Planche n°1 : Polynômes du second degré

EXERCICE 1.

Mettre les polynômes sous forme canonique :

1. $f(x) = -4x^2 + 24x + 11$
2. $g(x) = 3x^2 + 9x + 1$
3. $h(x) = x^2 - 5x$
4. $k(x) = -2x^2 - 8x + 3$

EXERCICE 2.

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - 3x + 1 = 0$
2. $2x^2 + x + 1 = 0$
3. $0.3x^2 - 3x - 7.5 = 0$
4. $18x^2 - 12x + 2 = 0$

EXERCICE 3.

Déterminer les racines éventuelles, et en déduire, si possible, une expression factorisée des trinômes suivants :

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$
2. $g(x) = -2x^2 + 5x + 3$
3. $h(x) = 5x^2 - 4x - 1$
4. $k(x) = -3x^2 - 5x + 2$

EXERCICE 4.

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2x^2 - 4x + 2 \geqslant 0$
2. $-2x^2 + 5x \leqslant 4$
3. $3x^2 - 24x + 48 > 0$

EXERCICE 5.

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = x^2 - 6x - 7$

1. Déterminer les formes canonique et factorisée de f.

2. En utilisant la forme la plus adaptée de f :

a. calculer l'image de 0.

b. déterminer le (ou les) antécédents de 0 par f.

c. résoudre $f(x) = -7$.

d. résoudre $f(x) = -16$.

EXERCICE 6.

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

1. Déterminer les formes canonique et factorisée de f.

2. En utilisant la forme la plus adaptée de f :

a. calculer l'image de 0.

b. déterminer le (ou les) antécédents de 0 par f.

c. résoudre $f(x) = -3$.

d. résoudre $f(x) = 4$.

EXERCICE 7.

On modélise la trajectoire d'un ballon qui entre dans le panier lors d'un lancer franc au basket.

Cette trajectoire est un arc de parabole d'équation :

$$y = -0,3x^2 + 1,6x + 2$$

On note f la fonction définie sur $[0\,;\,4,6]$ par : $\qquad f(x) = -0,3x^2 + 1,6x + 2 \qquad$ où x et $f(x)$ sont exprimés en mètre.

1. À quelle hauteur se trouve le ballon lorsqu'il est à 1m du joueur ?

2. Donner la forme canonique de f.

3. Quelle hauteur maximale le ballon atteint-il ?

4. Sachant que la ligne de lancer franc est à 4,6 mètres du panier, quelle est la hauteur du panier ?

EXERCICE 8.

Un athlète lance un javelot à l'instant $t = 0$.

La hauteur $h(t)$, en mètre, à l'instant t, en seconde, du centre de gravité du javelot est :

$$h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 8t + 2$$

1. À quel instant le javelot est-il au plus haut ?

2. Le javelot atteindra-t-il la hauteur de 32m ? Si oui, à quel(s) instant(s) ?

3. À quel instant le javelot touchera-t-il le sol ?

EXERCICE 9.

Existe-t-il un rectangle d'aire 40 et de périmètre 40 ? Si oui, donnez ses dimensions.

EXERCICE 10.

Existe-t-il un couple d'entiers consécutifs dont le produit est égal au double de la somme ?

EXERCICE 11.

Soit la fonction f définie par :

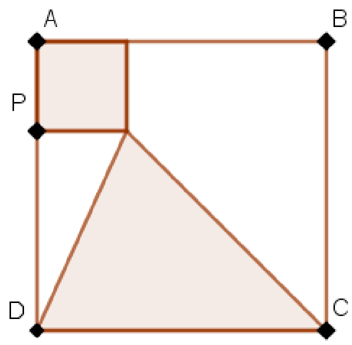
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x + 1}$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout réel x, $\qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

EXERCICE 12.

ABCD est un carré de côté 8. Soit P un point mobile sur le segment [AD].



1. Où placer le point P afin que l'aire grisée soit minimale ?

2. Où placer le point P afin que la surface grisée occupe 75% de la surface du carré ?

3. Est-il possible que l'aire de la surface grisée soit égale au quart de l'aire du carré ?

Planche n°1 (bis) : Polynômes du second degré

EXERCICE 1.

Résoudre les équations bicarrées suivantes :

1. $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

2. $2x^4 - 6x^2 - 8 = 0$

3. $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

4. $x^4 + 9x^2 + 20 = 0$

EXERCICE 2.

Déterminer la fonction polynôme du second degré dont la courbe passe par les points

$$A(2\,;\,4) \qquad B(4\,;\,2) \qquad C(6\,;\,-4)$$

EXERCICE 3.

Déterminer la fonction polynôme du second degré dont la courbe passe par les points

$$A(1\,;\,1) \qquad B(-1\,;\,5) \qquad C(3\,;\,13)$$

EXERCICE 4.

Déterminer la fonction polynôme du second degré dont la courbe passe par les points

$$A(1\,;\,1) \qquad B(3\,;\,5) \qquad C(0\,;\,2)$$

EXERCICE 5.

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x+1}$

2. $g(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{2x^4-6x^2-8}$

3. $h(x) = \dfrac{x-4}{-x^2+5x+6}$

4. $k(x) = \dfrac{x}{x^2-x+2}$

EXERCICE 6.

Faire les tableaux de signes des fonctions précédentes.

EXERCICE 7.

Déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$:

$$\mathcal{C}_1 \,:\, y = \frac{x-1}{x+2} \qquad \mathcal{C}_2 \,:\, y = -x+3$$

$$\mathcal{C}_1 \,:\, y = \frac{x^2}{2x+2} \qquad \mathcal{C}_2 \,:\, y = x-1$$

Planche n°2 : Suites numériques

EXERCICE 1.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 1$.
Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{10}.

EXERCICE 2.

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.
Calculer v_1, v_2, v_3 et v_{10}.

EXERCICE 3.

Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 3w_n - 4$.
Calculer w_1, w_2, w_3. Comment faire pour calculer w_{10} ?

EXERCICE 4.

On considère la suite de triangles rectangles isocèles suivante : le premier triangle a ses côtés de longueur 1, 1 et $\sqrt{2}$. On effectue un agrandissement de rapport 3 pour obtenir le triangle suivant.

