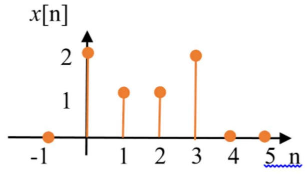
حل تمرین سری دوم-تجزیه و تحلیل سیگنال ها و سیستم ها-دانشگاه صنعتی اصفهان:

۱) برای دوتایی‌های ورودی و پاسخ ضربه زیر خروجی سیستم را بدست آورید:

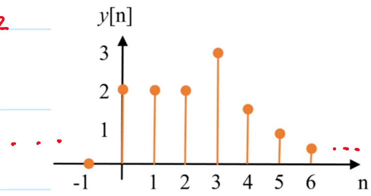
الف) $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ و




$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,h[n-m]$$

$$=\sum_{m=0}^{3} x[m]\,(\tfrac12)^{n-m}\,u[n-m] = 2\times\Big[(\tfrac12)^n \overset{n\geq 0}{u[n]} + (\tfrac12)^{n-3}\underset{n\geq 3}{u[n-3]}\Big]$$

$$+(\tfrac12)^{n-1}\underbrace{u[n-1]}_{n\geq 1}+(\tfrac12)^{n-2}\underbrace{u[n-2]}_{n\geq 2}$$

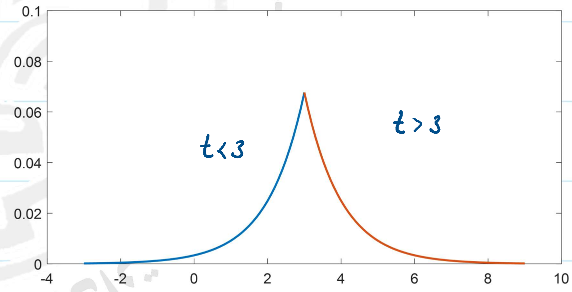



$$\Rightarrow y[n]=\begin{cases} 0 & n<0\\ 2 & n=0\\ 2\times\frac12+1=2 & n=1\\ 2\times(\frac12)^2+\frac12+1=2 & n=2\\ 2\times[(\frac12)^n+(\frac12)^{n-3}]+(\frac12)^{n-1}+(\frac12)^{n-2} = (\frac12)^{n-3}[2\times(\frac12)^3+2+(\frac12)^2+\frac12] = 3\times(\frac12)^{n-3} \end{cases}$$

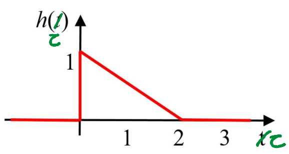
ب) $x(t) = e^{(t-1)}u(1-t)$ و $h(t) = e^{-t}u(t-2)$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} e^{(t-\tau-1)}\underbrace{u(1-t+\tau)}_{\tau>t-1}e^{-\tau}\underbrace{u(\tau-2)}_{\tau>2}d\tau = \int_{\tau=\max(2,t-1)}^{+\infty} e^{t-2\tau-1}d\tau$$

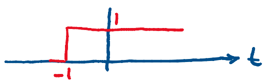
$$=e^{t-1}\times\frac{-1}{2}e^{-2\tau}\Big|_{\max(2,t-1)}^{+\infty} = \begin{cases} e^{t-1}\times\frac12 e^{-2(t-1)} = \frac12 e^{-t+1} & t-1>2 \Rightarrow t>3\\ e^{t-1}\times\frac12 e^{-4} = \frac12 e^{t-5} & t-1<2 \Rightarrow t<3\end{cases}$$



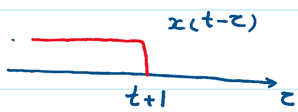

ج) $x(t) = u(t+1)$ و



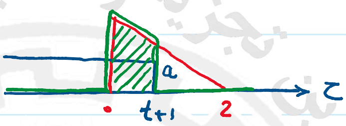

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$




$t+1<0 \Rightarrow t<-1 \qquad y(t)=0$

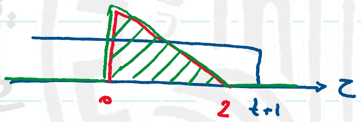



$$\left.\begin{matrix} t+1>0\\ t+1<2\end{matrix}\right\} \Rightarrow -1<t<1 \qquad y(t)=\frac{t+1}{2}(1+a)$$

