ゆっくり熱力学の基礎していってね

仲山昌人

概要

熱力学の基礎を読んだときのメモです

目次

第 1 章

P.7 Dx+f(a)=f'(a+0) '25 3.22

$f(x)$が$[a,a,\epsilon']$で連続, $(a+a+\epsilon')$で微分可能とする

$f'(a+0)=\lim_{\epsilon\to+0}f'(a+\epsilon)$が存在するならば

$D_x^+f(a)$が存在し$D_x^+f(a)=f'(a+0)$である

(証明)

$[a,a+\epsilon']$ で連続,$(a,a+\epsilon')$ で微分可能なので

平均値の定理より $\dfrac{f(a+\epsilon')-f(a)}{\epsilon'}=f'(a+\epsilon),\ 0<\epsilon<\epsilon'$ なる ϵ が存在する

ϵ' に対する ϵ を 1 つ選んで $\epsilon(\epsilon')$ とする

$f'(a+0)=\lim\limits_{\epsilon\to+0}f'(a+\epsilon)$ が存在するので

任意の $\delta>0$ に対してある ϵ_1 が存在して

$0<\epsilon<\epsilon_1$ ならば $|f'(a+\epsilon)-f'(a+0)|<\delta$ である

$0<\epsilon'<\epsilon_1$ ならば $0<\epsilon(\epsilon')<\epsilon'$ なので $0<\epsilon(\epsilon')<\epsilon_1$

よって $|f'(a+\epsilon(\epsilon'))-f'(a+0)|<\delta$ である

$\dfrac{f(a+\epsilon')-f(a)}{\epsilon'}=f'(a+\epsilon(eps'))$ なので

$0<\epsilon'<\epsilon_1$ ならば $\left|\dfrac{f(a+\epsilon')-f(a)}{\epsilon'}-f'(a+0)\right|<\delta$ である

$\therefore\ \lim\limits_{\epsilon'\to+0}\dfrac{f(a+\epsilon')-f(a)}{\epsilon'}=f'(a+0)$ である ($\because$ 極限の定義)

$\lim\limits_{\epsilon'\to+0}\dfrac{f(a+\epsilon')-f(a)}{\epsilon'}=D_x^+(a)$ なので

$D_x^+(a)=f'(a+0)$である

P.8 (1.2) f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a) '25 3.21

$f(x)$が$x=a$で微分可能 $\rightleftarrows$ $x \to a$で$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$なる$f'(a)$が存在する

(証明)

$(\leftarrow)$

$o(x-a)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ ($\because$ $f=g+o(\dots) \rightleftarrows o(\dots)=f-g$と定義)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}=0$ ($\because$ 付録A $o(\dots)$の定義)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right)=0$

よって任意の $\epsilon>0$ に対して $0<|x-a|<\delta$ ならば

$\displaystyle\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|<\epsilon$

よって $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ ($\because$ 極限の定義)

よって $f(x)$ は $x=a$ で微分可能 ($\because$ 微分の定義)

$(\rightarrow)$

$x=a$ で微分可能なので

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ が存在する ($\because$ 微分の定義)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\lim_{x\to a}f'(a)$ ($\because$ 定数の極限)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}f'(a)=0$ ($\because$ 実数の四則の公理)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right)=0$ ($\because$ 差の極限)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}\right)=0$ ($\because$ 実数の四則の公理)

$\therefore o(x-a)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ ($\because$ 付録A $o(\dots)$の定義)

$\therefore f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$ ($\because$ $f-g=o(\dots) \rightleftarrows f=g+o(\dots)$と定義する)

よって $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$ なる $f'(a)$ が存在する

P.10 問 1.3 (x,y) ≠ (0,0) で f は連続 '25 5.13

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f は連続

(証明)

任意の ϵ に対して

$|(x,y)-(a,b)| < \epsilon$ ならば

$|x-a| < |(x,y)-(a,b)|$ (∵ 三角不等式)
$= \epsilon$

よって $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$

よって x は連続

同様に y は連続

よって

xy は連続 (∗1)

x^2 は連続 (∗1)

y^2 は連続 (∗1)

x^2-y^2 は連続 (∗1),(∗2)

x^2+y^2 は連続 (∗2)

$(x,y) \neq (0,0)$ ならば $x^2+y^2 \neq 0$

よって $(x,y) \neq (0,0)$ ならば

$\dfrac{1}{x^2+y^2}$ は連続 (∗3)

よって $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は連続 (∗2)

また $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

よって $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $f(x,y)$ は連続

(∗1) fが連続, gが連続ならばfgは連続

(証明)

(a,b)でf, gが連続ならば

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = g(a,b)$

$\therefore \lim fg = f(a,b)g(a,b)$ (∵ 積の極限)

よってfgは連続

(∗2) fが連続, gが連続ならば$f+g$は連続

(証明)

(a,b)でf,gが連続ならば

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b),\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=g(a,b)$

$\therefore\ \lim f+g=f(a,b)+g(a,b)$ ($\because$ 和の極限)

よって$f+g$は連続

(*3)fが連続かつ$f\neq 0$ならば$\dfrac{1}{f}$は連続

(証明)

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b),\ f(a,b)\neq 0$

$\therefore\ \lim \dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{f(a,b)}$ ($\because$ 商の極限)

よって$\dfrac{1}{f}$は連続

P.10 問 1.3 (0,0) で f は連続 '25 3.26

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$(x,y)=(0,0)$ で f は連続

(証明)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

また　$(x,y)\neq(0,0)$で$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$は有界　$(*1)$

よって$\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|<m$なる$m$が存在する

また $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy=0$　($\because$ 積の極限)

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$　$(*2)$

よって$f(x,y)$は$(0,0)$で連続

$(*1)$ $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$が有界でないと仮定する

任意の$m>0$に対して$\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|>m$なる$(x,y)$が存在する

$\therefore\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}<-m\ or\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}>m$

$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}>m$とすると$0>(m-1)x^2+(m+1)y^2$

$m=1$とすると$0>2y^2$となり矛盾

$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}<m$とすると$x^2(1-m)-y^2(1-m)<0$

$m=1$とすると$0<0$となり矛盾

よって$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$は有界

$(*2)$ $f(x,y)$が有界$,\lim g=0$ならば$\lim fg=0$

(証明)

$|f|<m$なるmが存在する

任意の$\epsilon>0$に対して、ある$\delta>0$があって

$|(x,y)|<\delta$ならば$|g|<\epsilon$

$\therefore\ |f||g|<|f|\epsilon$

$\epsilon|f|<\epsilon m$なので

$|f||g|<\epsilon m$

$\therefore\ |fg|<\epsilon m$

任意の$\epsilon'>0$に対して$\epsilon'=\epsilon m$とすると

$|(x,y)|<\delta$ならば$|fg|<\epsilon'$

$\therefore\ lim fg=0$

P.10 問 1.3 (x,y) ≠ (0,0) で fx は存在する '25 5.13

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$(x,y)\neq(0,0)$ で f_x は存在する

(証明)

$(x,y)\neq(0,0)$ とする

このとき $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

x,y は独立とする

$$\begin{aligned} f_x &= \underset{x\text{で微分}}{f'} \qquad \color{red}{(*1)} \\ &= (xy)'\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)' \qquad (\because \text{積の微分}) \\ &= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{(x^2-y^2)'(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} \qquad (\because x^2+y^2\neq 0\text{なので商の微分より}) \\ &= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{yx^4+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

よって $(x,y)\neq(0,0)$ で f_x は存在する $(\because$ 公理 : f_xは存在 $\rightleftarrows f_x\in R)$

$\color{red}{(*1)}f', f_x$の定義より

$$\underset{x\text{で微分}}{f'(x,y)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=f_x(x,y)$$

よってf'が存在するならば$f'=f_x$

P.10 問 1.3 (x,y) ≠ (0,0) で fx は連続 '25 5.13

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$(x,y)\neq(0,0)$ で f_x は連続

(証明)

$(x,y)\neq(0,0)$ とする

$f_x(x,y)=\dfrac{yx^4+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$ （別頁 ）

$(a,b)\neq(0,0)$ とする

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{yx^4+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}=\frac{ba^4+4a^2b^3-b^5}{(a^2+b^2)^2}$ $(\because\ (a^2+b^2)^2\neq 0$ なので和、積、商の極限、また $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} x=a(*1))$

よって任意の ϵ に対して $|(x,y)-(a,b)|<\delta$ ならば

$\left|\dfrac{yx^4+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}-\dfrac{ba^4+4a^2b^3-b^5}{(a^2+b^2)^2}\right|<\epsilon$

また $0<\delta'<|(a,b)|$ とすると

$|(x,y)-(a,b)|<\delta'$ ならば $(x,y)\neq(0,0)$ である

$\therefore\ f_x(x,y)=\dfrac{yx^4+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$

よって $|(x,y)-(a,b)|<min(\delta,\delta')$ ならば

$\left|f_x(x,y)-\dfrac{ba^4+4a^2b^3-b^5}{(a^2+b^2)^2}\right|<\epsilon$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_x(x,y)=\frac{ba^4+4a^2b^3-b^5}{(a^2+b^2)^2}=f_x(a,b)$

よって $f_x(x,y)$は$(a,b)\neq(0,0)$ で連続である

$(*1)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} x=a$

(証明)

任意のϵに対して

$|(x,y)-(a,b)|<\epsilon$ならば

$|x-a|<|(x,y)-(a,b)|<\epsilon$ $(\because$ 三角不等式$)$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} x=a$

P.10 問 1.3 (0,0) で fx は連続 '25 3.26

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$(x,y)=(0,0)$ で f_x は連続

(証明)

$(x,y)\neq(0,0)$ で

f_x は 別頁 より

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{yx^4+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} \\ &= y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4} \end{aligned}$$

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界 $(*1)$ かつ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y=0$

よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}=0$ $(*2)$

また f は $(0,0)$ で連続 （別頁 ）

よって $(0,0)$ で f_x は存在して

$f_x(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=0$ ($\because$ 本文(1.5), (1.6)より)

よって $(0,0)$ で f_x は連続

$(*1)$ $\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界

(証明)

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界でないと仮定する

任意の$m>0$に対して $\left|\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right|>m$