1. Construire les 3 premier triangles.

2. Calculer les périmètres p_1, p_2 et p_3 des trois premiers triangles.
Donner la relation entre p_{n+1} et p_n.

3. Calculer les aires a_1, a_2 et a_3 des trois premiers triangles.
Donner la relation entre a_{n+1} et a_n.

EXERCICE 5.

Pour chacune des suites suivantes, indiquer si elle est définie par une formule explicite ou par une relation de récurrence, puis déterminer/calculer les 3 premiers termes, puis le 5ème.

- $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n = 3n^2$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$: $b_n = n - 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} c_0 = -2 \\ c_{n+1} = c_n - 5 \end{cases}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} d_1 = -2 \\ d_{n+1} = \dfrac{1}{2} d_n \end{cases}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $e_n = 4$
- $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} f_0 = 1 \\ f_{n+1} = 3f_n + 2n^2 - 1 \end{cases}$

EXERCICE 6.

Les algorithmes ci-dessous permettent de calculer le terme de rang n de trois suites.
Indiquer le premier terme et la relation de récurrence ou la formule explicite définissant chacune de ces suites.

```
u ← −4
Pour k allant de 1 à n faire
    u ← u + 5
```

```
v ← 300
Pour k allant de 1 à n faire
    v ← 2v
```

```
Pour k allant de 1 à n faire
    w ← √(2k + 5)
```

```
t ← 0
Pour k allant de 1 à n faire
    t ← k + 3t
```

```
Pour k allant de 0 à n faire
    s ← (3k + 1)/(k + 2)
```

```
r ← 0
Pour k allant de 0 à n faire
    r ← 2k − 5r + 1
```

Planche n°2 (bis) : Suites numériques

EXERCICE 7.

Pour les suites suivantes, préciser si c'est une suite définie par une formule explicite ou une relation de récurrence, puis calculer les 4 premiers termes.

a. $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$ **b.** $\forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$ **c.** $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \dfrac{n}{n+1}$

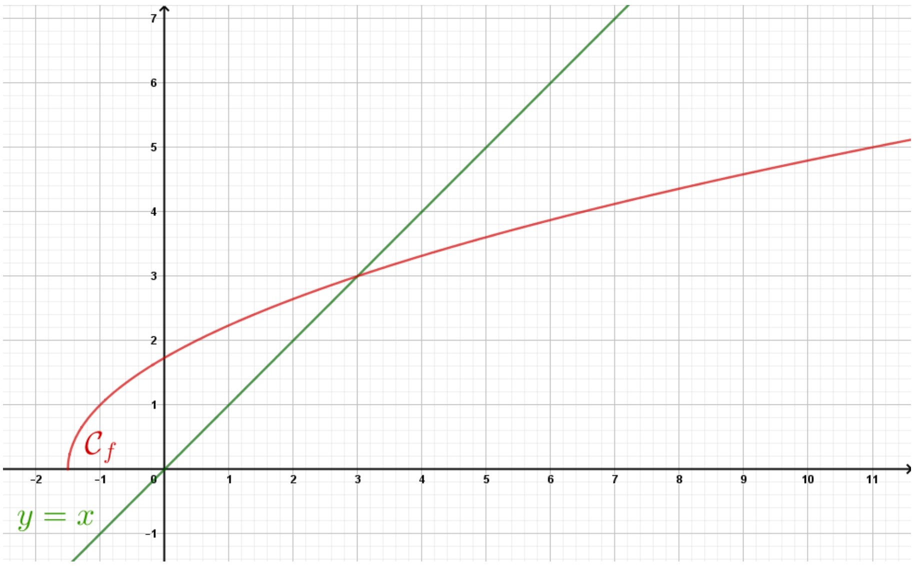
d. $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4n - 1 \end{cases}$ **e.** $\forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+1} \end{cases}$ **f.** $\forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} + n^2 \end{cases}$

EXERCICE 8.

On considère la suite (u_n) suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$$

1. Dans un repère du plan, on a représenté la courbe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$.
Sur l'axe des abscisses, en utilisant les courbes proposées, construire les 4 premiers termes de la suite.



2. Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n).

3. Conjecturer la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Mêmes questions pour $u_0 = 11$.

EXERCICE 9.

Pour les suites suivantes :

1. Conjecturer le sens de variations en calculant les premiers termes.

2. Démontrer les conjectures.

3. Représenter la suite dans un repère.

4. Conjecturer la limite éventuelle des suites.

a. $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = -n^2+7n+8$ **b.** $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = 0.5n^3-3n^2+n-1$ **c.** $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

Planche n°2 (ter) : Suites numériques

EXERCICE 1.

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison $r = 13$ et de premier terme $u_0 = -8$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Donner la relation de terme général de u_n.

3. Calculer u_{12}.

EXERCICE 2.

On considère la suite arithmétique (u_n) telle que $u_4 = 15$ et $u_{23} = 41$.
Déterminer la raison et le premier terme u_0.

EXERCICE 3.

On considère la suite arithmétique (u_n) telle que $u_8 = 15$ et $u_{12} = 25$.
Déterminer la raison et le premier terme u_0.

EXERCICE 4.

On considère la suite géométrique (v_n) de raison $q = \dfrac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.

2. Donner la relation de terme général de v_n.

3. Calculer v_{12}.

EXERCICE 5.

On considère la suite géométrique (w_n) positive telle que $w_4 = 162$ et $w_6 = 1458$.
Déterminer la raison et le premier terme w_0.

EXERCICE 6.

On considère la suite géométrique (v_n) positive telle que $v_3 = 6$ et $v_8 = 1458$.
Déterminer la raison et le premier terme v_0.

EXERCICE 7.

On considère la suite géométrique (v_n) positive telle que $v_{10} = 15$ et $v_{15} = 46875$.
Déterminer la raison et le premier terme v_0.

EXERCICE 8.

Calculer les sommes :

$S = 1+2+3+4+...+75$ $\qquad$ $T = 2+4+6+8+...+142$ $\qquad$ $R = 7+10+13+16+...58$

EXERCICE 9.

Calculer les sommes :

$S = 1+4+16+...+262144$ $\qquad$ $T = 3-6+12-24+...+192$ $\qquad$ $R = 9+3+1+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{729}$

Planche n°2 (quater) : Suites numériques

EXERCICE 1.

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

1. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = u_n + 5$. Calculer w_1 ; w_2 ; w_3 ; w_4 ; w_5.

3. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

4. Exprimer w_n, puis u_n en fonction de n.

EXERCICE 2.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.

1. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

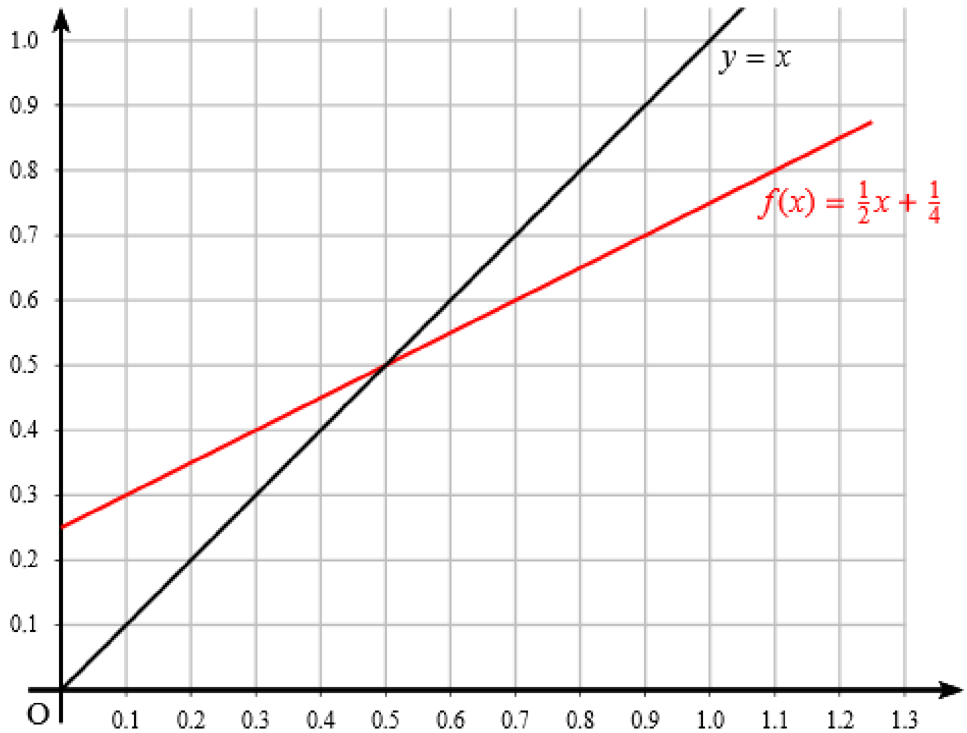
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$. Prouver que la suite (v_n) est arithmétique.

3. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

EXERCICE 3.

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4}$.

1. Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3.



2. Conjecturer alors la limite de la suite (u_n).

3. On pose $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.

a. Prouver que la suite (v_n) est géométrique.

b. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

Planche n° 3 : Probabilités Conditionnelles

EXERCICE 1.

Marius achète un hebdomadaire une fois par semaine. Deux fois sur trois il achète l'hebdomadaire A ; sinon il achète l'hebdomadaire B. Toutes les semaines, il fait la grille de mots croisés. Dans l'hebdomadaire A, il finit la grille trois fois sur quatre, alors que dans le B, plus difficile, il ne la termine qu'une fois sur deux.

1. – *Traduire toutes les données à l'aide de probabilités, et/ou de probabilités conditionnelles.*

2. – *Représenter la situation par un arbre pondéré.*

3. – *En entrant chez le buraliste, quelle est la probabilité qu' il ressorte avec l'hebdomadaire B et qu'il finisse la grille ?*

4. – *Quelle est la probabilité que Marius réussisse sa grille ?*

EXERCICE 2.

À un carrefour doté d'un feu tricolore, on a remarqué que :
— 2% des véhicules s'arrêtent au feu vert,
— 65% des véhicules s'arrêtent au feu orange (comme le demande le code de la route),
— 97% des véhicules s'arrêtent au feu rouge.
On décide d'observer le comportement d'un véhicule se présentant au carrefour. On admet que l'état du feu, à l'arrivée du véhicule, est aléatoire, et que la probabilité que le feu soit vert est de $0,6$, celle qu'il soit orange est de $0,1$ et celle qu'il soit rouge est de $0,3$.

1. – *Quelle est la probabilité que le véhicule observé s'arrête ?*

2. – *Le véhicule est passé. Quelle est la probabilité qu'il l'ait fait au feu rouge ?*

EXERCICE 3.

On lance deux dés équilibrés. On considère les évènements :
A : « la somme est paire », B : « en additionnant les deux faces, on a obtenu au moins 6 » et C : « on a obtenu un double. »

1. – *Calculer* $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ *et* $P(B \cap C)$

2. – *En déduire* $P_A(B)$, $P_A(C)$, $P_B(A)$, $P_B(C)$, $P_C(A)$ *et* $P_C(B)$.

EXERCICE 4.

Lors d'une longue séance de tirs au but, le gardien arrête le 1er tir avec la probabilité 0,3.
— S'il a arrêté un tir, il arrête le suivant avec la probabilité 0,5 ;
— S'il a pris un but, il arrête le suivant avec la probabilité 0,2.
On admet que tous les tirs sont « cadrés » et l'on note p_n la probabilité que le gardien arrête le n-ième tir ($p_1 = 0,3$).

1. – *À l'aide d'un arbre de probabilités, montrer que, pour tout* $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,3p_n + 0,2$.

2. – *On pose, pour* $n \geqslant 1$, $u_n = p_n - \dfrac{2}{7}$. *Montrer que la suite* (u_n) *est géométrique.*

3. – *En déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. *Interpréter le résultat.*

EXERCICE 5.

Denis le jardinier entretient le jardin de René.
Denis :« deux fois sur trois, si j'arrose le matin, il pleut le soir ! ».
René : « oui, mais quand vous n'arrosez pas le matin, c'est-à-dire trois jours sur quatre, il ne pleut pas le soir quatre fois sur cinq ! ».
Arnaud arrive un soir à l'improviste dans le jardin de René. Quelle est la probabilité qu'il pleuve ?

Planche n° 3 (bis) : Probabilités Conditionnelles

EXERCICE 1.

