ゆっくり熱力学の基礎していってね

仲山昌人

概要

熱力学の基礎を読んだときのメモです

目次

第 1 章

P.7 Dx+f(a)=f'(a+0) '25 3.22

$f(x)$が$[a, a, \epsilon']$で連続, $(a+a+\epsilon')$で微分可能とする

$f'(a+0) = \lim_{\epsilon \to +0} f'(a+\epsilon)$が存在するならば

$D_x^+ f(a)$が存在し$D_x^+ f(a) = f'(a+0)$である

(証明)

$[a, a+\epsilon']$ で連続,$(a, a+\epsilon')$ で微分可能なので

平均値の定理より $\dfrac{f(a+\epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = f'(a+\epsilon),\ 0 < \epsilon < \epsilon'$ なる ϵ が存在する

ϵ' に対する ϵ を 1 つ選んで $\epsilon(\epsilon')$ とする

$f'(a+0) = \lim_{\epsilon \to +0} f'(a+\epsilon)$ が存在するので

任意の $\delta > 0$ に対してある ϵ_1 が存在して

$0 < \epsilon < \epsilon_1$ ならば $|f'(a+\epsilon) - f'(a+0)| < \delta$ である

$0 < \epsilon' < \epsilon_1$ ならば $0 < \epsilon(\epsilon') < \epsilon'$ なので $0 < \epsilon(\epsilon') < \epsilon_1$

よって $|f'(a+\epsilon(\epsilon')) - f'(a+0)| < \delta$ である

$\dfrac{f(a+\epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = f'(a+\epsilon(\epsilon'))$ なので

$0 < \epsilon' < \epsilon_1$ ならば $\left| \dfrac{f(a+\epsilon') - f(a)}{\epsilon'} - f'(a+0) \right| < \delta$ である

$\therefore\ \lim_{\epsilon' \to +0} \dfrac{f(a+\epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = f'(a+0)$ である ($\because$ 極限の定義)

$\lim_{\epsilon' \to +0} \dfrac{f(a+\epsilon') - f(a)}{\epsilon'} = D_x^+(a)$ なので

$D_x^+(a) = f'(a+0)$である

P.8 (1.2) f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a) '25 3.21

$f(x)$が$x=a$で微分可能 $\rightleftarrows$ $x \to a$で$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$なる$f'(a)$が存在する

(証明)

($\leftarrow$)

$o(x-a)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ ($\because$ $f=g+o(\dots) \rightleftarrows o(\dots)=f-g$と定義)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}=0$ ($\because$ 付録A $o(\dots)$の定義)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right)=0$

よって任意の $\epsilon>0$ に対して $0<|x-a|<\delta$ ならば

$\displaystyle\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|<\epsilon$

よって $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ ($\because$ 極限の定義)

よって $f(x)$ は $x=a$ で微分可能 ($\because$ 微分の定義)

($\rightarrow$)

$x=a$ で微分可能なので

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ が存在する ($\because$ 微分の定義)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\lim_{x\to a}f'(a)$ ($\because$ 定数の極限)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}f'(a)=0$ ($\because$ 実数の四則の公理)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right)=0$ ($\because$ 差の極限)

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}\right)=0$ ($\because$ 実数の四則の公理)

$\therefore o(x-a)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ ($\because$ 付録A $o(\dots)$の定義)

$\therefore f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$ ($\because$ $f-g=o(\dots) \rightleftarrows f=g+o(\dots)$と定義する)

よって $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$ なる $f'(a)$ が存在する

P.10 問 1.3 (x,y) ≠ (0,0) で f は連続 '25 5.13

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f は連続

(証明)

任意の ϵ に対して

$|(x,y)-(a,b)| < \epsilon$ ならば

$|x-a| < |(x,y)-(a,b)|$　(∵ 三角不等式)
$= \epsilon$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$

よって x は連続

同様に y は連続

よって

xy は連続 (∗1)

x^2 は連続 (∗1)

y^2 は連続 (∗1)

x^2-y^2 は連続 (∗1),(∗2)

x^2+y^2 は連続 (∗2)

$(x,y) \neq (0,0)$ ならば $x^2+y^2 \neq 0$

よって $(x,y) \neq (0,0)$ ならば

$\dfrac{1}{x^2+y^2}$ は連続 (∗3)

よって $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は連続 (∗2)

また $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

よって $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $f(x,y)$ は連続

(∗1) fが連続, gが連続ならばfgは連続

(証明)

(a,b)でf,gが連続ならば

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b), \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = g(a,b)$

$\therefore \lim fg = f(a,b)g(a,b)$ (∵ 積の極限)

よってfgは連続

(∗2) fが連続, gが連続ならば$f+g$は連続

(証明)

(a,b)でf,gが連続ならば

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b),\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=g(a,b)$$

$\therefore\ \lim f+g=f(a,b)+g(a,b)$ ($\because$ 和の極限)

よって$f+g$は連続

(∗3)fが連続かつ$f\neq 0$ならば$\dfrac{1}{f}$は連続

(証明)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b),\ \ f(a,b)\neq 0$$

$\therefore\ \lim \dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{f(a,b)}$ ($\because$ 商の極限)

よって$\dfrac{1}{f}$は連続

P.10 問 1.3 (0,0) で f は連続 '25 3.26

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$(x,y)=(0,0)$ で f は連続

(証明)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

また　$(x,y)\neq(0,0)$で$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$は有界　$(*1)$

よって$\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|<m$なる$m$が存在する

また $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy=0$　(∵ 積の極限)

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$　$(*2)$

よって$f(x,y)$は$(0,0)$で連続

$(*1)$ $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$が有界でないと仮定する

任意の$m>0$に対して$\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|>m$なる$(x,y)$が存在する

$\therefore\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}<-m\ or\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}>m$

$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}>m$とすると$0>(m-1)x^2+(m+1)y^2$

$m=1$とすると$0>2y^2$となり矛盾

$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}<m$とすると$x^2(1-m)-y^2(1-m)<0$

$m=1$とすると$0<0$となり矛盾

よって$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$は有界

$(*2)$ $f(x,y)$が有界$,\lim g=0$ならば$\lim fg=0$

(証明)

$|f|<m$なるmが存在する

任意の$\epsilon>0$に対して、ある$\delta>0$があって

$|(x,y)|<\delta$ならば$|g|<\epsilon$

$\therefore\ |f||g|<|f|\epsilon$

$\epsilon|f|<\epsilon m$なので

$|f||g|<\epsilon m$

$\therefore\ |fg|<\epsilon m$

任意の$\epsilon'>0$に対して$\epsilon'=\epsilon m$とすると

$|(x,y)|<\delta$ならば$|fg|<\epsilon'$

$\therefore\ \lim fg=0$

P.10 問 1.3 (x,y) ≠ (0,0) で fx は存在する '25 5.13

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$(x,y)\neq(0,0)$ で f_x は存在する

(証明)

$(x,y)\neq(0,0)$ とする

このとき $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

x,y は独立とする

$$\begin{aligned}
f_x &= \underset{x\text{で微分}}{f'} \qquad {\color{red}(*1)} \\
&= (xy)'\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)' \quad (\because \text{積の微分}) \\
&= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{(x^2-y^2)'(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} \quad (\because x^2+y^2\neq0\text{なので商の微分より}) \\
&= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{yx^4+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

よって $(x,y)\neq(0,0)$ で f_x は存在する ($\because$ 公理 : f_xは存在 $\rightleftarrows f_x\in\mathbb{R}$)

${\color{red}(*1)}f', f_x$の定義より

$$\underset{x\text{で微分}}{f'(x,y)}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=f_x(x,y)$$

よってf'が存在するならば$f'=f_x$

P.10 問 1.3 (x,y) ≠ (0,0) で fx は連続 '25 5.13

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f_x は連続

(証明)

$(x,y) \neq (0,0)$ とする

$$f_x(x,y) = \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \quad (\text{別頁})$$

$(a,b) \neq (0,0)$ とする

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} = \frac{ba^4 + 4a^2b^3 - b^5}{(a^2+b^2)^2} \quad (\because\ (a^2+b^2)^2 \neq 0 \text{ なので和、積、商の極限、また } \lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a(*1))$$

よって任意の ϵ に対して $|(x,y)-(a,b)| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} - \frac{ba^4 + 4a^2b^3 - b^5}{(a^2+b^2)^2} \right| < \epsilon$$

また $0 < \delta' < |(a,b)|$ とすると

$|(x,y)-(a,b)| < \delta'$ ならば $(x,y) \neq (0,0)$ である

$$\therefore\ f_x(x,y) = \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

よって $|(x,y)-(a,b)| < min(\delta,\delta')$ ならば

$$\left| f_x(x,y) - \frac{ba^4 + 4a^2b^3 - b^5}{(a^2+b^2)^2} \right| < \epsilon$$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_x(x,y) = \frac{ba^4 + 4a^2b^3 - b^5}{(a^2+b^2)^2} = f_x(a,b)$

よって $f_x(x,y)$は$(a,b) \neq (0,0)$ で連続である

$(*1)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$

(証明)

任意のϵに対して

$|(x,y)-(a,b)| < \epsilon$ならば

$|x-a| < |(x,y)-(a,b)| < \epsilon$ ($\because$ 三角不等式)

$\therefore\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$

P.10 問 1.3 (0,0) で fx は連続 '25 3.26

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$(x,y)=(0,0)$ で f_x は連続

(証明)

$(x,y)\neq(0,0)$ で

f_x は 別頁 より

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{yx^4+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} \\ &= y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4} \end{aligned}$$

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界 $(*1)$ かつ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y=0$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}=0$ $(*2)$

また f は $(0,0)$ で連続 （別頁 ）

よって $(0,0)$ で f_x は存在して

$f_x(0,0)=\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=0$ (∵ 本文(1.5), (1.6)より)

よって $(0,0)$ で f_x は連続

$(*1)$ $\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$は有界

(証明)

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$は有界でないと仮定する

任意の$m>0$に対して$\left|\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right|>m$

$\therefore\ \dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}<-m$または$m<\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$である

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}<-m$とすると

$x^4+4x^2y^2-y^4<-m(x^4+2x^2y^2+y^4)$

$\therefore\ (1+m)x^4+(4+2m)x^2y^2+(m-1)y^4<0$

$m=1$とすると$2x^4+6x^2y^2<0$

これは矛盾

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}>m$とすると

$x^4+4x^2y^2-y^4>m(x^4+2x^2y^2+y^4)$

$0>(m-1)x^4+(2m-4)x^2y^2+(m-1)y^4$

$m=2$とすると$0>x^4+y^4$

これは矛盾

よって$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$は有界

$(*2)$ $f(x,y)$は有界, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g = 0$ならば$\lim fg = 0$

(証明)

$|f(x,y)| < m$である

また任意のϵに対して$|(x,y)| < \delta$ならば$|g(x,y)| < \epsilon$

$\therefore\ |f||g| < |f|\epsilon, |f|\epsilon < m\epsilon$

$\therefore\ |f||g| < m\epsilon$

$\therefore\ |fg| < m\epsilon$

任意のϵ'に対して$\epsilon' = m\epsilon$とすると

$|(x,y)| < \delta$ならば$|fg| < \epsilon'$

$\therefore\ \lim fg = 0$

P.10 問 1.3 (x,y) ≠ (0,0) で fy は存在する '25 5.13

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$(x,y)\neq(0,0)$ で f_y は存在する

(証明)

$(x,y)\neq(0,0)$ とする

このとき $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

x,y は独立とする

$$\begin{aligned}
f_y &= \underset{y\text{で微分}}{f'} \qquad \color{red}{(*1)} \\
&= (xy)'\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)' \qquad (\because \text{積の微分}) \\
&= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{(x^2-y^2)'(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} \qquad (\because x^2+y^2\neq 0\text{なので商の微分より}) \\
&= \frac{x^5-4y^2x^3-4xy^4}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

よって $(x,y)\neq(0,0)$ で f_y は存在する　($\because$ 公理 : f_yは存在 $\rightleftarrows f_y\in R$)

$\color{red}{(*1)}$$f', f_y$の定義より

$$\underset{y\text{で微分}}{f'}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=f_y(x,y)$$

よってf'が存在するならば$f'=f_y$

P.10 問 1.3 (x,y) ≠ (0,0) で fy は連続 '25 5.15

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ で f_y は連続

(証明)

$(x,y) \neq (0,0)$ とする

$f_y(x,y) = \dfrac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ (別頁)

$(a,b) \neq (0,0)$ とする

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2+b^2)^2} \quad (\because (a^2+b^2)^2 \neq 0 \text{ なので和、積、商の極限、また } \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b)$$

よって任意の ϵ に対して $|(x,y)-(a,b)| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2+y^2)^2} - \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2+b^2)^2} \right| < \epsilon$$

また $0 < \delta' < |(a,b)|$ とすると

$|(x,y)-(a,b)| < \delta'$ ならば $(x,y) \neq (0,0)$ である

$\therefore f_y(x,y) = \dfrac{x^5 - 4y^2x^3 - 4xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

よって $|(x,y)-(a,b)| < min(\delta, \delta')$ ならば

$$\left| f_y(x,y) - \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2+b^2)^2} \right| < \epsilon$$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_y(x,y) = \frac{a^5 - 4b^2a^3 - 4ab^4}{(a^2+b^2)^2} = f_y(a,b)$

