Metody Numeryczne – Zad. 3
Marcel Zieliński – 191005

Aproksymacja profilu wysokościowego

1. Wstęp

Celem projektu jest zaimplementowanie i zbadanie dwóch metod interpolacji oraz stwierdzenie, czy przydają się do aproksymacji profilu wysokościowego. Interpolowane dane to punkty pomiarowe różnych terenów. W niniejszym sprawozdaniu sprawdzone zostaną poniższe metody:

- metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a - wykorzystuje schemat iteracyjny, który za każdym razem wylicza interpolowaną wartość y dla podanego x.

- metoda wykorzystująca funkcje sklejane (splajny) 3 stopnia – ta metoda wyróżnia się przypisaniem każdemu przedziałowi własnego wielomianu trzeciego stopnia. Po określeniu ilości przedziałów konstruujemy macierz i rozwiązując równanie macierzowe, wyliczamy za jednym razem współczynniki dla wszystkich podprzedziałów. Dzięki temu możemy wywołać funkcję dla x i od razu otrzymywać wynik na podstawie wzoru na wielomian i wcześniej obliczonych jego współczynników.

Oba algorytmy zostały zaimplementowane przeze mnie ręcznie, w języku Python i przy użyciu biblioteki NumPy (do operacji na macierzach).

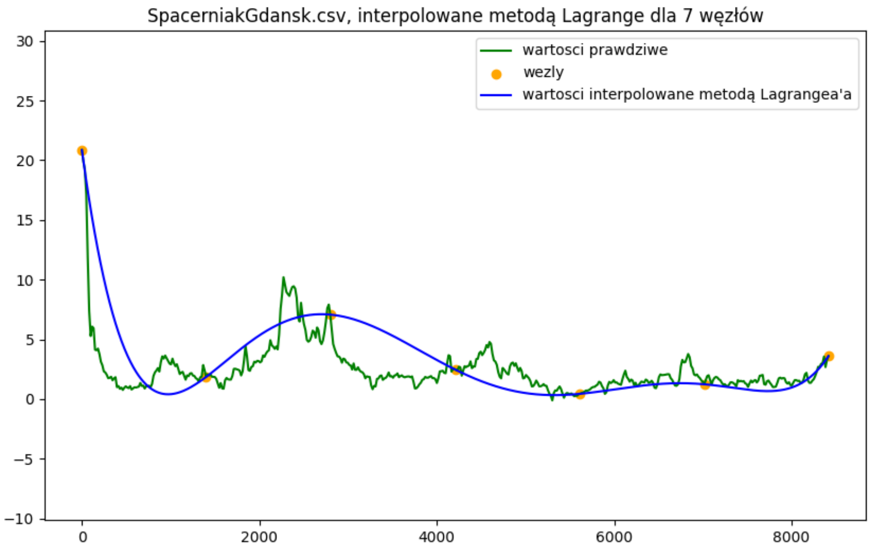
2. Wybrane profile wysokościowe

Do omówienia wybrano cztery profile wysokościowe o różnorodnych przewyższeniach:

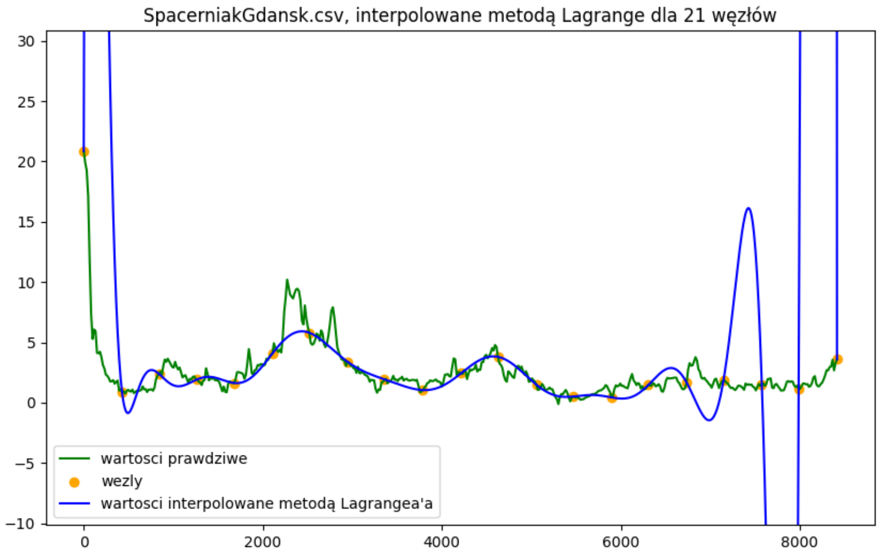
- SpacerniakGdansk.csv
- Obiadek.csv
- MountEverest.csv
- WielkiKanionKolorado.csv

3. Testy i porównanie

Najpierw przyjrzymy się łagodnym profilom o małej tendencji zmian. Wczytany został plik SpacerniakGdańsk.csv i otrzymano następujące wyniki:



Przy małej ilości węzłów interpolacja daje bardzo uogólniony pogląd na rzeczywistą trasę. Naturalnie spróbujemy wywołać funkcję dla większej ilości węzłów.



Aby jakkolwiek zbliżyć się do rzeczywistych wyników, zwiększono ilość węzłów trzykrotnie. W oczy rzucają się 2 rzeczy:

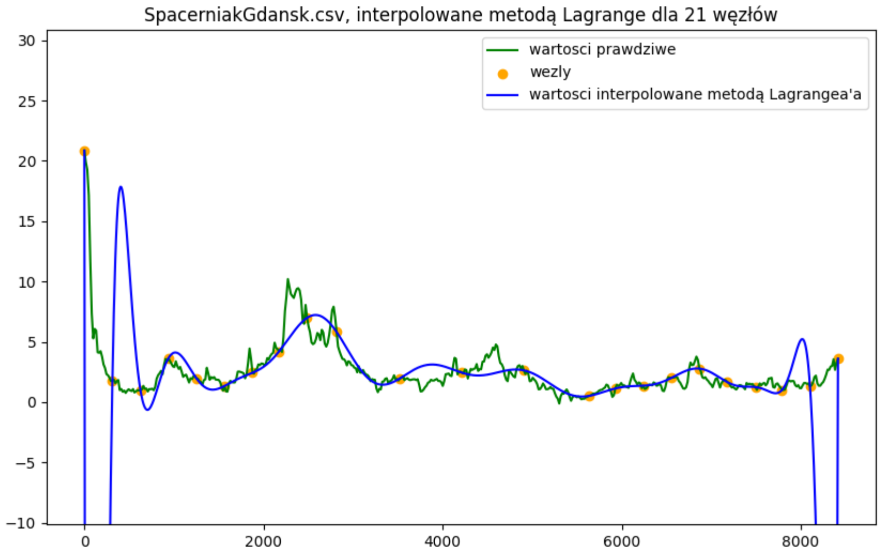
- na brzegach wykresu wartości nie są poprawnie przybliżone

- niektóre skoki wysokości nie są objęte interpolacją

Pierwszy problem to efekt Rungego – czym więcej węzłów tym większy jest stopień wielomianu co powoduje tak gwałtowne wahania.

