目次

第 1 章

P.7 $D_x^+ f(a) = f'(a+0)$ '25 3.22

$f(x)$が$[a, a, \epsilon']$で連続, $(a+a+\epsilon')$で微分可能とする

$f'(a+0) = \lim_{\epsilon \to +0} f'(a+\epsilon)$が存在するならば

$D_x^+ f(a)$が存在し$D_x^+ f(a) = f'(a+0)$である

(証明)

$[a, a+\epsilon']$で連続, $(a, a+\epsilon')$で微分可能なので

$\dfrac{f(a+\epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = f'(a+\epsilon),\ 0 < \epsilon < \epsilon'$ なるϵが存在する　($\because$　平均値の定理)

ϵ'に対するϵを1つ選んで$\epsilon(\epsilon')$とする

$f'(a+0) = \displaystyle\lim_{\epsilon \to +0} f'(a+\epsilon)$が存在するので

任意の$\delta > 0$に対してあるϵ_1が存在して

$0 < \epsilon < \epsilon_1$ならば$|f'(a+\epsilon) - f'(a+0)| < \delta$である

$0 < \epsilon' < \epsilon_1$ならば$0 < \epsilon(\epsilon') < \epsilon'$なので$0 < \epsilon(\epsilon') < \epsilon_1$

よって$|f'(a+\epsilon(\epsilon')) - f'(a+0)| < \delta$である

$\dfrac{f(a+\epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = f'(a+\epsilon(eps'))$なので

$0 < \epsilon' < \epsilon_1$ならば$\left|\dfrac{f(a+\epsilon') - f(a)}{\epsilon'} - f'(a+0)\right| < \delta$である

$\therefore \quad \displaystyle\lim_{\epsilon' \to +0} \frac{f(a+\epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = f'(a+0)$である　($\because$　極限の定義)

$\displaystyle\lim_{\epsilon' \to +0} \frac{f(a+\epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = D_x^+(a)$なので

$D_x^+(a) = f'(a+0)$である

P.8 (1.2) $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$ '25 3.21

$f(x)$が$x=a$で微分可能 $\rightleftarrows$ $x\to a$で$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$なる$f'(a)$が存在する

(証明)

$(\leftarrow)$

$o(x-a)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ ($\because$ $f=g+o(...)\rightleftarrows o(...)=f-g$と定義する)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}=0$ ($\because$ 付録A $o(...)$の定義)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right)=0$

よって任意の$\epsilon>0$に対して$0<|x-a|<\delta$ならば

$\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|<\epsilon$

よって $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ ($\because$ 極限の定義)

よって$f(x)$は$x=a$で微分可能 ($\because$ 微分の定義)

$(\rightarrow)$

$x=a$で微分可能なので

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$が存在する ($\because$ 微分の定義)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\lim_{x\to a}f'(a)$ ($\because$ 定数の極限)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}f'(a)=0$ ($\because$ 実数の四則の公理)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right)=0$ ($\because$ 差の極限)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}\right)=0$ ($\because$ 実数の四則の公理)

$\therefore$ $o(x-a)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ ($\because$ 付録A $o(...)$の定義)

$\therefore$ $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$ ($\because$ $f-g=o(...)\rightleftarrows f=g+o(...)$と定義する)

よって$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$なる$f'(a)$が存在する

P.10 問 1.3 $(0,0)$でfは連続

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$(x,y)=(0,0)$でfは連続

(証明)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

である

また　$(x,y)\neq(0,0)$で$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$は有界　$(*1)$

よって　$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}<m$なる$m$が存在する

また　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy=0$　$(\because\ \lim f=F,\lim g=G$ならば$limfg=FG)$

よって　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$　$(*2)$

よって$f(x,y)$は$(0,0)$で連続

$(*1)\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$が有界でないと仮定する

任意の$m>0$に対して$\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|>m$なる$(x,y)$が存在する

$\therefore\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}<-m\ or\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}>m$

$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}>m$とすると$0>(m-1)x^2+(m+1)y^2$

$m=1$とすると$0>2y^2$となり矛盾

$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}<m$とすると$x^2(1-m)-y^2(1-m)<0$

$m=1$とすると$0<0$となり矛盾

よって$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$は有界

$(*2)f(x,y)$が有界$,\lim g=0$ならば$\lim fg=0$

(証明)