よって $f_y(x,y)$は$(a,b) \neq (0,0)$ で連続である

P.10 問 1.3 (0,0) で fy は連続 '25 3.26

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$(x,y)=(0,0)$ で f_y は連続

(証明)

$(x,y)\neq(0,0)$ で

f_y は 別頁 より

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \frac{x^5-4y^2x^3-4xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ &= x\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4} \end{aligned}$$

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界 $(*1)$ かつ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x=0$

よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}=0$ $(*2)$

また f は $(0,0)$ で連続 (別頁)

よって $(0,0)$ で f_y は存在して

$f_y(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)=0$ ($\because$ 本文(1.5), (1.6)より)

よって $(0,0)$ で f_y は連続

$(*1)$ $\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界

(証明)

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界でないと仮定する

任意の$m>0$に対して $\left|\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right|>m$

$\therefore$ $\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}<-m$ または $m<\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ である

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}<-m$ とすると

$x^4-4x^2y^2-y^4<-m(x^4+2x^2y^2+y^4)$

$\therefore$ $(1+m)x^4+(-4+2m)x^2y^2+(m-1)y^4<0$

$m=1$ とすると $2x^4<0$

これは矛盾

$\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}>m$ とすると

$x^4-4x^2y^2-y^4>m(x^4+2x^2y^2+y^4)$

$0>(m-1)x^4+(2m+4)x^2y^2+(m+1)y^4$

$m=1$ とすると $0>8x^2y^2+2y^4$

これは矛盾

よって $\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ は有界

$(*2) f(x,y)$は有界, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g = 0$ならば$\lim fg = 0$

P.10 問 1.3 (0,0) で fxy は不連続 '25 4.1

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$(x,y)=(0,0)$ で f_{xy} は不連続

(証明)

$(x,y)\neq(0,0)$ とする

$$f_x=\frac{yx^4+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} \quad (\text{別頁})$$

よって

$$\begin{aligned} f_{xy}&=\frac{(yx^4+4x^2y^3-y^5)'(x^2+y^2)^2-(yx^4+4x^2y^3-y^5)((x^2+y^2)^2)'}{(x^2+y^2)^4} \quad (*1) \\ &=\frac{x^8+10x^6y^2-10x^2y^6-y^8}{(x^2+y^2)^4} \end{aligned}$$

$(*1)$ x,y は独立なので $f_{xy}=\underset{y\text{で微分}}{f_x'}$
また $(x^2+y^2)^2\neq 0$ なので和、積、商の微分公式より

経路 $\begin{cases} x=0 \\ y=y \end{cases}$ に沿った $(x,y)\to(0,0)$ の極限は $\displaystyle\lim_{y\to 0} f_{xy}(0,y)=\lim_{y\to 0} -1=-1$

経路 $\begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases}$ に沿った $(x,y)\to(0,0)$ の極限は $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_{xy}(x,0)=\lim_{x\to 0} 1=1$

経路によって極限が異なるので f_{xy} の $(x,y)\to(0,0)$ の極限は存在しない

よって $(0,0)$ で f_{xy} は連続ではない

P.11 数学の定理 1.1 f(x1,..,xm)-f(a1,..,xm)-(x1-a1)fx1(a)=o(|x-a|) '25 4.6

fは$\vec{a}$ の近傍で連続的微分可能ならば

$\vec{x} \to \vec{a}$ で $f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1) f_{x_1}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$ である

(証明)

$x_1, \dots, x_m$ は独立で fは$\vec{a}$ の近傍で連続的微分可能なので

$(a_1, \dots, x_m)$ が $\vec{a}$ の近傍ならば

f は区間 $[a_1, x_1]$ で連続､区間 (a_1, x_1) で x_1 で微分可能

よって平均値の定理より

$\dfrac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m)}{x_1 - a_1} = f'(a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m),\ 0 < k < 1$ なる $k(x_2, \dots, x_m)$ が存在する

$x_1, \dots, x_m$ は独立なので $f_{x_1} = \underset{x_1\text{で微分}}{f'}$

よって $\dfrac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m)}{x_1 - a_1} = f_{x_1}(a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m) \dots (1)$

また f_{x_1} は $\vec{a}$ で連続なので

$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f_{x_1}(\vec{x}) = f_{x_1}(\vec{a})$

よって任意の δ に対して

$|\vec{x} - \vec{a}| < \epsilon$ ならば $|f_{x_1}(\vec{x}) - f_{x_1}(\vec{a})| < \delta$ なる ϵ が存在する

$\vec{x}' = (a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m)$ とする

$$\begin{aligned} |\vec{x}' - \vec{a}| &= \sqrt{(a_1 + k(x_1 - a_1) - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} \\ &= \sqrt{k^2(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} \\ &< |\vec{x} - \vec{a}| \quad (*1) \end{aligned}$$

$(*1)$ $k = k(x_2, \dots, x_m)$であるが
$0 < k < 1$なので
$k^2(x_1 - a_1)^2 < (x_1 - a_1)^2$

よって $|\vec{x}' - \vec{a}| < \epsilon$ なので $|f_{x_1}(\vec{x}') - f_{x_1}(\vec{a})| < \delta$

$\therefore \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f_{x_1}(\vec{x}') = f_{x_1}(\vec{a})$

$\therefore \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f_{x_1}(a_1 + k(x_1 - a_1), \dots, x_m) = f_{x_1}(\vec{a})$

$\therefore \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \dfrac{f_{x_1}(\vec{x}) - f_{x_1}(a_1, \dots, x_m)}{x_1 - a_1} = f_{x_1}(\vec{a}) \quad (\because (1))$

$\therefore \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \dfrac{f_{x_1}(\vec{x}) - f_{x_1}(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1) f_{x_1}(\vec{a})}{x_1 - a_1} = 0\ (\because \lim c = c,$ 和の極限$)$

よって任意の δ に対して

$|\vec{x} - \vec{a}| < \epsilon$ ならば $\left| \dfrac{f(\vec{x}) - f(a_1, \dots, x_m) - (x_1 - a_1) f_{x_1}(\vec{a})}{x_1 - a_1} \right| < \delta$

また $|\vec{x} - \vec{a}| \geq |x_1 - a_1|$ $(\because$ 三角不等式$)$ なので

$$\left|\frac{f(\vec{x})-f(a_1,\dots,x_m)-(x_1-a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{|\vec{x}-\vec{a}|}\right| \leq \left|\frac{f(\vec{x})-f(a_1,\dots,x_m)-(x_1-a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{x_1-a_1}\right| < \delta$$

よって

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\left|\frac{f(\vec{x})-f(a_1,\dots,x_m)-(x_1-a_1)f_{x_1}(\vec{a})}{|\vec{x}-\vec{a}|}\right| = 0$$

よって $\vec{x}\to\vec{a}$ で

$$f(\vec{x})-f(a_1,\dots,x_m)-(x_1-a_1)f_{x_1}(\vec{a}) = o(|\vec{x}-\vec{a}|)$$

(注) $\displaystyle\lim_{x_1\to a_1}\frac{f(\vec{x})-f(a_1,..,x_m)}{(x_1-a_1)} = f_{x_1}(a_1,..,x_m)$ $(*)$

から始めると $\displaystyle\lim_{x_1\to a_1}$ を $\displaystyle\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}$ に変換できなくて失敗する

平均値の定理を利用するとうまく $\displaystyle\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}$ を導ける

平均値の定理は$\vec{a}$近傍でのfの連続性と微分可能性を利用できるが

$(*)$から始めると$\vec{a}$での連続性と微分可能性しか

利用できないからだと思われる

P.11 数学の定理 1.1 f(a1,x2..xm)-f(a1,a2..xm)-(x2-a2)fx2(a)=o(|x-a|) '25 5.17

fは$\vec{a}$ の近傍で連続的微分可能ならば

$\vec{x} \to \vec{a}$ で $f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$ である

(証明)

x_1 の場合 (別頁) と同様に

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(x_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0$$

である

$$g(x_1, \dots, x_m) = \frac{f(\vec{x}) - f(x_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|}$$

とする

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} |g(x_1, \dots, x_m)| = 0$$

なので

任意の $\epsilon > 0$ に対して $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ ならば $|g(x_1, \dots, x_m)| < \epsilon$ である

ここで

$$\begin{aligned} |(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}| &\leq |\vec{x} - \vec{a}| \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \delta \end{aligned}$$

なので $|g(a_1, x_2, \dots, x_m)| < \epsilon$ である

$$\therefore \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} |g(a_1, x_2, \dots, x_m)| = 0$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a})}{|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}|} \right| = 0$$

ここで $|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}| \leq |\vec{x} - \vec{a}| \quad (\because$ 三角不等式$)$ なので

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| \\ &\quad \leq \left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a})}{|(a_1, x_2, \dots, x_m) - \vec{a}|} \right| \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left| \frac{f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (*1)$$

$(*1) |f| \leq |g|, \lim g = 0$ならば$\lim f = 0)$

$$\therefore f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, x_m) - (x_2 - a_2) f_{x_2}(\vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$$

P.11 数学の定理 1.1 f(x)=f(a)+ ∇ f(a)(x-a)+o(|x-a|) '25 4.6

fは$\vec{a}$ の近傍で連続的微分可能ならば

$\vec{x} \to \vec{a}$ で $f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + o(|\vec{x} - \vec{a}|)$ である

(証明)

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left| \frac{f(x_1,\dots,x_m) - f(a_1,\dots,x_m) - f_{x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1)}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (\text{別頁})$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left| \frac{f(a_1,\dots,x_m) - f(a_1,a_2,\dots,x_m) - f_{x_2}(\vec{a})(x_2 - a_2)}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (\text{別頁})$$

$$\vdots$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left| \frac{f(a_1,\dots,a_{m-1},x_m) - f(a_1,\dots,a_m) - f_{x_m}(\vec{a})(x_m - a_m)}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (\because\ x_1,x_2 \text{ の場合と同様})$$

足し合わせて

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - f_{x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) - f_{x_2}(\vec{a})(x_2 - a_2) - \cdots - f_{x_m}(\vec{a})(x_m - a_m)}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0 \quad (*1)$$

$(*1)$ $\lim|f| = 0, \lim|g| = 0$ならば $\lim|f| + |g| = 0$
$|f+g| \le |f| + |g|$ (三角不等式)
なので $\lim|f+g| = 0$

ここで

$\vec{\nabla} f(\vec{a}) = (f_{x_1}(\vec{a}),\dots,f_{x_m}(\vec{a}))$
$(\vec{x} - \vec{a}) = (x_1 - a_1,\dots,x_m - a_m)$
$\vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = f_{x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \cdots + f_{x_m}(\vec{a})(x_m - a_m)$

なので

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left| \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right| = 0$$

$\therefore\ f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = o(|\vec{x} - \vec{a}|)$ ($\because$ 付録Aの$o(\dots)$の定義)

$\therefore\ f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + o(|\vec{x} - \vec{a}|)$ ($\because\ f + h = o(\dots) \rightleftarrows f = -h + o(\dots)$と定義する)

P.12 数学の定理 1.2 n 階までの導関数は微分の順序によらない'25 4.8

ある開領域で $f(x_1,\cdots,x_m)$ が C^∞ 級ならば

その領域で n 階までの偏導関数は微分の順序によらない

(証明)

f の 2 階以上 n 階以下の偏導関数を考える

$f_{x_{p_1}\dots x_{p_i}x_{p_j}\dots x_{p_k}}$

f は C^∞ 級なので

$f_{x_{p_1}\dots x_{p_i}x_{p_j}}$ は存在し連続である

また $f_{x_{p_1}\dots x_{p_j}x_{p_i}}$ も存在し連続である

よって $f_{x_{p_1}\dots x_{p_i}x_{p_j}} = f_{x_{p_1}\dots x_{p_j}x_{p_i}}$ $(\because f_{xy} = f_{yx}$ 別頁)

よって $f_{x_{p_1}\dots x_{p_i}x_{p_j}\dots x_{p_k}} = f_{x_{p_1}\dots x_{p_j}x_{p_i}\dots x_{p_k}}$ (1)

$p_1,\dots,p_k$ を昇順に並べたリストを $q_1,\dots,q_k$ とする

(1) より x_{q_1} による偏微分を左隣りの変数の偏微分との入れ換えをくりかえして

$f_{x_{p_1}\dots x_{p_k}} = f_{x_{q_1}\dots x_{p_k}}$ とする

x_{q_1} と同様に x_{q_2} について

$f_{x_{p_1}\dots x_{p_k}} = f_{x_{q_1}x_{q_2}\dots x_{p_k}}$ とする

これを繰り返して

$f_{x_{p_1}\dots x_{p_k}} = f_{x_{q_1}\dots x_{q_k}}$ となる

$r_1,\dots,r_2$ は $p_1,\dots,p_2$ を任意に並べ替えたリストとする。上と同様に

$f_{x_{r_1}\dots x_{r_k}} = f_{x_{q_1}\dots x_{q_k}}$ となる

よって $f_{x_{r_1}\dots x_{r_k}} = f_{x_{p_1}\dots x_{p_k}}$ となる

よって n 階までの偏導関数は微分の順序によらない

P.12 数学の定理 1.2 fxy=fyx '25 4,8

(2 変数の場合)