$\therefore \dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}<-m$ または $m<\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ である

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}<-m$ とすると

$x^4+4x^2y^2-y^4<-m(x^4+2x^2y^2+y^4)$

$\therefore (1+m)x^4+(4+2m)x^2y^2+(m-1)y^4<0$

$m=1$ とすると $2x^4+6x^2y^2<0$

これは矛盾

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}>m$ とすると

$x^4+4x^2y^2-y^4>m(x^4+2x^2y^2+y^4)$

$0>(m-1)x^4+(2m-4)x^2y^2+(m-1)y^4$

$m=2$ とすると $0>x^4+y^4$

これは矛盾

よって $\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界

$(*2)$ $f(x,y)$は有界, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g = 0$ならば$\lim fg = 0$

(証明)

$|f(x,y)| < m$である

また任意のϵに対して$|(x,y)| < \delta$ならば$|g(x,y)| < \epsilon$

$\therefore\ |f||g| < |f|\epsilon, |f|\epsilon < m\epsilon$

$\therefore\ |f||g| < m\epsilon$

$\therefore\ |fg| < m\epsilon$

任意のϵ'に対して$\epsilon' = m\epsilon$とすると

$|(x,y)| < \delta$ならば$|fg| < \epsilon'$

$\therefore\ \lim fg = 0$

P.10 問 1.3 (x,y) ≠ (0,0) で fy は存在する '25 5.13

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$(x,y)\neq(0,0)$ で f_y は存在する

(証明)

$(x,y)\neq(0,0)$ とする

このとき $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

x, y は独立とする

$$\begin{aligned} f_y &= \underset{y\text{で微分}}{f'} \quad \color{red}{(*1)} \\ &= (xy)'\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)' \quad (\because \text{積の微分}) \\ &= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{(x^2-y^2)'(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} \quad (\because x^2+y^2\neq 0\text{なので商の微分より}) \\ &= \frac{x^5-4y^2x^3-4xy^4}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

よって $(x,y)\neq(0,0)$ で f_y は存在する　($\because$ 公理 : f_yは存在 $\rightleftarrows f_y\in R$)

$\color{red}{(*1)}f', f_y$の定義より

$$\underset{y\text{で微分}}{f'}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=f_y(x,y)$$

よってf'が存在するならば$f'=f_y$

P.10 問 1.3 (x,y) ≠ (0,0) で fy は連続 '25 5.15

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は連続

(証明)

$(x,y) \neq (0,0)$ とする

$f_y(x,y) = \dfrac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ (別頁)

$(a,b) \neq (0,0)$ とする

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2+b^2)^2}$ ($\because$ $(a^2+b^2)^2 \neq 0$ なので和、積、商の極限、また $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$)

よって任意の ϵ に対して $|(x,y)-(a,b)| < \delta$ ならば

$\left| \dfrac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2+b^2)^2} \right| < \epsilon$

また $0 < \delta' < |(a,b)|$ とすると

$|(x,y)-(a,b)| < \delta'$ ならば $(x,y) \neq (0,0)$ である

$\therefore$ $f_y(x,y) = \dfrac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

よって $|(x,y)-(a,b)| < min(\delta, \delta')$ ならば

$\left| f_y(x,y) - \dfrac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2+b^2)^2} \right| < \epsilon$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_y(x,y) = \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2+b^2)^2} = f_y(a,b)$

よって $f_y(x,y)$は$(a,b) \neq (0,0)$ で連続である

P.10 問 1.3 (0,0) で fy は連続 '25 3.26

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$(x,y)=(0,0)$ で f_y は連続

(証明)

$(x,y)\neq(0,0)$ で

f_y は 別頁 より

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \frac{x^5-4y^2x^3-4xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ &= x\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4} \end{aligned}$$

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界 $(*1)$ かつ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x=0$

よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}=0$ $(*2)$

また f は $(0,0)$ で連続 (別頁)

よって $(0,0)$ で f_y は存在して

$f_y(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)=0$ ($\because$ 本文(1.5), (1.6)より)

よって $(0,0)$ で f_y は連続

$(*1)$ $\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界

(証明)

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界でないと仮定する

任意の$m>0$に対して $\left|\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right|>m$

$\therefore$ $\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}<-m$または$m<\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$である

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}<-m$とすると

$x^4-4x^2y^2-y^4<-m(x^4+2x^2y^2+y^4)$

$\therefore$ $(1+m)x^4+(-4+2m)x^2y^2+(m-1)y^4<0$

$m=1$とすると$2x^4<0$

これは矛盾

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}>m$とすると

$x^4-4x^2y^2-y^4>m(x^4+2x^2y^2+y^4)$

$0>(m-1)x^4+(2m+4)x^2y^2+(m+1)y^4$

$m=1$とすると$0>8x^2y^2+2y^4$

これは矛盾

よって$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$は有界

$(*2)$ $f(x,y)$は有界, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g = 0$ならば$\lim fg = 0$

P.10 問 1.3 (0,0) で fxy は不連続 '25 4.1

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$(x,y)=(0,0)$ で f_{xy} は不連続

(証明)

$(x,y)\neq(0,0)$ とする

$f_x=\dfrac{yx^4+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$ (別頁)

よって

$$\begin{aligned} f_{xy}&=\frac{(yx^4+4x^2y^3-y^5)'(x^2+y^2)^2-(yx^4+4x^2y^3-y^5)((x^2+y^2)^2)'}{(x^2+y^2)^4} \quad (*1) \\ &=\frac{x^8+10x^6y^2-10x^2y^6-y^8}{(x^2+y^2)^4} \end{aligned}$$

$(*1)$ x,y は独立なので $f_{xy}=\underset{y\text{で微分}}{f_x'}$

また $(x^2+y^2)^2\neq0$ なので和、積、商の微分公式より

経路 $\begin{cases} x=0 \\ y=y \end{cases}$ に沿った $(x,y)\to(0,0)$ の極限は $\displaystyle\lim_{y\to0}f_{xy}(0,y)=\lim_{y\to0}-1=-1$

経路 $\begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases}$ に沿った $(x,y)\to(0,0)$ の極限は $\displaystyle\lim_{x\to0}f_{xy}(x,0)=\lim_{x\to0}1=1$

経路によって極限が異なるので f_{xy} の $(x,y)\to(0,0)$ の極限は存在しない

よって $(0,0)$ で f_{xy} は連続ではない

P.11 数学の定理 1.1 f(x1,..,xm)-f(a1,..,xm)-(x1-a1)fx1(a)=o(|x-a|) '25 4.6

fは$\vec{a}$ の近傍で連続的微分可能ならば

$\vec{x} \to \vec{a}$ で $f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1) f_{x_1}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$ である

(証明)

$x_1, \dots, x_m$ は独立で fは$\vec{a}$ の近傍で連続的微分可能なので

$(a_1, \dots, x_m)$ が $\vec{a}$ の近傍ならば

f は区間 $[a_1, x_1]$ で連続､区間 (a_1, x_1) で x_1 で微分可能

よって平均値の定理より

$\dfrac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m)}{x_1 - a_1} = f'(a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m),\ 0 < k < 1$ なる $k(x_2, \dots, x_m)$ が存在する

$x_1, \dots, x_m$ は独立なので $f_{x_1} = \underset{x_1\text{で微分}}{f'}$

よって $\dfrac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m)}{x_1 - a_1} = f_{x_1}(a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m) \dots (1)$

また f_{x_1} は $\vec{a}$ で連続なので

$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f_{x_1}(\vec{x}) = f_{x_1}(\vec{a})$

よって任意の δ に対して

$|\vec{x} - \vec{a}| < \epsilon$ ならば $|f_{x_1}(\vec{x}) - f_{x_1}(\vec{a})| < \delta$ なる ϵ が存在する

$\vec{x}' = (a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m)$ とする

$$
\begin{aligned}
|\vec{x}' - \vec{a}| &= \sqrt{(a_1 + k(x_1 - a_1) - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} \\
&= \sqrt{k^2 (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} \\
&< |\vec{x} - \vec{a}| \quad (*1)
\end{aligned}
$$

$(*1)$ $k = k(x_2, \dots, x_m)$であるが
$0 < k < 1$なので
$k^2 (x_1 - a_1)^2 < (x_1 - a_1)^2$

よって $|\vec{x}' - \vec{a}| < \epsilon$ なので $|f_{x_1}(\vec{x}') - f_{x_1}(\vec{a})| < \delta$

$\therefore\ \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f_{x_1}(\vec{x}') = f_{x_1}(\vec{a})$

$\therefore\ \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f_{x_1}(a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m) = f_{x_1}(\vec{a})$

$\therefore\ \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \dfrac{f_{x_1}(\vec{x}) - f_{x_1}(a_1, \dots, x_m)}{x_1 - a_1} = f_{x_1}(\vec{a}) \quad (\because (1))$

$\therefore\ \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \dfrac{f_{x_1}(\vec{x}) - f_{x_1}(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1) f_{x_1}(\vec{a})}{x_1 - a_1} = 0$ ($\because$ $\lim c = c$, 和の極限)

よって任意の δ に対して

$|\vec{x} - \vec{a}| < \epsilon$ ならば $\left| \dfrac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1) f_{x_1}(\vec{a})}{x_1 - a_1} \right| < \delta$

また $|\vec{x} - \vec{a}| \geq |x_1 - a_1|$ ($\because$ 三角不等式) なので

$$\left|\frac{f(\vec{x})-f(a_1,\ldots,x_m)-(x_1-a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{|\vec{x}-\vec{a}|}\right| \leq \left|\frac{f(\vec{x})-f(a_1,\ldots,x_m)-(x_1-a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{x_1-a_1}\right| < \delta$$

よって

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\left|\frac{f(\vec{x})-f(a_1,\ldots,x_m)-(x_1-a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{|\vec{x}-\vec{a}|}\right| = 0$$

よって $\vec{x}\to\vec{a}$ で

$$f(\vec{x})-f(a_1,\ldots,x_m)-(x_1-a_1)f_{x_1}(\vec{a}) = o(|\vec{x}-\vec{a}|)$$