$|f|<m$なるmが存在する

任意の$\epsilon>0$に対して、ある$\delta>0$があって

$|(x,y)|<\delta$ならば$|g|<\epsilon$

$\therefore\ |f||g|<|f|\epsilon$

$\epsilon|f|<\epsilon m$なので

$|f||g|<\epsilon m$

$\therefore\ |fg|<\epsilon m$

任意の$\epsilon'>0$に対して$\epsilon'=\epsilon m$とすると

$|(x,y)|<\delta$ならば$|fg|<\epsilon'$

$\therefore\ limfg=0$

P.10 問 1.3 f_x は連続

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ は連続

(証明)

$(x,y)\neq(0,0)$ とする

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y-2)2x}{(x^2+y^2)^2}(*1)$$
$$=\frac{x^4y-4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$(*1)$積の微分公式、商の微分公式

$(a,b)\neq(0,0)$ とすると

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{a^4b-4a^2b^3-b^5}{(a^2+b^2)^2}(*2)$$
$$=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)}$$

$(*2)$ $\lim f=F,\lim g=G$ならば

$\lim(f+g)=F+G$

$\lim(fg)=FG$

$G\neq 0$ならば $\lim\dfrac{f}{g}=\dfrac{F}{G}$

よって $(x,y)\neq(0,0)$ で $\frac{\partial f}{\partial x}$ は連続

$(x,y)\neq(0,0)$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$$

$\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界$(*3)$ かつ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}y=0$

$(*3)$ $\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界でないと仮定する

任意の$m>0$に対して

$\left|\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right|>m$なる$(x,y)$が存在する

$\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}<-m$または$\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}>m$である

$\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}<-m$とすると

$x^4-4x^2y^2-y^4<-m(x^4+2x^2y^2+y^4)$

$\therefore\ (1+m)x^4+(4+2m)x^2y^2+(m-1)y^4<0$

$m=1$とすると$2x^4+6x^2y^2<0$となり矛盾する

$\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}>m$とすると

$x^4-4x^2y^2-y^4>m(x^4+2x^2y^2+y^4)$

$\therefore\quad 0>(m-1)x^4+(2m-4)x^2y^2+(m-1)y^4$

$m=2$とすると$0>x^4+y^4$となり矛盾する

よって$\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$は有界

よって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}y\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}=0(*4)$$

$(*4)$$f(x,y)$が有界、$\lim g(x,y)=0$ならば

あるある$m>0$が存在して$|f(x,y)|<m$

任意の$\epsilon>0$に対して$\delta>0$が存在して

$|(x,y)|<\delta$ならば$|g(x,y)|<\epsilon$

$\therefore\quad |f||g|<|f|\epsilon, |f|\epsilon<m\epsilon$

$\therefore\quad |fg|=|f||g|<m\epsilon$

任意の$\epsilon'>0$に対して$\epsilon'=m\epsilon$とすると

$|(x,y)|<\delta$ならば$|fg|<\epsilon'$

$\therefore\quad \lim fg=0$

また $f(x,y)$は$(0,0)$で連続(別紙) よって 本文(1.5)(1.6) より $(0,0)$で$\frac{\partial f}{\partial x}$ は存在して

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(0,0)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

よって $\frac{\partial f}{\partial x}$ は $(0,0)$ で連続

P.12 数学の定理 1.2

ある開領域で$f(x_1,\cdots,x_m)$がC^∞級ならば

その領域でn階までの偏導関数は微分の順序によらない

(証明)

fの2階以上n階以下の偏導関数を考える

$f_{x_{p1}\cdots x_{pi}x_{pj}\cdots x_{pk}}$

fはC^∞級なので

$f_{x_{p1}\cdots x_{pi}x_{pj}}$は存在し連続である

また $f_{x_{p1}\cdots x_{pj}x_{pi}}$も存在し連続である

よって $f_{x_{p1}\cdots x_{pi}x_{pj}} = f_{x_{p1}\cdots x_{pj}x_{pi}}$ ($\because$ 2変数の場合f_{xy}, f_{yx}が連続ならば$f_{xy} = f_{yx}$ ($\because$ 別紙))

よって $f_{x_{p1}\cdots x_{pi}x_{pj}\cdots x_{pk}} = f_{x_{p1}\cdots x_{pj}x_{pi}\cdots x_{pk}}$ $\cdots(1)$