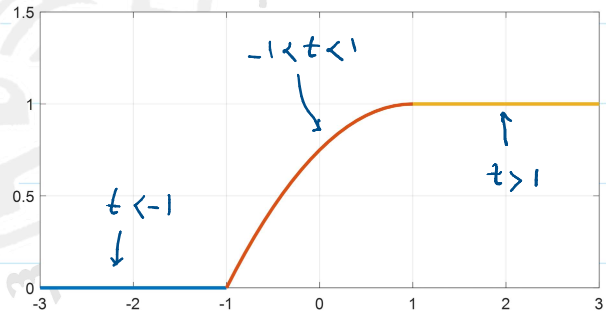



$$\frac{a}{1}=\frac{2-(t+1)}{2}=\frac{1-t}{2} \qquad \Rightarrow y(t)=\frac{t+1}{2}\times\frac{3-t}{2}$$

$t+1>2 \Rightarrow t>1$




$y(t)=\frac{1}{2}\times 2=1$

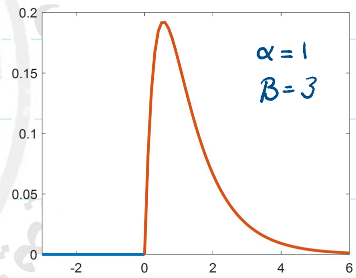



$h(t)=e^{-\beta t}u(t)$ و $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ (د

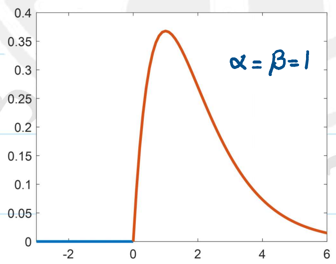
$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(t-\tau)}\underbrace{u(t-\tau)}_{\tau<t}\,e^{-\beta\tau}\underbrace{u(\tau)}_{\tau>0}\,d\tau=\begin{cases}0 & t<0\\ \dots & t>0\end{cases}$$

$$t>0 \qquad y(t)=\int_{\tau=0}^{t} e^{-\alpha t}e^{-(\beta-\alpha)\tau}\,d\tau=e^{-\alpha t}\times\underbrace{\frac{-1}{\beta-\alpha}}_{\alpha\neq\beta}e^{-(\beta-\alpha)\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}=\frac{e^{-\alpha t}}{\beta-\alpha}\left(1-e^{-(\beta-\alpha)t}\right)$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}\right)$$




$$t>0 \quad \alpha=\beta \qquad y(t)=\int_{\tau=0}^{t} e^{-\alpha t}\times 1\,d\tau=t\,e^{-\alpha t}$$



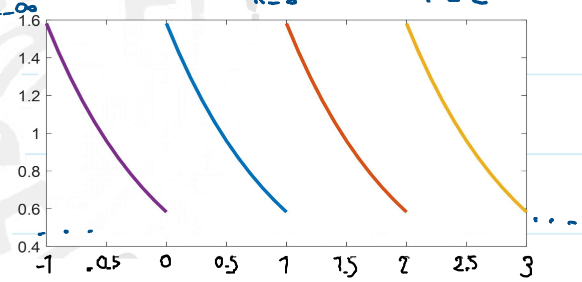

$h(t)=e^{-t}u(t)$ و $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k)$ (ه

$$y(t)=x(t)*h(t)=\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k)\right)*h(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\delta(t-k)*h(t)\right)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(t-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-(t-k)}u(t-k)$$


$y(t)$ دارای دوره‌تناوب ۱ است.

$$0<t<1 \qquad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-(t-k)}\underbrace{u(t-k)}_{k<t}=\sum_{k=-\infty}^{0}e^{-(t-k)}=e^{-t}\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-k}=\frac{e^{-t}}{1-e^{-1}}$$



۲) با تعاریف $A_v \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)dt$ ، $m_v \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} tv(t)dt$ و $\eta_v \triangleq \frac{m_v}{A_v}$ برای سیگنال $v(t)$ و با فرض آنکه $x(t)$ ، $h(t)$ و $y(t)$ ، به ترتیب، ورودی، پاسخ ضربه و خروجی یک سیستم LTI باشند، نشان دهید:

(الف) $A_y = A_x A_h$ (ب) $m_y = A_h m_x + m_h A_x$ (ج) $\eta_y = \eta_x + \eta_h$

الف) $A_y = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)*h(t)\,dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty}\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\,dt = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\underbrace{\int_{t=-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\,dt}_{A_h}\,d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)A_h\,d\tau$