1. – *Soit A et B deux évènements indépendants. Montrer qu'il en est de même pour :*

a. A et $\bar{B}$ **b.** $\bar{A}$ et B **c.** $\bar{A}$ et $\bar{B}$

2. – *Alfred et Bruno, deux archers tirent simultanément. Les deux évènements A : « Alfred atteint la cible » et B : « Bruno atteint la cible » sont des évènements indépendants de probabilités respectives $\frac{4}{5}$ et $\frac{7}{8}$.*
Calculer la probabilité des évènements :

a. *Alfred et Bruno atteignent tous deux la cible.*

b. *Seul Alfred atteint la cible.*

c. *Aucun des deux n'atteint la cible.*

d. *La cible est atteinte.*

e. *Un seul archer atteint la cible.*

EXERCICE 2.

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie. On choisit un stagiaire au hasard.

	Tennis	Équitation	Voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

1. Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?

2. Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

EXERCICE 3.

Votre voisine a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les événements suivants :
— A="les deux enfants sont de sexes différents"
— B="l'ainé est une fille"
— C="le cadet est un garçon".
Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants. $\big($ie : $p(A \cap B \cap C) \neq p(A) \times p(B) \times p(C)\big)$.

EXERCICE 4.

1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements

$$A = \text{"tirage d'un nombre pair"}, \qquad B = \text{"tirage d'un multiple de 3"}.$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Type Bac : Probabilités Conditionnelles

EXERCICE 1.

Les probabilités seront arrondies au dix millième.

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.

Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans $99,4\%$ des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans $5\,\%$ des cas.

On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.

2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.

3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $0,0192$.

4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

D'après Liban juin 2014.

EXERCICE 2.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} *près*

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent $15\,\%$ de sa production.

Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.

Seulement $10\,\%$ des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que $80\,\%$ des huîtres japonaises le sont.

Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur. On suppose que toutes les huitres ont la même chance d'être choisies.

On considère les évènements suivants :

- J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,
- C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

2. Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.

3. Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est $0,695$.

4. Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

D'après Antilles-Guyane juin 2014.

EXERCICE 3.

Une entreprise produit $40\,\%$ de ballons de football de petite taille et $60\,\%$ de ballons de taille standard.

On admet que $2\,\%$ des ballons de petite taille et $5\,\%$ des ballons de taille standard ne sont pas conformes à la réglementation. On choisit un ballon au hasard dans l'entreprise.

On considère les évènements :

A : « le ballon de football est de petite taille »,

B : « le ballon de football est de taille standard »,

C : « le ballon de football est conforme à la réglementation » et $\overline{C}$, l'évènement contraire de C.

1. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.

2. Calculer la probabilité que le ballon de football soit de petite taille et soit conforme à la règlementation.

3. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à $0,962$.

4. Le ballon de football choisi n'est pas conforme à la réglementation. Quelle est la probabilité que ce ballon soit de petite taille ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

D'après Amérique du Sud novembre 2014.

Planche n°4 : Nombre dérivé et tangente à une courbe

EXERCICE 1.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

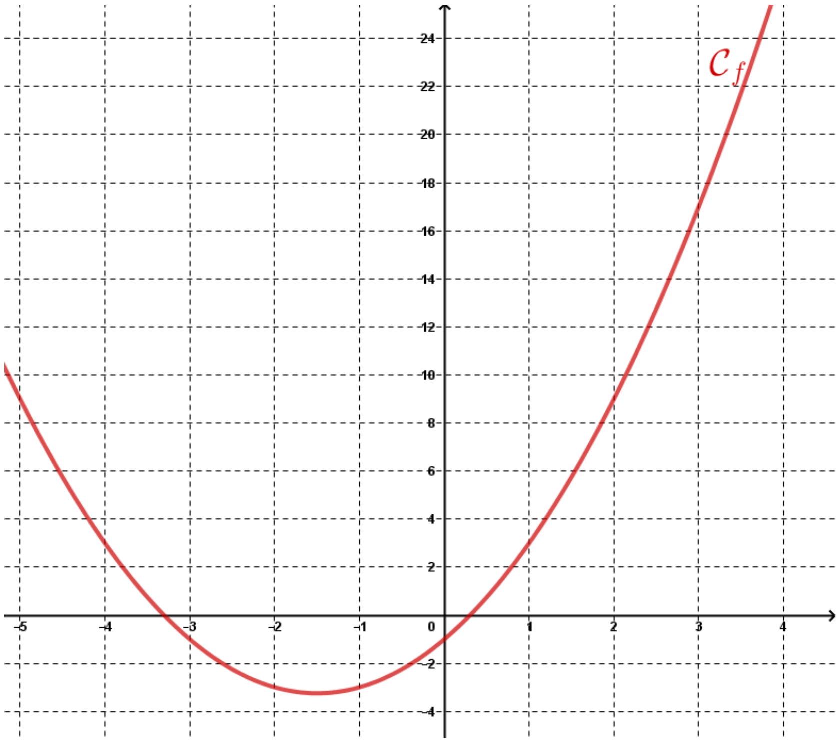
$$f(x) = x^2 + 3x - 1$$

Ci-contre la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. Justifier que f est dérivable en $x = 2$, puis donner la valeur de $f'(2)$.

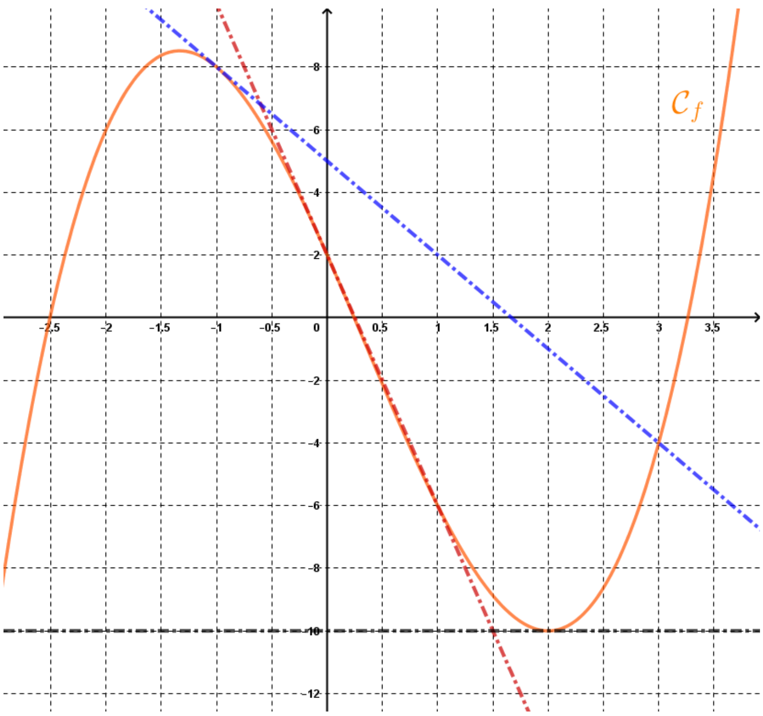
2. Déterminer l'équation de la tangente T_2 à f au point d'abscisse $a = 2$.

