

ゆっくり熱力学の基礎してってね

仲山昌人

概要

熱力学の基礎を読んだときのメモです

目次

第1章	2
P.7 $D_x f(a) = f'(a+0)$ '25 3.22	3
P.8 (1.2) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$ '25 3.21	4
P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f は連続 '25 5.13	5
P.10 問 1.3 $(0,0)$ で f は連続 '25 3.26	7
P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は存在する '25 5.13	8
P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は連続 '25 5.13	9
P.10 問 1.3 $(0,0)$ で f_x は連続 '25 3.26	10
P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は存在する '25 5.13	12
P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は連続 '25 5.15	13
P.10 問 1.3 $(0,0)$ で f_y は連続 '25 3.26	14
P.10 問 1.3 $(0,0)$ で f_{xy} は不連続 '25 4.1	16
P.11 数学の定理 1.1 $f(x_1, \dots, x_m) - f(a_1, \dots, a_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(a) = o(x - a)$ '25 4.6	17
P.11 数学の定理 1.1 $f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(a) = o(x - a)$ '25 5.17	19
P.11 数学の定理 1.1 $f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x-a) + o(x-a)$ '25 4.6	20
P.12 数学の定理 1.2 n 階までの導関数は微分の順序によらない '25 4.8	21
P.12 数学の定理 1.2 $f_{xy} = f_{yx}$ '25 4.8	22
P.12 補足 $x \neq 0$ で $f(x)$ は連続 '25 4.23	25
P.12 補足 $x=0$ で $f(x)$ は連続 '25 4.23	27
P.12 補足 $x \neq 0$ で C^∞ 級 '25 4.25	28
P.12 補足 $x=0$ で C^∞ 級 '25 5.20	31
P.12 補足 $x=0$ で C^∞ 級であるが解析的でない '25 5.21	33
P.12 補足 収束するテーラー級数の部分和が $f(x)$ の近似にならない例 '25 6.9	34
P.12 補足 $x \neq 0$ で $f(x)$ は解析的 '25 6.4	35
P.12 補足 べき級数の合成 '25 6.1	40
P.12 補足 べき級数のべき '25 6.2	45
P.12 問題 1.4 $x^2 e^y$ の偏微分 '25 4.16	47
P.15 問題 1.5 $Z(x,y)$ の偏微分 '25 6.22	49
P.15 問題 1.6(i) 偏微分の連鎖律 '25 6.13	50
P.15 問題 1.6(ii) 偏微分の連鎖律 '25 6.25	51
P.15 問題 1.6(iii) 偏微分の連鎖律 '25 6.13	52
P.15 問題 1.6(iv) 偏微分の連鎖律 '25 6.25	53
P.15 問題 1.7(i) 合成関数の偏微分 '25 6.27	55
P.15 問題 1.7(ii) 合成関数の偏微分の例 '25 6.28	57
P.16 問題 1.8 偏微分でつまづいたこと '25 6.25	58

第 1 章

P.7 $D_x f(a) = f'(a+0)$ '25 3.22

$f(x)$ が $[a, a + \epsilon']$ で連続, $(a + a + \epsilon')$ で微分可能とする

$f'(a+0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} f'(a+\epsilon)$ が存在するならば

$D_x^+ f(a)$ が存在し $D_x^+ f(a) = f'(a+0)$ である

(証明)

$[a, a + \epsilon']$ で連続, $(a, a + \epsilon')$ で微分可能なので

平均値の定理より $\frac{f(a + \epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = f'(a + \epsilon)$, $0 < \epsilon < \epsilon'$ なる ϵ が存在する

ϵ' に対する ϵ を1つ選んで $\epsilon(\epsilon')$ とする

$f'(a+0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} f'(a+\epsilon)$ が存在するので

任意の $\delta > 0$ に対してある ϵ_1 が存在して

$0 < \epsilon < \epsilon_1$ ならば $|f'(a + \epsilon) - f'(a + 0)| < \delta$ である

$0 < \epsilon' < \epsilon_1$ ならば $0 < \epsilon(\epsilon') < \epsilon'$ なので $0 < \epsilon(\epsilon') < \epsilon_1$

よって $|f'(a + \epsilon(\epsilon')) - f'(a + 0)| < \delta$ である

$\frac{f(a + \epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = f'(a + \epsilon(\epsilon'))$ なので

$0 < \epsilon' < \epsilon_1$ ならば $\left| \frac{f(a + \epsilon') - f(a)}{\epsilon'} - f'(a + 0) \right| < \delta$ である

$\therefore \lim_{\epsilon' \rightarrow +0} \frac{f(a + \epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = f'(a + 0)$ である (\because 極限の定義)

$\lim_{\epsilon' \rightarrow +0} \frac{f(a + \epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = D_x^+(a)$ なので

$D_x^+(a) = f'(a+0)$ である

P.8 (1.2) $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$ '25 3.21

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能 $\Leftrightarrow x \rightarrow a$ で $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$ なる $f'(a)$ が存在する

(証明)

(\leftarrow)

$o(x-a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ ($\because f = g + o(\dots) \Leftrightarrow o(\dots) = f - g$ と定義)

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0 \quad (\because \text{付録A } o(\dots) \text{ の定義})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0$$

よって任意の $\epsilon > 0$ に対して $0 < |x-a| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \epsilon$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) \quad (\because \text{極限の定義})$$

よって $f(x)$ は $x=a$ で微分可能 (\because 微分の定義)

(\rightarrow)

$x=a$ で微分可能なので

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) \text{ が存在する } (\because \text{微分の定義})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(a) \quad (\because \text{定数の極限})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - \lim_{x \rightarrow a} f'(a) = 0 \quad (\because \text{実数の四則の公理})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0 \quad (\because \text{差の極限})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} \right) = 0 \quad (\because \text{実数の四則の公理})$$

$$\therefore o(x-a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \quad (\because \text{付録A } o(\dots) \text{ の定義})$$

$$\therefore f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad (\because f - g = o(\dots) \Leftrightarrow f = g + o(\dots) \text{ と定義する})$$

よって $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$ なる $f'(a)$ が存在する

P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f は連続 '25 5.13

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f は連続

(証明)

任意の ϵ に対して

$|(x,y) - (a,b)| < \epsilon$ ならば

$$|x - a| < |(x,y) - (a,b)| \quad (\because \text{三角不等式})$$

$$= \epsilon$$

よって $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$

よって x は連続

同様に y は連続

よって

xy は連続 (*1)

x^2 は連続 (*1)

y^2 は連続 (*1)

$x^2 - y^2$ は連続 (*1), (*2)

$x^2 + y^2$ は連続 (*2)

$(x,y) \neq (0,0)$ ならば $x^2 + y^2 \neq 0$

よって $(x,y) \neq (0,0)$ ならば

$\frac{1}{x^2 + y^2}$ は連続 (*3)

よって $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ は連続 (*2)

また $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

よって $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $f(x,y)$ は連続

(*1) f が連続, g が連続ならば fg は連続

(証明)

(a,b) で f, g が連続ならば

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = g(a,b)$$

$$\therefore \lim fg = f(a,b)g(a,b) \quad (\because \text{積の極限})$$

よって fg は連続

(*2) f が連続, g が連続ならば $f + g$ は連続

(証明)

(a, b) で f, g が連続ならば

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = g(a, b)$$

$$\therefore \lim f + g = f(a, b) + g(a, b) \quad (\because \text{和の極限})$$

よって $f + g$ は連続

(*3) f が連続かつ $f \neq 0$ ならば $\frac{1}{f}$ は連続

(証明)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b), \quad f(a, b) \neq 0$$

$$\therefore \lim \frac{1}{f} = \frac{1}{f(a, b)} \quad (\because \text{商の極限})$$

よって $\frac{1}{f}$ は連続

P.10 問 1.3 (0,0) で f は連続 '25 3.26

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(x, y) = (0, 0)$ で f は連続

(証明)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

また $(x, y) \neq (0, 0)$ で $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ は有界 (*1)

よって $\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| < m$ なる m が存在する

また $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0$ (\because 積の極限)

よって $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$ (*2)

よって $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続

(*1) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ が有界でないと仮定する

任意の $m > 0$ に対して $\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| > m$ なる (x, y) が存在する

$$\therefore \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} < -m \text{ or } \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} > m$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} > m \text{ とすると } 0 > (m - 1)x^2 + (m + 1)y^2$$

$m = 1$ とすると $0 > 2y^2$ となり矛盾

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} < -m \text{ とすると } x^2(1 - m) - y^2(1 + m) < 0$$

$m = 1$ とすると $0 < 0$ となり矛盾

よって $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ は有界

(*2) $f(x, y)$ が有界, $\lim g = 0$ ならば $\lim fg = 0$

(証明)

$|f| < m$ なる m が存在する

任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ があって

$$|(x, y)| < \delta \text{ ならば } |g| < \epsilon$$

$$\therefore |f||g| < |f|\epsilon$$

$$\epsilon|f| < \epsilon m \text{ なので}$$

$$|f||g| < \epsilon m$$

$$\therefore |fg| < \epsilon m$$

任意の $\epsilon' > 0$ に対して $\epsilon' = \epsilon m$ とすると

$$|(x, y)| < \delta \text{ ならば } |fg| < \epsilon'$$

$$\therefore \lim fg = 0$$

P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は存在する '25 5.13

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は存在する

(証明)

$(x,y) \neq (0,0)$ とする

このとき $f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

x, y は独立とする

$$\begin{aligned} f_x &= \underset{x \text{ で微分}}{f'} \quad (*1) \\ &= (xy)' \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)' \quad (\because \text{積の微分}) \\ &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{(x^2 - y^2)'(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)'}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\because x^2 + y^2 \neq 0 \text{なので商の微分より}) \\ &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

よって $(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は存在する (\because 公理: f_x は存在 $\Leftrightarrow f_x \in \mathbb{R}$)

(*1) f', f_x の定義より

$$\underset{x \text{ で微分}}{f'}(x,y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f_x(x,y)$$

よって f' が存在するならば $f' = f_x$

P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は連続 '25 5.13

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は連続

(証明)

$(x,y) \neq (0,0)$ とする

$$f_x(x,y) = \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{別頁})$$

$(a,b) \neq (0,0)$ とする

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{ba^4 + 4a^2b^3 - b^5}{(a^2 + b^2)^2} \quad (\because (a^2 + b^2)^2 \neq 0 \text{ なので和、積、商の極限、また } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a(*1))$$

よって任意の ϵ に対して $|(x,y) - (a,b)| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{ba^4 + 4a^2b^3 - b^5}{(a^2 + b^2)^2} \right| < \epsilon$$

また $0 < \delta' < |(a,b)|$ とすると

$|(x,y) - (a,b)| < \delta'$ ならば $(x,y) \neq (0,0)$ である

$$\therefore f_x(x,y) = \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

よって $|(x,y) - (a,b)| < \min(\delta, \delta')$ ならば

$$\left| f_x(x,y) - \frac{ba^4 + 4a^2b^3 - b^5}{(a^2 + b^2)^2} \right| < \epsilon$$

$$\text{よって } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f_x(x,y) = \frac{ba^4 + 4a^2b^3 - b^5}{(a^2 + b^2)^2} = f_x(a,b)$$

よって $f_x(x,y)$ は $(a,b) \neq (0,0)$ で連続である

$$(*1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$$

(証明)

任意の ϵ に対して

$$|(x,y) - (a,b)| < \epsilon \text{ ならば}$$

$$|x - a| < |(x,y) - (a,b)| < \epsilon \quad (\because \text{三角不等式})$$

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$$

P.10 問 1.3 (0,0) で f_x は連続 '25 3.26

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(x, y) = (0, 0)$ で f_x は連続

(証明)

$(x, y) \neq (0, 0)$ で

f_x は 別頁 より

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \end{aligned}$$

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界 (*1) かつ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$

よって $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = 0$ (*2)

また f は $(0, 0)$ で連続 (別頁)

よって $(0, 0)$ で f_x は存在して

$$f_x(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = 0 \quad (\because \text{本文(1.5), (1.6)より})$$

よって $(0, 0)$ で f_x は連続

(*1) $\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界

(証明)

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界でないと仮定する

任意の $m > 0$ に対して $\left| \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \right| > m$

$\therefore \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} < -m$ または $m < \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ である

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} < -m$ とすると

$$x^4 + 4x^2y^2 - y^4 < -m(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$$

$$\therefore (1 + m)x^4 + (4 + 2m)x^2y^2 + (m - 1)y^4 < 0$$

$$m = 1 \text{ とすると } 2x^4 + 6x^2y^2 < 0$$

これは矛盾

$$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} > m \text{ とすると}$$

$$x^4 + 4x^2y^2 - y^4 > m(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$$

$$0 > (m - 1)x^4 + (2m - 4)x^2y^2 + (m - 1)y^4$$

$$m = 2 \text{ とすると } 0 > x^4 + y^4$$

これは矛盾

よって $\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界

(*2) $f(x, y)$ は有界, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g = 0$ ならば $\lim fg = 0$

(証明)

$|f(x, y)| < m$ である

また任意の ϵ に対して $|(x, y)| < \delta$ ならば $|g(x, y)| < \epsilon$

$\therefore |f||g| < |f|\epsilon, |f|\epsilon < m\epsilon$

$\therefore |f||g| < m\epsilon$

$\therefore |fg| < m\epsilon$

任意の ϵ' に対して $\epsilon' = m\epsilon$ とすると

$|(x, y)| < \delta$ ならば $|fg| < \epsilon'$

$\therefore \lim fg = 0$

P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は存在する '25 5.13

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は存在する

(証明)