$p_1\cdots p_k$を昇順に並べたリストを$q_1\cdots q_k$とする

(1)よりx_{q1}による偏微分を左隣りの変数の偏微分との入れ換えをくりかえして

$f_{x_{p1}\cdots x_{pk}} = f_{x_{q1}\cdots x_{pk}}$とする

q_1と同様にq_2について

$f_{x_{p1}\cdots x_{pk}} = f_{x_{q1}x_{q_2}\cdots x_{pk}}$とする

これを繰り返して

$f_{x_{p1}\cdots x_{pk}} = f_{x_{q1}\cdots x_{qk}}$となる

$r_1\cdots r_2$は$p_1\cdots p_2$を任意に並べ替えたリストとする。上と同様に

$f_{x_{r1}\cdots x_{rk}} = f_{x_{q1}\cdots x_{qk}}$となる

よって $f_{x_{r1}\cdots x_{rk}} = f_{x_{p1}\cdots x_{pk}}$となる

よってn階までの偏導関数は微分の順序によらない

P.12 数学の定理 1.2

(2 変数の場合)

ある開領域でf_{xy}, f_{yx}が連続ならば$f_{xy} = f_{yx}$である

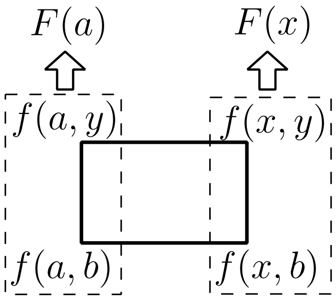
(証明)

領域内の任意の点$(a, b), (x, y)$とする

$\Delta(x, y) = (f(x, y) - f(x, b)) - (f(a, y) - f(a, b))$ とする

$F(x) = f(x, y) - f(x, b)$ とすると

$\Delta(x, y) = F(x) - F(a)$



領域内でfは連続なのでxの区間$[a, x]$で$f(x, y), f(x, b)$は連続

よって$F(x)$はxの区間$[a, x]$で連続　$(*1)$

領域内でfはxで偏微分可能なのでxの区間(a, x)で$f(x, y), f(x, b)$はxで偏微分可能

よって$F(x)$はxの区間(a, x)でxで微分可能　$(*2)$

よって平均値の定理より

$$
\begin{aligned}
\Delta(x, y) &= F(x) - F(a) \\
&= F'(a + (x - a)\theta_1)(x - a),\ 0 < \theta_1 < 1 \\
&= (f_x(a + (x - a)\theta_1, y) - f_x(a + (x - a)\theta_1, b))(x - a) \quad (*3)
\end{aligned}
$$

$(*1)$$f, g$が連続ならば$f + g$も連続

$(*2)$$f, g$が微分可能ならば$f + g$も微分可能

$(*3)$$f_{xy}, g_{xy}$を考えているので$x, y$は独立

x, yが独立なので$f_x = \underset{x\text{で微分}}{f'}$, $g_x = \underset{x\text{で微分}}{g'}$

よって $F' = f' + g' = f_x + g_x$

領域内でf_xは連続かつyで偏微分可能　($\because$　f_{xy}が存在するので)

よって $f_x(a + (x - a)\theta_1, y)$は$y$の区間$[b, y]$で連続かつ区間$(b, y)$で$y$で微分可能

また x, yは独立なので$f_{xy} = \underset{y\text{で微分}}{f'_x}$

よって平均値の定理より

$$f_x(a+(x-a)\theta_1, y) - f_x(a+(x-a)\theta_1, b)$$
$$\quad = f_{xy}(a+(x-a)\theta_1, b+(y-b)\theta_2)(x-b),\ 0<\theta_2<1$$

よって

$$\Delta(x,y) = f_{xy}(a+(x-a)\theta_1, b+(y-b)\theta_2)(x-a)(x-b)$$

$$x' = a+(x-a)\theta_1$$

$$y' = b+(y-b)\theta_2$$

とすると

$$\frac{\Delta(x,y)}{(x-a)(x-b)} = f_{xy}(x',y')$$

f_{xy}は連続なので

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{xy}(x,y) = f_{xy}(a,b)$$

よって任意のδに対して

$|(x,y)-(a,b)|<\epsilon$ ならば $|f_{xy}(x,y)-f_{xy}(a,b)|<\delta$

また

$$\begin{aligned}|(x',y')-(a,b)| &= \sqrt{(a+(x-a)\theta_1-a)^2+(b+(y-b)\theta_2-b)^2}\\ &= \sqrt{(x-a)^2\theta_1^2+(y-b)^2\theta_2^2}\\ &< |(x,y)-(a,b)| \quad (\because\ \ 0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1)\end{aligned}$$

