باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی اصفهان

**تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها** **حل تمرین سری پنجم**

**ترم ۱-۹۹** (گروه‌های ۴-۱) **موعد تحویل: ۹۹/۹/۲۹، ساعت ۹:۳۰ صبح**

۱) مسئله 5.12 از ویرایش دوم کتاب اپنهایم را حل نمایید.

حل: اولا تعریف می کنیم:

$$x[n] = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right)^2 \qquad \text{و} \qquad h[n] = \frac{\sin\omega_c n}{\pi n}$$

طبق صورت مساله، می‌خواهیم $\omega_c$ را چنان تعیین کنیم که $x[n] * h[n] = x[n]$ . به وطور معادل باید $X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$ شود که نتیجه می دهد: $X(e^{j\omega})(H(e^{j\omega}) - 1) = 0$. یعنی در هر فرکانس $\omega$، یا باید $X(e^{j\omega}) = 0$ باشد یا $H(e^{j\omega}) = 1$ باشد. حال از مثال‌های درسی می‌دانیم که

$$H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\right\} = \begin{cases}1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi\end{cases} \quad \textit{and periodic with period } 2\pi.$$

پس کافی است که $\omega_c$ را چنان انتخاب کنیم که در یک دوره فرکانس $[-\pi, \pi]$ داشته باشیم

$$X(e^{j\omega}) = 0 \qquad for \quad \omega_c < |\omega| < \pi \qquad\qquad (1)$$

از طرف دیگر،

$$x[n] = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right)^2 \Longrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right\} \circledast \mathcal{F}\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right\}$$

و می‌دانیم که

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right\} = \begin{cases}1 & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\omega| < \pi\end{cases} \quad \textit{and periodic with period } 2\pi$$

پس در یک دوره تناوب، $X(e^{j\omega})$ یک پالس مثلثی بین $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ است (با ارتفاع $\frac{1}{4}$).

پس برای رسیدن به $(1)$، باید $\frac{\pi}{2} < \omega_c < \pi$ باشد. ■

۲) مسئله 5.19 از ویرایش دوم کتاب اپنهایم را حل نمایید.

حل: با توجه به این که در صورت مساله گفته شده که سیستم پایدار است، پس پاسخ ضربه مطلقا جمع پذیر است و در نتیجه، پاسخ فرکانسی وجود دارد. برای یافتنِ پاسخ فرکانسی به این صورت عمل می‌کنیم:

با توجه به خواص خطی بودن و شیفت زمانی، داریم:

$$y[n]-\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]\Longrightarrow$$
$$Y(e^{j\omega})-\frac{1}{6}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega}-\frac{1}{6}Y(e^{j\omega})e^{-j2\omega}=X(e^{j\omega})\Longrightarrow$$
$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{1}{1-\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}.$$

پس

$$\begin{aligned}H(e^{j\omega})&=\frac{1}{1-\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}\\&=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}\\&=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\frac{2}{5}}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}}\end{aligned}$$

و در نتیجه،

$$h[n]=\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$$

که علی است. ■

۳) مسئله 5.21 بندهای d و f و h از ویرایش دوم کتاب اپنهایم را حل نمایید.

حل:

بند d) می توان مستقیما از تعریف حل نمود اما طولانی می‌شود. در اینجا دو تعریف کوتاه اما اندکی فنی ارائه می شود.

ابتدا دو رابطه کاربردی زیر، برای هر سیگنال دلخواه $y[n]$، را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{y[n]\sin\omega_0 n\} &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{y[n]\} \circledast \mathcal{F}\{\sin\omega_0 n\}\\ &= \frac{1}{2\pi}Y(e^{j\omega}) \circledast \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 n} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 n}\right\}\\ &= \frac{1}{2\pi}Y(e^{j\omega}) \circledast \sum_{l=-\infty}^{l=\infty}\frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0-2\pi l) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\\ &= \frac{1}{2j}Y\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) - \frac{1}{2j}Y\left(e^{j(\omega+\omega_0)}\right). \qquad (2)\end{aligned}$$

و نیز،

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{y[n]\cos\omega_0 n\} &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{y[n]\} \circledast \mathcal{F}\{\cos\omega_0 n\}\\ &= \frac{1}{2\pi}Y(e^{j\omega}) \circledast \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}\right\}\\ &= \frac{1}{2\pi}Y(e^{j\omega}) \circledast \sum_{l=-\infty}^{l=\infty}\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l) + \pi\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\\ &= \frac{1}{2}Y\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) + \frac{1}{2}Y\left(e^{j(\omega+\omega_0)}\right).\end{aligned}$$

حال برای حل این سوال، ابتدا تبدیل فوریه $y[n] = 2^n u[-n]$ را حساب می کنیم.