3. Dans le repère ci-dessous, tracer la tangente (T_2).



EXERCICE 2.

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe de la fonction f, ainsi que des tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses $a = -1$ $a = 0$ et $a = 2$.



1. Lire graphiquement les données suivantes :

$$f(-1) \qquad f'(-1) \qquad f(0) \qquad f'(0) \qquad f(2) \qquad f'(2)$$

2. Donner les équations des 3 tangentes représentées ci-dessus.

Exercices du livre : ex 19 + 20 + 23 + 24 + 36 + 41 + 42 + 44 + 45 p 119 ; 120 ; 121.

Planche n°4 (bis) : Nombre dérivé et tangente à une courbe

EXERCICE 3.

On dit qu'un corps est en chute libre lorsqu'il est lâché sans vitesse initiale depuis un point et qu'il n'est soumis qu'à son poids (on néglige les frottements de l'air).

Le corps parcourt alors en t secondes une distance que l'on peut approcher par $d(t) = 5t^2$ (mètre).

1. Quelle est la distance parcourue par le corps en chute libre en 10 secondes ?
2. Pour $h \neq 0$, calculer la vitesse moyenne du corps entre les instants $t = 10$ et $t = 10 + h$.
3. On définit la **vitesse instantanée** comme la limite de la vitesse moyenne lorsque h se rapproche de 0. Déterminer la vitesse instantanée du corps à l'instant $t = 10$.
4. Reprendre les questions pour l'instant $t = 5$.

EXERCICE 4.

Une entreprise fabrique des clous. Le coût de fabrication de x clous (x est exprimé en centaines) est modélisé par la fonction C définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$C(x) = 0,3x^2 + x + 1$$

où $C(x)$ est exprimé en centaine d'euros.

1. Calculer le coût de fabrication de 1 000 clous.
2. On appelle **coût marginal** pour q unités produites le coût de fabrication d'une unité supplémentaire. Calculer le coût marginal pour 1 000 clous fabriqués.
   Cela correspond au coût de 1001 unités moins le coût de 1000unités).
3. Démontrer que C est dérivable en 10 et calculer $C'(10)$.
4. Comparer au résultat précédent.

EXERCICE 5.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2x - 1$$

On admet que $f'(0) = -2$, $f'(1) = 0$ et $f'(3) = 4$.

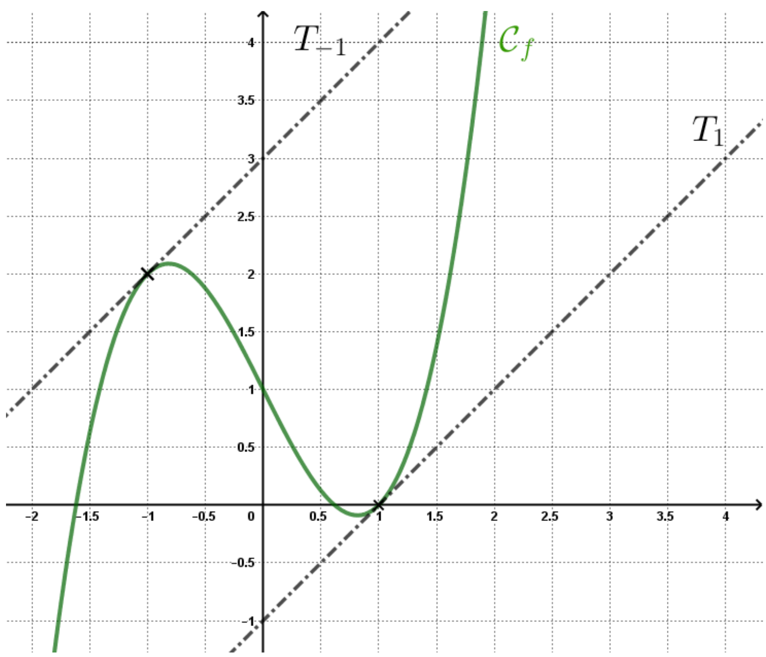
1. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f et construire les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0, 1, et 3.
2. Déterminer graphiquement les équations des tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.
3. Déterminer par le calcul l'équation de la tangente au point d'abscisses 3.

EXERCICE 6.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

On a représenté la courbe de f dans un repère du plan, ainsi que deux tangentes T_{-1} et T_1 aux points d'abscisses respectives -1 et 1.



Quelle conjecture peut-on faire sur les droites T_{-1} et T_1 ?

Démontrer cette conjecture.

Planche n°5 : Trigonométrie

EXERCICE 1.

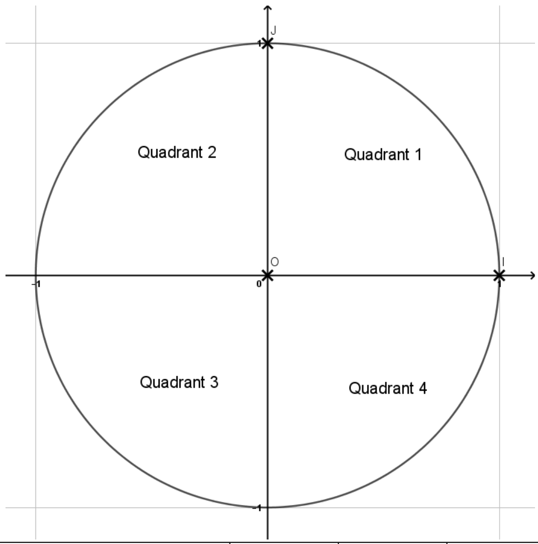
Parmi les valeurs suivantes, quelles sont celles qui repèrent le même point sur le cercle trigonométrique ?

$$\frac{13\pi}{6} \quad \frac{-13\pi}{6} \quad \frac{11\pi}{6} \quad -\frac{11\pi}{6} \quad \frac{25\pi}{6} \quad -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad \frac{-\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{3} \quad -\frac{5\pi}{3} \quad \frac{20\pi}{3} \quad -\frac{25\pi}{3}$$

EXERCICE 2.

