1F1F 1F1F 0E0E 0E0E	0000000 FFFFFFFF
E0E0 E0E0 F1F1 F1F1	FFFFFFF 0000000
FEFE FEFE FEFE FEFE	FFFFFFF FFFFFFFF

1.3.

به طور کلی احتمال انتخاب یکی از این کلیدهای ضعیف به طور تصادفی برابر است با:

$$\frac{4}{2^{56}} = \frac{1}{2^{54}}$$

1.4.

کلیدهای ضعیف نباید در *key generation* استفاده شوند. به دلیل اینکه این کلیدها به راحتی شکسته می شوند و فضای این کلیدها بسیار محدود می باشد.

1.5.

به طور کلی ۶ زوج (جفت) یا ۱۲ عدد کلید *semi weak* وجود دارد.

01FE 01FE 01FE 01FE and FE01 FE01 FE01 FE01
 1FE0 1FE0 0EF1 0EF1 and E01F E01F F10E F10E
 01E0 01E0 01F1 01F1 and E001 E001 F101 F101
 1FFE 1FFE 0EFE 0EFE and FE1F FE1E FE0E FE0E
 011F 011F 010E 010E and 1F01 1F01 0E01 0E01
 E0FE E0FE F1FE F1FE and FEE0 FEE0 FEF1 FEF1

1.6.

DES دارای کلید *semi weak* است که تنها دو زیرکلید متفاوت تولید می کنند که هر کدام به تعداد ۸ مرتبه در الگوریتم استفاده می شوند.

1.7.

DES دارای 2^{56} کلید است. تعداد کل کلیدهای ممکن ۶۴ عدد می باشد که ۴ عدد *weak* ، ۱۲ عدد *semi weak* و ۴۸ عدد *possible weak key* هستند. احتمال انتخاب یکی از این کلیدها تقریباً ناممکن است. به این ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \text{احتمال } weak \text{ برابر است با: } & \frac{2^2}{2^{56}} \\ \text{احتمال } semi weak \text{ برابر است با: } & \frac{12}{2^{56}} \\ \text{احتمال } possible weak key \text{ برابر است با: } & \frac{48}{2^{56}} \\ \text{احتمال مجموع برابر است با: } & \frac{4+12+48}{2^{56}} \end{aligned}$$



1.

حل :

2.1.

یک ویژگی مهم که *DES* را امن می سازد غیر خطی بودن *BOX - S* ها است که باعث *confusion* می شود. در واقع با روش های خطی نمی توان آن ها را شکست.

2.2.

$$S_1(x_1) \oplus S_1(x_2) \neq S_1(x_1 \oplus x_2)$$

$$S_1(101010_2) \oplus S_1(010101_2) \neq S_1(101010_2 \oplus S_1 010101_2)$$

$$0110_2 \oplus 1100_2 \neq S_1(111111_2)$$

$$1010_2 \neq 1101_2$$

2.3.

اگر ما اولین و ششمین بیت را با هم بنویسیم، در حالت باینری 11 را داریم. که معادل ۳ است و نشاندهنده شماره سطر است. بیت های باقیمانده در حالت باینری برابر 0001 هستند که معادل ۱ است و نشاندهنده شماره ستون است پس ما مقدار سطر سوم و ستون یکم را در جدول جست و جو می کنیم. که برابر 12 در دسیمال است. که مقدار باینری آن برابر 1100 است. پس ورودی 100011 خروجی 1100 را بدست می دهد.



3.

حل:

3.1.

در مرحله اول یا مرحله عبور از *initial permutation* اگر x متن اصلی باشد، به دلیل اینکه بیت ۵۷ ام در متن اصلی ۱ است داریم: $(x = 0000 \dots 010 \dots 0)$.

$IP(x)$ بیت ۵۷ را به بیت ۳۳ نگاشت می دهد یعنی همه بیت ها صفر شده و فقط بیت ۳۳ ام برابر ۱ می شود و وارد دور شماره یک می گردد. پس $L_0 = 0$ (۳۲ بیت) و $R_0 = 1000 \dots 0$ (۳۲ بیت) است. حال R_0 وارد تابع f شده موقع حساب کردن $f(R_0)$ می توانیم کلید صفر را به دلیل اینکه $(a \oplus 0 = a)$ است به حساب نیاوریم. پس در نتیجه کلید هم صفر است پس نتیجه XOR هم تغییری نمی کند. یعنی $(x \oplus k = 0) = x$ در مرحله $E(R_0)$ ، *expansion* بیت اول R_0 را به بیت دوم و ۴۸ ام نگاشت می دهد. این یعنی مقادیر S_{2-7} در ورودی همه ۰ می گیرند. S_1 در ورودی دارای مقدار 010000_2 است و S_8 مقدار 000001_2 را می گیرد.

3.2.

با عبور ورودی ها از $s - box$ خروجی های زیر طبق جدول کتاب حاصل می شود.

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
ورودی	010000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000
سطر متناظر	00 = 0	00 = 0	00 = 0	00 = 0	00 = 0	00 = 0	00 = 0	01 = 1
ستون متناظر	1000 = 8	0000 = 0	0000 = 0	0000 = 0	0000 = 0	0000 = 0	0000 = 0	0000 = 0
خروجی	0011	1111	1010	0111	0010	1100	0100	0001

بعد از عملیات *permutation* روی خروجی *s-box* داریم:

$$R_1 = 1101\ 0000\ 0101\ 1000\ 0101\ 1011\ 1001\ 1110_2$$

این مقدار سپس با L_0 ، XOR شده تا مقدار R_1 را تولید کند. این گام متوقف شده چون مقدار L_0 صفر است. مقادیر محاسبه شده L_1 و R_1 به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} L_1 &= R_0 = 08000000_{16} \\ R_1 &= D0585B9E_{16} \end{aligned}$$

3.3.