طبق تعریف، و با یک تغییر متغیر $m = -n$ در تساوی ماقبل آخر، داریم:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u[-n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{0} 2^n e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)^m = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

پس از $(2)$ داریم:

$$\begin{aligned}X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{y[n]\sin\frac{\pi}{4}n\right\} &= \frac{1}{2j}Y\left(e^{j\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}\right) - \frac{1}{2j}Y\left(e^{j\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)}\right)\\ &= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)}}\right]\end{aligned}$$

راه حل دوم:

تعریف کنید $y[n] = x[-n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\sin\frac{\pi}{4}n$ که خواهیم داشت $X(e^{j\omega}) = Y(e^{-j\omega})$. پس کافی است که $Y(e^{j\omega})$ را به دست آوریم. داریم:

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\left(\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}n}-e^{j\frac{\pi}{4}n}}{2j}\right)=\frac{1}{2j}\left[\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^n u[n]-\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^n u[n]\right]$$

و با استفاده از جدول 5.2 از کتاب،

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}}\right]$$

و در نتیجه، $X(e^{j\omega})=Y(e^{-j\omega})$ همان نتیجه‌ی راه حل اول را می‌دهد. ■

بند f) می‌توان مستقیما از تعریف تبدیل فوریه استفاده کرد.

$$x[n]=\begin{cases} n & -3\le n\le 3 \\ 0 & otherwise\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}X(e^{j\omega})&=\sum_{n=-3}^{3} ne^{-j\omega n}\\ &=3(e^{-j\omega 3}-e^{j\omega 3})+2(e^{-j\omega 2}-e^{j\omega 2})+(e^{-j\omega}-e^{j\omega})\\ &=3(-2j\sin 3\omega)+2(-2j\sin 2\omega)+(-2j\sin\omega)\\ &=-2j(3\sin 3\omega+2\sin 2\omega+\sin\omega)\end{aligned}$$

که همان طور که انتظار می رفت موهومی خالص و فرد است. ■

راه حل دوم: سیگنال $y[n]$ را مشابه مثال 5.3 کتاب، یک پالس مستطیلی بین $-3$ تا $+3$ تعریف کنید. در این صورت $x[n]=ny[n]$ است و طبق خاصیت مشتق در فرکانس (جدول 5.1 کتاب)، $X(e^{j\omega})=j\frac{dY(e^{j\omega})}{d\omega}$، از طرف دیگر طبق مثال 5.3 کتاب داریم $Y(e^{j\omega})=\frac{\sin(\omega(3+1/2))}{\sin(\omega/2)}$ و در نتیجه،

$$\begin{aligned}X(e^{j\omega})&=j\frac{dY(e^{j\omega})}{d\omega}=j\frac{d}{d\omega}\frac{\sin(\omega(3+1/2))}{\sin(\omega/2)}\\ &=j\frac{\frac{7}{2}\cos\frac{7}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\omega\sin\frac{7}{2}\omega}{\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

که پس از عملیات نسبتا مفصل (☹) روی تبدیلات سینوس و کسینوس، به همان جواب بالا منجر می شود. ■

بند h) سیگنال $x[n]=\sin\left(\frac{5\pi}{3}n\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{3}n\right)$ داد شده است. در چنین مثال‌هایی بهتر است ابتدا فرکانس‌ها را در یک دوره تناوب $[0,2\pi]$ یا $[-\pi,\pi]$ بیاوریم و سپس جملاتِ هم‌فرکانس را ترکیب کنیم، تا نتایج نهایی قابل درک‌تر باشند. اینجا داریم:

$$x[n] = \sin\left(2\pi n - \frac{\pi}{3}n\right) + \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{3}n\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\left(n + \frac{3}{4}\right)\right)$$