(注) $\lim_{x_1\to a_1}\dfrac{f(\vec{x})-f(a_1,..,x_m)}{(x_1-a_1)} = f_{x_1}(a_1,..,x_m)$ $(*)$
から始めると $\lim_{x_1\to a_1}$ を $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}$ に変換できなくて失敗する
平均値の定理を利用するとうまく $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}$ を導ける
平均値の定理は$\vec{a}$近傍でのfの連続性と微分可能性を利用できるが
$(*)$から始めると$\vec{a}$での連続性と微分可能性しか
利用できないからだと思われる

P.11 数学の定理 1.1 f(a1,x2..xm)-f(a1,a2..xm)-(x2-a2)fx2(a)=o(|x-a|) '25 5.17

fは$\vec{a}$ の近傍で連続的微分可能ならば

$\vec{x} \to \vec{a}$ で $f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$ である

(証明)

x_1 の場合 (別頁) と同様に

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(x_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0$$

である

$$g(x_1, \dots, x_m) = \frac{f(\vec{x}) - f(x_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|}$$

とする

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} |g(x_1, \dots, x_m)| = 0$$

なので

任意の $\epsilon > 0$ に対して $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ ならば $|g(x_1, \dots, x_m)| < \epsilon$ である

ここで

$$\begin{aligned} |(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}| &\leq |\vec{x} - \vec{a}| \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \delta \end{aligned}$$

なので $|g(a_1, x_2, \dots, x_m)| < \epsilon$ である

$$\therefore \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} |g(a_1, x_2, \dots, x_m)| = 0$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a})}{|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}|} \right| = 0$$

ここで $|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}| \leq |\vec{x} - \vec{a}| \quad (\because$ 三角不等式$)$ なので

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| \\ &\quad \leq \left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a})}{|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}|} \right| \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (*1)$$

$(*1) |f| \leq |g|, \lim g = 0$ならば$\lim f = 0)$

$\therefore f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$

P.11 数学の定理 1.1 f(x)=f(a)+ ∇ f(a)(x-a)+o(|x-a|) '25 4.6

fは$\vec{a}$ の近傍で連続的微分可能ならば

$\vec{x} \to \vec{a}$ で $f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a}) + o(|\vec{x}-\vec{a}|)$ である

(証明)

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left| \frac{f(x_1,\dots,x_m) - f(a_1,\dots,x_m) - f_{x_1}(\vec{a})(x_1-a_1)}{|\vec{x}-\vec{a}|} \right| = 0 \quad (\text{別頁})$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left| \frac{f(a_1,\dots,x_m) - f(a_1,a_2,\dots,x_m) - f_{x_2}(\vec{a})(x_2-a_2)}{|\vec{x}-\vec{a}|} \right| = 0 \quad (\text{別頁})$$

$$\vdots$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left| \frac{f(a_1,\dots,a_{m-1},x_m) - f(a_1,\dots,a_m) - f_{x_m}(\vec{a})(x_m-a_m)}{|\vec{x}-\vec{a}|} \right| = 0 \quad (\because\ x_1,x_2 \text{ の場合と同様})$$

足し合わせて

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - f_{x_1}(\vec{a})(x_1-a_1) - f_{x_2}(\vec{a})(x_2-a_2) - \cdots - f_{x_m}(\vec{a})(x_m-a_m)}{|\vec{x}-\vec{a}|} \right| = 0 \quad (*1)$$

$(*1)$ $\lim|f| = 0, \lim|g| = 0$ならば$\lim|f|+|g| = 0$
$|f+g| \leq |f|+|g|$ (三角不等式)
なので $\lim|f+g| = 0$

ここで

$\vec{\nabla} f(\vec{a}) = (f_{x_1}(\vec{a}),\dots,f_{x_m}(\vec{a}))$
$(\vec{x}-\vec{a}) = (x_1-a_1,\dots,x_m-a_m)$
$\vec{\nabla} f(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a}) = f_{x_1}(\vec{a})(x_1-a_1)+\cdots+f_{x_m}(\vec{a})(x_m-a_m)$

なので

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \vec{\nabla} f(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})}{|\vec{x}-\vec{a}|} \right| = 0$$

$\therefore\ f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \vec{\nabla} f(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a}) = o(|\vec{x}-\vec{a}|)$ $\quad$ ($\because$ 付録Aの$o(\dots)$の定義)

$\therefore\ f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a}) + o(|\vec{x}-\vec{a}|)$ $\quad$ ($\because$ $f+h = o(\dots) \rightleftarrows f = -h + o(\dots)$と定義する)

P.12 数学の定理 1.2 n 階までの導関数は微分の順序によらない'25 4.8

ある開領域で $f(x_1,\cdots,x_m)$ が C^∞ 級ならば

その領域で n 階までの偏導関数は微分の順序によらない

(証明)

f の 2 階以上 n 階以下の偏導関数を考える

$f_{x_{p_1}\cdots x_{p_i}x_{p_j}\cdots x_{p_k}}$

f は C^∞ 級なので

$f_{x_{p_1}\cdots x_{p_i}x_{p_j}}$ は存在し連続である

また $f_{x_{p_1}\cdots x_{p_j}x_{p_i}}$ も存在し連続である

よって $f_{x_{p_1}\cdots x_{p_i}x_{p_j}} = f_{x_{p_1}\cdots x_{p_j}x_{p_i}}$ $\quad (\because f_{xy} = f_{yx}$ 別頁 $)$

よって $f_{x_{p_1}\cdots x_{p_i}x_{p_j}\cdots x_{p_k}} = f_{x_{p_1}\cdots x_{p_j}x_{p_i}\cdots x_{p_k}} \quad (1)$

$p_1,\ldots,p_k$ を昇順に並べたリストを $q_1,\ldots,q_k$ とする

(1) より x_{q_1} による偏微分を左隣りの変数の偏微分との入れ換えをくりかえして

$f_{x_{p_1}\cdots x_{p_k}} = f_{x_{q_1}\cdots x_{p_k}}$ とする

x_{q_1} と同様に x_{q_2} について

$f_{x_{p_1}\cdots x_{p_k}} = f_{x_{q_1}x_{q_2}\cdots x_{p_k}}$ とする

これを繰り返して

$f_{x_{p_1}\cdots x_{p_k}} = f_{x_{q_1}\cdots x_{q_k}}$ となる

$r_1,\ldots,r_2$ は $p_1,\ldots,p_2$ を任意に並べ替えたリストとする。上と同様に

$f_{x_{r_1}\cdots x_{r_k}} = f_{x_{q_1}\cdots x_{q_k}}$ となる

よって $f_{x_{r_1}\cdots x_{r_k}} = f_{x_{p_1}\cdots x_{p_k}}$ となる

よって n 階までの偏導関数は微分の順序によらない

P.12 数学の定理 1.2 fxy=fyx '25 4,8

(2 変数の場合)

ある開領域で f_{xy}, f_{yx} が連続ならば $f_{xy} = f_{yx}$ である

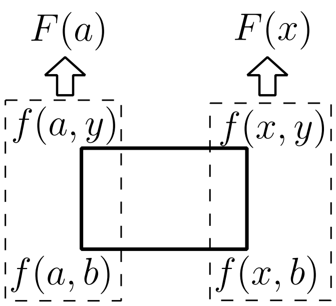
(証明)

領域内の任意の点 $(a,b),(x,y)$ とする

$\Delta(x,y) = (f(x,y) - f(x,b)) - (f(a,y) - f(a,b))$ とする

$F(x) = f(x,y) - f(x,b)$ とすると

$\Delta(x,y) = F(x) - F(a)$



領域内で f は連続なので xの区間$[a,x]$ で $f(x,y), f(x,b)$ は連続

よって $F(x)$ は xの区間$[a,x]$ で連続 $(*1)$

領域内で f は偏微分可能なので xの区間(a,x) で $f(x,y), f(x,b)$ は x で微分可能

よって $F(x)$ は xの区間(a,x) で x で微分可能 $(*2)$

よって平均値の定理より

$$\begin{aligned}\Delta(x,y) &= F(x) - F(a)\\ &= F'(a + (x-a)\theta_1)(x-a),\ \ 0 < \theta_1 < 1\\ &= (f_x(a + (x-a)\theta_1, y) - f_x(a + (x-a)\theta_1, b))(x-a) \quad (*3)\end{aligned}$$

$(*1)$$f,g$が連続ならば$f+g$も連続
$(*2)$$f,g$が微分可能ならば$f+g$も微分可能
$(*3)$$f_{xy}$が存在するならば$x,y$は独立
x,yが独立ならば$f_x = \underset{x\text{で微分}}{f'}$

領域内で f_x は連続かつ y で偏微分可能 ($\because$ f_{xy}が存在するので)

よって $f_x(a + (x-a)\theta_1, y)$ は yの区間$[b,y]$ で連続かつ 区間(b,y) で y で微分可能

よって平均値の定理より

$$\begin{aligned}&f_x(a + (x-a)\theta_1, y) - f_x(a + (x-a)\theta_1, b)\\ &\quad = f_{xy}(a + (x-a)\theta_1, b + (y-b)\theta_2)(x-b),\ \ 0 < \theta_2 < 1 \quad (*4)\end{aligned}$$

$(*4)$$x,y$は独立なので

$$f_{xy} = \underset{y\text{で微分}}{f'_x}$$

よって

$$\Delta(x,y) = f_{xy}(a+(x-a)\theta_1, b+(y-b)\theta_2)(x-a)(x-b)$$

$$x' = a+(x-a)\theta_1$$
$$y' = b+(y-b)\theta_2$$

とすると

$$\frac{\Delta(x,y)}{(x-a)(x-b)} = f_{xy}(x',y')$$

f_{xy} は連続なので

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{xy}(x,y) = f_{xy}(a,b)$$

よって任意の ϵ に対して

$|(x,y)-(a,b)| < \delta$ ならば $|f_{xy}(x,y) - f_{xy}(a,b)| < \epsilon$

また

$$\begin{aligned} |(x',y')-(a,b)| &= \sqrt{(a+(x-a)\theta_1 - a)^2 + (b+(y-b)\theta_2 - b)^2} \\ &= \sqrt{(x-a)^2\theta_1^2 + (y-b)^2\theta_2^2} \\ &< |(x,y)-(a,b)| \quad (\because\ 0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1) \end{aligned}$$