مینیمم تعداد بیت‌های خروجی (در هر $S-BOX$) که در نتیجه یک بیت تغییر در ورودی تغییر خواهد کرد برابر ۲ است.

3.4.

در حالتی که *plaintext* کاملاً صفر است با توجه به این که همه‌ی بیت‌های ورودی صفر تفاوتی در $IP(x)$ ایجاد نمی‌کنند خروجی به صورت زیر است:

$$L_0 = R_0 = 0$$

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
ورودی	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000
خروجی	1110	1111	1010	0111	0010	1100	0100	1101

بعد از عملیات *permutation* داخلی تابع f و XOR نمودن با L_0 داریم:

$$R_1 = 1101\ 0000\ 0101\ 1000\ 0101\ 1011\ 1001\ 1110_2$$

$$L_1 = 0$$

به طور کلی زمانی که همه بیت‌ها صفر باشند خروجی $10110001101100011011011100$ است و موردی که قبلاً محاسبه شده بود برابر $11010000010110000101101110011110$ است. حاصل XOR نمودن این دو مقدار $00001000100000001000000000100010$ است که نشان دهنده تغییر ۵ بیت است به دلیل اینکه L_1 مستقیماً وارد R_0 شده و یک بیت از L_1 نیز ۱ است، مجموعاً دیده می‌شود به ازای تغییر ۱ بیت در ورودی ۶ بیت با هم تفاوت دارند.



فصل چہارم

۲.

حل :

Feedback kindly provided by Lisa Roy in the comment section has allowed me to correct some errors in earlier versions of this answer. Given that we have now converged upon a common answer, I can be reasonably sure of correctness.

Note: From now on the state is represented as a 4x4 grid of bytes expressed in hexadecimal. This makes other transformations easier to represent also. The ordering of the bytes within the grid is as follows:

A_0	A_4	A_8	A_{12}
A_1	A_5	A_9	A_{13}
A_2	A_6	A_{10}	A_{14}
A_3	A_7	A_{11}	A_{15}

1. This question is slightly confusingly expressed and it took me a while to figure out what is meant. The keys k_0 and k_1 are given as a single array (W_0, \dots, W_7) . In fact, $k_0 = W_0, \dots, W_3$ and $k_1 = W_4, \dots, W_7$. As such the first step is the initial k_0 key addition which occurs before we get into applying the rounds. The first word of the input is the only one that isn't all-zeroes. As such, the state after k_0 addition is:

Note: From now on the state is represented as a 4x4 grid of bytes expressed in hexadecimal. This makes other transformations easier to represent also.

2A	28	AB	09
7E	AE	F7	CF
15	D2	15	4F
16	A6	88	3C

It's worth noting that the four columns correspond exactly to the $k_0 = (W_0, \dots, W_3)$ subkey bytes with the exception of the first cell, which was slightly altered by the XOR operation.

After applying the ByteSubstitution (S-box) layer, the state is as follows:

E5	34	62	01
F3	E4	68	8A
59	B5	59	84
47	24	C4	EB

The ShiftRows layer is a very simple transformation. The first row remains unchanged. The other rows are rotated right by a number of positions; the second by 3, the third by 2 and the fourth by 1. This gives the following:

E5	34	62	01
E4	68	8A	F3
59	84	59	B5
EB	47	24	C4

The final transformation (other than the k_1 addition) is the MixColumn layer. This involves a Galois Extension Field matrix multiplication with the following description:

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_5 \\ B_{10} \\ B_{15} \end{pmatrix}$$

The C values refer to the outputted column. The B values refer to the input columns which were the output of the ShiftRows layer. The indexes here are preserved from prior to the shift. Each new column can be calculated left-to-right using this procedure.

it should also be noted that 03 here would refer to $x + 1$ in $GF(2^8)$. The same logic is used to turn a hex byte into a Galois Extension Field polynomial. The reduction polynomial is the AES primitive polynomial:

$$P(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$$

As such the calculation to be performed is as follows for each of the columns:

$$\begin{pmatrix} 02 \times E5 + 03 \times E4 + 01 \times 59 + 01 \times EB \\ 01 \times E5 + 02 \times E4 + 03 \times 59 + 01 \times EB \\ 01 \times E5 + 01 \times E4 + 02 \times 59 + 03 \times EB \\ 03 \times E5 + 01 \times E4 + 01 \times 59 + 02 \times EB \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 02 \times 34 + 03 \times 68 + 01 \times 84 + 01 \times 47 \\ 01 \times 34 + 02 \times 68 + 03 \times 84 + 01 \times 47 \\ 01 \times 34 + 01 \times 68 + 02 \times 84 + 03 \times 47 \\ 03 \times 34 + 01 \times 68 + 01 \times 84 + 02 \times 47 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 02 \times 62 + 03 \times 8A + 01 \times 59 + 01 \times 24 \\ 01 \times 62 + 02 \times 8A + 03 \times 59 + 01 \times 24 \\ 01 \times 62 + 01 \times 8A + 02 \times 59 + 03 \times 24 \\ 03 \times 62 + 01 \times 8A + 01 \times 59 + 02 \times 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 02 \times 01 + 03 \times F3 + 01 \times B5 + 01 \times C4 \\ 01 \times 01 + 02 \times F3 + 03 \times B5 + 01 \times C4 \\ 01 \times 01 + 01 \times F3 + 02 \times B5 + 03 \times C4 \\ 03 \times 01 + 01 \times F3 + 01 \times B5 + 02 \times C4 \end{pmatrix}$$