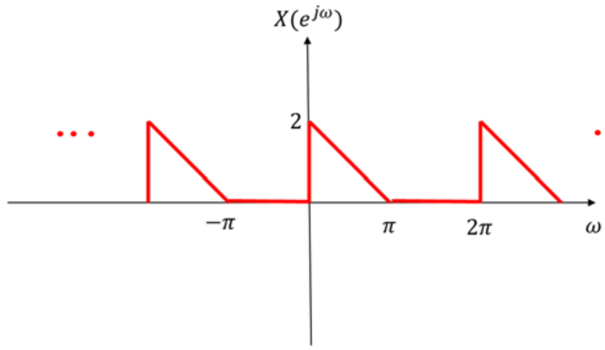
و با توجه به خواص تبدیل فوریه (خطی بودن و شیفت زمان) و تبدیل فوریه‌ی کسینوس (جدول 5.2)، داریم

$$X(e^{j\omega}) = \sqrt{2}e^{j\omega\frac{3}{4}} \times \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{3} - 2\pi l\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{3} - 2\pi l\right). \qquad \blacksquare$$

۴) تبدیل فوریه زمان گسسته سیگنال $x[n]$ در شکل مقابل داده شده است. اگر

$$f(v) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Re\{x[n]\}e^{j2nv}$$

تعریف شود، مقدار $f(v)$ در $v = \frac{\pi}{2}$ را محاسبه کنید.




حل: می‌دانیم که $Re\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[n])$، پس

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Re\{x[n]\}e^{j2n\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\pi n} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]e^{j\pi n}$$

که در عبارت اخیر، سیگمای اول، تبدیل فوریه‌ی $x[n]$ در فرکانس $\omega = -\pi$ است و سیگمای دوم، تبدیل فوریه‌ی $x^*[n]$ در فرکانس $\omega = -\pi$ است. و بالاخره با توجه به این که $\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X^*(e^{-j\omega})$ است، می‌توان نوشت:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}X(e^{-j\pi}) + \frac{1}{2}X^*(e^{j\pi}) = 0. \qquad \blacksquare$$

۵) سیگنال $x[n]$ دارای تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ است. مطلوب است محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی $y[n] = x\left[\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right]$ که در آن، $\lfloor m \rfloor$ به معنای بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $m$ است.

(راهنمایی: می توان $y[n]$ را برحسب $x_{(3)}[n]$ و شیفت یافته‌های آن نوشت.)

حل: با استفاده از راهنمایی، مساله به سادگی حل می‌شود: می‌توان مشاهده کرد که

$$y[n] = z[n] + z[n-1] + z[n-2]$$

که در آن،

$$z[n] = x_{(3)}[n].$$

از طرف دیگر از جدول خواص سری فوریه می‌دانیم که $\mathcal{F}\{z[n]\} = \mathcal{F}\{x_{(3)}[n]\} = X(e^{j3\omega})$. بنابراین

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= Z(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}Z(e^{j\omega}) + e^{-j2\omega}Z(e^{j\omega}) = (1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega})X(e^{j3\omega}) \\ &= e^{-j\omega}(1 + 2\cos\omega)X(e^{j3\omega}). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

**پایان تمرین تحویلی سری پنجم**

## تمرین با نمره اضافه:

- **مقدمه: زیرفصل ۵-۷ از فصل پنجم کتاب، به مفهومِ همزادی یا دوگانی (Duality) پرداخته است. این مبحث به شما تدریس نشده است، اما در این تمرین سعی می‌شود با این مفهوم به طور خلاصه آشنا شوید. خاصیتِ دوگانی به شباهت‌های موجود در روابط سری فوریه و تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته-زمان و پیوسته-زمان اشاره می‌کند. با استفاده از این شباهت‌ها، می‌توان راه‌های میان‌بری برای محاسبه تبدیل فوریه یا عکس تبدیل فوریه برخی سیگنال‌ها به دست آورد. به طور مشخص، در دوگانی بر روی سه دسته شباهت بحث می‌شود: الف) شباهت روابط (3.94) با (3.95) در سری فوریه گسسته-زمان، ب) شباهت روابط (4.8) با (4.9) در تبدیل فوریه پیوسته-زمان، و بالاخره، ج) شباهت جفت روابط (5.8) و (5.9) در تبدیل فوریه گسسته-زمان با جفت روابط (3.38) و (3.39) در سری فوریه پیوسته زمان (که این مورد، نسبتا پیچیده‌تر است). در ادامه هر یک از این موارد بیان می شود.**

الف) **دوگانی اول:** در سری فوریه گسسته-زمان داشتیم

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \qquad and \qquad a_k = \sum_{n=\langle N\rangle} \frac{1}{N} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \qquad (1)$$

اولا، دقت کنید که $a_k$ در واقع یک سیگنال گسسته-زمان بر حسب زمان $k$ است و می توان آن را به صورت $a_k = f[k]$ نوشت که در آن، $f[k] \triangleq \sum_{n=\langle N\rangle} \frac{1}{N} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$.

