

Understanding Cryptography

Answers of Homework No.1

فصل اول

1.7.

حل:

برای حل این مساله z_4 را در نظر گرفته و جدولی می سازیم که جمع همه المان ها را در حلقه نشان دهد.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

Z_4 ساخت جدول ضرب برای N

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Z_5 ساخت جدول جمع و ضرب برای .۲

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3
×	0	1	2	3	4

0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Z_6 ساخت جدول جمع و ضرب برای X_6

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

۴. در Z_6 و Z_6 المانهایی وجود دارند که معکوس ضربی ندارند این المان ها کدام هستند؟ و چرا یک معکوس ضربی برای همه ی المان های غیر صفر در Z_5 وجود دارد؟

حل:

تعریف معکوس ضربی:

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

 $a^{-1} \times a \equiv 1 \mod m : a \ has \ multiplicative \ inverse \ such \ a^{-1} \quad if \ \gcd(a,m) = 1$

یا به عبارتی دیگر در Z_m هر عدد a که a که وحلاتی دیگر در Z_m باشد معکوس ضربی ندارد.

 Z_4 : a = 0, 1, 2, 3

 $\{1, 2, 3\} \rightarrow \emptyset(n) = 2$

منظور از اعداد نشان داده شده با رنگ قرمز اعداد اول نسبت به ۴ است. برای عدد صفر هم که معکوس تعریف نمی شود.

$$a^{-1} = 1^{2-1} = 1 \mod 4 = 1$$
 $\rightarrow 1 * 1 = 1 \mod 4 = 1 \sqrt{1}$

$$a^{-1} = 2^{2-1} = 2 \mod 4 = 2 \rightarrow 2 * 2 \mod 4 = 0 \times a^{-1} = 3^{2-1} = 3 \mod 4 = 3 \rightarrow 3 * 3 \mod 4 = 1 \sqrt{2}$$

یس نتیجه می گیریم که در Z_4 المانهای ۲ معکوس ضربی ندارد و المانهای ۱ و ۳ معکوس ضربی دارند. Z_6 : a=0,1,2,3,4,5 $\{1,2,3,4,5\}$ $\rightarrow \emptyset(n)=2$

منظور از اعداد نشان داده شده با رنگ قرمز اعداد اول نسبت به ۶ است.

پس نتیجه می گیریم که در Z_6 المان های Z_6) معکوس ضربی ندارند و المان Z_6 0 معکوس ضربی دارند. برای عدد صفر هم که معکوس تعریف نمی شود.

 Z_5 : $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$ $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \emptyset(n) = 4$

منظور از اعداد نشان داده شده با رنگ قرمز اعداد اول نسبت به ۵ است. برای عدد صفر هم که معکوس تعریف نمی شود.

$$a^{-1} = 1^{-1} = 1^{4-1} = 1 \mod 5 = 1$$
 $\rightarrow 1 * 1 = 1 \mod 5 = 1 \sqrt{a^{-1}} = 2^{-1} = 2^{4-1} = 8 \mod 5 = 3$ $\rightarrow 3 * 2 \mod 5 = 1 \sqrt{a^{-1}} = 3^{-1} = 3^{4-1} = 27 \mod 5 = 2$ $\rightarrow 2 * 3 \mod 5 = 1 \sqrt{a^{-1}} = 4^{-1} = 4^{4-1} = 64 \mod 5 = 4$ $\rightarrow 4 * 4 \mod 5 = 1 \sqrt{a^{-1}} = 4^{4-1} = 64 \mod 5 = 4$

...

نتیجه می گیریم چون عدد ۵ نسبت به تمام اعضای غیرصفر موجود در حلقه اول است و همه ی المان های غیر صفر کوچکتر از ۵ نسبت به ۵ اول هستند پس معکوس ضربی وجود دارد.

1.8.