This produces the following state:

54	13	3C	7D
36	34	A2	FC
95	86	36	D4
44	3E	3D	D6

All that's left to do after this is the KeyAddition layer for $k_1 = W_4, \dots, W_7$:

F4	9B	1F	57
CC	60	01	90
6B	AA	0F	A2
53	8F	04	D3

Therefore, the output of the first round of encryption is as follows (remembering to read it out column-wise):

F4CC6B539B60AA8F1F010F045790A2D3₁₆

2. For the case that the input is all-zeroes, the state after the k_0 key addition will be as follows (only the first byte is different from part 1):

2B	28	AB	09
7E	AE	F7	CF
15	D2	15	4F
16	A6	88	3C

After applying the ByteSubstitution (S-box) layer, the state is as follows:

F1	34	62	01
F3	E4	68	8A
59	B5	59	84
47	24	C4	EB

After applying the ShiftRows layer, the state is as follows:

F1	34	62	01
E4	68	8A	F3
59	84	59	B5
EB	47	24	C4

Up until this point, only one byte (in fact only one bit) has been altered in compared to part 1. The MixColumn introduces some diffusion, and after this layer is applied, the state is as follows:

7C	13	3C	7D
22	34	A2	FC
81	86	36	D4
78	3E	3D	D6

The first column of the state now has a different set of values than in part 1, the others are unaltered. All that's left to do after this is the KeyAddition layer for $k_1 = W_4, \dots, W_7$:

The first column of the state now has a different set of values than in part 1, the others are unaltered. All that's left to do after this is the KeyAddition layer for $k_1 = W_4, \dots, W_7$:

<i>F4</i>	<i>9B</i>	<i>1F</i>	<i>57</i>
<i>CC</i>	<i>60</i>	<i>01</i>	<i>90</i>
<i>6B</i>	<i>AA</i>	<i>0F</i>	<i>A2</i>
<i>53</i>	<i>8F</i>	<i>04</i>	<i>D3</i>

Therefore, the output of the first round of encryption is as follows (remembering to read it out column-wise):

*DCD87F6F9B60AA8F1F010F045790A2D3*₁₆

3. We can see how many output bits have been altered by XORing the two output values together. This produces:

*2814143c0000000000000000000000*₁₆

In this form, we can clearly see that only the first column is altered after the first round.

*2814143c*₁₆ = *101000000101000001010000111100*₂

The 1s in the binary above correspond to output bits which have changed. There are ten of them, so therefore the number of output bits which have changed due to a 1 bit change in input, in this instance, is 10 after the first round. The ShiftRows operations in further rounds will diffuse this effect to other columns.



5.

حل:

$$\forall a_i \in GF(2) = \{0,1\} : p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

هدف ما یافتن $P(x)$ های درجه ۴ است در نتیجه $a_4 = 1$. همچنین باید در نظر داشته باشیم چندجمله‌ای مورد نظر باید *irreducible* باشد یعنی در $GF(2)$ ریشه نداشته باشد. یعنی $p(0) \neq 0$ و $p(1) \neq 0$.

$$p(0) \neq 0 \rightarrow a_0 \neq 0 \rightarrow a_0 = 1$$

$$p(1) \neq 0 \rightarrow 1 \times 1 + a_3 + a_2 + a_1 + 1 \neq 0 \rightarrow a_3 + a_2 + a_1 \neq 0 \mod 2$$

البته می توان گفت اگر a_0 یک نباشد چند جمله ای *irreducible* نیست چون در $p(x)$ از x های آن می توان فاکتورگیری کرد و به ۲ عبارت با درجه کمتر قابل تقسیم است.

بنابراین 4 حالت داریم:

$$a_3 = 1, a_2 = 1, a_1 = 1 \rightarrow p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1 \quad \checkmark$$

$$a_3 = 1 \rightarrow p(x) = x^4 + x^3 + 1 \quad \checkmark$$

$$a_1 = 1 \rightarrow p(x) = x^4 + x + 1 \quad \checkmark$$

$$a_2 = 1 \rightarrow p(x) = x^4 + x^2 + 1 \quad \times$$

چند جمله ای آخر تحویل پذیر است یعنی داریم:

$$p(x) = x^4 + x^2 + 1 \mod 2 = (x^2 + x + 1)^2$$

در نتیجه سه چندجمله ای دیگر چون به هیچ کدام از عوامل درجه پایین تر خود تجزیه نمی شوند *irreducible* هستند.

به طور کلی سه چندجمله ای *irreducible* در $GF(2)$ از درجه ۴ وجود دارد.

$$x^4 + x + 1$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$x^4 + x^3 + 1$$



6.

