

ゆっくり熱力学の基礎していってね

仲山昌人

概要

熱力学の基礎を読んだときのメモです

目次

第1章	3
P.1 系 '25 10.24	4
P.1 マクロ系、ミクロ系 '25 10.24	5
P.7 $Dx + f(a) = f'(a+0)$ '25 3.22	6
P.8 (1.2) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$ '25 3.21	7
P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f は連続 '25 5.13	8
P.10 問 1.3 $(0,0)$ で f は連続 '25 3.26	10
P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は存在する '25 5.13	11
P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は連続 '25 5.13	12
P.10 問 1.3 $(0,0)$ で f_x は連続 '25 3.26	13
P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は存在する '25 5.13	15
P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は連続 '25 5.15	16
P.10 問 1.3 $(0,0)$ で f_y は連続 '25 3.26	17
P.10 問 1.3 $(0,0)$ で f_{xy} は不連続 '25 4.1	19
P.11 数学の定理 1.1 $f(x_1,..,x_m) - f(a_1,..,x_m) - (x_1-a_1)f_1(a) = o(x-a)$ '25 4.6	20
P.11 数学の定理 1.1 $f(a_1,x_2..x_m) - f(a_1,a_2..x_m) - (x_2-a_2)f_2(a) = o(x-a)$ '25 5.17	22
P.11 数学の定理 1.1 $f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x-a) + o(x-a)$ '25 4.6	23
P.12 数学の定理 1.2 n 階までの導関数は微分の順序によらない'25 4.8	24
P.12 数学の定理 1.2 $f_{xy} = f_{yx}$ '25 4.8	25
P.12 補足 $x \neq 0$ で $f(x)$ は連続 '25 4.23	28
P.12 補足 $x=0$ で $f(x)$ は連続 '25 4.23	30
P.12 補足 $x \neq 0$ で C^∞ 級 '25 4.25	31
P.12 補足 $x=0$ で C^∞ 級 '25 5.20	34
P.12 補足 $x=0$ で C^∞ 級であるが解析的でない '25 5.21	36
P.12 補足 収束するテーラー級数の部分和が $f(x)$ の近似にならない例 '25 6.9	37
P.12 補足 $x \neq 0$ で $f(x)$ は解析的 '25 6.4	38
P.12 補足 べき級数の合成 '25 6.1	43
P.12 補足 べき級数のべき '25 6.2	48
P.12 問題 1.4 $x^2 e^y$ の偏微分 '25 4.16	50
P.15 問題 1.5 $Z(x,y)$ の偏微分 '25 6.22	52
P.15 問題 1.6(i) 偏微分の連鎖律 '25 6.13	53
P.15 問題 1.6(ii) 偏微分の連鎖律 '25 6.25	54
P.15 問題 1.6(iii) 偏微分の連鎖律 '25 6.13	55
P.15 問題 1.6(iv) 偏微分の連鎖律 '25 6.25	56
P.15 問題 1.7(i) 合成関数の偏微分 '25 6.27	58

P.15 問題 1.7(ii) 合成関数の偏微分の例 '25 6.28	60
P.16 問題 1.8 偏微分でつまづいたこと '25 6.25	61
第 2 章	69
P.18 状態 '25 10.22	70
P.18 状態と系 '25 10.22	71
P.18 热力学で扱う状態 '25 10.22	72
P.18 平衡状態 '25 7.14	73
P.19 マクロ物理量 '25 9.8	74
P.19 マクロ物理量 (a)(b)(c) '25 9.8	75
P.19 マクロ物理量と状態 '25 10.22	76
P.25 部分系・複合系 '25 10.16	77
P.26 仮想的分割 '25 10.7	78
P.27 均一な状態の系で相加変数は示量変数である'25 10.3	79
P.27 相加変数、示量変数、示強変数 '25 7.6	81
P.32 内部束縛 '25 10.7	83
P.32 問題 2.1 '25 6.29	84
P.34 (2.23) '25 6.30	85
P.34 (2.24) '25 6.30	86
P.34 (2.25) '25 6.30	87
P.35 (2.25.2):(2.25) の示強変数の場合 '25 7.2	88
P.36 $\sigma(V)/V = \sigma(1)$ '25 6.30	89
P.36 (2.30) '25 7.2	90
P.37 (2.32) '25 7.1	91
P.38 (2.35) '25 7.3	92
第 3 章	93
P.40 同じ状態、均一な状態 '25 9.3	94
P.43 要請 I(ii) '25 7.3	95
P.44 要請 II(i) '25 10.7	96
P.45 操作、遷移 '25 10.7	97
P.45 操作で遷移する平衡状態の範囲 '25 10.7	98
P.46 単純系 '25 10.7	99
P.46 単純系の部分系は単純系 '25 10.16	100
P.46 要請 II(ii) '25 10.7	101
P.47 基本関係式 '25 7.7	102
P.48 要請 II(iii) '25 10.7	103
P.48 要請 II(ii) のつづき '25 7.8	104
P.50 平衡状態がマクロ状態として一意に定まる'25 7.15	105
P.51 均一な平衡状態は U, X と一対一 '25 7.9	106
P.52 同一視 '25 7.31	107
P.53 くっつけただけ '25 8.28	108
P.53 同一視の定義 '25 7.31	109
P.58 要請 II(i)(ii)(iii)(iv)(v) '25 9.6	110
P.59 要請 II(v) '25 8.2	111
第 4 章	112
P.50 要請 II(iv) '25 10.20	113
P.61 複合系の S は一意にきまる '25 8.4	114

P.62 4.1.3 plot '25 8.4	115
P.62 4.1.3 平衡状態を完全に求める '25 8.5	116
P.62 (4.8) 一様連続 '25 8.16	117
P.63 (4.10),(4.11) '25 8.5	119
P.64 (4.16) $\max_{\{U,V\}} = \max_U \max_V$ '25 8.9	123
P.64 (4.16) '25 8.9	125
P.64 (4.17) (4.20) (4.21) (4.22) '25 8.10	127
P.66 ϵ 空間 '25 8.9	130
P.68 定理 4.1 '25 8.9	132
P.68 定理 4.2 '25 9.1	134
P.69 完全な知識 '25 9.2	135
P.71 混合系の要請 II(ii) '25 9.1	136
P.72 エントロピー減少できない '25 9.1	137
P.74 定理 5.1 '25 9.2	138

第 1 章

考察の対象になるものを適宜抜き出して、系と呼ぶ

(説明)

系の定義である

定義の中の「考察の対象」、「適宜抜き出す」の定義がないのでこれらの存在と可能性を仮定、要請しないといけない

「考察の対象」が存在することを仮定、要請する

「適宜抜き出す」ことが可能であることを仮定、要請する

これらは経験的に正しいと認める

実際に何が考察の対象であるかは経験的に決まる

いくつかの原子、分子を選ぶことは適宜抜き出すことであると仮定し、これを認める

適宜抜き出されたものは系であると仮定し、これを認める

このように系を定義するのに未定義語をつかうくらいなら、系を未定義にして系の存在を仮定、要請したほうがてつとりばやい

系が存在することを仮定、要請する。これは正しいと経験的に認める

実際に何が系かは経験的に決まる

例えば

1つの電子、原子、分子は系であると仮定、要請する

複数の電子、原子、分子の集まりは系であると仮定、要請する

これらの仮定、要請は正しいと認める

という感じ

P.1 マクロ系、ミクロ系 '25 10.24

電子、原子、分子のような、近似的に物質の基本構成要素と見なせるものをミクロ系と呼ぶ

電子や原子などの構成要素が、莫大な数集まって相互作用している系をマクロ系と呼ぶ

(説明)

ミクロ系、マクロ系の定義である

経験的定義でありかつ未定義語がたくさんてくる。なのでいっそミクロ系、マクロ系を未定義語として存在を仮定、要請したほうがてつとり早い

ミクロ系、マクロ系が存在すると仮定、要請する。この仮定、要請は経験的に正しいと認める

実際に何がミクロ系、マクロ系であるかは経験的に決められる

例えば

電子、原子、分子が 10 個集まった系はミクロ系であると仮定、要請する

電子、原子、分子が 10^{24} 個集まった系はマクロ系であると仮定、要請する

これらの仮定、要請は経験的に正しいと認める

という感じ

P.7 Dx+f(a)=f'(a+0) '25 3.22

$f(x)$ が $[a, a + \epsilon']$ で連続, $(a + a + \epsilon')$ で微分可能とする

$$f'(a + 0) = \lim_{\epsilon' \rightarrow +0} f'(a + \epsilon)$$
 が存在するならば

$D_x^+ f(a)$ が存在し $D_x^+ f(a) = f'(a + 0)$ である

(証明)

$[a, a + \epsilon']$ で連続, $(a, a + \epsilon')$ で微分可能なので

$$\text{平均値の定理より } \frac{f(a + \epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = f'(a + \epsilon), \quad 0 < \epsilon < \epsilon' \text{ なる } \epsilon \text{ が存在する}$$

ϵ' に対する ϵ を 1 つ選んで $\epsilon(\epsilon')$ とする

$$f'(a + 0) = \lim_{\epsilon' \rightarrow +0} f'(a + \epsilon)$$
 が存在するので

任意の $\delta > 0$ に対してある ϵ_1 が存在して

$0 < \epsilon < \epsilon_1$ ならば $|f'(a + \epsilon) - f'(a + 0)| < \delta$ である

$0 < \epsilon' < \epsilon_1$ ならば $0 < \epsilon(\epsilon') < \epsilon'$ なので $0 < \epsilon(\epsilon') < \epsilon_1$

よって $|f'(a + \epsilon(\epsilon')) - f'(a + 0)| < \delta$ である

$$\frac{f(a + \epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = f'(a + \epsilon(\epsilon')) \text{ なので}$$

$$0 < \epsilon' < \epsilon_1 \text{ ならば } \left| \frac{f(a + \epsilon') - f(a)}{\epsilon'} - f'(a + 0) \right| < \delta \text{ である}$$

$$\therefore \lim_{\epsilon' \rightarrow +0} \frac{f(a + \epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = f'(a + 0) \text{ である } (\because \text{極限の定義})$$

$$\lim_{\epsilon' \rightarrow +0} \frac{f(a + \epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = D_x^+(a) \text{ なので}$$

$$D_x^+(a) = f'(a + 0) \text{ である}$$

P.8 (1.2) $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$ '25 3.21

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能 $\Leftrightarrow x \rightarrow a$ で $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$ なる $f'(a)$ が存在する

(証明)

(\leftarrow)

$$o(x - a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \quad (\because f = g + o(\dots) \Leftrightarrow o(\dots) = f - g \text{ と定義})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0 \quad (\because \text{付録A } o(\dots) \text{ の定義})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0$$

よって任意の $\epsilon > 0$ に対して $0 < |x - a| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \epsilon$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad (\because \text{極限の定義})$$

よって $f(x)$ は $x = a$ で微分可能 (\because 微分の定義)

(\rightarrow)

$x = a$ で微分可能なので

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \text{ が存在する} \quad (\because \text{微分の定義})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(a) \quad (\because \text{定数の極限})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \lim_{x \rightarrow a} f'(a) = 0 \quad (\because \text{実数の四則の公理})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0 \quad (\because \text{差の極限})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} \right) = 0 \quad (\because \text{実数の四則の公理})$$

$$\therefore o(x - a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \quad (\because \text{付録A } o(\dots) \text{ の定義})$$

$$\therefore f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a) \quad (\because f - g = o(\dots) \Leftrightarrow f = g + o(\dots) \text{ と定義する})$$

よって $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$ なる $f'(a)$ が存在する

P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f は連続 '25 5.13

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f は連続

(証明)

任意の ϵ に対して

$|(x,y) - (a,b)| < \epsilon$ ならば

$$\begin{aligned} |x-a| &< |(x,y) - (a,b)| \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

よって $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$

よって x は連続

同様に y は連続

よって

xy は連続 (*1)

x^2 は連続 (*1)

y^2 は連続 (*1)

$x^2 - y^2$ は連続 (*1), (*2)

$x^2 + y^2$ は連続 (*2)

$(x,y) \neq (0,0)$ ならば $x^2 + y^2 \neq 0$

よって $(x,y) \neq (0,0)$ ならば

$\frac{1}{x^2 + y^2}$ は連続 (*3)

よって $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ は連続 (*2)

また $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

よって $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $f(x,y)$ は連続

(*1) f が連続, g が連続ならば fg は連続

(証明)

(a,b) で f, g が連続ならば

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b), \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = g(a,b)$$

$\therefore \lim fg = f(a,b)g(a,b)$ (\because 積の極限)

よって fg は連続

(*2) f が連続, g が連続ならば $f + g$ は連続

(証明)

(a, b) で f, g が連続ならば

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = g(a, b)$$

$$\therefore \lim f + g = f(a, b) + g(a, b) \quad (\because \text{和の極限})$$

よって $f + g$ は連続

(*3) f が連続かつ $f \neq 0$ ならば $\frac{1}{f}$ は連続

(証明)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b), \quad f(a, b) \neq 0$$

$$\therefore \lim \frac{1}{f} = \frac{1}{f(a, b)} \quad (\because \text{商の極限})$$

よって $\frac{1}{f}$ は連続

P.10 問 1.3 (0,0) で f は連続 '25 3.26

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(x, y) = (0, 0)$ で f は連続

(証明)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

また $(x, y) \neq (0, 0)$ で $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ は有界 (*1)

よって $\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| < m$ なる m が存在する

また $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0$ (\because 積の極限)

よって $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$ (*2)

よって $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続

(*1) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ が有界でないと仮定する

任意の $m > 0$ に対して $\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| > m$ なる (x, y) が存在する

$\therefore \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} < -m$ or $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} > m$

$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} > m$ とすると $0 > (m-1)x^2 + (m+1)y^2$

$m = 1$ とすると $0 > 2y^2$ となり矛盾

$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} < m$ とすると $x^2(1-m) - y^2(1-m) < 0$

$m = 1$ とすると $0 < 0$ となり矛盾

よって $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ は有界

(*2) $f(x, y)$ が有界, $\lim g = 0$ ならば $\lim fg = 0$

(証明)

$|f| < m$ なる m が存在する

任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ があって

$|(x, y)| < \delta$ ならば $|g| < \epsilon$

$\therefore |f||g| < |f|\epsilon$

$\epsilon|f| < \epsilon m$ なので

$|f||g| < \epsilon m$

$\therefore |fg| < \epsilon m$

任意の $\epsilon' > 0$ に対して $\epsilon' = \epsilon m$ とすると

$|(x, y)| < \delta$ ならば $|fg| < \epsilon'$

$\therefore \lim fg = 0$

P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は存在する '25 5.13

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は存在する

(証明)

$(x,y) \neq (0,0)$ とする

$$\text{このとき } f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

x, y は独立とする

$$\begin{aligned} f_x &= \underset{x \text{ で微分}}{f'} \quad (*1) \\ &= (xy)' \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)' \quad (\because \text{積の微分}) \\ &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{(x^2 - y^2)'(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)'}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\because x^2 + y^2 \neq 0 \text{ なので商の微分より}) \\ &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

よって $(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は存在する (\because 公理 : f_x は存在 $\Leftrightarrow f_x \in \mathbb{R}$)

(*1) f', f_x の定義より

$$f'(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ x \text{ で微分}}} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f_x(x, y)$$

よって f' が存在するならば $f' = f_x$

P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は連続 '25 5.13

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は連続

(証明)

$(x,y) \neq (0,0)$ とする

$$f_x(x,y) = \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{別頁})$$

$(a,b) \neq (0,0)$ とする

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{ba^4 + 4a^2b^3 - b^5}{(a^2 + b^2)^2} \quad (\because (a^2 + b^2)^2 \neq 0 \text{ なので和、積、商の極限、また } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a \text{ (*1)})$$

よって任意の ϵ に対して $|(x,y) - (a,b)| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{ba^4 + 4a^2b^3 - b^5}{(a^2 + b^2)^2} \right| < \epsilon$$

また $0 < \delta' < |(a,b)|$ とすると

$|(x,y) - (a,b)| < \delta'$ ならば $(x,y) \neq (0,0)$ である

$$\therefore f_x(x,y) = \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

よって $|(x,y) - (a,b)| < \min(\delta, \delta')$ ならば

$$\left| f_x(x,y) - \frac{ba^4 + 4a^2b^3 - b^5}{(a^2 + b^2)^2} \right| < \epsilon$$

$$\text{よって } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f_x(x,y) = \frac{ba^4 + 4a^2b^3 - b^5}{(a^2 + b^2)^2} = f_x(a,b)$$

よって $f_x(x,y)$ は $(a,b) \neq (0,0)$ で連続である

$$(*1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$$

(証明)

任意の ϵ に対して

$$|(x,y) - (a,b)| < \epsilon \text{ ならば}$$

$$|x - a| < |(x,y) - (a,b)| < \epsilon \quad (\because \text{三角不等式})$$

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$$

P.10 問 1.3 (0,0) で f_x は連続 '25 3.26

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(x, y) = (0, 0)$ で f_x は連続

(証明)

$(x, y) \neq (0, 0)$ で

f_x は [別頁](#) より

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \end{aligned}$$

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界 (*1) かつ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$

よって $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = 0$ (*2)

また f は $(0, 0)$ で連続 ([別頁](#))

よって $(0, 0)$ で f_x は存在して

$$f_x(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = 0 \quad (\because \text{本文(1.5), (1.6)より})$$

よって $(0, 0)$ で f_x は連続

(*1) $\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界

(証明)

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界でないと仮定する

任意の $m > 0$ に対して $\left| \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \right| > m$

$\therefore \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} < -m$ または $m < \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ である

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} < -m$ とすると

$x^4 + 4x^2y^2 - y^4 < -m(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$

$\therefore (1+m)x^4 + (4+2m)x^2y^2 + (m-1)y^4 < 0$

$m = 1$ とすると $2x^4 + 6x^2y^2 < 0$

これは矛盾

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} > m$ とすると

$x^4 + 4x^2y^2 - y^4 > m(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$

$0 > (m-1)x^4 + (2m-4)x^2y^2 + (m-1)y^4$

$m = 2$ とすると $0 > x^4 + y^4$

これは矛盾

よって $\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界

(*2) $f(x, y)$ は有界, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g = 0$ ならば $\lim fg = 0$

(証明)

$|f(x, y)| < m$ である

また任意の ϵ に対して $|(x, y)| < \delta$ ならば $|g(x, y)| < \epsilon$

$\therefore |f||g| < |f|\epsilon, |f|\epsilon < m\epsilon$

$\therefore |f||g| < m\epsilon$

$\therefore |fg| < m\epsilon$

任意の ϵ' に対して $\epsilon' = m\epsilon$ とすると

$|(x, y)| < \delta$ ならば $|fg| < \epsilon'$

$\therefore \lim fg = 0$

P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は存在する '25 5.13

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は存在する

(証明)

$(x,y) \neq (0,0)$ とする

$$\text{このとき } f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

x, y は独立とする

$$\begin{aligned} f_y &= \underset{y \text{ で微分}}{f'} \quad (*1) \\ &= (xy)' \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)' \quad (\because \text{積の微分}) \\ &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{(x^2 - y^2)'(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)'}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\because x^2 + y^2 \neq 0 \text{ なので商の微分より}) \\ &= \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

よって $(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は存在する (\because 公理 : f_y は存在 $\Leftrightarrow f_y \in R$)

(*1) f', f_y の定義より

$$f'(x,y) = \lim_{\substack{y \text{ で微分} \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = f_y(x,y)$$

よって f' が存在するならば $f' = f_y$

P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は連続 '25 5.15

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は連続

(証明)

$(x,y) \neq (0,0)$ とする

$$f_y(x,y) = \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{別頁})$$

$(a,b) \neq (0,0)$ とする

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2 + b^2)^2} \quad (\because (a^2 + b^2)^2 \neq 0 \text{ なので和、積、商の極限、また } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b)$$

よって任意の ϵ に対して $|(x,y) - (a,b)| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2 + b^2)^2} \right| < \epsilon$$

また $0 < \delta' < |(a,b)|$ とすると

$|(x,y) - (a,b)| < \delta'$ ならば $(x,y) \neq (0,0)$ である

$$\therefore f_y(x,y) = \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

よって $|(x,y) - (a,b)| < \min(\delta, \delta')$ ならば

$$\left| f_y(x,y) - \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2 + b^2)^2} \right| < \epsilon$$

$$\text{よって } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f_y(x,y) = \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2 + b^2)^2} = f_y(a,b)$$

よって $f_y(x,y)$ は $(a,b) \neq (0,0)$ で連続である

P.10 問 1.3 (0,0) で f_y は連続 '25 3.26

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(x, y) = (0, 0)$ で f_y は連続

(証明)

$(x, y) \neq (0, 0)$ で

f_y は 別頁 より

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= x \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \end{aligned}$$

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界 (*1) かつ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$

よって $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = 0$ (*2)

また f は $(0, 0)$ で連続 (別頁)

よって $(0, 0)$ で f_y は存在して

$$f_y(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x, y) = 0 \quad (\because \text{本文(1.5), (1.6)より})$$

よって $(0, 0)$ で f_y は連続

(*1) $\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界

(証明)

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界でないと仮定する

任意の $m > 0$ に対して $\left| \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \right| > m$

$\therefore \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} < -m$ または $m < \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ である

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} < -m$ とすると

$x^4 - 4x^2y^2 - y^4 < -m(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$

$\therefore (1+m)x^4 + (-4+2m)x^2y^2 + (m-1)y^4 < 0$

$m = 1$ とすると $2x^4 < 0$

これは矛盾

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} > m$ とすると

$x^4 - 4x^2y^2 - y^4 > m(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$

$0 > (m-1)x^4 + (2m+4)x^2y^2 + (m+1)y^4$

$m = 1$ とすると $0 > 8x^2y^2 + 2y^4$

これは矛盾

よって $\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界

$$(*2) f(x, y) \text{は有界}, \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g = 0 \text{ならば} \lim f g = 0$$

P.10 問 1.3 $(0,0)$ で f_{xy} は不連続 '25 4.1

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) = (0,0)$ で f_{xy} は不連続

(証明)

$(x,y) \neq (0,0)$ とする

$$f_x = \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{別頁})$$

よって

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{(yx^4 + 4x^2y^3 - y^5)'(x^2 + y^2)^2 - (yx^4 + 4x^2y^3 - y^5)((x^2 + y^2)^2)'}{(x^2 + y^2)^4} \quad (*1) \\ &= \frac{x^8 + 10x^6y^2 - 10x^2y^6 - y^8}{(x^2 + y^2)^4} \end{aligned}$$

(*1) x, y は独立なので $f_{xy} = \frac{f'_x}{y \text{ で微分}}$

また $(x^2 + y^2)^2 \neq 0$ ので和、積、商の微分公式より

経路 $\begin{cases} x = 0 \\ y = y \end{cases}$ に沿った $(x,y) \rightarrow (0,0)$ の極限は $\lim_{y \rightarrow 0} f_{xy}(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1$

経路 $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}$ に沿った $(x,y) \rightarrow (0,0)$ の極限は $\lim_{x \rightarrow 0} f_{xy}(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

経路によって極限が異なるので f_{xy} の $(x,y) \rightarrow (0,0)$ の極限は存在しない

よって $(0,0)$ で f_{xy} は連続ではない

P.11 数学の定理 1.1 $f(x_1, \dots, x_m) - f(a_1, \dots, a_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(a) = o(|x - a|)$ '25 4.6

f は \vec{a} の近傍で連続的微分可能ならば

$\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ で $f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, a_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$ である

(証明)

x_1, \dots, x_m は独立で f は \vec{a} の近傍で連続的微分可能なので

(a_1, \dots, a_m) が \vec{a} の近傍ならば

f は区間 $[a_1, x_1]$ で連続、区間 (a_1, x_1) で x_1 で微分可能

よって平均値の定理より

$$\frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, a_m)}{x_1 - a_1} = f'(a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m), \quad 0 < k < 1 \text{ なる } k(x_2, \dots, x_m) \text{ が存在する}$$

x_1, \dots, x_m は独立なので $f_{x_1} = \underset{x_1 \text{ で微分}}{f'}$

$$\text{よって } \frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, a_m)}{x_1 - a_1} = f_{x_1}(a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m) \dots (1)$$

また f_{x_1} は \vec{a} で連続なので

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_{x_1}(\vec{x}) = f_{x_1}(\vec{a})$$

よって任意の δ に対して

$|\vec{x} - \vec{a}| < \epsilon$ ならば $|f_{x_1}(\vec{x}) - f_{x_1}(\vec{a})| < \delta$ なる ϵ が存在する

$\vec{x}' = (a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m)$ とする

$$\begin{aligned} |\vec{x}' - \vec{a}| &= \sqrt{(a_1 + k(x_1 - a_1) - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} \\ &= \sqrt{k^2(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} \\ &< |\vec{x} - \vec{a}| \quad (*1) \end{aligned}$$

(*1) $k = k(x_2, \dots, x_m)$ であるが

$0 < k < 1$ なので

$$k^2(x_1 - a_1)^2 < (x_1 - a_1)^2$$

よって $|\vec{x}' - \vec{a}| < \epsilon$ なので $|f_{x_1}(\vec{x}') - f_{x_1}(\vec{a})| < \delta$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_{x_1}(\vec{x}') = f_{x_1}(\vec{a})$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_{x_1}(a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m) = f_{x_1}(\vec{a})$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f_{x_1}(\vec{x}) - f_{x_1}(a_1, \dots, a_m)}{x_1 - a_1} = f_{x_1}(\vec{a}) \quad (\because (1))$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f_{x_1}(\vec{x}) - f_{x_1}(a_1, \dots, a_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{x_1 - a_1} = 0 \quad (\because \lim c = c, \text{ 和の極限})$$

よって任意の δ に対して

$$|\vec{x} - \vec{a}| < \epsilon \text{ ならば } \left| \frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, a_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{x_1 - a_1} \right| < \delta$$

また $|\vec{x} - \vec{a}| \geq |x_1 - a_1|$ (\because 三角不等式) なので

$$\left| \frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| \leq \left| \frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{x_1 - a_1} \right| < \delta$$