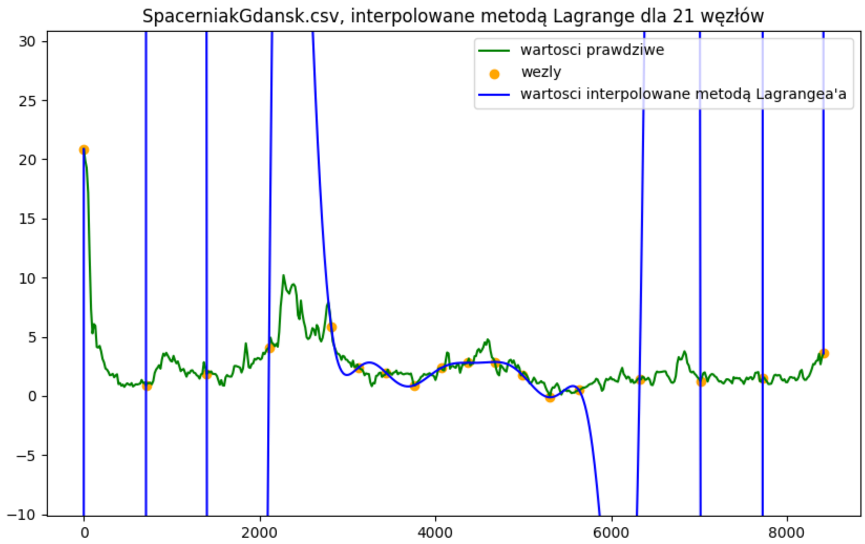
Drugi problem wynika ze zbyt małej ilości węzłów, przez co funkcja „nie widzi” niektórych skoków i spadków.

Celem wyeliminowania tych problemów wykonano eksperyment polegający na zagęszczeniu punktów na krańcach lub w środku przedziału. Oto efekty:



Zwiększone zagęszczenie punktów na krańcach

Jak widać, niewiele to pomogło, ponadto tracimy wtedy dokładność na środku.



Zwiększone zagęszczenie w środkowej części

Mimo niewielkiego zwiększenia dokładności w środku, efekt Rungego jeszcze bardziej daje nam się we znaki.

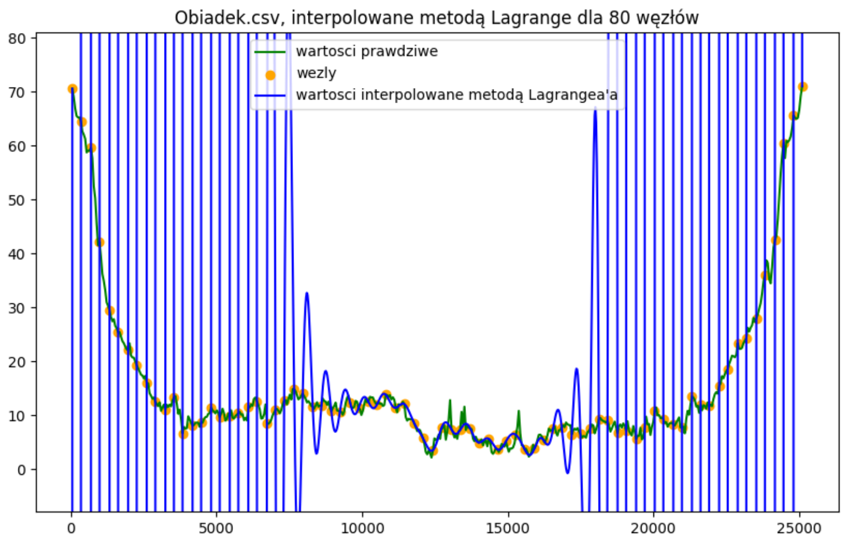
Wynika z tego, że nasze punkty powinny być interpolowane osobnymi funkcjami w każdym podprzedziale – jest to możliwe do zrobienia, właśnie przy pomocy funkcji sklejanych.

Zobaczmy wykres spacerniaka dla metody Splajnów trzeciego stopnia:

Tutaj efekt jest dużo lepszy, jeżeli chodzi o boki wykresu. Spróbujmy zwiększyć liczbę węzłów.