حل:

\times	\cdot	\backslash	x	$x + 1$	x^2	$x^2 + 1$	$x^2 + x$	$x^2 + x + 1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x + 1$	x^2	$x^2 + 1$	$x^2 + x$	$x^2 + x + 1$
x	0	x	x^2	$x^2 + x$	$x + 1$	1	$x^2 + x + 1$	$x^2 + 1$
$x + 1$	0	$x + 1$	$x^2 + x$	$x^2 + 1$	$x^2 + x + 1$	x^2	1	x
x^2	0	x^2	$x + 1$	$x^2 + x + 1$	$x^2 + x$	x	$x^2 + 1$	1
$x^2 + 1$	0	$x^2 + 1$	1	x^2	x	$x^2 + x + 1$	$x + 1$	$x^2 + x$
$x^2 + x$	0	$x^2 + x$	$x^2 + x + 1$	1	$x^2 + 1$	$x + 1$	x	x^2
$x^2 + x + 1$	0	$x^2 + x + 1$	$x^2 + 1$	x	1	$x^2 + x$	x^2	$x + 1$

به دلیل اینکه $p(x) = x^3 + x + 1$ یک چند جمله ای درجه ۳ است پس در $GF(2^3)$ یک جدول 8×8 داریم. در واقع از ۰۰۰ تا ۱۱۱ داریم. باید چند جمله ای های مربوط به هر کدام را بنویسیم. روش به دست آوردن سطر و ستون قرمز رنگ جدول بالا در اینجا بیان شده است.

$$000 = 0$$

$$001 = 1$$

$$010 = x$$

$$011 = x + 1$$

$$100 = x^2$$

$$101 = x^2 + 1$$

$$110 = x^2 + x$$

$$111 = x^2 + x + 1$$

به این ترتیب بعد از به دست آوردن چند جمله‌ایهای بالا هر دو چندجمله‌ای را در $\text{mod } p(x)$ ضرب می‌کنیم سپس ضرایب چند جمله‌ای به دست آمده را به $\text{mod } 2$ حساب نموده و در نهایت باید چند جمله‌ای را به $\text{mod } p(x)$ حساب نمود. البته باید در نظر داشت محاسبات در $GF(2)$ صورت می‌پذیرد یعنی اگر در چند جمله‌ای ضریب -1 داشتیم با $+1$ برابر است.

روش به دست آوردن عناصر جدول:

به طور مثال چند نمونه در اینجا توضیح داده شده است:

$$(x^2 + 1)(x) = x^3 + x \text{ mod } (2) = x^3 + x \text{ mod } p(x) = -1 \text{ in } GF(2) = 1$$

$$(x^2 + 1)(x + 1) = x^3 + x^2 + x + 1 \text{ mod } (2) = x^3 + x^2 + x + 1 \text{ mod } p(x) = x^2$$

$$(x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 \text{ mod } (2) = x^4 + 1 \text{ mod } p(x)$$

$$= -x^2 - x - 1 \text{ in } GF(2) = x^2 + x + 1$$

$$(x^2 + 1)(x^2) = x^4 + x^2 \text{ mod } (2) = x^4 + x^2 \text{ mod } p(x) = -x \text{ in } GF(2) = x$$

$$(x^2 + x)(x + 1) = x^3 + 2x^2 + x \text{ mod } (2) = x^3 + x \text{ mod } p(x) = 1$$

$$(x^2 + x + 1)(x + 1) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \text{ mod } (2) = x^3 + 1 \text{ mod } p(x) = x$$

$$(x^2 + x + 1)(x^2) = x^4 + x^2 + x^3 \text{ mod } (2) = x^4 + x^2 + x^3 \text{ mod } p(x)$$

$$= -2x - 1 \text{ mod } 2 = -1 \text{ in } GF(2) = 1$$

$$(x^2 + x)(x^2 + x) = x^4 + 2x^3 + x^2 \text{ mod } (2) = x^4 + x^2 \text{ mod } p(x) = -x \text{ in } GF(2)$$

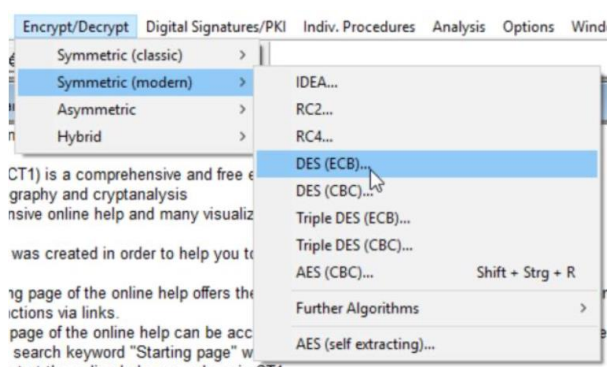
$$= x$$

به همین ترتیب بقیه عناصر جدول نیز حاصل می‌شوند.