$(x,y) \neq (0,0)$ とする

このとき $f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

x, y は独立とする

$$\begin{aligned} f_y &= \underset{y \text{ で微分}}{f'} \quad (*1) \\ &= (xy)' \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)' \quad (\because \text{積の微分}) \\ &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{(x^2 - y^2)'(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)'}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\because x^2 + y^2 \neq 0 \text{なので商の微分より}) \\ &= \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

よって $(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は存在する $(\because \text{公理} : f_y \text{ は存在} \Leftrightarrow f_y \in R)$

(*1) f', f_y の定義より

$$\underset{y \text{ で微分}}{f'}(x,y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f_y(x, y)$$

よって f' が存在するならば $f' = f_y$

P.10 問 1.3 $(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は連続 '25 5.15

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は連続

(証明)

$(x,y) \neq (0,0)$ とする

$$f_y(x,y) = \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{別頁})$$

$(a,b) \neq (0,0)$ とする

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2 + b^2)^2} \quad (\because (a^2 + b^2)^2 \neq 0 \text{ なので和、積、商の極限、また } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b)$$

よって任意の ϵ に対して $|(x,y) - (a,b)| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2 + b^2)^2} \right| < \epsilon$$

また $0 < \delta' < |(a,b)|$ とすると

$|(x,y) - (a,b)| < \delta'$ ならば $(x,y) \neq (0,0)$ である

$$\therefore f_y(x,y) = \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

よって $|(x,y) - (a,b)| < \min(\delta, \delta')$ ならば

$$\left| f_y(x,y) - \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2 + b^2)^2} \right| < \epsilon$$

$$\text{よって } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f_y(x,y) = \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2 + b^2)^2} = f_y(a,b)$$

よって $f_y(x,y)$ は $(a,b) \neq (0,0)$ で連続である

P.10 問 1.3 (0,0) で f_y は連続 '25 3.26

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(x, y) = (0, 0)$ で f_y は連続

(証明)

$(x, y) \neq (0, 0)$ で

f_y は [別頁](#) より

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= x \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \end{aligned}$$

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界 [\(*1\)](#) かつ $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x = 0$

よって $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = 0$ [\(*2\)](#)

また f は $(0, 0)$ で連続 ([別頁](#))

よって $(0, 0)$ で f_y は存在して

$$f_y(0, 0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_y(x, y) = 0 \quad (\because \text{本文(1.5), (1.6)より})$$

よって $(0, 0)$ で f_y は連続

[\(*1\)](#) $\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界

(証明)

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界でないと仮定する

任意の $m > 0$ に対して $\left| \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \right| > m$

$\therefore \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} < -m$ または $m < \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ である

$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} < -m$ とすると

$$x^4 - 4x^2y^2 - y^4 < -m(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$$

$$\therefore (1 + m)x^4 + (-4 + 2m)x^2y^2 + (m - 1)y^4 < 0$$

$$m = 1 \text{ とすると } 2x^4 < 0$$

これは矛盾

$$\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} > m \text{ とすると}$$

$$x^4 - 4x^2y^2 - y^4 > m(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$$

$$0 > (m - 1)x^4 + (2m + 4)x^2y^2 + (m + 1)y^4$$

$$m = 1 \text{ とすると } 0 > 8x^2y^2 + 2y^4$$

これは矛盾

よって $\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ は有界

(*2) $f(x, y)$ は有界, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g = 0$ ならば $\lim fg = 0$

P.10 問 1.3 (0,0) で f_{xy} は不連続 '25 4.1

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(x, y) = (0, 0)$ で f_{xy} は不連続

(証明)

$(x, y) \neq (0, 0)$ とする

$$f_x = \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{別頁})$$

よって

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{(yx^4 + 4x^2y^3 - y^5)'(x^2 + y^2)^2 - (yx^4 + 4x^2y^3 - y^5)((x^2 + y^2)^2)'}{(x^2 + y^2)^4} \quad (*) \\ &= \frac{x^8 + 10x^6y^2 - 10x^2y^6 - y^8}{(x^2 + y^2)^4} \end{aligned}$$

(*) x, y は独立なので $f_{xy} = \frac{f'_x}{y \text{ で微分}}$

また $(x^2 + y^2)^2 \neq 0$ なので和、積、商の微分公式より

経路 $\begin{cases} x = 0 \\ y = y \end{cases}$ に沿った $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ の極限は $\lim_{y \rightarrow 0} f_{xy}(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1$

経路 $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}$ に沿った $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ の極限は $\lim_{x \rightarrow 0} f_{xy}(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

経路によって極限が異なるので f_{xy} の $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ の極限は存在しない

よって $(0, 0)$ で f_{xy} は連続ではない

P.11 数学の定理 1.1 $f(x_1, \dots, x_m) - f(a_1, \dots, a_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(a) = o(|x - a|)$ '25 4.6

f は \vec{a} の近傍で連続的微分可能ならば

$\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ で $f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$ である

(証明)

x_1, \dots, x_m は独立で f は \vec{a} の近傍で連続的微分可能なので

(a_1, \dots, x_m) が \vec{a} の近傍ならば

f は区間 $[a_1, x_1]$ で連続、区間 (a_1, x_1) で x_1 で微分可能

よって平均値の定理より

$$\frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m)}{x_1 - a_1} = f'(a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m), \quad 0 < k < 1 \text{ なる } k(x_2, \dots, x_m) \text{ が存在する}$$

x_1, \dots, x_m は独立なので $f_{x_1} = \frac{f'}{x_1 \text{で微分}}$

$$\text{よって } \frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m)}{x_1 - a_1} = f_{x_1}(a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m) \dots (1)$$

また f_{x_1} は \vec{a} で連続なので

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_{x_1}(\vec{x}) = f_{x_1}(\vec{a})$$

よって任意の δ に対して

$|\vec{x} - \vec{a}| < \epsilon$ ならば $|f_{x_1}(\vec{x}) - f_{x_1}(\vec{a})| < \delta$ なる ϵ が存在する

$\vec{x}' = (a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m)$ とする

$$\begin{aligned} |\vec{x}' - \vec{a}| &= \sqrt{(a_1 + k(x_1 - a_1) - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} \\ &= \sqrt{k^2(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} \\ &< |\vec{x} - \vec{a}| \quad (*1) \end{aligned}$$

(*1) $k = k(x_2, \dots, x_m)$ であるが

$0 < k < 1$ なので

$$k^2(x_1 - a_1)^2 < (x_1 - a_1)^2$$

よって $|\vec{x}' - \vec{a}| < \epsilon$ なので $|f_{x_1}(\vec{x}') - f_{x_1}(\vec{a})| < \delta$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_{x_1}(\vec{x}') = f_{x_1}(\vec{a})$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_{x_1}(a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m) = f_{x_1}(\vec{a})$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f_{x_1}(\vec{x}) - f_{x_1}(a_1, \dots, x_m)}{x_1 - a_1} = f_{x_1}(\vec{a}) \quad (\because (1))$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f_{x_1}(\vec{x}) - f_{x_1}(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{x_1 - a_1} = 0 \quad (\because \lim c = c, \text{和の極限})$$

よって任意の δ に対して

$$|\vec{x} - \vec{a}| < \epsilon \text{ ならば } \left| \frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{x_1 - a_1} \right| < \delta$$

また $|\vec{x} - \vec{a}| \geq |x_1 - a_1|$ (\because 三角不等式) なので

$$\left| \frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| \leq \left| \frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{x_1 - a_1} \right| < \delta$$

よって

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0$$

よって $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ で

$$f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1)f_{x_1}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$$

$$(\text{注}) \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \frac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m)}{(x_1 - a_1)} = f_{x_1}(a_1, \dots, x_m) \quad (*)$$

から始めると $\lim_{x_1 \rightarrow a_1}$ を $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}}$ に変換できなくて失敗する

平均値の定理を利用するとうまく $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}}$ を導ける

平均値の定理は \vec{a} 近傍での f の連続性と微分可能性を利用できるが

(*) から始めると \vec{a} での連続性と微分可能性しか

利用できないからだと思われる

P.11 数学の定理 1.1 $f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(a) = o(|x - a|)$ '25 5.17

f は \vec{a} の近傍で連続的微分可能ならば

$\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ で $f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$ である

(証明)

x_1 の場合 (別頁)と同様に

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(x_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0$$

である

$$g(x_1, \dots, x_m) = \frac{f(\vec{x}) - f(x_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|}$$

とする

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} |g(x_1, \dots, x_m)| = 0$$

なので

任意の $\epsilon > 0$ に対して $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ ならば $|g(x_1, \dots, x_m)| < \epsilon$ である

ここで

$$|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}| \leq |\vec{x} - \vec{a}| \quad (\because \text{三角不等式})$$

$$< \delta$$

なので $|g(a_1, x_2, \dots, x_m)| < \epsilon$ である

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} |g(a_1, x_2, \dots, x_m)| = 0$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a})}{|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}|} \right| = 0$$

ここで $|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}| \leq |\vec{x} - \vec{a}|$ (\because 三角不等式) なので

$$\left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right|$$

$$\leq \left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a})}{|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}|} \right|$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (*1)$$

(*1) $|f| \leq |g|, \lim g = 0$ ならば $\lim f = 0$

$$\therefore f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2)f_{x_2}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$$

P.11 数学の定理 1.1 $f(\mathbf{x})=f(\mathbf{a})+\nabla f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})+o(|\mathbf{x}-\mathbf{a}|)$ '25 4.6

f は \vec{a} の近傍で連続的微分可能ならば

$\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ で $f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + o(|\vec{x} - \vec{a}|)$ である

(証明)

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(x_1, \dots, x_m) - f(a_1, \dots, a_m) - f_{x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1)}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (\text{別頁})$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(a_1, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - f_{x_2}(\vec{a})(x_2 - a_2)}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (\text{別頁})$$

⋮

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m) - f(a_1, \dots, a_m) - f_{x_m}(\vec{a})(x_m - a_m)}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (\because x_1, x_2 \text{ の場合と同様})$$

足し合わせて

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - f_{x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) - f_{x_2}(\vec{a})(x_2 - a_2) - \dots - f_{x_m}(\vec{a})(x_m - a_m)}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (*1)$$

(*)1 $\lim |f| = 0, \lim |g| = 0$ ならば $\lim |f| + |g| = 0$

$|f + g| \leq |f| + |g|$ (三角不等式)

なので $\lim |f + g| = 0$

ここで

$$\vec{\nabla} f(\vec{a}) = (f_{x_1}(\vec{a}), \dots, f_{x_m}(\vec{a}))$$

$$(\vec{x} - \vec{a}) = (x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m)$$

$$\vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = f_{x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \dots + f_{x_m}(\vec{a})(x_m - a_m)$$

なので

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0$$

$\therefore f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$ (\because 付録Aの $o(\dots)$ の定義)

$\therefore f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + o(|\vec{x} - \vec{a}|)$ ($\because f + h = o(\dots) \nRightarrow f = -h + o(\dots)$ と定義する)

P.12 数学の定理 1.2 n 階までの導関数は微分の順序によらない'25 4.8

ある開領域で $f(x_1, \dots, x_m)$ が C^∞ 級ならば

その領域で n 階までの偏導関数は微分の順序によらない

(証明)

f の 2 階以上 n 階以下の偏導関数を考える

$$f_{x_{p_1} \dots x_{p_i} x_{p_j} \dots x_{p_k}}$$

f は C^∞ 級なので

$f_{x_{p_1} \dots x_{p_i} x_{p_j}}$ は存在し連続である

また $f_{x_{p_1} \dots x_{p_j} x_{p_i}}$ も存在し連続である

$$\text{よって } f_{x_{p_1} \dots x_{p_i} x_{p_j}} = f_{x_{p_1} \dots x_{p_j} x_{p_i}} \quad (\because f_{xy} = f_{yx} \text{ 別頁})$$

$$\text{よって } f_{x_{p_1} \dots x_{p_i} x_{p_j} \dots x_{p_k}} = f_{x_{p_1} \dots x_{p_j} x_{p_i} \dots x_{p_k}} \quad (1)$$

p_1, \dots, p_k を昇順に並べたリストを q_1, \dots, q_k とする

(1) より x_{q_1} による偏微分を左隣りの変数の偏微分との入れ換えをくりかえして

$$f_{x_{p_1} \dots x_{p_k}} = f_{x_{q_1} \dots x_{p_k}} \text{ とする}$$

x_{q_1} と同様に x_{q_2} について

$$f_{x_{p_1} \dots x_{p_k}} = f_{x_{q_1} x_{q_2} \dots x_{p_k}} \text{ とする}$$

これを繰り返して

$$f_{x_{p_1} \dots x_{p_k}} = f_{x_{q_1} \dots x_{q_k}} \text{ となる}$$

r_1, \dots, r_2 は p_1, \dots, p_2 を任意に並べ替えたリストとする。上と同様に

$$f_{x_{r_1} \dots x_{r_k}} = f_{x_{q_1} \dots x_{q_k}} \text{ となる}$$

$$\text{よって } f_{x_{r_1} \dots x_{r_k}} = f_{x_{p_1} \dots x_{p_k}} \text{ となる}$$

よって n 階までの偏導関数は微分の順序によらない

P.12 数学の定理 1.2 $f_{xy}=f_{yx}$ '25 4,8

(2変数の場合)

ある開領域で f_{xy}, f_{yx} が連続ならば $f_{xy} = f_{yx}$ である

(証明)