ثانیا برای بهتر دیدنِ شباهت، اجازه دهید به جای $x[.]$ از نماد $g[.]$، و به جای $k$ از $m$، و به جای $n$ از $r$ استفاده کنیم. در این صورت، $(1)$ به صورت

$$g[r] = \sum_{m=\langle N\rangle} f[m] e^{j\omega_0 mr} \qquad and \qquad f[m] = \sum_{r=\langle N\rangle} \frac{1}{N} g[r] e^{-j\omega_0 mr} \qquad (2)$$

در می‌آید. حال در رابطه سمت راست، $r$ را با $-k$، و $m$ را با $n$ جایگزین می کنیم و داریم

$$f[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} g[-k] e^{jk\omega_0 n} \qquad (3)$$

رابطه‌ی $(3)$، رابطه‌ی سنتزِ سیگنال $f[n]$ بر اساسِ ضرایب سری فوریه $\frac{1}{N} g[-k]$ است. پس نشان دادیم که: اگر $f[k]$ها ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال $g[n]$ باشند آنگاه $\frac{1}{N} g[-k]$ها ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال $f[n]$ هستند.

اگر نمادهای $f[.]$ و $g[.]$ را با $a.$ و $x[.]$ جایگزین کنیم، داریم:

| |
|---|
| خاصیت دوگانی اول: اگر $a_k$ها ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال $x[n]$ باشند آنگاه $\frac{1}{N} x[-k]$ها، ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال $a_n$ هستند. |

حال با کمک گزاره فوق، دو مساله زیر را حل نمایید:

❖ مساله الف–۱) با توجه به مثال 3-12 کتاب، یعنی

$$x[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & N_1<|n|\le \dfrac{N}{2}\end{cases},\quad x[n+N]\equiv x[n]\qquad\Longrightarrow$$

$$a_k=\begin{cases}\dfrac{2N_1+1}{N} & k=0,\pm N,\pm 2N,\dots\\ \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin\left[\pi k\dfrac{2N_1+1}{N}\right]}{\sin\left[\pi k\dfrac{1}{N}\right]} & k\neq 0,\pm N,\pm 2N,\dots\end{cases}$$

و خاصیت دوگانی اول، مطلوب است محاسبه ضرایب سری فوریه یرای سیگنال زیر با دوره تناوب $N=9$:

$$y[n]=\begin{cases}\dfrac{5}{9} & k=0,\pm 9,\pm 18,27,\dots\\ \dfrac{1}{9}\dfrac{\sin\left[\pi n\dfrac{5}{9}\right]}{\sin\left[\pi n\dfrac{1}{9}\right]} & k\neq 0,\pm 9,\pm 18,27,\dots\end{cases}.$$

**حل:** در این سوال داریم $y[n]=a_n$ به ازاء $N=9$ و $N_1=2$. لذا با توجه به خاصیت دوگانی اول، ضرایب سری $k$ام سری فوریه برابر است با

$$\frac{1}{9}x[-k]=\begin{cases}\dfrac{1}{9} & |n|\le 2\\ 0 & 2<|n|\le 4\end{cases}\quad,\ \text{و متناوب با دوره } 9$$

❖ مساله الف–۲) با توجه به خاصیت دوگانی اول و خاصیت شیفت زمانی در ضرایب سری فوریه، یعنی $x[n-n_0]\xrightarrow{\mathcal{FS}}a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$، رابطه‌ی شیفت فرکانسی، یعنی، $x[n]e^{jm\omega_0 n}\xrightarrow{\mathcal{FS}}a_{k-m}$، را ثابت کنید. ■

**حل:** طبق خاصیت شیفت زمانی، اگر $x[n]\xrightarrow{\mathcal{FS}}a_k$ آنگاه برای هر تاخیر $n_0$، داریم $x[n-n_0]\xrightarrow{\mathcal{FS}}a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$.
حال خاصیت دوگانی اول جفت رابطه ی بالا نتیجه می‌دهد که

$$a_n\xrightarrow{\mathcal{FS}}\frac{1}{N}x[-k]\qquad\Longrightarrow\qquad a_n e^{-jn\omega_0 n_0}\xrightarrow{\mathcal{FS}}\frac{1}{N}x[-k-n_0]$$