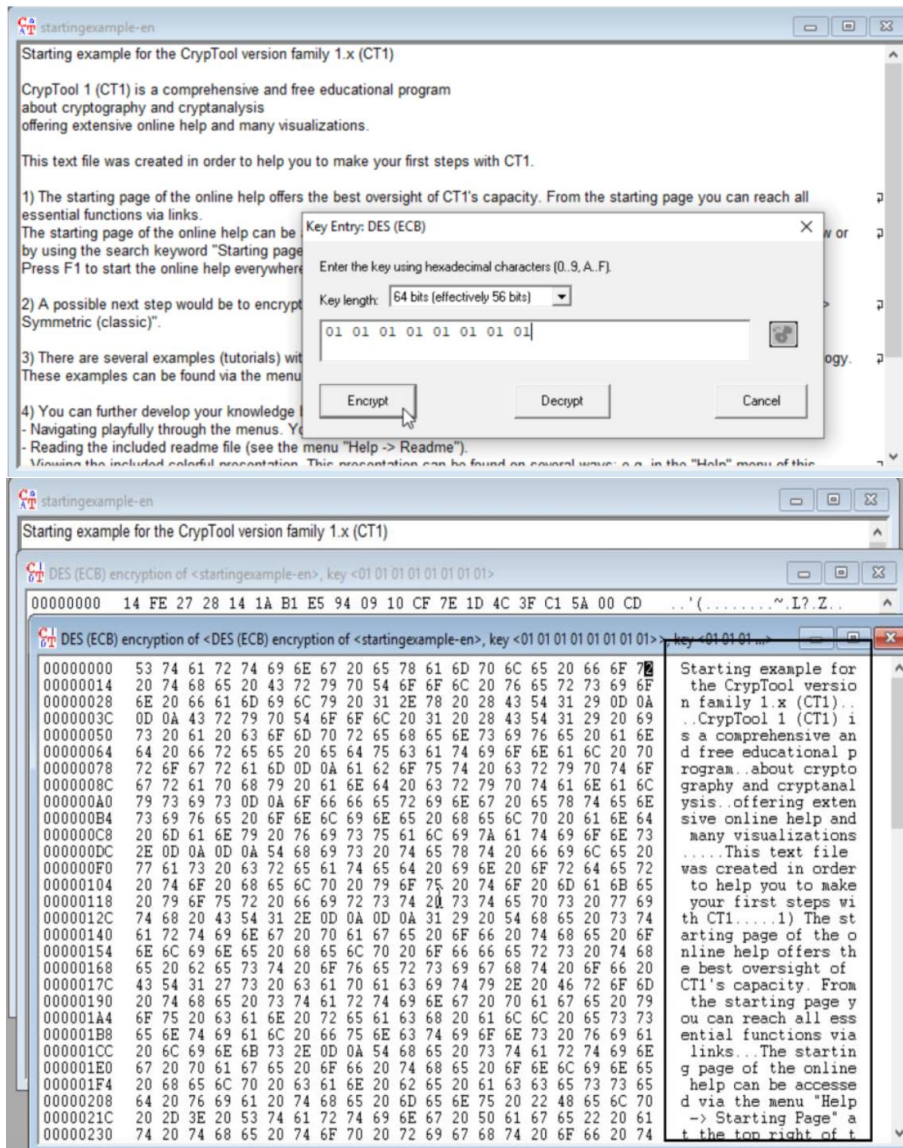


فصل سوم و چهارم

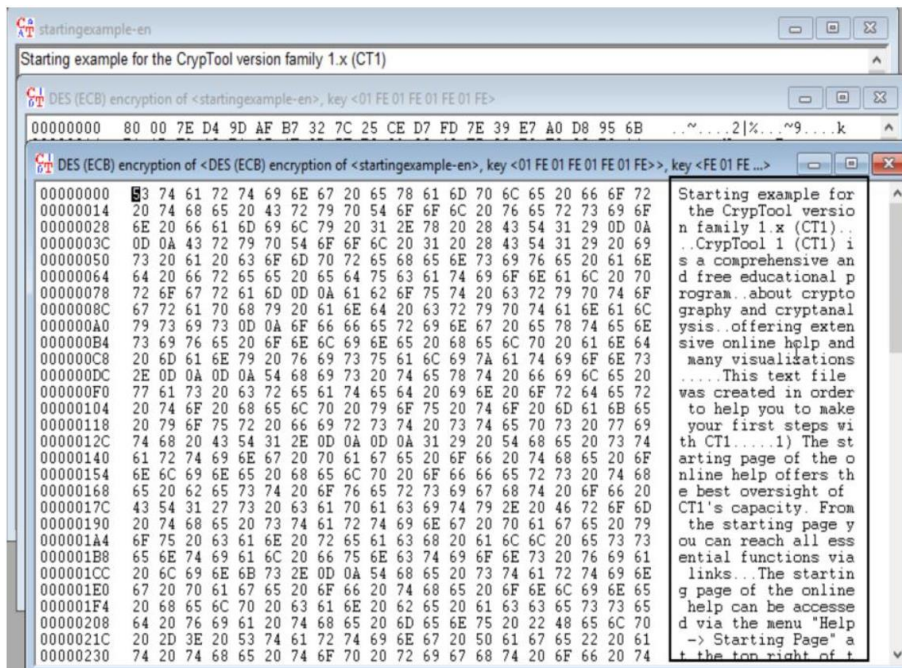
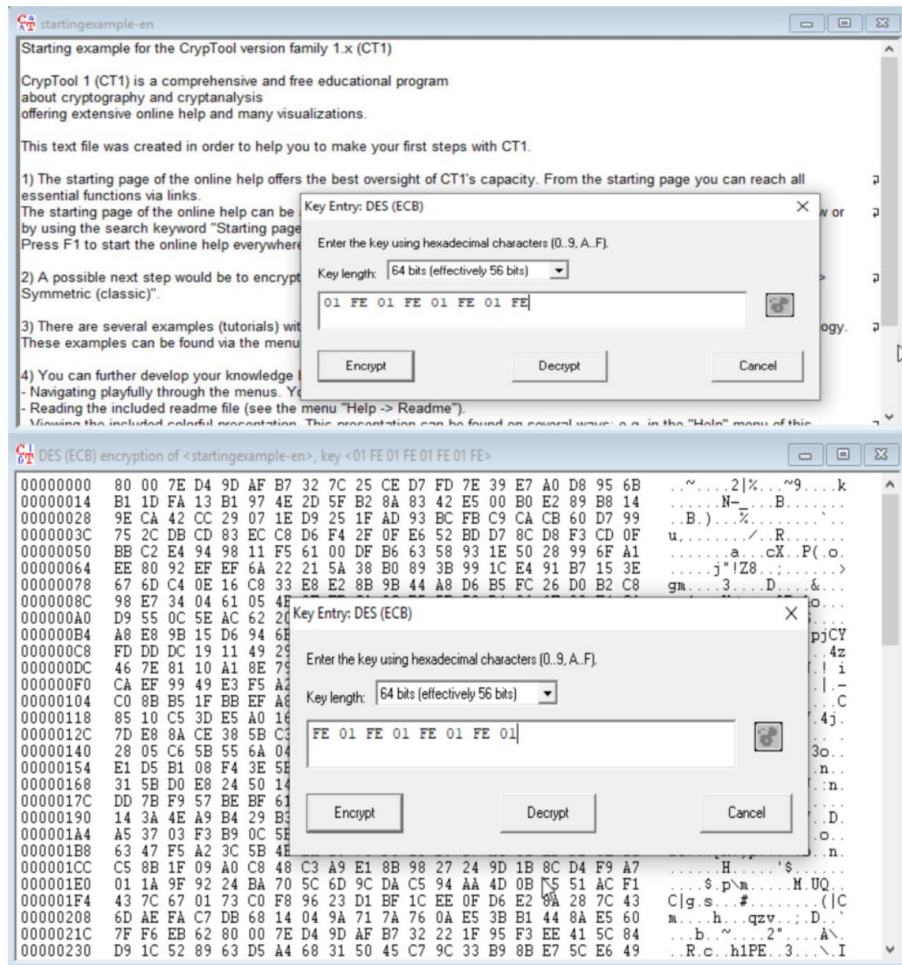
7.1