ある開領域で f_{xy}, f_{yx} が連続ならば $f_{xy} = f_{yx}$ である

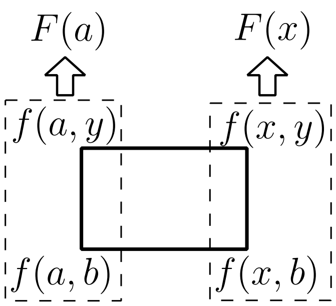
(証明)

領域内の任意の点 $(a, b), (x, y)$ とする

$\Delta(x, y) = (f(x, y) - f(x, b)) - (f(a, y) - f(a, b))$ とする

$F(x) = f(x, y) - f(x, b)$ とすると

$\Delta(x, y) = F(x) - F(a)$



領域内で f は連続なので xの区間$[a, x]$ で $f(x, y), f(x, b)$ は連続

よって $F(x)$ は xの区間$[a, x]$ で連続 $(*1)$

領域内で f は偏微分可能なので xの区間(a, x) で $f(x, y), f(x, b)$ は x で微分可能

よって $F(x)$ は xの区間(a, x) で x で微分可能 $(*2)$

よって平均値の定理より

$$\begin{aligned}\Delta(x, y) &= F(x) - F(a)\\ &= F'(a + (x-a)\theta_1)(x - a),\ \ 0 < \theta_1 < 1\\ &= (f_x(a + (x-a)\theta_1, y) - f_x(a + (x-a)\theta_1, b))(x - a) \quad (*3)\end{aligned}$$

$(*1)f, g$が連続ならば$f + g$も連続
$(*2)f, g$が微分可能ならば$f + g$も微分可能
$(*3)f_{xy}$が存在するならばx, yは独立
x, yが独立ならば$f_x = \underset{x\text{で微分}}{f'}$

領域内で f_x は連続かつ y で偏微分可能 ($\because$ f_{xy}が存在するので)

よって $f_x(a + (x-a)\theta_1, y)$ は yの区間$[b, y]$ で連続かつ 区間(b, y) で y で微分可能

よって平均値の定理より

$$\begin{aligned}&f_x(a + (x-a)\theta_1, y) - f_x(a + (x-a)\theta_1, b)\\ &\quad = f_{xy}(a + (x-a)\theta_1, b + (y-b)\theta_2)(x - b),\ \ 0 < \theta_2 < 1 \quad (*4)\end{aligned}$$

$(*4)x, y$は独立なので

$$f_{xy} = \underset{y\text{で微分}}{f'_x}$$

よって

$\Delta(x, y) = f_{xy}(a + (x - a)\theta_1, b + (y - b)\theta_2)(x - a)(x - b)$

$x' = a + (x - a)\theta_1$
$y' = b + (y - b)\theta_2$

とすると

$$\frac{\Delta(x, y)}{(x - a)(x - b)} = f_{xy}(x', y')$$

f_{xy} は連続なので

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{xy}(x, y) = f_{xy}(a, b)$$

よって任意の ϵ に対して

$|(x, y) - (a, b)| < \delta$ ならば $|f_{xy}(x, y) - f_{xy}(a, b)| < \epsilon$

また

$$\begin{aligned} |(x', y') - (a, b)| &= \sqrt{(a + (x - a)\theta_1 - a)^2 + (b + (y - b)\theta_2 - b)^2} \\ &= \sqrt{(x - a)^2\theta_1^2 + (y - b)^2\theta_2^2} \\ &< |(x, y) - (a, b)| \quad (\because \ 0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta_2 < 1) \end{aligned}$$

よって $|(x', y') - (a, b)| < \delta$ なので $|f_{xy}(x', y') - f_{xy}(a, b)| < \epsilon$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{xy}(x', y') = f_{xy}(a, b)$

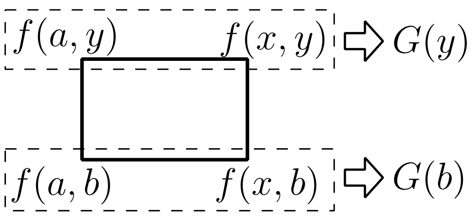
よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\Delta(x, y)}{(x - a)(y - b)} = f_{xy}(a, b) \quad (1)$

$\Delta(x, y)$ の右辺の順番をかえて

$\Delta(x, y) = (f(x, y) - f(a, y)) - (f(x, b) - f(a, b))$ とする

$G(y) = f(x, y) - f(a, y)$ とすると

$\Delta(x, y) = G(y) - G(b)$



f は領域で連続なので 区間$[b, y]$ で $f(x, y), f(a, y)$ は連続

よって $G(y)$ は 区間$[b, y]$ で連続 ($\because$ f, gが連続ならば$f + g$は連続)

f は領域で偏微分可能なので 区間(b, y) で $f(x, y), f(a, y)$ は y で微分可能

($\because$ x, yが独立なので$f_y = \underset{y\text{で微分}}{f'}$)

よって $G(y)$ は 区間(b,y) で y で微分可能 ($\because\ (f+g)' = f' + g'$)

よって平均値の定理より

$$
\begin{aligned}
\Delta(x,y) &= G'(b+(y-b)\theta_3)(y-b),\ 0<\theta_3<1 \\
&= (f_y(x,b+(y-b)\theta_3) - f_y(a,b+(y-b)\theta_3))(y-b) \quad (\because\ f_y = \underset{y\text{で微分}}{f'})
\end{aligned}
$$

領域内で f_y は連続かつ x で偏微分可能なので

$f_y(x,b+(y-b)\theta_3)$ は 区間$[a,x]$ で連続かつ 区間(a,x) で x で微分可能 ($\because\ x,y$が独立ならば$f_{yx} = \underset{x\text{で微分}}{f'_y}$)

よって平均値の定理より

$$\Delta(x,y) = f_{yx}(a+(x-a)\theta_4, b+(y-b)\theta_3)(y-b)(x-a),\ 0<\theta_4<1$$

$x' = a+(x-a)\theta_4$
$y' = b+(y-b)\theta_3$
とすると

$$\Delta(x,y) = f_{yx}(x',y')(y-b)(x-a)$$

よって $\dfrac{\Delta(x,y)}{(y-b)(x-a)} = f_{yx}(x',y')$

f_{yx} は連続なので

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{yx}(x,y) = f_{yx}(a,b)$$

よって任意の ϵ に対して

$|(x,y)-(a,b)| < \delta$ ならば $|f_{yx}(x,y) - f_{yx}(a,b)| < \epsilon$

また

$$
\begin{aligned}
|(x',y')-(a,b)| &= \sqrt{(a+(x-a)\theta_4 - a)^2 + (b+(y-b)\theta_3 - b)^2} \\
&= \sqrt{(x-a)^2\theta_4^2 + (y-b)^2\theta_3^2} \\
&< |(x,y)-(a,b)| \quad (\because\ \ 0<\theta_3<1, 0<\theta_4<1)
\end{aligned}
$$

よって $|(x',y')-(a,b)| < \delta$ なので

$$|f_{yx}(x',y') - f_{yx}(a,b)| < \epsilon$$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{yx}(x',y') = f_{yx}(a,b)$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\Delta(x,y)}{(y-b)(x-a)} = f_{yx}(a,b) \quad (2)$

よって $(1),(2)$ より

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

a,b は任意なので

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

P.12 補足 x ≠ 0 で f(x) は連続 '25 4.23

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$で$f(x)$は連続

(証明)

xは連続　$(*1)$

よって $x \neq 0$ ならば $\frac{1}{x}$は連続　$(*2)$

よって $x \neq 0$ ならば $\frac{1}{x^2}$は連続　$(*3)$

よって $x \neq 0$ ならば $-\frac{1}{x^2}$は連続　$(*3)$

よって $x \neq 0$ ならば $e^{-\frac{1}{x^2}}$ は連続　$(*4)$

$0 < |x-a| < |a|$ ならば $x \neq 0$

$(\because\ x = 0$ とすると $|a| < |a|$ となり矛盾$)$

$e^{-\frac{1}{x^2}}$ は $x \neq 0$ で連続なので

任意の ϵ に対して

$0 < |x-a| < \delta$ ならば $\left|e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{1}{a^2}}\right| < \epsilon$

よって $0 < |x-a| < min(|a|, \delta)$ ならば

$x \neq 0$ なので $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

また $\left|e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{1}{a^2}}\right| < \epsilon$

$\therefore\ |f(x) - f(a)| < \epsilon$

よって $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

よって $x \neq 0$ ならば $f(x)$ は連続

$(*1)$ $0 < |x-a| < \epsilon$ ならば

$|x-a| < \epsilon$

$\therefore\ \lim_{x \to a} x = a$

$(*2)$ $\lim_{x \to a} f(x) = F, F \neq 0$ ならば $\lim_{x \to a} \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$

(証明)

任意の ϵ に対し $0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - F| < \epsilon \cdots (1)$

$\epsilon = \frac{|F|}{2}$ とすると

$0 < |x-a| < \delta'$ ならば $|f(x) - F| < \frac{|F|}{2}$

$\therefore\ |F| - |f(x)| < \frac{|F|}{2}$ $(\because$ 三角不等式 $|F| - |f(x)| \leq |F - f(x)|)$

$\therefore\ |f(x)| > \frac{|F|}{2}$

$\therefore\ \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|F|} \cdots (2)$

($\because$ $F \neq 0$ なので$|F| > 0, 0 < a < b$ ならば $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$)

任意の ϵ' に対して $\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon' F^2$ とする

$0 < |x-a| < min(\delta, \delta')$ ならば

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F}\right| = \frac{|f(x)-F|}{|f(x)||F|} < \frac{2\epsilon}{F^2} = \epsilon' \ (\because \ (1),(2))$$

よって $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{F}$

(∗3) $\lim_{x \to a} f(x) = F, \lim_{x \to a} g(x) = G$ ならば $\lim_{x \to a} fg = FG$

(証明)

任意の ϵ に対して $0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f - F| < \epsilon, |g - G| < \epsilon \cdots (1)$

$\epsilon = |F|$ とすると

$0 < |x-a| < \delta'$ ならば $|f - F| < |F|$

$\therefore \ |f| - |F| < |F|$ ($\because$ 三角不等式 $|a| - |b| \leq |a - b|$)

$\therefore \ |f| < 2|F| \cdots (2)$

任意の ϵ' に対して $\epsilon = \frac{\epsilon'}{|G| + 2|F|}$ とする

$0 < |x-a| < min(\delta, \delta')$ ならば

$$\begin{aligned}|fg - FG| &= |fg - fG + fG - FG| \\ &= |f(g-G) + G(f-F)| \\ &\leq |f(g-G)| + |G(f-F)| \ (\because \ \text{三角不等式} \ |a+b| < |a| + |b|) \\ &= |f||g-G| + |G||f-F| \\ &< 2|F|\epsilon + \epsilon|G| \ (\because \ (1)(2)) \\ &= \epsilon(2|F| + |G|) = \epsilon'\end{aligned}$$

よって $\lim_{x \to a} fg = FG$

(∗4)a で $f(x)$ は連続, $f(a)$ で $g(x)$ は連続ならば a で $g(f(x))$ は連続

(証明)

$\lim_{x \to f(a)} g(x) = g(f(a))$ なので

任意の ϵ に対して $0 < |x - f(x)| < \delta$ ならば $|g(x) - g(f(a))| < \epsilon$

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ なので

$0 < |x-a| < \delta'$ ならば $|f(x) - f(a)| < \delta$

よって $0 < |x-a| < \delta'$ ならば $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$

よって $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a))$

よって a で $g(f(x))$ は連続

P.12 補足 x=0 で f(x) は連続 '25 4.23

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$で$f(x)$は連続

(証明)

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty \quad (*1)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (*4)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because x \neq 0) \\ &= 0 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

よって$x = 0$で$f(x)$は連続

$$\begin{aligned} (*1) e^{\frac{1}{x^2}} &= 1 + \left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}{2} + \cdots \quad (\because e^x \text{の定義}) \\ &> 1 + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \infty \quad (*2)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty \quad (*3)$$

$(*2)$任意の$\epsilon > 1$に対して$0 < |x| < \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon - 1}}$ならば

$$x^2 < \frac{1}{\epsilon - 1} \quad (\because 0 < a < b \text{ならば} a^2 < b^2)$$

$$\frac{1}{x^2} > \epsilon - 1 \quad (\because 0 < a < b \text{ならば} \frac{1}{a} > \frac{1}{b})$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{x^2} > \epsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} 1 + \frac{1}{x^2} = \infty$$

$(*3)$ $g(x) > f(x), \lim_{x\to a} f(x) = \infty$ならば $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

(証明)

任意のϵに対して$0 < |x - a| < \delta$ならば$f(x) > \epsilon$

$$\therefore g(x) > \epsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

$(*4)$ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ならば $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

(証明)

任意のϵに対して$0 < |x - a| < \delta$ならば$f(x) > \epsilon$

$$\therefore \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{\epsilon} \ (\because 0 < a < b \text{ならば} \frac{1}{a} > \frac{1}{b})$$

任意のϵ'に対して$\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon'}$とする

P.12 補足 x ≠ 0 で C ∞ 級 '25 4.25

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$でC^∞級

(証明)