よって $|(x',y')-(a,b)|<\epsilon$ なので $|f_{xy}(x',y')-f_{xy}(a,b)|<\delta$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{xy}(x',y') = f_{xy}(a,b)$

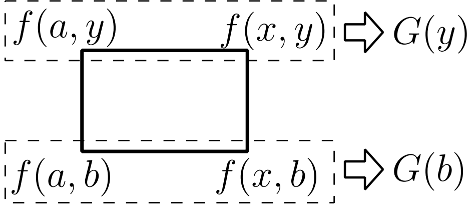
よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\Delta(x,y)}{(x-a)(y-b)} = f_{xy}(a,b)\cdots(1)$

$\Delta(x,y)$の右辺の順番をかえて

$\Delta(x,y) = (f(x,y)-f(a,y)) - (f(x,b)-f(a,b))$ とする

$G(y) = f(x,y)-f(a,y)$ とすると

$\Delta(x,y) = G(y)-G(b)$



fは領域で連続なので区間$[b,y]$で$f(x,y), f(a,y)$は連続

よって$G(y)$は区間$[b,y]$で連続　$(\because\ \ f,g$が連続ならば$f+g$は連続$)$

fは領域で偏微分可能なので区間(b,y)で$f(x,y), f(a,y)$はyで微分可能

$(\because\ \ x,y$が独立なので$f_y = \underset{y\text{で微分}}{f'}\ )$

よって$G(y)$は区間(b,y)でyで微分可能　$(\because\ \ (f+g)' = f'+g')$

よって平均値の定理より

$$\begin{aligned}\Delta(x,y) &= G'(b+(y-b)\theta_3)(y-b),\ 0<\theta_3<1\\ &= (f_y(x,b+(y-b)\theta_3) - f_y(a,b+(y-b)\theta_3))(y-b) \quad (\because\ \ f_y = \underset{y\text{で微分}}{f'}\ )\end{aligned}$$

領域内でf_yは連続かつxで偏微分可能なので

$f_y(x,b+(y-b)\theta_3)$は区間$[a,x]$で連続かつ区間(a,x)でxで微分可能 $(\because\ \ x,y$が独立ならば$f_{yx} = \underset{x\text{で微分}}{f'_y}\ )$

よって平均値の定理より

$\Delta(x,y) = f_{yx}(a+(x-a)\theta_4, b+(y-b)\theta_3)(y-b)(x-a),\ 0<\theta_4<1$

$x' = a+(x-a)\theta_4$

$y' = b+(y-b)\theta_3$

とすると

$\Delta(x,y) = f_{yx}(x',y')(y-b)(x-a)$

よって$\dfrac{\Delta(x,y)}{(y-b)(x-a)} = f_{yx}(x',y')$

f_{yx}は連続なので

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{yx}(x,y) = f_{yx}(a,b)$

よって任意のδに対して

$|(x,y)-(a,b)| < \epsilon$ならば$|f_{yx}(x,y) - f_{yx}(a,b)| < \delta$

また

$$\begin{aligned}|(x',y')-(a,b)| &= \sqrt{(a+(x-a)\theta_4-a)^2 + (b+(y-b)\theta_3-b)^2}\\ &= \sqrt{(x-a)^2\theta_4^2 + (y-b)^2\theta_3^2}\\ &< |(x,y)-(a,b)| \quad (\because\ \ 0<\theta_3<1, 0<\theta_4<1)\end{aligned}$$

よって$|(x',y')-(a,b)| < \epsilon$なので

$|f_{yx}(x',y') - f_{yx}(a,b)| < \delta$

よって $\displaystyle\lim_{(x',y')\to(a,b)} f_{yx}(x',y') = f_{yx}(a,b)$

よって $\lim \dfrac{\Delta(x,y)}{(y-b)(x-a)} = f_{yx}(a,b) \cdots (2)$

よって (1), (2) より

$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$

a, b は任意なので

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$

P.12 補足

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$で$f(x)$は連続

(証明)

xは連続　$(*1)$

よって $x \neq 0$ ならば $\frac{1}{x}$は連続　$(*2)$

よって $x \neq 0$ ならば $\frac{1}{x^2}$は連続　$(*3)$

よって $x \neq 0$ ならば $-\frac{1}{x^2}$は連続　$(*3)$

よって $x \neq 0$ ならば $e^{-\frac{1}{x^2}}$は連続　$(*4)$

$0 < |x-a| < |a|$ ならば $x \neq 0$

($\because$　$x = 0$ とすると $|a| < |a|$ となり矛盾)