On considère le cercle trigonométrique ci-dessous. M est un point image sur le cercle d'un nombre réel x. Compléter le tableau suivant avec le signe de $cos(x)$ et $sin(x)$ en fonction de la position de M sur le cercle.



M est dans le quadrant	1	2	3	4
signe de $cos(x)$				
signe de $sin(x)$				

EXERCICE 3.

Pour chacun des réels suivants, dire dans quel quadrant il se trouvera lors de l'enroulement de la droite numérique. Préciser ensuite, si c'est une valeur remarquable, la valeur de son cosinus et de son sinus.

$$\frac{2\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{-5\pi}{6} \quad \frac{3\pi}{8} \quad \frac{7\pi}{2} \quad 9,5 \quad -\frac{13\pi}{4} \quad \frac{11\pi}{6} \quad -6 \quad \frac{16\pi}{3} \quad \frac{-8\pi}{6} \quad \frac{21\pi}{4}$$

EXERCICE 4.

Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation proposée dans l'ensemble associé.

1. $cos(x) = \frac{1}{2}$

(a.) avec $x \in [0\,;\,\pi]$ **(b.)** avec $x \in [-\frac{\pi}{2}\,;\,0]$ **(c.)** avec $x \in [-\pi\,;\,\pi]$

2. $sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(a.) avec $x \in [0\,;\,\pi]$ **(b.)** avec $x \in [-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}]$ **(c.)** avec $x \in [0\,;\,2\pi]$

3. $cos(x) = 0$

(a.) avec $x \in [0\,;\,\pi]$ **(b.)** avec $x \in [-\pi\,;\,0]$ **(c.)** avec $x \in [0\,;\,2\pi]$

Exercices du livre : chapitre n°7 : ex 20, **24**, **33**, 43, 53, 60, 61, **66**, 67 p193-197.

Planche n°5(bis) : Trigonométrie

EXERCICE 5.

On note f la fonction cosinus, et g la fonction sinus.

1. Déterminer les images par f et par g de $\frac{3\pi}{4}$.

2. Trouver un antécédent de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ par f.

3. Trouver tous les antécédents de 0 par g.

EXERCICE 6.

Comparer, sans calculatrice, les nombres suivants :

$$cos(1) \qquad et \qquad cos(2)$$

$$sin(-1) \qquad et \qquad sin(2)$$

$$cos(\frac{17\pi}{8}) \qquad et \qquad cos(\frac{\pi}{4})$$

EXERCICE 7.

Résoudre les inéquations suivantes dans l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$:

$cos(x) \geqslant 0$ $\qquad$ $sin(x) \leqslant \frac{1}{2}$ $\qquad$ $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $-\frac{\sqrt{2}}{2} < sin(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 8.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(1) \qquad cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \qquad 2sin(x) - 1 = 0$$

$$(3) \qquad \big(2cos(x) - 1\big)\big(sin(x) + 1\big) = 0$$

$$(4) \qquad \big(cos(x) - 1\big)\big(\sqrt{2}\,sin(x) + 1\big) = 0$$

EXERCICE 9.

Résoudre dans $[-\pi\,;\,\pi]$ les inéquations suivantes : (on pourra s'aider d'un tableau de signes)

$$sin(x)cos(x) \leqslant 0$$

$$cos(x)\big(\sqrt{2}sin(x) - 1\big) \geqslant 0$$

$$\big(2sin(x) - \sqrt{3}\big)\big(1 - 2cos(x)\big) > 0$$

Exercices du livre : chapitre n°8 : ex 40, 42, 43, 44, 49, 52, 66, 67, 69 p215-225.

Planche n°6 : Fonction dérivée

EXERCICE 1.

On considère la fonction f définie sur $I = [-3\,;\,2]$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$$

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

2. Dresser le tableau de variations de f sur $[-3\,;\,2]$.

3. Quel est le maximum de f sur I ? Pour quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?

4. Quel est le minimum de f sur I ? Pour quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?

EXERCICE 2.

Un industriel souhaite fabriquer une boite sans couvercle à partir d'une plaque de métal de 18cm de large et 24cm de long. Pour cela, il enlève des carrés dont la longueur du côté mesure x aux quatre coins de la plaque, et il relève ensuite verticalement pour former les côtés de la boîte.

1. On note V la fonction volume de la boite. Quel est l'ensemble de définition de V . Calculer $V(x)$.

2. Pour quelle valeur de x la contenance de la boîte est-elle maximale ?

3. Peut-il construire une boîte dont la contenance est supérieure à $650cm^3$?

EXERCICE 3.

On a modélisé l'évolution d'une épidémie de grippe de la façon suivante : si t est le temps (en jour) écoulé depuis le début de l'épidémie, le nombre de cas en millier est donné par :

$$f(t) = \frac{-1}{6}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 28t$$

1. Combien de malades compte-t-on au bout de 5 jours ? de 20jours ?

2. Donner l'expression de la dérivée $f'(t)$.
On appelle vitesse instantanée d'évolution au cours du temps t le nombre dérivé de la fonction f en t.

3. Déterminer la vitesse instantanée d'évolution de la maladie au début de l'épidémie.

4. Déterminer la vitesse instantanée d'évolution de la maladie à l'instant $t = 3$ jours.

5. Déterminer le nombre de jours pour atteindre le pic de l'épidémie.

6. Quelle est la vitesse d'évolution de la maladie au moment du pic ?

EXERCICE 4.

ABCD est un carré de côté 1. M est un point du segment $[AB]$. On place le point N tel que CN=AM sur la demi-droite $[BC)$. La droite (MN) coupe (CD) en P.
On pose $AM = x$.
Le but de l'exercice est de déterminer la position du point M sur $[AB]$ tel que la distance PC soit maximale.