حل:

همانطور که می دانیم معکوس یک عدد integer در یک حلقه کاملا وابسته به آن حلقه است. اگر پیمانه تغییر کند معکوس هم تغییر میکند. یعنی معکوس یک المان به تنهایی معنایی ندارد و باید حتما پیمانه آن ذکر گردد.

$$5^{-1} \mod 11 \equiv ?$$

 $5^{-1} \mod 12 \equiv ?$
 $5^{-1} \mod 13 \equiv ?$

 $a^{-1} = a^{\emptyset(n)-1} \ mod \ n$ طبق این نکته که

```
Z_n^* = \{ a \in Z_n \parallel \gcd(a, n) = 1 \}
```

تابع فی اویلر برابر تعداد اعدادی از مجموعه ی $\{1,\dots,n\}$ است که نسبت به n اول هستند. $\emptyset(11) = 10 \qquad \{1,2,3,4,5,6,,7,8,9,10,11\}$ منظور از اعداد قرمز رنگ اعداد کوچکتر از ۱۱ است که نسبت به ۱۱ اول هستند. $\emptyset(12) = 4 \qquad \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ منظور از اعداد قرمز رنگ اعداد کوچکتر از ۱۲ است که نسبت به ۱۲ اول هستند. $\emptyset(13) = 12 \qquad \{1,2,3,4,5,6,,7,8,9,10,11,12,13\}$

منظور از اعداد قرمز رنگ اعداد کوچکتر از ۱۳ است که نسبت به ۱۳ اول هستند. 1. $5^{-1} = 5^{10-1} = 5^9 \mod 11 = 5^3 \times 5^3 \times 5^3 \mod 11$ $= 4 \times 4 \times 4 \mod 11 = 64 \mod 11 = 9 \mod 11$ 2. $5^{-1} = 5^{4-1} = 5^3 \mod 12 = 125 \mod 12$

3. $5^{-1} = 5^{12-1} = 5^{11} \mod 13 = 5^4 \times 5^4 \times 5^3 \mod 13$ = $1 \times 1 \times 8 \mod 13 = 8 \mod 13$

1.9.

حل:

هدف یافتن مقدار x است.

- 1. $3^2 \mod 13 = 9 \mod 13$
- 2. $7^2 \mod 13 = 49 \mod 13 = 10 \mod 13$
- 3. $3^{10} \mod 13 = (3^2)^5 \mod 13 = 9^5 \mod 13 = 9^2 \times 9^2 \times 9^1 \mod 13$ = $81 \times 81 \times 9 \mod 13 = 3 \times 3 \times 9 \mod 13 = 3^2 \times 9 \mod 13$ = $81 \mod 13 = 3 \mod 13$

or

- 3. $3^{10} \mod 13 = 3^9 \times 3 \mod 13 = (3^3)^3 \times 3 \mod 13 = 1^3 \times 3 \mod 13$ = $3 \mod 13$
- 4. $7^{100} \mod 13 = (7^2)^{50} \mod 100 = 49^{50} \mod 13 = 10^{50} \mod 13$ = $(10^2)^{25} \mod 13 = 100^{25} \mod 13 = 9^{25} \mod 13$ = $(9^2)^{12} \times 9 \mod 13 = 81^{12} \times 9 \mod 13 = 3^{12} \times 9 \mod 13$ = $(3^3)^4 \times 9 \mod 13 = 27^4 \times 9 \mod 13 = 1^4 \times 9 \mod 13$ = $9 \mod 13$

5. $7^x = 11 \mod 13 \rightarrow x = 5$

با روش سعى و خطا مقدار x=5 مى شود. اين يک مساله لگاريتم گسسته است .

1.10.

$$m=4$$
 { 1,2,3,4} $\emptyset(4)=2$ $\gcd(1,4)=1$ $\gcd(3,4)=1$... $\gcd(3,5)=1$... $\gcd(3,5)=1$... $\gcd(3,5)=1$... $\gcd(4,5)=1$... $\gcd(4,5)=1$... $\gcd(4,5)=1$... $\gcd(4,9)=1$... $\gcd(4,9)=1$... $\gcd(4,9)=1$... $\gcd(5,9)=1$... $\gcd(5,9)=1$... $\gcd(5,9)=1$... $\gcd(5,9)=1$... $\gcd(8,9)=1$... $\gcd(8,9)=1$... $\gcd(8,9)=1$... $\gcd(8,9)=1$... $\gcd(8,9)=1$... $\gcd(8,9)=1$

1.13.