$x \neq 0$ とする

$$\begin{aligned}
f^{(1)} &= \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \\
&= \left(-\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (*1), (*2) \\
&= -\left(\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because \text{積の微分}) \\
&= -(-2)x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (*3) \\
&= 2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \cdots (1)
\end{aligned}$$

である。

$n > 0$ で

$$f^{(n)} = \left(\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu x^{-\nu}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

と仮定する

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu x^{-\nu}\right)' &= \sum_{\nu=1}^{m} k_\nu (x^{-\nu})' \quad (\because \text{和, 積の微分}) \\
&= \sum_{\nu=1}^{m} (-\nu k_\nu) x^{-\nu-1} \quad (*3) \cdots (2)
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)} &= \left(\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu x^{-\nu}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + \left(\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu x^{-\nu}\right) \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \quad (\because \text{積の微分}) \\
&= \sum_{\nu=1}^{m} (-\nu k_\nu) x^{-\nu-1} e^{-\frac{1}{x^2}} + \sum_{\nu=1}^{m} k_\nu x^{-\nu} 2x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\because (1), (2)) \\
&= \left(\sum_{\nu=1}^{m} -\nu k_\nu x^{-\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{m} 2k_\nu x^{-\nu-3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \left(\sum_{i=2}^{m+1} -(i-1)k_{i-1} x^{-i} + \sum_{i=4}^{m+3} 2k_{i-3} x^{-i}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \Bigg((-1)k_1 x^{-2} + (-2)k_2 x^{-3} + \sum_{i=4}^{m+1} -(i-1)k_{i-1} x^{-i} \\
&\qquad + \sum_{i=4}^{m+1} 2k_{i-3} x^{-i} + 2k_{m-1} x^{-(m+1)} + 2k_m x^{-(m+3)}\Bigg) e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \Bigg((-1)k_1 x^{-2} + (-2)k_2 x^{-3} + \sum_{i=4}^{m+1} (-(i-1)k_{i-1} + 2k_{i-3}) x^{-i} \\
&\qquad + 2k_{m-1} x^{-(m+1)} + 2k_m x^{-(m+3)}\Bigg) e^{-\frac{1}{x^2}}
\end{aligned}$$

ここで

$$p_i = \begin{cases} 0 & (i=1) \\ -(i-1)k_{i-1} & (i=2,3) \\ -(i-1)k_{i-1} + 2k_{i-3} & (i=4,\ldots,m+1) \\ 2k_{i-3} & (i=m+2, m+3) \end{cases}$$

$s = m+3$

とする

$$f^{(n+1)} = \left(\sum_{i=1}^{s} p_i x^{-i}\right) e^{-1/x^2}$$

よって、$x \neq 0, n > 0$ において

$$f^{(n)} = \left(\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu x^{-\nu}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

である。

すべての n で $f^{(n)}$ は存在するので f は C^∞ 級である

$(*1)$合成関数の微分

$g'(x), f'(g(x))$が存在するなら

$f(g(x))' = g'(x)f'(g(x))$

$(*2)(e^x)' = e^x$

(証明)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ (\because\ e^x\text{の定義})$$

右辺の項別微分を考える

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)' = (1)' + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} \ (*2.1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ (*2.2)$$

$= e^x\ (\because\ e^x$の定義)

ここで任意のxに対して

$-A \leq x \leq A, A > 0$なる区間を考える

$\left|\frac{x^\nu}{\nu!}\right| \leq \frac{A^\nu}{\nu!}, \nu = 0,1,2,\ldots$ である

また$\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu}{\nu!} = e^a$ $(\because\ e^a$の定義)

なので$\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$は区間$[-A, A]$で一様収束する

($\because$ 定理：ある区間で$|a_n(x)| \leq C_n$なる定数C_nがあって

$\displaystyle\sum^{\infty} C_n$が収束するならば$\displaystyle\sum^{\infty} a_n$は一様収束する)

よって $(e^x)' = e^x$

($\because$ 定理：無限級数が収束し各項の導関数が連続で項別微分が

一様収束するならば無限級数の導関数は項別微分に等しい)

$(*2.1)(1)' = 0$

$n > 0$ならば$x^n = nx^{n-1}$ $(*3)$

$(kf(x))' = kf'(x)$ ($\because$ 積の微分)

(*2.2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(*3)$x \neq 0, n > 0$ならば

$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$

(証明)

$(x^n)' = -nx^{-n-1}$と仮定する

$(x^{n+1})' = (xx^n)' = (x)'x^n + x(x^n)'$ (∵ 積の微分)

$= x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n$

$(x)' = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$

よって$(x^n)' = nx^{n-1}, n = 1, 2, \ldots$

よって$x \neq 0, n = 1, 2, \ldots$ならば

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1'x^n - 1(x^n)'}{x^{2n}} \text{ (∵ 商の微分)}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

P.12 補足 x=0 で C ∞ 級 '25 5.20

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ で C^∞ 級

(証明)

$x \neq 0$ で

$f^{(n)}$ は 別頁 より

$$f^{(n)} = \left(\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu x^{-\nu} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{m} k_\nu x^{-\nu} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$\lim_{x \to 0} x^{-\nu} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$　(∗1) なので

$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$　(∵ 和、積の極限)

$x = 0$ で f は連続 (∵ 別紙)

かつ $\lim_{x \to 0} f^{(1)}(x) = 0$ なので

$f^{(1)}(0) = 0$ (∵ $p.7, (1.5), (1.6)$ aで連続, $\lim_{x \to a} f'(x)$ が存在するなら $\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a)$)

$f^{(n)}(0) = 0$ と仮定する

$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0 = f^{(n)}(0)$

よって 0 で $f^{(n)}(x)$ は連続

かつ $\lim_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$ なので

$f^{(n+1)}(0) = 0$　(∵ $p.7, (1,5), (1.6)$)

よって任意の n で $f^{(n)}(0) = 0$

よって $x = 0$ で f は C^∞ 級

(∗1)$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + y + \frac{1}{2} y^2 + ...$

なので

$e^{\frac{1}{x^2}} = 1 + x^{-2} + \frac{1}{2} x^{-4} + ...$

$2n\nu \geq 2(\mathrm{n}-1)$とする

$|x^\nu e^{\frac{1}{x^2}}||\mathrm{x}^\nu|(1 + \mathrm{x}^{-2} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{n}!}\mathrm{x}^{-2\mathrm{n}})$

$= |x^\nu| + |x^{\nu-2}| + \cdots + \frac{1}{n!}|v^{\nu-2n}|$

$\nu, \nu-2, ..., \nu-2(n-1) \geq 0$なので

$\lim |x^\nu| = 0, ..., \lim |x^{\nu-2(n-1)}| = 0 \ or \ 1$

$\nu - 2n < 0$なので

$\lim_{x \to 0} |x^{\nu-2n}| = \infty$

$$\therefore \lim_{x\to 0} |x^\nu| + \cdots + \frac{1}{n!}|x^{\nu-2n}| = \infty \ (\because \text{和の極限})$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x^\nu| + \cdots + \frac{1}{n!}|x^{\nu-2n}|} = 0$$

$$\frac{1}{|x^\nu e^{\frac{1}{x^2}}|} < \frac{1}{|x^\nu| + \cdots + \frac{1}{n!}|x^{\nu-2n}|}$$なので

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x^\nu e^{\frac{1}{x^2}}|} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^\nu e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

P.12 補足 x=0 で C ∞ 級であるが解析的でない '25 5.21

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ で C^∞ 級であるが解析的でない

(証明)

$x = 0$ での $f(x)$ のテーラー級数を $T(x)$ とする

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$f^{(n)}(0) = 0$ (∵ 別紙) なので $T(0) = 0$

$a \neq 0$ とする $f(a) \neq 0, T(a) = 0$ なので

$T(a) \neq f(a)$

よって $x \neq 0$ ならば $f(x) \neq T(x)$

よって $x = 0$ の近傍で f はテーラー級数と一致しない

よって $x = 0$ の近傍で f はべき級数で表すことができない

(∵ 定理: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ はテーラー級数である)

よって $x = 0$ の近傍で f は解析的でない

P.12 補足 収束するテーラー級数の部分和が $f(x)$ の近似にならない例 '25 6.9

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ を中心とした $f(x)$ のテーラー級数 $T(x)$ とする

$T(x)$ の収束半径は ∞ よって任意の x でテーラー級数は収束する。

このとき、$x \neq 0$ でテーラー級数の部分和の次数をいくら上げても部分和が $f(x)$ の近づくことはない

(証明)

$x = 0$ での $f(x)$ のテーラー級数を $T(x)$ とする

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$f^{(n)}(0) = 0$　(∵ 別紙) なので $T(x) = 0$

すべての x について $T(x)$ は収束するので、収束半径は $R_f = \infty$

$|1| < R_f$ なので $T(1)$ は収束して $T(1) = 0$

また $f(1) = e^{-\frac{1}{1^2}} = e^{-1}$

よって $T(1)$ の部分和の次数を上げたとき部分和が近づくのは 0 である。e^{-1} には近づかない

(補足)

収束半径内にあることは、テーラー級数 $T(x)$ が元の関数 $f(x)$ に一致することの十分条件ではない

テーラーの定理の剰余項が 0 に近づくならばテーラー級数と関数は一致する

この場合、剰余項は

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} 1^n,\ 0 < c < 1$$

$$f^{(1)}(x) = 2x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f^{(n)}(x) = \Big(\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu x^{-\nu} \Big) e^{-\frac{1}{x^2}}\ (∵ 別紙)$$

となる。

$n \to 0$ で $R_n \not\to 0$ の筈であるが、証明？

P.12 補足 x ≠ 0 で f(x) は解析的 '25 6.4

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$ で $f(x)$ は解析的

(証明)

x は a を中心とするべき級数で表される $(*1)$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad a_n = \begin{cases} a & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ 0 & (n>1) \end{cases}$$

収束半径は ∞

$$(*1) F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, a_n = \begin{cases} a & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ 0 & (n>1) \end{cases} \text{とする}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0(x-a)^0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + \ldots \\ &= a + (x-a) + 0 \\ &= x \end{aligned}$$

任意のxで収束するので、収束半径は∞

$\dfrac{1}{x}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数で表される $(*2)$

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n, \quad b_n = (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}}$$

収束半径は $|a|$

$(*2) a \neq 0$とする

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$とする。収束すると仮定する

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, a_n = \begin{cases} a & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ 0 & (n>1) \end{cases} \text{とする}$$

$1 = xG(x)$とする

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Big) (x-a)^n (\because \text{コーシー積より}) \\ &= \sum_{k=0}^{0} a_k b_{0-k} (x-a)^0 + \sum_{k=0}^{1} a_k b_{1-k} (x-a)^1 + \sum_{k=0}^{2} a_k b_{2-k} (x-a)^2 + \ldots \end{aligned}$$

$1 = \sum_{k=0}^{0} a_k b_{0-k}$と仮定する $1 = a_0 b_0 \therefore b_0 = \dfrac{1}{a_0} = \dfrac{1}{a}$

$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n>0)$と仮定する

$$0 = a_0 b_0 + a_1 b_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} a_k b_{n-k}$$

$\therefore 0 = ab_n + b_{n-1} + 0$ $(\because a_0 = a, a_1 = 1, a_k = 0 (k>1))$

$\therefore b_n = -\frac{1}{a}b_{n-1}$

$\therefore b_n = \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a}\right)^n = (-1)^n\frac{1}{a^{n+1}}$

これを踏まえて

$a \neq 0$とする

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n, b_n = (-1)^n\frac{1}{a^{n+1}}$とする

$G(x)$は初項$\frac{1}{a}$、公比$\frac{-1}{a}(x-a)$の等比級数

よって$\left|\frac{-1}{a}(x-a)\right| < 1$即ち$|x-a| < |a|$ならば収束する

よって$|x-a| < |a|$ならば

$G(x) = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{-1}{a}(x-a)} = \frac{1}{a+(x-a)} = \frac{1}{x}$ ($\because$ 等比級数の公式)

また等比級数なので$\left|\frac{-1}{a}(x-a)\right| > 1$即ち$|x-a| > |a|$ならば収束しない

よって収束半径は$|a|$

$\frac{1}{x^2}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数で表される (*3)

$|x-a| < |a|$ ならば

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \quad c_n = (-1)^n\frac{n+1}{a^{n+2}}$$

級数は絶対収束する。

(*3)$|x-a| < |a|$とする

$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n, b_n = (-1)^n\frac{1}{a^{n+1}}$とする

級数は絶対収束する。よって

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} &= \frac{1}{x}\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k b_{n-k}(x-a)^{n-k} \ldots (1) \left(\begin{array}{l}\because \text{絶対収束する級数の積は} \\ \text{コーシー積に等しい} \\ \text{またコーシー積は絶対収束する}\end{array}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}\right)(x-a)^n \ (\because \text{有限級数の線型性}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{a^{k+1}}(-1)^{n-k}\frac{1}{a^{n-k+1}}\right)(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\frac{1}{a^{n+1}}\right)(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{1}{a^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}1\right)(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a^{n+2}}(n+1)(x-a)^n
\end{aligned}$$