1. Donner les valeurs de x pour lesquelles la modélisation est possible.

2. Exprimer BM et BN en fonction de x.

3. Montrer que : $PC = \dfrac{-x^2 + x}{x + 1}$.

4. Répondre au problème posé.

Planche n° 8 : Produit scalaire

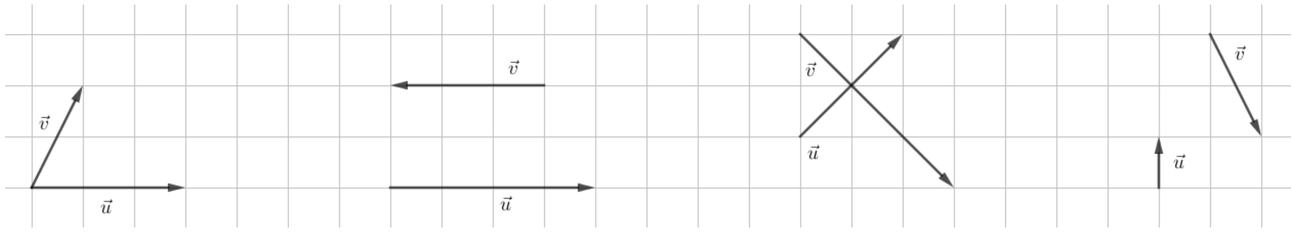
EXERCICE 1.

ABC est un triangle équilatéral de côté 2, et I est le milieu de $[AB]$. Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} \qquad \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$$

EXERCICE 2.

Choisir, dans chacun des cas suivants, l'expression la plus adaptée pour le calcul du produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, puis calculez-le.
Une unité de longueur correspond à un carreau.



EXERCICE 3.

ABCD est un carré de centre O et de côté a. Calculer en fonction de a les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA}$ $\qquad \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$ $\qquad \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AB}$ $\qquad \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$ $\qquad \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BD}$

EXERCICE 4.

ABCD est un carré de côté a. I est le milieu de $[AD]$ et J est le milieu de $[CD]$.

1. En décomposant avec la relation de Chasles, calculer $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI}$
2. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 5.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$.

En utilisant deux expressions du produit scalaire, déterminer la ou les valeurs de x dans chacun des cas suivants :

1. $BAC = \dfrac{\pi}{2}$
2. $BAC = \pi$
3. $BAC = \dfrac{\pi}{4}$

EXERCICE 6.

Dans un repère orthonormé du plan on considère les points

$$M(2\,;\,-2) \qquad N(-3\,;\,1) \qquad P(1\,;\,2)$$

1. Calculer $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.
2. En déduire la valeur exacte de l'angle PMN.

EXERCICE 7.

ABC est un triangle tel que AB=4, AC=6 et BC=7.
Calculer à 0,1° près les trois angles de ce triangle.

Exercices du livre : chapitre 9 : n° 23 à 26, 30, 43, 55, 56 p 243 à 247.

Planche n° 9 : Variables aléatoires réelles

EXERCICE 1.

La roue de la fortune!
Le jeu est simple, dans une partie, on fait tourner la roue de loterie ci-contre deux fois de suite, et on gagne à chaque étape le nombre de m&m's indiqué par la flèche rouge.

Combien peut-on espérer gagner en moyenne de m&m's par partie, si on joue un très grand nombre de partie ?

Indications : faire un arbre de probabilité modélisant le nombre de bonbons gagnés après les deux lancers de roue. Définir la variable aléatoire X représentant le nombre de bonbons gagnés après les deux parties. Déterminer la loi de X puis conclure.

EXERCICE 2.

À la boulangerie, Julie demande à la boulangère de choisir au hasard deux beignets. Il y a six beignets à la pomme, cinq beignets choco-noisette et neuf beignets fruits rouges.

On note B la variable aléatoire égale au nombre de beignets à la pomme choisis.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire B ?

2. Calculer $P(B = 2)$.

3. Calculer $P(B = 1)$.

4. Calculer $P(B \leqslant 1)$.

EXERCICE 3.

Le nombre de caisses en service à midi dans un supermarché donné est une variable aléatoire prenant les valeurs 1 2 3 4.
Elle vaut :

- 1 avec la probabilité $0,2$;
- 2 avec la probabilité $0,3$;
- 3 avec la probabilité $0,25$;

1. Calculer la probabilité que 4 caisses soient en service à midi dans ce supermarché.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 2 caisses en service à midi dans ce supermarché.

EXERCICE 4.

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée, et on note les résultats obtenus. Par exemple, (Face ; Face ; Pile) se note FFP.

1. Représenter cette expérience par un arbre de probabilité pondéré.

2. Déterminer la probabilité pour que le troisième lancer de la pièce donne « Face »

3. À chaque tirage, on associe 20 points pour « Pile » , et 10 points pour « Face » . On note Y la somme des points obtenus.
Donner la loi de probabilité de Y, et calculer son espérance. Interpréter cette valeur.

Exercices du livre : QCM p 315 ; 46 p 323 ; 48 p 323 ; 53 p 325 ; 58 p 325 ; 71 p 327 ; 78 p 328 ; 82 p 329

Planche n° 10 : Orthogonalité, configurations géométriques

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

EXERCICE 1.

Soit (d) la droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par $A(4;3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de (d).

2. Déterminer une équation cartésienne de (d'), parallèle à (d) et passant par $B(2;-1)$.

3. Déterminer une équation cartésienne de (d'), perpendiculaire à (d) et passant par A.

EXERCICE 2.

Soit Δ une droite du plan.
On considère le point $A(2;-3)$ et on note H le projeté orthogonal de A sur la droite Δ.
Calculer les coordonnées de H dans les cas suivants :

1. $\Delta : x = 1$

2. $\Delta : y = -1$

3. $\Delta : 2x - 3y = 0$

Indication : on pourra considérer $H(x_H; y_H)$ appartenant à Δ. En utilisant un vecteur normal $\vec{n}$ à Δ, on déterminera les coordonnées de H afin que $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ soient .....

EXERCICE 3.

On considère les points $B(4;-1)$ et $C(2;7)$.

1. Calculer les coordonnées de I milieu de $[BC]$.

2. Soit (d) la droite d'équation $d : 4x + y - 5 = 0$.
Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ à (d).

3. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{n}$ sont-ils colinéaires ?

4. La droite d est-elle la médiatrice de $[BC]$?

Rappel : la médiatrice d'un segment est la droite passant par le milieu du segment, et perpendiculaire au segment.

EXERCICE 4.

Soit deux points $A(1;2)$ et $B(-2;-3)$.