よって

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0$$

よって $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ で

$$f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$$

$$(注) \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m)}{(x_1 - a_1)} = f_{x_1}(a_1, \dots, x_m) \quad (*)$$

から始める $\lim_{x_1 \rightarrow a_1}$ を $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}}$ に変換できなくて失敗する

平均値の定理を利用するうまく $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}}$ を導ける

平均値の定理は \vec{a} 近傍での f の連続性と微分可能性を利用できるが

(*) から始める \vec{a} での連続性と微分可能性しか

利用できないからだと思われる

P.11 数学の定理 1.1 $f(a_1, x_2..x_m) - f(a_1, a_2..x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(a) = o(|x - a|)$ '25 5.17

f は \vec{a} の近傍で連続的微分可能ならば

$$\vec{x} \rightarrow \vec{a} \text{ で } f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|) \text{ である}$$

(証明)

x_1 の場合(別頁)と同様に

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(x_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0$$

である

$$g(x_1, \dots, x_m) = \frac{f(\vec{x}) - f(x_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|}$$

とする

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} |g(x_1, \dots, x_m)| = 0$$

なので

任意の $\epsilon > 0$ に対して $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ ならば $|g(x_1, \dots, x_m)| < \epsilon$ である

ここで

$$|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}| \leq |\vec{x} - \vec{a}| \quad (\because \text{三角不等式})$$

$$< \delta$$

なので $|g(a_1, x_2, \dots, x_m)| < \epsilon$ である

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} |g(a_1, x_2, \dots, x_m)| = 0$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a})}{|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}|} \right| = 0$$

ここで $|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}| \leq |\vec{x} - \vec{a}|$ (\because 三角不等式) なので

$$\left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right|$$

$$\leq \left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a})}{|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}|} \right|$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (*1)$$

(*1) $|f| \leq |g|, \lim g = 0$ ならば $\lim f = 0$)

$$\therefore f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$$

P.11 数学の定理 1.1 $f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x-a) + o(|x-a|)$ '25 4.6

f は \vec{a} の近傍で連続的微分可能ならば

$$\vec{x} \rightarrow \vec{a} \text{ で } f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla}f(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + o(|\vec{x} - \vec{a}|) \text{ である}$$

(証明)

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(x_1, \dots, x_m) - f(a_1, \dots, x_m) - f_{x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1)}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (\text{別頁})$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(a_1, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - f_{x_2}(\vec{a})(x_2 - a_2)}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (\text{別頁})$$

⋮

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m) - f(a_1, \dots, a_m) - f_{x_m}(\vec{a})(x_m - a_m)}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (\because x_1, x_2 \text{ の場合と同様})$$

足し合わせて

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - f_{x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) - f_{x_2}(\vec{a})(x_2 - a_2) - \dots - f_{x_m}(\vec{a})(x_m - a_m)}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (*1)$$

(*1) $\lim |f| = 0, \lim |g| = 0$ ならば $\lim |f| + |g| = 0$

$|f + g| \leq |f| + |g|$ (三角不等式)

なので $\lim |f + g| = 0$

ここで

$$\vec{\nabla}f(\vec{a}) = (f_{x_1}(\vec{a}), \dots, f_{x_m}(\vec{a}))$$

$$(\vec{x} - \vec{a}) = (x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m)$$

$$\vec{\nabla}f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = f_{x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \dots + f_{x_m}(\vec{a})(x_m - a_m)$$

なので

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \vec{\nabla}f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0$$

$$\therefore f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \vec{\nabla}f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|) \quad (\because \text{付録Aの } o(\dots) \text{ の定義})$$

$$\therefore f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla}f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + o(|\vec{x} - \vec{a}|) \quad (\because f + h = o(\dots) \Leftrightarrow f = -h + o(\dots) \text{ と定義する})$$

P.12 数学の定理 1.2 n 階までの導関数は微分の順序によらない'25 4.8

ある開領域で $f(x_1, \dots, x_m)$ が C^∞ 級ならば

その領域で n 階までの偏導関数は微分の順序によらない

(証明)

f の 2 階以上 n 階以下の偏導関数を考える

$$f_{x_{p_1} \dots x_{p_i} x_{p_j} \dots x_{p_k}}$$

f は C^∞ 級なので

$f_{x_{p_1} \dots x_{p_i} x_{p_j}}$ は存在し連続である

また $f_{x_{p_1} \dots x_{p_j} x_{p_i}}$ も存在し連続である

よって $f_{x_{p_1} \dots x_{p_i} x_{p_j}} = f_{x_{p_1} \dots x_{p_j} x_{p_i}}$ ($\because f_{xy} = f_{yx}$ 別頁)

よって $f_{x_{p_1} \dots x_{p_i} x_{p_j} \dots x_{p_k}} = f_{x_{p_1} \dots x_{p_j} x_{p_i} \dots x_{p_k}}$ (1)

p_1, \dots, p_k を昇順に並べたリストを q_1, \dots, q_k とする

(1) より x_{q_1} による偏微分を左隣りの変数の偏微分との入れ換えをくりかえして

$f_{x_{p_1} \dots x_{p_k}} = f_{x_{q_1} \dots x_{p_k}}$ とする

x_{q_1} と同様に x_{q_2} について

$f_{x_{p_1} \dots x_{p_k}} = f_{x_{q_1} x_{q_2} \dots x_{p_k}}$ とする

これを繰り返して

$f_{x_{p_1} \dots x_{p_k}} = f_{x_{q_1} \dots x_{q_k}}$ となる

r_1, \dots, r_2 は p_1, \dots, p_2 を任意に並べ替えたリストとする。上と同様に

$f_{x_{r_1} \dots x_{r_k}} = f_{x_{q_1} \dots x_{q_k}}$ となる

よって $f_{x_{r_1} \dots x_{r_k}} = f_{x_{p_1} \dots x_{p_k}}$ となる

よって n 階までの偏導関数は微分の順序によらない

P.12 数学の定理 1.2 $f_{xy} = f_{yx}$ '25 4,8

(2 変数の場合)

ある開領域で f_{xy}, f_{yx} が連続ならば $f_{xy} = f_{yx}$ である

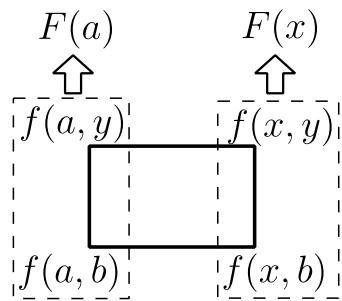
(証明)

領域内の任意の点 $(a, b), (x, y)$ とする

$\Delta(x, y) = (f(x, y) - f(x, b)) - (f(a, y) - f(a, b))$ とする

$F(x) = f(x, y) - f(x, b)$ とすると

$\Delta(x, y) = F(x) - F(a)$



領域内で f は連続なので x の区間 $[a, x]$ で $f(x, y), f(x, b)$ は連続

よって $F(x)$ は x の区間 $[a, x]$ で連続 (*1)

領域内で f は偏微分可能なので x の区間 (a, x) で $f(x, y), f(x, b)$ は x で微分可能

よって $F(x)$ は x の区間 (a, x) で x で微分可能 (*2)

よって平均値の定理より

$$\begin{aligned}\Delta(x, y) &= F(x) - F(a) \\ &= F'(a + (x-a)\theta_1)(x-a), \quad 0 < \theta_1 < 1 \\ &= (f_x(a + (x-a)\theta_1, y) - f_x(a + (x-a)\theta_1, b))(x-a) \quad (*3)\end{aligned}$$

(*1) f, g が連続ならば $f + g$ も連続

(*2) f, g が微分可能ならば $f + g$ も微分可能

(*3) f_{xy} が存在するならば x, y は独立

$$x, y \text{ が独立ならば } f_x = \frac{d}{dx} f$$

領域内で f_x は連続かつ y で偏微分可能 ($\because f_{xy}$ が存在するので)

よって $f_x(a + (x-a)\theta_1, y)$ は y の区間 $[b, y]$ で連続かつ 区間 (b, y) で y で微分可能

よって平均値の定理より

$$\begin{aligned}f_x(a + (x-a)\theta_1, y) - f_x(a + (x-a)\theta_1, b) \\ = f_{xy}(a + (x-a)\theta_1, b + (y-b)\theta_2)(x-b), \quad 0 < \theta_2 < 1 \quad (*4)\end{aligned}$$

(*4) x, y は独立なので

$$f_{xy} = \frac{f'_x}{y \text{ で微分}}$$

よって

$$\Delta(x, y) = f_{xy}(a + (x - a)\theta_1, b + (y - b)\theta_2)(x - a)(x - b)$$

$$x' = a + (x - a)\theta_1$$

$$y' = b + (y - b)\theta_2$$

とすると

$$\frac{\Delta(x, y)}{(x - a)(x - b)} = f_{xy}(x', y')$$

f_{xy} は連続なので

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f_{xy}(x, y) = f_{xy}(a, b)$$

よって任意の ϵ に対して

$$|(x, y) - (a, b)| < \delta \text{ ならば } |f_{xy}(x, y) - f_{xy}(a, b)| < \epsilon$$

また

$$\begin{aligned} |(x', y') - (a, b)| &= \sqrt{(a + (x - a)\theta_1 - a)^2 + (b + (y - b)\theta_2 - b)^2} \\ &= \sqrt{(x - a)^2\theta_1^2 + (y - b)^2\theta_2^2} \\ &< |(x, y) - (a, b)| \quad (\because 0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1) \end{aligned}$$

$$\text{よって } |(x', y') - (a, b)| < \delta \text{ ので } |f_{xy}(x', y') - f_{xy}(a, b)| < \epsilon$$

$$\text{よって } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f_{xy}(x', y') = f_{xy}(a, b)$$

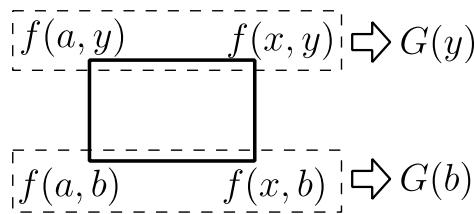
$$\text{よって } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{\Delta(x, y)}{(x - a)(y - b)} = f_{xy}(a, b) \quad (1)$$

$\Delta(x, y)$ の右辺の順番をかえて

$$\Delta(x, y) = (f(x, y) - f(a, y)) - (f(x, b) - f(a, b)) \text{ とする}$$

$G(y) = f(x, y) - f(a, y)$ とする

$$\Delta(x, y) = G(y) - G(b)$$



f は領域で連続なので 区間 $[b, y]$ で $f(x, y), f(a, y)$ は連続

よって $G(y)$ は 区間 $[b, y]$ で連続 ($\because f, g$ が連続ならば $f + g$ は連続)

f は領域で偏微分可能なので 区間 (b, y) で $f(x, y), f(a, y)$ は y で微分可能

$$(\because x, y \text{ が独立なので } f_y = \frac{f'}{y \text{ で微分}})$$

よって $G(y)$ は区間 (b, y) で y で微分可能 ($\because (f+g)' = f' + g'$)

よって平均値の定理より

$$\Delta(x, y) = G'(b + (y - b)\theta_3)(y - b), \quad 0 < \theta_3 < 1$$

$$= (f_y(x, b + (y - b)\theta_3) - f_y(a, b + (y - b)\theta_3))(y - b) \quad (\because f_y = \underset{y \text{ で微分}}{f'_y})$$

領域内で f_y は連続かつ x で偏微分可能なので

$$f_y(x, b + (y - b)\theta_3) \text{ は 区間 } [a, x] \text{ で連続かつ 区間 } (a, x) \text{ で } x \text{ で微分可能 } (\because x, y \text{ が独立ならば } f_{yx} = \underset{x \text{ で微分}}{f'_y})$$

よって平均値の定理より

$$\Delta(x, y) = f_{yx}(a + (x - a)\theta_4, b + (y - b)\theta_3)(y - b)(x - a), \quad 0 < \theta_4 < 1$$

$$x' = a + (x - a)\theta_4$$

$$y' = b + (y - b)\theta_3$$

とすると

$$\Delta(x, y) = f_{yx}(x', y')(y - b)(x - a)$$

$$\text{よって } \frac{\Delta(x, y)}{(y - b)(x - a)} = f_{yx}(x', y')$$

f_{yx} は連続なので

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f_{yx}(x, y) = f_{yx}(a, b)$$

よって任意の ϵ に対して

$$|(x, y) - (a, b)| < \delta \text{ ならば } |f_{yx}(x, y) - f_{yx}(a, b)| < \epsilon$$

また

$$\begin{aligned} |(x', y') - (a, b)| &= \sqrt{(a + (x - a)\theta_4 - a)^2 + (b + (y - b)\theta_3 - b)^2} \\ &= \sqrt{(x - a)^2\theta_4^2 + (y - b)^2\theta_3^2} \\ &< |(x, y) - (a, b)| \quad (\because 0 < \theta_3 < 1, 0 < \theta_4 < 1) \end{aligned}$$

よって $|(x', y') - (a, b)| < \delta$ なので

$$|f_{yx}(x', y') - f_{yx}(a, b)| < \epsilon$$

$$\text{よって } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f_{yx}(x', y') = f_{yx}(a, b)$$

$$\text{よって } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{\Delta(x, y)}{(y - b)(x - a)} = f_{yx}(a, b) \quad (2)$$

よって (1), (2) より

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

a, b は任意なので

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

P.12 補足 $x \neq 0$ で $f(x)$ は連続 '25 4.23

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$ で $f(x)$ は連続

(証明)

x は連続 (*1)

よって $x \neq 0$ ならば $\frac{1}{x}$ は連続 (*2)

よって $x \neq 0$ ならば $\frac{1}{x^2}$ は連続 (*3)

よって $x \neq 0$ ならば $-\frac{1}{x^2}$ は連続 (*3)

よって $x \neq 0$ ならば $e^{-\frac{1}{x^2}}$ は連続 (*4)

$0 < |x - a| < |a|$ ならば $x \neq 0$

($\because x = 0$ とすると $|a| < |a|$ となり矛盾)

$e^{-\frac{1}{x^2}}$ は $x \neq 0$ で連続なので

任意の ϵ に対して

$$0 < |x - a| < \delta \text{ ならば } \left| e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{1}{a^2}} \right| < \epsilon$$

よって $0 < |x - a| < \min(|a|, \delta)$ ならば

$x \neq 0$ なので $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

また $\left| e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{1}{a^2}} \right| < \epsilon$

$$\therefore |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

よって $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

よって $x \neq 0$ ならば $f(x)$ は連続

(*1) $0 < |x - a| < \epsilon$ ならば

$$|x - a| < \epsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

(*2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F, F \neq 0$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{F}$

(証明)

任意の ϵ に対し $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - F| < \epsilon \cdots (1)$

$$\epsilon = \frac{|F|}{2} \text{ とすると}$$

$$0 < |x - a| < \delta' \text{ ならば } |f(x) - F| < \frac{|F|}{2}$$

$$\therefore |F| - |f(x)| < \frac{|F|}{2} (\because \text{三角不等式 } |F| - |f(x)| \leq |F - f(x)|)$$

$$\therefore |f(x)| > \frac{|F|}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|F|} \cdots (2)$$

($\because F \neq 0$ なので $|F| > 0, 0 < a < b$ ならば $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$)

任意の ϵ' に対して $\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon'F^2$ とする

$0 < |x - a| < \min(\delta, \delta')$ ならば

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F} \right| = \frac{|f(x) - F|}{|f(x)||F|} < \frac{2\epsilon}{F^2} = \epsilon' (\because (1), (2))$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{F}$$

(*3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} fg = FG$

(証明)

任意の ϵ に対して $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f - F| < \epsilon, |g - G| < \epsilon \cdots (1)$

$\epsilon = |F|$ とすると

$0 < |x - a| < \delta'$ ならば $|f - F| < |F|$

$\therefore |f| - |F| < |F| (\because \text{三角不等式 } |a| - |b| \leq |a - b|)$

$\therefore |f| < 2|F| \cdots (2)$

任意の ϵ' に対して $\epsilon = \frac{\epsilon'}{|G| + 2|F|}$ とする

$0 < |x - a| < \min(\delta, \delta')$ ならば

$$\begin{aligned} |fg - FG| &= |fg - fG + fG - FG| \\ &= |f(g - G) + G(f - F)| \\ &\leq |f(g - G)| + |G(f - F)| (\because \text{三角不等式 } |a + b| \leq |a| + |b|) \\ &= |f||g - G| + |G||f - F| \\ &< 2|F|\epsilon + \epsilon|G| (\because (1)(2)) \\ &= \epsilon(2|F| + |G|) = \epsilon' \end{aligned}$$

よって $\lim_{x \rightarrow a} fg = FG$

(*4) a で $f(x)$ は連続, $f(a)$ で $g(x)$ は連続ならば a で $g(f(x))$ は連続

(証明)

$\lim_{x \rightarrow f(a)} g(x) = g(f(a))$ なので

任意の ϵ に対して $0 < |x - f(x)| < \delta$ ならば $|g(x) - g(f(a))| < \epsilon$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ なので

$0 < |x - a| < \delta'$ ならば $|f(x) - f(a)| < \delta$

よって $0 < |x - a| < \delta'$ ならば $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$

よって $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(f(a))$

よって a で $g(f(x))$ は連続

P.12 補足 $x=0$ で $f(x)$ は連続 '25 4.23

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ で $f(x)$ は連続

(証明)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} &= \infty \quad (*1) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} &= 0 \quad (*4) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because x \neq 0) \\ &= 0 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

よって $x = 0$ で $f(x)$ は連続

$$\begin{aligned} (*1) e^{\frac{1}{x^2}} &= 1 + \left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}{2} + \dots \quad (\because e^x \text{ の定義}) \\ &> 1 + \frac{1}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) &= \infty \quad (*2) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} &= \infty \quad (*3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*2) \text{ 任意の } \epsilon > 1 \text{ に対して } 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon - 1}} \text{ ならば} \\ x^2 &< \frac{1}{\epsilon - 1} \quad (\because 0 < a < b \text{ ならば } a^2 < b^2) \\ \frac{1}{x^2} &> \epsilon - 1 \quad (\because 0 < a < b \text{ ならば } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}) \\ \therefore 1 + \frac{1}{x^2} &> \epsilon \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{x^2} &= \infty \end{aligned}$$

$$(*3) g(x) > f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

(証明)

$$\begin{aligned} \text{ 任意の } \epsilon \text{ に対して } 0 < |x - a| < \delta \text{ ならば } f(x) > \epsilon \\ \therefore g(x) &> \epsilon \\ \therefore \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= \infty \end{aligned}$$

$$(*4) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

(証明)

$$\begin{aligned} \text{ 任意の } \epsilon \text{ に対して } 0 < |x - a| < \delta \text{ ならば } f(x) > \epsilon \\ \therefore \frac{1}{f(x)} &< \frac{1}{\epsilon} \quad (\because 0 < a < b \text{ ならば } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}) \\ \text{ 任意の } \epsilon' \text{ に対して } \epsilon &= \frac{1}{\epsilon'} \text{ とする} \end{aligned}$$

P.12 補足 $x \neq 0$ で C^∞ 級 '25 4.25

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$ で C^∞ 級

(証明)

$x \neq 0$ とする

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' \\ &= \left(-\frac{1}{x^2} \right)' e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (*1), (*2) \\ &= -\left(\frac{1}{x^2} \right)' e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because \text{積の微分}) \\ &= -(-2)x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (*3) \\ &= 2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

である。

$n > 0$ で

$$f^{(n)} = \left(\sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

と仮定する

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} \right)' &= \sum_{\nu=1}^m k_\nu (x^{-\nu})' \quad (\because \text{和, 積の微分}) \\ &= \sum_{\nu=1}^m (-\nu k_\nu) x^{-\nu-1} \quad (*3) \dots (2) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= \left(\sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} \right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + \left(\sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} \right) \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' \quad (\because \text{積の微分}) \\ &= \sum_{\nu=1}^m (-\nu k_\nu) x^{-\nu-1} e^{-\frac{1}{x^2}} + \sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} 2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because (1), (2)) \\ &= \left(\sum_{\nu=1}^m -\nu k_\nu x^{-\nu-1} + \sum_{\nu=1}^m 2k_\nu x^{-\nu-3} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left(\sum_{i=2}^{m+1} -(i-1)k_{i-1}x^{-i} + \sum_{i=4}^{m+3} 2k_{i-3}x^{-i} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left((-1)k_1x^{-2} + (-2)k_2x^{-3} + \sum_{i=4}^{m+1} -(i-1)k_{i-1}x^{-i} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=4}^{m+1} 2k_{i-3}x^{-i} + 2k_{m-1}x^{-(m+1)} + 2k_m x^{-(m+3)} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left((-1)k_1x^{-2} + (-2)k_2x^{-3} + \sum_{i=4}^{m+1} (-(i-1)k_{i-1} + 2k_{i-3})x^{-i} \right. \\ &\quad \left. + 2k_{m-1}x^{-(m+1)} + 2k_m x^{-(m+3)} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

ここで

$$p_i = \begin{cases} 0 & (i=1) \\ -(i-1)k_{i-1} & (i=2,3) \\ -(i-1)k_{i-1} + 2k_{i-3} & (i=4, \dots, m+1) \\ 2k_{i-3} & (i=m+2, m+3) \end{cases}$$

$$s = m+3$$

とする

$$f^{(n+1)} = \left(\sum_{i=1}^s p_i x^{-i} \right) e^{-1/x^2}$$

よって、 $x \neq 0, n > 0$ において

$$f^{(n)} = \left(\sum_{\nu=1}^m k_{\nu} x^{-\nu} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

である。

すべての n で $f^{(n)}$ は存在するので f は C^∞ 級である

(*1) 合成関数の微分

$$g'(x), f'(g(x)) \text{ が存在するなら}$$

$$f(g(x))' = g'(x)f'(g(x))$$

(*2) $(e^x)' = e^x$

(証明)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\because e^x \text{ の定義})$$

右辺の項別微分を考える

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)' &= (1)' + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} \quad (*2.1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (*2.2) \\ &= e^x \quad (\because e^x \text{ の定義}) \end{aligned}$$

ここで任意の x に対して

$-A \leq x \leq A, A > 0$ なる区間を考える

$$\left| \frac{x^{\nu}}{\nu!} \right| \leq \frac{A^{\nu}}{\nu!}, \nu = 0, 1, 2, \dots \text{ である}$$

$$\text{また } \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^{\nu}}{\nu!} = e^a \quad (\because e^a \text{ の定義})$$

なので $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{\nu!}$ は区間 $[-A, A]$ で一様収束する

(\because 定理：ある区間で $|a_n(x)| \leq C_n$ なる定数 C_n があって

$\sum C_n$ が収束するならば $\sum a_n$ は一様収束する)

よって $(e^x)' = e^x$

(\because 定理：無限級数が収束し各項の導関数が連続で項別微分が一様収束するならば無限級数の導関数は項別微分に等しい)

(*2.1) $(1)' = 0$

$$n > 0 \text{ ならば } x^n = nx^{n-1} \quad (*3)$$

$$(kf(x))' = kf'(x) \quad (\because \text{積の微分})$$

$$(*2.2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(*3) $x \neq 0, n > 0$ ならば

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

(証明)

$$(x^n)' = -nx^{-n-1} \text{ と仮定する}$$

$$\begin{aligned} (x^{n+1})' &= (xx^n)' = (x)'x^n + x(x^n)' (\because \text{積の微分}) \\ &= x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n \end{aligned}$$

$$(x)' = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$$

$$\text{よって } (x^n)' = nx^{n-1}, n = 1, 2, \dots$$

よって $x \neq 0, n = 1, 2, \dots$ ならば

$$\begin{aligned} (x^{-n})' &= \left(\frac{1}{x^n} \right)' = \frac{1'x^n - 1(x^n)'}{x^{2n}} (\because \text{商の微分}) \\ &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} \end{aligned}$$

P.12 補足 $x=0$ で C^∞ 級 '25 5.20

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ で C^∞ 級

(証明)

$x \neq 0$ で

$f^{(n)}$ は 別頁 より

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= \left(\sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\nu} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (*1) \text{ なので}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0 \quad (\because \text{和、積の極限})$$

$x = 0$ で f は連続 (\because 別紙)

$$\text{かつ } \lim_{x \rightarrow 0} f^{(1)}(x) = 0 \text{ なので}$$

$$f^{(1)}(0) = 0 \quad (\because p.7, (1.5), (1.6) a \text{ で連続}, \lim_{x \rightarrow a} f'(x) \text{ が存在するなら } \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = f'(a))$$

$$f^{(n)}(0) = 0 \text{ と仮定する}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0 = f^{(n)}(0)$$

よって 0 で $f^{(n)}(x)$ は連続

$$\text{かつ } \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(x) = 0 \text{ なので}$$

$$f^{(n+1)}(0) = 0 \quad (\because p.7, (1.5), (1.6))$$

よって任意の n で $f^{(n)}(0) = 0$

よって $x = 0$ で f は C^∞ 級

$$(*1) e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \dots$$

なので

$$e^{\frac{1}{x^2}} = 1 + x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-4} + \dots$$

$2n\nu \geq 2(n-1)$ とする

$$\begin{aligned} |x^\nu e^{\frac{1}{x^2}}| &= |x^\nu| \left(1 + x^{-2} + \dots + \frac{1}{n!} x^{-2n} \right) \\ &= |x^\nu| + |x^{\nu-2}| + \dots + \frac{1}{n!} |x^{\nu-2n}| \end{aligned}$$

$\nu, \nu-2, \dots, \nu-2(n-1) \geq 0$ なので

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x^\nu| = 0, \dots, \lim_{x \rightarrow 0} |x^{\nu-2(n-1)}| = 0 \text{ or } 1$$

$\nu - 2n < 0$ なので

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x^{\nu-2n}| = \infty$$

$$\begin{aligned}
& \therefore \lim_{x \rightarrow 0} |x^\nu| + \cdots + \frac{1}{n!} |x^{\nu-2n}| = \infty \quad (\because \text{和の極限}) \\
& \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x^\nu| + \cdots + \frac{1}{n!} |x^{\nu-2n}|} = 0 \\
& \frac{1}{|x^\nu e^{\frac{1}{x^2}}|} < \frac{1}{|x^\nu| + \cdots + \frac{1}{n!} |x^{\nu-2n}|} \text{ となる} \\
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x^\nu e^{\frac{1}{x^2}}|} = 0 \\
& \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^\nu e^{\frac{1}{x^2}}} = 0
\end{aligned}$$