絶対収束する級数の積をあらわすコーシー積は絶対収束する

よって(1)よりこの級数は絶対収束する

(もしくは、収束するべき級数は絶対収束するのでこの級数は絶対収束する)

$-\frac{1}{x^2}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数で表される (*4)

$|x-a| < |a|$ ならば

$$-\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x-a)^n, \quad s_n = (-1)^{n+1}\frac{n+1}{a^{n+2}}$$

級数は絶対収束する。

(*4) $|x-a|<|a|$とする

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{a^{n+2}}(x-a)^n$$

よって

$$-\frac{1}{x^2}=(-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{a^{n+2}}(x-a)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{a^{n+2}}(x-a)^n \ (\because \text{絶対収束する級数は線型性をもつ})$$

また $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{n+1}{a^{n+2}}(x-a)^n\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n+1}{a^{n+2}}(x-a)^n\right|$

$\dfrac{1}{x^2}$の級数が絶対収束するので右辺は収束する

よって $-\dfrac{1}{x^2}$の級数は絶対収束する

e^x は 0 を中心とするべき級数で表される

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(\because e^x\text{の定義})$$

すべての x について収束する (*5) よって収束半径は ∞

(*5) $\displaystyle\sum\left|\frac{x^n}{n!}\right|$について

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=0$$

よってダランベールの判定法より $\displaystyle\sum\left|\frac{x^n}{n!}\right|$は収束する

よって $\displaystyle\sum\frac{x^n}{n!}$は収束する

最後に $e^{-\frac{1}{x^2}}$ のべき級数を求める。

$e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ a_n=\frac{1}{n!}$ とする

$a\neq 0,\ |x-a|<|a|$ とする

$-\dfrac{1}{x^2}=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}s_m(x-a)^n,\ s_m=(-1)^{m+1}\frac{m+1}{a^{m+2}}$ とする

べき級数の合成 (別頁) より

$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}|s_m(x-a)^m|<\infty$ ならば

$$e^{-\frac{1}{x^2}}=\sum_{p=0}^{\infty}d_p(x-p)^p\ ,\quad d_p=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}s_{k_1}\dots s_{k_n}$$

である

$$d_p=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}(-1)^{k_1+1}\frac{k_1+1}{a^{k_1+2}}\dots(-1)^{k_n+1}\frac{k_n+1}{a^{k_n+2}}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}(-1)^{p+n}\frac{(k_1+1)\dots(k_n+1)}{a^{p+2n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^p \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} (k_1+1)\ldots(k_n+1) \ (\because \text{有限級数の線型性})$$

$a \neq 0,\ |x-a| < |a|$ ならば $-\frac{1}{x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} s_m (x-a)^n$ は絶対収束する

よって $\sum_{m=0}^{\infty} |s_m (x-a)^n|$ は収束する

よって $\sum_{m=0}^{\infty} |s_m (x-a)^n| < \infty$

よって $a \neq 0,\ |x-a| < |a|$ ならば

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} d_p (x-a)^p$$

$$d_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^p \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} (k_1+1)\ldots(k_n+1)$$

$e^{-\frac{1}{x^2}}$ は $a \neq 0$ を中心とするべき級数であらわされる。よって解析的である。

$x \neq 0$ で $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ なので $x \neq 0$ で $f(x)$ は解析的である。

(収束性について)

$a \neq 0,\ |x-a| < |a|$ において $-\frac{1}{x^2}$ と e^x の級数は絶対収束するので、コーシー積の $e^{-\frac{1}{x^2}}$ の級数も絶対収束する

(注)「収束半径＝一番近い特異点までの距離」は実関数では成立しないので簡単に収束半径 $|a|$ とは言えない

(最初の 3 項を求めてみる)

$$\begin{aligned}
d_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^0 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n \sum_{k_1+\cdots+k_n=0} (k_1+1)\ldots(k_n+1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n \cdot 1 \\
&= e^{-\frac{1}{a^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^1 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n \sum_{k_1+\cdots+k_n=0} (k_1+1)\ldots(k_n+1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big) \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n {}_nC_1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \Big(\frac{-1}{a}\Big) \Big(\frac{-1}{a^2}\Big) \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^{n-1} \\
&= \frac{1}{a^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^{n-1} \ \left(\begin{array}{l} \because \text{(別頁)：べき級数の合成より}dp\text{は絶対収束する} \\ \text{なので線型性をもつ} \end{array}\right) \\
&= \frac{1}{a^3} e^{-\frac{1}{a^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^2 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n \sum_{k_1+\cdots+k_n=2} (k_1+1)\ldots(k_n+1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^2 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n (4{}_nC_2 + 3{}_nC_1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^2 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n (2n(n-1) + 3n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^2 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n 2n(n-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{-1}{a}\Big)^2 \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^n 3n \ (\because dp\text{の線型性}) \\
&= \frac{2}{a^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^{n-2} + \frac{-3}{a^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \Big(\frac{-1}{a^2}\Big)^{n-1} \ (\because dp\text{の線型性}) \\
&= \frac{2}{a^6} e^{-\frac{1}{a^2}} + \frac{-3}{a^4} e^{-\frac{1}{a^2}} \ (\because e^x\text{の定義})
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2}{a^6} - \frac{3}{a^4}\right)e^{-\frac{1}{a^2}}$$

よって

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \approx e^{-\frac{1}{a^2}} + \frac{1}{a^2}e^{-\frac{1}{a^2}} + \frac{1}{a^3}e^{-\frac{1}{a^2}} + \left(\frac{2}{a^6} - \frac{3}{a^4}\right)e^{-\frac{1}{a^2}}$$

P.12 補足 べき級数の合成 '25 6.1

$|x-a|<R_f$ ならば $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ とする

$|x-b|<R_g$ ならば $g(x)=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-a)^m$ とする

$R_f>0,\ R_g>0$ とする。このとき

$|x-b|<R_g$ かつ $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|<R_f,\ c_m=\begin{cases} b_0-a & (m=0) \\ b_m & (m>0)\end{cases}$ ならば

$f(g(x))$ は b を中心としてべき級数であらわされる

(証明)

$|x-b|<R_g$ とする

$g(x)=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-a)^m$ とする

$g(x)-a=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-b)^m-a=\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-b)^m$, $c_m=\begin{cases} b_0-a & (m=0) \\ b_m & (m>0)\end{cases}$ なる c_m が存在する

($\because$ $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-b)^m$ は収束するので線型性をもつ)

$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|<R_f$ とする

$\therefore \left|\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-b)^m\right|<R_f$ ($\because$ $|a+b|\leq|a|+|b|$)

$\therefore |g(x)-a|<R_f$

$$
\begin{aligned}
\therefore f(g(x)) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(g(x)-a)^n \quad (\because\ g(x)\text{は}f\text{の収束半径内にあるので}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big(\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-b)^m\Big)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p} c_{k_1}\ldots c_{k_n}(x-a)^p \quad (\because\ \text{別紙：べき級数のべき}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} c_{k_1}\ldots c_{k_n}(x-a)^p \quad \begin{pmatrix}\because\ \text{別紙：べき級数のべきは絶対収束する} \\ \text{また収束する級数は線型性をもつ}\end{pmatrix} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} c_{k_1}\ldots c_{k_n}(x-a)^p \quad \begin{pmatrix}\because\ \sum|c_m(x-b)^m|<R_f\text{ならば} \\ \text{この二重級数は絶対収束する}(*1) \\ \text{よって和の順番を変えてもよい}\end{pmatrix} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} c_{k_1}\ldots c_{k_n}\Big)(x-a)^p \quad \begin{pmatrix}\because\ \text{二重級数は絶対収束する}(*1) \\ \text{よって内側の級数も絶対収束する} \\ \text{収束する級数は線型性を持つ}\end{pmatrix} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} d_p(x-a)^p
\end{aligned}
$$

$d_p=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} c_{k_1}\ldots c_{k_n}$ とする

ここで 上の $f(g(x))$ をあらわす二重級数は絶対収束する $(*1)$ よって内側の級数も絶対収束する。

よって $\sum_{n=0}^{\infty}\Big|a_n \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n}(x-a)^p\Big|$ は収束する

$\therefore$ $(\sum |a_n \sum c_{k_1} \dots c_{k_n}|)|x-a|^p$ は収束する ($\because$ 収束する級数の線型性)

$R_f > 0$ なので $|x'-a| < R_f, x' \neq a$ なる x' が存在する

$(\sum |a_n \sum c_{k_1} \dots c_{k_n}|)|x'-a|^p = w$ とすると

$\therefore$ $\sum |a_n \sum c_{k_1} \dots c_{k_n}| = \dfrac{w}{|x'-a|^p} \in \mathbb{R}$

よって d_p は絶対収束する

よって $|x-b| < R_g, \sum_{m=0}^{\infty}\Big|c_m(x-b)^m\Big| < R_f$ ならば $f(g(x))$ は a を中心とするべき級数であらわされる

なお、$\sum_{m=0}^{\infty}\Big|c_m(x-b)^m\Big| < R_f$ は a を中心とする区間である $(*2)$

$(*1)$

$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n}(x-a)^p$ は絶対収束する

(証明)

$\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m| < R_f$ としているので

$\therefore$ $\Big|\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\Big| < R_f$

$\therefore$ $\Big|\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m| + a - a\Big| < R_f$

$\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m| + a$ は f の収束半径内にあるので f のべき級数は絶対収束する

よって

$$
\begin{aligned}
\infty &> \sum_{n=0}^{\infty}\Big|a_n\Big(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m| + a - a\Big)^n\Big| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big|a_n\Big(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\Big)^n\Big| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\Big|\Big(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\Big)^n\Big| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\Big(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\Big)^n \quad (\because \textstyle\sum |c_m(x-b)^m| \geq 0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}|c_{k_1}|\dots|c_{k_n}||x-b|^p \quad (*1.1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}|a_n|\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}|c_{k_1}|\dots|c_{k_n}||x-b|^p \quad \left(\begin{array}{l}\because \sum_{p=0}^{\infty}\dots \text{は収束する}(*1.1) \\ \text{よって収束する級数の線型性より}\end{array}\right) \\
&> \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}|a_n|\Big|\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}c_{k_1}\dots c_{k_n}\Big||x-b|^p \quad (\because |a|+|b| \geq |a+b|) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\Big|a_n\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}c_{k_1}\dots c_{k_n}(x-b)^p\Big| \quad (\because |a||b| = |ab|)
\end{aligned}
$$

よって $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} c_{k_1} \dots c_{k_n}(x-b)^p$ は絶対収束する

(*1.1)

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\right)^n=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}|c_{k_1}|\dots|c_{k_n}||x-b|^p$$

(証明)

$|c_m|=d_m$ とする

$|x-b|\geq 0$ のとき

$|x-b|=x-b$

よって

$$\begin{aligned}\left(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\right)^n&=\left(\sum_{m=0}^{\infty}d_m(x-b)^m\right)^n\\&=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\dots k_n=p}d_{k_1}\dots d_{k_n}(x-b)^p\quad(\because \text{別紙：べき級数のべき})\\&=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\dots k_n=p}|c_{k_1}|\dots|c_{k_n}||x-b|^p\end{aligned}$$

$|x-b|<0$ のとき

$y=-x,b=-a$ とする $|x-b|=-x+b=y-a$

よって

$$\begin{aligned}\left(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\right)^n&=\left(\sum_{m=0}^{\infty}d_m(y-a)^m\right)^n\\&=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\dots k_n=p}d_{k_1}\dots d_{k_n}(y-a)^p\quad(\because \text{別紙：べき級数のべき})\\&=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\dots k_n=p}|c_{k_1}|\dots|c_{k_n}||x-b|^p\end{aligned}$$

よって $\left(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|\right)^n=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}|c_{k_1}|\dots|c_{k_n}||x-b|^p$

$\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|<R_f$ が存在すると仮定しているので右辺の級数は存在する。すなわち収束する。

(*2)

$\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|<R_f$ は b を中心とする区間である

(証明)

$A=\left\{x\mid\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(x-b)^m|<R_f\right\}$ とする

$\inf A=\sup A$ の場合

$\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(b-b)^m|=0<R_f$ なので $b\in A$ である。

よって $b=\inf A=\sup A$

よって A は a を中心とする半径 0 の閉区間

$\inf A<\sup A,\sup A=\infty$ の場合

$\inf A = -\infty$ $(*2.1)$

$[-\infty, \infty] \subset A$ $(*2.2)$

$\therefore A = \mathbb{R}$

よって A は b を中心とする半径 ∞ の開区間

$\inf A < \sup A, \sup A < \infty$ の場合

$\inf A > -\infty \quad (*2.1)$

$b < \dfrac{\inf A + \sup A}{2}$ と仮定する

b を中心とした $\inf A$ の対称点 $2b - \inf A$ を考える

仮定より $2b - \inf A < \sup A$

$\sup A$ は上限なので

$2b - \inf A < x < \sup A, x \in A$ なる x が存在する

b を中心とした x の対称点 $2b - x$ について

$2b - \inf A < x$ より $2b - x < \inf A$ である

よって $2b - x \notin A$

よって $(*2.1)$ より $x \notin A$

$x \in A$ なのでこれは矛盾

よって $b \not< \dfrac{\inf A + \sup A}{2}$

同様に $b \not> \dfrac{\inf A + \sup A}{2}$

$\therefore b = \dfrac{\inf A + \sup A}{2}$

また $(*2.2)$ より $[\inf A, \sup A] \subset A$ または $(\inf A, \sup A) \subset A$

よって A は a を中心とする半径 $\dfrac{\inf A + \sup A}{2}$ の開区間または閉区間である

よって A は a を中心とする区間である。

$(*2.1)$

b を中心とした x の対称点を x' とする

$x' = x - 2(x - b) = 2b - x$ である

$$\begin{aligned}\sum |c_m(x' - b)^m| &= \sum |c_m(2b - x - b)^m| \\ &= \sum |c_m(-x + b)^m| \\ &= \sum |c_m(x - b)^m|\end{aligned}$$