1. Déterminer une équation du cercle de centre A et de rayon 3.

2. Déterminer une équation du cercle de ventre $I(5;-3)$ et passant par A.

3. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

EXERCICE 5.

On considère les paraboles d'équation respective

$$\mathcal{P}_1 : y = x^2 + 2x + 1 \qquad\qquad \mathcal{P}_2 : y = -2x^2 + 4x - 3$$

1. Calculer les coordonnées du sommet de chacune des paraboles.

2. En déduire le nombre de points d'intersection entre chaque parabole et l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de ces points d'intersection éventuels.

Planche n° 10 (bis) : Orthogonalité, configurations géométriques

EXERCICE 1.

On considère les points $A(-4\,;\,-2)$, $B(2\,;\,-3)$ et $C(1\,;\,4)$.
Les points $D(0\,;\,-2)$, $E(0.5\,;\,1)$ et $F(2\,;\,7)$ appartiennent-ils à la hauteur issue de C dans le triangle ABC ?

Rappel : dans un triangle, la hauteur issue d'un sommet est la droite passant par ce sommet, et perpendiculaire au côté opposé.

EXERCICE 2.

On se place dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé du plan. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(2\,;\,-3)$ et de rayon 2, et la droite d'équation cartésienne $d:\ x+4y+5=0$

1. Quel est le nombre possible de points d'intersection entre le cercle et la droite ?
2. Donner l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.
3. Soit $M(x\,;\,y)$ point d'intersection de $\mathcal{C}$ et (d). Que vérifient les coordonnées de M ?
4. Démontrer qu'il y a exactement deux points d'intersection, et donner les coordonnées de ces points d'intersection.

EXERCICE 3.

On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation : $x^2+2x+y^2-2y-7=0$.

1. Le cercle $\mathcal{C}$ coupe la droite d'équation $x=1$ en deux points A et B.
   Calculer les coordonnées de ces points.
2. Le cercle $\mathcal{C}$ coupe la droite d'équation $y=2$ en deux points C et D.
   Calculer les coordonnées de ces points.
3. Sur un logiciel de géométrie dynamique, tracer le cercle $\mathcal{C}$ et placer les points A, B, C et D. Vérifier les résultats obtenus.

Logiciel de géométrie dynamique : vous pouvez utiliser le logiciel gratuit Geogebra. Il dispose également d'une version en ligne sur le site de géogebra, ou bien cliquez ici .

EXERCICE 4.

On considère le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 5x+\dfrac{2}{3}y-1=0 \\ \dfrac{-3}{2}x-\dfrac{1}{5}y+4=0 \end{cases}$$

On nomme $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $5x+\dfrac{2}{3}y-1=0$ et $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $\dfrac{-3}{2}x-\dfrac{1}{5}y+4=0$.

1. Déterminer un vecteur normal à chacun de ces deux droites.
2. En déduire la position relative et discuter du nombre possible de solutions au système précédent.
3. Quel est l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de ce système ?

(**Discuter de la position relative** de deux objets géométriques, c'est déterminer la position de l'un par rapport à l'autre (au dessus, en dessous), donner leur éventuelle intersection.)

EXERCICE 5.

Soit $A(0;0)$, $B(5;6)$, $C(-1;5)$ trois points du plan.

1. Justifier qu'une équation cartésienne de la hauteur issue de C est : $5x+6y-25=0$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B.
3. En déduire les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC.
4. Vérifier ces résultats à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Rappel : dans un triangle, l'**orthocentre** est le point d'intersection des 3 hauteurs.

Planche n° 11 : Fonction exponentielle

EXERCICE 1.

Simplifier les expressions suivantes :

a. $e^{2x} \times e^{-3x+1}$ **b.** $\dfrac{e^{x^2+1}}{\left(e^{x+1}\right)^2}$ **c.** $\dfrac{\left(e^x\right)^2}{e}$ **d.** $\dfrac{\left(e^2\right)^5}{e^9}$ **e.** $\dfrac{1+e^{2x}}{1-e^x} + \dfrac{e^{-x}+e^x}{1-e^{-x}}$

Réponses :

a. e^{1-x} **b.** e^{x^2-2x-1} **c.** e^{2x-1} **d.** $e^1 = e$ **e.** 0

EXERCICE 2.

Dériver et dresser le tableau de variation des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

a. $f(x) = xe^x$ **b.** $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$ **c.** $h(x) = x+1+xe^{-x}$ et $\mathcal{D}_h = [0\,;1]$

$f'(x) = (x+1)e^x$ $g'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$ $h'(x) = 1+(1-x)e^{-x}$ et $\mathcal{D}_h = [0\,;1]$

EXERCICE 3.

Dériver et déterminer les variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

a. $f(x) = e^{4x+1}$ **b.** $g(x) = 1+2e^{-x}$ **c.** $h(x) = 3x\,e^{2x+1}$ **d.** $k(x) = (x-4)e^{-0.25x+5}$

$f'(x) = 4e^{4x+1}$ $g'(x) = -2e^{-x}$ $h'(x) = (6x+3)e^{2x+1}$ $k'(x) = (2-0,25x)e^{-0.25x+5}$

EXERCICE 4.

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $f(x) = \left(e^x+e^{-x}\right)^2 - e^x\left(e^x+e^{-3x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2$.

2. Montrer que pour tout x réel :

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

EXERCICE 5.

Pour tout réel x, on pose :

$$ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad et \qquad sh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

1. Démontrer que pour tout réel x :

$$\left(ch(x)\right)^2 - \left(sh(x)\right)^2 = 1$$

2. Démontrer que pour tout réel x :

$$ch(2x) = 2\left(ch(x)\right)^2 - 1 \qquad et \qquad sh(2x) = 2ch(x)sh(x)$$

3. Les fonctions ch et sh sont-elles paires ? impaires ?

4. Calculer, pour tout réel x, les fonctions dérivées de sh et ch.

5. Étudier les variations des fonctions sh et ch sur leur ensemble de définition.

La fonction ch s'appelle **cosinus hyperbolique**, et la fonction sh s'appelle **sinus hyperbolique**. On retrouve ici des propriétés similaires aux fonctions cosinus et sinus trigonométriques.

Exercices dans le livre : suivre le parcours 2 (orange) p 172 à 177 : n° 53 - 61 - 74 - 86 - 93 - 96 - 103.