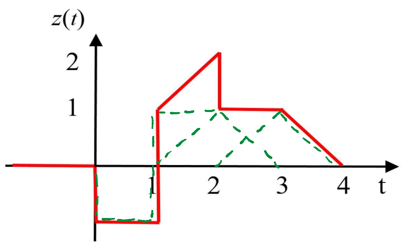
$= A_x A_h$

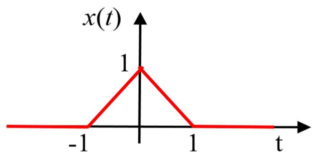
ب) $m_y = \int_{t=-\infty}^{+\infty} t\,y(t)\,dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} t\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\,dt = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\int_{t=-\infty}^{+\infty} t\,h(\underbrace{t-\tau}_{t-\tau=u})\,dt\,d\tau$

$= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\int_{u=-\infty}^{+\infty}(u+\tau)h(u)\,du\,d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left[\underbrace{\int_{u=-\infty}^{+\infty} u\,h(u)\,du}_{m_h} + \tau\underbrace{\int_{u=-\infty}^{+\infty} h(u)\,du}_{A_h}\right]d\tau = m_h A_x + m_x A_h$

ج) $\eta_y = \frac{m_y}{A_y} = \frac{m_h A_x + m_x A_h}{A_x A_h} = \frac{m_h}{A_h} + \frac{m_x}{A_x}$

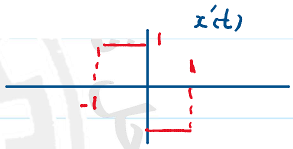
۳) فرض کنید پاسخ یک سیستم LTI به ورودی مثلثی x(t) به صورت $y(t) = \cos\left(\pi\frac{t}{2}\right)\times Rect(\frac{t}{2})$ باشد. خروجی سیستم را به ورودی z(t) بدست آورید.




$x'(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon}$

$x'(t) \xrightarrow{LTI} y'(t)$

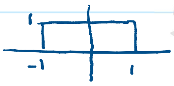


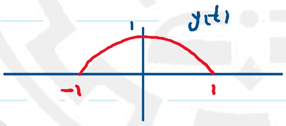

$x(at) \not\Rightarrow y(at)$

$z(t) = -x'(t-1) + x(t-2) + x(t-3)$

$\Rightarrow$ z(t) خروجی سیستم LTI به ورودی $= -y'(t-1) + y(t-2) + y(t-3)$

$Rect(\frac{t}{2})$




$\Rightarrow y'(t) = -\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi t}{2})\times Rect(t/2)$

$+ \cos(\frac{\pi t}{2})\cancel{[\delta(t+1) - \delta(t-1)]}$

$z(t)$ ورودی: خروجی سیستم $= \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}(t-1)\right) \cdot \mathrm{Rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}(t-2)\right) \times \mathrm{Rect}\left(\frac{t-2}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}(t-3)\right) \times \mathrm{Rect}\left(\frac{t-3}{2}\right)$

۵) نشان دهید سیستم وارون هر سیستم LTI وارون پذیر، خود LTI است.

$$x(t) \longrightarrow \underset{\text{LTI}}{\boxed{S_1}} \xrightarrow{y(t)} \boxed{S_2} \longrightarrow x(t)$$

$$x(t) \xrightarrow{S_1} y(t) \xrightarrow{S_2} x(t)$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{S_1} y(t-t_0) \underbrace{\xrightarrow{S_2} x(t-t_0)}_{TI} \quad ①$$

$S_1$ خطی است $\quad x_3(t) = \alpha x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{S_1} \alpha y_1(t) + y_2(t) = y_3(t)$

$$\underset{\alpha y_1(t) + y_2(t)}{\overset{\parallel}{y_3(t)}} \xrightarrow{S_2} \underset{\alpha x_1(t) + x_2(t)}{\overset{\parallel}{x_3(t)}} \Rightarrow S_2 \text{ is linear} \quad ②$$

① و ② $\Leftarrow$ $S_2$ یک سیستم LTI است.

۶) سیستمی با معادله دیفرانسیل زیر در نظر بگیرید: $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{3}{2}\frac{dy(t)}{dt} - y(t) = x(t)$

الف) نشان دهید وقتی $\forall t\ x(t) = 0$ آنگاه پاسخ معادله به صورت $Ae^{\frac{t}{2}} + Be^{-2t}$ است.

ب) در صورتی که سیستم علی باشد، پاسخ ضربه سیستم را بدست آورید.