よって $|(x',y')-(a,b)| < \delta$ なので $|f_{xy}(x',y') - f_{xy}(a,b)| < \epsilon$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{xy}(x',y') = f_{xy}(a,b)$

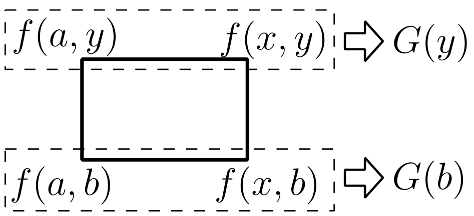
よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\Delta(x,y)}{(x-a)(y-b)} = f_{xy}(a,b) \quad (1)$

$\Delta(x,y)$ の右辺の順番をかえて

$\Delta(x,y) = (f(x,y)-f(a,y)) - (f(x,b)-f(a,b))$ とする

$G(y) = f(x,y) - f(a,y)$ とすると

$\Delta(x,y) = G(y) - G(b)$



f は領域で連続なので 区間$[b,y]$ で $f(x,y), f(a,y)$ は連続

よって $G(y)$ は 区間$[b,y]$ で連続 ($\because$ f,gが連続ならば$f+g$は連続)

f は領域で偏微分可能なので 区間(b,y) で $f(x,y), f(a,y)$ は y で微分可能

($\because$ x, yが独立なので$f_y = \underset{y\text{で微分}}{f'}$)

よって $G(y)$ は 区間(b, y) で y で微分可能 ($\because$ $(f+g)' = f' + g'$)

よって平均値の定理より

$$\begin{aligned}\Delta(x,y) &= G'(b+(y-b)\theta_3)(y-b),\ 0<\theta_3<1\\ &= (f_y(x, b+(y-b)\theta_3) - f_y(a, b+(y-b)\theta_3))(y-b) \quad (\because\ f_y = \underset{y\text{で微分}}{f'})\end{aligned}$$

領域内で f_y は連続かつ x で偏微分可能なので

$f_y(x, b+(y-b)\theta_3)$ は 区間$[a, x]$ で連続かつ 区間(a, x) で x で微分可能 ($\because$ x, yが独立ならば$f_{yx} = \underset{x\text{で微分}}{f'_y}$)

よって平均値の定理より

$$\Delta(x,y) = f_{yx}(a+(x-a)\theta_4, b+(y-b)\theta_3)(y-b)(x-a),\ 0<\theta_4<1$$

$x' = a + (x-a)\theta_4$
$y' = b + (y-b)\theta_3$
とすると

$$\Delta(x,y) = f_{yx}(x', y')(y-b)(x-a)$$

よって $\dfrac{\Delta(x,y)}{(y-b)(x-a)} = f_{yx}(x', y')$

f_{yx} は連続なので

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{yx}(x,y) = f_{yx}(a,b)$$

よって任意の ϵ に対して

$|(x,y)-(a,b)| < \delta$ ならば $|f_{yx}(x,y) - f_{yx}(a,b)| < \epsilon$

また

$$\begin{aligned}|(x',y')-(a,b)| &= \sqrt{(a+(x-a)\theta_4 - a)^2 + (b+(y-b)\theta_3 - b)^2}\\ &= \sqrt{(x-a)^2\theta_4^2 + (y-b)^2\theta_3^2}\\ &< |(x,y)-(a,b)| \quad (\because\ 0<\theta_3<1, 0<\theta_4<1)\end{aligned}$$

よって $|(x',y')-(a,b)| < \delta$ なので

$$|f_{yx}(x',y') - f_{yx}(a,b)| < \epsilon$$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{yx}(x',y') = f_{yx}(a,b)$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\Delta(x,y)}{(y-b)(x-a)} = f_{yx}(a,b) \quad (2)$

よって (1), (2) より

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

a, b は任意なので

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

P.12 補足 x ≠ 0 で f(x) は連続 '25 4.23

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$で$f(x)$は連続

(証明)

xは連続　(∗1)

よって $x \neq 0$ ならば $\frac{1}{x}$は連続　(∗2)

よって $x \neq 0$ ならば $\frac{1}{x^2}$は連続　(∗3)

よって $x \neq 0$ ならば $-\frac{1}{x^2}$は連続　(∗3)

よって $x \neq 0$ ならば $e^{-\frac{1}{x^2}}$は連続　(∗4)

$0 < |x-a| < |a|$ ならば $x \neq 0$

($\because$ $x = 0$ とすると $|a| < |a|$ となり矛盾)

$e^{-\frac{1}{x^2}}$ は $x \neq 0$ で連続なので

任意の ϵ に対して

$0 < |x-a| < \delta$ ならば $\left|e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{1}{a^2}}\right| < \epsilon$

よって $0 < |x-a| < min(|a|, \delta)$ ならば

$x \neq 0$ なので $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

また $\left|e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{1}{a^2}}\right| < \epsilon$

$\therefore$ $|f(x) - f(a)| < \epsilon$

よって $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

よって $x \neq 0$ ならば $f(x)$ は連続

(∗1)$0 < |x-a| < \epsilon$ ならば

$|x-a| < \epsilon$

$\therefore \lim_{x\to a} x = a$

(∗2) $\lim_{x\to a} f(x) = F, F \neq 0$ ならば $\lim_{x\to a} \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$

(証明)

任意の ϵ に対し $0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - F| < \epsilon \cdots (1)$

$\epsilon = \frac{|F|}{2}$ とすると

$0 < |x-a| < \delta'$ ならば $|f(x) - F| < \frac{|F|}{2}$

$\therefore$ $|F| - |f(x)| < \frac{|F|}{2}$ ($\because$ 三角不等式 $|F| - |f(x)| \leq |F - f(x)|$)

$\therefore$ $|f(x)| > \frac{|F|}{2}$

$\therefore$ $\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|F|} \cdots (2)$

($\because$ $F \neq 0$ なので$|F| > 0, 0 < a < b$ ならば $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$)

任意の ϵ' に対して $\epsilon = \dfrac{1}{2}\epsilon' F^2$ とする

$0 < |x-a| < min(\delta, \delta')$ ならば

$\left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{F}\right| = \dfrac{|f(x)-F|}{|f(x)||F|} < \dfrac{2\epsilon}{F^2} = \epsilon'$ ($\because$ (1), (2))

よって $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{F}$

(∗3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = F, \lim_{x\to a} g(x) = G$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a} fg = FG$

(証明)

任意の ϵ に対して $0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f-F| < \epsilon, |g-G| < \epsilon \cdots (1)$

$\epsilon = |F|$ とすると

$0 < |x-a| < \delta'$ ならば $|f-F| < |F|$

$\therefore$ $|f| - |F| < |F|$ ($\because$ 三角不等式 $|a| - |b| \leq |a-b|$)

$\therefore$ $|f| < 2|F| \cdots (2)$

任意の ϵ' に対して $\epsilon = \dfrac{\epsilon'}{|G| + 2|F|}$ とする

$0 < |x-a| < min(\delta, \delta')$ ならば

$|fg - FG| = |fg - fG + fG - FG|$

$= |f(g-G) + G(f-F)|$

$\leq |f(g-G)| + |G(f-F)|$ ($\because$ 三角不等式 $|a+b| < |a| + |b|$)

$= |f||g-G| + |G||f-F|$

$< 2|F|\epsilon + \epsilon|G|$ ($\because$ (1)(2))

$= \epsilon(2|F| + |G|) = \epsilon'$

よって $\displaystyle\lim_{x\to a} fg = FG$

(∗4)a で $f(x)$ は連続, $f(a)$ で $g(x)$ は連続ならば a で $g(f(x))$ は連続

(証明)

$\displaystyle\lim_{x\to f(a)} g(x) = g(f(a))$ なので

任意の ϵ に対して $0 < |x - f(x)| < \delta$ ならば $|g(x) - g(f(a))| < \epsilon$

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ なので

$0 < |x-a| < \delta'$ ならば $|f(x) - f(a)| < \delta$

よって $0 < |x-a| < \delta'$ ならば $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$

よって $\displaystyle\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(f(a))$

よって a で $g(f(x))$ は連続

P.12 補足 x=0 で f(x) は連続 '25 4.23

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$で$f(x)$は連続

(証明)

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty \quad (*1)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (*4)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because x \neq 0) \\ &= 0 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

よって$x = 0$で$f(x)$は連続

$(*1)$ $e^{\frac{1}{x^2}} = 1 + \left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}{2} + \cdots \quad (\because e^x$の定義$)$

$$> 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \infty \quad (*2)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty \quad (*3)$$

$(*2)$ 任意の$\epsilon > 1$に対して$0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon - 1}}$ならば

$x^2 < \frac{1}{\epsilon - 1} \quad (\because 0 < a < b$ならば$a^2 < b^2)$

$\frac{1}{x^2} > \epsilon - 1 \quad (\because 0 < a < b$ならば$\frac{1}{a} > \frac{1}{b})$

$$\therefore 1 + \frac{1}{x^2} > \epsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} 1 + \frac{1}{x^2} = \infty$$

$(*3)$ $g(x) > f(x), \lim_{x\to a} f(x) = \infty$ならば $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

(証明)

任意のϵに対して$0 < |x - a| < \delta$ならば$f(x) > \epsilon$

$$\therefore g(x) > \epsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

$(*4)$ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ならば $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

(証明)

任意のϵに対して$0 < |x - a| < \delta$ならば$f(x) > \epsilon$

$\therefore \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{\epsilon} \ (\because 0 < a < b$ならば$\frac{1}{a} > \frac{1}{b})$

任意のϵ'に対して$\epsilon = \frac{1}{\epsilon'}$とする

P.12 補足 x ≠ 0 で C ∞ 級 '25 4.25

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$x\neq 0$でC^∞級

(証明)

$x\neq 0$ とする

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \\ &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (*1),(*2) \\ &= -\left(\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because \text{積の微分}) \\ &= -(-2)x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (*3) \\ &= 2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \cdots(1) \end{aligned}$$