$e^{-\frac{1}{x^2}}$ は $x \neq 0$ で連続なので

任意の ϵ に対して

$0 < |x-a| < \delta$ ならば $\left|e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{1}{a^2}}\right| < \epsilon$

よって $0 < |x-a| < min(|a|, \delta)$ ならば

$x \neq 0$ なので $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

また $\left|e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{1}{a^2}}\right| < \epsilon$

$\therefore$　$|f(x) - f(a)| < \epsilon$

よって $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

よって $x \neq 0$ ならば $f(x)$ は連続

$(*1)$$0 < |x-a| < \epsilon$ ならば

$|x-a| < \epsilon$

$\therefore$　$\lim_{x\to a} x = a$

$(*2)$ $\lim_{x\to a} f(x) = F, F \neq 0$ ならば $\lim_{x\to a} \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$

(証明)

任意の ϵ に対し $0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - F| < \epsilon \cdots (1)$

$\epsilon = \frac{|F|}{2}$ とすると

$0 < |x-a| < \delta'$ ならば $|f(x) - F| < \frac{|F|}{2}$

$\therefore$　$|F| - |f(x)| < \frac{|F|}{2}$ ($\because$　三角不等式 $|F| - |f(x)| \leq |F - f(x)|$)

$\therefore$　$|f(x)| > \frac{|F|}{2}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{|f(x)|} < \dfrac{2}{|F|} \cdots (2)$

$(\because \quad F \neq 0$ なので$|F| > 0, 0 < a < b$ ならば $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b})$

任意の ϵ' に対して $\epsilon = \dfrac{1}{2}\epsilon' F^2$ とする

$0 < |x-a| < min(\delta, \delta')$ ならば

$\left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{F}\right| = \dfrac{|f(x)-F|}{|f(x)||F|} < \dfrac{2\epsilon}{F^2} = \epsilon'$ $(\because \quad (1), (2))$

よって $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{F}$

(∗3) $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = F, \lim_{x \to a} g(x) = G$ ならば $\displaystyle\lim_{x \to a} fg = FG$

(証明)

任意の ϵ に対して $0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f-F| < \epsilon, |g-G| < \epsilon \cdots (1)$

$\epsilon = |F|$ とすると

$0 < |x-a| < \delta'$ ならば $|f-F| < |F|$

$\therefore \quad |f| - |F| < |F|$ $(\because \quad$ 三角不等式 $|a| - |b| \leq |a-b|)$

$\therefore \quad |f| < 2|F| \cdots (2)$

任意の ϵ' に対して $\epsilon = \dfrac{\epsilon'}{|G| + 2|F|}$ とする

$0 < |x-a| < min(\delta, \delta')$ ならば

$|fg - FG| = |fg - fG + fG - FG|$

$= |f(g-G) + G(f-F)|$

$\leq |f(g-G)| + |G(f-F)|$ $(\because \quad$ 三角不等式 $|a+b| < |a| + |b|)$

$= |f||g-G| + |G||f-F|$

$< 2|F|\epsilon + \epsilon|G|$ $(\because \quad (1)(2))$

$= \epsilon(2|F| + |G|) = \epsilon'$

よって $\displaystyle\lim_{x \to a} fg = FG$

(∗4) a で $f(x)$ は連続, $f(a)$ で $g(x)$ は連続ならば a で $g(f(x))$ は連続

(証明)

$\displaystyle\lim_{x \to f(a)} g(x) = g(f(a))$ なので

任意の ϵ に対して $0 < |x - f(x)| < \delta$ ならば $|g(x) - g(f(a))| < \epsilon$

$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ なので

$0 < |x-a| < \delta'$ ならば $|f(x) - f(a)| < \delta$

よって $0 < |x-a| < \delta'$ ならば $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$