領域内の任意の点 $(a, b), (x, y)$ とする

$\Delta(x, y) = (f(x, y) - f(x, b)) - (f(a, y) - f(a, b))$ とする

$F(x) = f(x, y) - f(x, b)$ とすると

$\Delta(x, y) = F(x) - F(a)$



領域内で f は連続なので x の区間 $[a, x]$ で $f(x, y), f(x, b)$ は連続

よって $F(x)$ は x の区間 $[a, x]$ で連続 (*1)

領域内で f は偏微分可能なので x の区間 (a, x) で $f(x, y), f(x, b)$ は x で微分可能

よって $F(x)$ は x の区間 (a, x) で x で微分可能 (*2)

よって平均値の定理より

$$\begin{aligned}\Delta(x, y) &= F(x) - F(a) \\ &= F'(a + (x - a)\theta_1)(x - a), \quad 0 < \theta_1 < 1 \\ &= (f_x(a + (x - a)\theta_1, y) - f_x(a + (x - a)\theta_1, b))(x - a) \quad (*3)\end{aligned}$$

(*1) f, g が連続ならば $f + g$ も連続

(*2) f, g が微分可能ならば $f + g$ も微分可能

(*3) f_{xy} が存在するならば x, y は独立

x, y が独立ならば $f_x = \frac{f'}{x \text{ で微分}}$

領域内で f_x は連続かつ y で偏微分可能 ($\because f_{xy}$ が存在するので)

よって $f_x(a + (x - a)\theta_1, y)$ は y の区間 $[b, y]$ で連続かつ 区間 (b, y) で y で微分可能

よって平均値の定理より

$$\begin{aligned}f_x(a + (x - a)\theta_1, y) - f_x(a + (x - a)\theta_1, b) \\ = f_{xy}(a + (x - a)\theta_1, b + (y - b)\theta_2)(y - b), \quad 0 < \theta_2 < 1 \quad (*4)\end{aligned}$$

(*4) x, y は独立なので

$$f_{xy} = \frac{f'_x}{y \text{ で微分}}$$

よって

$$\Delta(x, y) = f_{xy}(a + (x - a)\theta_1, b + (y - b)\theta_2)(x - a)(x - b)$$

$$x' = a + (x - a)\theta_1$$

$$y' = b + (y - b)\theta_2$$

とすると

$$\frac{\Delta(x, y)}{(x - a)(x - b)} = f_{xy}(x', y')$$

f_{xy} は連続なので

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f_{xy}(x, y) = f_{xy}(a, b)$$

よって任意の ϵ に対して

$$|(x, y) - (a, b)| < \delta \text{ ならば } |f_{xy}(x, y) - f_{xy}(a, b)| < \epsilon$$

また

$$\begin{aligned} |(x', y') - (a, b)| &= \sqrt{(a + (x - a)\theta_1 - a)^2 + (b + (y - b)\theta_2 - b)^2} \\ &= \sqrt{(x - a)^2\theta_1^2 + (y - b)^2\theta_2^2} \\ &< |(x, y) - (a, b)| \quad (\because 0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1) \end{aligned}$$

よって $|(x', y') - (a, b)| < \delta$ なので $|f_{xy}(x', y') - f_{xy}(a, b)| < \epsilon$

$$\text{よって } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f_{xy}(x', y') = f_{xy}(a, b)$$

$$\text{よって } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{\Delta(x, y)}{(x - a)(y - b)} = f_{xy}(a, b) \quad (1)$$

$\Delta(x, y)$ の右辺の順番をかえて

$$\Delta(x, y) = (f(x, y) - f(a, y)) - (f(x, b) - f(a, b)) \text{ とする}$$

$$G(y) = f(x, y) - f(a, y) \text{ とすると}$$

$$\Delta(x, y) = G(y) - G(b)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc} f(a, y) & f(x, y) \end{array}} \Rightarrow G(y) \\ \boxed{\begin{array}{cc} f(a, b) & f(x, b) \end{array}} \Rightarrow G(b) \end{array}$$

f は領域で連続なので 区間 $[b, y]$ で $f(x, y), f(a, y)$ は連続

よって $G(y)$ は 区間 $[b, y]$ で連続 ($\because f, g$ が連続ならば $f + g$ は連続)

f は領域で偏微分可能なので 区間 (b, y) で $f(x, y), f(a, y)$ は y で微分可能

$$(\because x, y \text{ が独立なので } f_y = \frac{f'}{y \text{ で微分}})$$

よって $G(y)$ は区間 (b, y) で y で微分可能 ($\because (f+g)' = f' + g'$)

よって平均値の定理より

$$\begin{aligned}\Delta(x, y) &= G'(b + (y - b)\theta_3)(y - b), \quad 0 < \theta_3 < 1 \\ &= (f_y(x, b + (y - b)\theta_3) - f_y(a, b + (y - b)\theta_3))(y - b) \quad (\because f_y = \underset{y \text{ で微分}}{f'_y})\end{aligned}$$

領域内で f_y は連続かつ x で偏微分可能なので

$$f_y(x, b + (y - b)\theta_3) \text{ は区間 } [a, x] \text{ で連続かつ区間 } (a, x) \text{ で } x \text{ で微分可能 } (\because x, y \text{ が独立ならば } f_{yx} = \underset{x \text{ で微分}}{f'_y})$$

よって平均値の定理より

$$\Delta(x, y) = f_{yx}(a + (x - a)\theta_4, b + (y - b)\theta_3)(y - b)(x - a), \quad 0 < \theta_4 < 1$$

$$x' = a + (x - a)\theta_4$$

$$y' = b + (y - b)\theta_3$$

とすると

$$\Delta(x, y) = f_{yx}(x', y')(y - b)(x - a)$$

$$\text{よって } \frac{\Delta(x, y)}{(y - b)(x - a)} = f_{yx}(x', y')$$

f_{yx} は連続なので

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f_{yx}(x, y) = f_{yx}(a, b)$$

よって任意の ϵ に対して

$$|(x, y) - (a, b)| < \delta \text{ ならば } |f_{yx}(x, y) - f_{yx}(a, b)| < \epsilon$$

また

$$\begin{aligned}|(x', y') - (a, b)| &= \sqrt{(a + (x - a)\theta_4 - a)^2 + (b + (y - b)\theta_3 - b)^2} \\ &= \sqrt{(x - a)^2\theta_4^2 + (y - b)^2\theta_3^2} \\ &< |(x, y) - (a, b)| \quad (\because 0 < \theta_3 < 1, 0 < \theta_4 < 1)\end{aligned}$$

よって $|(x', y') - (a, b)| < \delta$ なので

$$|f_{yx}(x', y') - f_{yx}(a, b)| < \epsilon$$

$$\text{よって } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f_{yx}(x', y') = f_{yx}(a, b)$$

$$\text{よって } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{\Delta(x, y)}{(y - b)(x - a)} = f_{yx}(a, b) \quad (2)$$

よって (1), (2) より

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

a, b は任意なので

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

P.12 補足 $x \neq 0$ で $f(x)$ は連続 '25 4.23

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$ で $f(x)$ は連続

(証明)

x は連続 (*1)

よって $x \neq 0$ ならば $\frac{1}{x}$ は連続 (*2)

よって $x \neq 0$ ならば $\frac{1}{x^2}$ は連続 (*3)

よって $x \neq 0$ ならば $-\frac{1}{x^2}$ は連続 (*3)

よって $x \neq 0$ ならば $e^{-\frac{1}{x^2}}$ は連続 (*4)

$0 < |x - a| < |a|$ ならば $x \neq 0$

($\because x = 0$ とすると $|a| < |a|$ となり矛盾)

$e^{-\frac{1}{x^2}}$ は $x \neq 0$ で連続なので

任意の ϵ に対して

$0 < |x - a| < \delta$ ならば $\left| e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{1}{a^2}} \right| < \epsilon$

よって $0 < |x - a| < \min(|a|, \delta)$ ならば

$x \neq 0$ なので $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

また $\left| e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{1}{a^2}} \right| < \epsilon$

$\therefore |f(x) - f(a)| < \epsilon$

よって $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

よって $x \neq 0$ ならば $f(x)$ は連続

(*1) $0 < |x - a| < \epsilon$ ならば

$$|x - a| < \epsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

(*2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F, F \neq 0$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$

(証明)

任意の ϵ に対し $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - F| < \epsilon \cdots (1)$

$$\epsilon = \frac{|F|}{2} \text{ とすると}$$

$$0 < |x - a| < \delta' \text{ ならば } |f(x) - F| < \frac{|F|}{2}$$

$$\therefore |F| - |f(x)| < \frac{|F|}{2} \quad (\because \text{三角不等式 } |F| - |f(x)| \leq |F - f(x)|)$$

$$\therefore |f(x)| > \frac{|F|}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|F|} \cdots (2)$$

$$(\because F \neq 0 \text{ なので } |F| > 0, 0 < a < b \text{ ならば } \frac{1}{a} > \frac{1}{b})$$

$$\text{任意の } \epsilon' \text{ に対して } \epsilon = \frac{1}{2}\epsilon' F^2 \text{ とする}$$

$$0 < |x - a| < \min(\delta, \delta') \text{ ならば}$$

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F} \right| = \frac{|f(x) - F|}{|f(x)||F|} < \frac{2\epsilon}{F^2} = \epsilon' \quad (\because (1), (2))$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{F}$$

$$(*3) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = F, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = G \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} fg = FG$$

(証明)

$$\text{任意の } \epsilon \text{ に対して } 0 < |x - a| < \delta \text{ ならば } |f - F| < \epsilon, |g - G| < \epsilon \dots (1)$$

$$\epsilon = |F| \text{ とすると}$$

$$0 < |x - a| < \delta' \text{ ならば } |f - F| < |F|$$

$$\therefore |f| - |F| < |F| \quad (\because \text{三角不等式 } |a| - |b| \leq |a - b|)$$

$$\therefore |f| < 2|F| \dots (2)$$

$$\text{任意の } \epsilon' \text{ に対して } \epsilon = \frac{\epsilon'}{|G| + 2|F|} \text{ とする}$$

$$0 < |x - a| < \min(\delta, \delta') \text{ ならば}$$

$$\begin{aligned} |fg - FG| &= |fg - fG + fG - FG| \\ &= |f(g - G) + G(f - F)| \\ &\leq |f(g - G)| + |G(f - F)| \quad (\because \text{三角不等式 } |a + b| \leq |a| + |b|) \\ &= |f||g - G| + |G||f - F| \\ &< 2|F|\epsilon + \epsilon|G| \quad (\because (1)(2)) \\ &= \epsilon(2|F| + |G|) = \epsilon' \end{aligned}$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow a} fg = FG$$

$$(*4) a \text{ で } f(x) \text{ は連続, } f(a) \text{ で } g(x) \text{ は連続ならば } a \text{ で } g(f(x)) \text{ は連続}$$

(証明)

$$\lim_{x \rightarrow f(a)} g(x) = g(f(a)) \text{ なので}$$

$$\text{任意の } \epsilon \text{ に対して } 0 < |x - f(a)| < \delta \text{ ならば } |g(x) - g(f(a))| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ なので}$$

$$0 < |x - a| < \delta' \text{ ならば } |f(x) - f(a)| < \delta$$

$$\text{よって } 0 < |x - a| < \delta' \text{ ならば } |g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(f(a))$$

$$\text{よって } a \text{ で } g(f(x)) \text{ は連続}$$

P.12 補足 $x=0$ で $f(x)$ は連続 '25 4.23

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ で $f(x)$ は連続

(証明)

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty \quad (*1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (*4)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because x \neq 0) \\ &= 0 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

よって $x = 0$ で $f(x)$ は連続

$$\begin{aligned} (*1) e^{\frac{1}{x^2}} &= 1 + \left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}{2} + \dots \quad (\because e^x \text{ の定義}) \\ &> 1 + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \infty \quad (*2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty \quad (*3)$$

$$(*2) \text{ 任意の } \epsilon > 1 \text{ に対して } 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon-1}} \text{ ならば}$$

$$x^2 < \frac{1}{\epsilon-1} \quad (\because 0 < a < b \text{ ならば } a^2 < b^2)$$

$$\frac{1}{x^2} > \epsilon-1 \quad (\because 0 < a < b \text{ ならば } \frac{1}{a} > \frac{1}{b})$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{x^2} > \epsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$(*3) g(x) > f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

(証明)

$$\text{任意の } \epsilon \text{ に対して } 0 < |x-a| < \delta \text{ ならば } f(x) > \epsilon$$

$$\therefore g(x) > \epsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

$$(*4) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

(証明)

$$\text{任意の } \epsilon \text{ に対して } 0 < |x-a| < \delta \text{ ならば } f(x) > \epsilon$$

$$\therefore \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{\epsilon} \quad (\because 0 < a < b \text{ ならば } \frac{1}{a} > \frac{1}{b})$$

$$\text{任意の } \epsilon' \text{ に対して } \epsilon = \frac{1}{\epsilon'} \text{ とする}$$

P.12 補足 $x \neq 0$ で C^∞ 級 '25 4.25

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$ で C^∞ 級

(証明)

$x \neq 0$ とする

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' \\ &= \left(-\frac{1}{x^2} \right)' e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (*1), (*2) \\ &= -\left(\frac{1}{x^2} \right)' e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because \text{積の微分}) \\ &= -(-2)x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (*3) \\ &= 2x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