である。

$n>0$ で

$$f^{(n)}=\left(\sum_{\nu=1}^{m}k_\nu x^{-\nu}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

と仮定する

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\nu=1}^{m}k_\nu x^{-\nu}\right)' &= \sum_{\nu=1}^{m}k_\nu (x^{-\nu})' \quad (\because \text{和, 積の微分}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{m}(-\nu k_\nu)x^{-\nu-1} \quad (*3)\cdots(2) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= \left(\sum_{\nu=1}^{m}k_\nu x^{-\nu}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + \left(\sum_{\nu=1}^{m}k_\nu x^{-\nu}\right)\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \quad (\because \text{積の微分}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{m}(-\nu k_\nu)x^{-\nu-1}e^{-\frac{1}{x^2}} + \sum_{\nu=1}^{m}k_\nu x^{-\nu}2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because (1),(2)) \\ &= \left(\sum_{\nu=1}^{m}-\nu k_\nu x^{-\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{m}2k_\nu x^{-\nu-3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left(\sum_{i=2}^{m+1}-(i-1)k_{i-1}x^{-i} + \sum_{i=4}^{m+3}2k_{i-3}x^{-i}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \Bigg((-1)k_1x^{-2}+(-2)k_2x^{-3}+\sum_{i=4}^{m+1}-(i-1)k_{i-1}x^{-i} \\ &\qquad + \sum_{i=4}^{m+1}2k_{i-3}x^{-i} + 2k_{m-1}x^{-(m+1)} + 2k_m x^{-(m+3)}\Bigg)e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \Bigg((-1)k_1x^{-2}+(-2)k_2x^{-3}+\sum_{i=4}^{m+1}(-(i-1)k_{i-1}+2k_{i-3})x^{-i} \\ &\qquad + 2k_{m-1}x^{-(m+1)} + 2k_m x^{-(m+3)}\Bigg)e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

ここで

$$p_i = \begin{cases} 0 & (i=1) \\ -(i-1)k_{i-1} & (i=2,3) \\ -(i-1)k_{i-1} + 2k_{i-3} & (i=4,\dots,m+1) \\ 2k_{i-3} & (i=m+2,m+3) \end{cases}$$

$s = m+3$

とする

$$f^{(n+1)} = \left(\sum_{i=1}^{s} p_i x^{-i}\right) e^{-1/x^2}$$

よって、$x \neq 0, n > 0$ において

$$f^{(n)} = \left(\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu x^{-\nu}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

である。

すべての n で $f^{(n)}$ は存在するので f は C^∞ 級である

$(*1)$合成関数の微分

$g'(x), f'(g(x))$が存在するなら

$f(g(x))' = g'(x)f'(g(x))$

$(*2)(e^x)' = e^x$

(証明)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ (\because\ e^x\text{の定義})$$

右辺の項別微分を考える

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' &= (1)' + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} \ (*2.1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ (*2.2) \\ &= e^x \ (\because\ e^x\text{の定義}) \end{aligned}$$

ここで任意のxに対して

$-A \leq x \leq A, A > 0$なる区間を考える

$\left|\frac{x^\nu}{\nu!}\right| \leq \frac{A^\nu}{\nu!}, \nu = 0,1,2,\dots$ である

また $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu}{\nu!} = e^a$ $(\because\ e^a$の定義$)$

なので $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$は区間$[-A, A]$で一様収束する

$(\because$ 定理：ある区間で$|a_n(x)| \leq C_n$なる定数C_nがあって

$\sum^{\infty} C_n$が収束するならば$\sum^{\infty} a_n$は一様収束する$)$

よって $(e^x)' = e^x$

$(\because$ 定理：無限級数が収束し各項の導関数が連続で項別微分が

一様収束するならば無限級数の導関数は項別微分に等しい$)$

$(*2.1)(1)' = 0$

$n > 0$ならば$x^n = nx^{n-1}$ $(*3)$

$(kf(x))' = kf'(x)$ $(\because$ 積の微分$)$

$(*2.2)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$(*3)$ $x\neq 0, n>0$ならば

$(x^{-n})'=-nx^{-n-1}$

(証明)

$(x^n)'=-nx^{-n-1}$と仮定する

$(x^{n+1})'=(xx^n)'=(x)'x^n+x(x^n)'$ ($\because$ 積の微分)

$=x^n+xnx^{n-1}=(n+1)x^n$

$(x)'=1=1\cdot x^{1-1}$

よって$(x^n)'=nx^{n-1}, n=1,2,...$

よって$x\neq 0, n=1,2,...$ならば

$(x^{-n})'=\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'=\dfrac{1'x^n-1(x^n)'}{x^{2n}}$ ($\because$ 商の微分)

$=\dfrac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}$

P.12 補足 x=0 で C ∞ 級 '25 5.20

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ で C^∞ 級

(証明)

$x \neq 0$ で

$f^{(n)}$ は 別頁 より

$$f^{(n)} = \left(\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu x^{-\nu} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{m} k_\nu x^{-\nu} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$\lim_{x \to 0} x^{-\nu} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ (∗1) なので

$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$ (∵ 和、積の極限)

$x = 0$ で f は連続 (∵ 別紙)

かつ $\lim_{x \to 0} f^{(1)}(x) = 0$ なので

$f^{(1)}(0) = 0$ (∵ $p.7, (1.5), (1.6)$ aで連続, $\lim_{x \to a} f'(x)$ が存在するなら $\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a)$)

$f^{(n)}(0) = 0$ と仮定する

$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0 = f^{(n)}(0)$

よって 0 で $f^{(n)}(x)$ は連続

かつ $\lim_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$ なので

$f^{(n+1)}(0) = 0$ (∵ $p.7, (1, 5), (1.6)$)

よって任意の n で $f^{(n)}(0) = 0$

よって $x = 0$ で f は C^∞ 級

(∗1)$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \ldots$

なので

$e^{\frac{1}{x^2}} = 1 + x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-4} + \ldots$

$2n\nu \geq 2(\mathrm{n} - 1)$とする

$|x^\nu e^{\frac{1}{x^2}}||\mathrm{x}^\nu|(1 + \mathrm{x}^{-2} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{n}!}\mathrm{x}^{-2\mathrm{n}})$

$= |x^\nu| + |x^{\nu-2}| + \cdots + \frac{1}{n!}|v^{\nu-2n}|$

$\nu, \nu - 2, \ldots, \nu - 2(n-1) \geq 0$なので

$\lim |x^\nu| = 0, \ldots, \lim |x^{\nu-2(n-1)}| = 0 \ or\ 1$

$\nu - 2n < 0$なので

$\lim_{x \to 0} |x^{\nu-2n}| = \infty$

$$\therefore \lim_{x\to 0} |x^{\nu}| + \cdots + \frac{1}{n!}|x^{\nu-2n}| = \infty \ (\because \text{和の極限})$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x^{\nu}| + \cdots + \frac{1}{n!}|x^{\nu-2n}|} = 0$$

$$\frac{1}{|x^{\nu}e^{\frac{1}{x^2}}|} < \frac{1}{|x^{\nu}| + \cdots + \frac{1}{n!}|x^{\nu-2n}|} \text{なので}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x^{\nu}e^{\frac{1}{x^2}}|} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\nu}e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

P.12 補足 x=0 で C ∞ 級であるが解析的でない '25 5.21

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ で C^∞ 級であるが解析的でない

(証明)

$x = 0$ での $f(x)$ のテーラー級数を $T(x)$ とする

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$f^{(n)}(0) = 0$　(∵ 別紙) なので $T(0) = 0$

$a \neq 0$ とする $f(a) \neq 0$, $T(a) = 0$ なので

$T(a) \neq f(a)$

よって $x \neq 0$ ならば $f(x) \neq T(x)$

よって $x = 0$ の近傍で f はテーラー級数と一致しない

よって $x = 0$ の近傍で f はべき級数で表すことができない

(∵　定理: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ はテーラー級数である)

よって $x = 0$ の近傍で f は解析的でない

P.12 補足 収束するテーラー級数の部分和が $f(x)$ の近似にならない例 '25 6.9

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ を中心とした $f(x)$ のテーラー級数 $T(x)$ とする

$T(x)$ の収束半径は ∞ よって任意の x でテーラー級数は収束する。

このとき、$x \neq 0$ でテーラー級数の部分和の次数をいくら上げても部分和が $f(x)$ の近づくことはない

(証明)

$x = 0$ での $f(x)$ のテーラー級数を $T(x)$ とする

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$f^{(n)}(0) = 0 \quad (\because$ 別紙$)$ なので $T(x) = 0$

すべての x について $T(x)$ は収束するので、収束半径は $R_f = \infty$

$|1| < R_f$ なので $T(1)$ は収束して $T(1) = 0$

また $f(1) = e^{-\frac{1}{1^2}} = e^{-1}$

よって $T(1)$ の部分和の次数を上げたとき部分和が近づくのは 0 である。e^{-1} には近づかない

収束半径内にあることは、テーラー級数 $T(x)$ が元の関数 $f(x)$ に一致することの十分条件ではない

テーラーの定理の剰余項が 0 に近づくならばテーラー級数と関数は一致する

この場合、剰余項は

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} 1^n, \ 0 < c < 1$$

$$f^{(1)}(x) = 2x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f^{(n)}(x) = \Big(\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu x^{-\nu} \Big) e^{-\frac{1}{x^2}} \ (\because \text{別紙})$$

となる。

$n \to 0$ で $R_n \not\to 0$ の筈であるが、証明？

P.12 補足 x ≠ 0 で f(x) は解析的 '25 6.4

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$x\neq 0$ で $f(x)$ は解析的

(証明)

x は a を中心とするべき級数で表される $(*1)$

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n,\quad a_n=\begin{cases} a & (n=0)\\ 1 & (n=1)\\ 0 & (n>1)\end{cases}$$

収束半径は ∞

$(*1)F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n, a_n=\begin{cases} a & (n=0)\\ 1 & (n=1)\\ 0 & (n>1)\end{cases}$ とする

$$\begin{aligned}F(x)&=a_0(x-a)^0+a_1(x-a)^1+a_2(x-a)^2+\ldots\\ &=a+(x-a)+0\\ &=x\end{aligned}$$