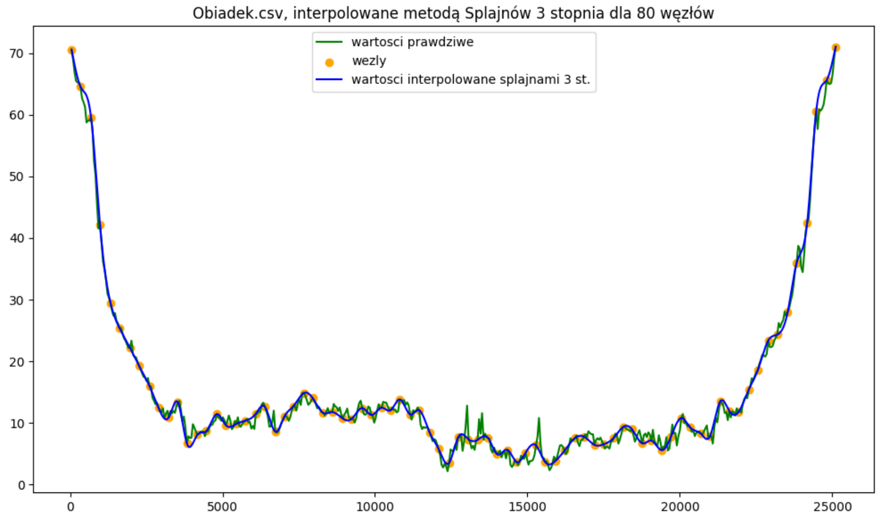
Tutaj uzyskujemy można powiedzieć, zadowalający efekt. Na brzegach jest wszystko w porządku, a gwałtowne wzniesienia i spadki zostały odnotowane na wykresie, dzięki zwiększeniu ilości węzłów.

Spróbujmy wywołać algorytmy dla kolejnych profili. Jeżeli uznaliśmy, że zadowalająca ilość węzłów to 80, zobaczmy jak wygląda wykres takiej funkcji interpolacji metodą Lagrange'a:



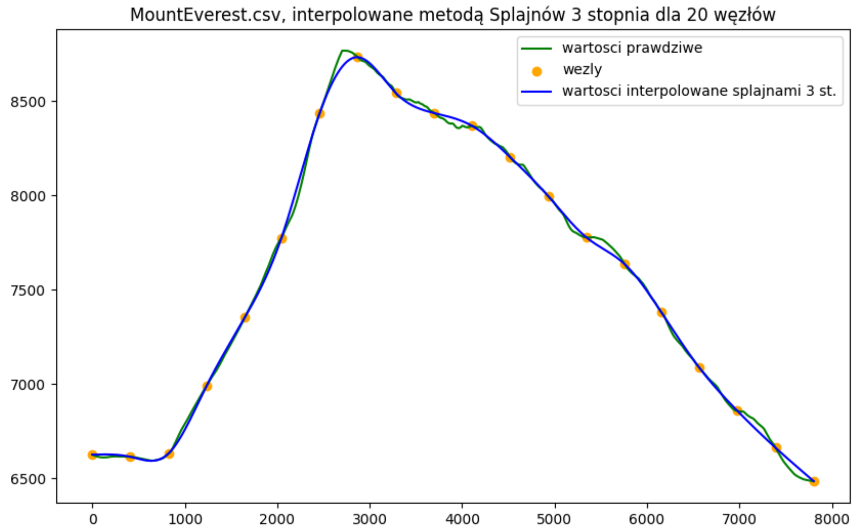
Moim skromnym zdaniem, metoda ta jest bezużyteczna, ponieważ idąc od środka do zewnątrz powstaje pewien błąd który potem tylko rośnie, więc tak naprawdę ma to mały związek z dokładnością. Aproksymacja wielomianem Lagrange'a jest niestabilna.