P.12 補足 $x=0$ で C^∞ 級であるが解析的でない '25 5.21

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ で C^∞ 級であるが解析的でない

(証明)

$x = 0$ での $f(x)$ のテーラー級数を $T(x)$ とする

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$f^{(n)}(0) = 0$ (\because 別紙) なので $T(0) = 0$

$a \neq 0$ とする $f(a) \neq 0$, $T(a) = 0$ なので

$T(a) \neq f(a)$

よって $x \neq 0$ ならば $f(x) \neq T(x)$

よって $x = 0$ の近傍で f はテーラー級数と一致しない

よって $x = 0$ の近傍で f はべき級数で表すことができない

(\because 定理: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ はテーラー級数である)

よって $x = 0$ の近傍で f は解析的でない

P.12 補足 収束するテーラー級数の部分和が $f(x)$ の近似にならない例 '25 6.9

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ を中心とした $f(x)$ のテーラー級数 $T(x)$ とする

$T(x)$ の収束半径は ∞ よって任意の x でテーラー級数は収束する。

このとき、 $x \neq 0$ でテーラー級数の部分和の次数をいくら上げても部分和が $f(x)$ の近づくことはない

(証明)

$x = 0$ での $f(x)$ のテーラー級数を $T(x)$ とする

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$f^{(n)}(0) = 0$ (\because 別紙) なので $T(x) = 0$

すべての x について $T(x)$ は収束するので、収束半径は $R_f = \infty$

$|1| < R_f$ なので $T(1)$ は収束して $T(1) = 0$

また $f(1) = e^{-\frac{1}{1^2}} = e^{-1}$

よって $T(1)$ の部分和の次数を上げたとき部分和が近づくのは 0 である。 e^{-1} には近づかない

(補足)

収束半径内にあることは、テーラー級数 $T(x)$ が元の関数 $f(x)$ に一致することの十分条件ではない

テーラーの定理の剩余項が 0 に近づくならばテーラー級数と関数は一致する

この場合、剩余項は

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} 1^n, \quad 0 < c < 1$$

$$f^{(1)}(x) = 2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f^{(n)}(x) = \left(\sum_{\nu=1}^m k_{\nu} x^{-\nu} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because \text{別紙})$$

となる。

$n \rightarrow 0$ で $R_n \neq 0$ の筈であるが、証明？

P.12 補足 $x \neq 0$ で $f(x)$ は解析的 '25 6.4

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$ で $f(x)$ は解析的

(証明)

x は a を中心とするべき級数で表される (*1)

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad a_n = \begin{cases} a & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ 0 & (n>1) \end{cases}$$

収束半径は ∞

$$(*1) F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, a_n = \begin{cases} a & (n=0) \\ 1 & (n=1) \text{ とする} \\ 0 & (n>1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0(x-a)^0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + \dots \\ &= a + (x-a) + 0 \\ &= x \end{aligned}$$

任意の x で収束するので、収束半径は ∞

$\frac{1}{x}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数で表される (*2)

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n, \quad b_n = (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}}$$

収束半径は $|a|$

(*2) $a \neq 0$ とする

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \text{ とする。収束すると仮定する}$$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, a_n = \begin{cases} a & (n=0) \\ 1 & (n=1) \text{ とする} \\ 0 & (n>1) \end{cases}$$

$1 = xG(x)$ とする

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (x-a)^n (\because \text{コーシー積より}) \\ &= \sum_{k=0}^0 a_k b_{0-k} (x-a)^0 + \sum_{k=0}^1 a_k b_{1-k} (x-a)^1 + \sum_{k=0}^2 a_k b_{2-k} (x-a)^2 + \dots \\ 1 &= \sum_{k=0}^0 a_k b_{0-k} \text{ と仮定する } 1 = a_0 b_0 \therefore b_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{a} \\ 0 &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} (n>0) \text{ と仮定する} \end{aligned}$$

$$0 = a_0 b_0 + a_1 b_{n-1} + \sum_{k=2}^n a_k b_{n-k}$$

$$\therefore 0 = ab_n + b_{n-1} + 0 (\because a_0 = a, a_1 = 1, a_k = 0 (k>1))$$

$$\therefore b_n = -\frac{1}{a} b_{n-1}$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{a} \right)^n = (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}}$$

これを踏まえて

$a \neq 0$ とする

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n, b_n = (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \text{ とする}$$

$G(x)$ は初項 $\frac{1}{a}$ 、公比 $\frac{-1}{a}(x-a)$ の等比級数

よって $\left| \frac{-1}{a}(x-a) \right| < 1$ 即ち $|x-a| < |a|$ ならば収束する

よって $|x-a| < |a|$ ならば

$$G(x) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{-1}{a}(x-a)} = \frac{1}{a + (x-a)} = \frac{1}{x} \quad (\because \text{等比級数の公式})$$

また等比級数なので $\left| \frac{-1}{a}(x-a) \right| > 1$ 即ち $|x-a| > |a|$ ならば収束しない

よって収束半径は $|a|$

$\frac{1}{x^2}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数で表される (*3)

$|x-a| < |a|$ ならば

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad c_n = (-1)^n \frac{n+1}{a^{n+2}}$$

級数は絶対収束する。

(*3) $|x-a| < |a|$ とする

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n, b_n = (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \text{ とする}$$

級数は絶対収束する。よって

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k b_{n-k} (x-a)^{n-k} \dots (1) \left(\begin{array}{l} \because \text{絶対収束する級数の積は} \\ \text{コーシー積に等しい} \\ \text{またコーシー積は絶対収束する} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_k b_{n-k} \right) (x-a)^n \quad (\because \text{有限級数の線型性})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{a^{k+1}} (-1)^{n-k} \frac{1}{a^{n-k+1}} \right) (x-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \right) (x-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \sum_{k=0}^n 1 \right) (x-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{n+2}} (n+1) (x-a)^n$$

絶対収束する級数の積をあらわすコーシー積は絶対収束する

よって (1) よりこの級数は絶対収束する

(もしくは、収束するべき級数は絶対収束するのでこの級数は絶対収束する)

$-\frac{1}{x^2}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数で表される (*4)

$|x-a| < |a|$ ならば

$$-\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (x-a)^n, \quad s_n = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{a^{n+2}}$$

級数は絶対収束する。

(*4) $|x - a| < |a|$ とする

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{a^{n+2}} (x-a)^n$$

よって

$$-\frac{1}{x^2} = (-1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{a^{n+2}} (x-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{a^{n+2}} (x-a)^n (\because \text{絶対収束する級数は線型性をもつ})$$

$$\text{また } \sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n+1}{a^{n+2}} (x-a)^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n+1}{a^{n+2}} (x-a)^n \right|$$

$\frac{1}{x^2}$ の級数が絶対収束するので右辺は収束する

よって $-\frac{1}{x^2}$ の級数は絶対収束する

e^x は 0 を中心とするべき級数で表される

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (\because e^x \text{の定義})$$

すべての x について収束する (*5) よって収束半径は ∞

(*5) $\sum \left| \frac{x^n}{n!} \right|$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0$$

よってダランベールの判定法より $\sum \left| \frac{x^n}{n!} \right|$ は収束する

よって $\sum \frac{x^n}{n!}$ は収束する

最後に $e^{-\frac{1}{x^2}}$ のべき級数を求める。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, a_n = \frac{1}{n!} \text{ とする}$$

$a \neq 0, |x - a| < |a|$ とする

$$-\frac{1}{x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} s_m (x-a)^m, s_m = (-1)^{m+1} \frac{m+1}{a^{m+2}} \text{ とする}$$

べき級数の合成 (別頁) より

$$\sum_{m=0}^{\infty} |s_m (x-a)^m| < \infty \text{ ならば}$$

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} d_p (x-p)^p, d_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} s_{k_1} \dots s_{k_n}$$

である

$$\begin{aligned} d_p &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} (-1)^{k_1+1} \frac{k_1+1}{a^{k_1+2}} \dots (-1)^{k_n+1} \frac{k_n+1}{a^{k_n+2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} (-1)^{p+n} \frac{(k_1+1) \dots (k_n+1)}{a^{p+2n}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^p \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} (k_1+1)\dots(k_n+1) \quad (\because \text{有限級数の線型性})$$

$$a \neq 0, |x-a| < |a| \text{ ならば } -\frac{1}{x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} s_m (x-a)^m \text{ は絶対収束する}$$

よって $\sum_{m=0}^{\infty} |s_m (x-a)^m|$ は収束する

よって $\sum_{m=0}^{\infty} |s_m (x-a)^m| < \infty$

よって $a \neq 0, |x-a| < |a|$ ならば

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} d_p (x-a)^p$$

$$d_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^p \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} (k_1+1)\dots(k_n+1)$$

$e^{-\frac{1}{x^2}}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数であらわされる。よって解析的である。

$x \neq 0 \Rightarrow f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ なので $x \neq 0 \Rightarrow f(x)$ は解析的である。

(収束性について)

$a \neq 0, |x-a| < |a|$ において $-\frac{1}{x^2}$ と e^x の級数は絶対収束するので、コーチー積の $e^{-\frac{1}{x^2}}$ の級数も絶対収束する

(注) 「収束半径=一番近い特異点までの距離」は実関数では成立しないので簡単に収束半径 $|a|$ とは言えない

(最初の 3 項を求めてみる)

$$d_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^0 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n \sum_{k_1+\dots+k_n=0} (k_1+1)\dots(k_n+1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n \cdot 1$$

$$= e^{-\frac{1}{a^2}}$$

$$d_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^1 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n \sum_{k_1+\dots+k_n=0} (k_1+1)\dots(k_n+1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right) \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n n C_1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{-1}{a} \right) \left(\frac{-1}{a^2} \right) \left(\frac{-1}{a^2} \right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{a^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{-1}{a^2} \right)^{n-1} \quad \left(\begin{array}{l} (\text{別頁}) : \text{べき級数の合成より } dp \text{ は絶対収束する} \\ \text{なので線型性をもつ} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{a^3} e^{-\frac{1}{a^2}}$$

$$d_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^2 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n \sum_{k_1+\dots+k_n=2} (k_1+1)\dots(k_n+1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^2 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n (4_n C_2 + 3_n C_1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^2 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n (2n(n-1) + 3n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^2 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n 2n(n-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^2 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n 3n \quad (\because dp \text{ の線型性})$$

$$= \frac{2}{a^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{-1}{a^2} \right)^{n-2} + \frac{-3}{a^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{-1}{a^2} \right)^{n-1} \quad (\because dp \text{ の線型性})$$

$$= \frac{2}{a^6} e^{-\frac{1}{a^2}} + \frac{-3}{a^4} e^{-\frac{1}{a^2}} \quad (\because e^x \text{ の定義})$$

$$= \left(\frac{2}{a^6} - \frac{3}{a^4} \right) e^{-\frac{1}{a^2}}$$

よって

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \approx e^{-\frac{1}{a^2}} + \frac{1}{a^2} e^{-\frac{1}{a^2}} + \frac{1}{a^3} e^{-\frac{1}{a^2}} + \left(\frac{2}{a^6} - \frac{3}{a^4} \right) e^{-\frac{1}{a^2}}$$

P.12 補足 べき級数の合成 '25 6.1

$$|x - a| < R_f \text{ ならば } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \text{ とする}$$

$$|x - b| < R_g \text{ ならば } g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - b)^m \text{ とする}$$

$R_f > 0, R_g > 0$ とする。このとき

$$|x - b| < R_g \text{かつ } \sum_{m=0}^{\infty} |c_m (x - b)^m| < R_f, c_m = \begin{cases} b_0 - a & (m = 0) \\ b_m & (m > 0) \end{cases} \text{ ならば}$$

$f(g(x))$ は b を中心としてべき級数であらわされる

(証明)

$$|x - b| < R_g \text{ とする}$$

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - a)^m \text{ とする}$$

$$g(x) - a = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - b)^m - a = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - b)^m, c_m = \begin{cases} b_0 - a & (m = 0) \\ b_m & (m > 0) \end{cases} \text{なる } c_m \text{が存在する}$$

($\because \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - b)^m$ は収束するので線型性をもつ)

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m (x - b)^m| < R_f \text{ とする}$$

$$\therefore \left| \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - b)^m \right| < R_f (\because |a + b| \leq |a| + |b|)$$

$$\therefore |g(x) - a| < R_f$$

$$\begin{aligned} \therefore f(g(x)) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (g(x) - a)^n (\because g(x) \text{は } f \text{の収束半径内にあるので}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - b)^m \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x - a)^p (\because \text{別紙:べき級数のべき}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x - a)^p \left(\begin{array}{l} (\because \text{別紙:べき級数のべきは絶対収束する}) \\ (\text{また収束する級数は線型性をもつ}) \end{array} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x - a)^p \left(\begin{array}{l} (\because \sum |c_m (x - b)^m| < R_f \text{ならば}) \\ (\text{この二重級数は絶対収束する}(*1)) \\ (\text{よって和の順番を変えてよい}) \end{array} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} \right) (x - a)^p \left(\begin{array}{l} (\because \text{二重級数は絶対収束する}(*1)) \\ (\text{よって内側の級数も絶対収束する}) \\ (\text{収束する級数は線型性を持つ}) \end{array} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} d_p (x - a)^p \end{aligned}$$

$$d_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} \text{ とする}$$

ここで 上の $f(g(x))$ をあらわす二重級数は絶対収束する (*1) よって内側の級数も絶対収束する。

よって $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x-a)^p \right|$ は収束する

$\therefore (\sum |a_n \sum c_{k_1} \dots c_{k_n}|) |x-a|^p$ は収束する (\because 収束する級数の線型性)

$R_f > 0$ なので $|x'-a| < R_f, x' \neq a$ なる x' が存在する

$(\sum |a_n \sum c_{k_1} \dots c_{k_n}|) |x'-a|^p = w$ とすると

$$\therefore \sum |a_n \sum c_{k_1} \dots c_{k_n}| = \frac{w}{|x'-a|^p} \in \mathbb{R}$$

よって d_p は絶対収束する

よって $|x-b| < R_g, \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| < R_f$ ならば $f(g(x))$ は a を中心とするべき級数であらわされる

なお、 $\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| < R_f$ は a を中心とする区間である (*2)

(*1)

$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x-a)^p$ は絶対収束する

(証明)

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| < R_f \text{ としているので}$$

$$\therefore \left| \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right| < R_f$$

$$\therefore \left| \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| + a - a \right| < R_f$$

$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| + a$ は f の収束半径内にあるので f のべき級数は絶対収束する

よって

$$\begin{aligned} \infty &> \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| + a - a \right)^n \right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n \right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left| \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n \right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n \quad (\because \sum |c_m(x-b)^m| \geq 0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} |c_{k_1}| \dots |c_{k_n}| |x-b|^p \quad (*1.1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k_1+\dots+k_n=p} |c_{k_1}| \dots |c_{k_n}| |x-b|^p \quad \left(\begin{array}{l} \text{(\because } \sum_{p=0}^{\infty} \dots \text{ は収束する (*1.1)} \\ \text{よって収束する級数の線型性より} \end{array} \right) \\ &> \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |a_n| \left| \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} \right| |x-b|^p \quad (\because |a| + |b| \geq |a+b|) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left| a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x-b)^p \right| \quad (\because |a||b| = |ab|) \end{aligned}$$

よって $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x-b)^p$ は絶対収束する

(*1.1)

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} |c_{k_1}| \dots |c_{k_n}| |x-b|^p$$

(証明)

$|c_m| = d_m$ とする

$|x-b| \geq 0$ のとき

$|x-b| = x-b$

よって

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} d_m(x-b)^m \right)^n \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} d_{k_1} \dots d_{k_n} (x-b)^p \quad (\because \text{別紙:べき級数のべき}) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} |c_{k_1}| \dots |c_{k_n}| |x-b|^p \end{aligned}$$

$|x-b| < 0$ のとき

$y = -x, b = -a$ とする $|x-b| = -x+b = y-a$

よって

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} d_m(y-a)^m \right)^n \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} d_{k_1} \dots d_{k_n} (y-a)^p \quad (\because \text{別紙:べき級数のべき}) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} |c_{k_1}| \dots |c_{k_n}| |x-b|^p \end{aligned}$$

よって $\left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} |c_{k_1}| \dots |c_{k_n}| |x-b|^p$

$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| < R_f$ が存在すると仮定しているので右辺の級数は存在する。すなわち収束する。

(*2)

$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| < R_f$ は b を中心とする区間である

(証明)

$A = \left\{ x \mid \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| < R_f \right\}$ とする

$\inf A = \sup A$ の場合

$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(b-b)^m| = 0 < R_f$ なので $b \in A$ である。

よって $b = \inf A = \sup A$

よって A は a を中心とする半径 0 の閉区間

$\inf A < \sup A, \sup A = \infty$ の場合

$\inf A = -\infty$ (*2.1)

$[-\infty, \infty] \subset A$ (*2.2)

$\therefore A = \mathbb{R}$

よって A は b を中心とする半径 ∞ の開区間

$\inf A < \sup A, \sup A < \infty$ の場合

$\inf A > -\infty$ (*2.1)

$b < \frac{\inf A + \sup A}{2}$ と仮定する

b を中心とした $\inf A$ の対称点 $2b - \inf A$ を考える

仮定より $2b - \inf A < \sup A$

$\sup A$ は上限なので

$2b - \inf A < x < \sup A, x \in A$ なる x が存在する

b を中心とした x の対称点 $2b - x$ について

$2b - \inf A < x$ より $2b - x < \inf A$ である

よって $2b - x \notin A$

よって (*2.1) より $x \notin A$

$x \in A$ なのでこれは矛盾

よって $b \not< \frac{\inf A + \sup A}{2}$

同様に $b \not> \frac{\inf A + \sup A}{2}$

$\therefore b = \frac{\inf A + \sup A}{2}$

また (*2.2) より $[\inf A, \sup A] \subset A$ または $(\inf A, \sup A) \subset A$

よって A は a を中心とする半径 $\frac{\inf A + \sup A}{2}$ の開区間または閉区間である

よって A は a を中心とする区間である。

(*2.1)

b を中心とした x の対称点を x' とする

$x' = x - 2(x - b) = 2b - x$ である

$$\begin{aligned}\sum |c_m(x' - b)^m| &= \sum |c_m(2b - x - b)^m| \\ &= \sum |c_m(-x + b)^m| \\ &= \sum |c_m(x - b)^m|\end{aligned}$$

$\therefore x \in A$ ならば $x' \in A$ である。

よって $x \notin A$ ならば $x' \notin A$ である

(*2.2)

$b < x < x_1$ とする

$$|x - b| < |x_1 - b|$$

$$\therefore \sum |c_m(x - b)^m| < \sum |c_m(x_1 - b)^m|$$

よって $x_1 \in A$ ならば $x \in A$... (1)

a を中心とした x_1 の対称点を x'_1 とする

$x'_1 < x < b$ とすると

$$2b - x'_1 > 2b - x > b$$

$$\therefore x_1 > 2b - x > b \quad (\because x'_1 = 2b - x_1)$$

(1) より $2b - x \in A$

x は $2b - x$ の b を中心とした対称点なので

(*2.1) より $x \in A$

よって $x_1 \in A$ ならば $[x'_1, x_1] \subset A$

P.12 補足 べき級数のべき '25 6.2

$$|x - a| < R_f \text{ ならば } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \text{ とする}$$

$|x - a| < R_f$ ならば $(f(x))^m, m \geq 1$ は a を中心としたべき級数であらわされる

(証明)

$|x - a| < R_f$ とする

$$\begin{aligned} (f(x))^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \dots (1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k a_{n-k} (x - a)^{n-k} \quad \left(\because \sum a_n (x - a)^n \text{ は絶対収束する} \right. \\ &\quad \left. \text{よって級数の積はコーシー積であらわされる} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) (x - a)^n \quad (\because \text{有限級数の線型性}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2=n} a_{k_1} a_{k_2} \right) (x - a)^n \quad (*1) \end{aligned}$$

$|x - a| < R_f$ ならば (1) のどちらの級数も絶対収束する。よってコーシー積も絶対収束する。よって $(f(x))^2$ をあらわす級数は絶対収束する

$$c_n^m = \sum_{k_1+\dots+k_m=n} a_{k_1} \dots a_{k_m}, \quad m \geq 2 \text{ とする}$$

$$(f(x))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 (x - a)^n \text{ である}$$

$$(f(x))^m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^m (x - a)^n \text{ と仮定する}$$

$|x - a| < R_f$ で絶対収束すると仮定する

$$\begin{aligned} (f(x))^{m+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n^m (x - a)^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \dots (2) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n c_k^m (x - a)^k a_{n-k} (x - a)^{n-k} \quad (\because \text{コーシー積}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n c_k^m a_{n-k} \right) (x - a)^n \quad (\because \text{有限級数の線型性}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \sum_{k_1+\dots+k_m=k} a_{k_1} \dots a_{k_m} a_{n-k} \right) (x - a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_{m+1}=n} a_{k_1} \dots a_{k_{m+1}} (x - a)^n \quad (*2) \end{aligned}$$

よって $m \geq 2$ ならば

$$(f(x))^m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^m (x - a)^n, \quad c_n^m = \sum_{k_1+\dots+k_m=n} a_{k_1} \dots a_{k_m} \text{ である}$$

(2) のどちらの級数も絶対収束するので、コーシー積も絶対収束する。

よって $|x - a| < R_f$ ならば絶対収束する

$$m = 1 \text{ ならば } (f(x))^1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

よって $m \geq 1$ で $(f(x))^m$ は a を中心とするべき級数であらわされる

$$(*1) A = \{(k, n-k) \mid n \geq k \geq 0\}$$

$B = \{(k_1, k_2) \mid k_1 + k_2 = n, k_1, k_2 \geq 0\}$ とする

$(a, b) \in A$ とする

$$b = n - a$$

$$\therefore a + b = n$$

また $n \geq a \geq 0$

$$\therefore b \geq 0$$

$$\therefore (a, b) \in B$$

$(a, b) \in B$ とする

$$a + b = n$$

$$\therefore b = n - a$$

$$b \geq 0$$
 より

$$n - a \geq 0$$

$$\therefore n \geq a$$

$a \geq 0$ なので

$$n \geq a \geq 0$$

$$\therefore (a, b) \in A$$

$$\therefore A = B$$

$$(*2) A = \{(k_1, \dots, k_m, n-k) \mid k_1 + \dots + k_m = k, 0 \leq k \leq n, k_i \geq 0\}$$

$B = \{(k_1, \dots, k_{m+1}) \mid k_1 + \dots + k_{m+1} = n, k_i \geq 0\}$ とする

$(a_1, \dots, a_{m+1}) \in A$ とする

$$a_1 + \dots + a_m = k, a_{m+1} = n - k$$

$$\therefore a_1 + \dots + a_{m+1} = n$$

$$0 \leq k \leq n$$
 より

$$a_{m+1} = n - k \geq 0$$

$$\therefore (a_1, \dots, a_{m+1}) \in B$$

$(a_1, \dots, a_{m+1}) \in B$ とする

$$a_1 + \dots + a_{m+1} = n$$

$$a_1 + \dots + a_m = k$$
 とする

$$k = n - a_{m+1}$$

$$a_{m+1} \geq 0$$
 より $k \leq n$

$$a_i \geq 0$$
 より $k \geq 0$

$$\therefore 0 \leq k \leq n$$

$$\text{また } a_{m+1} = n - k$$

$$\therefore (a_1, \dots, a_{m+1}) \in A$$

$$\therefore A = B$$

P.12 問題 1.4 $x^2 e^y$ の偏微分 '25 4.16

$$f(x, y) = x^2 e^y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

f の偏微分と連続性

(i)

$$f_x = 2xe^y \quad (*1)$$

$$f_y = x^2 e^y \quad (*1)$$

$$f_{xx} = 2e^y$$

$$f_{yy} = x^2 e^y$$

$$f_{xy} = 2xe^y$$

$$f_{yx} = 2xe^y$$

$$f_x(0, 0) = 0, f_x(1, 1) = 2e$$

$$f_y(0, 0) = 0, f_y(1, 1) = e$$

$$f_{xx}(0, 0) = 2, f_{xx}(1, 1) = 2e$$

$$f_{yy}(0, 0) = 0, f_{yy}(1, 1) = e$$

$$f_{xy}(0, 0) = 0, f_{xy}(1, 1) = 2e$$

$$f_{yx}(0, 0) = 0, f_{yx}(1, 1) = 2e$$

(ii)

x^2 は x で連続よって (x, y) で連続 (*2)

e^y は x で連続よって (x, y) で連続 (*2)

よって $f(x, y) = x^2 e^y$ は (x, y) で連続 (*3)

同様に

$f_x = 2xe^y$ は連続

$f_y = x^2 e^y$ は連続

$f_{xx} = 2e^y$ は連続

$f_{yy} = x^2 e^y$ は連続

$f_{xy} = 2xe^y$ は連続

$f_{yx} = 2xe^y$ は連続

よって f は C^2 級

(iii)

$f_{xy} = 2xe^y, f_{yx} = 2xe^y$ なので $f_{xy} = f_{yx}$

(*1) x と y が独立ならば $f_x = \frac{f'}{x \text{ で微分}}$

(*2) $f(x)$ が x で連続ならば $f(x)$ は (x, y) で連続である

(証明)

x で連続なので $f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x)$

よって任意の ϵ に対して

$0 < |\Delta x| < \delta$ ならば

$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \epsilon$

$|\Delta x| < \delta$ ならば

$|\Delta x| \leq |(\Delta x, \Delta y)|$ (\because 三角不等式)

$\therefore |\Delta x| < \delta$

$\therefore \Delta x = 0 \text{ or } 0 < |\Delta x| < \delta$

$0 < |\Delta x| < \delta$ とすると

$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \epsilon$

$\Delta x = 0$ とすると

$|f(x + \Delta x) - f(x)| = 0 < \epsilon$

よって $|(\Delta x, \Delta y)| < \delta$ ならば $|f(x + \Delta x) - f(x)| < \epsilon$

よって $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$

(*2) f, g が連続ならば fg は連続

(証明)