任意のxで収束するので、収束半径は∞

$\frac{1}{x}$ は $a\neq 0$ を中心とするべき級数で表される $(*2)$

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n,\quad b_n=(-1)^n\frac{1}{a^{n+1}}$$

収束半径は $|a|$

$(*2)a\neq 0$とする

$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n$とする。収束すると仮定する

$x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n, a_n=\begin{cases} a & (n=0)\\ 1 & (n=1)\\ 0 & (n>1)\end{cases}$ とする

$1=xG(x)$とする

$$\begin{aligned}1&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k})(x-a)^n(\because \text{コーシー積より})\\ &=\sum_{k=0}^{0}a_kb_{0-k}(x-a)^0+\sum_{k=0}^{1}a_kb_{1-k}(x-a)^1+\sum_{k=0}^{2}a_kb_{2-k}(x-a)^2+\ldots\end{aligned}$$

$1=\sum_{k=0}^{0}a_kb_{0-k}$と仮定する $1=a_0b_0\ \therefore\ b_0=\frac{1}{a_0}=\frac{1}{a}$

$0=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\ (n>0)$と仮定する

$$0=a_0b_0+a_1b_{n-1}+\sum_{k=2}^{n}a_kb_{n-k}$$

$\therefore\ 0=ab_n+b_{n-1}+0\ (\because\ a_0=a,a_1=1,a_k=0(k>1))$

$\therefore b_n = -\dfrac{1}{a} b_{n-1}$

$\therefore b_n = \dfrac{1}{a}\Big(-\dfrac{1}{a}\Big)^n = (-1)^n \dfrac{1}{a^{n+1}}$

これを踏まえて

$a \neq 0$とする

$G(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n, b_n = (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}}$とする

$G(x)$は初項$\dfrac{1}{a}$、公比$\dfrac{-1}{a}(x-a)$の等比級数

よって$\left|\dfrac{-1}{a}(x-a)\right| < 1$即ち$|x-a| < |a|$ならば収束する

よって$|x-a| < |a|$ならば

$G(x) = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1-\frac{-1}{a}(x-a)} = \dfrac{1}{a+(x-a)} = \dfrac{1}{x}$ ($\because$ 等比級数の公式)

また等比級数なので$\left|\dfrac{-1}{a}(x-a)\right| > 1$即ち$|x-a| > |a|$ならば収束しない

よって収束半径は$|a|$

$\dfrac{1}{x^2}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数で表される (*3)

$|x-a| < |a|$ ならば

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad c_n = (-1)^n \frac{n+1}{a^{n+2}}$$

級数は絶対収束する。

(*3)$|x-a| < |a|$とする

$\dfrac{1}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n, b_n = (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}}$とする

級数は絶対収束する。よって

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} &= \frac{1}{x}\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k b_{n-k} (x-a)^{n-k} \dots (1) \left(\begin{array}{l}\because \text{絶対収束する級数の積は} \\ \text{コーシー積に等しい} \\ \text{またコーシー積は絶対収束する}\end{array}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}\Big)(x-a)^n \ (\because \text{有限級数の線型性}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{a^{k+1}} (-1)^{n-k} \frac{1}{a^{n-k+1}}\Big)(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}}\Big)(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big((-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} 1\Big)(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{n+2}} (n+1)(x-a)^n
\end{aligned}$$

絶対収束する級数の積をあらわすコーシー積は絶対収束する

よって(1)よりこの級数は絶対収束する

(もしくは、収束するべき級数は絶対収束するのでこの級数は絶対収束する)

$-\dfrac{1}{x^2}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数で表される (*4)

$|x-a| < |a|$ ならば

$$-\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (x-a)^n, \quad s_n = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{a^{n+2}}$$

級数は絶対収束する。

(*4)$|x-a|<|a|$とする

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{a^{n+2}}(x-a)^n$$

よって

$$\begin{aligned}-\frac{1}{x^2}&=(-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{a^{n+2}}(x-a)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{a^{n+2}}(x-a)^n\ (\because \text{絶対収束する級数は線型性をもつ})\end{aligned}$$

また$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{n+1}{a^{n+2}}(x-a)^n\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n+1}{a^{n+2}}(x-a)^n\right|$

$\dfrac{1}{x^2}$の級数が絶対収束するので右辺は収束する

よって$-\dfrac{1}{x^2}$の級数は絶対収束する

e^x は 0 を中心とするべき級数で表される

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(\because e^x\text{の定義})$$

すべての x について収束する (*5) よって収束半径は ∞

(*5) $\displaystyle\sum\left|\frac{x^n}{n!}\right|$について

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=0$$

よってダランベールの判定法より$\displaystyle\sum\left|\frac{x^n}{n!}\right|$は収束する

よって$\displaystyle\sum\frac{x^n}{n!}$は収束する

最後に $e^{-\frac{1}{x^2}}$ のべき級数を求める。

$e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ a_n=\frac{1}{n!}$ とする

$a\neq 0,\ |x-a|<|a|$ とする

$-\dfrac{1}{x^2}=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}s_m(x-a)^n,\ s_m=(-1)^{m+1}\frac{m+1}{a^{m+2}}$ とする

べき級数の合成 (別紙) より

$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}|s_m(x-a)^m|<\infty$ ならば

$$e^{-\frac{1}{x^2}}=\sum_{p=0}^{\infty}d_p(x-p)^p\ ,\quad d_p=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}s_{k_1}\ldots s_{k_n}$$

である

$$\begin{aligned}d_p&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}(-1)^{k_1+1}\frac{k_1+1}{a^{k_1+2}}\ldots(-1)^{k_n+1}\frac{k_n+1}{a^{k_n+2}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}(-1)^{p+n}\frac{(k_1+1)\ldots(k_n+1)}{a^{p+2n}}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^p \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} (k_1+1)\dots(k_n+1) \ (\because \text{有限級数の線型性})$$

$a \neq 0,\ |x-a| < |a|$ ならば $-\dfrac{1}{x^2} = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} s_m (x-a)^n$ は絶対収束する

よって $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} |s_m (x-a)^n|$ は収束する

よって $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} |s_m (x-a)^n| < \infty$

よって $a \neq 0,\ |x-a| < |a|$ ならば

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} d_p (x-a)^p$$

$$d_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^p \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} (k_1+1)\dots(k_n+1)$$

$e^{-\frac{1}{x^2}}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数であらわされる。よって解析的である。

$a \neq 0,\ |x-a| < |a|$ において $-\frac{1}{x^2}$ と e^x の級数は絶対収束するので、コーシー積の $e^{-\frac{1}{x^2}}$ の級数も絶対収束する

(注)「収束半径＝一番近い特異点までの距離」は実関数では成立しないので簡単に収束半径 $|a|$ とは言えない

$x \neq 0$ で $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ なので $x \neq 0$ で $f(x)$ は解析的である。

最初の 3 項を求めてみる

$$\begin{aligned}
d_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^0 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n \sum_{k_1+\cdots+k_n=0} (k_1+1)\dots(k_n+1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n \cdot 1 \\
&= e^{-\frac{1}{a^2}} \\
d_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^1 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n \sum_{k_1+\cdots+k_n=0} (k_1+1)\dots(k_n+1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big) \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n {}_nC_1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \Big(\frac{-1}{a}\Big) \Big(\frac{-1}{a^2}\Big) \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^{n-1} \\
&= \frac{1}{a^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^{n-1} \ \left(\begin{array}{l} \because \text{別紙：べき級数の合成より} dp \text{は絶対収束する} \\ \text{なので線型性をもつ} \end{array}\right) \\
&= \frac{1}{a^3} e^{-\frac{1}{a^2}} \\
d_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^2 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n \sum_{k_1+\cdots+k_n=2} (k_1+1)\dots(k_n+1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^2 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n (4{}_nC_2 + 3{}_nC_1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^2 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n (2n(n-1) + 3n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^2 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n 2n(n-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^2 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n 3n \ (\because dp \text{の線型性}) \\
&= \frac{2}{a^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^{n-2} + \frac{-3}{a^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^{n-1} \ (\because dp \text{の線型性}) \\
&= \frac{2}{a^6} e^{-\frac{1}{a^2}} + \frac{-3}{a^4} e^{-\frac{1}{a^2}} \ (\because e^x \text{の定義}) \\
&= \Big(\frac{2}{a^6} - \frac{3}{a^4}\Big) e^{-\frac{1}{a^2}}
\end{aligned}$$

よって

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \approx e^{-\frac{1}{a^2}} + \frac{1}{a^2}e^{-\frac{1}{a^2}} + \frac{1}{a^3}e^{-\frac{1}{a^2}} + \left(\frac{2}{a^6} - \frac{3}{a^4}\right)e^{-\frac{1}{a^2}}$$

P.12 補足 べき級数の合成 '25 6.1

$|x-a|<R_f$ ならば $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ とする

$|x-b|<R_g$ ならば $g(x)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(x-a)^m$ とする

$R_f>0,\ R_g>0$ とする。このとき

$|x-b|<R_g$ かつ $\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|<R_f,\ c_m=\begin{cases}b_0-a & (m=0)\\ b_m & (m>0)\end{cases}$ ならば

$f(g(x))$ は b を中心としてべき級数であらわされる

(証明)

$|x-b|<R_g$ とする

$g(x)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(x-a)^m$ とする

$g(x)-a=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(x-b)^m-a=\sum_{m=0}^{\infty}c_m(x-b)^m$, $c_m=\begin{cases}b_0-a & (m=0)\\ b_m & (m>0)\end{cases}$ なる c_m が存在する

($\because$ $\sum_{m=0}^{\infty}b_m(x-b)^m$ は収束するので線型性をもつ)

$\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|<R_f$ とする

$\therefore \left|\sum_{m=0}^{\infty}c_m(x-b)^m\right|<R_f$ ($\because$ $|a+b|\le|a|+|b|$)