حال با تغییر متغیرهای $a_n$ با $x[n]$، و $\frac{1}{N}x[-k]$ با $a_k$، و $n_0$ با $-m$ به عبارت

$$x[n]\xrightarrow{\mathcal{FS}}a_k\qquad\Longrightarrow\qquad x[n]e^{jn\omega_0 m}\xrightarrow{\mathcal{FS}}a_{k-m}$$

می‌رسیم و اثبات کامل می‌شود. ■

ب) **دوگانی دوم:** در تبدیل فوریه پیوسته زمان داشتیم:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad and \qquad X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (4)$$

با روش مشابه **دوگانی اول**، با تغییر نام سیگنال‌ها و متغیرها نتیجه می گیریم:

| |
|---|
| خاصیت دوگانی دوم: اگر سیگنال $x(t)=g(t)$ دارای تبدیل فوریه $X(j\omega)=f(\omega)$ باشد آنگاه سیگنال $f(t)=X(jt)$ دارای تبدیل فوریه $2\pi g(-\omega)=2\pi x(-\omega)$ است. |

حال با توجه به این نکته، مساله زیر را حل کنید:

❖ مساله ب-۱) با توجه به مثال 4.4 کتاب، یعنی

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|\le T_1\\ 0 & T_1<|t|\end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad X(j\omega)=2\frac{\sin[\omega T_1]}{\omega}$$

و خاصیت دوگانی دوم، مطلوب است محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی سیگنال $y(t)=\frac{\sin[Wt]}{\pi t}$. ■

**حل:** در این سوال داریم $g(t)=\begin{cases}1 & |t|\le T_1\\ 0 & T_1<|t|\end{cases}$ و $f(\omega)=2\frac{\sin[\omega T_1]}{\omega}$. لذا با توجه به خاصیت دوگانی دوم،

$$f(t)=X(jt)=2\frac{\sin[tT_1]}{t} \overset{\mathcal{FS}}{\rightarrow} 2\pi g(-\omega)=2\pi x(-\omega)=\begin{cases}2\pi & |\omega|\le T_1\\ 0 & T_1<|\omega|\end{cases}$$

با تغییر متغیر $T_1$ با $W$ و تقسیم طرفین بر $2\pi$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin[tW]}{\pi t} \overset{\mathcal{FS}}{\rightarrow} \begin{cases}1 & |\omega|\le W\\ 0 & W<|\omega|\end{cases}$$

و نتیجه به دست می‌آید. ■

ج) **دوگانی سوم:** در تبدیل فوریه گسسته-زمان و سری فوریه پیوسته-زمان داشتیم:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}d\omega \qquad and \qquad X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n} \qquad (5)$$

و

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{T}x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad and \qquad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (6)$$

که نشان دهنده شباهت این دو زوجِ سنتز-آنالیز است. برای شباهت بیشتر و سادگی، حالت $T=2\pi$ و $\omega_0=1$ را در نظر بگیرید (در غیر این حالت، با کمک بحثِ تغییر مقیاس زمان در زیرفصل 3.5.4 به راحتی می‌توانید نتایج بعدی را تعمیم دهید).

برای شروع، روابط $(5)$ را در نظر بگیرید. برای بهتر دیدنِ شباهت، نمادهای جدید $f[n] \triangleq x[n]$ ،$g(\omega) \triangleq X(e^{j\omega})$ را تعریف می‌کنیم. روابط $(5)$ به صورت زیر در می‌آیند:

$$f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} g(\omega)\, e^{j\omega n} d\omega \qquad and \qquad g(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\omega n}$$

حال، $n$ را با $-k$ ، و $\omega$ را با $t$ جایگزین کنید. داریم:

$$f[-k] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} g(t)\, e^{-jkt} dt \qquad and \qquad g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[-k] e^{jkt}$$

با مقایسه این عبارت با روابط $(6)$ نتیجه می گیریم که $f[-k]$ ضریب $k$ام سری فوریه‌ی سیگنال زمان پیوسته $g(t)$ است.

