



(۱) مشخص کنید کدامیک از سیگنال‌های زیر را می‌توان بصورت سری فوریه نمایش داد. برای سیگنال‌هایی که این کار امکانپذیر است، ضرایب سری فوریه را بدست آورید:

$$x(t) = 3 + 5 \cos(t) + 6 \sin(2t + \frac{\pi}{4}) \quad \text{الف-}$$

$$x(t) = 3 + \cos(t) + 5 \sin(4\pi t) \quad \text{ب-}$$

$$x(t) = |5 \cos(\pi t)| \quad \text{ج-}$$

(۲) گرچه سیگنال‌نمایی تنها تابعی است که تابع ویژه کلیه سیستم‌های LTI می‌باشد، اما برخی سیستم‌ها، دارای توابع ویژه خاص دیگری نیز هستند که در این مسئله با دو نمونه از آنها آشنا می‌شوید:

الف- یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = \delta(t - T)$ را در نظر گرفته، دو تابع ویژه برای این سیستم با مقادیر ویژه ۱ و $\frac{1}{2}$ بدست آورید (راهنمایی: از قطار ضربه استفاده کنید)

ب- ثابت کنید برای هر سیستم LTI پایدار با پاسخ ضربه حقیقی و زوج، توابع $\cos(\omega t)$ و $\sin(\omega t)$ توابع ویژه سیستم هستند.

(۳) می‌دانیم که اگر سیگنال $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T باشد، می‌توان آن را متناوب با هر مضربی از T نیز قلمداد نمود. اگر فرض کنیم ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب $x(t)$ با دوره تناوب T بصورت a_k باشد، ضرایب سری فوریه این سیگنال بر اساس دوره تناوب $2T$ که آنها را b_k می‌نامیم چه ارتباطی با a_k ها خواهد داشت؟

(۴) ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زمان پیوسته زیر را، حتی المقدور با استفاده از خواص سری فوریه، محاسبه کنید.

$$x(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & -1 \leq t < 0 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$T = 2$ با دوره تناوب

$$x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right); \quad -1 \leq t < 1 \quad \text{ب)}$$

$T = 2$ با دوره تناوب

(۵) در بند‌های (الف) و (ب) ضرایب سری فوریه سیگنال‌هایی زمان پیوسته داده شده است. با استفاده از خواص سری فوریه، در مورد حقیقی/مختلط و زوج/فرد بودن سیگنال توضیح داده و سپس فرم بسته ریاضی هر کدام از این سیگنال‌ها را مشخص نمایید.

$$T = 4 \text{ با دوره تناوب } a_k = \begin{cases} \frac{(j)^k \sin(\frac{k\pi}{4})}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$T = 4 \text{ با دوره تناوب } a_k = \begin{cases} 2 & k \text{ فرد} \\ 1 & k \text{ زوج} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

۶) ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زمان گسسته زیر را حتی المقدور با استفاده از خواص سری فوریه، محاسبه کنید.

$$x[n] = \begin{cases} -1 & -4 \leq n \leq 0 \\ 1 & 1 \leq n \leq 5 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

با دوره تناوب اصلی 10

$$x[n] = 1 - \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) \quad 0 \leq n \leq 3 \quad (\text{ب})$$

با دوره تناوب اصلی 4

۷) ضرایب سری فوریه یک سیگنال‌زمان گسسته متناوب با دوره تناوب ۸ بصورت زیر داده شده است. فرم بسته ریاضی این سیگنال را بدست آورید:

$$a_k = \begin{cases} \sin(\frac{k\pi}{3}) & 0 \leq k \leq 6 \\ 0 & k = 7 \end{cases}$$

۸) یک فیلتر پایین گذر ایده ال زمان پیوسته با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 3000\pi \\ 0 & 3000\pi < |\omega| \end{cases}$$

اگر ورودی این فیلتر، یک سیگنال پیوسته زمان متناوب با دوره تناوب اصلی 1 msec و ضرایب سری فوریه زیر باشد، مطلوب است محاسبه ضرایب سری فوریه خروجی فیلتر.

$$a_k = \begin{cases} 3 & k = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} & \text{otherwise} \end{cases}$$

فرم بسته خروجی سیستم را نیز مشخص نمایید.

۹) سیستم زمان گسسته LTI با معادله تفاضلی (دیفرنس) زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] - 3y[n-1] = x[n]$$

در صورتی که ورودی این سیستم سیگنالی با دوره تناوب ۶ به صورت زیر باشد، ضرایب سری فوریه خروجی سیستم را مشخص نمایید.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = \pm 1, 0 \\ 0 & n = \pm 2, 3 \end{cases}$$

۱۰) فیلتر زمان پیوسته با پاسخ فرکانسی زیر را در نظر بگیرید:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq W \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

قرض کنید $x(t)$ سیگنالی با نمایش سری فوریه زیر بعنوان ورودی سیستم فوق قرار گیرد:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{|k|} e^{jk(\frac{\pi}{4})t}$$

که در آن $0 < \alpha < 1$. مقدار W چقدر بزرگ باشد تا خروجی سیستم حداقل ۹۰٪ توان متوسط ورودی را داشته باشد؟

۱۱) سوال ۴۸ (قسمت های b,c,h) فصل سوم کتاب درسی

سوالات توصیه شده و غیر تحویلی:

فصل سوم کتاب درسی، سوال های ۶، ۱۳، ۱۴، ۱۸، ۲۲(a)، ۴۱ و ۶۳

فاضل-مدرس هاشمی- مؤیدیان- نریمانی
موفق باشید