よって $\displaystyle\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a))$

よって a で $g(f(x))$ は連続

P.12 補足

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$で$f(x)$は連続

(証明)

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty \quad (*1)$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (*4)$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because \quad x \neq 0) \\ &= 0 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

よって$x = 0$で$f(x)$は連続

$(*1)$
$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{x^2}} &= 1 + \left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}{2} + \cdots \quad (\because \quad e^x\text{の定義}) \\ &> 1 + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \infty \quad (*2)$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty \quad (*3)$$

$(*2)$任意の$\epsilon > 1$に対して$0 < |x| < \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon - 1}}$ならば

$$x^2 < \frac{1}{\epsilon - 1} \quad (\because \quad 0 < a < b\text{ならば}a^2 < b^2)$$

$$\frac{1}{x^2} > \epsilon - 1 \quad (\because \quad 0 < a < b\text{ならば}\frac{1}{a} > \frac{1}{b})$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{1}{x^2} > \epsilon$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} 1 + \frac{1}{x^2} = \infty$$

$(*3)$$g(x) > f(x), \lim_{x\to a} f(x) = \infty$ならば$\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

(証明)

任意のϵに対して$0 < |x - a| < \delta$ならば$f(x) > \epsilon$

$$\therefore \quad g(x) > \epsilon$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

$(*4)$ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ならば$\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

(証明)

任意のϵに対して$0 < |x - a| < \delta$ならば$f(x) > \epsilon$

$$\therefore \quad \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{\epsilon} \; (\because \quad 0 < a < b\text{ならば}\frac{1}{a} > \frac{1}{b})$$

任意のϵ'に対して$\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon'}$とする

P.12 補足

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$x\neq 0$でC^∞級

(証明)

$x\neq 0$とする

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \\ &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (*1),(*2) \\ &= -\left(\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because \ \text{積の微分}) \\ &= -(-2)x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (*3) \\ &= 2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \cdots(1) \end{aligned}$$

である。

$n>0$で

$$f^{(n)}=\left(\sum_{\nu=1}^{m}k_\nu x^{-\nu}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

と仮定する

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\nu=1}^{m}k_\nu x^{-\nu}\right)' &= \sum_{\nu=1}^{m}k_\nu (x^{-\nu})' \quad (\because \ \text{和,積の微分}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{m}(-\nu k_\nu)x^{-\nu-1} \quad (*3)\cdots(2) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= \left(\sum_{\nu=1}^{m}k_\nu x^{-\nu}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + \left(\sum_{\nu=1}^{m}k_\nu x^{-\nu}\right)\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \quad (\because \ \text{積の微分}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{m}(-\nu k_\nu)x^{-\nu-1}e^{-\frac{1}{x^2}} + \sum_{\nu=1}^{m}k_\nu x^{-\nu}2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because \ (1),(2)) \\ &= \left(\sum_{\nu=1}^{m}-\nu k_\nu x^{-\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{m}2k_\nu x^{-\nu-3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \sum_{\mu=1}^{m+4}(p_\mu+q_\mu)x^{-\mu}e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

ただし

$$p_\mu=\begin{cases} -(\mu-1)k_{\mu-1} & \mu=2,\cdots,m+1 \\ 0 & other \end{cases}$$

$$q_\mu=\begin{cases} 2k_{\mu-3} & \mu=4,\cdots,m+3 \\ 0 & other \end{cases}$$

よって、$n>0$ において
$f^{(n)}=\left(\sum_{\nu=1}^{m}k_\nu x^{-\nu}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$
である。$x\neq 0$ で $f^{(n)}, n\in\mathbb{N}$ は存在するので f は C^∞ 級である

(*1)合成関数の微分

$g'(x), f'(g(x))$が存在するなら

$f(g(x))'=g'(x)f'(g(x))$

(*2)$(e^x)'=e^x$

(証明)

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ($\because$ e^xの定義)

右辺の項別微分を考える

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)'=(1)'+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)'$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{x^{n-1}}{n!}\ (*2.1)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ (*2.2)$$
$$=e^x\ (\because\ e^x\text{の定義})$$

ここで任意のxに対して

$-A\leq x\leq A, A>0$なる区間を考える

$\left|\frac{x^\nu}{\nu!}\right|\leq\frac{A^\nu}{\nu!}, \nu=0,1,2,...$ である

また$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A^\nu}{\nu!}=e^a$ ($\because$ e^aの定義)