با توجه به تعریف نمادهای $f[.]$ و $g(.)$ می‌توان چنین گفت:

| |
|---|
| خاصیت دوگانی سوم: اگر سیگنال $f[n]$ دارای تبدیل فوریه $g(\omega)$ باشد آنگاه $f[-k]$ ضریب $k$ام سری فوریه‌ی سیگنال زمان پیوسته $g(t)$ است. |

حال به دو مساله زیر پاسخ دهید.

❖ مساله ج-۱) با قرار دادنِ $T = 2\pi$ و $T_1 = \frac{\pi}{2}$ در مثال 3.5 کتاب، داریم

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |t| < \pi \end{cases}, x(t+2\pi) \equiv x(t) \qquad \Longrightarrow \qquad a_k = \frac{\sin\left[k\frac{\pi}{2}\right]}{k\pi}.$$

با توجه به رابطه‌ی فوق و خاصیت دوگانی، مطلوب است محاسبه‌ی تبدیل فوریه سیگنال $y[n] = \frac{\sin\left[n\frac{\pi}{2}\right]}{n\pi}$. ■

**حل:** برای درک بهتر، در خاصیت دوگانی در کادر بالا، نمادها نسبت به صورت تمرین تغییر کرده است. با این نمادهای جدید، در این جا $g(t) = x(t)$ و $f[-k] = a_k$ است. لذا برای سیگنال $f[n] = a_{-n} = y[n]$ ، تبدیل فوریه به صورت

$$g(\omega) = x(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |\omega| < \pi \end{cases}$$ و متناوب با دوره $2\pi$ ،

است. ■

❖ مساله ج-۲) فرض کنید $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان $x[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^{|n|}$ باشد. سیگنال پیوسته در زمان $y(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم. ضریب $a_2$ در بسط سری فوریه سیگنال $y(t)$ بر اساس دوره تناوب پایه آن را محاسبه کنید.

$$y(t) = X(e^{-jt}) + X\left(e^{j\frac{2t}{3}}\right) \quad \blacksquare$$

**حل:** با توجه به خطی بودنِ ضرایب سری فوریه، می‌توان برای هر یک از دو جمله‌ی $X\left(e^{j\frac{2t}{3}}\right)$ و $X(e^{-jt})$ ضرایب سری فوریه را جداگانه بررسی کرد و سپس برای $y(t)$ حاصل مجموع را به دست می‌آوریم. اولا $X(e^{jt})$ متناوب با دوره تناوب پایه $2\pi$ است. لذا $X\left(e^{j\frac{2t}{3}}\right)$ دارای دوره پایه $T_0^1 = 3\pi$ و هارمونیک پایه $\omega_0^1 = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$ است، و $X(e^{-jt})$ دارای دوره پایه $T_0^2 = 2\pi$ و هارمونیک پایه $\omega_0^2 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ است. در نتیجه $y(t)$ متناوب با دوره پایه $T_0 = 6\pi$ (کوچکترین مضرب مشترک $T_0^1$ و $T_0^2$) و هارمونیک پایه $\omega_0 = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$ است. پس ضریب $a_2$ در بسط سری فوریه سیگنال $y(t)$ مربوطه به فرکانس $2\omega_0 = \frac{2}{3}$ است. این فرکانس در هارمونیک‌های $X(e^{-jt})$ (که باید مضرب صحیح $\omega_0^2 = 1$ باشند) وجود ندارد. لذا می توان $X(e^{-jt})$ را بررسی نکرد. اما در مورد $X\left(e^{j\frac{2t}{3}}\right)$، داریم $2\omega_0 = \omega_0^1$؛ و این نکته بدین معنی است که ضریب $a_2$ در بسط سری فوریه سیگنال $y(t)$، همان ضریب اول در سری فوریه $X\left(e^{j\frac{2t}{3}}\right)$ (بر اساس هارمونیک پایه‌ی خود $X\left(e^{j\frac{2t}{3}}\right)$) است. لذا

$$a_2 = \frac{1}{3\pi}\int_0^{3\pi} X\left(e^{j\frac{2t}{3}}\right) e^{-j\omega_0^1 t} dt = \frac{1}{3\pi}\int_0^{3\pi} X\left(e^{j\frac{2t}{3}}\right) e^{-j\frac{2t}{3}t} dt$$

با تغییر متغیر $\omega$ به جای $\frac{2t}{3}$ داریم

$$a_2 = \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega} \frac{3}{2} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega} d\omega = x[-1] = \frac{1}{5}$$