である。

$n > 0$ で

$$f^{(n)} = \left(\sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

と仮定する

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} \right)' &= \sum_{\nu=1}^m k_\nu (x^{-\nu})' \quad (\because \text{和, 積の微分}) \\ &= \sum_{\nu=1}^m (-\nu k_\nu) x^{-\nu-1} \quad (*3) \dots (2) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= \left(\sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} \right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + \left(\sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} \right) \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' \quad (\because \text{積の微分}) \\ &= \sum_{\nu=1}^m (-\nu k_\nu) x^{-\nu-1} e^{-\frac{1}{x^2}} + \sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} 2x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because (1), (2)) \\ &= \left(\sum_{\nu=1}^m -\nu k_\nu x^{-\nu-1} + \sum_{\nu=1}^m 2k_\nu x^{-\nu-3} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left(\sum_{i=2}^{m+1} -(i-1)k_{i-1} x^{-i} + \sum_{i=4}^{m+3} 2k_{i-3} x^{-i} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left((-1)k_1 x^{-2} + (-2)k_2 x^{-3} + \sum_{i=4}^{m+1} -(i-1)k_{i-1} x^{-i} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=4}^{m+1} 2k_{i-3} x^{-i} + 2k_{m-1} x^{-(m+1)} + 2k_m x^{-(m+3)} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left((-1)k_1 x^{-2} + (-2)k_2 x^{-3} + \sum_{i=4}^{m+1} (-(i-1)k_{i-1} + 2k_{i-3}) x^{-i} \right. \\ &\quad \left. + 2k_{m-1} x^{-(m+1)} + 2k_m x^{-(m+3)} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

ここで

$$p_i = \begin{cases} 0 & (i=1) \\ -(i-1)k_{i-1} & (i=2,3) \\ -(i-1)k_{i-1} + 2k_{i-3} & (i=4, \dots, m+1) \\ 2k_{i-3} & (i=m+2, m+3) \end{cases}$$

$$s = m + 3$$

とする

$$f^{(n+1)} = \left(\sum_{i=1}^s p_i x^{-i} \right) e^{-1/x^2}$$

よって、 $x \neq 0, n > 0$ において

$$f^{(n)} = \left(\sum_{\nu=1}^m k_{\nu} x^{-\nu} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

である。

すべての n で $f^{(n)}$ は存在するので f は C^∞ 級である

(*) 合成関数の微分

$g'(x), f'(g(x))$ が存在するなら

$$f(g(x))' = g'(x) f'(g(x))$$

(*) $(e^x)' = e^x$

(証明)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\because e^x \text{ の定義})$$

右辺の項別微分を考える

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)' &= (1)' + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} \quad (*2.1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (*2.2) \\ &= e^x \quad (\because e^x \text{ の定義}) \end{aligned}$$

ここで任意の x に対して

$-A \leq x \leq A, A > 0$ なる区間を考える

$$\left| \frac{x^\nu}{\nu!} \right| \leq \frac{A^\nu}{\nu!}, \nu = 0, 1, 2, \dots \text{ である}$$

$$\text{また } \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu}{\nu!} = e^A \quad (\because e^A \text{ の定義})$$

なので $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$ は区間 $[-A, A]$ で一様収束する

(\because 定理: ある区間で $|a_n(x)| \leq C_n$ なる定数 C_n があって

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \text{ が収束するならば } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は一様収束する})$$

$$\text{よって } (e^x)' = e^x$$

(\because 定理: 無限級数が収束し各項の導関数が連続で項別微分が一様収束するならば無限級数の導関数は項別微分に等しい)

$$(*2.1) (1)' = 0$$

$$n > 0 \text{ ならば } x^n = n x^{n-1} \quad (*3)$$

$$(kf(x))' = kf'(x) \quad (\because \text{積の微分})$$

$$\begin{aligned}
(*2.2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \\
& \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

(*3) $x \neq 0, n > 0$ ならば

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

(証明)

$(x^n)' = -nx^{-n-1}$ と仮定する

$$(x^{n+1})' = (xx^n)' = (x)'x^n + x(x^n)' \quad (\because \text{積の微分})$$

$$= x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n$$

$$(x)' = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$$

$$\text{よって } (x^n)' = nx^{n-1}, n = 1, 2, \dots$$

よって $x \neq 0, n = 1, 2, \dots$ ならば

$$\begin{aligned}
(x^{-n})' &= \left(\frac{1}{x^n} \right)' = \frac{1'x^n - 1(x^n)'}{x^{2n}} \quad (\because \text{商の微分}) \\
&= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}
\end{aligned}$$

P.12 補足 $x=0$ で C^∞ 級 '25 5.20

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ で C^∞ 級

(証明)

$x \neq 0$ で

$f^{(n)}$ は 別頁 より

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= \left(\sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \sum_{\nu=1}^m k_\nu x^{-\nu} e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\nu} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (*1) \text{ なので}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0 \quad (\because \text{和、積の極限})$$

$x = 0$ で f は連続 (\because 別紙)

$$\text{かつ } \lim_{x \rightarrow 0} f^{(1)}(x) = 0 \text{ なので}$$

$$f^{(1)}(0) = 0 \quad (\because p.7, (1.5), (1.6) \text{ } a \text{ で連続, } \lim_{x \rightarrow a} f'(x) \text{ が存在するなら } \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = f'(a))$$

$$f^{(n)}(0) = 0 \text{ と仮定する}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0 = f^{(n)}(0)$$

よって 0 で $f^{(n)}(x)$ は連続

$$\text{かつ } \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(x) = 0 \text{ なので}$$

$$f^{(n+1)}(0) = 0 \quad (\because p.7, (1.5), (1.6))$$

$$\text{よって任意の } n \text{ で } f^{(n)}(0) = 0$$

よって $x = 0$ で f は C^∞ 級

$$(*1) e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \dots$$

なので

$$e^{\frac{1}{x^2}} = 1 + x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-4} + \dots$$

$$2n\nu \geq 2(n-1) \text{ とする}$$

$$|x^\nu e^{\frac{1}{x^2}}| = |x^\nu| \left(1 + x^{-2} + \dots + \frac{1}{n!} x^{-2n} \right)$$

$$= |x^\nu| + |x^{\nu-2}| + \dots + \frac{1}{n!} |x^{\nu-2n}|$$

$$\nu, \nu-2, \dots, \nu-2(n-1) \geq 0 \text{ なので}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x^\nu| = 0, \dots, \lim_{x \rightarrow 0} |x^{\nu-2(n-1)}| = 0 \text{ or } 1$$

$$\nu - 2n < 0 \text{ なので}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x^{\nu-2n}| = \infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} |x^\nu| + \dots + \frac{1}{n!} |x^{\nu-2n}| = \infty \quad (\because \text{和の極限})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x^\nu| + \dots + \frac{1}{n!} |x^{\nu-2n}|} = 0$$

$$\frac{1}{|x^\nu e^{\frac{1}{x^2}}|} < \frac{1}{|x^\nu| + \dots + \frac{1}{n!} |x^{\nu-2n}|} \text{なので}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x^\nu e^{\frac{1}{x^2}}|} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^\nu e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

P.12 補足 $x=0$ で C^∞ 級であるが解析的でない '25 5.21

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x=0$ で C^∞ 級であるが解析的でない

(証明)

$x=0$ での $f(x)$ のテーラー級数を $T(x)$ とする

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (\because \text{別紙}) \quad \text{なので } T(0) = 0$$

$$a \neq 0 \text{ とする } f(a) \neq 0, T(a) = 0 \text{ なので}$$

$$T(a) \neq f(a)$$

$$\text{よって } x \neq 0 \text{ ならば } f(x) \neq T(x)$$

$$\text{よって } x=0 \text{ の近傍で } f \text{ はテーラー級数と一致しない}$$

$$\text{よって } x=0 \text{ の近傍で } f \text{ はべき級数で表すことができない}$$

$$(\because \text{定理: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ ならば } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ はテーラー級数である})$$

$$\text{よって } x=0 \text{ の近傍で } f \text{ は解析的でない}$$

P.12 補足 収束するテーラー級数の部分和が $f(x)$ の近似にならない例 '25 6.9

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ を中心とした $f(x)$ のテーラー級数 $T(x)$ とする

$T(x)$ の収束半径は ∞ よって任意の x でテーラー級数は収束する。

このとき、 $x \neq 0$ でテーラー級数の部分和の次数をいくら上げても部分和が $f(x)$ の近づくことはない

(証明)

$x = 0$ での $f(x)$ のテーラー級数を $T(x)$ とする

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (\because \text{別紙}) \text{ なので } T(x) = 0$$

すべての x について $T(x)$ は収束するので、収束半径は $R_f = \infty$

$$|1| < R_f \text{ なので } T(1) \text{ は収束して } T(1) = 0$$

$$\text{また } f(1) = e^{-\frac{1}{1^2}} = e^{-1}$$

よって $T(1)$ の部分和の次数を上げたとき部分和が近づくのは 0 である。 e^{-1} には近づくかない

(補足)

収束半径内にあることは、テーラー級数 $T(x)$ が元の関数 $f(x)$ に一致することの十分条件ではない

テーラーの定理の剰余項が 0 に近づくならばテーラー級数と関数は一致する

この場合、剰余項は

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} 1^n, \quad 0 < c < 1$$

$$f^{(1)}(x) = 2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f^{(n)}(x) = \left(\sum_{\nu=1}^m k_{\nu} x^{-\nu} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because \text{別紙})$$

となる。

$n \rightarrow \infty$ で $R_n \not\rightarrow 0$ の筈であるが、証明？

P.12 補足 $x \neq 0$ で $f(x)$ は解析的 '25 6.4

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$ で $f(x)$ は解析的

(証明)

x は a を中心とするべき級数で表される (*1)

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad a_n = \begin{cases} a & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ 0 & (n>1) \end{cases}$$

収束半径は ∞

$$(*1) F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad a_n = \begin{cases} a & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ 0 & (n>1) \end{cases} \text{とする}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0(x-a)^0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + \dots \\ &= a + (x-a) + 0 \\ &= x \end{aligned}$$

任意の x で収束するので、収束半径は ∞

$\frac{1}{x}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数で表される (*2)

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n, \quad b_n = (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}}$$

収束半径は $|a|$

(*2) $a \neq 0$ とする

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \text{とする。収束すると仮定する}$$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad a_n = \begin{cases} a & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ 0 & (n>1) \end{cases} \text{とする}$$

$1 = xG(x)$ とする

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (x-a)^n (\because \text{コーシー積より}) \\ &= \sum_{k=0}^0 a_k b_{0-k} (x-a)^0 + \sum_{k=0}^1 a_k b_{1-k} (x-a)^1 + \sum_{k=0}^2 a_k b_{2-k} (x-a)^2 + \dots \end{aligned}$$

$$1 = \sum_{k=0}^0 a_k b_{0-k} \text{と仮定する } 1 = a_0 b_0 \therefore b_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{a}$$

$$0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (n > 0) \text{と仮定する}$$

$$0 = a_0 b_0 + a_1 b_{n-1} + \sum_{k=2}^n a_k b_{n-k}$$

$$\therefore 0 = a b_n + b_{n-1} + 0 \quad (\because a_0 = a, a_1 = 1, a_k = 0 (k > 1))$$

$$\therefore b_n = -\frac{1}{a}b_{n-1}$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{a}\right)^n = (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}}$$

これを踏まえて

$a \neq 0$ とする

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n, b_n = (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \text{とする}$$

$G(x)$ は初項 $\frac{1}{a}$ 、公比 $-\frac{1}{a}(x-a)$ の等比級数

よって $\left|-\frac{1}{a}(x-a)\right| < 1$ 即ち $|x-a| < |a|$ ならば収束する

よって $|x-a| < |a|$ ならば

$$G(x) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{1}{a}(x-a)} = \frac{1}{a + (x-a)} = \frac{1}{x} \quad (\because \text{等比級数の公式})$$

また等比級数なので $\left|-\frac{1}{a}(x-a)\right| > 1$ 即ち $|x-a| > |a|$ ならば収束しない

よって収束半径は $|a|$

$\frac{1}{x^2}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数で表される (*3)

$|x-a| < |a|$ ならば

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad c_n = (-1)^n \frac{n+1}{a^{n+2}}$$

級数は絶対収束する。

(*3) $|x-a| < |a|$ とする

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n, b_n = (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \text{とする}$$

級数は絶対収束する。よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{x} \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k b_{n-k} (x-a)^{n-k} \dots (1) \quad \left(\because \begin{array}{l} \text{絶対収束する級数の積は} \\ \text{コーシー積に等しい} \\ \text{またコーシー積は絶対収束する} \end{array} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_k b_{n-k} \right) (x-a)^n \quad (\because \text{有限級数の線型性}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{a^{k+1}} (-1)^{n-k} \frac{1}{a^{n-k+1}} \right) (x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \right) (x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \sum_{k=0}^n 1 \right) (x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{n+2}} (n+1) (x-a)^n \end{aligned}$$

絶対収束する級数の積をあらわすコーシー積は絶対収束する

よって(1)よりこの級数は絶対収束する

(もしくは、収束するべき級数は絶対収束するのでこの級数は絶対収束する)

$-\frac{1}{x^2}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数で表される (*4)

$|x-a| < |a|$ ならば

$$-\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (x-a)^n, \quad s_n = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{a^{n+2}}$$

級数は絶対収束する。

$$(*4) |x-a| < |a| \text{ とする}$$

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{a^{n+2}} (x-a)^n$$

よって

$$-\frac{1}{x^2} = (-1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{a^{n+2}} (x-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{a^{n+2}} (x-a)^n \quad (\because \text{絶対収束する級数は線型性をもつ})$$

$$\text{また } \sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n+1}{a^{n+2}} (x-a)^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n+1}{a^{n+2}} (x-a)^n \right|$$

$\frac{1}{x^2}$ の級数が絶対収束するので右辺は収束する

よって $-\frac{1}{x^2}$ の級数は絶対収束する

e^x は 0 を中心とするべき級数で表される

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\because e^x \text{ の定義})$$

すべての x について収束する (*5) よって収束半径は ∞

$$(*5) \sum \left| \frac{x^n}{n!} \right| \text{ について}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0$$

