有限体積法を高速化するための 領域特化言語の C++への埋め込み

Design of an embedded domain-specific language for accelerating finite volume method with Boost.Proto

伊藤 正勝

Masakatsu Ito

演算子 $d^2/dx^2 - s\,\hat{Id}$ を離散化して行列で表現するためのプログラミング

$$k\,\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{dx} - s\,\hat{Id}$$

一次元熱伝導問題の解き方

$$k\frac{d^2}{dx^2}T(x) - s\,(T(x) - T_\infty) = 0$$

をグリッド内の検査体積 Δx ごとに

$$\int_{\Delta x_i}\left(k\frac{d^2}{dx^2}T(x) - s\,T(x)\right)dx = -\int_{\Delta x_i} s\,T_\infty dx$$

のように離散化して、連立方程式

$$\frac{k}{\Delta x}T_{i-1} - \frac{2k}{\Delta x}T_i + \frac{k}{\Delta x}T_{i+1} + s\Delta x\,T_i = -s\,T_\infty\Delta x$$

$$\begin{aligned}\frac{k}{\Delta x}T_{i-1} - \frac{2k}{\Delta x}T_i + \frac{k}{\Delta x}T_{i+1} && (1)\\ +s\Delta x\,T_i = -s\,T_\infty\Delta x && (2)\\ && (3)\end{aligned}$$

を得る。

境界条件を満たすように、連立方程式を修正して、反復法で解く。

拡散方程式

グリッド内の検査体積 ΔV、その境界面 ΔA ごとに積分

$$\int_{\Delta A}\nabla\cdot(k\,\nabla T)\,dA + \int_{\Delta V} S_T\,dV = 0$$

$$\begin{aligned}\int_{\Delta A}\nabla\cdot(k\,\nabla T)\,dA && (4)\\ +\int_{\Delta V} S_T\,dV \quad = 0 && (5)\\ && (6)\end{aligned}$$

$$C\,\mathbf{t} = \mathbf{b}$$

有限体積法テンプレートで解く場合

グリッド オブジェクト

検査体積 Δx_i 、 境界条件 $T(0) = T_B, dT(L)/dx = 0$

グリッド オブジェクト が離散化を 行う。

演算子 $k\, d^2/dx^2 - s\, \hat{Id}$ $\rightarrow$ 行列 C

定数項 $-s\, T_\infty \rightarrow$ ベクト ル $\mathbf{b}$

意味論モデルで数式テンプレート を 行列、ベクト ルに変換

反復解法ソルバで、行列方程式 $C\mathbf{t} = \mathbf{b}$ を 解いて、温度分布 $\mathbf{t}$ を 得る。意味論モデルで行列、ベクト ルの数式を、配列要素計算コード に 変換

演算子から 行列へ

$$k\frac{d^2}{dx^2} \rightarrow k\begin{pmatrix} \ddots & 1/\Delta x & & & \\ 1/\Delta x & -2/\Delta x & 1/\Delta x & & \\ & 1/\Delta x & -2/\Delta x & 1/\Delta x & \\ & & 1/\Delta x & -2/\Delta x & 1/\Delta x \\ & & & 1/\Delta x & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \rightarrow \begin{pmatrix} \ddots & 1/\Delta x & & & \\ 1/\Delta x & -2/\Delta x & 1/\Delta x & & \\ & 1/\Delta x & -2/\Delta x & 1/\Delta x & \\ & & 1/\Delta x & -2/\Delta x & 1/\Delta x \\ & & & 1/\Delta x & \ddots \end{pmatrix}$$

微分方程式の演算子部分

$$k\,\frac{d^2}{dx^2} - s\,\hat{Id}$$

移流拡散問題

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma\, \nabla \phi) + S_\phi$$

をグリッド 内の検査体積 ΔV、その境界面 ΔA ごとに

$$\int_{\Delta A} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u} \phi)\, dA = \int_{\Delta A} \mathbf{n} \cdot (\Gamma\, \nabla \phi)\, dA + \int_{\Delta V} S_\phi\, dV$$