موفق باشید

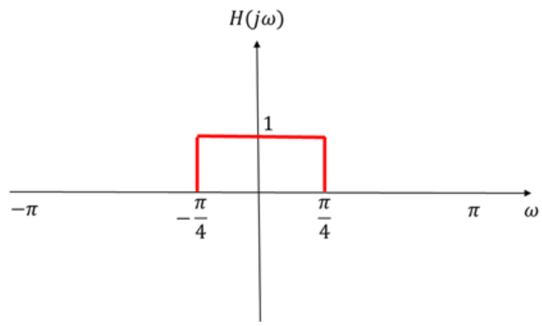
## سوالات توصیه شده و غیر تحویلی:

- مسائل زیر از فصل پنجم از ویرایش دوم کتاب اپنهایم را حل نمایید:

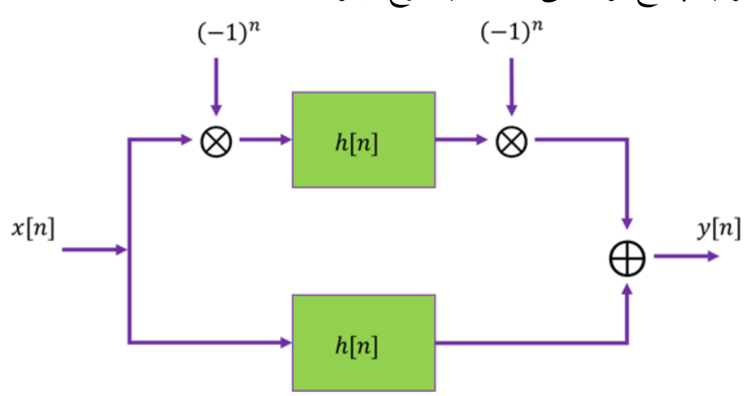
9-12-19-21(d,f,h)-23-24(a,b,g,h) -49

---

۶) فرض کنید $H(e^{j\omega})$ پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین گذر ایده آل با فرکانس قطع $\frac{\pi}{4}$ و بهره یک است، یعنی،



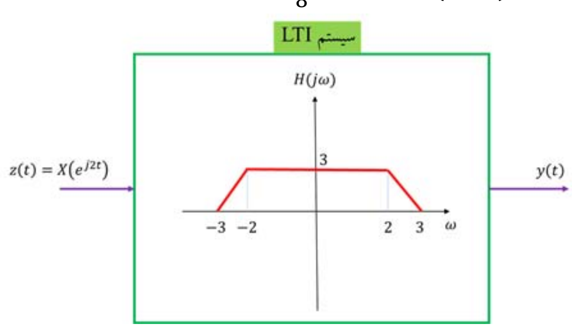

تعیین کنید سیستم زیر چه پاسخ فرکانسی دارد و چه نوع فیلتری است؟




حل این مساله در متن درس بیان شده است!

---

۷) فرض کنید $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان $x[n] = \begin{cases} n^2 & |n| \leq 2 \\ 0 & |n| > 2 \end{cases}$ باشد. خروجی سیستم نشان داده شده در شکل زیر را به ورودی $X(e^{j2t})$ در لحظه $t = \frac{\pi}{8}$ بدست آورید.



**حل:** سیگنال $x(t) = X\left(e^{j2t}\right)$ متناوب با دوره $T = \pi$ و $\omega_0 = 2\text{rad/sec}$ است. لذا از فیلتر فوق فقط هارمونیک‌های شماره صفر، یک و منفی یک (متناظر با فرکانس‌های صفر و $\pm 2\text{rad/sec}$) با ضریب ۳ می‌گذرند و سایر هارمونیک‌ها کاملا حذف می‌شوند. حال، ضرایب سری فوریه $x(t)$ از رابطه‌ی

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X\left(e^{j2t}\right)e^{-jk2t}dt$$

به دست می‌آیند. با تغییر متغیر $\omega = 2t$ در عبارت بالا، داریم

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{-jk\omega}\frac{1}{2}d\omega = x[k].$$

بنابراین در خروجی فیلتر داریم:

$$y(t) = 3 \times \left(x[0] + x[1]e^{j2t} + x[-1]e^{-j2t}\right) = 3\left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right) = 6\cos 2t\,. \quad \blacksquare$$

موفق باشید