حل:

$$\forall x,y,a,b \in Z_{26}$$
 داريم:
$$y = e_k(x) = ax + b \mod 26$$

$$x = d_k(y) = a^{-1} (y - b) \mod 26$$

$$k = (a,b)$$

$$= \begin{cases} y_1 - a x_1 = b \\ y_2 - a x_2 = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y_1 + a x_1 = -b \\ y_2 - a x_2 = b \end{cases}$$

$$a = (x_1 - x_2)^{-1} (y_1 - y_2) \mod m$$

$$b = (y_1 - (x_1 - x_2)^{-1} (y_1 - y_2)x_1) \mod m = y_1 - ax_1 \mod m$$

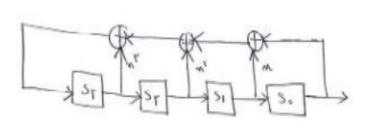
$$\gcd((x_1 - x_2), m) = 1 \mod p \mod m \text{ which } gcd((x_1 - x_2), m) = 1 \text{ whi$$

حل:

به طور كلى سه نوع LFSR موجود است . تفاوت آن ها بدين شرح است:

- ۱. LFSR هایی که یک دنباله واحد با طول حداکثر تولید می کنند این نوع LFSRها به LFSRمای مبتنی بر $primitive\ polynomials$
- ۲. LFSR اولیه مستقل از مقدار اولیه نمی کنند و طول دنباله مستقل از مقدار اولیه LFSR اولیه LFSR می باشد. این نوع LFSRها به LFSRهای مبتنی بر معروف هستند.
- ۳. LFSR هایی که یک دنباله با طول حداکثر تولید نمی کنند و طول آنها وابسته به مقدار اولیه رجیستر LFSR است این نوع LFSRها به LFSRهای مبتنی بر

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$



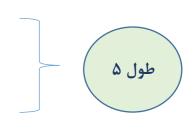
با فرض مقدار اولیه دلخواه : ۲۰۰۱

مقدار اولیه	<i>S3</i>	<i>S</i> 2	S1	SO	output	
1	0	0	0	1	1	
2	1	0	0	0	1	
3	1	1	0	0	0	_
4	0	1	1	0	0	
5	0	0	1	1	0	
6	0	0	0	1	1	



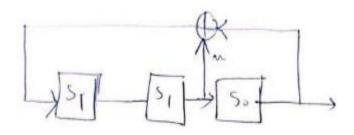
با فرض مقدار اولیه دلخواه :۱۱۱۱

مقدار اوليه	<i>S3</i>	<i>S</i> 2	S1	SO	output
1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1
3	1	0	1	1	1
4	1	1	0	1	1
5	1	1	1	0	1
6	1	1	1	1	0



دیده می شود که ما در هر مورد یک دنباله مجزا با طول یکسان (۵) داریم. طول دنباله مستقل از مقدار اولیه رجیستر (ثبات) میباشد پس این چندجمله ای یک چندجمله ای از نوع irreducible است.

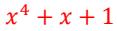
$$x^3 + x + 1$$

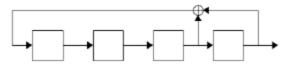


مقدار اوليه	S2	S1	SO.	output
1	0	0	1	1
2	1	0	0	O
3	0	1	0	1
4	1	0	1	1
5	1	1	0	1
6	1	1	1	O
7	0	1	1	0
8	0	0	1	1



این نوع چندجمله ای از نوع $\frac{2^3-1}{primitive}$ است. در اینجا یک دنباله با حداکثر طول حداکثر $\frac{2^3-1}{primitive}$ داریم.





با فرض مقدار اوليه دلخواه :0001

مقدار اوليه	<i>S3</i>	<i>S</i> 2	<i>S1</i>	SO SO	output
1	0	0	0	1	1
2	1	0	0	0	O
3	0	1	0	0	O
4	0	0	1	0	O
5	1	0	0	1	1
6	1	1	0	0	0
7	0	1	1	0	0
8	1	0	1	1	1
9	0	1	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	1	0	1	1
12	1	1	1	0	0
13	1	1	1	1	1
14	0	1	1	1	1
15	0	0	1	1	1
	0	0	0	1	1

این نوع چندجمله ای از نوع primitive است. در اینجا یک دنباله با حداکثر طول حداکثر 2^4-2^4 داریم.