$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$

$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} g(x + \Delta x, y + \Delta y) = g(x, y)$

よって

$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y)g(x + \Delta x, y + \Delta y)$

$= \lim f(x + \Delta x, y + \Delta y) \lim g(x + \Delta x, y + \Delta y)$ (\because 積の極限)

$= f(x, y)g(x, y)$

よって fg は連続

P.15 問題 1.5 $Z(x,y)$ の偏微分 '25 6.22

$$Z = f(x, y) = x^2 e^y \text{ とする}$$

$$\eta = y - x \text{ とする}$$

$$Z = g(x, \eta) = x^2 e^{\eta+x} \text{ とする。}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \neq \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_\eta$$

(証明)

$$Z = f(x, y) = x^2 e^y \text{ とする。} x, y \text{ は独立変数とする}$$

$$\eta = \textcolor{red}{y} - x \text{ とする。} \eta \text{ は独立変数とする。} \textcolor{red}{y} \text{ は従属変数である}$$

$$\textcolor{red}{Z} = f(x, y_1) = f(x, \eta + x) = x^2 e^{\eta+x} = g(x, \eta) \text{ とする}$$

よって

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y &= 2x e^y \\ \left(\frac{\partial \textcolor{red}{Z}}{\partial x} \right)_\eta &= 2x e^{\eta+x} + x^2 e^{\eta+x} \\ &= (2x + x^2) e^{\eta+x} \\ &= (2x + x^2) e^{\textcolor{red}{y}} \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \neq \left(\frac{\partial \textcolor{red}{Z}}{\partial x} \right)_\eta$$

P.15 問題 1.6(i) 偏微分の連鎖律 '25 6.13

x, y, ξ, η は独立変数とする

$\mathbf{x}(\xi, \eta), \mathbf{y}(\xi, \eta)$ とする

$\mathbf{Z}(\xi, \eta) = \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とする

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi} \right)_\eta = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right)_\eta + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \right)_\eta \cdots (1.20)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta} \right)_\xi = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right)_\xi + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} \right)_\xi \cdots (1.21)$$

(証明)

x, y, ξ, η は独立変数とする

$\mathbf{x}(\xi, \eta), \mathbf{y}(\xi, \eta)$ とする

$\mathbf{Z}(\xi, \eta) = \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とする

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi} \right)_\eta &= \frac{d \mathbf{Z}}{d \xi} \quad (\because \xi, \eta \text{ が独立なので } \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi} \right)_\eta = \frac{d \mathbf{Z}}{d \xi}) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d \mathbf{x}}{d \xi} + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d \mathbf{y}}{d \xi} \quad (\because \text{問題1.7}) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right)_\eta + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \right)_\eta \quad (\because \xi, \eta \text{ が独立なので } \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right)_\eta = \frac{d \mathbf{x}}{d \xi}, \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \right)_\eta = \frac{d \mathbf{y}}{d \xi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta} \right)_\xi &= \frac{d \mathbf{Z}}{d \eta} \quad (\because \xi, \eta \text{ が独立なので } \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta} \right)_\xi = \frac{d \mathbf{Z}}{d \eta}) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d \mathbf{x}}{d \eta} + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d \mathbf{y}}{d \eta} \quad (\because \text{問題1.7}) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right)_\xi + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} \right)_\xi \quad (\because \xi, \eta \text{ が独立なので } \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right)_\xi = \frac{d \mathbf{x}}{d \eta}, \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} \right)_\xi = \frac{d \mathbf{y}}{d \eta}) \end{aligned}$$

P.15 問題 1.6(ii) 偏微分の連鎖律 '25 6.25

x, y, ξ, η は独立変数とする

$\mathbf{x}(\xi, \eta), \mathbf{y}(\xi, \eta)$ とする

$\mathbf{Z}(\xi, \eta) = \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とする

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi} \right)_\eta = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right)_{y|x=\mathbf{x}, y=\mathbf{y}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right)_\eta + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y} \right)_{x|x=\mathbf{x}, y=\mathbf{y}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \right)_\eta \dots (1.20)$$

(1.20) を言葉で説明する

(説明)

$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi} \right)_\eta$ は $\xi\eta$ 平面の点 (ξ, η) における \mathbf{Z} の勾配の ξ 方向成分

$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right)_{y|x=\mathbf{x}, y=\mathbf{y}}$ は xy 平面の点 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) における \mathbf{Z} の勾配の x 方向成分

$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right)_\eta$ は $\xi\eta$ 平面の点 (ξ, η) における \mathbf{x} の勾配の ξ 方向成分

$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y} \right)_{x|x=\mathbf{x}, y=\mathbf{y}}$ は xy 平面の点 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) における \mathbf{Z} の勾配の y 方向成分

$\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \right)_\eta$ は $\xi\eta$ 平面の点 (ξ, η) における \mathbf{y} の勾配の ξ 方向成分

よって (1.20) は

$$(\mathbf{Z} \text{ の勾配の } \xi \text{ 方向成分}) = (\mathbf{Z} \text{ の勾配の } x \text{ 方向成分}) \times (\mathbf{x} \text{ の勾配の } \xi \text{ 方向成分}) + (\mathbf{Z} \text{ の勾配の } y \text{ 方向成分}) \times (\mathbf{y} \text{ の勾配の } \xi \text{ 方向成分})$$

と説明される

さらに要約すると (1.20) は

$$(\mathbf{Z} \text{ の勾配の } \xi \text{ 方向成分}) = (\mathbf{Z} \text{ の勾配の } x \text{ 方向成分の } \xi \text{ 方向成分}) + (\mathbf{Z} \text{ の勾配の } y \text{ 方向成分の } \xi \text{ 方向成分})$$

と説明できる

P.15 問題 1.6(iii) 偏微分の連鎖律 '25 6.13

$$f(x, y) = (x+1)(x-y+1) \text{ とする}$$

$$\eta = x - y \text{ とする}$$

$$g(x, \eta) = (x+1)(\eta+1) \text{ とする}$$

このとき

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_\eta = x - y + 1 \cdots (1.18) \text{ である}$$

(証明)

x, y, η は独立変数とする

$$f(x, y) = (x+1)(x-y+1) \text{ とする}$$

$$\textcolor{red}{x}(x, \eta) = x, \textcolor{red}{y}(x, \eta) = x - \eta \text{ とする}$$

$$g(x, \eta) = f(\textcolor{red}{x}(x, \eta), \textcolor{red}{y}(x, \eta)) = (x+1)(\eta+1) \text{ とする}$$

(1.20) より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_\eta &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\textcolor{red}{x} \\ y=\textcolor{red}{y}}} \left(\frac{\partial \textcolor{red}{x}}{\partial x} \right)_\eta + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\textcolor{red}{x} \\ y=\textcolor{red}{y}}} \left(\frac{\partial \textcolor{red}{y}}{\partial x} \right)_\eta \\ &= (2\textcolor{red}{x} - \textcolor{red}{y} + 2) \cdot 1 + (-\textcolor{red}{x} - 1) \cdot 1 \quad \left(\begin{array}{l} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\textcolor{red}{x} \\ y=\textcolor{red}{y}}} = 2\textcolor{red}{x} - \textcolor{red}{y} + 1, \left(\frac{\partial \textcolor{red}{x}}{\partial x} \right)_\eta = 1 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\textcolor{red}{x} \\ y=\textcolor{red}{y}}} = -\textcolor{red}{x} - 1, \left(\frac{\partial \textcolor{red}{y}}{\partial x} \right)_\eta = 1 \end{array} \right) \\ &= \textcolor{red}{x} - \textcolor{red}{y} + 1 \end{aligned}$$

P.15 問題 1.6(iv) 偏微分の連鎖律 '25 6.25

$x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n$ は独立変数とする

$\mathbf{x}_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \mathbf{x}_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ とする。 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ は偏微分可能とする

$\mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \mathbf{Z}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ とする。 \mathbf{Z}, \mathbf{Z} は偏微分可能とする

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} \Big|_{\substack{x_1 = \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = \mathbf{x}_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}} + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} \Big|_{\substack{x_1 = \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = \mathbf{x}_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}}$$

(証明)

$$f(\vec{x} + d\vec{x}) - f(\vec{x}) = df + o(|d\vec{x}|) \quad (1.13)$$

$$df = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} dx_n \quad (1.14)$$

において

$f = \mathbf{Z}, \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), d\vec{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$ とする。 x_1, \dots, x_n は独立変数とする

$$\begin{aligned} & \mathbf{Z}(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) - \mathbf{Z}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} dx_n + o(\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}) \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{\substack{(dx_1, \dots, dx_n) \\ \rightarrow (0, \dots, 0)}} \frac{\mathbf{Z}(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) - \mathbf{Z}(x_1, \dots, x_n) - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} dx_1 - \dots - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} dx_n}{\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}} = 0 \quad (1)$$

$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ とする。 ξ_1, \dots, ξ_n は独立変数とする。 \mathbf{x}_i は偏微分可能とする

$d\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - \mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ とする

$$\therefore \lim_{d\xi_i \rightarrow 0} d\mathbf{x}_i = \lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - \mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0 \quad (\because \mathbf{x}_i \text{ は連続なので})$$

(1) の極限は経路によらないので

$$\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{x}_1 + d\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n + d\mathbf{x}_n) - \mathbf{Z}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} \Big|_{\substack{x_1 = \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = \mathbf{x}_n}} d\mathbf{x}_1 - \dots - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} \Big|_{\substack{x_1 = \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = \mathbf{x}_n}} d\mathbf{x}_n}{\sqrt{d\mathbf{x}_1^2 + \dots + d\mathbf{x}_n^2}} = 0$$

$\mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \mathbf{Z}(\mathbf{x}_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \mathbf{x}_n(\xi_1, \dots, \xi_n))$ とする

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) &= \mathbf{Z}(\mathbf{x}_1(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n), \dots, \mathbf{x}_n(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n)) \\ &= \mathbf{Z}(\mathbf{x}_1 + d\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n + d\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - \mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi_n) - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} \Big|_{\substack{x_1 = \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = \mathbf{x}_n}} d\mathbf{x}_1 - \dots - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} \Big|_{\substack{x_1 = \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = \mathbf{x}_n}} d\mathbf{x}_n}{\sqrt{d\mathbf{x}_1^2 + \dots + d\mathbf{x}_n^2}} = 0$$

ここで

$$\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{dx_i}{d\xi_i} = \lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - \mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi_n)}{d\xi_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_j \neq i} \quad (\because \mathbf{x}_i \text{は偏微分可能})$$

なので

$$\begin{aligned} \lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{|d\xi_i|} &= \lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi_i} \right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{d\xi_i} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{dx_1}{d\xi_i} \right)^2 + \dots + \left(\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{dx_n}{d\xi_i} \right)^2} \quad (\because \sqrt{x} \text{は } x > 0 \text{ で連続}, x^2 \text{は } \mathbb{R} \text{ で連続なので}) \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_j \neq i}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_j \neq i}^2} \\ &< \infty \quad (\because \text{偏微分可能なので} \left| \left(\frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_j \neq i} \right| < \infty) \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - \mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi_n) - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_i \neq 1} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} dx_1 - \dots - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_i \neq n} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} dx_n}{\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}} \frac{\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{d\xi_i} = 0$$

(∵ $\lim f = 0, \lim |g| < \infty$ ならば $\lim fg = 0$)

よって

$$\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - \mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi_n) - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_i \neq 1} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} dx_1 - \dots - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_i \neq n} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} dx_n}{d\xi_i} = 0$$

よって

$$\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - \mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\xi_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_i \neq 1} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_j \neq i} + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_i \neq n} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_j \neq i}$$

(∵ \lim の線型性より
 $\lim(f + kg + lh) = a, \lim g = b, \lim h = c$ ならば
 $\lim f = a - kb - lc$)

よって

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_j \neq i} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_i \neq 1} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_j \neq i} + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_i \neq n} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_j \neq i} \quad (\because \text{偏微分の定義})$$

P.15 問題 1.7(i) 合成関数の偏微分 '25 6.27

$Z = Z(x, y)$ とする。 x, y は独立変数とする

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ とする。 t は独立変数とする。 \mathbf{x}, \mathbf{y} は微分可能とする

$\mathbf{Z}(t) = Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とする

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{y}}{dt} \quad (1.22)$$

(証明)

$$f(\vec{x} + d\vec{x}) - f(\vec{x}) = df + o(|d\vec{x}|) \quad (1.13)$$

$$df = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} dx_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} dx_n \quad (1.14)$$

において

$f = Z, \vec{x} = (x, y), d\vec{x} = (dx, dy)$ とする。 x, y は独立変数とする

$$Z(x + dx, y + dy) - Z(x, y) = \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_z dy + o(\sqrt{dx^2 + dy^2})$$

よって

$$\lim_{(dx, dy) \rightarrow (0, 0)} \frac{Z(x + dx, y + dy) - Z(x, y) - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y dx - \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_z dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0 \quad (1)$$

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ とする。 t は独立変数とする。 \mathbf{x}, \mathbf{y} は微分可能とする

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(t + dt) - \mathbf{x}(t)$$

$$d\mathbf{y} = \mathbf{y}(t + dt) - \mathbf{y}(t) \text{ とする}$$

$$\therefore \lim_{dt \rightarrow 0} d\mathbf{x} = 0 \quad (\because \mathbf{x} \text{ は連続})$$

$$\therefore \lim_{dt \rightarrow 0} d\mathbf{y} = 0 \quad (\because \mathbf{y} \text{ は連続})$$

(1) の極限は経路によらないので

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{Z(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, \mathbf{y} + d\mathbf{y}) - Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} d\mathbf{x} - \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} d\mathbf{y}}{\sqrt{d\mathbf{x}^2 + d\mathbf{y}^2}} = 0$$

$\mathbf{Z}(t) = Z(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ とする

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(t + dt) &= Z(\mathbf{x}(t + dt), \mathbf{y}(t + dt)) \\ &= Z(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, \mathbf{y} + d\mathbf{y}) \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(t + dt) - \mathbf{Z}(t) - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} d\mathbf{x} - \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} d\mathbf{y}}{\sqrt{d\mathbf{x}^2 + d\mathbf{y}^2}} = 0$$

ここで

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + dt) - \mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (\because \mathbf{x} \text{ は微分可能})$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dy}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{y}(t+dt) - \mathbf{y}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{y}}{dt} \quad (\because \mathbf{y} \text{は微分可能})$$

なので

$$\begin{aligned} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{|dt|} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dy}{dt}\right)^2} \quad (\because \sqrt{x} \text{は } x > 0 \text{ で連続}, x^2 \text{ は } \mathbb{R} \text{ で連続なので}) \\ &= \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathbf{y}}{dt}\right)^2} \\ &< \infty \quad (\because \text{微分が存在するので } \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| < \infty, \left|\frac{d\mathbf{y}}{dt}\right| < \infty) \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(t+dt) - \mathbf{Z}(t) - \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{y|x=x \atop y=y} dx - \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{x|x=x \atop y=y} dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} = 0 \quad (\because \lim f = 0, \lim |g| < \infty \text{ ならば } \lim fg = 0)$$

よって

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(t+dt) - \mathbf{Z}(t) - \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{y|x=x \atop y=y} dx - \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{x|x=x \atop y=y} dy}{dt} = 0$$

よって

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(t+dt) - \mathbf{Z}(t)}{dt} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{y|x=x \atop y=y} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{x|x=x \atop y=y} \frac{d\mathbf{y}}{dt} \quad \left(\begin{array}{l} \text{・・・ } \lim \text{の線型性より} \\ \lim(f + kg + lh) = a, \lim g = b, \lim h = c \text{ ならば} \\ \lim f = a - kb - lc \end{array} \right)$$

よって

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{y|x=x \atop y=y} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{x|x=x \atop y=y} \frac{d\mathbf{y}}{dt} \quad (\because \text{微分の定義})$$

P.15 問題 1.7(ii) 合成関数の偏微分の例 '25 6.28

$Z = x^2 e^y$ とする

$\mathbf{x}(t) = t^3, \mathbf{y}(t) = t^4$ とする

$$\frac{dZ}{dt} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{y}}{dt} \text{ であることを確認する}$$

(確認)

$Z = x^2 e^y$ とする。 x, y は独立変数とする

$\mathbf{x}(t) = t^3, \mathbf{y}(t) = t^4$ とする。 t は独立変数とする

$Z(t) = Z(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ とする

$$Z(t) = Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^2 e^{\mathbf{y}} = (t^3)^2 e^{t^4} = t^6 e^{t^4}$$

よって

$$\frac{dZ}{dt} = 6t^5 e^{t^4} + t^6 4t^3 e^{t^4} = 6t^5 e^{t^4} + 4t^9 e^{t^4}$$

また

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= 2\mathbf{x} e^{\mathbf{y}} 3t^2 + \mathbf{x}^2 e^{\mathbf{y}} 4t^3 \\ &= 2t^3 e^{t^4} 3t^2 + (t^3)^2 e^{t^4} 4t^3 \\ &= 6t^5 e^{t^4} + 4t^9 e^{t^4} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{dZ}{dt} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{y}}{dt} \text{ である}$$

P.16 問題 1.8 偏微分でつまづいたこと '25 6.25

偏微分でつまづいて色々考えたことのメモ

1.

x, y は独立変数であるかつ x, y は従属変数であるというの矛盾である

(証明)

従属変数ならば独立変数ではないので、独立変数であるかつ独立変数でないとなり排中律に反するので矛盾である

2.

x, y を独立変数かつ従属変数と仮定すると矛盾する例

(例)

x, y は独立変数とする (1)

$f(x, y) = x + y$ とする (2)

$$\therefore f(0, 1) = 1$$

$x = \xi, y = \xi$ とする。 ξ は独立変数とする (3)

$$\therefore f(x, y) = f(\xi, \xi) = 2\xi$$

$x = y = \xi$ なので $x = 0, y = 1$ である ξ は存在しない

$$\therefore f(0, 1) = \text{未定義}$$

$$\therefore f(0, 1) \neq f(0, 1)$$

これは等号の反射律に反するので矛盾である

よって仮定 (1), (2), (3) は矛盾している

なにが矛盾しているかというと、(3)において x と y を従属変数と仮定しているので 1. より (1),(3) は矛盾している

なお (2) は (1),(3) と矛盾していない

3.

$f(x, y)$ の偏微分 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ が定義できるならば x, y は独立変数である

(説明)

偏微分の定義に明記されていないが偏微分が定義されるのは、 x, y が独立変数のときに限ると明記すべきだと思う

なぜなら、もし x, y が独立変数でなければ偏微分の定義に使われる $f(x + \Delta x, y)$ が定義できるとは限らないから

x, y が従属変数であっても、 (x, y) 近傍で $f(x, y)$ が定義されるならば 偏微分の定義は成立するが、これを許容すると、 (x, y) 近傍で 従属変数 x, y が定義されないだけの場合も $f(x, y)$ が定義されずに偏微分できなくなつて不便である

なので x, y が独立変数のときに限り偏微分が定義されるとする

4.

偏微分の連鎖律は矛盾している

(証明)

関数 $f(x, y)$ を考える

$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ とする (1)

偏微分の連鎖律は

$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_\eta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_\eta$ である

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ が定義されているので 3. より x, y は独立変数である

$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\eta$ が定義されているので 3. より ξ, η は独立変数である

よって (1) より x, y は従属変数である

よって x, y は独立変数かつ従属変数となり 1. よりこれは矛盾である。

5.

矛盾しない偏微分の連鎖律

x, y を独立変数かつ従属変数とするのを避けるために、従属変数 x_1, y_1 を追加すればよい

$f(x, y)$ を考える。 x, y は独立変数とする

$x_1 = x_1(\xi, \eta), y_1 = y_1(\xi, \eta)$ とする

ξ, η は独立変数、 x_1, y_1 は従属変数とする

$g(\xi, \eta) = f(x_1, y_1)$ とする

偏微分の連鎖律は

$\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)_\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}}\right. \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)_\eta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}}\right. \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi}\right)_\eta$

となる

ただし $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}}$ は 偏微分 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ の x, y に x_1, y_1 を代入したものである。以下同様

6.

とはいえ、実際の教科書では x, y を独立変数としつつ、途中で x, y を従属変数とすることはよくある

この場合、独立変数の $\textcolor{blue}{x}, \textcolor{blue}{y}$ と従属変数の $\textcolor{red}{x}, \textcolor{red}{y}$ を脳内で区別しないといけない

(注) 脳内で区別というのは普通の言い方をすると文脈で区別するということである

(例)

関数 $f(\textcolor{blue}{x}, \textcolor{blue}{y})$ を考える。 $\textcolor{blue}{x}, \textcolor{blue}{y}$ は独立変数とする

$\textcolor{red}{x} = \textcolor{red}{x}(\xi, \eta), \textcolor{red}{y} = \textcolor{red}{y}(\xi, \eta)$ とする。

ξ, η は独立変数とする。 x, y は従属変数である

$g(\xi, \eta) = f(x, y)$ とする

偏微分の連鎖律は

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \xi} \right)_\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \Bigg|_{\substack{x=x \\ y=y}} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)_\eta + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \Bigg|_{\substack{x=x \\ y=y}} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_\eta \text{ である}$$

という感じで脳内で区別する

わたしにはハードルが高いので無理せず x_1, y_1 と書き直して区別すればいいかなと思う

7.

異なる関数を同じ関数とすることは矛盾である

(例)

$Z = f(x, y) = x + y$ とする。 x, y は独立変数とする

$Z = g(\xi, \eta) = \xi - \eta$ とする。 ξ, η は独立変数とする

$Z = f(1, 1) = 2$

$Z = g(1, 1) = 0$

$\therefore Z = 2 = 0$

よって矛盾

8.

変数が独立変数である関数 $Z(x, y)$ と 変数が従属変数である関数 $Z(x, y)$ は異なる関数である

なので同じ関数 Z とするのは矛盾である

(例)

$Z(x, y) = x + y$ とする。 x, y は独立変数とする (1)

$Z(x, y) = x + y, x = \xi, y = \xi$ とする。 ξ は独立変数とする。 x, y は従属変数である (2)

(1) の Z だと $Z(0, 1) = 1$

(2) の Z だと $Z(0, 1)$ は未定義

よって (1) の Z と (2) の Z は異なる関数である

関数 Z の式が同じでも、定義域が異なれば異なる関数である

従属変数の変域が明示されていない場合、変数が独立変数である関数 $Z(x, y)$ と 変数が従属変数である関数 $Z(x, y)$ は式が同じだから同じ関数とは言えない

9.

熱力学では

同じ変数を独立変数としつつ従属変数とし、かつ

異なる関数を同じ関数とすることもよくある

矛盾 アンド 矛盾 でわたしら素人は悶絶してしまう

(例)

$Z = f(x, y) = x^2 e^y$ とする。

$\eta = y - x$ とする。

$Z = f(x, y) = f(x, \eta + x) = x^2 e^{\eta+x} = g(x, \eta)$ とする。

Z は x, y の関数なので $Z = Z(x, y) = f(x, y)$ である

Z は x, η の関数なので $Z = Z(x, \eta) = g(x, \eta)$ である

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y = 2x e^y$$

偏微分が定義できるので、3. より x, y は独立変数である

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_\eta = (2x + x^2) e^{\eta+x}$$

偏微分が定義できるので、3. より x, η は独立変数である

よって

$Z = Z(1, 1) = f(1, 1) = e$

$Z = Z(1, 1) = g(1, 1) = e^2$

$\therefore Z(1, 1) \neq Z(1, 1)$

となり矛盾する

また x, y, η は独立変数で、 $g(x, \eta)$ は y によらないので

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y = (2x + x^2) e^{\eta+x}$$

$\eta = y - x$ なので

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y = (2x + x^2) e^y$$

$$\therefore \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y \neq \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y$$

となり矛盾する

10.

上の例で矛盾が生じないように変数、関数を区別する

上の例では 2 つの異なる関数を同じ関数 Z と仮定しているところが矛盾しているので

関数 Z_1, Z_2 として区別する

また 変数 y を独立変数かつ従属変数と仮定しているのが矛盾しているので

y は独立変数とし、 y_1 は 従属変数として区別する

(例)

$Z_1 = f(x, y) = x^2 e^y$ とする。 x, y は独立変数とする

$\eta = y_1 - x$ とする。 η は独立変数とする、 y_1 は従属変数である

$Z_2 = f(x, y_1) = f(x, \eta + x) = x^2 e^{\eta+x} = g(x, \eta)$ とする。

Z_1 は x, y の関数なので $Z_1 = Z_1(x, y) = f(x, y)$ である

Z_2 は x, η の関数なので $Z_2 = Z_2(x, \eta) = g(x, \eta)$ である

$$\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} \right)_y = 2x e^y$$

$$\left(\frac{\partial Z_2}{\partial x} \right)_\eta = (2x + x^2) e^{\eta+x}$$

$$Z_1 = Z_1(1, 1) = f(1, 1) = e$$

$$Z_2 = Z_2(1, 1) = g(1, 1) = e^2$$

$$\therefore Z_1(1, 1) \neq Z_2(1, 1)$$

となり矛盾しない

また、 x, y, η は独立変数で、 $g(x, \eta)$ は y によらないので

$$\left(\frac{\partial Z_2}{\partial x} \right)_y = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_y = (2x + x^2) e^{\eta+x}$$

$$\eta = y_1 - x \text{ なので}$$

$$\left(\frac{\partial Z_2}{\partial x} \right)_y = (2x + x^2) e^{y_1}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} \right)_y \neq \left(\frac{\partial Z_2}{\partial x} \right)_y$$

となり矛盾しない

11.