よってダランベールの判定法より $\sum \left| \frac{x^n}{n!} \right|$ は収束する

よって $\sum \frac{x^n}{n!}$ は収束する

最後に $e^{-\frac{1}{x^2}}$ のべき級数を求める。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} \text{ とする}$$

$a \neq 0, |x-a| < |a|$ とする

$$-\frac{1}{x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} s_m (x-a)^m, \quad s_m = (-1)^{m+1} \frac{m+1}{a^{m+2}} \text{ とする}$$

べき級数の合成 (別頁) より

$$\sum_{m=0}^{\infty} |s_m (x-a)^m| < \infty \text{ ならば}$$

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} d_p (x-p)^p, \quad d_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} s_{k_1} \dots s_{k_n}$$

である

$$\begin{aligned} d_p &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} (-1)^{k_1+1} \frac{k_1+1}{a^{k_1+2}} \dots (-1)^{k_n+1} \frac{k_n+1}{a^{k_n+2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} (-1)^{p+n} \frac{(k_1+1) \dots (k_n+1)}{a^{p+2n}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^p \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n \sum_{k_1 + \dots + k_n = p} (k_1 + 1) \dots (k_n + 1) \quad (\because \text{有限級数の線型性})$$

$$a \neq 0, |x - a| < |a| \text{ ならば } -\frac{1}{x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} s_m (x - a)^m \text{ は絶対収束する}$$

$$\text{よって } \sum_{m=0}^{\infty} |s_m (x - a)^m| \text{ は収束する}$$

$$\text{よって } \sum_{m=0}^{\infty} |s_m (x - a)^m| < \infty$$

$$\text{よって } a \neq 0, |x - a| < |a| \text{ ならば}$$

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} d_p (x - a)^p$$

$$d_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^p \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n \sum_{k_1 + \dots + k_n = p} (k_1 + 1) \dots (k_n + 1)$$

$e^{-\frac{1}{x^2}}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数であらわされる。よって解析的である。

$x \neq 0$ で $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ なので $x \neq 0$ で $f(x)$ は解析的である。

(収束性について)

$a \neq 0, |x - a| < |a|$ において $-\frac{1}{x^2}$ と e^x の級数は絶対収束するので、コーシー積の $e^{-\frac{1}{x^2}}$ の級数も絶対収束する

(注) 「収束半径＝一番近い特異点までの距離」は実関数では成立しないので簡単に収束半径 $|a|$ とは言えない

(最初の3項を求めてみる)

$$\begin{aligned} d_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^0 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n \sum_{k_1 + \dots + k_n = 0} (k_1 + 1) \dots (k_n + 1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n \cdot 1 \\ &= e^{-\frac{1}{a^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^1 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n \sum_{k_1 + \dots + k_n = 0} (k_1 + 1) \dots (k_n + 1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right) \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n {}_n C_1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{-1}{a} \right) \left(\frac{-1}{a^2} \right) \left(\frac{-1}{a^2} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{a^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{-1}{a^2} \right)^{n-1} \quad \left(\because \text{(別頁): べき級数の合成より } dp \text{ は絶対収束する} \right. \\ &\quad \left. \text{なので線型性をもつ} \right) \\ &= \frac{1}{a^3} e^{-\frac{1}{a^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^2 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n \sum_{k_1 + \dots + k_n = 2} (k_1 + 1) \dots (k_n + 1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^2 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n ({}_n C_2 + 3 {}_n C_1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^2 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n (2n(n-1) + 3n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^2 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n 2n(n-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{a} \right)^2 \left(\frac{-1}{a^2} \right)^n 3n \quad (\because dp \text{ の線型性}) \\ &= \frac{2}{a^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{-1}{a^2} \right)^{n-2} + \frac{-3}{a^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{-1}{a^2} \right)^{n-1} \quad (\because dp \text{ の線型性}) \\ &= \frac{2}{a^6} e^{-\frac{1}{a^2}} + \frac{-3}{a^4} e^{-\frac{1}{a^2}} \quad (\because e^x \text{ の定義}) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2}{a^6} - \frac{3}{a^4} \right) e^{-\frac{1}{a^2}}$$

よって

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \approx e^{-\frac{1}{a^2}} + \frac{1}{a^2} e^{-\frac{1}{a^2}} + \frac{1}{a^3} e^{-\frac{1}{a^2}} + \left(\frac{2}{a^6} - \frac{3}{a^4} \right) e^{-\frac{1}{a^2}}$$

P.12 補足 べき級数の合成 '25 6.1

$$|x - a| < R_f \text{ ならば } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \text{ とする}$$

$$|x - b| < R_g \text{ ならば } g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - a)^m \text{ とする}$$

$R_f > 0, R_g > 0$ とする。このとき

$$|x - b| < R_g \text{ かつ } \sum_{m=0}^{\infty} |c_m (x - b)^m| < R_f, c_m = \begin{cases} b_0 - a & (m = 0) \\ b_m & (m > 0) \end{cases} \text{ ならば}$$

$f(g(x))$ は b を中心としてべき級数であらわされる

(証明)

$$|x - b| < R_g \text{ とする}$$

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - a)^m \text{ とする}$$

$$g(x) - a = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - b)^m - a = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - b)^m, c_m = \begin{cases} b_0 - a & (m = 0) \\ b_m & (m > 0) \end{cases} \text{ なる } c_m \text{ が存在する}$$

$$(\because \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - b)^m \text{ は収束するので線型性をもつ})$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m (x - b)^m| < R_f \text{ とする}$$

$$\therefore \left| \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - b)^m \right| < R_f \quad (\because |a + b| \leq |a| + |b|)$$

$$\therefore |g(x) - a| < R_f$$

$$\begin{aligned} \therefore f(g(x)) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (g(x) - a)^n \quad (\because g(x) \text{ は } f \text{ の収束半径内にあるので}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - b)^m \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_n = p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x - a)^p \quad (\because \text{別紙: べき級数のべき}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1 + \dots + k_n = p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x - a)^p \quad \left(\because \begin{array}{l} \text{別紙: べき級数のべきは絶対収束する} \\ \text{また収束する級数は線型性をもつ} \end{array} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1 + \dots + k_n = p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x - a)^p \quad \left(\because \begin{array}{l} \sum |c_m (x - b)^m| < R_f \text{ ならば} \\ \text{この二重級数は絶対収束する} \text{(*1)} \\ \text{よって和の順番を変えてもよい} \end{array} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1 + \dots + k_n = p} c_{k_1} \dots c_{k_n} \right) (x - a)^p \quad \left(\because \begin{array}{l} \text{二重級数は絶対収束する} \text{(*1)} \\ \text{よって内側の級数も絶対収束する} \\ \text{収束する級数は線型性を持つ} \end{array} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} d_p (x - a)^p \end{aligned}$$

$$d_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1 + \dots + k_n = p} c_{k_1} \dots c_{k_n} \text{ とする}$$

ここで 上の $f(g(x))$ をあらわす二重級数は絶対収束する (*1) よって内側の級数も絶対収束する。

よって $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x-a)^p \right|$ は収束する

$\therefore (\sum |a_n \sum c_{k_1} \dots c_{k_n}|) |x-a|^p$ は収束する (\because 収束する級数の線型性)

$R_f > 0$ なので $|x' - a| < R_f, x' \neq a$ なる x' が存在する

$(\sum |a_n \sum c_{k_1} \dots c_{k_n}|) |x' - a|^p = w$ とすると

$$\therefore \sum |a_n \sum c_{k_1} \dots c_{k_n}| = \frac{w}{|x' - a|^p} \in \mathbb{R}$$

よって d_p は絶対収束する

よって $|x-b| < R_g, \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| < R_f$ ならば $f(g(x))$ は a を中心とするべき級数であらわされる

なお、 $\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| < R_f$ は a を中心とする区間である (*2)

(*1)

$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x-a)^p$ は絶対収束する

(証明)

$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| < R_f$ としているので

$$\therefore \left| \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right| < R_f$$

$$\therefore \left| \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| + a - a \right| < R_f$$

$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| + a$ は f の収束半径内にあるので f のべき級数は絶対収束する

よって

$$\begin{aligned} \infty &> \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| + a - a \right)^n \right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n \right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left| \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n \right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n \quad (\because \sum |c_m(x-b)^m| \geq 0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} |c_{k_1}| \dots |c_{k_n}| |x-b|^p \quad (*1.1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k_1+\dots+k_n=p} |c_{k_1}| \dots |c_{k_n}| |x-b|^p \quad \left(\because \sum_{p=0}^{\infty} \dots \text{は収束する} (*1.1) \right. \\ &\quad \left. \text{よって収束する級数の線型性より} \right) \\ &> \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |a_n| \left| \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} \right| |x-b|^p \quad (\because |a| + |b| \geq |a+b|) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left| a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x-b)^p \right| \quad (\because |a||b| = |ab|) \end{aligned}$$

よって $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n} (x-b)^p$ は絶対収束する

(*1.1)

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} |c_{k_1}| \dots |c_{k_n}| |x-b|^p$$

(証明)

$|c_m| = d_m$ とする

$|x-b| \geq 0$ のとき

$$|x-b| = x-b$$

よって

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} d_m(x-b)^m \right)^n \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} d_{k_1} \dots d_{k_n} (x-b)^p \quad (\because \text{別紙: べき級数のべき}) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} |c_{k_1}| \dots |c_{k_n}| |x-b|^p \end{aligned}$$

$|x-b| < 0$ のとき

$$y = -x, b = -a \text{ とする } |x-b| = -x+b = y-a$$

よって

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} d_m(y-a)^m \right)^n \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} d_{k_1} \dots d_{k_n} (y-a)^p \quad (\because \text{別紙: べき級数のべき}) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} |c_{k_1}| \dots |c_{k_n}| |x-b|^p \end{aligned}$$

$$\text{よって } \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| \right)^n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} |c_{k_1}| \dots |c_{k_n}| |x-b|^p$$

$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| < R_f$ が存在すると仮定しているので右辺の級数は存在する。すなわち収束する。

(*2)

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| < R_f \text{ は } b \text{ を中心とする区間である}$$

(証明)

$$A = \left\{ x \mid \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x-b)^m| < R_f \right\} \text{ とする}$$

$\inf A = \sup A$ の場合

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(b-b)^m| = 0 < R_f \text{ なので } b \in A \text{ である。}$$

$$\text{よって } b = \inf A = \sup A$$

よって A は a を中心とする半径 0 の閉区間

$\inf A < \sup A, \sup A = \infty$ の場合

$$\inf A = -\infty \quad (*2.1)$$

$$[-\infty, \infty] \subset A \quad (*2.2)$$

$$\therefore A = \mathbb{R}$$

よって A は b を中心とする半径 ∞ の開区間

$\inf A < \sup A, \sup A < \infty$ の場合

$$\inf A > -\infty \quad (*2.1)$$

$$b < \frac{\inf A + \sup A}{2} \text{ と仮定する}$$

b を中心とした $\inf A$ の対称点 $2b - \inf A$ を考える

$$\text{仮定より } 2b - \inf A < \sup A$$

$\sup A$ は上限なので

$$2b - \inf A < x < \sup A, x \in A \text{ なる } x \text{ が存在する}$$

b を中心とした x の対称点 $2b - x$ について

$$2b - \inf A < x \text{ より } 2b - x < \inf A \text{ である}$$

$$\text{よって } 2b - x \notin A$$

$$\text{よって } (*2.1) \text{ より } x \notin A$$

$x \in A$ なのでこれは矛盾

$$\text{よって } b \not< \frac{\inf A + \sup A}{2}$$

$$\text{同様に } b \not> \frac{\inf A + \sup A}{2}$$

$$\therefore b = \frac{\inf A + \sup A}{2}$$

また $(*2.2)$ より $[\inf A, \sup A] \subset A$ または $(\inf A, \sup A) \subset A$

よって A は a を中心とする半径 $\frac{\inf A + \sup A}{2}$ の開区間または閉区間である

よって A は a を中心とする区間である。

$$(*2.1)$$

b を中心とした x の対称点を x' とする

$$x' = x - 2(x - b) = 2b - x \text{ である}$$

$$\begin{aligned} \sum |c_m(x' - b)^m| &= \sum |c_m(2b - x - b)^m| \\ &= \sum |c_m(-x + b)^m| \\ &= \sum |c_m(x - b)^m| \end{aligned}$$

$\therefore x \in A$ ならば $x' \in A$ である。

よって $x \notin A$ ならば $x' \notin A$ である

$$(*2.2)$$

$b < x < x_1$ とする

$$|x - b| < |x_1 - b|$$

$$\therefore \sum |c_m(x - b)^m| < \sum |c_m(x_1 - b)^m|$$

よって $x_1 \in A$ ならば $x \in A$... (1)

a を中心とした x_1 の対称点を x'_1 とする

$$x'_1 < x < b \text{ とすると}$$

$$2b - x'_1 > 2b - x > b$$

$$\therefore x_1 > 2b - x > b \quad (\because x'_1 = 2b - x_1)$$

(1) より $2b - x \in A$

x は $2b - x$ の b を中心とした対称点なので

(*2.1) より $x \in A$

よって $x_1 \in A$ ならば $[x'_1, x_1] \subset A$

P.12 補足 べき級数のべき '25 6.2

$|x - a| < R_f$ ならば $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ とする

$|x - a| < R_f$ ならば $(f(x))^m$, $m \geq 1$ は a を中心としたべき級数であらわされる

(証明)