Dla porównania metoda splajnów:

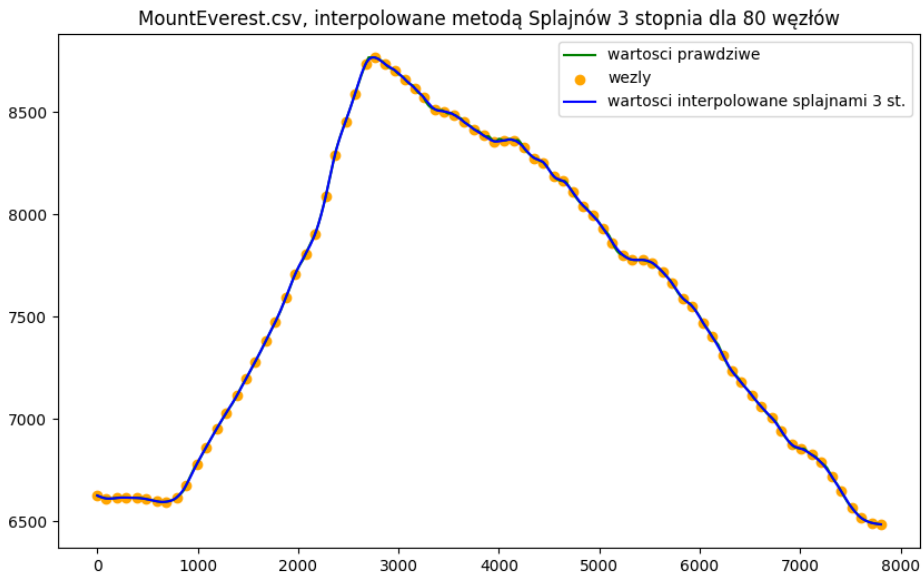


Kolejny świetny rezultat który można poprawić zwiększając ilość węzłów.

Jak dotąd badaliśmy przypadki dla spokojnych i mało ekstremalnych tras. Spróbujmy Mount Everest:

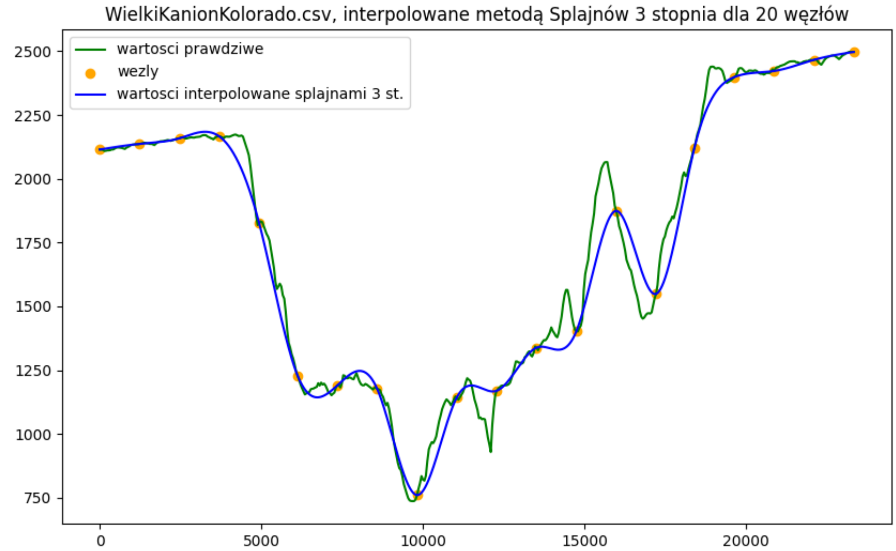


Mount Everest jest dobrze interpolowany dla niewielkiej ilości węzłów – 20.