上の例の変数、関数の区別を脳内で行う

(例)

$Z = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^2 e^{\mathbf{y}}$ とする。 \mathbf{x}, \mathbf{y} は独立変数とする

$\eta = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ とする。 η は独立変数とする、 \mathbf{y} は従属変数である

$Z = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \eta + \mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 e^{\eta+\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \eta)$ とする。

Z は \mathbf{x}, \mathbf{y} の関数なので $Z = Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ である

Z は \mathbf{x}, η の関数なので $Z = Z(\mathbf{x}, \eta) = g(\mathbf{x}, \eta)$ である

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{x}} \right)_\mathbf{y} = 2\mathbf{x} e^{\mathbf{y}}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{x}} \right)_\eta = (2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2) e^{\eta+\mathbf{x}}$$

$$Z = Z(1, 1) = f(1, 1) = e$$

$$Z = Z(1, 1) = g(1, 1) = e^2$$

$$\therefore Z(1, 1) \neq Z(1, 1)$$

となり矛盾しない

また $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \eta$ は独立変数で、 $g(\mathbf{x}, \eta)$ は \mathbf{y} によらないので

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{y}} = \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{y}} = (2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2)e^{\eta+\mathbf{x}}$$

$\eta = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ なので

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{y}} = (2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2)e^{\mathbf{y}}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{y}} \neq \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{y}}$$

となり矛盾しない

12.

座標変換においても 1. の矛盾はおこる

(例)

$f(x, y) = x^2 + y^2$ とする。 x, y は独立変数とする (1)

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta$$

$y = y(r, \theta) = r \sin \theta$ とする。 r, θ は独立変数とする (2)

$$f(x, y) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = r^2 = g(r, \theta) \text{ とする}$$

こんな感じの座標変換はよくあるが、

(1) において x, y は独立変数と仮定しかつ

(2) において x, y は従属変数と仮定しているので 1. の矛盾になっている

矛盾しないためには独立変数 x, y と 従属変数 x_1, y_1 を区別して

$f(x, y) = x^2 + y^2$ とする。 x, y は独立変数とする

$$x_1 = x_1(r, \theta) = r \cos \theta$$

$y_1 = y_1(r, \theta) = r \sin \theta$ とする。 r, θ は独立変数とする。

$$f(x_1, y_1) = f(x_1(r, \theta), y_1(r, \theta)) = r^2 = g(r, \theta)$$

としなければならない。

x_1, y_1 を追加せずに、脳内で独立変数 \mathbf{x}, \mathbf{y} と 従属変数 \mathbf{x}, \mathbf{y} を区別するときは

$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2$ とする。 \mathbf{x}, \mathbf{y} は独立変数とする

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta) = r \cos \theta$$

$\mathbf{y} = \mathbf{y}(r, \theta) = r \sin \theta$ とする。 r, θ は独立変数とする。

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}(r, \theta), \mathbf{y}(r, \theta)) = r^2 = g(r, \theta) \text{ とする}$$

となる

13.

ラグランジアンから運動方程式を導くときは

従属変数をあとから独立変数にするということをおこなう

このときもある変数を独立変数かつ従属変数とする矛盾 1. と

別の関数と同じ関数とする矛盾 7. はおこっている

(例)

$$x = x(t)$$

$\dot{x} = \dot{x}(t)$ とする。 t は独立変数とする (1)

ラグランジアンは $L = \dot{x}^2 - x^2$ とする

運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)_x - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_{\dot{x}} = 0 \text{ より (2)}$$

$$\therefore \ddot{x} - x = 0$$

という感じでラグランジアンから運動方程式を得るが、

(1) より x, \dot{x} は従属変数である

(2) より $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)_x$ と $\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_{\dot{x}}$ が定義されているので 3. より x, \dot{x} は独立変数である

よって x, \dot{x} は従属変数かつ独立変数となり 1. より矛盾である

また L の変数が明記されていないため L は $L(x, \dot{x})$ かもしれないし $L(t)$ かもしれないし、その他かもしれない。

もし $L(t)$ であるならば

(2)において L を関数 $L(x, \dot{x})$ と仮定しているので

異なる関数 $L(t)$ と $L(x, \dot{x})$ を同じ関数 L としていることになり 7. より矛盾する

またもし $L(x, \dot{x})$ であっても

(1) では $L(x, \dot{x}), x, \dot{x}$ は従属変数

(2) では $L(x, \dot{x}), x, \dot{x}$ は独立変数

としているので 8. よりこれら L は異なる関数である。よって 7. より矛盾する

矛盾しないようにするには、従属変数 x, \dot{x} と 独立変数 x_1, x_2 を区別し

さらに 関数 L と 関数 L_1 を区別しておけばよい

$$x = x(t)$$

$\dot{x} = \dot{x}(t)$ とする。 t は独立変数とする

ラグランジアンは $L = \dot{x}^2 - x^2$ とする

$L_1(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2$ とする。 x_1, x_2 は独立変数とする

運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_2} \right)_{x_1=x} \Bigg|_{x_2=\dot{x}} - \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1} \right)_{x_2=\dot{x}} \Bigg|_{x_1=x} = 0 \text{ より}$$

$$\therefore \ddot{x} - x = 0$$

こうすると矛盾は起こらない。

従属変数 $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ と 独立変数 $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ を脳内で区別し

さらに関数 \mathbf{L} と 関数 \mathbf{L} を脳内で区別するならば

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$$

$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t)$ とする。 t は独立変数とする

ラグランジアンは $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{x}}^2 - \mathbf{x}^2$ とする

$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \dot{\mathbf{x}}^2 - \mathbf{x}^2$ とする。 $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ は独立変数とする

運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_{\mathbf{x}} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}}=\dot{\mathbf{x}}} - \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\dot{\mathbf{x}}} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}}=\dot{\mathbf{x}}} = 0 \text{ より}$$
$$\therefore \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = 0$$

となる。

第 2 章

状態

(説明)

状態の定義がないので状態が存在することを仮定、要請しないといけない

状態というものが存在すると仮定、要請する。これは経験的に正しいと認める

具体的に何が状態であるかは経験的に決まる

状態と系の関係

(説明)

系は状態をもつと仮定、要請する。これは経験的に正しいと認める

热力学で扱う状態

(説明)

本文で「マクロに見て変化しない状態が平衡状態である」と定義している

そして「热力学で扱う状態は平衡状態だけである」と言っている

しかし、「状態」の定義と「マクロに見て変化しない状態」の定義がない

なので、これらが存在することを仮定、要請しないといけない

まず状態というものが存在すると仮定、要請する

またマクロに見て変化しない状態があると仮定、要請する

マクロに見て変化しない状態を平衡状態と定義する

またとくに言及されていないが、状態は平衡状態と非平衡状態のどちらかあると仮定、要請する

以上の仮定、要請はすべて経験的に正しいと認める。定義は妥当であると経験的に認める。(妥当というのは定義の対象が存在すること)

具体的な状態は経験的にあたえられる

歴史的に水と水蒸気の系はなんらかの状態であると認められた

あとから磁石の系もなんらかの状態と認められた

今後も新たな状態が発見されて热力学のレパートリは増えていくと思われる

何かを状態と仮定して理論をつくりうまくいけば仮定は正しいと認められる

水と水蒸気の状態の理論を抽象化し(つまり理論の水と水蒸気の部分をA,Bにして)色々な物質や現象を当てはめて拡張し、うまくいったものの集まりが热力学である

十分長い時間放っておくとマクロに見る限り変化が起こらない状態になる、これを平衡状態という

(説明)

平衡状態の定義である

「十分長い時間」、「マクロに見ると変化しない状態」は未定義なので、これらの存在を仮定、要請しないといけない

「十分長い時間」は存在すると仮定、要請する

「マクロに見ると変化しない状態」は存在すると仮定、要請する

このとき

十分長い時間放っておいてマクロに見て変化しない状態を平衡状態と定義する

この定義は妥当であると経験的に認める。妥当というのは定義の対象が存在することである

具体的な十分長い時間、マクロに変化しない状態は経験的に与えられる

「数時間放置した部屋の空気の系」において

数時間は十分長い時間と認める。部屋の状態はマクロに変化しない状態と認める

この定義によると過冷却した水も平衡状態となる。が、過冷却した水は平衡状態ではない。準安定状態という。熱力学の対象ではない

過冷却した水は、経験的に平衡状態として熱力学の理論を作ろうとしても不都合があることがわかっているから平衡状態でないことになっている

経験的定義なので字句があつても経験的にうまくいかなければ認められないこともある

このような経験的定義は定義と理論がどうどうめぐりしてるので主張していないように見える。がそうではなく、定義の対象が存在するという仮定と対象の理論と解釈し、仮定と理論が現実をうまく説明できるならば仮定と理論の両方が正しいと見るべきである

マクロ物理量

- (a) 幾何学的な量
 - (b) ミクロ物理量を系全体にわたって足し合わせた量
 - (c) ミクロ物理量をマクロスケールで空間、時間平均した平均
 - (d) 热力学特有の量
 - (e) 2つの状態におけるマクロ物理量の値を比較して得られる量
-

(説明)

(a)~(e) はマクロ物理量の例である

マクロ物理量の定義はない

なのでこの存在を仮定、要請しないといけない

マクロ物理量は存在すると仮定、要請する。この仮定、要請は経験的に正しいと認める

具体的に何がマクロ物理量であるかは経験的にきまる

温度、圧力、体積、密度、粒子数は熱力学の歴史においてマクロ物理量となった

この先も必要に応じて新たなマクロ物理量が作られると思う

マクロ物理量 (a)~(e) の具体例も経験的に得られる

- (a) は体積。ほかは思いつかない

本文ではゴムの長さも (a) となっているが、ゴムの長さがマクロ物理量というのはよくわからない

- (b) は全エネルギー、全粒子数

本文では全磁化も (b) となっているが磁石を温めたときの磁化とかはわかるが、磁石を圧縮、膨張とかは？

- (c) は圧力、粒子密度

空間平均は密度であるが、時間平均はよくわからない。平衡状態では時間経過してもマクロ物理量は変化しないのだから時間平均する意味がないような気がする

- (d) は温度、エントロピー

- (e) は熱容量

P.19 マクロ物理量 (a)(b)(c) '25 9.8

マクロ物理量 (a)(b)(c) について、明記されていないが以下の仮定、要請がある

(1) 均一な系の部分系において マクロ物理量 (a)(b)(c) は部分系の体積 V の連続関数であると仮定、要請する

このとき

(2) 均一な系の部分系において相加変数、示量変数、示強変数は体積 V の連続関数である

(説明)

(1)

(i) 均一な系の体積 V の部分系においてマクロ物理量 (a)(b)(c) は存在すると仮定、要請する

P.40 の均一な状態の定義より、均一な系の体積 V の部分系のマクロ物理量 (a)(b)(c) は同じである。もしマクロ物理量が存在しなければ同じとか、同じでないとか言えなくなる。なのでこのような仮定、要請をおこなう

(ii) 均一な系の体積 V の部分系にたいしてマクロ物理量 (a)(b)(c) は一意であると仮定、要請する

もし一意でなければ均一な状態の定義において、体積 V の任意の部分系についてマクロ物理量 (a)(b)(c) が同じとはいえないなくなる。なのでこのように仮定、要請する

(i),(ii) の仮定、要請は、均一な系の部分系においてマクロ物理量 (a)(b)(c) は体積 V の関数であると仮定、要請するのと同じである

また、「均一な系において相加変数は示量変数である」(別頁)

というのを尊くために関数が連続であることを仮定、要請する

(2)

相加変数、示量変数、示強変数はマクロ物理量 (a)(b)(c) のみの連続関数と仮定、要請している(別頁)

よって均一な系の部分系において相加変数、示量変数、示強変数は体積 V の連続関数である

マクロ物理量と状態の関係

(説明)

明記されていないが、マクロ物理量と状態の関係について以下の仮定、要請がある

状態は 1 つ以上のマクロ物理量をもつと仮定、要請する

2 つの状態が同じ、異なるを定義できるマクロ物理量が存在すると仮定、要請する

以上の仮定、要請は経験的に正しいと認める

部分系・複合系

(説明)

明記されていないが

「全体系は部分系に分割できる」

「部分系は全体系に含まれる」

「部分系をより集めて複合系にすることができる」

「分割した部分系をすべてより集めると元の全体系になる」

と仮定、要請している

あと、教科書で分割したりより集めたりするときの部分系は境界以外は重なっていないと仮定している

境界がどの部分系に属するかは特に定義されていない

P.26 仮想的分割 '25 10.7

部分系に分割するのは、仮想的に分割するだけでもよい

(説明)

「仮想的に分割できる」と仮定、要請している

この要請が正しいことは経験による

P.27 均一な状態の系で相加変数は示量変数である'25 10.3

均一な状態の系で相加変数は示量変数でもある

(説明)

均一な状態の系を考える。全体系の体積を V_0 とする

マクロ変数 X を考える。全体系の X を X_0 とする

部分系を考える。部分系の体積を V とする

部分系の X を X とする。 X は相加変数とする

このとき X は示量変数である。すなわち $X = X(V) = kV (k \in \mathbb{R})$ である

(証明)

均一な系の部分系の相加変数は体積の連続関数である ([別頁](#))

よって X を相加変数とすると

$0 \leq V \leq V_0$ ならば $X = X(V)$ でかつ連続である

V, W が重なっていなくて, $0 \leq V, 0 \leq W, 0 \leq V + W \leq V_0$ ならば

$X(V)$ は加法性 $X(V + W) = X(V) + X(W)$ をもつ (*1)

(*1) X が相加変数かつ V, W が重なっていなくて

$0 \leq V, 0 \leq W, 0 \leq V + W \leq V_0$ ならば

$X(V + W) = X(V) + X(W)$

(証明)

$0 \leq V + W \leq V_0$ とすると $X(V + W)$ は存在する

$0 \leq V \leq V_0, 0 \leq W \leq V_0$ とすると $X(V), X(W)$ は存在する

体積 V の部分系(1)と体積 W の部分系(2)を考える

(1), (2) の X は $X^{(1)} = X(V), X^{(2)} = X(W)$ である ($\because X = X(V)$)

(1), (2) を合わせた部分系(3)を考える (\because 部分系を合わせて複合系にできると仮定、要請する)

(3) の 体積は $V + W$ である (\because 体積は相加変数と仮定、要請する)

よって (3) の X は $X^{(3)} = X(V + W)$ である

(3) を分割して部分系(1), (2) とすることができる (\because と仮定、要請する)

X は相加変数なので $X^{(3)} = X^{(1)} + X^{(2)}$ ($\because (2.11)$)

よって $X(V + W) = X(V) + X(W)$

$0 \leq V \leq V_0, 0 \leq cV \leq V_0$ ならば $X(V)$ は齊次性 $X(cV) = cX(V)$ をもつ (*2)

(*2) $0 \leq V \leq V_0, 0 \leq cV \leq V_0$ ならば $X(cV) = cX(V)$

(証明)

$0 \leq V \leq V_0, 0 \leq cV \leq V_0$ とすると $X(V), X(cV)$ は存在する

(i) $c = n, n$ は整数とする

$0 \leq V \leq V_0, 0 \leq nV \leq V_0$ とする

このとき n 個の V が重ならないようにすることができる

よって $X(nV) = X(V + \dots + V)$

$$= X(V) + \cdots + X(V) \quad (*1)$$

$$= nX(V)$$

よって c が整数のとき命題は成立する

(ii) $c = q, q$ は有理数とする

$0 \leq V \leq V_0, 0 \leq qV \leq V_0$ とする

$q = \frac{t}{s}, s$ は 1 以上, t は 0 以上の整数となる s, t が存在する

$0 \leq qV \leq V_0$ なので $0 \leq t\frac{V}{s} \leq V_0$ また $0 \leq \frac{V}{s} \leq V_0$

よって $X\left(\frac{t}{s}V\right) = X\left(t\frac{V}{s}\right) = tX\left(\frac{V}{s}\right) \quad (\because (i))$

また $0 \leq s\frac{V}{s} \leq V_0, 0 \leq \frac{V}{s} \leq V_0$ なので

$X(V) = X\left(s\frac{V}{s}\right) = sX\left(\frac{V}{s}\right) \quad (\because (i))$

よって $X\left(\frac{t}{s}V\right) = \frac{t}{s}X(V)$

よって $X(qV) = qX(V)$

よって c が有理数のとき命題は成立する

(iii) c は実数とする

$0 \leq V \leq V_0, 0 \leq cV \leq V_0$ とする

有理数の稠密性より

$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = c, 0 \leq q_n \leq c$ なる有利数列 $\{q_n\}$ が存在する

$0 \leq q_n V \leq V_0, 0 \leq V \leq V_0$ なので

$X(q_n V) = q_n X(V) \quad (\because (ii))$

$X(V)$ は連続なので合成関数の極限より

$\lim_{n \rightarrow \infty} X(q_n V) = X\left(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n V\right) = X(cV)$

極限の線型性より

$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n X(V) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n\right) X(V) = cX(V)$

よって $X(cV) = cX(V)$

よって c が実数のとき命題は成立する

よって $0 \leq V \leq V_0$ ならば $X = X(V) = kV$ ($k \in \mathbb{R}$) である (*3)

(*3) $0 \leq V \leq V_0$ ならば $X(V) = kV$

(証明)

$k = \frac{X_0}{V_0}$ とする

$X_0 = X(V_0)$ なので

$X(V_0) = kV_0$

$0 \leq V \leq V_0$ とすると

$0 \leq \frac{V}{V_0} V_0 \leq V_0$ また $0 \leq V_0 \leq V_0$

よって $X(V) = X\left(\frac{V}{V_0} V_0\right) = \frac{V}{V_0} X(V_0) \quad (*2)$

よって $X(V) = \frac{V}{V_0} kV_0 = kV$

よって X は示量変数である

P.27 相加変数、示量変数、示強変数 '25 7.6

(1) 相加変数の定義

$$X = \sum_i X^{(i)} \quad (2.11)$$

(2.11) が成立すれば X を「相加的物理量」、「相加変数」と言う

(2) 示量変数の定義

均一な状態の系の部分系において、 $X^{(i)} = KV^{(i)}$ (2.12) であるとき X を「示量的物理量」、「示量変数」と言う

(3) 相加変数は均一な状態では示量変数でもある

(4) 示強変数の定義

6 章で定義される。温度 T 、ポテンシャル μ は示強変数である

(5) 均一な状態の系において示強変数は部分系の体積に依らず同じ値をもつ

(6) この性質 (5) は示量変数の密度ももつが、示量変数の密度を示強変数と呼ぶことを避ける

(説明)

(0) 明記されていないが、

「相加変数、示量変数、示強変数は 2.3 節のマクロ物理量 (a),(b),(c) のみに依存する連続関数である」と仮定、要請する

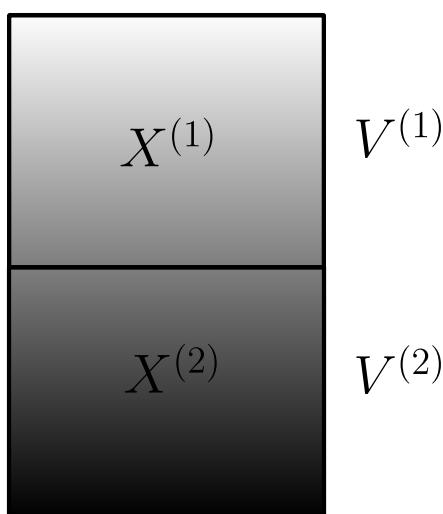
3.1 節の同じ状態の定義に出てくる量がマクロ物理量 (a),(b),(c) に限定されているので、この仮定、要請がないと同じ状態の系の相加変数、示量変数、示強変数が同じと言えなくなる。

それは困るので、このような仮定、要請をおこなう。

(1) 体積は相加変数と仮定、要請する

(3) の証明は ([別頁](#))

不均一な状態では相加変数は示量変数にならない例



X を系の粒子数とする

X は相加変数 で、 $X = X^{(1)} + X^{(2)}$ である

$V^{(1)} = V^{(2)}$ とする

図の場合、あきらかに $X^{(1)} \neq X^{(2)}$ である

X が示量変数ならば

$$X^{(1)} = kV^{(1)}, \quad X^{(2)} = kV^{(2)}$$

$$V^{(1)} = V^{(2)} \text{ なので } X^{(1)} = X^{(2)}$$

となり矛盾する。

よって X は示量変数ではない

C_1, C_2 は、系の内部に存在する束縛条件を表すので、内部束縛と呼ばれる

(説明)

内部束縛の定義である。P.30 の C_1, C_2 を例とした経験的な定義である

この例からみると、仕切り壁のことを内部束縛とすればいいみたい

ただし断熱-断物-不動の壁は C_1, C_2 のような部分系間の条件を与えないで内部束縛ではない

まとめると熱を通すか、物をとおすか、動くかする仕切り壁を内部束縛とみればよい

P.32 問題 2.1 '25 6.29

$f(x, y)$ を考える。 x, y は独立変数とする

$$\textcolor{red}{U}^{(1)} = U^{(1)}$$

$U = U^{(1)} + \textcolor{red}{U}^{(2)}$ とする。 $U, U^{(1)}$ は独立変数とする

$$Z(U^{(1)}, U) = f(\textcolor{red}{U}^{(1)}, \textcolor{red}{U}^{(2)}) \text{ とする}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial U^{(1)}} \right)_U \text{ を求める}$$

(解答)

$f(x, y)$ を考える。 x, y は独立変数とする

$$\textcolor{red}{U}^{(1)} = U^{(1)}$$

$U = U^{(1)} + \textcolor{red}{U}^{(2)}$ とする。 $U, U^{(1)}$ は独立変数とする

$$Z(U^{(1)}, U) = f(\textcolor{red}{U}^{(1)}, \textcolor{red}{U}^{(2)}) \text{ とする}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z}{\partial U^{(1)}} \right)_U &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \Big|_{\substack{x=\textcolor{red}{U}^{(1)} \\ y=\textcolor{red}{U}^{(2)}}} \left(\frac{\partial \textcolor{red}{U}^{(1)}}{\partial U^{(1)}} \right)_U + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \Big|_{\substack{x=\textcolor{red}{U}^{(1)} \\ y=\textcolor{red}{U}^{(2)}}} \left(\frac{\partial \textcolor{red}{U}^{(2)}}{\partial U^{(1)}} \right)_U \\ &= f_x(\textcolor{red}{U}^{(1)}, \textcolor{red}{U}^{(2)}) - f_y(\textcolor{red}{U}^{(1)}, \textcolor{red}{U}^{(2)}) \end{aligned}$$

P.34 (2.23) '25 6.30

$$\Delta\langle N \rangle = (V \text{によらない定数}) \times V \quad (2.23)$$

(証明)

$$\langle N^{(1)} \rangle = K^{(1)}V$$

$$\langle N^{(2)} \rangle = K^{(2)}V$$

$$\therefore \Delta\langle N \rangle = (K^{(2)} - K^{(1)})V$$

P.34 (2.24) '25 6.30

$$\delta N = o(V) \quad (2.24)$$

(説明)

大きい系 V のなかの遠くにはなれた部分系 $V^{(i)}, V^{(j)}$ を考える

遠くに離れるほど ゆらぎ $\delta N^{(i)}$ と $\delta N^{(j)}$ の相関関係が少なくなる

よって

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\delta N}{V} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\cdots + \delta N^{(i)} + \cdots}{V} = 0$$

証明？

たとえば $\delta N^{(i)}$ が独立なら平均 $\frac{\cdots + \delta N^{(i)} + \cdots}{V} = 0$ といえる。

しかし、 i, j がはなれていれば $\delta N^{(i)}, \delta N^{(j)}$ は独立だが、近ければ $\delta N^{(i)}, \delta N^{(j)}$ は独立でない

P.34 (2.25) '25 6.30

$$\frac{\delta N}{\Delta \langle N \rangle} \propto \frac{o(V)}{V} \rightarrow 0 \quad (V \rightarrow \infty) \quad (2.25)$$

(証明)

$$\langle N^{(1)} \rangle = K^{(1)} V$$

$$\langle N^{(2)} \rangle = K^{(2)} V$$

$$\therefore \Delta \langle N \rangle = (K^{(2)} - K^{(1)}) V$$

$$\delta N = o(V) \quad (2.24)$$

$$\therefore \frac{\delta N}{\Delta \langle N \rangle} = \frac{\delta N}{(K^{(2)} - K^{(1)}) V} \propto \frac{\delta N}{V} = \frac{o(V)}{V}$$

ここで

$$\frac{o(V)}{V} = o(1) \rightarrow 0 \quad (V \rightarrow \infty) \quad (\text{別頁})$$

なので

$$\therefore \frac{\delta N}{\Delta \langle N \rangle} \propto \frac{o(V)}{V} \rightarrow 0 \quad (V \rightarrow \infty)$$

P.35 (2.25.2):(2.25) の示強変数の場合 '25 7.2

示強変数のゆらぎは相対的に $\frac{o(V)}{V} \rightarrow 0$ となる

相対的というのは $\Delta\langle T \rangle$ と比較してという意味である

$$\frac{\delta T}{\Delta\langle T \rangle} \propto \frac{o(V)}{V} \rightarrow 0 \quad (V \rightarrow \infty) \quad (2.25.2)$$

(証明)

示強変数は V によらないので

$$\langle T^{(i)} \rangle = K^{(i)}$$

$$\langle T^{(j)} \rangle = K^{(j)}$$

$$\therefore \Delta\langle T \rangle = K^{(i)} - K^{(j)}$$

$$(2.29) \text{ より } \delta T = \frac{o(V)}{V} \text{ なので}$$

$$\therefore \frac{\delta T}{\Delta\langle T \rangle} = \frac{\delta T}{K^{(i)} - K^{(j)}} \propto \delta T = \frac{o(V)}{V}$$

ここで

$$\frac{o(V)}{V} = o(1) \rightarrow 0 \quad (V \rightarrow \infty) \quad (\text{別頁})$$

なので

$$\therefore \frac{\delta T}{\Delta\langle T \rangle} \propto \frac{o(V)}{V} \rightarrow 0 \quad (V \rightarrow \infty)$$