$|x - a| < R_f$ とする

$$\begin{aligned}
 (f(x))^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \dots (1) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k a_{n-k} (x - a)^{n-k} \quad \left(\because \sum a_n (x - a)^n \text{ は絶対収束する} \right. \\
 &\quad \left. \text{よって級数の積はコーシー積であらわされる} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) (x - a)^n \quad (\because \text{有限級数の線型性}) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2=n} a_{k_1} a_{k_2} \right) (x - a)^n \quad (*1)
 \end{aligned}$$

$|x - a| < R_f$ ならば (1) のどちらの級数も絶対収束する。よってコーシー積も絶対収束する。よって $(f(x))^2$ をあらわす級数は絶対収束する

$$c_n^m = \sum_{k_1+\dots+k_m=n} a_{k_1} \dots a_{k_m}, \quad m \geq 2 \text{ とする}$$

$$(f(x))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 (x - a)^n \text{ である}$$

$$(f(x))^m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^m (x - a)^n \text{ と仮定する}$$

$|x - a| < R_f$ で絶対収束すると仮定する

$$\begin{aligned}
 (f(x))^{m+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n^m (x - a)^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \dots (2) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n c_k^m (x - a)^k a_{n-k} (x - a)^{n-k} \quad (\because \text{コーシー積}) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n c_k^m a_{n-k} \right) (x - a)^n \quad (\because \text{有限級数の線型性}) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \sum_{k_1+\dots+k_m=k} a_{k_1} \dots a_{k_m} a_{n-k} \right) (x - a)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_{m+1}=n} a_{k_1} \dots a_{k_{m+1}} (x - a)^n \quad (*2)
 \end{aligned}$$

よって $m \geq 2$ ならば

$$(f(x))^m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^m (x - a)^n, \quad c_n^m = \sum_{k_1+\dots+k_m=n} a_{k_1} \dots a_{k_m} \text{ である}$$

(2) のどちらの級数も絶対収束するので、コーシー積も絶対収束する。

よって $|x - a| < R_f$ ならば絶対収束する

$$m = 1 \text{ ならば } (f(x))^1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

よって $m \geq 1$ で $(f(x))^m$ は a を中心とするべき級数であらわされる

$$(*1) A = \{(k, n-k) \mid n \geq k \geq 0\}$$

$$B = \{(k_1, k_2) \mid k_1 + k_2 = n, k_1, k_2 \geq 0\} \text{とする}$$

$$(a, b) \in A \text{とする}$$

$$b = n - a$$

$$\therefore a + b = n$$

$$\text{また } n \geq a \geq 0$$

$$\therefore b \geq 0$$

$$\therefore (a, b) \in B$$

$$(a, b) \in B \text{とする}$$

$$a + b = n$$

$$\therefore b = n - a$$

$$b \geq 0 \text{より}$$

$$n - a \geq 0$$

$$\therefore n \geq a$$

$$a \geq 0 \text{なので}$$

$$n \geq a \geq 0$$

$$\therefore (a, b) \in A$$

$$\therefore A = B$$

$$(*2) A = \{(k_1, \dots, k_m, n-k) \mid k_1 + \dots + k_m = k, 0 \leq k \leq n, k_i \geq 0\}$$

$$B = \{(k_1, \dots, k_{m+1}) \mid k_1 + \dots + k_{m+1} = n, k_i \geq 0\} \text{とする}$$

$$(a_1, \dots, a_{m+1}) \in A \text{とする}$$

$$a_1 + \dots + a_m = k, a_{m+1} = n - k$$

$$\therefore a_1 + \dots + a_{m+1} = n$$

$$0 \leq k \leq n \text{より}$$

$$a_{m+1} = n - k \geq 0$$

$$\therefore (a_1, \dots, a_{m+1}) \in B$$

$$(a_1, \dots, a_{m+1}) \in B \text{とする}$$

$$a_1 + \dots + a_{m+1} = n$$

$$a_1 + \dots + a_m = k \text{とする}$$

$$k = n - a_{m+1}$$

$$a_{m+1} \geq 0 \text{より } k \leq n$$

$$a_i \geq 0 \text{より } k \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq k \leq n$$

$$\text{また } a_{m+1} = n - k$$

$$\therefore (a_1, \dots, a_{m+1}) \in A$$

$$\therefore A = B$$

P.12 問題 1.4 $x^2 e^y$ の偏微分 '25 4.16

$$f(x, y) = x^2 e^y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

f の偏微分と連続性

(i)

$$f_x = 2xe^y \quad (*1)$$

$$f_y = x^2 e^y \quad (*1)$$

$$f_{xx} = 2e^y$$

$$f_{yy} = x^2 e^y$$

$$f_{xy} = 2xe^y$$

$$f_{yx} = 2xe^y$$

$$f_x(0, 0) = 0, f_x(1, 1) = 2e$$

$$f_y(0, 0) = 0, f_y(1, 1) = e$$

$$f_{xx}(0, 0) = 2, f_{xx}(1, 1) = 2e$$

$$f_{yy}(0, 0) = 0, f_{yy}(1, 1) = e$$

$$f_{xy}(0, 0) = 0, f_{xy}(1, 1) = 2e$$

$$f_{yx}(0, 0) = 0, f_{yx}(1, 1) = 2e$$

(ii)

$$x^2 \text{ は } x \text{ で連続よって } (x, y) \text{ で連続} \quad (*2)$$

$$e^y \text{ は } x \text{ で連続よって } (x, y) \text{ で連続} \quad (*2)$$

$$\text{よって } f(x, y) = x^2 e^y \text{ は } (x, y) \text{ で連続} \quad (*3)$$

同様に

$$f_x = 2xe^y \text{ は連続}$$

$$f_y = x^2 e^y \text{ は連続}$$

$$f_{xx} = 2e^y \text{ は連続}$$

$$f_{yy} = x^2 e^y \text{ は連続}$$

$$f_{xy} = 2xe^y \text{ は連続}$$

$$f_{yx} = 2xe^y \text{ は連続}$$

$$\text{よって } f \text{ は } C^2 \text{ 級}$$

(iii)

$$f_{xy} = 2xe^y, f_{yx} = 2xe^y \text{ なので } f_{xy} = f_{yx}$$

$$(*1) x \text{ と } y \text{ が独立ならば } f_x = \frac{f'}{x \text{ で微分}}$$

$$(*2) f(x) \text{ が } x \text{ で連続ならば } f(x) \text{ は } (x, y) \text{ で連続である}$$

(証明)

$$x \text{ で連続なので } f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x)$$

よって任意の ϵ に対して

$$0 < |\Delta x| < \delta \text{ ならば}$$

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \epsilon$$

$$|(\Delta x, \Delta y)| < \delta \text{ ならば}$$

$$|\Delta x| \leq |(\Delta x, \Delta y)| \quad (\because \text{三角不等式})$$

$$\therefore |\Delta x| < \delta$$

$$\therefore \Delta x = 0 \text{ or } 0 < |\Delta x| < \delta$$

$$0 < |\Delta x| < \delta \text{ とすると}$$

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \epsilon$$

$$\Delta x = 0 \text{ とすると}$$

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| = 0 < \epsilon$$

$$\text{よって } |(\Delta x, \Delta y)| < \delta \text{ ならば } |f(x + \Delta x) - f(x)| < \epsilon$$

$$\text{よって } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$$

(*2) f, g が連続ならば fg は連続

(証明)

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} g(x + \Delta x, y + \Delta y) = g(x, y)$$

よって

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y)g(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$= \lim f(x + \Delta x, y + \Delta y) \lim g(x + \Delta x, y + \Delta y) \quad (\because \text{積の極限})$$

$$= f(x, y)g(x, y)$$

よって fg は連続

P.15 問題 1.5 $Z(x,y)$ の偏微分 '25 6.22

$$Z = f(x, y) = x^2 e^y \text{ とする}$$

$$\eta = y - x \text{ とする}$$

$$Z = g(x, \eta) = x^2 e^{\eta+x} \text{ とする。}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y \neq \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_\eta$$

(証明)

$$Z = f(x, y) = x^2 e^y \text{ とする。 } x, y \text{ は独立変数とする}$$

$$\eta = y - x \text{ とする。 } \eta \text{ は独立変数とする。 } y \text{ は従属変数である}$$

$$Z = f(x, y_1) = f(x, \eta + x) = x^2 e^{\eta+x} = g(x, \eta) \text{ とする}$$

よって

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y = 2x e^y$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_\eta &= 2x e^{\eta+x} + x^2 e^{\eta+x} \\ &= (2x + x^2) e^{\eta+x} \\ &= (2x + x^2) e^y \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y \neq \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_\eta$$

P.15 問題 1.6(i) 偏微分の連鎖律 '25 6.13

x, y, ξ, η は独立変数とする

$\mathbf{x}(\xi, \eta), \mathbf{y}(\xi, \eta)$ とする

$\mathbf{Z}(\xi, \eta) = \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とする

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi}\right)_{\eta} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x}\right)_{y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}\right)_{\eta} + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y}\right)_{x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi}\right)_{\eta} \cdots (1.20)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta}\right)_{\xi} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x}\right)_{y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y}\right)_{x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta}\right)_{\xi} \cdots (1.21)$$

(証明)

x, y, ξ, η は独立変数とする

$\mathbf{x}(\xi, \eta), \mathbf{y}(\xi, \eta)$ とする

$\mathbf{Z}(\xi, \eta) = \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とする

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi}\right)_{\eta} &= \frac{d\mathbf{Z}}{d\xi} \quad (\because \xi, \eta \text{ が独立なので } \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi}\right)_{\eta} = \frac{d\mathbf{Z}}{d\xi}) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x}\right)_{y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}}} \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y}\right)_{x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}}} \frac{d\mathbf{y}}{d\xi} \quad (\because \text{問題1.7}) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x}\right)_{y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}\right)_{\eta} + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y}\right)_{x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi}\right)_{\eta} \quad (\because \xi, \eta \text{ が独立なので } \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}\right)_{\eta} = \frac{d\mathbf{x}}{d\xi}, \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi}\right)_{\eta} = \frac{d\mathbf{y}}{d\xi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta}\right)_{\xi} &= \frac{d\mathbf{Z}}{d\eta} \quad (\because \xi, \eta \text{ が独立なので } \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta}\right)_{\xi} = \frac{d\mathbf{Z}}{d\eta}) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x}\right)_{y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}}} \frac{d\mathbf{x}}{d\eta} + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y}\right)_{x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}}} \frac{d\mathbf{y}}{d\eta} \quad (\because \text{問題1.7}) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x}\right)_{y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y}\right)_{x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta}\right)_{\xi} \quad (\because \xi, \eta \text{ が独立なので } \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}\right)_{\xi} = \frac{d\mathbf{x}}{d\eta}, \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta}\right)_{\xi} = \frac{d\mathbf{y}}{d\eta}) \end{aligned}$$

P.15 問題 1.6(ii) 偏微分の連鎖律 '25 6.25

x, y, ξ, η は独立変数とする

$\boldsymbol{x}(\xi, \eta), \boldsymbol{y}(\xi, \eta)$ とする

$\boldsymbol{Z}(\xi, \eta) = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とする

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \xi}\right)_\eta = \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y \bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x} \\ y=\boldsymbol{y}}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}\right)_\eta + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x \bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x} \\ y=\boldsymbol{y}}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \xi}\right)_\eta \dots (1.20)$$

(1.20) を言葉で説明する

(説明)

$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \xi}\right)_\eta$ は $\xi\eta$ 平面の点 (ξ, η) における \boldsymbol{Z} の勾配の ξ 方向成分

$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y \bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x} \\ y=\boldsymbol{y}}}$ は xy 平面の点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ における \boldsymbol{Z} の勾配の x 方向成分

$\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}\right)_\eta$ は $\xi\eta$ 平面の点 (ξ, η) における \boldsymbol{x} の勾配の ξ 方向成分

$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x \bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x} \\ y=\boldsymbol{y}}}$ は xy 平面の点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ における \boldsymbol{Z} の勾配の y 方向成分

$\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \xi}\right)_\eta$ は $\xi\eta$ 平面の点 (ξ, η) における \boldsymbol{y} の勾配の ξ 方向成分

よって (1.20) は

$$(\boldsymbol{Z} \text{ の勾配の } \xi \text{ 方向成分}) = (\boldsymbol{Z} \text{ の勾配の } x \text{ 方向成分}) \times (\boldsymbol{x} \text{ の勾配の } \xi \text{ 方向成分}) + (\boldsymbol{Z} \text{ の勾配の } y \text{ 方向成分}) \times (\boldsymbol{y} \text{ の勾配の } \xi \text{ 方向成分})$$

と説明される

さらに要約すると (1.20) は

$$(\boldsymbol{Z} \text{ の勾配の } \xi \text{ 方向成分}) = (\boldsymbol{Z} \text{ の勾配の } x \text{ 方向成分の } \xi \text{ 方向成分}) + (\boldsymbol{Z} \text{ の勾配の } y \text{ 方向成分の } \xi \text{ 方向成分})$$

と説明できる

P.15 問題 1.6(iii) 偏微分の連鎖律 '25 6.13

$$f(x, y) = (x + 1)(x - y + 1) \text{ とする}$$

$$\eta = x - y \text{ とする}$$

$$g(x, \eta) = (x + 1)(\eta + 1) \text{ とする}$$

このとき

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_\eta = x - y + 1 \cdots (1.18) \text{ である}$$

(証明)

x, y, η は独立変数とする

$$f(x, y) = (x + 1)(x - y + 1) \text{ とする}$$

$$\mathbf{x}(x, \eta) = x, \mathbf{y}(x, \eta) = x - \eta \text{ とする}$$

$$g(x, \eta) = f(\mathbf{x}(x, \eta), \mathbf{y}(x, \eta)) = (x + 1)(\eta + 1) \text{ とする}$$