3.

حل:

- 1. The attacker needs 512 consecutive plaintext/ciphertext bit pairs x_i , y_i to launch a successful attack.
- 2. a. First, the attacker has to monitor the previously mentioned 512 bit pairs.
 - b. The attacker calculates $s_i = x_i + y_i \mod 2$, i = 0, 1, ..., 2m 1
 - c. In order to calculate the (secret) feedback coefficients p_i , Oscar generates 256 linearly dependent equations using the relationship between the unknown key bits p_i and the keystream output defined by the equation

$$s_{i+m} \equiv \sum_{j=0}^{m-1} p_j \cdot s_{i+j} \mod 2; s_i, p_j \in \{0, 1\}; i = 0, 1, 2, ..., 255$$

with m = 256.

- d. After generating this linear equation system, it can be solved e.g. using Gaussian Elimination, revealing the 256 feedback coefficients.
- 3. The key of this system is represented by the 256 feedback coefficients. Since the initial contents of the LFSR are unalteredly shifted out of the LFSR and XORed with the first 256 plaintext bits, it would be easy to calculate them.

4.

حل:

4.1.

The full plaintext is WPIWOMBAT.

برنامه در فایل پیوست آمده است.

$$WPI \to \begin{cases} W \to 22 \to 10110_{2} \\ P \to 15 \to 01111_{2} \\ I \to 8 \to 01000_{2} \end{cases} \to plaintext: 10110 \ 01111 \ 01000$$

$$J5A \to \begin{cases} J \to 9 \to 01001_{2} \\ 5 \to 31 \to 11111_{2} \\ A \to 0 \to 00000_{2} \end{cases} \to ciphertext: 01001 \ 11111 \ 000000$$

4.2.

$$x_i \oplus y_i = z_i$$

 $xi = 10110\ 01111\ 01000$ $yi = 01001\ 11111\ 00000$ $zi = 11111\ 10000\ 01000$

keystream: $S_0S_1S_2S_3S_4$ $S_5S_6S_7S_8S_9$ $S_{10}S_{11}S_{12}S_{13}S_{14}$ keystream: 11111 10000 01000 initialization vector m ... m .

4.3.

$$S_{i+m} = \sum_{j=0}^{m-1} C_j S_{i+1} \mod 2$$

$$m = 6$$

$$i = 0: \quad S_6 \equiv C_0 S_0 + C_1 S_1 + C_2 S_2 + C_3 S_3 + C_4 S_4 + C_5 S_5$$

$$i = 1: \quad S_7 \equiv C_0 S_1 + C_1 S_2 + C_2 S_3 + C_3 S_4 + C_4 S_5 + C_5 S_6$$

$$i = 2: \quad S_8 \equiv C_0 S_2 + C_1 S_3 + C_2 S_4 + C_3 S_5 + C_4 S_6 + C_5 S_7$$

$$i = 3: \quad S_9 \equiv C_0 S_3 + C_1 S_4 + C_2 S_5 + C_3 S_3 + C_4 S_4 + C_5 S_5$$

$$i = 4: \quad S_{10} \equiv C_0 S_4 + C_1 S_5 + C_2 S_6 + C_3 S_7 + C_4 S_8 + C_5 S_9$$

$$i = 5: \quad S_{11} \equiv C_0 S_5 + C_1 S_6 + C_2 S_7 + C_3 S_8 + C_4 S_9 + C_5 S_{10}$$

$$\forall : \quad (S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5) = 111111_2$$

$$\forall : \quad (S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}) = 0000001_2$$

4.4.

$Ciphertext \oplus Keystream = plaintext$

Keystream: 11111 10000 01000 01100 01010 01111 01000 11100 10010 Ciphertext: 01001 11111 00000 11010 00100 00011 01001 11100 00001 Plaintext: 10110 01111 01000 10110 01110 01100 00001 00000 10011

که متناظر است با:

WPIWOMBAT

The WOMBAT is an animal that lives in Tasmania and South-Eastern Australia.