上のとおり V が大きいとき示強変数のゆらぎは ($\Delta\langle T \rangle$ と比べて) 相対的に無視できると言えるが、

$$\delta T = \frac{o(V)}{V} \rightarrow 0 \quad (V \rightarrow \infty)$$

なので V が大きいとき示強変数のゆらぎは ($\Delta\langle T \rangle$ によらず) 絶対的に無視できると言えるような気がする

P.36 $o(V)/V = o(1)$ '25 6.30

$$\frac{o(V)}{V} = o(1)$$

(証明)

$$f(V) = \frac{o(V)}{V}$$

とする

$$o(V) = Vf(V)$$

$$\therefore \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{Vf(V)}{V} = 0$$

$$\therefore \lim_{V \rightarrow \infty} f(V) = 0$$

$$\therefore \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{f(V)}{1} = 0$$

$$\therefore f(V) = o(1)$$

$$\therefore \frac{o(V)}{V} = o(1)$$

($o(1)$ の性質)

$$f(V) = o(1) \iff \lim_{V \rightarrow \infty} f(V) = 0$$

(証明)

$f(V) = o(1)$ ならば

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{f(V)}{1} = 0 \quad (\because \text{付録A})$$

$$\therefore \lim_{V \rightarrow \infty} f(V) = 0$$

$\lim_{V \rightarrow \infty} f(V) = 0$ ならば

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{f(V)}{1} = 0$$

$\therefore f(V) = o(1) \quad (\because \text{付録A})$

P.36 (2.30) '25 7.2

$$U = \sum_i U^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j(\neq i)} U_{int}^{(ij)} \quad (2.30)$$

(説明)

同じ U としているが U , $U^{(i)}$, $U_{int}^{(ij)}$ はすべて異なる

$\textcolor{red}{U}_0$, $\textcolor{blue}{U}_1$, $\textcolor{red}{U}_2$ *int* として区別すると

$$\textcolor{red}{U}_0 = \sum_i \textcolor{blue}{U}_1^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j(\neq i)} \textcolor{red}{U}_2^{(ij)} \quad (2.30)$$

となる

$\textcolor{blue}{U}_1$ は示量変数とし、 $\textcolor{red}{U}_2$ *int* は非示量変数とする。

よって $\textcolor{red}{U}_0$ は非示量変数である

$$\textcolor{blue}{U}_1^{(i)} = K^{(i)} V^{(i)}$$

$$\textcolor{blue}{U}_1 = \sum_i \textcolor{blue}{U}_1^{(i)}$$

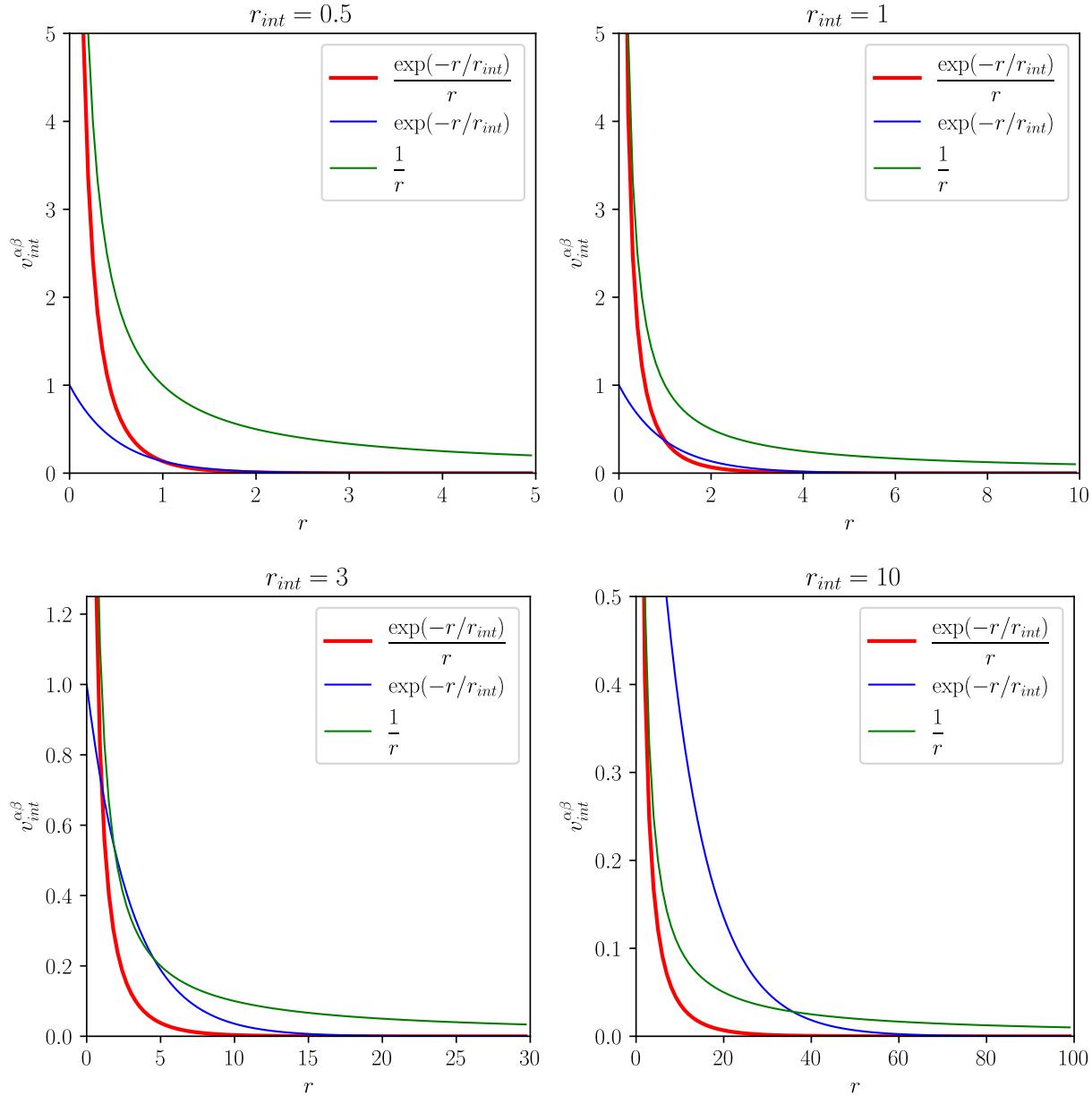
である

P.37 (2.32) '25 7.1

$$v_{int}^{\alpha\beta} \sim \frac{\exp[-r/r_{int}]}{r} \quad (2.32)$$

$r \simeq r_{int}$ を過ぎると急激に小さくなる

(説明)



プロットを見ると r_{int} 近辺で $\frac{\exp[-r/r_{int}]}{r}$ は急激に減少しているのがわかる。数式での証明？

r_{int} 近辺で $\frac{1}{r}$ も急激に減少しているがそれほど 0 には近づかない。いっぽう $\frac{\exp[-r/r_{int}]}{r}$ はほとんど 0 になる

またプロットから

$r \sim 0$ で $\frac{\exp[-r/r_{int}]}{r}$ は $\frac{1}{r}$ に近づく

$r \gg r_{int}$ で $\frac{\exp[-r/r_{int}]}{r}$ は $\exp[-r/r_{int}]$ に近づく

となることがわかる

P.38 (2.35) '25 7.3

$$U = \sum_i U^{(i)} + o(V) \quad (2.35)$$

$o(V)$ の項は相対的に無視できる

(説明)

同じ U としているが $U, U^{(i)}$ は異なる量である

$\textcolor{red}{U}_0, \textcolor{blue}{U}_1$ として区別すると

$$\textcolor{red}{U}_0 = \sum_i \textcolor{blue}{U}_1^{(i)} + o(V) \quad (2.35)$$

となる

$\textcolor{blue}{U}_1$ は示量変数とする

よって

$$\textcolor{blue}{U}_1 = \sum_i \textcolor{blue}{U}_1^{(i)}$$

$$\textcolor{blue}{U}_1 = KV$$

$$\therefore \frac{o(V)}{\textcolor{blue}{U}_1} \propto \frac{o(V)}{V} \rightarrow 0 \quad (V \rightarrow \infty)$$

よって $o(V)$ は $\textcolor{blue}{U}_1 = \sum_i \textcolor{blue}{U}_1^{(i)}$ と比べて相対的に無視できる

第3章

P.40 同じ状態、均一な状態 '25 9.3

定義: マクロに見て同じ状態、異なる状態

「2.3 節の (a)(b)(c) のタイプのマクロ物理量すべて比較したとき、どの量の値の差もマクロに見て無視できれば、2つの状態はマクロに見て同じ状態、そうでない場合は、異なる状態という」

定義: マクロに見て均一な状態

「系の同じ形、同じ体積の 2 つの部分系に着目して、部分系をどこから取り出してもマクロに見て同じ状態ならば、系はマクロに見て均一な状態」

(説明)

「系の同じ形、...」という部分は 3.3.6 節で系の形に依らず同一視するという話と矛盾するのでこれは定義から外したほうがいいかもしれない

「(a)~(c) のタイプのマクロ物理量」と限定されているので 2.6 節の「均一な状態で相加変数は示量変数になる」という話を導出できない

導出できるようにするには、「すべての相加変数は (a)~(c) のタイプのマクロ物理量だけの関数となる」という仮定、要請を追加しないといけない。明記されていないが、暗黙で仮定されていると思う

また示強変数が一致するという条件もないが、これもおそらく「すべての示強変数は (a)~(c) タイプのマクロ物理量だけの関数となる」という暗黙の仮定、要請があると思う

P.43 要請 I(ii) '25 7.3

要請 I(ii)

もしもある部分系の状態がその部分系をそのまま孤立させたときのときの平衡状態とマクロに見て同じ状態にあれば、その部分系の状態も平衡状態と呼ぶ

平衡状態の部分系も平衡状態

(説明)

「そのまま孤立させ」ことができるためには「そのまま孤立できる」という前提がある

この前提は仮定、要請である。この仮定が正しいことは経験的に保証されている

「孤立させる」の定義もないが、断熱-断物-不動の仕切り壁で囲むことを孤立させると定義して大丈夫だと思う

よって「そのまま孤立させる」とはすべてのマクロ物理量が同じままで断熱-断物-不動の仕切り壁で囲むこととなる

単に孤立させるといった場合は一部のマクロ物理量が異なった状態で孤立させることも含む

「マクロに見て同じ状態」とは「すべてのマクロ物理量が同じ」と同値であると仮定、要請する

話を部分系に限っているのは、対象となる系は部分系かまたは全体系しかないが、全体系の場合ただの孤立系の平衡状態の話になる

要請が意味をもつのは部分系に対してだけなので部分系と限っている

また「部分系の平衡状態を部分系の平衡状態と呼ぶ」という定義文としてはわかりにくい文章になっているが、

ここで言いたいのは定義ではなく

「孤立させる前の部分系の状態が孤立させた後の部分系の平衡状態と同じ」という主張である

教科書では経験的に正しいことが保証されている仮定、要請、また経験的に定義された量がたくさん出てくるが、

経験的に正しいかどうか分からぬわたしらど素人は教科書の言うことをそのまま信じるしかない

P.44 要請 II(i) '25 10.7

要請 II(i)

それぞれの平衡状態に対して値が一意的に定まるエントロピーという量 S が存在する

(説明)

「それぞれの平衡状態」というが、平衡状態を識別するにはマクロ物理量で識別するしかない

なのでこの要請は、「平衡状態を識別するマクロ物理量が存在する。かつ、エントロピーが存在する。かつ、エントロピーはこのマクロ物理量の関数である」と仮定、要請しているのと同じである

P.45 操作、遷移 '25 10.7

「ピストンを押す」「静電場をかける」「温める」のように系になにか(マクロに)働きかけることを操作と呼ぼう

平衡状態にあった系に様々な操作を行ってゆくと、様々な平衡状態を得る。このことを、操作によって系が様々な平衡状態の間を遷移する。と言う

(説明)

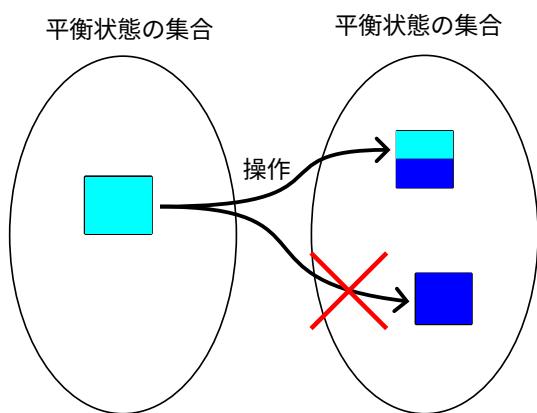
操作と遷移の定義である。経験的定義である。定義の妥当性は経験によって保証される

明記されていないが操作は関数であると仮定、要請している。

すなわち

平衡状態から操作によって遷移する平衡状態は存在する。かつ

平衡状態から操作によって遷移する平衡状態は1つである。と仮定、要請している



P.45 操作で遷移する平衡状態の範囲 '25 10.7

遷移しうる平衡状態の範囲は、どんな操作を行うかに依存する

(説明)

これは仮定、要請である。経験的に正しいと保証されている

外力がない場合、内部束縛のない部分系を単純系という

外力がある場合、内部束縛がなく外力による不均一さが無視できる部分系を単純系という

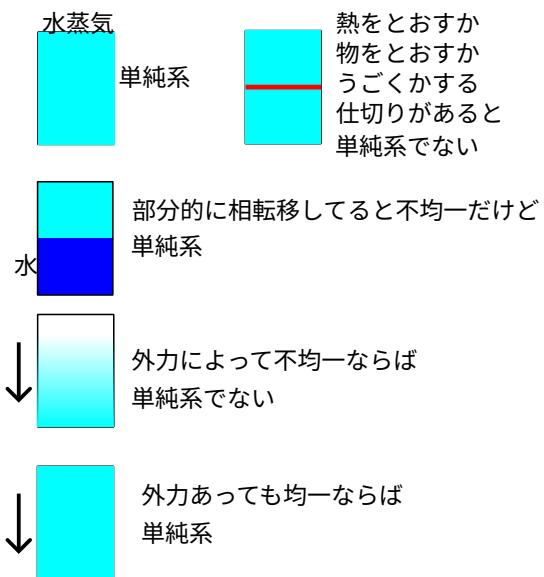
(説明)

内部束縛とは熱をとおすか、物をとおすか、動くかする仕切りのことである ([別頁](#))

外力による不均一さはなくても、相転移による不均一さはあってもよい

なので単純系は不均一な系ということではない

磁化云々はよくわからないので、水と水蒸気の系を考えることとする



また明記していないが

「部分系が単純系でないならば全体系は単純系でない」

「全体系は部分系 (1) と (1) 以外に分割できる」

も仮定、要請されている

P.46 単純系の部分系は単純系 '25 10.16

単純系の部分系は単純系

(説明)

明記されていないが

「部分系に仕切りが存在するならば全体系にも仕切りは存在する」

「部分系に外力による不均一が存在するならば全体系にも外力による不均一は存在する」

ということを仮定、要請している

このとき

「単純系の部分系は単純系である」

(証明)

単純系でない部分系が存在するとする

単純系でないので熱をとおすか、物をとおすか、うごくかする仕切りが存在するか、もしくは外力による不均一が存在する

部分系に仕切りが存在する場合、全体系にもこの仕切りが存在する。 $(\because \text{仮定、要請})$

よって全体系は単純系ではない

部分系に外力による不均一が存在する場合、全体系にもこの外力による不均一が存在する。 $(\because \text{仮定、要請})$

よって全体系は単純系ではない

これは全体系は単純系であることと矛盾する

よって単純系でない部分系は存在しない

よって単純系の部分系は単純系である

P.46 要請 II(ii) '25 10.7

X_1, \dots, X_t は相加変数

$$\mathbf{X} = X_1, \dots, X_t \quad (3.2)$$

$$S = S(U, \mathbf{X}) \text{ (単純系)} \quad (3.3)$$

(説明)

要請 II(i) でエントロピーは平衡状態を識別するマクロ変数の関数であると仮定、要請した ([別頁](#))

要請 II(ii) ではそのマクロ変数が U と 相加変数 X_1, \dots, X_t であると仮定、要請している

要請 II(i) よりエントロピー関数の変数は平衡状態を識別するので、 U, X_1, \dots, X_t は平衡状態を識別する

基本関係式

(説明)

基本変数の関数のエントロピーを基本関係式という

基本変数の定義？基本関係式の定義？

U と相加変数で S が表示できればなんでも基本変数と基本関係式になるのか？

ほかの変数で S を表示させると基本関係式にならなくなる理由？

基本変数、基本関係式はひとつだけ？

要請 II(iii)

基本関係式 (3.3) は、連続的微分可能である。特に U についての偏微分係数は正で、下限は 0 で、上限はない

(説明)

仮定、要請である。この要請の正しさは経験的にあたえられる

とはいえかなり都合のいいきびしい要請である

微係数正とか下限 0 とかそのうち覆されそうな気もするがどうだろうか

P.48 要請 II(ii) のつづき '25 7.8

要請 II(ii) のつづき

単純系の部分系は元の系と同じ基本関係式をもつ

部分系ごとに異なりうる添字 (i) が不要

U をいくらでも大きくすれば微係数はいくらでも 0 に近づく

(説明)

元の系の基本関係式

$S = S(U, \mathbf{X})$, U, \mathbf{X} は独立変数ならば

単純系の部分系の基本関係式は

$S^{(i)} = S(U^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)})$, $U^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)}$ は独立変数 となる

「部分系ごとに異なりうる添字 (i) が不要」というのは

$\mathbf{U} = \mathbf{U}(W), \mathbf{X} = \mathbf{X}(Y)$, とする。 W, Y を独立変数とするとき

$\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{U}(W^{(i)}), \mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{X}(Y^{(i)})$ とする。 $W^{(i)}, Y^{(i)}$ を独立変数とすることである

「 U をいくらでも大きくすれば微係数はいくらでも 0 に近づく」というのは？

P.50 平衡状態がマクロ状態として一意に定まる'25 7.15

平衡状態がマクロ状態として一意に定まることを意味しない

(説明)

平衡状態がマクロ状態の定義が明確でないので、一意に定まるという意味が不明である

ここでは、相の配置が異なれば異なるマクロ状態であるという文脈で話をしている

いっぽう、3.3.6 節のように相の配置が異なっても同一視するという文脈もある

ただこの節での主題は均一な部分系に関することで、相の配置によってマクロ状態が一意に定まるか定まらないかは主題と全く関係ない

P.51 均一な平衡状態は U, X と一対一 '25 7.9

単純系の均一な平衡状態は、 U, X の値と一対一対応する

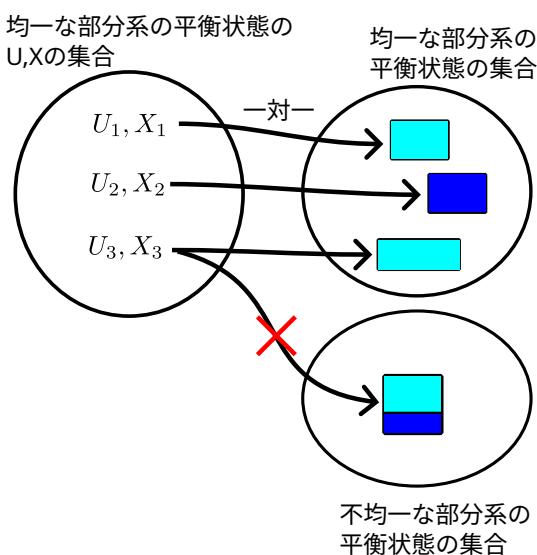
均一な平衡状態に対応する U, X の値をもつ不均一な平衡状態は存在しない

そのようなエントロピーの自然な変数 U, X が存在する

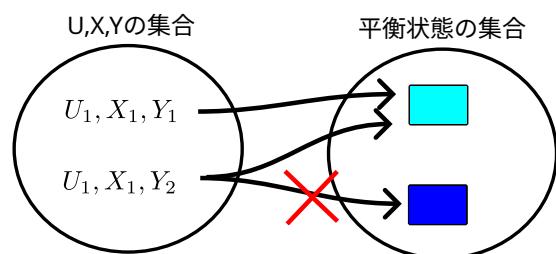
(説明)

これらは 要請 II(iv) である

図にするとこんな感じ



均一な部分系の平衡状態は自然な変数以外の変数に依存することはない



均一な部分系の平衡状態の集合はどのように得ることができるか、均一な部分系の平衡状態のとりうる U, X はどのように得られるか？

P.52 同一視 '25 7.31

形状が既知のときに平衡状態は U, X でマクロに見て一意的に定まる

裏を返せば形状まで U, X で定まるとはいっていい

...

全体の U, V, N も同じなので U, V, N と $S(U, V, N)$ から導かれるマクロ物理量の値はすべて一致する

(説明)

「平衡状態はマクロに見て一意的に定まる」の意味は平衡状態のマクロ物理量が一意に定まるということ

「裏を返せば」というのは、 U, X で平衡状態が一意に決まるのだから、形状が異なっていても U, X が同じなら同じ平衡状態ということになる。これが「裏を返せば」のいみである

また、この時点では形状の違いを平衡状態の違いに含んでいない

なので、このあと形状の違いを無視して平衡状態を同一視するとあらためて定義しているが、同じことを繰り返して言っているだけである

「全体の U, V, N も同じなので U, V, N と $S(U, V, N)$ から導かれるマクロ物理量の値はすべて一致する」という文において、全体系と部分系の U, V, N が同じ記号になっているのでわかりにくい

「全体の U, V, N も同じなので点線の部分系の U_p, V_p, N_p と $S(U_p, V_p, N_p)$ から導かれるマクロ物理量の値はすべて一致する」ということである

全体系も、同一視できる部分系をくっつけただけだから、熱力学的性質は同じであり、全体系も同一視できる

(説明)

「くっつけただけだから熱力学的性質は同じ」これは仮定、要請である。

この要請が妥当であるとする理由は経験による

水と水蒸気の系だと経験的に図 4.3(a) と (b) の熱力学的性質は同じということが正しいとわかっているからこのような要請ができる

もし右からくっつけるのと、左からくっつけるのとで熱力学的性質の異なる系が見つかればこの要請も見直さないといけない

「熱力学的性質」の定義も経験的に与えられる。水と水蒸気の系なら温度、圧力、体積のことである。新しい系を考えるならそれにあった「熱力学的性質」をまた定義しないといけない

P.53 同一視の定義 '25 7.31

全系の U, X の値は同じで容器の形状や相の空間配置だけが異なっている平衡状態は常に同一視する

(説明)

同一視するというのは等号で結ぶということである。この文は平衡状態の集合の要素間の等号の定義である

この定義の妥当性は経験的なものだと思われる

形状によって平衡状態を区別するような熱力学もあるかもしれないが、この本では形状によって平衡状態を区別しないという定義のもとに熱力学を作っている

P.58 要請 II(i)(ii)(iii)(iv)(v) '25 9.6

要請 II(i),(ii),(iii),(iv),(v)

(説明)

(i) はエントロピーの存在を仮定、要請する

(ii),(iii),(iv),(v) はエントロピーに関する法則を仮定、要請する

これらの仮定、要請が正しいことは経験的に保証される

これらの仮定、要請から導かれる定理が実験、観察をうまく説明できれば、これらの仮定、要請は正しいと認められる

こういう話の進め方は力学と同じである

力学では明記されないがまず力の存在を仮定する。つぎに力の3法則を仮定する

仮定の正しさが別の普遍的に正しい公理から導かれるならばなんの文句もないがそうもいかない。経験的に正しいというのが精一杯である

仮定ではなく定義という見方もできるが、仮定と定義はよく似ている。要請 (i)~(v) をエントロピーの定義とみると、あまり明記されないが定義はいつも妥当性を仮定する。つまり定義を満たす実体が存在することを仮定する。そしてその仮定の正しさは経験によって保証される。なので定義と仮定は同じようなものである

P.59 要請 II(v) '25 8.2

$$\hat{S} = \sum_i S^{(i)}(U^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)}) \quad (3.13)$$

すべての単純系の部分系が平衡状態のとき複合系は平衡状態である

\hat{S} の最大値は複合系のエントロピーに等しい

\hat{S} が最大のとき複合系は平衡状態である

\hat{S} が最大でないとき複合系は非平衡状態である

(説明)

複合系の平衡状態について、平衡状態の定義における「長い時間」は部分系の平衡状態の「長い時間」と同じ意味。また「何の変化もない」というのは部分系が「変化しない」という意味とするのが妥当である

要請 II-(v) 以前に複合系のエントロピーの定義はないので、要請 II(v) は複合系のエントロピーが存在すると仮定して（要請(i)）、そのエントロピーは $\max \hat{S}$ に等しいと仮定するという主張だと解釈する

要請 II(v) を複合系のエントロピーの定義と解釈するとどうぞめぐりになって何も主張していないことになる

要請 II(i) より複合系の 1 つの平衡状態に対してエントロピーは 1 つまる

(3.13) の $U^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)}$ は部分系 i が平衡状態という条件のもとでの値である。複合系が平衡状態であるという条件は満たしていないくてよい

なので \hat{S} の最大値を与える $U^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)}$ は複合系の平衡状態を与えるとは限らないが、 \hat{S} が最大のとき、複合系は平衡状態であると仮定する。これは定理？証明？

\hat{S} の最大値を与える $U^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)}$ が 1 つとは仮定していないので複合系において同じエントロピーを与える複数の平衡状態があり得る

第4章

要請 II(iv)

平衡状態の単純系は空間的に均一な部分系に分割できる

均一な部分系の状態は自然な変数 U, \mathbf{X} が適切に選んであれば、その部分系の U, \mathbf{X} の値で一意に定まる

その部分系には、それと同じ U, \mathbf{X} の値を持つ不均一な平衡状態は存在しない

(説明)

経験的な仮定、要請である。この要請の正しさは経験的にあたえられる

「空間的に均一」というのは 3.3.4 節の系の一部が相転移した空間的に不均一な系を考慮している

単純系の部分系は単純系 ([別頁](#)) なので、「空間的に均一な部分系」は単純系である

なので、均一な部分系は単純系かつ均一である

「 U, \mathbf{X} が適切に選んであれば、...」というのは「... を満たす U, \mathbf{X} が存在する」という意味である

単純系の部分系の自然な変数は全体系の自然な変数と同じである ([別頁](#))

まとめると、変数 U, \mathbf{X} が存在して、 U, \mathbf{X} は単純系の自然な変数である。かつ単純系の均一な部分系の自然な変数である。かつ均一な部分系の状態は U, \mathbf{X} で一意に定まる。かつ部分系の均一な状態と不均一な状態が同じ U, \mathbf{X} を持つことはない