(1.20) より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_\eta &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x}\right)_\eta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}\right)_\eta \\ &= (2\mathbf{x} - \mathbf{y} + 2) \cdot 1 + (-\mathbf{x} - 1) \cdot 1 \begin{pmatrix} \because \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} = 2\mathbf{x} - \mathbf{y} + 1, \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x}\right)_\eta = 1 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \Big|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} = -\mathbf{x} - 1, \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}\right)_\eta = 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{x} - \mathbf{y} + 1 \end{aligned}$$

P.15 問題 1.6(iv) 偏微分の連鎖律 '25 6.25

$x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n$ は独立変数とする

$\mathbf{x}_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \mathbf{x}_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ とする。 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ は偏微分可能とする

$Z(\xi_1, \dots, \xi_n) = \mathbf{Z}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ とする。 \mathbf{Z}, \mathbf{Z} は偏微分可能とする

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} \bigg|_{\substack{x_1 = \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = \mathbf{x}_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}} + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} \bigg|_{\substack{x_1 = \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = \mathbf{x}_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}}$$

(証明)

$$f(\vec{x} + d\vec{x}) - f(\vec{x}) = df + o(|d\vec{x}|) \quad (1.13)$$

$$df = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} dx_n \quad (1.14)$$

において

$f = \mathbf{Z}$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $d\vec{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$ とする。 x_1, \dots, x_n は独立変数とする

$$\begin{aligned} & \mathbf{Z}(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) - \mathbf{Z}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} dx_n + o(\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}) \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{\substack{(dx_1, \dots, dx_n) \\ \rightarrow (0, \dots, 0)}} \frac{\mathbf{Z}(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) - \mathbf{Z}(x_1, \dots, x_n) - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} dx_1 - \dots - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} dx_n}{\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}} = 0 \quad (1)$$

$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ とする。 ξ_1, \dots, ξ_n は独立変数とする。 \mathbf{x}_i は偏微分可能とする

$d\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - \mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ とする

$$\therefore \lim_{d\xi_i \rightarrow 0} d\mathbf{x}_i = \lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - \mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0 \quad (\because \mathbf{x}_i \text{ は連続なので})$$

(1) の極限は経路によらないので

$$\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{x}_1 + d\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n + d\mathbf{x}_n) - \mathbf{Z}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} \bigg|_{\substack{x_1 = \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = \mathbf{x}_n}} d\mathbf{x}_1 - \dots - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} \bigg|_{\substack{x_1 = \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = \mathbf{x}_n}} d\mathbf{x}_n}{\sqrt{d\mathbf{x}_1^2 + \dots + d\mathbf{x}_n^2}} = 0$$

$Z(\xi_1, \dots, \xi_n) = \mathbf{Z}(\mathbf{x}_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \mathbf{x}_n(\xi_1, \dots, \xi_n))$ とする

$$\begin{aligned} Z(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) &= \mathbf{Z}(\mathbf{x}_1(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n), \dots, \mathbf{x}_n(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n)) \\ &= \mathbf{Z}(\mathbf{x}_1 + d\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n + d\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{Z(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - Z(\xi_1, \dots, \xi_n) - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} \bigg|_{\substack{x_1 = \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = \mathbf{x}_n}} d\mathbf{x}_1 - \dots - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} \bigg|_{\substack{x_1 = \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = \mathbf{x}_n}} d\mathbf{x}_n}{\sqrt{d\mathbf{x}_1^2 + \dots + d\mathbf{x}_n^2}} = 0$$

ここで

$$\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{x}_i}{d\xi_i} = \lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - \mathbf{x}_i(\xi_1, \dots, \xi_n)}{d\xi_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}} \quad (\because \mathbf{x}_i \text{ は偏微分可能})$$

なので

$$\begin{aligned} \lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{\sqrt{d\mathbf{x}_1^2 + \dots + d\mathbf{x}_n^2}}{|d\xi_i|} &= \lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{x}_1}{d\xi_i} \right)^2 + \dots + \left(\frac{d\mathbf{x}_n}{d\xi_i} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{x}_1}{d\xi_i} \right)^2 + \dots + \left(\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{x}_n}{d\xi_i} \right)^2} \quad \left(\because \sqrt{x} \text{ は } x > 0 \text{ で連続, } x^2 \text{ は } \mathbb{R} \text{ で連続なので} \right. \\ &\quad \left. \text{合成関数の極限と和の極限より} \right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}}^2} \\ &< \infty \quad \left(\because \text{偏微分可能なので } \left| \left(\frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}} \right| < \infty \right) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - \mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi_n) - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} d\mathbf{x}_1 - \dots - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} d\mathbf{x}_n}{\sqrt{d\mathbf{x}_1^2 + \dots + d\mathbf{x}_n^2}} \frac{d\xi_i}{d\xi_i} &= 0 \\ (\because \lim f = 0, \lim |g| < \infty \text{ ならば } \lim fg = 0) \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - \mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi_n) - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} d\mathbf{x}_1 - \dots - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} d\mathbf{x}_n}{d\xi_i} = 0$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{d\xi_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi + d\xi_i, \dots, \xi_n) - \mathbf{Z}(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\xi_i} &= \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}} + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}} \\ &\quad \left(\because \text{lim の線型性より} \right. \\ &\quad \left. \lim(f + kg + lh) = a, \lim g = b, \lim h = c \text{ ならば} \right. \\ &\quad \left. \lim f = a - kb - lc \right) \end{aligned}$$

よって

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_1} \right)_{x_{i \neq 1}} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}} + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x_n} \right)_{x_{i \neq n}} \Big|_{\substack{x_1=\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=\mathbf{x}_n}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_{j \neq i}} \quad (\because \text{偏微分の定義})$$

P.15 問題 1.7(i) 合成関数の偏微分 '25 6.27

$Z = Z(x, y)$ とする。 x, y は独立変数とする

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ とする。 t は独立変数とする。 \mathbf{x}, \mathbf{y} は微分可能とする

$\mathbf{Z}(t) = Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とする

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \bigg|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \bigg|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{y}}{dt} \quad (1.22)$$

(証明)

$$f(\vec{x} + d\vec{x}) - f(\vec{x}) = df + o(|d\vec{x}|) \quad (1.13)$$

$$df = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \right)_{x_i \neq 1} dx_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right)_{x_i \neq n} dx_n \quad (1.14)$$

において

$f = Z$, $\vec{x} = (x, y)$, $d\vec{x} = (dx, dy)$ とする。 x, y は独立変数とする

$$Z(x + dx, y + dy) - Z(x, y) = \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x dy + o(\sqrt{dx^2 + dy^2})$$

よって

$$\lim_{(dx, dy) \rightarrow (0, 0)} \frac{Z(x + dx, y + dy) - Z(x, y) - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y dx - \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0 \quad (1)$$

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ とする。 t は独立変数とする。 \mathbf{x}, \mathbf{y} は微分可能とする

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(t + dt) - \mathbf{x}(t)$$

$$d\mathbf{y} = \mathbf{y}(t + dt) - \mathbf{y}(t) \text{ とする}$$

$$\therefore \lim_{dt \rightarrow 0} d\mathbf{x} = 0 \quad (\because \mathbf{x} \text{ は連続})$$

$$\therefore \lim_{dt \rightarrow 0} d\mathbf{y} = 0 \quad (\because \mathbf{y} \text{ は連続})$$

(1) の極限は経路によらないので

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{Z(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, \mathbf{y} + d\mathbf{y}) - Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \bigg|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} d\mathbf{x} - \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \bigg|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} d\mathbf{y}}{\sqrt{d\mathbf{x}^2 + d\mathbf{y}^2}} = 0$$

$$\mathbf{Z}(t) = Z(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \text{ とする}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(t + dt) &= Z(\mathbf{x}(t + dt), \mathbf{y}(t + dt)) \\ &= Z(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, \mathbf{y} + d\mathbf{y}) \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(t + dt) - \mathbf{Z}(t) - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \bigg|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} d\mathbf{x} - \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \bigg|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} d\mathbf{y}}{\sqrt{d\mathbf{x}^2 + d\mathbf{y}^2}} = 0$$

ここで

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + dt) - \mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (\because \mathbf{x} \text{ は微分可能})$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{y}(t+dt) - \mathbf{y}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{y}}{dt} \quad (\because \mathbf{y} \text{ は微分可能})$$

なので

$$\begin{aligned} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\sqrt{d\mathbf{x}^2 + d\mathbf{y}^2}}{|dt|} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathbf{y}}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 + \left(\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{y}}{dt}\right)^2} \quad \left(\because \sqrt{x} \text{ は } x > 0 \text{ で連続, } x^2 \text{ は } \mathbb{R} \text{ で連続なので}\right. \\ &\quad \left.\text{合成関数の極限と和の極限より}\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathbf{y}}{dt}\right)^2} \\ &< \infty \quad \left(\because \text{微分が存在するので } \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| < \infty, \left|\frac{d\mathbf{y}}{dt}\right| < \infty\right) \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(t+dt) - \mathbf{Z}(t) - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x}\right)_y \Big|_{x=\mathbf{x}, y=\mathbf{y}} d\mathbf{x} - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y}\right)_x \Big|_{x=\mathbf{x}, y=\mathbf{y}} d\mathbf{y}}{\sqrt{d\mathbf{x}^2 + d\mathbf{y}^2}} \frac{\sqrt{d\mathbf{x}^2 + d\mathbf{y}^2}}{dt} = 0$$

($\because \lim f = 0, \lim |g| < \infty$ ならば $\lim fg = 0$)

よって

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(t+dt) - \mathbf{Z}(t) - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x}\right)_y \Big|_{x=\mathbf{x}, y=\mathbf{y}} d\mathbf{x} - \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y}\right)_x \Big|_{x=\mathbf{x}, y=\mathbf{y}} d\mathbf{y}}{dt} = 0$$

よって

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(t+dt) - \mathbf{Z}(t)}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x}\right)_y \Big|_{x=\mathbf{x}, y=\mathbf{y}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y}\right)_x \Big|_{x=\mathbf{x}, y=\mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{dt} \quad \left(\because \begin{array}{l} \text{lim の線型性より} \\ \lim(f + kg + lh) = a, \lim g = b, \lim h = c \text{ ならば} \\ \lim f = a - kb - lc \end{array}\right)$$

よって

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x}\right)_y \Big|_{x=\mathbf{x}, y=\mathbf{y}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y}\right)_x \Big|_{x=\mathbf{x}, y=\mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{dt} \quad (\because \text{微分の定義})$$

P.15 問題 1.7(ii) 合成関数の偏微分の例 '25 6.28

$Z = x^2 e^y$ とする

$\mathbf{x}(t) = t^3$, $\mathbf{y}(t) = t^4$ とする

$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \bigg|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \bigg|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{y}}{dt}$ であることを確認する

(確認)

$Z = x^2 e^y$ とする。 x, y は独立変数とする

$\mathbf{x}(t) = t^3$, $\mathbf{y}(t) = t^4$ とする。 t は独立変数とする

$\mathbf{Z}(t) = Z(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ とする

$$\mathbf{Z}(t) = Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^2 e^{\mathbf{y}} = (t^3)^2 e^{t^4} = t^6 e^{t^4}$$

よって

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = 6t^5 e^{t^4} + t^6 4t^3 e^{t^4} = 6t^5 e^{t^4} + 4t^9 e^{t^4}$$

また

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \bigg|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \bigg|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= 2\mathbf{x}e^{\mathbf{y}} 3t^2 + \mathbf{x}^2 e^{\mathbf{y}} 4t^3 \\ &= 2t^3 e^{t^4} 3t^2 + (t^3)^2 e^{t^4} 4t^3 \\ &= 6t^5 e^{t^4} + 4t^9 e^{t^4} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \bigg|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \bigg|_{\substack{x=\mathbf{x} \\ y=\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{y}}{dt} \text{ である}$$

P.16 問題 1.8 偏微分でつまづいたこと '25 6.25

偏微分でつまづいて色々考えたことのメモ

1.

x, y は独立変数であるかつ x, y は従属変数であるというのは矛盾である

(証明)

従属変数ならば独立変数ではないので、独立変数であるかつ独立変数でないとなり排中律に反するので矛盾である

2.

x, y を独立変数かつ従属変数と仮定すると矛盾する例

(例)

x, y は独立変数とする (1)

$f(x, y) = x + y$ とする (2)

$$\therefore f(0, 1) = 1$$

$x = \xi, y = \xi$ とする。 ξ は独立変数とする (3)

$$\therefore f(x, y) = f(\xi, \xi) = 2\xi$$

$x = y = \xi$ なので $x = 0, y = 1$ である ξ は存在しない

$$\therefore f(0, 1) = \text{未定義}$$

$$\therefore f(0, 1) \neq f(0, 1)$$

これは等号の反射律に反するので矛盾である

よって仮定 (1), (2), (3) は矛盾している

なにが矛盾しているかというと、(3) において x と y を従属変数と仮定しているので 1. より (1), (3) は矛盾している

なお (2) は (1), (3) と矛盾していない

3.

$f(x, y)$ の偏微分 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ が定義できるならば x, y は独立変数である

(説明)

偏微分の定義に明記されていないが偏微分が定義されるのは、 x, y が独立変数のときに限ると明記すべきだと思う

なぜなら、もし x, y が独立変数でなければ偏微分の定義に使われる $f(x + \Delta x, y)$ が定義できるとは限らないから

x, y が従属変数であっても、 (x, y) 近傍で $f(x, y)$ が定義されるならば偏微分の定義は成立するが、これを許容すると、 (x, y) 近傍で従属変数 x, y が定義されないだけの場合も $f(x, y)$ が定義されずに偏微分できなくなって不便である

なので x, y が独立変数のときに限り偏微分が定義されるとする

4.