$\therefore |g(x)-a|<R_f$

$$
\begin{aligned}
\therefore f(g(x)) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(g(x)-a)^n \quad (\because\ g(x)\text{は}f\text{の収束半径内にあるので})\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}a_n\Big(\sum_{m=0}^{\infty}c_m(x-b)^m\Big)^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}c_{k_1}\ldots c_{k_n}(x-a)^p \quad (\because\ \text{別紙：べき級数のべき})\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}a_n\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}c_{k_1}\ldots c_{k_n}(x-a)^p \quad \begin{pmatrix}\because\ \text{別紙：べき級数のべきは絶対収束する}\\ \text{また収束する級数は線型性をもつ}\end{pmatrix}\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}c_{k_1}\ldots c_{k_n}(x-a)^p \quad \begin{pmatrix}\because\ \sum|c_m(x-b)^m|<R_f\text{ならば}\\ \text{この二重級数は絶対収束する}(*1)\\ \text{よって和の順番を変えてもよい}\end{pmatrix}\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}c_{k_1}\ldots c_{k_n}\Big)(x-a)^p \quad \begin{pmatrix}\because\ \text{二重級数は絶対収束する}(*1)\\ \text{よって内側の級数も絶対収束する}\\ \text{収束する級数は線型性を持つ}\end{pmatrix}\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}d_p(x-a)^p
\end{aligned}
$$

$d_p=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}c_{k_1}\ldots c_{k_n}$ とする

ここで 上の $f(g(x))$ をあらわす二重級数は絶対収束する $(*1)$ よって内側の級数も絶対収束する。

よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}c_{k_1}\dots c_{k_n}(x-a)^p\right|$ は収束する

$\therefore$ $\left(\sum|a_n\sum c_{k_1}\dots c_{k_n}|\right)|x-a|^p$ は収束する ($\because$ 収束する級数の線型性)

$R_f>0$ なので $|x'-a|<R_f, x'\neq a$ なる x' が存在する

$\left(\sum|a_n\sum c_{k_1}\dots c_{k_n}|\right)|x'-a|^p=w$ とすると

$\therefore$ $\displaystyle\sum|a_n\sum c_{k_1}\dots c_{k_n}|=\frac{w}{|x'-a|^p}\in\mathbb{R}$

よって d_p は絶対収束する

よって $|x-b|<R_g$, $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\left|c_m(x-b)^m\right|<R_f$ ならば $f(g(x))$ は a を中心とするべき級数であらわされる

なお、$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\left|c_m(x-b)^m\right|<R_f$ は a を中心とする区間である $(*2)$

$(*1)$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}a_n\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}c_{k_1}\dots c_{k_n}(x-a)^p$ は絶対収束する

(証明)

$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|<R_f$ としているので

$\therefore$ $\displaystyle\left|\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\right|<R_f$

$\therefore$ $\displaystyle\left|\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|+a-a\right|<R_f$

$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|+a$ は f の収束半径内にあるので f のべき級数は絶対収束する

よって

$$\begin{aligned}
\infty &> \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\left(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|+a-a\right)^n\right| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\left(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\right)^n\right| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\left|\left(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\right)^n\right| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\left(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\right)^n \quad \left(\because \sum|c_m(x-b)^m|\geq 0\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}|c_{k_1}|\dots|c_{k_n}||x-b|^p \quad (*1.1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}|a_n|\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}|c_{k_1}|\dots|c_{k_n}||x-b|^p \quad \left(\begin{array}{l}\because \sum_{p=0}^{\infty}\dots \text{は収束する}(*1.1) \\ \text{よって収束する級数の線型性より}\end{array}\right) \\
&> \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}|a_n|\left|\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}c_{k_1}\dots c_{k_n}\right||x-b|^p \quad (\because |a|+|b|\geq|a+b|) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\left|a_n\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}c_{k_1}\dots c_{k_n}(x-b)^p\right| \quad (\because |a||b|=|ab|)
\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}a_n\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}c_{k_1}\dots c_{k_n}(x-b)^p$ は絶対収束する

(∗1.1)

$$\Big(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\Big)^n=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}|c_{k_1}|\dots|c_{k_n}||x-b|^p$$

(証明)

$|c_m|=d_m$ とする

$|x-b|\geq 0$ のとき

$|x-b|=x-b$

よって

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\Big)^n&=\Big(\sum_{m=0}^{\infty}d_m(x-b)^m\Big)^n\\&=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\dots k_n=p}d_{k_1}\dots d_{k_n}(x-b)^p\quad(\because\ \text{別紙：べき級数のべき})\\&=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\dots k_n=p}|c_{k_1}|\dots|c_{k_n}||x-b|^p\end{aligned}$$

$|x-b|<0$ のとき

$y=-x, b=-a$ とする $|x-b|=-x+b=y-a$

よって

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\Big)^n&=\Big(\sum_{m=0}^{\infty}d_m(y-a)^m\Big)^n\\&=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\dots k_n=p}d_{k_1}\dots d_{k_n}(y-a)^p\quad(\because\ \text{別紙：べき級数のべき})\\&=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\dots k_n=p}|c_{k_1}|\dots|c_{k_n}||x-b|^p\end{aligned}$$

よって $\Big(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\Big)^n=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}|c_{k_1}|\dots|c_{k_n}||x-b|^p$

$\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|<R_f$ が存在すると仮定しているので右辺の級数は存在する。すなわち収束する。

(∗2)

$\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|<R_f$ は b を中心とする区間である

(証明)

$A=\Big\{x\mid\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|<R_f\Big\}$ とする

$\inf A=\sup A$ の場合

$\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(b-b)^m|=0<R_f$ なので $b\in A$ である。

よって $b=\inf A=\sup A$

よって A は a を中心とする半径 0 の閉区間

$\inf A<\sup A, \sup A=\infty$ の場合

$\inf A = -\infty$ $(*2.1)$

$[-\infty, \infty] \subset A$ $(*2.2)$

$\therefore A = \mathbb{R}$

よって A は b を中心とする半径 ∞ の開区間

$\inf A < \sup A, \sup A < \infty$ の場合

$\inf A > -\infty \quad (*2.1)$

$b < \dfrac{\inf A + \sup A}{2}$ と仮定する

b を中心とした $\inf A$ の対称点 $2b - \inf A$ を考える

仮定より $2b - \inf A < \sup A$

$\sup A$ は上限なので

$2b - \inf A < x < \sup A, x \in A$ なる x が存在する

b を中心とした x の対称点 $2b - x$ について

$2b - \inf A < x$ より $2b - x < \inf A$ である

よって $2b - x \notin A$

よって $(*2.1)$ より $x \notin A$

$x \in A$ なのでこれは矛盾

よって $b \not< \dfrac{\inf A + \sup A}{2}$

同様に $b \not> \dfrac{\inf A + \sup A}{2}$

$\therefore b = \dfrac{\inf A + \sup A}{2}$

また $(*2.2)$ より $[\inf A, \sup A] \subset A$ または $(\inf A, \sup A) \subset A$

よって A は a を中心とする半径 $\dfrac{\inf A + \sup A}{2}$ の開区間または閉区間である

よって A は a を中心とする区間である。

$(*2.1)$

b を中心とした x の対称点を x' とする

$x' = x - 2(x - b) = 2b - x$ である

$$\begin{aligned}\sum |c_m(x'-b)^m| &= \sum |c_m(2b - x - b)^m| \\ &= \sum |c_m(-x+b)^m| \\ &= \sum |c_m(x-b)^m|\end{aligned}$$

$\therefore x \in A$ ならば $x' \in A$ である。

よって $x \notin A$ ならば $x' \notin A$ である

$(*2.2)$

$b < x < x_1$ とする

$|x-b| < |x_1 - b|$

$\therefore \ \sum |c_m(x-b)^m| < \sum |c_m(x_1-b)^m|$

よって $x_1 \in A$ ならば $x \in A \quad \ldots (1)$

a を中心とした x_1 の対称点を x_1' とする

$x_1' < x < b$ とすると

$2b - x_1' > 2b - x > b$

$\therefore x_1 > 2b - x > b \quad (\because x_1' = 2b - x_1)$

(1) より $2b - x \in A$

x は $2b - x$ の b を中心とした対称点なので

(∗2.1) より $x \in A$

よって $x_1 \in A$ ならば $[x_1', x_1] \subset A$

P.12 補足 べき級数のべき '25 6.2

$|x-a|<R_f$ ならば $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ とする

$|x-a|<R_f$ ならば $(f(x))^m,\ m\geq 1$ は a を中心としたべき級数であらわされる

(証明)

$|x-a|<R_f$ とする

$$
\begin{aligned}
(f(x))^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n \ldots (1)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k(x-a)^k a_{n-k}(x-a)^{n-k} \quad \left(\begin{array}{l}\because\ \sum a_n(x-a)^n\text{は絶対収束する}\\ \text{よって級数の積はコーシー積であらわされる}\end{array}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k a_{n-k}\Big)(x-a)^n \quad (\because\ \text{有限級数の線型性})\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k_1+k_2=n}a_{k_1}a_{k_2}\Big)(x-a)^n \quad (*1)
\end{aligned}
$$

$|x-a|<R_f$ ならば (1) のどちらの級数も絶対収束する。よってコーシー積も絶対収束する。よって $(f(x))^2$ をあらわす級数は絶対収束する

$c_n^m=\sum_{k_1+\cdots+k_m=n}a_{k_1}\ldots a_{k_m},\ m\geq 2$ とする

$(f(x))^2=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^2(x-a)^n$ である

$(f(x))^m=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^m(x-a)^n$ と仮定する

$|x-a|<R_f$ で絶対収束すると仮定する

$$
\begin{aligned}
(f(x))^{m+1} &= \sum_{n=0}^{\infty}c_n^m(x-a)^n\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n \ldots (2)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}c_k^m(x-a)^k a_{n-k}(x-a)^{n-k} \quad (\because\ \text{コーシー積})\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}c_k^m a_{n-k}\Big)(x-a)^n \quad (\because\ \text{有限級数の線型性})\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\sum_{k_1+\ldots k_m=k}a_{k_1}\ldots a_{k_m}a_{n-k}\Big)(x-a)^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1+\ldots k_{m+1}=n}a_{k_1}\ldots a_{k_{m+1}}(x-a)^n \quad (*2)
\end{aligned}
$$

よって $m\geq 2$ ならば

$(f(x))^m=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^m(x-a)^n\ ,\quad c_n^m=\sum_{k_1+\cdots+k_m=n}a_{k_1}\ldots a_{k_m}$ である