P.61 複合系の S は一意にきまる '25 8.4

複合系の S は U, V, N と内部束縛の関数として一意に決まる

(説明)

「内部束縛 C の関数」というのは「条件 C 」のもとでという意味である

$S = S(U, V, N : C)$ というのは不思議な表記であるがこれは

$S = (S(U, V, N) \text{かつ} C)$ という意味である

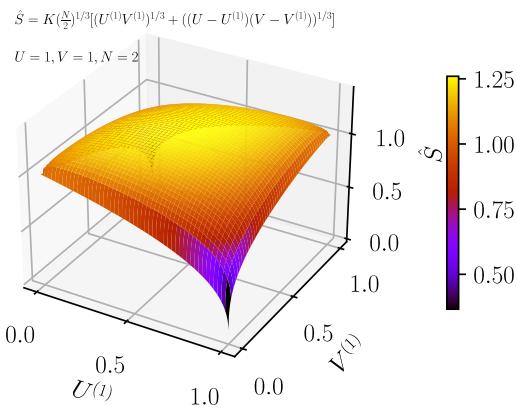
C のもとで S が U, V, N の関数になるというのは仮定とか要請ではない。計算した結果 S が U, V, N の関数だったという主張である

P.62 4.1.3 plot '25 8.4

$$\hat{S} = K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} \left[\left(U^{(1)} V^{(1)} \right)^{1/3} + \left((U - U^{(1)})(V - V^{(1)}) \right)^{1/3} \right] \quad (4.8)$$

(説明)

(4.8) のプロットはこんな感じ



この \hat{S} は四関数になっている。

複合系の \hat{S} はいつも四？ 四になることはない？ 極大になる箇所が複数あったりする？

\hat{S} が $U^{(1)}, V^{(1)}$ の変域の端で最大になったりしてもいいの？

そのとき \hat{S} の偏微分が 0 でなくてもいい？

要請 II(v) は \hat{S} の微分についてはなにも言ってない

要請 II(i) より \hat{S} が最大になる $U^{(1)}, V^{(1)}$ は 1 つである。 \hat{S} のプロットが複数箇所で最大になったりはしない

P.62 4.1.3 平衡状態を完全に求める '25 8.5

すべての部分系の平衡状態を完全に求めれば、複合系の平衡状態も完全に求まる

複合系は単に部分系がくっついているだけだからだ

(説明)

「平衡状態を完全に求める」の意味は扱っているマクロ物理量が全部求まるという意味だとおもう

「単に部分系がくっついている」というのは部分系の変数が独立して変化できるという意味だと思う。ある部分系の変数の変化が他の部分系の変数に影響を与えないということ

「～だから」というのは「単に部分系がくっついているだけならば複合系の平衡状態も完全に求まる」という前提があることを意味する。この前提は仮定、要請である。この前提の正しさは経験によって担保されている。

経験的に正しいとされている要請を他の仮定、要請から導こうとするのは無駄な努力である。そうでない系が見つかればまた前提も変わるだけだからである

P.62 (4.8) 一様連続 '25 8.16

$$\hat{S}_2(U^{(1)}, V^{(1)}) = K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} \left[\left(U^{(1)}, V^{(1)} \right)^{1/3} + \left((U - U^{(1)})(V - V^{(1)}) \right)^{1/3} \right] \quad (4.8)$$

$\hat{S}_2(U^{(1)}, V^{(1)})$ は $0 \leq U^{(1)} \leq U, 0 \leq V^{(1)} \leq V$ で一様連続である

(証明)

$$f(x, y) = (xy)^{1/3} + ((X-x)(Y-y))^{1/3} \text{ とする}$$

$0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y$ とする

$g(x, y) = xy$ は $0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y$ で一様連続である (*1)

(*1) $0 \leq x_0, x_1 \leq X, 0 \leq y_0, y_1 \leq Y$ とする

$$|x_1 y_1 - x_0 y_0|$$

$$= |x_1(y_1 - y_0) + y_0(x_1 - x_0)|$$

$$\leq |x_1||y_1 - y_0| + |y_0||x_1 - x_0| \quad (\because \text{三角不等式})$$

$$\leq X|y_1 - y_0| + Y|x_1 - x_0|$$

$$d = |(x_1, y_1) - (x_0, y_0)| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \text{ とする}$$

$$|x_1 - x_0| \leq d, |y_1 - y_0| \leq d \quad (\because \text{三角不等式})$$

$$\therefore X|x_1 - x_0| \leq Xd, Y|y_1 - y_0| \leq Yd$$

$$\therefore X|y_1 - y_0| + Y|x_1 - x_0| \leq (X + Y)d$$

$$\therefore |x_1 y_1 - x_0 y_0| \leq (X + Y)d$$

$$\varepsilon > 0 \text{ とする}$$

$$X + Y = 0 \text{ のとき } X = Y = 0$$

$$\therefore x_0 = y_0 = x_1 = y_1 = 0$$

$$\therefore |x_1 y_1 - x_0 y_0| = 0 < \varepsilon$$

$$X + Y \neq 0 \text{ のとき}$$

$$d = |(x_0, y_0) - (x_1, y_1)| < \frac{\varepsilon}{X + Y} \text{ ならば}$$

$$|x_1 y_1 - x_0 y_0| \leq (X + Y)d \leq (X + Y) \frac{\varepsilon}{X + Y} = \varepsilon$$

よって xy は一様連続

$h(t) = t^{1/3}$ は $0 \leq t \leq T$ で一様連続である (*2)

(*2) $0 \leq t_0, t_1 \leq T$ とする

$t_0 < t_1$ のとき

$$\left((t_1 - t_0)^{1/3} + t_0^{1/3} \right)^3$$

$$= (t_1 - t_0) + 3(t_1 - t_0)^{2/3}t_0^{1/3} + 3(t_1 - t_0)^{1/3}t_0^{2/3} + t_0 \quad (\because \text{二項定理})$$

$$\geq (t_1 - t_0) + t_0 = t_1$$

$$\therefore (t_1 - t_0)^{1/3} + t_0^{1/3} \geq t_1^{1/3}$$

$$\therefore (t_1 - t_0)^{1/3} \geq t_1^{1/3} - t_0^{1/3}$$

$$\varepsilon > 0 \text{ とする}$$

$$|t_1 - t_0| < \varepsilon^3 \text{ ならば}$$

$$(t_1 - t_0)^{1/3} < \varepsilon$$

$$\therefore \varepsilon > (t_1 - t_0)^{1/3} \geq t_1^{1/3} - t_0^{1/3} = |t_1^{1/3} - t_0^{1/3}|$$

$$t_0 > t_1 \text{ のときも同様に } \varepsilon > |t_1^{1/3} - t_0^{1/3}|$$

よって $t^{1/3}$ は一様連続

$h(g(x, y)) = (xy)^{1/3}$ は $0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y$ で一様連続である (*3)

(*3) $h(t)$ が $0 \leq t \leq T$ で一様連続

$g(x, y)$ が $0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y$ で一様連続とする

$0 \leq g(x, y) \leq T$ とする

$\varepsilon_h > 0$ とする

δ_h が存在して $|t_1 - t_0| < \delta_h$ ならば $|h(t_1) - h(t_0)| < \varepsilon_h$

$g(x, y)$ は一様連続なので x_1, y_1 によらない δ_g が存在して

$|(x_1, y_1) - (x_0, y_0)| < \delta_g$ ならば $|g(x_1, y_1) - g(x_0, y_0)| < \delta_h$

$\therefore |h(g(x_1, y_1)) - h(g(x_0, y_0))| < \varepsilon_h$

よって $h(g(x, y))$ は x, y について一様連続

$h(g(X - x, Y - y)) = ((X - x)(Y - y))^{1/3}$ は $0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y$ で一様連続である (*4)

(*4) $h(s, t)$ が $0 \leq s \leq S, 0 \leq t \leq T$ で一様連続

$f(x)$ が $0 \leq x \leq X$ で一様連続

$g(y)$ が $0 \leq y \leq Y$ で一様連続

$0 \leq f(x) \leq S, 0 \leq g(y) \leq T$ とする

$\varepsilon_h > 0$ に対して s_0, t_0, s_1, t_1 によらない δ_h があって

$|(s_1, t_1) - (s_0, t_0)| < \delta_h$ ならば $|h(s_1, t_1) - h(s_0, t_0)| < \varepsilon_h$

x_0, x_1 によらない δ_f があって

$|x_1 - x_0| < \delta_f$ ならば $|f(x_1) - f(x_0)| < \delta_h / \sqrt{2}$

y_0, y_1 によらない δ_g があって

$|y_1 - y_0| < \delta_g$ ならば $|g(y_1) - g(y_0)| < \delta_h / \sqrt{2}$

$d = \min(\delta_f, \delta_g)$ とする

$|(x_1, y_1) - (x_0, y_0)| < d$ とすると

$|x_1 - x_0| \leq |(x_1, y_1) - (x_0, y_0)| < d \leq \delta_f$ なので (\because 三角不等式)

$|f(x_1) - f(x_0)| < \delta_h / \sqrt{2}$

同様に $|g(y_1) - g(y_0)| < \delta_h / \sqrt{2}$

$\therefore |(f(x_1), g(y_1)) - (f(x_0), g(y_0))|$

$$= \sqrt{(f(x_1) - f(x_0))^2 + (g(y_1) - g(y_0))^2}$$

$$< \sqrt{\delta_h^2/2 + \delta_h^2/2} = \delta_h$$

よって $|h(f(x_1), g(y_1)) - h(f(x_0), g(y_0))| < \varepsilon_h$

よって $h(f(x), g(y))$ は $0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y$ で一様連続

よって $f(x, y) = (xy)^{1/3} + ((X - x)(Y - y))^{1/3}$ は一様連続である ($\because f, g$ が一様連続ならば $f + g$ も一様連続)

よって $\hat{S}_2(U^{(1)}, V^{(1)})$ は一様連続 ($\because f$ が一様連続ならば kf も一様連続)

P.63 (4.10),(4.11) '25 8.5

$$S(U, V, N : C_1, C_2) = K \left(\frac{UN}{2} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{V^{(1)}}{1 + \sqrt{\frac{V-V^{(1)}}{V^{(1)}}}} \right)^{1/3} + \left(\frac{V - V^{(1)}}{1 + \sqrt{\frac{V^{(1)}}{V-V^{(1)}}}} \right)^{1/3} \right] \quad (4.10)$$

$$U^{(1)} = \frac{U}{1 + \sqrt{\frac{V-V^{(1)}}{V^{(1)}}}} \quad (4.11)$$

(証明)

$$\begin{aligned} \hat{S}(U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}, N^{(2)}) &= S^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}) + S^{(2)}(U^{(2)}, V^{(2)}, N^{(2)}) \quad (\because 3.13) \\ &= K(U^{(1)}V^{(1)}N^{(1)})^{1/3} + K(U^{(2)}V^{(2)}N^{(2)})^{1/3} \quad (\because 3.5) \\ &= K[(U^{(1)}V^{(1)}N^{(1)})^{1/3} + (U^{(2)}V^{(2)}N^{(2)})^{1/3}] \end{aligned}$$

$U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}, N^{(2)}$ は独立変数とする。K は定数とする

$$C_0 : U = U^{(1)} + U_1^{(2)}, V = V^{(1)} + V_1^{(2)}, N = N^{(1)} + N_1^{(2)} \quad (4.3) \text{ とする}$$

U, V, N は独立変数とする

$$\begin{aligned} \hat{S}_1(U, V, N, U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}) &= \hat{S}(U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}, U - U^{(1)}, V - V^{(1)}, N - N^{(1)}) \\ &= K[(U^{(1)}V^{(1)}N^{(1)})^{1/3} + ((U - U^{(1)})(V - V^{(1)})(N - N^{(1)}))^{1/3}] \end{aligned}$$

とする

$$C_1 : N_1^{(1)} = \frac{N}{2} \text{ とする}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_2(U, V, N, U^{(1)}, V^{(1)}) &= \hat{S}_1(U, V, N, U^{(1)}, V^{(1)}, N_1^{(1)}) \\ &= K\left(\frac{N}{2}\right)^{1/3} [(U^{(1)}V^{(1)})^{1/3} + ((U - U^{(1)})(V - V^{(1)}))^{1/3}] \quad (4.7) \end{aligned}$$

とする

$$C_2 : 0 \leq V_1^{(1)} \leq V \text{ とする}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_3(U, V, N, U^{(1)}) &= \hat{S}_2(U, V, N, U^{(1)}, V_1^{(1)}) \\ &= K\left(\frac{N}{2}\right)^{1/3} [(U^{(1)}V_1^{(1)})^{1/3} + ((U - U^{(1)})(V - V_1^{(1)}))^{1/3}] \end{aligned}$$

とする

$$\begin{aligned} S(U, V, N : C_0, C_1, C_2) &= \max_{U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}, N^{(2)}} (\hat{S}, C_0, C_1, C_2) \quad (\because \text{要請 II(v)}) \\ &= \max_{U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}} (\hat{S}_1, C_1, C_2) \quad (\because C_0) \\ &= \max_{U^{(1)}, V^{(1)}} (\hat{S}_2, C_2) \quad (\because C_1) \\ &= \max_{U^{(1)}} \hat{S}_3 \quad (\because C_2) \end{aligned}$$

任意の U, V, N に対して上の等式が成立する。よって $\max_{U^{(1)}} \hat{S}_3$ が存在すれば $S(U, V, N : C_0, C_1, C_2)$ は存在する

$\max_{U^{(1)}} \hat{S}_3$ を求める

$0 \leq U^{(1)} \leq U$ で \hat{S}_3 は連続である (*1)

(*1) $(U^{(1)})^{1/3}$ は連続 ($\because p > 0$ ならば x^p は連続)

$(U - U^{(1)})^{1/3}$ は連続 (\because 連続関数の合成関数は連続)

よって \hat{S}_3 は連続 (\because 連続関数の線形性)

$0 < U^{(1)} < U$ とする

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{S}_3}{\partial U^{(1)}} &= K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} \left[\frac{1}{3} (U^{(1)})^{-2/3} (V_1^{(1)})^{1/3} + \frac{1}{3} (-1) (U - U^{(1)})^{-2/3} (V - V_1^{(1)})^{1/3} \right] \quad (*2) \\ &= K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{3} \left[(U^{(1)})^{-2/3} (V_1^{(1)})^{1/3} - (U - U^{(1)})^{-2/3} (V - V_1^{(1)})^{1/3} \right]\end{aligned}$$

(*2) $0 < a < 1, x > 0$ ならば $(x^a)' = ax^{a-1}$

$0 < u_1 < u_2 < U$ とする

$$\frac{\partial \hat{S}_3}{\partial U^{(1)}} \Big|_{U^{(1)}=u_2} - \frac{\partial \hat{S}_3}{\partial U^{(1)}} \Big|_{U^{(1)}=u_1} = K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{3} \left[(u_2^{-2/3} - u_1^{-2/3}) (V_1^{(1)})^{1/3} - ((U - u_2)^{-2/3} - (U - u_1)^{-2/3}) (V - V_1^{(1)})^{1/3} \right]$$

$0 < u_1 < u_2$ ので $u_1^{-2/3} > u_2^{-2/3}$ ($\because 0 < a < b, p < 0$ ならば $a^p > b^p$)

$$\therefore u_2^{-2/3} - u_1^{-2/3} < 0$$

また $-u_1 > -u_2$ ので

$$\therefore U - u_1 > U - u_2 > 0$$

$$\therefore (U - u_1)^{-2/3} < (U - u_2)^{-2/3}$$

$$\therefore (U - u_2)^{-2/3} - (U - u_1)^{-2/3} > 0$$

$$\therefore \frac{\partial \hat{S}_3}{\partial U^{(1)}} \Big|_{U^{(1)}=u_2} - \frac{\partial \hat{S}_3}{\partial U^{(1)}} \Big|_{U^{(1)}=u_1} < 0$$

よって $\frac{\partial \hat{S}_3}{\partial U^{(1)}}$ は強単調減少である

$$\text{よって } \frac{\partial \hat{S}_3}{\partial U^{(1)}} \Big|_{U^{(1)}=U_1^{(1)}} = 0, 0 < U_1^{(1)} < U \text{ ならば } U_1^{(1)} \text{ で } \hat{S}_3 \text{ は最大となる } \quad (*3)$$

(*3) $a \leq x \leq b$ で $f(x)$ が連続

$a < x < b$ で $f'(x)$ が強単調減少とする

$a < x_0 < b$ で $f'(x_0) = 0$ とする

$a \leq x < x_0$ のとき

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}, x < c < x_0 \quad (\because \text{平均値の定理})$$

$f'(c) > f'(x_0) = 0$ ($\because f'(x)$ は強単調減少)

$$\therefore \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} > 0$$

$x_0 - x > 0$ ので

$$\therefore f(x_0) - f(x) > 0$$

$$\therefore f(x_0) > f(x)$$

$x_0 < x \leq b$ のとき

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_b)}{x - x_0}, x_0 < c < x \quad (\because \text{平均値の定理})$$

$f'(c) < f'(x_0) = 0$ ので

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

$x - x_0 > 0$ ので

$$f(x) - f(x_0) < 0$$

$$\therefore f(x) < f(x_0)$$

よって $a \leq x \leq b, x \neq x_0$ ならば $f(x) < f(x_0)$

よって x_0 で $f(x)$ は最大となる

$$\frac{\partial \hat{S}_3}{\partial U^{(1)}} \Big|_{U^{(1)}=U_1^{(1)}} = 0, \quad 0 < U_1^{(1)} < U \text{ とする}$$

$$(U_1^{(1)})^{-2/3}(V_1^{(1)})^{1/3} - (U - U_1^{(1)})^{-2/3}(V - V_1^{(1)})^{1/3} = 0$$

$$\therefore (U_1^{(1)})^{-2/3}(V_1^{(1)})^{1/3} = (U - U_1^{(1)})^{-2/3}(V - V_1^{(1)})^{1/3}$$

$V_1^{(1)} \neq 0$ とする

$$\therefore \left(\frac{U_1^{(1)}}{U - U_1^{(1)}} \right)^{-2/3} = \left(\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}} \right)^{1/3}$$

$$\therefore \left(\frac{U - U_1^{(1)}}{U_1^{(1)}} \right)^2 = \frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}$$

$$\therefore \frac{U - U_1^{(1)}}{U_1^{(1)}} = \pm \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}$$

$$\frac{U - U_1^{(1)}}{U_1^{(1)}} = \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}} \text{ とすると}$$

$$U_1^{(1)} = \frac{U}{1 + \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}} \text{ となる}$$

$$\text{逆に } V_1^{(1)} \neq 0, V_1^{(1)} \neq V \text{かつ } U_1^{(1)} = \frac{U}{1 + \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}} \text{ とすると}$$

$$U > 0 \text{かつ } \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}} > 0 \text{ なので } 0 < U_1^{(1)} < U \text{ である}$$

また

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{S}_3}{\partial U^{(1)}} \Big|_{U^{(1)}=U_1^{(1)}} &= K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{3} \left[(U_1^{(1)})^{-2/3}(V_1^{(1)})^{1/3} - (U - U_1^{(1)})^{-2/3}(V - V_1^{(1)})^{1/3} \right] \\ &= K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{U}{1 + \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}} \right)^{-2/3} (V_1^{(1)})^{1/3} - \left(U - \frac{U}{1 + \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}} \right)^{-2/3} (V - V_1^{(1)})^{1/3} \right] \\ &= K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{U}{1 + \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}} (V^{(1)})^{-1/2} \right)^{-2/3} - \left(\frac{U \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}}{1 + \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}} (V - V_1^{(1)})^{-1/2} \right)^{-2/3} \right] \\ &= K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{U (V^{(1)})^{-1/2}}{1 + \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}} \right)^{-2/3} - \left(\frac{U (V^{(1)})^{-1/2}}{1 + \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}} \right)^{-2/3} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

である

よって $V_1^{(1)} \neq 0, V_1^{(1)} \neq V$ ならば

$$U_1^{(1)} = \frac{U}{1 + \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}} \quad (4.11) \text{ において } \hat{S}_3 \text{ は最大となる}$$

よって

$0 < V_1^{(1)} < V$ ならば

$$S(U, V, N : C_0, C_1, C_2) = \max_{U^{(1)}} \hat{S}_3 = \frac{\partial \hat{S}_3}{\partial U^{(1)}} \Big|_{U^{(1)}=U_1^{(1)}}$$

$$\begin{aligned}
&= K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{U}{1 + \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}} V_1^{(1)} \right)^{1/3} + \left(\left(U - \frac{U}{1 + \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}} \right) (V - V_1^{(1)}) \right)^{1/3} \right] \\
&= K \left(\frac{UN}{2} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{V_1^{(1)}}{1 + \sqrt{\frac{V - V_1^{(1)}}{V_1^{(1)}}}} \right)^{1/3} + \left(\frac{V - V_1^{(1)}}{1 + \sqrt{\frac{V_1^{(1)}}{V - V_1^{(1)}}}} \right)^{1/3} \right] \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$V_1^{(1)} = 0$ ならば

$$\hat{S}_3 = K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} (U - U^{(1)})^{1/3} V^{1/3}$$

この \hat{S}_3 は $0 \leq U^{(1)} \leq U$ で強単調減少である (*4)

(*4) $0 \leq x \leq X \Rightarrow (X - x)^{1/3}$ は強単調減少
(証明)

$0 \leq x_1 < x_2 \leq X$ とする

$\therefore X - x_1 > X - x_2 \geq 0$

$\therefore (X - x_1)^{1/3} > (X - x_2)^{1/3} (\because \text{省略})$
よって $(X - x)^{1/3}$ は強単調減少

よって $U_1^{(1)} = 0 \Rightarrow \hat{S}_3 = K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} U^{1/3} V^{1/3}$ は最大となる

$V_1^{(1)} = V$ ならば

$$\hat{S}_3 = K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} (U^{(1)})^{1/3} V^{1/3}$$

この \hat{S}_3 は $0 \leq U^{(1)} \leq U$ で強単調増加である (*5)

(*5) $0 \leq x \leq X \Rightarrow x^{1/3}$ は強単調増加
(証明)省略

よって $U_1^{(1)} = U \Rightarrow \hat{S}_3 = K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} U^{1/3} V^{1/3}$ は最大となる

よって

$V_1^{(1)} = V$ または $V_1^{(1)} = V$ ならば

$$S(U, V, N : C_0, C_1, C_2) = \max_{U^{(1)}} \hat{S}_3 = K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} U^{1/3} V^{1/3}$$

本文では $V_1^{(1)} = 0$ または $V_1^{(1)} = V$ の場合について書かれていないが、暗黙で $0 < V_1^{(1)} < V$ と仮定されているのかもしれない

(注意) 複合系のエントロピー S は U, V, N を変化させたときの \hat{S} の最大値ではない。 $U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}, N^{(2)}$ を変化させたときの \hat{S} の最大値である (要請 II(v))

P.64 (4.16) $\max_{\{U,V\}} = \max_U \max_V$ '25 8.9

$\max_{U^{(1)}, V^{(1)}} \hat{S}_2$ は存在する

$\max_{V^{(1)}} \max_{U^{(1)}} \hat{S}_2$ は存在する

$\max_{U^{(1)}, V^{(1)}} \hat{S}_2 = \max_{V^{(1)}} \max_{U^{(1)}} \hat{S}_2$ (4.16) である

(証明)

$$\hat{S}_2(U^{(1)}, V^{(1)}) = K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} [(U^{(1)}V^{(1)})^{1/3} + ((U - U^{(1)})(V - V^{(1)}))^{1/3}]$$

とする

\hat{S}_2 は $0 \leq U^{(1)} \leq U, 0 \leq V^{(1)} \leq V$ で一様連続 (別頁)

よって $\max_{U^{(1)}, V^{(1)}} \hat{S}_2$ は存在する (\because 閉領域の連続関数は最大値をもつ)

また

$0 \leq V_0^{(1)} \leq V$ とすると $\hat{S}_2(U^{(1)}, V_0^{(1)})$ は $0 \leq U^{(1)} \leq U$ で連続

よって $\max_{U^{(1)}} \hat{S}_2(U^{(1)}, V_0^{(1)})$ は存在する (\because 閉区間で連続関数は最大値をもつ)

$V_0^{(1)}$ は任意なので $\max_{U^{(1)}} \hat{S}_2(U^{(1)}, V^{(1)})$ は存在する

また $\max_{U^{(1)}} \hat{S}_2$ は $0 \leq V^{(1)} \leq V$ で連続 (*1)

(*1) $f(x, y)$ が一様連続ならば $\max_y f(x, y)$ は連続

(証明)

$f(x, y)$ は一様連続なので任意の ε に対して

x, x_0, y によらない δ があって

$$|(x, y) - (x_0, y)| < \delta \text{ ならば } |f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$$

$$|x - x_0| < \delta \text{ ならば}$$

$$|(x, y) - (x_0, y)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y)^2} = |x - x_0| < \delta$$

$$\text{よって } |x - x_0| < \delta \text{ ならば } |f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$$

$$\therefore -\varepsilon < f(x, y) - f(x_0, y) < \varepsilon$$

$$\therefore -\varepsilon + f(x_0, y) < f(x, y) < \varepsilon + f(x_0, y) \cdots (1)$$

$f(x_0, y) \leq \max_y f(x_0, y)$ なので (1) の右側の不等式より

$$f(x, y) < \varepsilon + \max_y f(x_0, y)$$

y は任意なので

$$\therefore \max_y f(x, y) < \max_y f(x_0, y) + \varepsilon$$

$$\therefore -\varepsilon + \max_y f(x, y) < \max_y f(x_0, y)$$

また $f(x, y) \leq \max_y f(x, y)$ なので (1) の左側の不等式より

$$-\varepsilon + f(x_0, y) < \max_y f(x, y)$$

$$\therefore f(x_0, y) < \max_y f(x, y) + \varepsilon$$

y は任意なので

$$\max_y f(x_0, y) < \max_y f(x, y) + \varepsilon$$

よって $-\varepsilon + \max_y f(x, y) < \max_y f(x_0, y) < \max_y f(x, y) + \varepsilon$