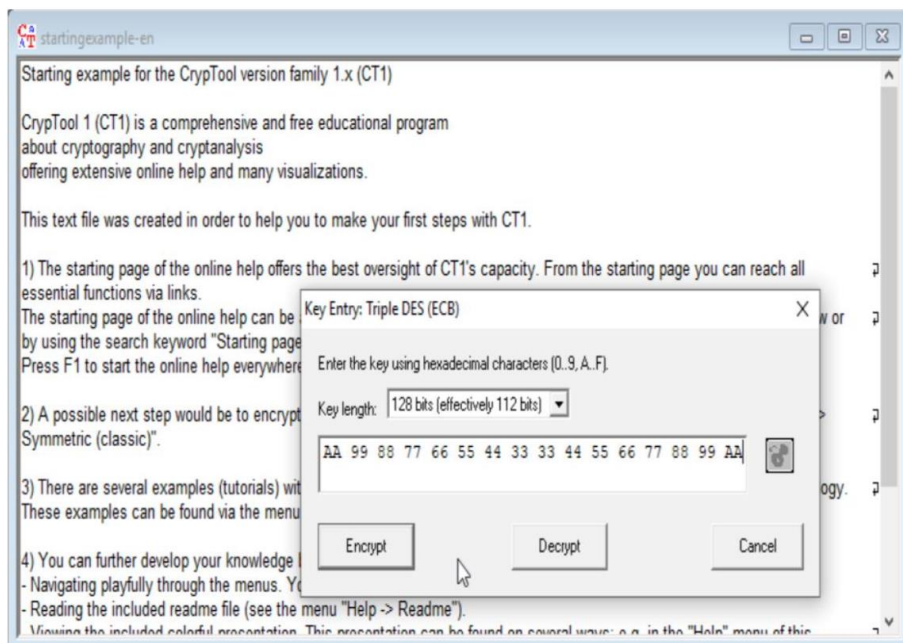
i.



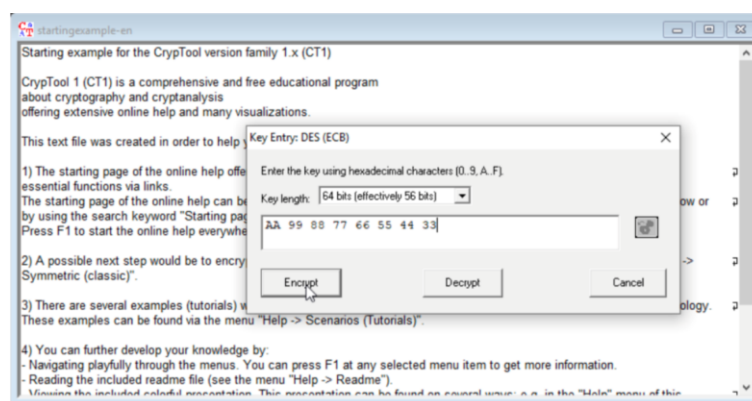
ii.



- i. Because its key space is larger.
- ii. key space = 2^{56} , that's because of meet in the middle attack.
- iii. Both versions are resistant to brute-force attacks as well as any analytical attack imaginable at the moment. However, the advantage of the second version over the first one is that 3DES performs single DES encryption if $k_3 = k_2 = k_1$, which is sometimes desired in implementations that should also support single DES for legacy reasons.
- iv.



v.