偏微分の連鎖律は矛盾している

(証明)

関数 $f(x, y)$ を考える

$$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta) \text{ とする (1)}$$

偏微分の連鎖律は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{\eta} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{\eta} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_{\eta} \text{ である}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \text{ が定義されているので 3. より } x, y \text{ は独立変数である}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{\eta} \text{ が定義されているので 3. より } \xi, \eta \text{ は独立変数である}$$

よって (1) より x, y は従属変数である

よって x, y は独立変数かつ従属変数となり 1. よりこれは矛盾である。

5.

矛盾しない偏微分の連鎖律

x, y を独立変数かつ従属変数とするのを避けるために、従属変数 x_1, y_1 を追加すればよい

$f(x, y)$ を考える。 x, y は独立変数とする

$$x_1 = x_1(\xi, \eta), y_1 = y_1(\xi, \eta) \text{ とする}$$

ξ, η は独立変数、 x_1, y_1 は従属変数とする

$$g(\xi, \eta) = f(x_1, y_1) \text{ とする}$$

偏微分の連鎖律は

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)_{\eta} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \bigg|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)_{\eta} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \bigg|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi}\right)_{\eta}$$

となる

ただし $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \bigg|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}}$ は偏微分 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ の x, y に x_1, y_1 を代入したものである。以下同様

6.

とはいえ、実際の教科書では x, y を独立変数としつつ、途中で x, y を従属変数とすることはよくある

この場合、独立変数の x, y と従属変数の x, y を脳内で区別しないといけない

(注) 脳内で区別というのは普通の言い方をすると文脈で区別するということである

(例)

関数 $f(x, y)$ を考える。 x, y は独立変数とする

$$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta) \text{ とする。}$$

ξ, η は独立変数とする。 x, y は従属変数である

$g(\xi, \eta) = f(x, y)$ とする

偏微分の連鎖律は

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)_\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=y} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_\eta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=x} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_\eta \text{ である}$$

という感じで脳内で区別する

わたしにはハードルが高いので無理せず x_1, y_1 と書き直して区別すればいいかなと思う

7.

異なる関数を同じ関数とすることは矛盾である

(例)

$Z = f(x, y) = x + y$ とする。 x, y は独立変数とする

$Z = g(\xi, \eta) = \xi - \eta$ とする。 ξ, η は独立変数とする

$$Z = f(1, 1) = 2$$

$$Z = g(1, 1) = 0$$

$$\therefore Z = 2 = 0$$

よって矛盾

8.

変数が独立変数である関数 $Z(x, y)$ と 変数が従属変数である関数 $Z(x, y)$ は異なる関数である

なので同じ関数 Z とするのは矛盾である

(例)

$Z(x, y) = x + y$ とする。 x, y は独立変数とする (1)

$Z(x, y) = x + y, x = \xi, y = \xi$ とする。 ξ は独立変数とする。 x, y は従属変数である (2)

(1) の Z だと $Z(0, 1) = 1$

(2) の Z だと $Z(0, 1)$ は未定義

よって (1) の Z と (2) の Z は異なる関数である

関数 Z の式が同じでも、定義域が異なれば異なる関数である

従属変数の変域が明示されていない場合、変数が独立変数である関数 $Z(x, y)$ と 変数が従属変数である関数 $Z(x, y)$ は式が同じだから同じ関数とは言えない

9.

熱力学では

同じ変数を独立変数としかつ従属変数とし、かつ

異なる関数を同じ関数とすることもよくある

矛盾 アンド 矛盾 でわたしは素人は悶絶してしまう

(例)

$$Z = f(x, y) = x^2 e^y \text{ とする。}$$

$$\eta = y - x \text{ とする。}$$

$$Z = f(x, y) = f(x, \eta + x) = x^2 e^{\eta + x} = g(x, \eta) \text{ とする。}$$

Z は x, y の関数なので $Z = Z(x, y) = f(x, y)$ である

Z は x, η の関数なので $Z = Z(x, \eta) = g(x, \eta)$ である

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y = 2x e^y$$

偏微分が定義できるので、3. より x, y は独立変数である

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_\eta = (2x + x^2) e^{\eta + x}$$

偏微分が定義できるので、3. より x, η は独立変数である

よって

$$Z = Z(1, 1) = f(1, 1) = e$$

$$Z = Z(1, 1) = g(1, 1) = e^2$$

$$\therefore Z(1, 1) \neq Z(1, 1)$$

となり矛盾する

また x, y, η は独立変数で、 $g(x, \eta)$ は y によらないので

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_y = (2x + x^2) e^{\eta + x}$$

$\eta = y - x$ なので

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y = (2x + x^2) e^y$$

$$\therefore \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \neq \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y$$

となり矛盾する

10.

上の例で矛盾が生じないように変数、関数を区別する

上の例では2つの異なる関数を同じ関数 Z と仮定しているところが矛盾しているので

関数 Z_1, Z_2 として区別する

また 変数 y を独立変数かつ従属変数と仮定しているのが矛盾しているので

y は独立変数とし、 y_1 は 従属変数として区別する

(例)

$$Z_1 = f(x, y) = x^2 e^y \text{ とする。 } x, y \text{ は独立変数とする}$$

$$\eta = y_1 - x \text{ とする。 } \eta \text{ は独立変数とする、 } y_1 \text{ は従属変数である}$$

$Z_2 = f(x, y_1) = f(x, \eta + x) = x^2 e^{\eta+x} = g(x, \eta)$ とする。

Z_1 は x, y の関数なので $Z_1 = Z_1(x, y) = f(x, y)$ である

Z_2 は x, η の関数なので $Z_2 = Z_2(x, \eta) = g(x, \eta)$ である

$$\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)_y = 2xe^y$$

$$\left(\frac{\partial Z_2}{\partial x}\right)_\eta = (2x + x^2)e^{\eta+x}$$

$$Z_1 = Z_1(1, 1) = f(1, 1) = e$$

$$Z_2 = Z_2(1, 1) = g(1, 1) = e^2$$

$$\therefore Z_1(1, 1) \neq Z_2(1, 1)$$

となり矛盾しない

また、 x, y, η は独立変数で、 $g(x, \eta)$ は y によらないので

$$\left(\frac{\partial Z_2}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y = (2x + x^2)e^{\eta+x}$$

$\eta = y_1 - x$ なので

$$\left(\frac{\partial Z_2}{\partial x}\right)_y = (2x + x^2)e^{y_1}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)_y \neq \left(\frac{\partial Z_2}{\partial x}\right)_y$$

となり矛盾しない

11.

上の例の変数、関数の区別を脳内で行う

(例)

$Z = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^2 e^{\mathbf{y}}$ とする。 \mathbf{x}, \mathbf{y} は独立変数とする

$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ とする。 $\boldsymbol{\eta}$ は独立変数とする、 \mathbf{y} は従属変数である

$Z = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta} + \mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 e^{\boldsymbol{\eta}+\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ とする。

Z は \mathbf{x}, \mathbf{y} の関数なので $Z = Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ である

Z は $\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}$ の関数なので $Z = Z(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ である

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{y}} = 2\mathbf{x}e^{\mathbf{y}}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\boldsymbol{\eta}} = (2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2)e^{\boldsymbol{\eta}+\mathbf{x}}$$

$$Z = Z(1, 1) = f(1, 1) = e$$

$$Z = Z(1, 1) = g(1, 1) = e^2$$

$$\therefore Z(1, 1) \neq Z(1, 1)$$

となり矛盾しない

また $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}$ は独立変数で、 $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ は \mathbf{y} によらないので

$$\left(\frac{\partial \textcolor{red}{Z}}{\partial \textcolor{blue}{x}}\right)_y = \left(\frac{\partial g}{\partial \textcolor{blue}{x}}\right)_y = (2\textcolor{blue}{x} + \textcolor{blue}{x}^2)e^{\eta+\textcolor{blue}{x}}$$

$\eta = \textcolor{red}{y} - \textcolor{blue}{x}$ なので

$$\left(\frac{\partial \textcolor{red}{Z}}{\partial \textcolor{blue}{x}}\right)_y = (2\textcolor{blue}{x} + \textcolor{blue}{x}^2)e^{\textcolor{red}{y}}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial \textcolor{blue}{Z}}{\partial \textcolor{blue}{x}}\right)_y \neq \left(\frac{\partial \textcolor{red}{Z}}{\partial \textcolor{blue}{x}}\right)_y$$

となり矛盾しない

12.

座標変換においても 1. の矛盾はおこる

(例)

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ とする。} x, y \text{ は独立変数とする (1)}$$

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$y = y(r, \theta) = r \sin \theta \text{ とする。} r, \theta \text{ は独立変数とする (2)}$$

$$f(x, y) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = r^2 = g(r, \theta) \text{ とする}$$

こんな感じの座標変換はよくあるが、

(1) において x, y は独立変数と仮定しかつ

(2) において x, y は従属変数と仮定しているので 1. の矛盾になっている

矛盾しないためには独立変数 x, y と 従属変数 x_1, y_1 を区別して

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ とする。} x, y \text{ は独立変数とする}$$

$$x_1 = x_1(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$y_1 = y_1(r, \theta) = r \sin \theta \text{ とする。} r, \theta \text{ は独立変数とする。}$$

$$f(x_1, y_1) = f(x_1(r, \theta), y_1(r, \theta)) = r^2 = g(r, \theta)$$

としなければならない。

x_1, y_1 を追加せずに、脳内で独立変数 $\textcolor{blue}{x}, \textcolor{blue}{y}$ と 従属変数 $\textcolor{red}{x}, \textcolor{red}{y}$ を区別するときは

$$f(\textcolor{blue}{x}, \textcolor{blue}{y}) = \textcolor{blue}{x}^2 + \textcolor{blue}{y}^2 \text{ とする。} \textcolor{blue}{x}, \textcolor{blue}{y} \text{ は独立変数とする}$$

$$\textcolor{red}{x} = \textcolor{red}{x}(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$\textcolor{red}{y} = \textcolor{red}{y}(r, \theta) = r \sin \theta \text{ とする。} r, \theta \text{ は独立変数とする。}$$

$$f(\textcolor{red}{x}, \textcolor{red}{y}) = f(\textcolor{red}{x}(r, \theta), \textcolor{red}{y}(r, \theta)) = r^2 = g(r, \theta) \text{ とする}$$

となる

13.

ラグランジアンから運動方程式を導くときは

従属変数をあとから独立変数にするということをおこなう

このときもある変数を独立変数かつ従属変数とする矛盾 1. と

別の関数を同じ関数とする矛盾 7. はおこっている

(例)

$$x = x(t)$$

$\dot{x} = \dot{x}(t)$ とする。 t は独立変数とする (1)

ラグランジアンは $L = \dot{x}^2 - x^2$ とする

運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)_x - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_{\dot{x}} = 0 \text{ より (2)}$$

$$\therefore \ddot{x} - x = 0$$

という感じでラグランジアンから運動方程式を得るが、

(1) より x, \dot{x} は従属変数である

(2) より $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)_x$ と $\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_{\dot{x}}$ が定義されているので 3. より x, \dot{x} は独立変数である

よって x, \dot{x} は従属変数かつ独立変数となり 1. より矛盾である

また L の変数が明記されていないため L は $L(x, \dot{x})$ かもしれないし $L(t)$ かもしれないし、その他かもしれない。

もし $L(t)$ であるならば

(2) において L を 関数 $L(x, \dot{x})$ と仮定しているの

異なる関数 $L(t)$ と $L(x, \dot{x})$ を同じ関数 L としていることになり 7. より矛盾する

また もし $L(x, \dot{x})$ であっても

(1) では $L(x, \dot{x}), x, \dot{x}$ は従属変数

(2) では $L(x, \dot{x}), x, \dot{x}$ は独立変数

としているので 8. よりこれら L は異なる関数である。よって 7. より矛盾する

矛盾しないようにするには、従属変数 x, \dot{x} と 独立変数 x_1, x_2 を区別し

さらに 関数 L と 関数 L_1 を区別しておけばよい

$$x = x(t)$$

$\dot{x} = \dot{x}(t)$ とする。 t は独立変数とする

ラグランジアンは $L = \dot{x}^2 - x^2$ とする

$L_1(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2$ とする。 x_1, x_2 は独立変数とする

運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_2} \right)_{x_1} \bigg|_{\substack{x_1=x \\ x_2=\dot{x}}} - \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1} \right)_{x_2} \bigg|_{\substack{x_1=x \\ x_2=\dot{x}}} = 0 \text{ より}$$

$$\therefore \ddot{x} - x = 0$$

こうすると矛盾はおこらない。

従属変数 x, \dot{x} と 独立変数 x, \dot{x} を脳内で区別し

さらに関数 L と 関数 L を脳内で区別するならば

$$x = x(t)$$

$\dot{x} = \dot{x}(t)$ とする。 t は独立変数とする

ラグランジアンは $L = \dot{x}^2 - x^2$ とする

$L(x, \dot{x}) = \dot{x}^2 - x^2$ とする。 x, \dot{x} は独立変数とする

運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \bigg|_{\substack{x \\ \dot{x}=\ddot{x}}} - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_{\substack{\dot{x} \\ \ddot{x}=\ddot{x}}} = 0 \text{ より} \\ \therefore \ddot{x} - x = 0$$

となる。

第 2 章