$\therefore |\max_y f(x_0, y) - \max_y f(x, y)| < \varepsilon$

よって $\max_y f(x, y)$ は x_0 で連続

x_0 は任意なので $\max_y f(x, y)$ は連続

よって $\max_{V^{(1)}} \max_{U^{(1)}} \hat{S}_2$ は存在する (\because 閉区間の連続関数は最大値をもつ)

よって $\max_{U^{(1)}, V^{(1)}} \hat{S}_2 = \max_{V^{(1)}} \max_{U^{(1)}} \hat{S}_2$ である (*2)

(*2) $\max_{x,y} f(x, y), \max_x \max_y f(x, y)$ が存在するならば

$$\max_{x,y} f(x, y) = \max_x \max_y f(x, y)$$

(証明)

$$f(x, y) \leq \max_{x,y} f(x, y)$$

y は任意なので $\max_y f(x, y) \leq \max_{x,y} f(x, y)$

x は任意なので $\max_x \max_y f(x, y) \leq \max_{x,y} f(x, y)$

また $f(x, y) \leq \max_y f(x, y) \leq \max_x \max_y f(x, y)$

x, y は任意なので $\max_{x,y} f(x, y) \leq \max_x \max_y f(x, y)$

よって $\max_{x,y} f(x, y) = \max_x \max_y f(x, y)$

P.64 (4.16) '25 8.9

$$S(U, V, N : C_1) = \max_{U^{(1)}, V^{(1)}} \hat{S} = \max_{V^{(1)}} \max_{U^{(1)}} \hat{S} = \max_{V^{(1)}} S(U, V, N : C_1, C_2) \quad (4.16)$$

(説明)

$$\hat{S}(U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}, N^{(2)}) = S^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}) + S^{(2)}(U^{(2)}, V^{(2)}, N^{(2)}) \quad (\because 3.13)$$

$U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}, N^{(2)}$ は独立変数、 K は定数とする

$$C_0 : U = U^{(1)} + U_1^{(2)}, V = V^{(1)} + V_1^{(2)}, N = N^{(1)} + N_1^{(2)} \quad (4.3) \text{ とする}$$

U, V, N は独立変数とする

$$\hat{S}_1(U, V, N, U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}) = \hat{S}(U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}, U - U^{(1)}, V - V^{(1)}, N - N^{(1)}) \text{ とする}$$

$$C_1 : N^{(1)} = \frac{N}{2} \text{ とする}$$

$$\hat{S}_2(U, V, N, U^{(1)}, V^{(1)}) = \hat{S}_1(U, V, N, U^{(1)}, V^{(1)}, \frac{N}{2}) \text{ とする}$$

$$\begin{aligned} S(U, V, N : C_0, C_1) &= \max_{U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}, N^{(2)}} (\hat{S}, C_0, C_1) \quad (\because \text{要請 II(v)}) \\ &= \max_{U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}, N^{(2)}} (\hat{S}_1, C_1) \quad (\because C_0) \\ &= \max_{U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}} (\hat{S}_1, C_1) \quad (\because \hat{S}_1 \text{ は } U^{(2)}, V^{(2)}, N^{(2)} \text{ に依らないので}) \\ &= \max_{U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}} \hat{S}_2 \quad (\because C_1) \\ &= \max_{U^{(1)}, V^{(1)}} \hat{S}_2 \quad (\because \hat{S}_2 \text{ は } N^{(1)} \text{ によらないので}) \\ &= \max_{V^{(1)}} \max_{U^{(1)}} \hat{S}_2(U, V, N, U^{(1)}, V^{(1)}) \quad (*1) \end{aligned}$$

(*1) 別頁

上の等式は任意の U, V, N で成立する。かつ $\max_{V^{(1)}} \max_{U^{(1)}} \hat{S}_2$ は存在する (別頁)

よって $S(U, V, N : C_0, C_1)$ は存在する

$$C_2 : V^{(1)} = V_1^{(1)} \text{ とする}$$

$$\hat{S}_3(U, V, N, U^{(1)}) = \hat{S}_2(U, V, N, U^{(1)}, V_1^{(1)}) \text{ とする}$$

$$\begin{aligned} S(U, V, N : C_0, C_1, C_2) &= \max_{U^{(1)}, V^{(1)}} (\hat{S}_2, C_2) \quad (\because \text{要請 II(v)}, C_0, C_1) \\ &= \max_{U^{(1)}, V^{(1)}} \hat{S}_3 \quad (\because C_2) \\ &= \max_{U^{(1)}} \hat{S}_3(U, V, N, U^{(1)}) \quad (\because \hat{S}_3 \text{ は } V^{(1)} \text{ によらない}) \end{aligned}$$

上の等式は任意の U, V, N で成立する。

また、 $\hat{S}_2(U, V, N, U^{(1)}, V^{(1)})$ は一様連続なので (別頁)

よって $\hat{S}_2(U, V, N, U^{(1)}, V_1^{(1)})$ は連続 ($\because f(x, y)$ が連続ならば $f(a, y)$ は連続)

よって $\hat{S}_3(U, V, N, U^{(1)})$ は連続

よって $\max_{U^{(1)}} \hat{S}_3(U, V, N, U^{(1)})$ は存在する (\because 閉区間で連続な関数は最大値をもつ)

よって $S(U, V, N : C_0, C_1, C_2)$ は存在する

よって

$$\begin{aligned} \max_{V_1^{(1)}} S(U, V, N : C_0, C_1, C_2) &= \max_{V_1^{(1)}} \max_{U^{(1)}} \hat{S}_3 \\ &= \max_{V_1^{(1)}} \max_{U^{(1)}} \hat{S}_2(U, V, N, U^{(1)}, V_1^{(1)}) \end{aligned}$$

$V_1^{(1)}$ は ダミー変数なので

$$\max_{V^{(1)}} S(U, V, N : C_0, C_1, C_2) = \max_{V^{(1)}} \max_{U^{(1)}} \hat{S}_2(U, V, N, U^{(1)}, V^{(1)})$$

任意の U, V, N で等式は成立する。かつ $\max_{V^{(1)}} \max_{U^{(1)}} \hat{S}_2(U, V, N, U^{(1)}, V^{(1)})$ は存在する ([別頁](#))

よって $\max_{V^{(1)}} S(U, V, N : C_0, C_1, C_2)$ は存在する

よって

$$\begin{aligned} S(U, V, N : C_0, C_1) &= \max_{U^{(1)}, V^{(1)}} \hat{S}_2(U, V, N, U^{(1)}, V^{(1)}) \\ &= \max_{V^{(1)}} \max_{U^{(1)}} \hat{S}_2(U, V, N, U^{(1)}, V^{(1)}) \\ &= \max_{V^{(1)}} S(U, V, N : C_0, C_1, C_2) \end{aligned}$$

C_2 で $V_1^{(1)}$ を固定したのに $\max_{V_1^{(1)}}$ とするのはおかしい感じがするが

固定するといいつつ $V_1^{(1)}$ は任意なので、 C_2 の制約はないのと同じという話である

P.64 (4.17) (4.20) (4.21) (4.22) '25 8.10

$$f(x) + f(X - x) \quad (4.17)$$

$$V^{(1)} = \frac{V}{2} \quad (4.20)$$

$$S(U, V, N : C_1) = K(UVN)^{1/3} \quad (4.21)$$

$$U^{(1)} = \frac{U}{2} \quad (4.22)$$

(説明)

$$S(U, V, N : C_1, C_2) = K \left(\frac{UN}{2} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{V^{(1)}}{1 + \sqrt{\frac{V - V^{(1)}}{V^{(1)}}}} \right)^{1/3} + \left(\frac{V - V^{(1)}}{1 + \sqrt{\frac{V^{(1)}}{V - V^{(1)}}}} \right)^{1/3} \right] \quad (4.10)$$

x は独立変数とする。 $0 < x < X$ とする

$$f(x) = \left(\frac{x}{1 + \sqrt{\frac{X-x}{x}}} \right)^{1/3} \text{ とする}$$

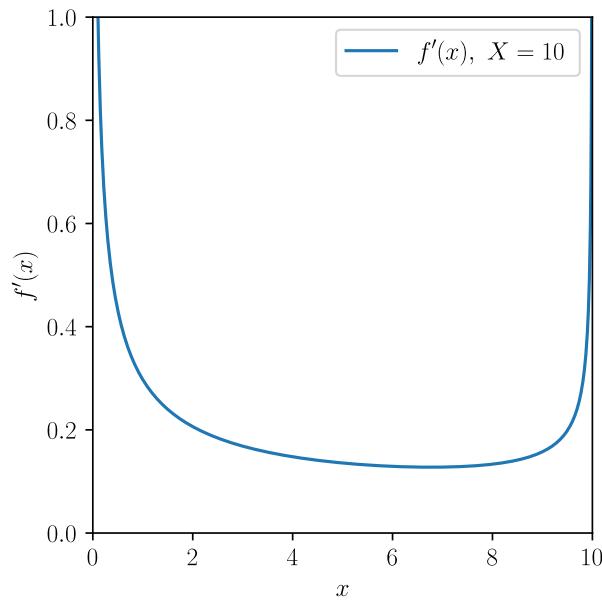
$$f(X - x) = \left(\frac{X - x}{1 + \sqrt{\frac{x}{X-x}}} \right)^{1/3} \text{ である}$$

よって $X = V$ とすると

$$S(U, V, N : C_1, C_2) = K \left(\frac{UN}{2} \right)^{1/3} [f(V^{(1)}) + f(V - V^{(1)})] \text{ である}$$

よって $S(U, V, N : C_1, C_2)$ は $f(x) + f(X - x)$ (4.17) の形をしている

本文では $f'(x)$ は強単調としているがプロットしてみると



となり $f'(x)$ は単調減少でも単調増加でもない

$$\begin{aligned} S_1^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}) &= S^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}), C_0, C_1 \\ &= S^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}, N^{(1)}), C_1 \quad (\because C_0 \text{ は } U^{(2)}, V^{(2)}, N^{(2)} \text{ の制約なので}) \\ &= S^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}, \frac{N}{2}) \quad (\because C_1 : N^{(1)} = \frac{N}{2}) \end{aligned}$$

$$= K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} (U^{(1)} V^{(1)})^{1/3}$$

とする

5.3 節によると $S_1^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)})$ は $V^{(1)}$ について凹関数である よって $\frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial V^{(1)}}$ は強単調減少である

しかし $S_2^{(1)}(V^{(1)}) = S_1^{(1)} \left(\frac{U}{1 + \sqrt{\frac{V - V^{(1)}}{V^{(1)}}}}, V^{(1)} \right)$ が $V^{(1)}$ について凹関数である保証はない (*1)

(*1) $f(x, y)$ が凹であっても $f(g(y), y)$ が凹とは限らない
 $f(g(y), y)$ が凹となる条件は？

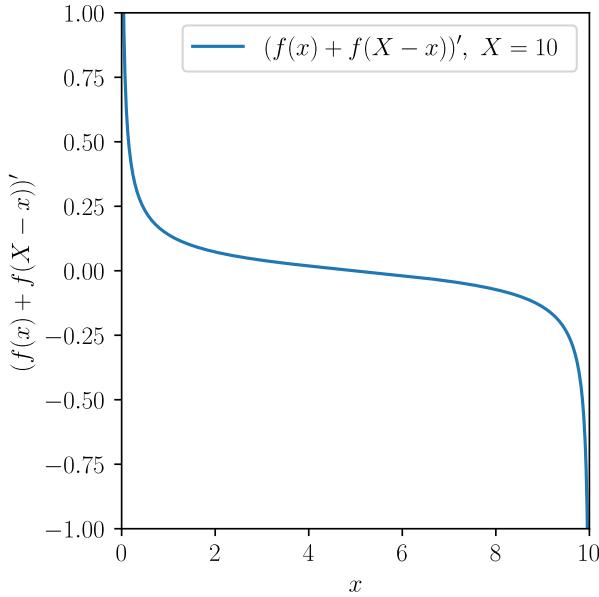
よって $\frac{dS_2}{dV^{(1)}}$ が強単調減少かどうかはわからない

実際 $S_2^{(1)}(V^{(1)}) = K \left(\frac{N}{2} \right)^{1/3} f(V^{(1)})$ であるが、

上のプロットのとおり $f'(x)$ は強単調減少ではなく、よって $\frac{dS_2}{dV^{(1)}}$ は強単調減少ではない。

ここでうまいこと $f(x) + f(X - x)$ が $\frac{X}{2}$ で最大になっているのは

たまたま $(f(x) + f(X - x))'$ が強単調減少になっているからである



これがいつも保証されているわけではない。(保証される条件は？)

また、強単調減少かどうか確認するのも大変である。(ここでは数値計算してプロットして確認。解析的な確認は？)

$x = \frac{X}{2}$ で $(f(x) + f(X - x))' = 0$ となる (*2)

(*2) $(f(x) + f(X - x))' = f'(x) - f'(X - x)$ なので

$x_0 = \frac{X}{2}$ とすると

$$\begin{aligned} (f(x_0) + f(X - x_0))' &= f'(x_0) - f'(X - x_0) \\ &= f'(X/2) - f'(X/2) = 0 \end{aligned}$$

よって $\frac{X}{2}$ において $f(x) + f(X - x)$ は最大となる (*3)

(*3) $0 \leq x \leq X$ で $g(x)$ は連続

$0 < x < X$ で $g'(x)$ が強単調減少
 $0 < x_0 < X, g'(x_0) = 0$ ならば $g(x_0)$ は最大

最大値は

$$\begin{aligned} f(X/2) + f(X - X/2) &= 2f(X/2) \\ &= 2 \left(\frac{X/2}{1 + \sqrt{\frac{X-X/2}{X/2}}} \right)^{1/3} \\ &= 2 \left(\frac{X}{4} \right)^{1/3} = (2X)^{1/3} \end{aligned}$$

となる

よって

$$\begin{aligned} S(U, V, N : C_1) &= \max_{V^{(1)}} S(U, V, N : C_1, C_2) \quad (\because (4.15)) \\ &= \max_{V^{(1)}} K \left(\frac{UN}{2} \right)^{1/3} [f(V^{(1)}) + f(V - V^{(1)})] \\ &= K \left(\frac{UN}{2} \right)^{1/3} (2V)^{1/3} \\ &= K(UNV)^{1/3} \quad (4.21) \end{aligned}$$

となる

$\max_{V^{(1)}} S(U, V, N : C_1, C_2)$ を与える $V^{(1)}$ は $V^{(1)} = \frac{V}{2}$ (4.20) である

また $S(U, V, N : C_1, C_2)$ を与える $U^{(1)}$ は

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= \frac{U}{1 + \sqrt{\frac{V-V^{(1)}}{V^{(1)}}}} \quad (\because (4.11)) \\ &= \frac{U}{1 + \sqrt{\frac{V-V/2}{V/2}}} \\ &= \frac{U}{2} \quad (4.22) \end{aligned}$$

である

P.66 ε 空間 '25 8.9

(1) ε 空間の次元は $\dim \varepsilon = t + 1$ (4.23)

(2) ε 空間の各々の点は、この単純系の平衡状態と一対一に対応する

(3) ε は $\hat{\varepsilon}$ の部分空間で、 $\dim \hat{\varepsilon} = \sum_i \dim \varepsilon_i = \sum_i (t_i + 1) \geq \dim \varepsilon$ (4.24)

(説明)

(1)

この ε 空間は单なる集合ではなくベクトル空間である。ベクトル空間なので、次元とか部分空間が定義できる

$t = 2$, $\mathbf{X} = X_1, X_2$ とする

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \{(U, X_1, X_2) : U \in \mathbb{R}, X_1 \in \mathbb{R}, X_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))\end{aligned}$$

よって $\dim \varepsilon = 3$ である

同様に $t \in \mathbb{Z}^+$ (正の整数) のとき $\dim \varepsilon = t + 1$ (4.23) である

(注意)

$\varepsilon = \{(U, X_1, X_2) : U \geq 0, X_1 \geq 0, X_2 \geq 0\}$ とすると ε はベクトル空間ではなくなる

なぜならベクトル空間の定義の「 $v \in \varepsilon$ ならば $\lambda v \in \varepsilon, \lambda \in \mathbb{R}$ 」に反するので

なので ε をベクトル空間として扱うとマイナスの物理量 N とかマイナスの体積 V とかが出てきてちょっと変な感じがする

とはいって、 ε をベクトル空間として扱っているのはこの節だけみたいなのであまり気にしなくてよいと思う

(2)

これは仮定、要請である (たぶん要請 II(iv) で系全体を部分系とした場合だと思う)

(3)

$t_1 = 1$, $\mathbf{X}^{(1)} = X_1^{(1)}$ とする

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \{(U^{(1)}, X_1^{(1)}) : U^{(1)} \in \mathbb{R}, X_1^{(1)} \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}((1, 0), (0, 1))\end{aligned}$$

よって $\dim \varepsilon_1 = 2$

$t_2 = 2$, $\mathbf{X}^{(2)} = X_1^{(2)}, X_2^{(2)}$ とする

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \{(U^{(2)}, X_1^{(2)}, X_2^{(2)}) : U^{(2)} \in \mathbb{R}, X_1^{(2)} \in \mathbb{R}, X_2^{(2)} \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))\end{aligned}$$

よって $\dim \varepsilon_2 = 3$

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} &= \{(U^{(1)}, X_1^{(1)}, U^{(2)}, X_1^{(2)}, X_2^{(2)}) : U^{(1)} \in \mathbb{R}, X_1^{(1)} \in \mathbb{R}, U^{(2)} \in \mathbb{R}, X_1^{(2)} \in \mathbb{R}, X_2^{(2)} \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}((1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1))\end{aligned}$$

よって $\dim \hat{\varepsilon} = 5$

$U = U^{(1)} + U^{(2)}$, $X_1 = X_1^{(1)} + X_1^{(2)}$, $X_2 = X_2^{(2)}$ とする

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \{(U, X_1, X_2, 0, 0) : U \in \mathbb{R}, X_1 \in \mathbb{R}, X_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}((1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0))\end{aligned}$$

よって ε は $\hat{\varepsilon}$ の部分空間で $\dim \varepsilon = 3$ である

よって $\dim \hat{\varepsilon} = \dim \varepsilon_1 + \dim \varepsilon_2 = (t_1 + 1) + (t_2 + 1) > \dim \varepsilon$

部分系の個数 $\in \mathbb{Z}^+$, $t_i \in \mathbb{Z}^+$ (\mathbb{Z}^+ は正の整数) の場合も同様に

$$\dim \hat{\varepsilon} = \sum_i \dim \varepsilon_i = \sum_i (t_i + 1) \geq \dim \varepsilon \quad (4.24)$$

等号が成立するのは部分系の個数 = 1 のとき

P.68 定理 4.1 '25 8.9

(1) 内部束縛 C_1, \dots, C_b が少ないほど、最大値を探す範囲が広くなるので S は大きくなる

(2) 定理 4.1 $S(U, \mathbf{X}; \dots, C_{k-1}, C_k, C_{k+1}, \dots) \leq S(U, \mathbf{X}; \dots, C_{k-1}, C_{k+1}, \dots)$ (4.25)

(説明)

(1)

例として部分系 2 つからなる複合系をかんがえる

部分系の自然変数を $U^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)} = U^{(i)}, X_1^{(i)}, X_2^{(i)}$ とする

$U = U^{(1)} + U^{(2)}, X_1 = X_1^{(1)} + X_1^{(2)}, X_2 = X_1^{(1)} + X_2^{(2)}$ とする

$$\begin{aligned}\hat{S}(U, \mathbf{X}, U^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}) &= S^{(1)}(U^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}) + S^{(2)}(U^{(2)}, X_1^{(2)}, X_2^{(2)}) \\ &= S^{(1)}(U^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}) + S^{(2)}(U - U^{(1)}, X_1 - X_1^{(1)}, X_2 - X_2^{(1)})\end{aligned}$$

とする

内部束縛を $C_1 : X_1^{(1)} = 1, C_2 : X_2^{(1)} = 2$ とする

$$\begin{aligned}S_1(U, \mathbf{X} : C_1, C_2) &= \max_{U^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}} (\hat{S}, C_1, C_2) \\ &= \max_{U^{(1)}} \hat{S}(U, \mathbf{X}, U^{(1)}, 1, 2)\end{aligned}$$

とする

$$\begin{aligned}S_2(U, \mathbf{X} : C_1) &= \max_{U^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}} (\hat{S}, C_1) \\ &= \max_{U^{(1)}, X_2^{(1)}} \hat{S}(U, \mathbf{X}, U^{(1)}, 1, X_2^{(1)})\end{aligned}$$

とする

任意の $X_2^{(1)}$ について

$$\max_{U^{(1)}} \hat{S}(U, \mathbf{X}, U^{(1)}, 1, X_2^{(1)}) \leq \max_{U^{(1)}, X_2^{(1)}} \hat{S}(U, \mathbf{X}, U^{(1)}, 1, X_2^{(1)})$$

なので

$$\max_{U^{(1)}} \hat{S}(U, \mathbf{X}, U^{(1)}, 1, 2) \leq \max_{U^{(1)}, X_2^{(1)}} \hat{S}(U, \mathbf{X}, U^{(1)}, 1, X_2^{(1)})$$

よって $S_1(U, \mathbf{X} : C_1, C_2) \leq S_2(U, \mathbf{X} : C_1)$ である

各最大値 $\max_{U^{(1)}} \dots, \max_{U^{(1)}, X_2^{(1)}} \dots$ は存在すると仮定している

「内部束縛が少ないほど、最大値を探す範囲が広くなる」というのは

$A = \{y : 0 \leq y \leq Y\}, B = \{y : y \in A, y \text{についての束縛}\}$ とすると $B \subseteq A$ である

このとき $(y \in B, \max_{x,y} f(x, y)) \leq (y \in A, \max_{x,y} f(x, y))$ ということである (*1)

(*1)(証明)

$$y_0 \in B \text{が存在して } (y \in B, \max_{x,y} f(x, y)) = \max_x f(x, y_0)$$

$$\text{任意の } y \in A \text{について } \max_x f(x, y) \leq (y \in A, \max_{x,y} f(x, y))$$

$$\therefore \max_x f(x, y_0) \leq \max_{x,y} f(x, y)$$

$$\therefore \left(y \in B, \max_{x,y} f(x,y) \right) \leq \left(y \in A, \max_{x,y} f(x,y) \right)$$

各最大値 $\max_x \dots, \max_y \dots$ は存在すると仮定している

(2)

任意の \hat{S} と C_1, \dots, C_b に対しても同様に

$$S(U, \mathbf{X}; \dots, C_{k-1}, C_k, C_{k+1}, \dots) \leq S(U, \mathbf{X}; \dots, C_{k-1}, C_{k+1}, \dots) \quad (4.25)$$

である

定理 4.2 の後半

... $\{U^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)}\}$ の値の範囲は、引数として与えられた $U, \mathbf{X}; \mathbf{C}$ の下で、相加性を満たすような範囲内とする

(説明)

「相加性を満たすような範囲内」というのは $U^{(1)}, U^{(2)}$ の範囲が $U = U^{(1)} + U^{(2)}$ を満たすような範囲内にあるということ

ただ、これだけだと $0 \leq U^{(1)} \leq U$ とかの範囲制限ができない

なので、 $0 \leq U^{(i)} \leq U$ とか $0 \leq V^{(i)} \leq V$ とかいう条件が \mathbf{C} に含まれているはず

だが、4.1.3 節の例ではこの条件は明示されていなかった。暗黙的な範囲制限もあるみたいなので注意

P.69 完全な知識 '25 9.2

... 系の熱力学的性質に関する完全な知識を得たことになる ...

(説明)

「完全な知識」というのはよくわからないが、この文脈から考えるに $S(U, \mathbf{X})$ の式が得られることのような感じがする

P.71 混合系の要請 II(ii) '25 9.1

要請 II(ii) は、異なる物質が空間的に分離している単純系の平衡状態でも矛盾なく成り立つ

(説明)

これは仮定、要請である。経験的に正しさが保証されている

空間的に分離して居るのに要請 II(ii) が成立しないような物質が見つかればまた見直さないといけない

P.72 エントロピー減少できない '25 9.1

- (1) 断熱-断物の壁でかこまれた系に、どんな力学的仕事をしようともエントロピーを減少できない
 - (2) このような帰結を要請 I,II から導ける
-

(説明)

(1)

これは仮定、要請である。経験的に正しさが保証されている

「どんな力学的仕事」というのも経験的に定義される。断熱-断物の壁としているので膨張、圧縮のことだと思われる

断熱膨張、断熱圧縮してもエントロピーは変化しない

(2)

(1) は経験的な仮定、要請だと思うが、要請 I,II から導けるらしい

多分、P.177 の定理 10.4 だと思うが、要請 I,II を使ったこの定理の証明は記載されていない?

P.74 定理 5.1 '25 9.2

定理 5.1 エントロピーは相加的、したがって均一な平衡状態では示量的

(説明)

複合系のエントロピーは単純系である部分系のエントロピーの和として定義される (4.5)

相加的というのは部分系の量の和が全体系の量になること

$S = \sum_i S^{(i)}$ (5.3)、部分系 $S^{(i)}$ は単純系でも複合系でもよい。部分系は単純系か単純系の集まった複合系かのどちらかしかない。
よってエントロピーは相加的である

ここで「複合系は必ず単純系に分割できる」と仮定、要請している。これは経験的に保証される

示量的というのは系の量が体積に比例すること

全体系が均一な平衡状態とする。部分系 1 の体積 $V^{(1)}$ 、部分系 2 の体積 $V^{(2)} = kV^{(1)}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ とする

部分系 2 を k 個の部分系 2-1,...,2-k に分割する。体積は $V^{(2-i)} = V^{(1)}$ とする。

全体系が均一なので部分系 2-1,...,2-k のマクロ物理量

全体系が均一な平衡状態にあるとき、これを 10 個の等しい体積の部分系に分割する。全体系が均一なので部分系のマクロ物理量は同じである。 $S^{(i)} = S^{(j)}$ よって $S = 10S^{(1)}$