(2) のどちらの級数も絶対収束するので、コーシー積も絶対収束する。

よって $|x-a|<R_f$ ならば絶対収束する

$m=1$ ならば $(f(x))^1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$

よって $m\geq 1$ で $(f(x))^m$ は a を中心とするべき級数であらわされる

$(*1)A = \{(k, n-k) \mid n \geq k \geq 0\}$

$B = \{(k_1, k_2) \mid k_1 + k_2 = n,\ k_1, k_2 \geq 0\}$とする

$(a, b) \in A$とする

$b = n - a$

$\therefore\ a + b = n$

また$n \geq a \geq 0$

$\therefore\ b \geq 0$

$\therefore\ (a, b) \in B$

$(a, b) \in B$とする

$a + b = n$

$\therefore\ b = n - a$

$b \geq 0$より

$n - a \geq 0$

$\therefore\ n \geq a$

$a \geq 0$なので

$n \geq a \geq 0$

$\therefore\ (a, b) \in A$

$\therefore\ A = B$

$(*2)A = \{(k_1, \dots, k_m, n-k) \mid k_1 + \cdots + k_m = k, 0 \leq k \leq n,\ k_i \geq 0\}$

$B = \{(k_1, \dots, k_{m+1}) \mid k_1 + \cdots + k_{m+1} = n,\ k_i \geq 0\}$とする

$(a_1, \dots, a_{m+1}) \in A$とする

$a_1 + \cdots + a_m = k,\ a_{m+1} = n - k$

$\therefore\ a_1 + \cdots + a_{m+1} = n$

$0 \leq k \leq n$より

$a_{m+1} = n - k \geq 0$

$\therefore\ (a_1, \dots, a_{m+1}) \in B$

$(a_1, \dots, a_{m+1}) \in B$とする

$a_1 + \cdots + a_{m+1} = n$

$a_1 + \cdots + a_m = k$とする

$k = n - a_{m+1}$

$a_{m+1} \geq 0$より$k \leq n$

$a_i \geq 0$より$k \geq 0$

$\therefore\ 0 \leq k \leq n$

また$a_{m+1} = n - k$

$\therefore\ (a_1, \dots, a_{m+1}) \in A$

$\therefore\ A = B$

P.12 問題 1.4 x^2 e^y の偏微分 '25 4.16

$f(x,y) = x^2 e^y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

f の偏微分と連続性

(i)

$f_x = 2xe^y \quad (*1)$

$f_y = x^2 e^y \quad (*1)$

$f_{xx} = 2e^y$

$f_{yy} = x^2 e^y$

$f_{xy} = 2xe^y$

$f_{yx} = 2xe^y$

$f_x(0,0) = 0,\ f_x(1,1) = 2e$

$f_y(0,0) = 0,\ f_y(1,1) = e$

$f_{xx}(0,0) = 2,\ f_{xx}(1,1) = 2e$

$f_{yy}(0,0) = 0,\ f_{yy}(1,1) = e$

$f_{xy}(0,0) = 0,\ f_{xy}(1,1) = 2e$

$f_{yx}(0,0) = 0,\ f_{yx}(1,1) = 2e$

(ii)

x^2 は x で連続よって (x,y) で連続 $\quad (*2)$

e^y は x で連続よって (x,y) で連続 $\quad (*2)$

よって $f(x,y) = x^2 e^y$ は (x,y) で連続 $\quad (*3)$

同様に

$f_x = 2xe^y$ は連続

$f_y = x^2 e^y$ は連続

$f_{xx} = 2e^y$ は連続

$f_{yy} = x^2 e^y$ は連続

$f_{xy} = 2xe^y$ は連続

$f_{yx} = 2xe^y$ は連続

よって f は C^2 級

(iii)

$f_{xy} = 2xe^y, f_{yx} = 2xe^y$ なので $f_{xy} = f_{yx}$

$(*1)$ xとyが独立ならば$f_x = \underset{x\text{で微分}}{f'}$

$(*2)$ $f(x)$がxで連続ならば$f(x)$は(x,y)で連続である

(証明)

xで連続なので$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x)$

よって任意のϵに対して

$0 < |\Delta x| < \delta$ならば

$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \epsilon$

$|(\Delta x, \Delta y)| < \delta$ならば

$|\Delta x| \leq |(\Delta x, \Delta y)|$ ($\because$ 三角不等式)

$\therefore\ \ |\Delta x| < \delta$

$\therefore\ \ \Delta x = 0\ or\ 0 < |\Delta x| < \delta$

$0 < |\Delta x| < \delta$とすると

$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \epsilon$

$\Delta x = 0$とすると

$|f(x + \Delta x) - f(x)| = 0 < \epsilon$

よって$|(\Delta x, \Delta y)| < \delta$ならば$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \epsilon$

よって $\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y)) \to (0,0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$

(∗2)f, gが連続ならばfgは連続

(証明)

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} g(x + \Delta x, y + \Delta y) = g(x, y)$$

よって

$$\begin{aligned}
&\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y) g(x + \Delta x, y + \Delta y) \\
&\qquad = \lim f(x + \Delta x, y + \Delta y) \lim g(x + \Delta x, y + \Delta y)\ (\because \text{積の極限}) \\
&\qquad = f(x, y) g(x, y)
\end{aligned}$$

よってfgは連続

P.15 問題 1.5 Z(x,y) の偏微分 '25 6.22

$Z = f(x, y) = x^2 e^y$ とする

$\eta = y - x$ とする

$Z = g(x, \eta) = x^2 e^{\eta + x}$ とする。

$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y \neq \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_\eta$

(証明)

$Z = f(x, y) = x^2 e^y$ とする

$\eta = y - x$ とする

$Z = f(x, y) = f(x, \eta + x) = x^2 e^{\eta + x}$

$Z = g(x, y) = x^2 e^{\eta + x}$ とする

よって

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y = 2xe^y$$
$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_\eta &= 2xe^{\eta+x} + x^2 e^{\eta+x} \\ &= (2x + x^2)e^{\eta+x} \\ &= (2x + x^2)e^y\end{aligned}$$

$\therefore \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y \neq \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_\eta$

P.15 問題 1.6(i) 偏微分の連鎖律 '25 6.13

x, y, ξ, η は変数とする

x, y は互いに独立、ξ, η は互いに独立とする

$\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は関数とする

$\boldsymbol{Z}(x, y),\ \boldsymbol{Z}(\xi, \eta)$ とする

$\boldsymbol{x}(\xi, \eta),\ \boldsymbol{y}(\xi, \eta)$ とする

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \xi}\right)_\eta = \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}\right)_\eta + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \xi}\right)_\eta \cdots (1.20)$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \eta}\right)_\xi = \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta}\right)_\xi + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \eta}\right)_\xi \cdots (1.21)$$

(証明)

x, y, ξ, η は変数とする

x, y は互いに独立、ξ, η は互いに独立とする

$\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は関数とする

$\boldsymbol{Z}(x, y)$ とする

$\boldsymbol{x}(\xi, \eta)$ とする

$\boldsymbol{y}(\xi, \eta)$ とする

$\boldsymbol{Z}(\xi, \eta) = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}(\xi, \eta), \boldsymbol{y}(\xi, \eta))$ とする

$$\begin{aligned}
\therefore \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \xi}\right)_\eta &= \frac{d\boldsymbol{Z}}{d\xi} \quad \left(\because \xi, \eta \text{が独立なので} \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \xi}\right)_\eta = \frac{d\boldsymbol{Z}}{d\xi}\right) \\
&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y \frac{d\boldsymbol{x}}{d\xi} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x \frac{d\boldsymbol{y}}{d\xi} \quad (\because \text{問題}1.7) \\
&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}\right)_\eta + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \xi}\right)_\eta \quad \left(\because \xi, \eta \text{が独立なので} \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}\right)_\eta = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\xi},\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \xi}\right)_\eta = \frac{d\boldsymbol{y}}{d\xi}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \eta}\right)_\xi &= \frac{d\boldsymbol{Z}}{d\eta} \quad \left(\because \xi, \eta \text{が独立なので} \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \eta}\right)_\xi = \frac{d\boldsymbol{Z}}{d\eta}\right) \\
&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y \frac{d\boldsymbol{x}}{d\eta} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x \frac{d\boldsymbol{y}}{d\eta} \quad (\because \text{問題}1.7) \\
&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta}\right)_\xi + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \eta}\right)_\xi \quad \left(\because \xi, \eta \text{が独立なので} \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta}\right)_\xi = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\eta},\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \eta}\right)_\xi = \frac{d\boldsymbol{y}}{d\eta}\right)
\end{aligned}$$

P.15 問題 1.6(iii) 偏微分の連鎖律 '25 6.13

$f(x,y)=(x+1)(x-y+1)$ とする

$\eta=x-y$ とする

$g(x,\eta)=(x+1)(\eta+1)$ とする

このとき

$\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)_\eta = x-y+1 \cdots (1.18)$ である

(証明)

$x,\ y,\ \eta$ は変数とする

x と y は互いに独立とする。x と η は互いに独立とする。

$\boldsymbol{x}(..),\ \boldsymbol{y}(..)$ は関数とする

$\boldsymbol{x}(x,\eta)=x$ とする

$\eta=x-y$ より

$y=x-\eta$ である

$\boldsymbol{y}(x,\eta)=x-\eta$ とする

$f(x,y)=(x+1)(x-y+1)$ とする

$g(x,\eta)=f(\boldsymbol{x}(x,\eta),\boldsymbol{y}(x,\eta))$ とする

$g(x,\eta)=(x+1)(x-(x-\eta)+1)=(x+1)(\eta+1)$ である

(1.20) より

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_\eta &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x}\right)_\eta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x}\right)_\eta \\ &= (2x-y+2)\cdot 1 + (-x-1)\cdot 1 \qquad \left(\begin{array}{l} \because \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2x-y+1,\ \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x}\right)_\eta = 1 \\ \quad \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x = -x-1,\ \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x}\right)_\eta = 1 \end{array}\right) \\ &= x-y+1\end{aligned}$$

第 2 章