ج) در صورتی که سیستم پایدار باشد، پاسخ ضربه سیستم را بدست آورید.

الف) $s^2 + \frac{3}{2}s - 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{-3/2 \pm \sqrt{9/4 + 4}}{2} = \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow$ if $x(t) = 0 \Rightarrow y(t) = Ae^{t/2} + Be^{-2t}$

ب) $x(t) = \delta(t) \Rightarrow \begin{cases} t<0: & y(t) = A_1 e^{t/2} + B_1 e^{-2t} \\ t>0: & y(t) = A_2 e^{t/2} + B_2 e^{-2t} \end{cases}$

سیستم علی $\Rightarrow$ if $x(t) = 0\ \forall t<t_0 \Rightarrow y(t) = 0\ \forall t<t_0$

$x(t) = \delta(t) \Rightarrow x(t) = 0\ \forall t<0 \Rightarrow y(t) = 0\ t<0 \Rightarrow A_1 = B_1 = 0$

$$\Rightarrow y(t) = h(t) = (A_2 e^{t/2} + B_2 e^{-2t})\, u(t)$$

$$y'(t) = \left(\frac{A_2}{2} e^{t/2} - 2B_2 e^{-2t}\right) u(t) + (A_2 + B_2)\,\delta(t)$$

$$y''(t) = \left(\frac{A_2}{4} e^{t/2} + 4B_2 e^{-2t}\right) u(t) + \left(\frac{A_2}{2} - 2B_2\right)\delta(t) + (A_2 + B_2)\,\delta'(t)$$

$y'' + \frac{3}{2}y' - y = \delta(t) \Rightarrow \delta'(t): \quad A_2 + B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = -A_2$

$\delta(t): \quad \frac{A_2}{2} - 2B_2 + \frac{3}{2}(A_2 + B_2) = 1 \Rightarrow A_2\left(\frac{1}{2} + 2\right) = 1 \Rightarrow A_2 = \frac{2}{5}$

$B_2 = -\frac{2}{5}$

$$u(t): \begin{cases} e^{t/2}: & \frac{A_2}{4} + \frac{3}{2}\times\frac{A_2}{2} - A_2 = 0 \checkmark \\ e^{-2t}: & 4B_2 + \frac{3}{2}\times(-2B_2) - B_2 = 0 \checkmark \end{cases}$$

$$h(t) = (\tfrac{2}{5} e^{t/2} - \tfrac{2}{5} e^{-2t}) u(t)$$
علّی

ج) سیستم پایدار if $|x(t)| < M \ \forall t \Rightarrow |y(t)| < \hat{M} \ \forall t$

$$y(t) = A_1 e^{t/2} u(-t) + B_2 e^{-2t} u(t)$$

$$y'(t) = \frac{A_1}{2} e^{t/2} u(-t) + (-A_1)\delta(t) + (-2B_2) e^{-2t} u(t) + B_2 \delta(t)$$

$$y''(t) = \frac{A_1}{4} e^{t/2} u(-t) + (-\frac{A_1}{2})\delta(t) + 4B_2 e^{-2t} u(t) - 2B_2\delta(t) + (B_2 - A_1)\delta'(t)$$

$$y''(t) + \tfrac{3}{2} y'(t) - y(t) = \delta(t) \Rightarrow \delta'(t): B_2 - A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = B_2$$

$$\delta(t): -\frac{A_1}{2} - 2B_2 + \tfrac{3}{2}(-A_1 + B_2) = 1 \Rightarrow -A_1(\tfrac{1}{2} + 2) = 1$$