$\therefore x \in A$ ならば $x' \in A$ である。

よって $x \notin A$ ならば $x' \notin A$ である

$(*2.2)$

$b < x < x_1$ とする

$|x-b| < |x_1 - b|$

$\therefore \ \sum |c_m (x-b)^m| < \sum |c_m (x_1 - b)^m|$

よって $x_1 \in A$ ならば $x \in A \quad \ldots (1)$

a を中心とした x_1 の対称点を x_1' とする

$x_1' < x < b$ とすると

$2b - x_1' > 2b - x > b$

$\therefore x_1 > 2b - x > b \quad (\because x_1' = 2b - x_1)$

(1) より $2b - x \in A$

x は $2b - x$ の b を中心とした対称点なので

(∗2.1) より $x \in A$

よって $x_1 \in A$ ならば $[x_1', x_1] \subset A$

P.12 補足 べき級数のべき '25 6.2

$|x-a|<R_f$ ならば $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ とする

$|x-a|<R_f$ ならば $(f(x))^m,\ m\geq 1$ は a を中心としたべき級数であらわされる

(証明)

$|x-a|<R_f$ とする

$$
\begin{aligned}
(f(x))^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n \ldots (1)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k(x-a)^k a_{n-k}(x-a)^{n-k} \quad \left(\begin{array}{l}\because\ \sum a_n(x-a)^n\text{は絶対収束する}\\ \text{よって級数の積はコーシー積であらわされる}\end{array}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k a_{n-k}\Big)(x-a)^n \quad (\because\ \text{有限級数の線型性})\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k_1+k_2=n}a_{k_1}a_{k_2}\Big)(x-a)^n \quad (*1)
\end{aligned}
$$

$|x-a|<R_f$ ならば (1) のどちらの級数も絶対収束する。よってコーシー積も絶対収束する。よって $(f(x))^2$ をあらわす級数は絶対収束する

$c_n^m=\sum_{k_1+\cdots+k_m=n}a_{k_1}\ldots a_{k_m},\ m\geq 2$ とする

$(f(x))^2=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^2(x-a)^n$ である

$(f(x))^m=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^m(x-a)^n$ と仮定する

$|x-a|<R_f$ で絶対収束すると仮定する

$$
\begin{aligned}
(f(x))^{m+1} &= \sum_{n=0}^{\infty}c_n^m(x-a)^n\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n \ldots (2)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}c_k^m(x-a)^k a_{n-k}(x-a)^{n-k} \quad (\because\ \text{コーシー積})\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}c_k^m a_{n-k}\Big)(x-a)^n \quad (\because\ \text{有限級数の線型性})\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\sum_{k_1+\ldots k_m=k}a_{k_1}\ldots a_{k_m}a_{n-k}\Big)(x-a)^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1+\ldots k_{m+1}=n}a_{k_1}\ldots a_{k_{m+1}}(x-a)^n \quad (*2)
\end{aligned}
$$

よって $m\geq 2$ ならば

$(f(x))^m=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^m(x-a)^n\ ,\quad c_n^m=\sum_{k_1+\cdots+k_m=n}a_{k_1}\ldots a_{k_m}$ である

(2) のどちらの級数も絶対収束するので、コーシー積も絶対収束する。

よって $|x-a|<R_f$ ならば絶対収束する

$m=1$ ならば $(f(x))^1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$

よって $m\geq 1$ で $(f(x))^m$ は a を中心とするべき級数であらわされる

$(*1) A=\{(k,n-k)\mid n\geq k\geq 0\}$

$B=\{(k_1,k_2)\mid k_1+k_2=n,\ k_1,k_2\geq 0\}$とする

$(a,b)\in A$とする

$b=n-a$

$\therefore\ a+b=n$

また$n\geq a\geq 0$

$\therefore\ b\geq 0$

$\therefore\ (a,b)\in B$

$(a,b)\in B$とする

$a+b=n$

$\therefore\ b=n-a$

$b\geq 0$より

$n-a\geq 0$

$\therefore\ n\geq a$

$a\geq 0$なので

$n\geq a\geq 0$

$\therefore\ (a,b)\in A$

$\therefore\ A=B$

$(*2) A=\{(k_1,\dots,k_m,n-k)\mid k_1+\cdots+k_m=k, 0\leq k\leq n,\ k_i\geq 0\}$

$B=\{(k_1,\dots,k_{m+1})\mid k_1+\cdots+k_{m+1}=n,\ k_i\geq 0\}$とする

$(a_1,\dots,a_{m+1})\in A$とする

$a_1+\cdots+a_m=k,\ a_{m+1}=n-k$

$\therefore\ a_1+\cdots+a_{m+1}=n$

$0\leq k\leq n$より

$a_{m+1}=n-k\geq 0$

$\therefore\ (a_1,\dots,a_{m+1})\in B$

$(a_1,\dots,a_{m+1})\in B$とする

$a_1+\cdots+a_{m+1}=n$

$a_1+\cdots+a_m=k$とする

$k=n-a_{m+1}$

$a_{m+1}\geq 0$より$k\leq n$

$a_i\geq 0$より$k\geq 0$

$\therefore\ 0\leq k\leq n$

また$a_{m+1}=n-k$

$\therefore\ (a_1,\dots,a_{m+1})\in A$

$\therefore\ A=B$

P.12 問題 1.4 x^2 e^y の偏微分 '25 4.16

$f(x,y) = x^2 e^y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

f の偏微分と連続性

(i)

$f_x = 2xe^y \quad (*1)$

$f_y = x^2 e^y \quad (*1)$

$f_{xx} = 2e^y$

$f_{yy} = x^2 e^y$

$f_{xy} = 2xe^y$

$f_{yx} = 2xe^y$

$f_x(0,0) = 0,\ f_x(1,1) = 2e$

$f_y(0,0) = 0,\ f_y(1,1) = e$

$f_{xx}(0,0) = 2,\ f_{xx}(1,1) = 2e$

$f_{yy}(0,0) = 0,\ f_{yy}(1,1) = e$

$f_{xy}(0,0) = 0,\ f_{xy}(1,1) = 2e$

$f_{yx}(0,0) = 0,\ f_{yx}(1,1) = 2e$

(ii)

x^2 は x で連続よって (x,y) で連続　$(*2)$

e^y は x で連続よって (x,y) で連続　$(*2)$

よって $f(x,y) = x^2 e^y$ は (x,y) で連続　$(*3)$

同様に

$f_x = 2xe^y$ は連続

$f_y = x^2 e^y$ は連続

$f_{xx} = 2e^y$ は連続

$f_{yy} = x^2 e^y$ は連続

$f_{xy} = 2xe^y$ は連続

$f_{yx} = 2xe^y$ は連続

よって f は C^2 級

(iii)

$f_{xy} = 2xe^y, f_{yx} = 2xe^y$ なので $f_{xy} = f_{yx}$

$(*1)$ xとyが独立ならば$f_x = \underset{x\text{で微分}}{f'}$

$(*2)$ $f(x)$がxで連続ならば$f(x)$は(x,y)で連続である

(証明)

xで連続なので$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)$

よって任意のϵに対して

$0 < |\Delta x| < \delta$ならば

$|f(x+\Delta x) - f(x)| < \epsilon$

$|(\Delta x, \Delta y)| < \delta$ならば

$|\Delta x| \leq |(\Delta x, \Delta y)|$ ($\because$ 三角不等式)

$\therefore\ |\Delta x| < \delta$

$\therefore\ \Delta x = 0\ or\ 0 < |\Delta x| < \delta$

$0 < |\Delta x| < \delta$とすると

$|f(x+\Delta x) - f(x)| < \epsilon$

$\Delta x = 0$とすると

$|f(x+\Delta x) - f(x)| = 0 < \epsilon$

よって$|(\Delta x, \Delta y)| < \delta$ならば$|f(x+\Delta x) - f(x)| < \epsilon$

よって $\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y)) \to (0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)$

(∗2)f, gが連続ならばfgは連続

(証明)

$\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)$

$\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} g(x+\Delta x, y+\Delta y) = g(x,y)$

よって

$$\begin{aligned}
&\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) g(x+\Delta x, y+\Delta y) \\
&\quad = \lim f(x+\Delta x, y+\Delta y) \lim g(x+\Delta x, y+\Delta y)\ (\because \text{積の極限}) \\
&\quad = f(x,y) g(x,y)
\end{aligned}$$

よってfgは連続

P.15 問題 1.5 Z(x,y) の偏微分 '25 6.22

$Z = f(x,y) = x^2 e^y$ とする

$\eta = y - x$ とする

$Z = g(x,\eta) = x^2 e^{\eta + x}$ とする。

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y \neq \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_\eta$$

(証明)

$Z = f(x,y) = x^2 e^y$ とする。x, y は独立変数とする

$\eta = \boldsymbol{y} - x$ とする。η は独立変数とする。$\boldsymbol{y}$ は従属変数である

$\boldsymbol{Z} = f(x, y_1) = f(x, \eta + x) = x^2 e^{\eta + x} = g(x,\eta)$ とする

よって

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y &= 2xe^y \\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_\eta &= 2xe^{\eta+x} + x^2 e^{\eta+x} \\ &= (2x + x^2)e^{\eta+x} \\ &= (2x + x^2)e^{\boldsymbol{y}}\end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y \neq \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_\eta$$

P.15 問題 1.6(i) 偏微分の連鎖律 '25 6.13

x, y, ξ, η は独立変数とする

$\boldsymbol{x}(\xi,\eta)$, $\boldsymbol{y}(\xi,\eta)$ とする

$\boldsymbol{Z}(\xi,\eta) = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ とする

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \xi}\right)_\eta = \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}\right)_\eta + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \xi}\right)_\eta \cdots (1.20)$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \eta}\right)_\xi = \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta}\right)_\xi + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \eta}\right)_\xi \cdots (1.21)$$

(証明)

x, y, ξ, η は独立変数とする

$\boldsymbol{x}(\xi,\eta)$, $\boldsymbol{y}(\xi,\eta)$ とする

$\boldsymbol{Z}(\xi,\eta) = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ とする

$$\begin{aligned}\therefore \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \xi}\right)_\eta &= \frac{d\boldsymbol{Z}}{d\xi} \quad \left(\because \xi,\eta\text{が独立なので}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \xi}\right)_\eta = \frac{d\boldsymbol{Z}}{d\xi}\right)\\
&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\frac{d\boldsymbol{x}}{d\xi} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\frac{d\boldsymbol{y}}{d\xi} \quad (\because \text{問題}1.7)\\
&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}\right)_\eta + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \xi}\right)_\eta \quad \left(\because \xi,\eta\text{が独立なので}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}\right)_\eta = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\xi},\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \xi}\right)_\eta = \frac{d\boldsymbol{y}}{d\xi}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \eta}\right)_\xi &= \frac{d\boldsymbol{Z}}{d\eta} \quad \left(\because \xi,\eta\text{が独立なので}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \eta}\right)_\xi = \frac{d\boldsymbol{Z}}{d\eta}\right)\\
&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\frac{d\boldsymbol{x}}{d\eta} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\frac{d\boldsymbol{y}}{d\eta} \quad (\because \text{問題}1.7)\\
&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta}\right)_\xi + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \eta}\right)_\xi \quad \left(\because \xi,\eta\text{が独立なので}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta}\right)_\xi = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\eta},\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \eta}\right)_\xi = \frac{d\boldsymbol{y}}{d\eta}\right)\end{aligned}$$

P.15 問題 1.6(ii) 偏微分の連鎖律 '25 6.25

x, y, ξ, η は独立変数とする

$\boldsymbol{x}(\xi, \eta)$, $\boldsymbol{y}(\xi, \eta)$ とする

$\boldsymbol{Z}(\xi, \eta) = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とする

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \xi}\right)_\eta = \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y \Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x} \\ y=\boldsymbol{y}}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}\right)_\eta + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x \Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x} \\ y=\boldsymbol{y}}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \xi}\right)_\eta \cdots (1.20)$$

(1.20) を言葉で説明する

(説明)

$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \xi}\right)_\eta$ は $\xi\eta$ 平面の点 (ξ, η) における $\boldsymbol{Z}$ の勾配の ξ 方向成分

$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\right)_y \Big|_{\substack{x=\boldsymbol{x} \\ y=\boldsymbol{y}}}$ は xy 平面の点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ における $\boldsymbol{Z}$ の勾配の x 方向成分

$\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}\right)_\eta$ は $\xi\eta$ 平面の点 (ξ, η) における $\boldsymbol{x}$ の勾配の ξ 方向成分