4.5. Known-plaintext Attack.

5.

حل:

هدف اول ما به دست آوردن keystream است. می توان متن اصلی شناخته شده را به نمایش کد اسکی تبدیل نمود. به دلیل ویژگیهایی که عملگر XOR دارد، اگر $a \oplus b = c$ باشد در نتیجه $a \oplus c = b$ می تواند صحیح باشد. پس XOR بیتهای متن اصلی معلوم با بیت های متن رمزشده خروجی معلوم برای ما keystream را تولید می کند که می توان در رمزنگاری از آن استفاده نمود.

Plaintext ASCII	В	A	R	A	C	K	0	В	A	M	A
Plaintext bits	01000010	01000001	01010010	01000001	01000011	01001011	01001111	01000010	01000001	01001101	01000001
Ciphertext bits	01000011	00011011	00010010	00110000	11111000	10100111	10001110	11101001	00010100	00011101	01100100
Keystream + Nonce	00000001	01011010	01000000	01110001	10111011	11101100	11000001	10101011	01010101	01010000	00100101

به دلیل اینکه نانس ۱ به هر بایت برای این پیام خاص اضافه شده بود، ما می توانیم آن را از هر بایت از keystream کم کنیم تا کلید ثابت را بدست آوریم. البته ما نیاز نداریم که اینکار را انجام دهیم به دلیل اینکه ما می دانیم دومین پیام با استفاده از یک نانس ۲ رمز شده است. keystream مورد استفاده برای رمزنگاری دومین پیام می تواند صرفا با افزودن ۱ در پیمانه ۲۵۶ به اولین keystream به دست آید.

Fixed Key + 1	00000001	01011010	01000000	01110001	10111011	11101100	11000001	10101011	01010101	01010000	00100101
Fixed Key + 2	00000010	01011011	01000001	01110010	101111100	11101101	11000010	10101100	01010110	01010001	00100110

می توانیم دومین متن رمزشده را با استفاده از این keystream جدید رمزگشایی کنیم. می توانیم هر بیت از دومین متن رمزشده XOR کنیم تا هر بیت از متن اصلی به دست آید.

Keystream	00000010	01011011	01000001	01110010	101111100	11101101	11000010	10101100	01010110	01010001	00100110
Ciphertext bits	01000110	00010100	00001111	00110011	11110000	10101001	10010110	111111110	00000011	00011100	01110110
Plaintext bits	01000100	01001111	01001110	01000001	01001100	01000100	01010100	01010010	01010101	01001101	01010000

به محض اینکه ما بیت های متن اصلی را داشته باشیم، می توان به آسانی هر بایت رابه اسکی موردنظر تبدیل نمود تا متن اصلی به دست آید.

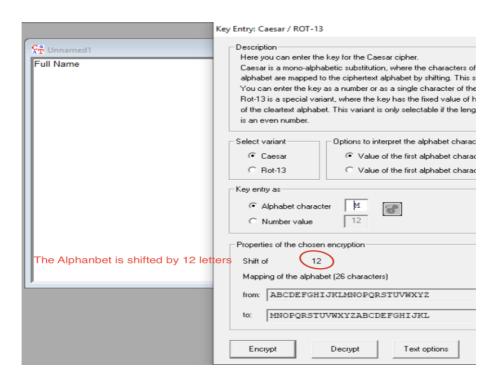
Plaintext bits	01000100	01001111	01001110	01000001	01001100	01000100	01010100	01010010	01010101	01001101	01010000
Plaintext ASCII	D	0	N	A	L	D	T	R	U	M	P

: Blake ییام

DONALDTRUMP

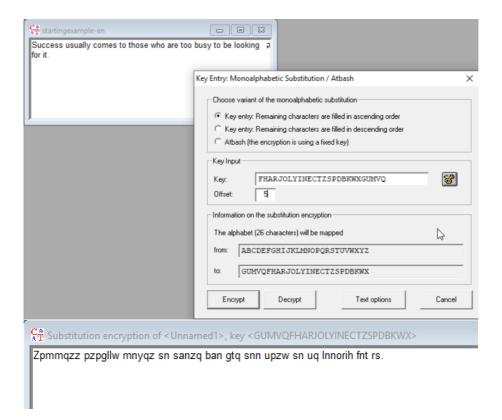
حل:

6.1.