なので$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!}$は区間$[-A,A]$で一様収束する

($\because$ 定理 : ある区間で$|a_n(x)|\leq C_n$なる定数C_nがあって

$\sum^{\infty}C_n$が収束するならば$\sum^{\infty}a_n$は一様収束する)

よって $(e^x)'=e^x$

($\because$ 定理 : 無限級数が収束し各項の導関数が連続で項別微分が

一様収束するならば無限級数の導関数は項別微分に等しい)

(*2.1)$(1)'=0$

$n>0$ならば$x^n=nx^{n-1}$ (*3)

$(kf(x))'=kf'(x)$ ($\because$ 積の微分)

(*2.2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

(∗3)$x \neq 0, n > 0$ならば

$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$

(証明)

$(x^n)' = -nx^{-n-1}$と仮定する

$(x^{n+1})' = (xx^n)' = (x)'x^n + x(x^n)'$ (∵ 積の微分)

$= x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n$

$(x)' = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$

よって$(x^n)' = nx^{n-1}, n = 1, 2, ...$

よって$x \neq 0, n = 1, 2, ...$ ならば

$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1'x^n - 1(x^n)'}{x^{2n}}$ (∵ 商の微分)

$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$

P.12 問題 1.4

$f(x,y)=x^2e^y, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

(i)

$f_x=2xe^y \quad (*1)$

$f_y=x^2e^y \quad (*1)$

$f_{xx}=2e^y$

$f_{yy}=x^2e^y$

$f_{xy}=2xe^y$

$f_{yx}=2xe^y$

$f_x(0,0)=0,\ f_x(1,1)=2e$

$f_y(0,0)=0,\ f_y(1,1)=e$

$f_{xx}(0,0)=2,\ f_{xx}(1,1)=2e$

$f_{yy}(0,0)=0,\ f_{yy}(1,1)=e$

$f_{xy}(0,0)=0,\ f_{xy}(1,1)=2e$

$f_{yx}(0,0)=0,\ f_{yx}(1,1)=2e$

(ii)

x^2 は x で連続よって (x,y) で連続 $(*2)$

e^y は x で連続よって (x,y) で連続 $(*2)$

よって $f(x,y)=x^2e^y$ は (x,y) で連続 $(*3)$

同様に

$f_x=2xe^y$ は連続

$f_y=x^2e^y$ は連続

$f_{xx}=2e^y$ は連続

$f_{yy}=x^2e^y$ は連続

$f_{xy}=2xe^y$ は連続

$f_{yx}=2xe^y$ は連続

よって f は C^2 級

(iii)

$f_{xy}=2xe^y, f_{yx}=2xe^y$ なので $f_{xy}=f_{yx}$

$(*1)$ xとyが独立ならば$f_x=\underset{x\text{で微分}}{f'}$

$(*2)f(x)$がxで連続ならば$f(x)$は(x,y)で連続である

(証明)

xで連続なので$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)$

よって任意のϵに対して

$0<|\Delta x|<\delta$ならば

$|f(x+\Delta x)-f(x)|<\epsilon$

$|(\Delta x,\Delta y)|<\delta$ならば

$|\Delta x| \leq |(\Delta x,\Delta y)|$ ($\because$ 三角不等式)

$\therefore \quad |\Delta x|<\delta$

$\therefore \quad \Delta x=0 \ or \ 0<|\Delta x|<\delta$

$0<|\Delta x|<\delta$とすると

$|f(x+\Delta x)-f(x)|<\epsilon$

$\Delta x=0$とすると

$|f(x+\Delta x)-f(x)|=0<\epsilon$

よって$|(\Delta x,\Delta y)|<\delta$ならば$|f(x+\Delta x)-f(x)|<\epsilon$

よって$\lim_{(\Delta x,\Delta y))\to(0,0)} f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)$

$(*2)f,g$が連続ならばfgは連続

(証明)

$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)$

$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} g(x+\Delta x,y+\Delta y)=g(x,y)$

よって

$$\begin{aligned}&\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x,y+\Delta y)g(x+\Delta x,y+\Delta y)\\&\quad=\lim f(x+\Delta x,y+\Delta y)\lim g(x+\Delta x,y+\Delta y) \ (\because \ \text{積の極限})\\&\quad=f(x,y)g(x,y)\end{aligned}$$

よってfgは連続

第 2 章