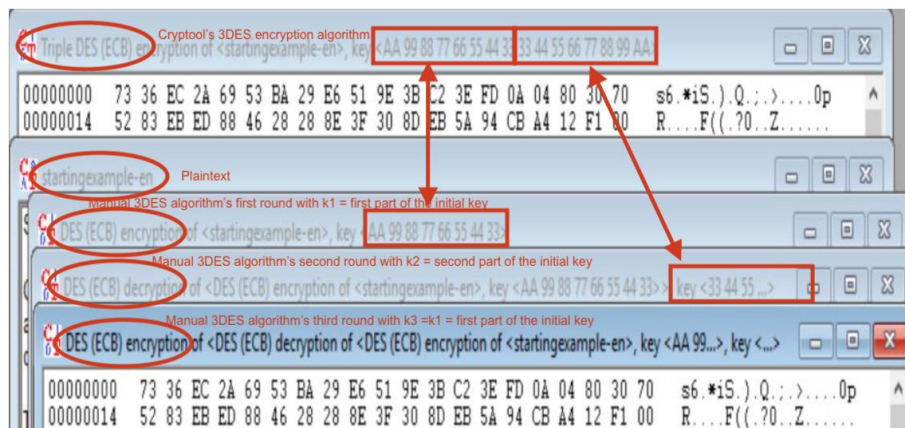
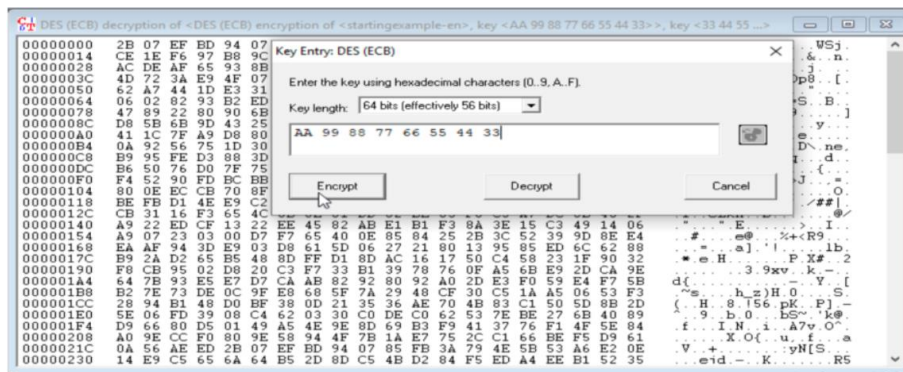
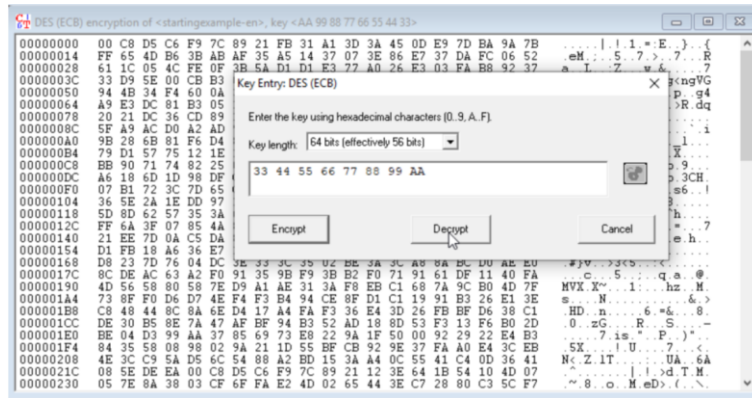
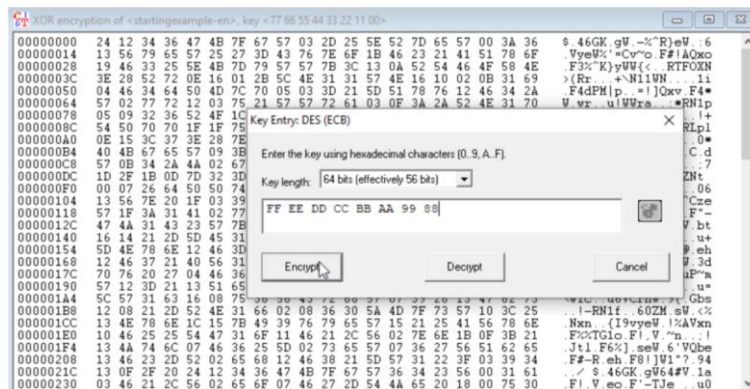
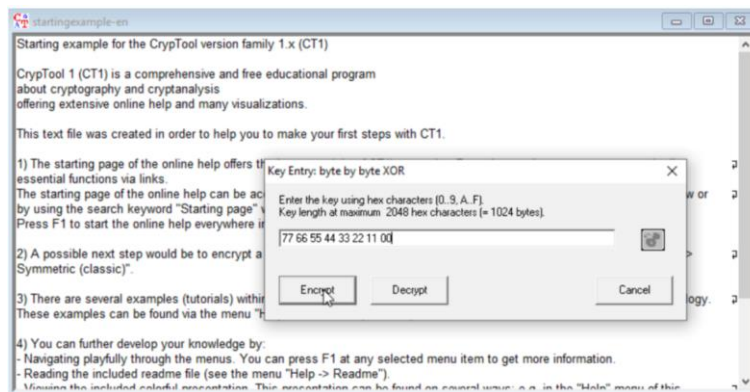
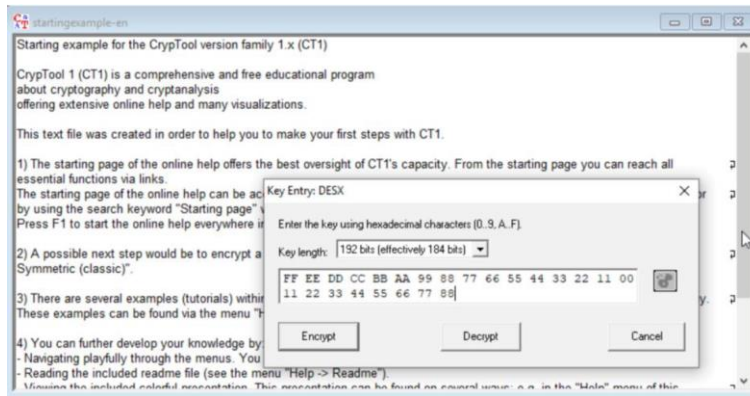