$$\Rightarrow A_1 = -\tfrac{2}{5} = B_2$$

$$u(t): 4B_2 + \tfrac{3}{2}(-2B_2) - B_2 = 0 \checkmark$$

$$u(-t): \frac{A_1}{4} + \tfrac{3}{2}(\frac{A_1}{2}) - A_1 = 0 \checkmark$$

پایدار $h(t) = -\tfrac{2}{5} e^{t/2} u(-t) - \tfrac{2}{5} e^{-2t} u(t)$

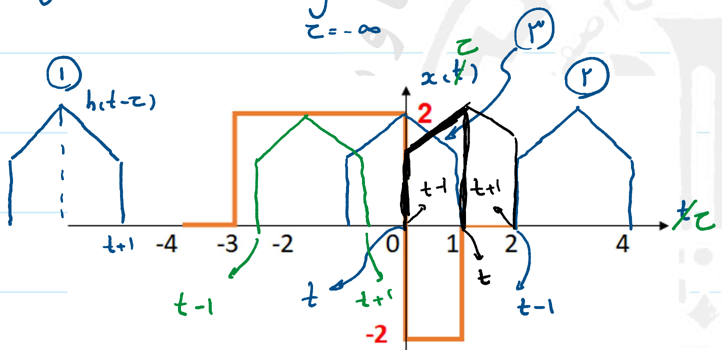
۷) سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = \begin{cases} 2 - |t| & |t| \leq 1 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$ و ورودی $x(t) = \begin{cases} 2 & -3 \leq t \leq 0 \\ -2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. بدون محاسبه کامل انتگرال کانولوشن، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

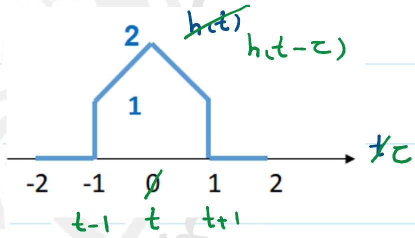
الف) خروجی در کدام بازه(ها) دقیقا برابر صفر است؟

ب) خروجی در کدام t(ها) حداکثر است؟

ج) خروجی در t=1 چه مقدار دارد؟

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$




الف) ① $t+1 < -3 \Rightarrow t < -4 \Rightarrow y(t) = 0$

② $t-1 > 1 \Rightarrow t > 2 \Rightarrow y(t) = 0$

③ $t = 0 \Rightarrow y(t) = 0$

ب) $t-1 > -3$ , $t+1 < 0 \Rightarrow -2 < t < -1$

$\Rightarrow$ حداکثر خروجی

ج) $y(1) = -2 \times \frac{1}{2}(1+2) = \underline{-3}$

۸) علیت و پایداری سیستمهای LTI زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) $h(t) = e^{t}u(-t-1)$

$-t-1>0 \Rightarrow t<-1 \Rightarrow t<-1 \quad h(t)\neq 0 \Rightarrow$ سیستم غیرعلی ؛

$\int |h(t)|\,dt = \int_{t=-\infty}^{-1} e^{t} = e^{t}\Big|_{-\infty}^{-1} = e^{-1} < M \Rightarrow$ سیستم پایدار است .

ب) $h(t) = e^{-t}\cos(3t)\,\underline{\underline{u(t)}}$

$h(t)=0 \quad t<0 \Rightarrow$ سیستم علی ؛

$\int |h(t)|\,dt = \int_{t=0}^{\infty} |e^{-t}\cos 3t|\,dt = \int_{t=0}^{+\infty} |e^{-t}||\cos 3t|\,dt < \int_{t=0}^{+\infty} |e^{-t}|\,dt = -e^{-t}\Big|_{t=0}^{+\infty} = 1$ سیستم پایدار

ج) $h(t) = \cos(3t)\,\underline{\underline{u(t)}}$

$\int |h(t)|\,dt = \int_{t=0}^{+\infty} |\cos 3t|\,dt \longrightarrow \infty$

سیستم علی است ولی سیستم ناپایدار است

د) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\lambda)}x(\lambda-1)\,d\lambda$

$x(t)=\delta(t) \Rightarrow y(t)=h(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\lambda)}\delta(\lambda-1)\,d\lambda = e^{-2(t-1)}\int_{\lambda=-\infty}^{t}\delta(\lambda-1)\,d\lambda$

$= e^{-2(t-1)}\,\underline{u(t-1)} \qquad h(t)=0 \quad t-1<0 \Rightarrow t<1 \Rightarrow$ سیستم علی است

$\int |h(t)|\,dt = \int_{t=1}^{+\infty} e^{-2(t-1)}\,dt = \frac{-1}{2}e^{-2(t-1)}\Big|_{t=1}^{+\infty} = \frac{1}{2} < M \Rightarrow$ سیستم پایدار است

هـ) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} e^{-2k}x[n-k]$

$x[n]=\delta[n] \Rightarrow y[n]=h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} e^{-2k}\delta[n-k] = e^{-2n} \qquad h[n]\neq 0 \quad n<0$

$\Leftarrow$ سیستم غیرعلی

$\lim_{n\to-\infty} h[n] \longrightarrow +\infty \Rightarrow \sum |h[n]| \to +\infty \Rightarrow$ سیستم ناپایدار است .