بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی اصفهان

**تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها** **تمرین سری پنجم**

**ترم ۱-۹۹** (گروه‌های ۴-۱) **موعد تحویل: شنبه ۹۹/۹/۲۹ ساعت ۹:۳۰ صبح**

---

۱) مسئله 5.12 از ویرایش دوم کتاب اپنهایم را حل نمایید.

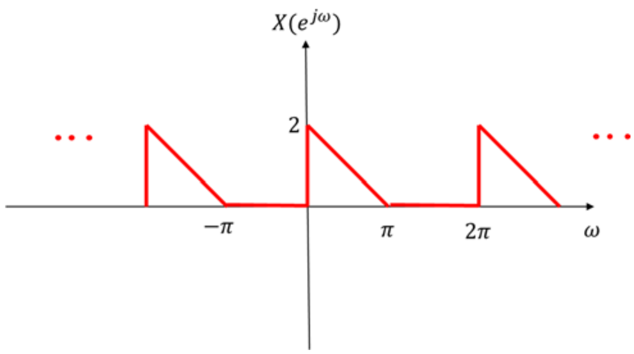
۲) مسئله 5.19 از ویرایش دوم کتاب اپنهایم را حل نمایید.

۳) مسئله 5.21 بندهای d و f و h از ویرایش دوم کتاب اپنهایم را حل نمایید.

۴) تبدیل فوریه زمان گسسته سیگنال $x[n]$ در شکل مقابل داده شده است. اگر

$$f(v) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Re\{x[n]\}e^{j2nv}$$

تعریف شود، مقدار $f(v)$ در $v = \frac{\pi}{2}$ را محاسبه کنید.




۵) سیگنال $x[n]$ دارای تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ است. مطلوب است محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی $y[n] = x\left[\left[\frac{n}{3}\right]\right]$ که در آن، $[m]$ به معنای بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $m$ است.

(راهنمایی: می توان $y[n]$ را برحسب $x_{(3)}[n]$ و شیفت یافته‌های آن نوشت.)

**پایان تمرین تحویلی سری پنجم**

## تمرین با نمره اضافه:

➢ **مقدمه: زیرفصل ۵-۷ از فصل پنجم کتاب، به مفهومِ دوگانی یا همزادی (Duality) پرداخته است. این مبحث به شما تدریس نشده است، اما در این تمرین سعی می‌شود با این مفهوم به طور خلاصه آشنا شوید. خاصیتِ دوگانی به شباهت‌های موجود در روابط سری فوریه و تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته-زمان و پیوسته-زمان اشاره می‌کند. با استفاده از این شباهت‌ها، می‌توان راه‌های میان‌بری برای محاسبه تبدیل فوریه یا عکس تبدیل فوریه برخی سیگنال‌ها به دست آورد. به طور مشخص، در دوگانی بر روی سه دسته شباهت بحث می‌شود: الف) شباهت روابط (3.94) با (3.95) در سری فوریه گسسته-زمان، ب) شباهت روابط (4.8) با (4.9) در تبدیل فوریه پیوسته-زمان، و بالاخره، ج) شباهت جفت روابط (5.8) و (5.9) در تبدیل فوریه گسسته-زمان با جفت روابط (3.38) و (3.39) در سری فوریه پیوسته زمان (که این مورد، نسبتا پیچیده‌تر است). در ادامه هر یک از این موارد بیان می شود.**

الف) **دوگانی اول:** در سری فوریه گسسته-زمان داشتیم

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \qquad and \qquad a_k = \sum_{n=\langle N\rangle} \frac{1}{N} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \qquad (1)$$

اولا، دقت کنید که $a_k$ در واقع یک سیگنال گسسته-زمان بر حسب زمان $k$ است و می توان آن را به صورت $a_k = f[k]$ نوشت که در آن، $f[k] \triangleq \sum_{n=\langle N\rangle} \frac{1}{N} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$.

ثانیا برای بهتر دیدنِ شباهت، اجازه دهید به جای $x[.]$ از نماد $g[.]$، و به جای $k$ از $m$، و به جای $n$ از $r$ استفاده کنیم. در این صورت، $(1)$ به صورت

$$g[r] = \sum_{m=\langle N\rangle} f[m] e^{j\omega_0 mr} \qquad and \qquad f[m] = \sum_{r=\langle N\rangle} \frac{1}{N} g[r] e^{-j\omega_0 mr} \qquad (2)$$

در می‌آید. حال در رابطه سمت راست، $r$ را با $-k$، و $m$ را با $n$ جایگزین می کنیم و داریم

$$f[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} g[-k] e^{jk\omega_0 n} \qquad (3)$$

رابطه‌ی $(3)$، رابطه‌ی سنتزِ سیگنال $f[n]$ بر اساسِ ضرایب سری فوریه $\frac{1}{N} g[-k]$ است. پس نشان دادیم که: اگر $f[k]$ها ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال $g[n]$ باشند آنگاه $\frac{1}{N} g[-k]$ها ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال $f[n]$ هستند.