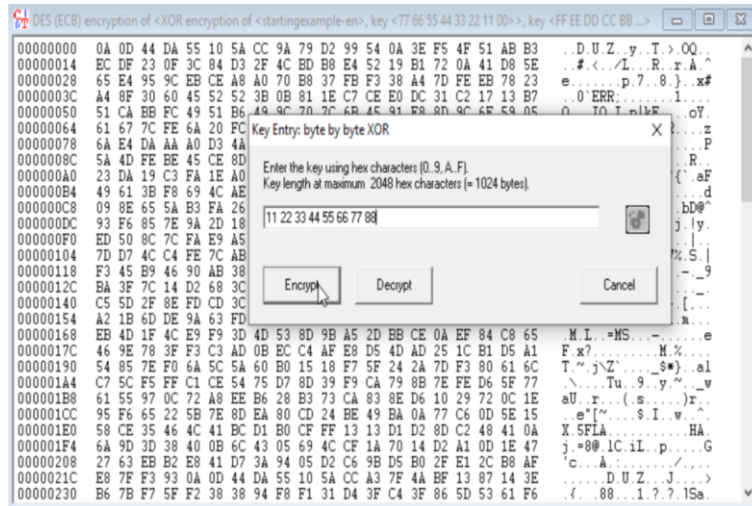
Figure: As observable in this figure, the output of Cryptool's 3DES algorithm is the same as our manually generated 3DES output.

7.3.

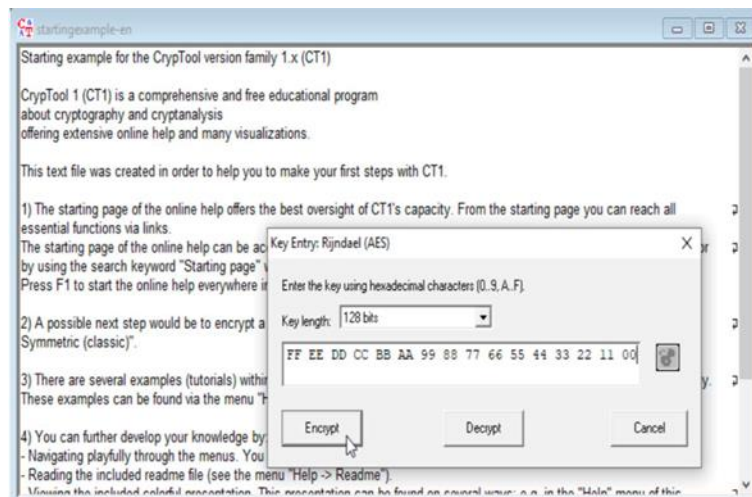
i.

ii.





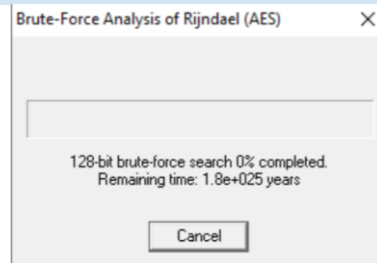
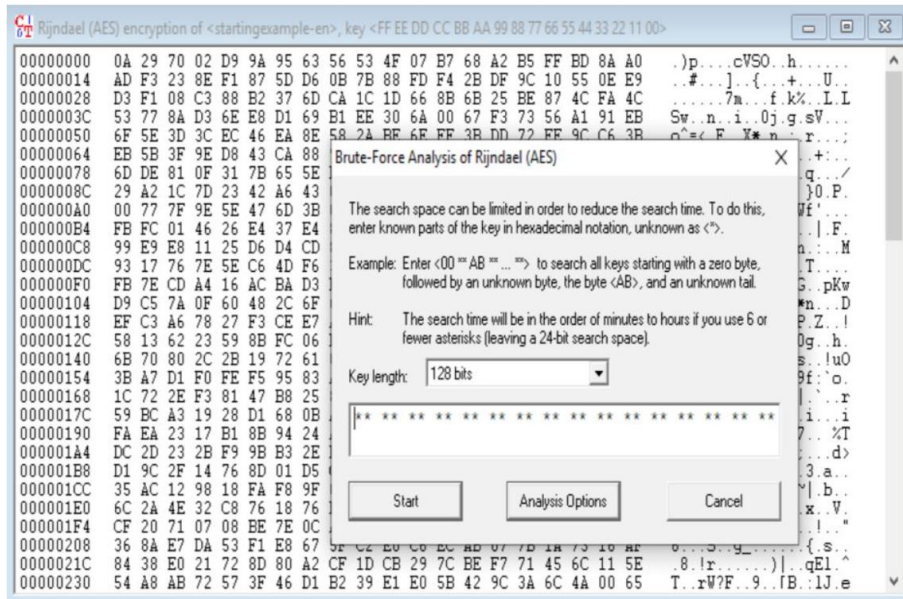
7.4.



7.5.

i.

processing time = $(1.8 \cdot 10^{25} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 10^6) / 2^{128} = 1.67$ micro seconds.



ii.