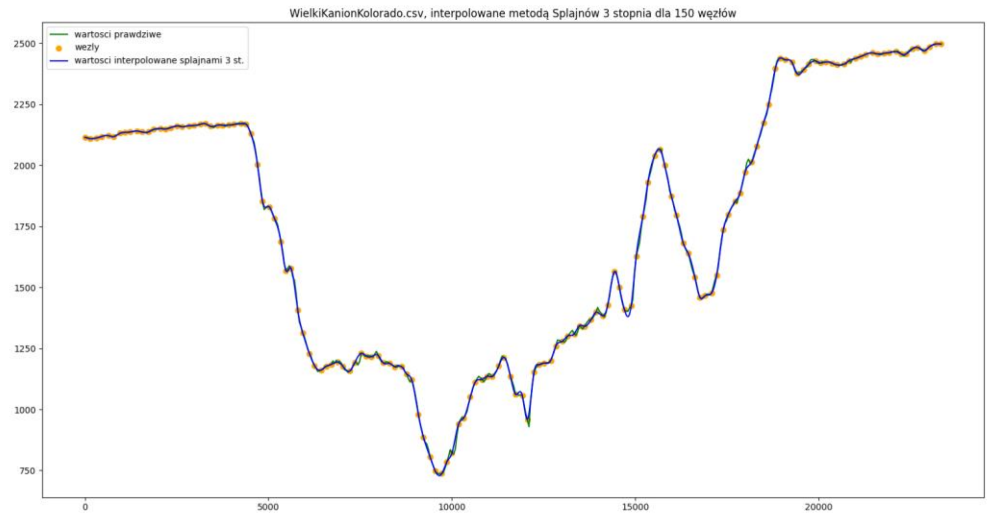
Dla 80 węzłów jest niemal idealnie.

Teraz pora na najciekawsze – Wielki Kanion Kolorado:



Dla stosunkowo małej ilości węzłów widzimy niedokładności w postaci pominięcia spadku (np. 12000. Metr), lub przesunięcia się górki z ~16000m na ~17000m. Wynika to oczywiście z faktu, iż węzeł nie jest umieszczony na szczycie górki. Oznacza to, że wykonując taką samą ilość pomiarów, można uzyskać lepszą dokładność stając w kluczowych miejscach i właśnie w nich wykonując pomiar.

Jeżeli dysponowalibyśmy 150 węzłami to uzyskalibyśmy bardzo bliski do rzeczywistego (500 pomiarów) wynik:



4. Podsumowanie

Po przetestowaniu powyższych dwóch metod, można śmiało stwierdzić, że interpolacja wielomianem Lagrange'a dla większej ilości węzłów nie sprawdza się. Zauważyłem, że ta metoda jedynie zaokrągla szczyty i spadki, ale z każdym kolejnym węzłem od środka, generuje coraz mniej dokładne wartości przez efekt Rungego.

W ogólności, aby uzyskać dokładne przybliżenia używając interpolacji, najlepiej zwiększać ilość węzłów. Temu podejściu sprzyja metoda splajnów, która nie wykazuje efektu Rungego, a wprowadzanie dodatkowych punktów, powoduje jedynie większe zużycie pamięci do konstrukcji macierzy, oraz wymaga dłuższego przeliczania parametrów. Po przeliczeniu parametrów, możemy podstawiać dowolny punkt do funkcji, która od razu zwraca nam aproksymowaną wartość.

Metody Lagrage'a nie da się usprawnić, poprzez zwiększanie ilości czy zmienianie położenia węzłów. Będzie ona zawsze generować nierówne błędy i nie jest godna zaufania.

Metoda Splajnów za to, jest bardzo stabilna – nie występuje w niej efekt Rungego a dobre ułożenie węzłów interpolacyjnych głównie determinuje dokładność. Można ją więc zwiększyć lub zaplanować pomiar tak, aby nie pomijał kluczowych zmian w terenie jak nagłe wzniesienia czy dołki.

Jeżeli chodzi o wpływ charakteru trasy na wyniki, to można się odnieść do powyższego akapitu. Czym bardziej skomplikowana trasa pod względem profilu, tym więcej węzłów powinniśmy wykorzystać do interpolacji oraz umieścić je w przemyślanych miejscach. Jeżeli dwa węzły leżą na tym samym łuku paraboli lub na jednej prostej to jeden z nich jest niepotrzebny.