اگر نمادهای $f[.]$ و $g[.]$ را با $a_.$ و $x[.]$ جایگزین کنیم، داریم:

| |
|---|
| خاصیت دوگانی اول: اگر $a_k$ها ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال $x[n]$ باشند آنگاه $\frac{1}{N} x[-k]$ها، ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال $a_n$ هستند. |

حال با کمک گزاره فوق، دو مساله زیر را حل نمایید:

❖ مساله الف–۱) با توجه به مثال 12-3 کتاب، یعنی

$$x[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & N_1<|n|\le \dfrac{N}{2}\end{cases},\quad x[n+N]\equiv x[n] \qquad \Longrightarrow$$

$$a_k=\begin{cases}\dfrac{2N_1+1}{N} & k=0,\pm N,\pm 2N,\dots\\ \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin\left[\pi k\dfrac{2N_1+1}{N}\right]}{\sin\left[\pi k\dfrac{1}{N}\right]} & k\ne 0,\pm N,\pm 2N,\dots\end{cases}$$

و خاصیت دوگانی اول، مطلوب است محاسبه ضرایب سری فوریه یرای سیگنال زیر با دوره تناوب $N=9$:

$$y[n]=\begin{cases}\dfrac{5}{9} & k=0,\pm 9,\pm 18,27,\dots\\ \dfrac{1}{9}\dfrac{\sin\left[\pi n\dfrac{5}{9}\right]}{\sin\left[\pi n\dfrac{1}{9}\right]} & k\ne 0,\pm 9,\pm 18,27,\dots\end{cases}.$$

❖ مساله الف–۲) با توجه به خاصیت دوگانی اول و خاصیت شیفت زمانی در ضرایب سری فوریه، یعنی $x[n-n_0]\xrightarrow{\mathcal{FS}} a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$، رابطه‌ی شیفت فرکانسی، یعنی، $x[n]e^{jm\omega_0 n}\xrightarrow{\mathcal{FS}} a_{k-m}$، را ثابت کنید. ■

ب) **دوگانی دوم:** در تبدیل فوریه پیوسته زمان داشتیم:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad and \qquad X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (4)$$

با روش مشابه **دوگانی اول**، با تغییر نام سیگنال‌ها و متغیرها نتیجه می‌گیریم:

| |
|---|
| خاصیت دوگانی دوم: اگر سیگنال $x(t)=g(t)$ دارای تبدیل فوریه $X(j\omega)=f(\omega)$ باشد آنگاه سیگنال $f(t)=X(jt)$ دارای تبدیل فوریه $2\pi g(-\omega)=2\pi x(-\omega)$ است. |

حال با توجه به این نکته، مساله زیر را حل کنید:

❖ مساله ب–۱) با توجه به مثال 4.4 کتاب، یعنی

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|\le T_1\\ 0 & T_1<|t|\end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad X(j\omega)=2\frac{\sin[\omega T_1]}{\omega}$$

و خاصیت دوگانی دوم، مطلوب است محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی سیگنال $y(t)=\dfrac{\sin[Wt]}{\pi t}$. ■

ج) **دوگانی سوم:** در تبدیل فوریه گسسته-زمان و سری فوریه پیوسته-زمان داشتیم:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} d\omega \qquad and \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \qquad (5)$$

و

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{T} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt \qquad and \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (6)$$

که نشان دهنده شباهت این دو زوجِ سنتز-آنالیز است. برای شباهت بیشتر و سادگی، حالت $T = 2\pi$ و $\omega_0 = 1$ را در نظر بگیرید (در غیر این حالت، با کمک بحثِ تغییر مقیاس زمان در زیرفصل 3.5.4 به راحتی می‌توانید نتایج بعدی را تعمیم دهید).

برای شروع، روابط $(5)$ را در نظر بگیرید. برای بهتر دیدنِ شباهت، نمادهای جدید $f[n] \triangleq x[n]$، $g(\omega) \triangleq X(e^{j\omega})$ را تعریف می‌کنیم. روابط $(5)$ به صورت زیر در می‌آیند:

$$f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} g(\omega)\, e^{j\omega n} d\omega \qquad and \qquad g(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\omega n}$$

حال، $n$ را با $-k$، و $\omega$ را با $t$ جایگزین کنید. داریم:

$$f[-k] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} g(t)\, e^{-jkt} dt \qquad and \qquad g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[-k] e^{jkt}$$

با مقایسه این عبارت با روابط $(6)$ نتیجه می گیریم که $f[-k]$ ضریب $k$ام سری فوریه‌ی سیگنال زمان پیوسته $g(t)$ است.