$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\right)_x \Big|_{\substack{x=\boldsymbol{x} \\ y=\boldsymbol{y}}}$ は xy 平面の点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ における $\boldsymbol{Z}$ の勾配の y 方向成分

$\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \xi}\right)_\eta$ は $\xi\eta$ 平面の点 (ξ, η) における $\boldsymbol{y}$ の勾配の ξ 方向成分

よって (1.20) は

$(\boldsymbol{Z}\text{の勾配の}\xi\text{方向成分}) = (\boldsymbol{Z}\text{の勾配の}x\text{方向成分}) \times (\boldsymbol{x}\text{の勾配の}\xi\text{方向成分}) + (\boldsymbol{Z}\text{の勾配の}y\text{方向成分}) \times (\boldsymbol{y}\text{の勾配の}\xi\text{方向成分})$

と説明される

さらに要約すると (1.20) は

$(\boldsymbol{Z}\text{の勾配の}\xi\text{方向成分}) = (\boldsymbol{Z}\text{の勾配の}x\text{方向成分の}\xi\text{方向成分}) + (\boldsymbol{Z}\text{の勾配の}y\text{方向成分の}\xi\text{方向成分})$

と説明できる

P.15 問題 1.6(iii) 偏微分の連鎖律 '25 6.13

$f(x,y)=(x+1)(x-y+1)$ とする

$\eta=x-y$ とする

$g(x,\eta)=(x+1)(\eta+1)$ とする

このとき

$\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)_\eta=x-y+1\cdots(1.18)$ である

(証明)

$x,\ y,\ \eta$ は独立変数とする

$f(x,y)=(x+1)(x-y+1)$ とする

$\boldsymbol{x}(x,\eta)=x,\ \boldsymbol{y}(x,\eta)=x-\eta$ とする

$g(x,\eta)=f(\boldsymbol{x}(x,\eta),\boldsymbol{y}(x,\eta))=(x+1)(\eta+1)$ とする

(1.20) より

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_\eta &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x}\right)_\eta+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x}\right)_\eta \\
&=(2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+2)\cdot 1+(-\boldsymbol{x}-1)\cdot 1 \quad \left(\begin{array}{l}\because\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}=2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+1,\ \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x}\right)_\eta=1 \\ \quad\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x\Bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}}=-\boldsymbol{x}-1,\ \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x}\right)_\eta=1\end{array}\right) \\
&=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+1
\end{aligned}
$$

P.15 問題 1.6(iv) 偏微分の連鎖律 '25 6.25

$x_1,\cdots,x_n,\ \xi_1,\cdots,\xi_n$ は独立変数とする

$\boldsymbol{x_1}(\xi_1,\cdots,\xi_n),\cdots,\boldsymbol{x_n}(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ とする。$\boldsymbol{x_1},\cdots,\boldsymbol{x_n}$ は偏微分可能とする

$\boldsymbol{Z}(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x_1},\cdots,\boldsymbol{x_n})$ とする。$\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z}$ は偏微分可能とする

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \xi_i}\right)_{\xi_{j\neq i}}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x_1}\right)_{x_{i\neq 1}}\Bigg|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x_1}}{\partial \xi_i}\right)_{\xi_{j\neq i}}+\cdots+\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x_n}\right)_{x_{i\neq n}}\Bigg|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x_n}}{\partial \xi_i}\right)_{\xi_{j\neq i}}$$

(証明)

$f(\vec{x}+d\vec{x})-f(\vec{x})=df+o(|d\vec{x}|)$ (1.13)

$$df=\vec{\nabla}f(\vec{x})\cdot d\vec{x}=\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\right)_{x_{i\neq 1}}dx_1+\cdots+\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}\right)_{x_{i\neq n}}dx_n \quad (1.14)$$

において

$f=\boldsymbol{Z},\ \vec{x}=(x_1,\cdots,x_n),\ d\vec{x}=(dx_1,\cdots,dx_n)$ とする。$x_1,\cdots,x_n$ は独立変数とする

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Z}(x_1+dx_1,\cdots,x_n+dx_n)-\boldsymbol{Z}(x_1,\cdots,x_n)\\ &\quad=\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x_1}\right)_{x_{i\neq 1}}dx_1+\cdots+\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x_n}\right)_{x_{i\neq n}}dx_n+o\left(\sqrt{dx_1^2+\cdots+dx_n^2}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{\substack{(dx_1,\cdots,dx_n)\\ \to(0,\cdots,0)}}\frac{\boldsymbol{Z}(x_1+dx_1,\cdots,x_n+dx_n)-\boldsymbol{Z}(x_1,\cdots,x_n)-\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x_1}\right)_{x_{i\neq 1}}dx_1-\cdots-\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x_n}\right)_{x_{i\neq n}}dx_n}{\sqrt{dx_1^2+\cdots+dx_n^2}}=0 \quad (1)$$

$\boldsymbol{x_i}=\boldsymbol{x_i}(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ とする。$\xi_1,\cdots,\xi_n$ は独立変数とする。$\boldsymbol{x_i}$ は偏微分可能とする

$\boldsymbol{dx_i}=\boldsymbol{x_i}(\xi_1,\cdots,\xi+d\xi_i,\cdots,\xi_n)-\boldsymbol{x_i}(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ とする

$\therefore\ \lim_{d\xi_i\to 0}\boldsymbol{dx_i}=\lim_{d\xi_i\to 0}\boldsymbol{x_i}(\xi_1,\cdots,\xi+d\xi_i,\cdots,\xi_n)-\boldsymbol{x_i}(\xi_1,\cdots,\xi_n)=0$ ($\because$ $\boldsymbol{x_i}$ は連続なので)

(1) の極限は経路によらないので

$$\lim_{d\xi_i\to 0}\frac{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{dx_1},\cdots,\boldsymbol{x_n}+\boldsymbol{dx_n})-\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x_1},\cdots,\boldsymbol{x_n})-\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x_1}\right)_{x_{i\neq 1}}\Big|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\boldsymbol{dx_1}-\cdots-\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x_n}\right)_{x_{i\neq n}}\Big|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\boldsymbol{dx_n}}{\sqrt{\boldsymbol{dx_1}^2+\cdots+\boldsymbol{dx_n}^2}}=0$$

$\boldsymbol{Z}(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x_1}(\xi_1,\cdots,\xi_n),\cdots,\boldsymbol{x_n}(\xi_1,\cdots,\xi_n))$ とする

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}(\xi_1,\cdots,\xi+d\xi_i,\cdots,\xi_n)&=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x_1}(\xi_1,\cdots,\xi+d\xi_i,\cdots,\xi_n),\cdots,\boldsymbol{x_n}(\xi_1,\cdots,\xi+d\xi_i,\cdots,\xi_n))\\ &=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{dx_1},\cdots,\boldsymbol{x_n}+\boldsymbol{dx_n})\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{d\xi_i\to 0}\frac{\boldsymbol{Z}(\xi_1,\cdots,\xi+d\xi_i,\cdots,\xi_n)-\boldsymbol{Z}(\xi_1,\cdots,\xi_n)-\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x_1}\right)_{x_{i\neq 1}}\Big|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\boldsymbol{dx_1}-\cdots-\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x_n}\right)_{x_{i\neq n}}\Big|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\boldsymbol{dx_n}}{\sqrt{\boldsymbol{dx_1}^2+\cdots+\boldsymbol{dx_n}^2}}=0$$

ここで

$$\lim_{d\xi_i\to 0}\frac{\boldsymbol{dx_i}}{d\xi_i}=\lim_{d\xi_i\to 0}\frac{\boldsymbol{x_i}(\xi_1,\cdots,\xi+d\xi_i,\cdots,\xi_n)-\boldsymbol{x_i}(\xi_1,\cdots,\xi_n)}{d\xi_i}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{x_i}}{\partial\xi_i}\right)_{\xi_{j\neq i}}\quad(\because\ \boldsymbol{x_i}\text{は偏微分可能})$$

なので

$$\begin{aligned}
\lim_{d\xi_i\to 0}\frac{\sqrt{\boldsymbol{dx_1}^2+\cdots+\boldsymbol{dx_n}^2}}{|d\xi_i|}&=\lim_{d\xi_i\to 0}\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{dx_1}}{d\xi_i}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\boldsymbol{dx_n}}{d\xi_i}\right)^2}\\
&=\sqrt{\left(\lim_{d\xi_i\to 0}\frac{\boldsymbol{dx_1}}{d\xi_i}\right)^2+\cdots+\left(\lim_{d\xi_i\to 0}\frac{\boldsymbol{dx_n}}{d\xi_i}\right)^2}\quad\left(\begin{array}{l}\because\ \sqrt{x}\text{は}x>0\text{で連続、}x^2\text{は}\mathbb{R}\text{で連続なので}\\ \text{合成関数の極限と和の極限より}\end{array}\right)\\
&=\sqrt{\left(\frac{\partial\boldsymbol{x_1}}{\partial\xi_i}\right)^2_{\xi_{j\neq i}}+\cdots+\left(\frac{\partial\boldsymbol{x_n}}{\partial\xi_i}\right)^2_{\xi_{j\neq i}}}\\
&<\infty\quad\left(\because\ \text{偏微分可能なので}\left|\left(\frac{\partial\boldsymbol{x_j}}{\partial\xi_i}\right)_{\xi_{j\neq i}}\right|<\infty\right)
\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{d\xi_i\to 0}\frac{\boldsymbol{Z}(\xi_1,\cdots,\xi+d\xi_i,\cdots,\xi_n)-\boldsymbol{Z}(\xi_1,\cdots,\xi_n)-\left(\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial x_1}\right)_{x_{i\neq 1}}\Bigg|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\boldsymbol{dx_1}-\cdots-\left(\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial x_n}\right)_{x_{i\neq n}}\Bigg|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\boldsymbol{dx_n}}{\sqrt{\boldsymbol{dx_1}^2+\cdots+\boldsymbol{dx_n}^2}}\frac{\sqrt{\boldsymbol{dx_1}^2+\cdots+\boldsymbol{dx_n}^2}}{d\xi_i}=0$$

$$(\because\ \lim f=0,\lim|g|<\infty\text{ならば}\lim fg=0)$$

よって

$$\lim_{d\xi_i\to 0}\frac{\boldsymbol{Z}(\xi_1,\cdots,\xi+d\xi_i,\cdots,\xi_n)-\boldsymbol{Z}(\xi_1,\cdots,\xi_n)-\left(\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial x_1}\right)_{x_{i\neq 1}}\Bigg|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\boldsymbol{dx_1}-\cdots-\left(\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial x_n}\right)_{x_{i\neq n}}\Bigg|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\boldsymbol{dx_n}}{d\xi_i}=0$$

よって

$$\lim_{d\xi_i\to 0}\frac{\boldsymbol{Z}(\xi_1,\cdots,\xi+d\xi_i,\cdots,\xi_n)-\boldsymbol{Z}(\xi_1,\cdots,\xi_n)}{\xi_i}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial x_1}\right)_{x_{i\neq 1}}\Bigg|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x_1}}{\partial\xi_i}\right)_{\xi_{j\neq i}}+\cdots+\left(\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial x_n}\right)_{x_{i\neq n}}\Bigg|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x_n}}{\partial\xi_i}\right)_{\xi_{j\neq i}}$$

$$\left(\begin{array}{l}\because\ \lim\text{の線型性より}\\ \lim(f+kg+lh)=a,\lim g=b,\lim h=c\text{ならば}\\ \lim f=a-kb-lc\end{array}\right)$$

よって

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial\xi_i}\right)_{\xi_{j\neq i}}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial x_1}\right)_{x_{i\neq 1}}\Bigg|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x_1}}{\partial\xi_i}\right)_{\xi_{j\neq i}}+\cdots+\left(\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial x_n}\right)_{x_{i\neq n}}\Bigg|_{\substack{x_1=\boldsymbol{x_1}\\ \vdots\\ x_n=\boldsymbol{x_n}}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x_n}}{\partial\xi_i}\right)_{\xi_{j\neq i}}\quad(\because\ \text{偏微分の定義})$$

P.15 問題 1.7(i) 合成関数の偏微分 '25 6.27

$Z = Z(x, y)$ とする。x, y は独立変数とする

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t),\ \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ とする。t は独立変数とする。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は微分可能とする

$\boldsymbol{Z}(t) = Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とする

$$\frac{d\boldsymbol{Z}}{dt} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y\bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x\bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}} \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} \quad (1.22)$$

(証明)

$$f(\vec{x} + d\vec{x}) - f(\vec{x}) = df + o(|d\vec{x}|) \quad (1.13)$$

$$df = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\right)_{x_{i\neq 1}} dx_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}\right)_{x_{i\neq n}} dx_n \quad (1.14)$$

において

$f = Z,\ \vec{x} = (x, y),\ d\vec{x} = (dx, dy)$ とする。x, y は独立変数とする

$$Z(x + dx, y + dy) - Z(x, y) = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_z dy + o(\sqrt{dx^2 + dy^2})$$

よって

$$\lim_{(dx,dy)\to(0,0)} \frac{Z(x + dx, y + dy) - Z(x, y) - \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y dx - \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0 \quad (1)$$

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t),\ \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ とする。t は独立変数とする。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は微分可能とする

$\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{x}(t + dt) - \boldsymbol{x}(t)$