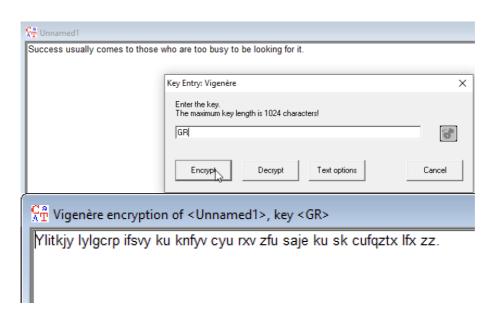
6.2.

My Student No is 9527393 which equals 26*366438+5. Meaning that I should use the number 5 as my offset to the substitution cipher.



6.3.

a.

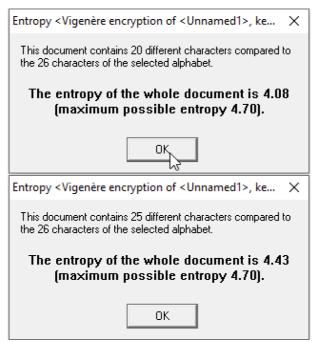


b.

Ybcbedj yruetrf cnmpj xn tlwyl wgo lii sos jazy so mv pnooqtn fnr tk.

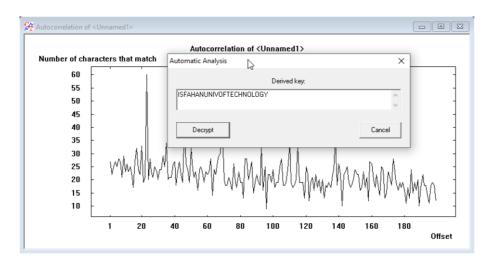
C.

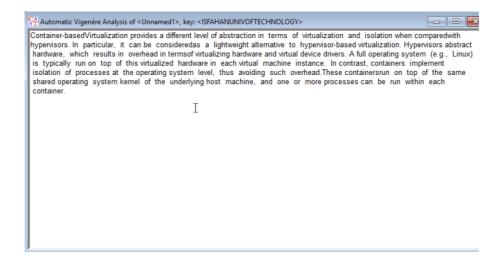
As observable in the following pictures the entropy of the document encrypted with the shorter key is 4.08, which is way smaller compared to the ciphertext with the longer key (4.43).



Entropy is a measure of the "randomness" of the data in a file, where typical text files will have a low value, and encrypted or compressed data will have a high measure. If data is encrypted, it will have a higher entropy value compared to one that isn't. Actually, in encrypted files, character distribution is random, or at least much more random than a "normal" data file. Therefore, the lower its entropy, the more probable a file is a normal or weakly encrypted one.

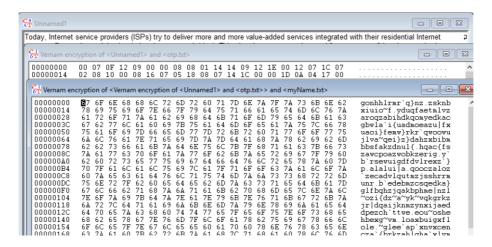
6.4. The autocorrelation tool analyzes different parts of a message and compares them to find similarities. It is possible to derive the length of the key using this tool, when the message is encrypted with the Vigenère cipher.





6.5. a & b.

Simply follow the instructions in the question.



C.

In One Time Pad, if key is shorter than message, it means that some part of text will be encrypted with same part of key, two or more time. In this case, by XORing two part encrypted with the same key, adversary can receive tiny pieces of information about plaintext. If key is significantly shorter than plaintext, adversary can apply frequency analysis to discover the whole message, or a part of it. As displayed in below figure, the frequency analysis tool has successfully discovered the key length of the shorter OTP key.