با توجه به تعریف نمادهای $f[.]$ و $g(.)$ می‌توان چنین گفت:

| |
|---|
| خاصیت دوگانی سوم: اگر سیگنال $x[n]$ دارای تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ باشد آنگاه $x[-k]$ ضریب $k$ام سری فوریه‌ی سیگنال زمان پیوسته $X(e^{jt})$ است. |

حال به دو مساله زیر پاسخ دهید.

❖ مساله ج-۱) با قرار دادنِ $T = 2\pi$ و $T_1 = \frac{\pi}{2}$ در مثال 3.5 کتاب، داریم

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < |t| < \pi \end{cases}, x(t+2\pi) \equiv x(t) \qquad \Longrightarrow \qquad a_k = \frac{\sin\left[k\,\frac{\pi}{2}\right]}{k\pi}.$$

با توجه به رابطه‌ی فوق و خاصیت دوگانی، مطلوب است محاسبه‌ی تبدیل فوریه سیگنال $y[n] = \frac{\sin\left[n\frac{\pi}{2}\right]}{n\pi}$. ■

❖ مساله ج-۲) فرض کنید $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان $x[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^{|n|}$ باشد. سیگنال پیوسته در زمان $y(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم. ضریب $a_2$ در بسط سری فوریه سیگنال $y(t)$ بر اساس دوره تناوب پایه آن را محاسبه کنید.

$$y(t)=X\left(e^{-jt}\right)+X(e^{j\frac{2t}{3}})$$

■

---

موفق باشید

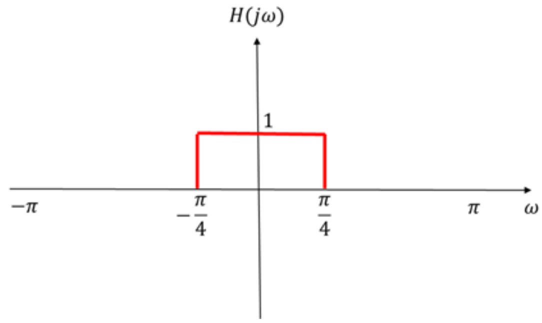
## سوالات توصیه شده و غیر تحویلی:

- مسائل زیر از فصل پنجم از ویرایش دوم کتاب اپنهایم را حل نمایید:

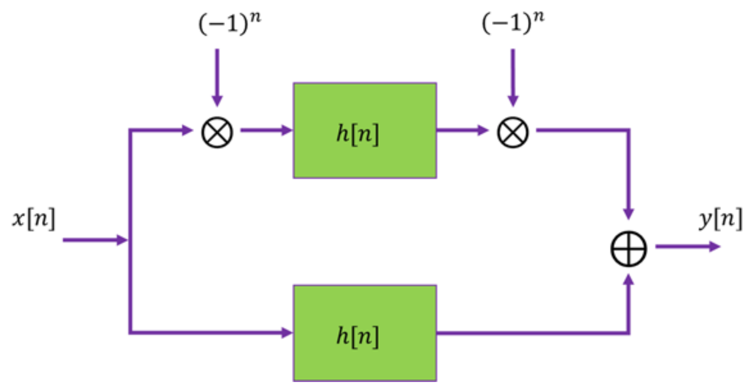
9-12-19-21(d,f,h)-23-24(a,b,g,h) -49

---

۶) فرض کنید $H(e^{j\omega})$ پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین گذر ایده آل با فرکانس قطع $\frac{\pi}{4}$ و بهره یک است، یعنی،

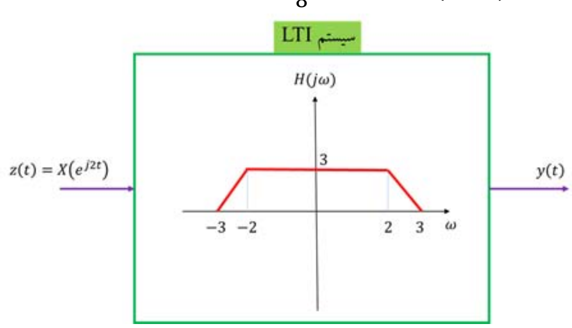



تعیین کنید سیستم زیر چه پاسخ فرکانسی دارد و چه نوع فیلتری است؟




---

۷) فرض کنید $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان $x[n] = \begin{cases} n^2 & |n| \le 2 \\ 0 & |n| > 2 \end{cases}$ باشد. خروجی سیستم نشان داده شده در شکل زیر را به ورودی $X(e^{j2t})$ در لحظه $t = \frac{\pi}{8}$ بدست آورید.




موفق باشید