$\boldsymbol{dy} = \boldsymbol{y}(t + dt) - \boldsymbol{y}(t)$ とする

$\therefore \lim_{dt\to 0} \boldsymbol{dx} = 0$ ($\because$ $\boldsymbol{x}$は連続)

$\therefore \lim_{dt\to 0} \boldsymbol{dy} = 0$ ($\because$ $\boldsymbol{y}$は連続)

(1) の極限は経路によらないので

$$\lim_{dt\to 0} \frac{Z(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{dy}) - Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y\bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}} \boldsymbol{dx} - \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x\bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}} \boldsymbol{dy}}{\sqrt{\boldsymbol{dx}^2 + \boldsymbol{dy}^2}} = 0$$

$\boldsymbol{Z}(t) = Z(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t))$ とする

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}(t + dt) &= Z(\boldsymbol{x}(t + dt), \boldsymbol{y}(t + dt))\\ &= Z(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{dy})\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{dt\to 0} \frac{\boldsymbol{Z}(t + dt) - \boldsymbol{Z}(t) - \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y\bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}} \boldsymbol{dx} - \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x\bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}} \boldsymbol{dy}}{\sqrt{\boldsymbol{dx}^2 + \boldsymbol{dy}^2}} = 0$$

ここで

$$\lim_{dt\to 0} \frac{\boldsymbol{dx}}{dt} = \lim_{dt\to 0} \frac{\boldsymbol{x}(t + dt) - \boldsymbol{x}(t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \quad (\because\ \ \boldsymbol{x}\text{は微分可能})$$

$$\lim_{dt\to 0}\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=\lim_{dt\to 0}\frac{\boldsymbol{y}(t+dt)-\boldsymbol{y}(t)}{dt}=\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\quad (\because\ \ \boldsymbol{y}\text{は微分可能})$$

なので

$$\begin{aligned}\lim_{dt\to 0}\frac{\sqrt{d\boldsymbol{x}^2+d\boldsymbol{y}^2}}{|dt|}&=\lim_{dt\to 0}\sqrt{\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\right)^2}\\ &=\sqrt{\left(\lim_{dt\to 0}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)^2+\left(\lim_{dt\to 0}\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\right)^2}\quad \left(\begin{array}{l}\because\ \sqrt{x}\text{は}x>0\text{で連続、}x^2\text{は}\mathbb{R}\text{で連続なので}\\ \text{合成関数の極限と和の極限より}\end{array}\right)\\ &=\sqrt{\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\right)^2}\\ &<\infty\quad \left(\because\ \text{微分が存在するので}\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|<\infty,\ \left|\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\right|<\infty\right)\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{dt\to 0}\frac{\boldsymbol{Z}(t+dt)-\boldsymbol{Z}(t)-\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y\Big|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}}d\boldsymbol{x}-\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x\Big|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}}d\boldsymbol{y}}{\sqrt{d\boldsymbol{x}^2+d\boldsymbol{y}^2}}\frac{\sqrt{d\boldsymbol{x}^2+d\boldsymbol{y}^2}}{dt}=0$$

$$(\because\ \ \lim f=0,\ \lim|g|<\infty\text{ならば}\lim fg=0)$$

よって

$$\lim_{dt\to 0}\frac{\boldsymbol{Z}(t+dt)-\boldsymbol{Z}(t)-\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y\Big|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}}d\boldsymbol{x}-\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x\Big|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}}d\boldsymbol{y}}{dt}=0$$

よって

$$\lim_{dt\to 0}\frac{\boldsymbol{Z}(t+dt)-\boldsymbol{Z}(t)}{dt}=\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y\Big|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x\Big|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}}\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\quad\left(\begin{array}{l}\because\ \ \lim\text{の線型性より}\\ \lim(f+kg+lh)=a,\lim g=b,\lim h=c\text{ならば}\\ \lim f=a-kb-lc\end{array}\right)$$

よって

$$\frac{d\boldsymbol{Z}}{dt}=\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y\Big|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x\Big|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\ y=\boldsymbol{y}}}\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\quad(\because\ \ \text{微分の定義})$$

P.15 問題 1.7(ii) 合成関数の偏微分の例 '25 6.28

$Z = x^2 e^y$ とする

$\boldsymbol{x}(t) = t^3,\ \boldsymbol{y}(t) = t^4$ とする

$$\frac{d\boldsymbol{Z}}{dt} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y\bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x\bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}} \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}$$ であることを確認する

(確認)

$Z = x^2 e^y$ とする。$x,\ y$ は独立変数とする

$\boldsymbol{x}(t) = t^3,\ \boldsymbol{y}(t) = t^4$ とする。t は独立変数とする

$\boldsymbol{Z}(t) = Z(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t))$ とする

$\boldsymbol{Z}(t) = Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^2 e^{\boldsymbol{y}} = (t^3)^2 e^{t^4} = t^6 e^{t^4}$

よって

$$\frac{d\boldsymbol{Z}}{dt} = 6t^5 e^{t^4} + t^6 4t^3 e^{t^4} = 6t^5 e^{t^4} + 4t^9 e^{t^4}$$

また

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y\bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x\bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}} \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} &= 2\boldsymbol{x}e^{\boldsymbol{y}}3t^2 + \boldsymbol{x}^2 e^{\boldsymbol{y}}4t^3 \\ &= 2t^3 e^{t^4} 3t^2 + (t^3)^2 e^{t^4} 4t^3 \\ &= 6t^5 e^{t^4} + 4t^9 e^{t^4}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{d\boldsymbol{Z}}{dt} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y\bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x\bigg|_{\substack{x=\boldsymbol{x}\\y=\boldsymbol{y}}} \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}$$ である

P.16 問題 1.8 偏微分でつまづいたこと '25 6.25

偏微分でつまづいて色々考えたことのメモ

1.
x, y は独立変数であるかつ x, y は従属変数であるというのは矛盾である

(証明)

従属変数ならば独立変数ではないので、独立変数であるかつ独立変数でないとなり排中律に反するので矛盾である

2.
x, y を独立変数かつ従属変数と仮定すると矛盾する例

(例)

x, y は独立変数とする (1)

$f(x, y) = x + y$ とする (2)

$\therefore\ f(0, 1) = 1$

$x = \xi$, $y = \xi$ とする。ξ は独立変数とする (3)

$\therefore\ f(x, y) = f(\xi, \xi) = 2\xi$

$x = y = \xi$ なので $x = 0$, $y = 1$ である ξ は存在しない

$\therefore\ f(0, 1) =$ 未定義

$\therefore\ f(0, 1) \neq f(0, 1)$

これは等号の反射律に反するので矛盾である

よって仮定 (1), (2), (3) は矛盾している

なにが矛盾しているかというと、(3) において x と y を従属変数と仮定しているので 1. より (1),(3) は矛盾している

なお (2) は (1),(3) と矛盾していない

3.
$f(x, y)$ の偏微分 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ が定義できるならば x, y は独立変数である

(説明)

偏微分の定義に明記されていないが偏微分が定義されるのは、x, y が独立変数のときに限ると明記すべきだと思う

なぜなら、もし x, y が独立変数でなければ偏微分の定義に使われる $f(x + \Delta x, y)$ が定義できるとは限らないから

x, y が 従属変数であっても、(x, y) 近傍で $f(x, y)$ が定義されるならば 偏微分の定義は成立するが、これを許容すると、(x, y) 近傍で 従属変数 x, y が定義されないだけの場合も $f(x, y)$ が定義されずに偏微分できなくなって不便である

なので x, y が独立変数のときに限り偏微分が定義されるとする

4.
偏微分の連鎖律は矛盾している

(証明)

関数 $f(x,y)$ を考える

$x=x(\xi,\eta),\ y=y(\xi,\eta)$ とする　(1)

偏微分の連鎖律は

$\left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\eta=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y\left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)_\eta+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)_\eta$ である

$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ が定義されているので 3. より x,y は独立変数である

$\left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\eta$ が定義されているので 3. より ξ,η は独立変数である

よって (1) より $x,\ y$ は従属変数である

よって x,y は独立変数かつ従属変数となり 1. よりこれは矛盾である。

5.
矛盾しない偏微分の連鎖律

x,y を独立変数かつ従属変数とするのを避けるために、従属変数 x_1,y_1 を追加すればよい

$f(x,y)$ を考える。x,y は独立変数とする

$x_1=x_1(\xi,\eta),\ y_1=y_1(\xi,\eta)$ とする

ξ,η は独立変数、x_1,y_1 は従属変数とする

$g(\xi,\eta)=f(x_1,y_1)$ とする

偏微分の連鎖律は

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)_\eta=\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\right|_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)_\eta+\left.\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\right|_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi}\right)_\eta$$

となる

ただし $\left.\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y\right|_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}$ は 偏微分 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ の x,y に x_1,y_1 を代入したものである。以下同様

6.
とはいえ、実際の教科書では x,y を独立変数としつつ、途中で x,y を従属変数とすることはよくある

この場合、独立変数の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ と従属変数の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を脳内で区別しないといけない

(注) 脳内で区別というのは普通の言い方をすると文脈で区別するということである

(例)

関数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を考える。$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ は独立変数とする

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\xi,\eta),\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\xi,\eta)$ とする。

ξ, η は独立変数とする。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は従属変数である

$g(\xi, \eta) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とする

偏微分の連鎖律は

$\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)_\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{y}}\Bigg|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}\right)_\eta + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}\right)_{\boldsymbol{x}}\Bigg|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \xi}\right)_\eta$ である

という感じで脳内で区別する

わたしにはハードルが高いので無理せず x_1, y_1 と書き直して区別すればいいかなと思う

7.
異なる関数を同じ関数とすることは矛盾である

(例)

$Z = f(x, y) = x + y$ とする。x, y は独立変数とする

$Z = g(\xi, \eta) = \xi - \eta$ とする。ξ, η は独立変数とする

$Z = f(1, 1) = 2$

$Z = g(1, 1) = 0$

$\therefore Z = 2 = 0$

よって矛盾

8.
変数が独立変数である関数 $Z(x, y)$ と 変数が従属変数である関数 $Z(x, y)$ は異なる関数である

なので同じ関数 Z とするのは矛盾である

(例)

$Z(x, y) = x + y$ とする。x, y は独立変数とする　(1)

$Z(x, y) = x + y,\ x = \xi,\ y = \xi$ とする。ξ は独立変数とする。x, y は従属変数である　(2)

(1) の Z だと $Z(0, 1) = 1$

(2) の Z だと $Z(0, 1)$は未定義

よって (1) の Z と (2) の Z は異なる関数である

関数 Z の式が同じでも、定義域が異なれば異なる関数である

従属変数の変域が明示されていない場合、変数が独立変数である関数 $Z(x, y)$ と 変数が従属変数である関数 $Z(x, y)$ は式が同じだから同じ関数とは言えない

9.
熱力学では

同じ変数を独立変数としかつ従属変数とし、かつ

異なる関数を同じ関数とすることもよくある

矛盾 アンド 矛盾 でわたしら素人は悶絶してしまう

(例)

$Z=f(x,y)=x^2e^y$ とする。

$\eta=y-x$ とする。

$Z=f(x,y)=f(x,\eta+x)=x^2e^{\eta+x}=g(x,\eta)$ とする。

Z は x,y の関数なので $Z=Z(x,y)=f(x,y)$ である

Z は x,η の関数なので $Z=Z(x,\eta)=g(x,\eta)$ である

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y=2xe^y$$

偏微分が定義できるので、3. より x,y は独立変数である

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_\eta=(2x+x^2)e^{\eta+x}$$

偏微分が定義できるので、3. より x,η は独立変数である

よって

$Z=Z(1,1)=f(1,1)=e$

$Z=Z(1,1)=g(1,1)=e^2$

$\therefore Z(1,1)\neq Z(1,1)$

となり矛盾する

また x,y,η は独立変数で、$g(x,\eta)$ は y によらないので

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y=(2x+x^2)e^{\eta+x}$$

$\eta=y-x$ なので

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y=(2x+x^2)e^y$$

$$\therefore \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y\neq\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y$$

となり矛盾する

10.
上の例で矛盾が生じないように変数、関数を区別する

上の例では 2 つの異なる関数を同じ関数 Z と仮定しているところが矛盾しているので

関数 Z_1,Z_2 として区別する

また 変数 y を独立変数かつ従属変数と仮定しているのが矛盾しているので

y は独立変数とし、y_1 は 従属変数として区別する

(例)

$Z_1=f(x,y)=x^2e^y$ とする。x,y は独立変数とする

$\eta=y_1-x$ とする。η は独立変数とする、y_1 は従属変数である

$Z_2 = f(x, y_1) = f(x, \eta + x) = x^2 e^{\eta + x} = g(x, \eta)$ とする。

Z_1 は x, y の関数なので $Z_1 = Z_1(x, y) = f(x, y)$ である

Z_2 は x, η の関数なので $Z_2 = Z_2(x, \eta) = g(x, \eta)$ である

$\left(\dfrac{\partial Z_1}{\partial x}\right)_y = 2xe^y$

$\left(\dfrac{\partial Z_2}{\partial x}\right)_\eta = (2x + x^2)e^{\eta + x}$

$Z_1 = Z_1(1, 1) = f(1, 1) = e$

$Z_2 = Z_2(1, 1) = g(1, 1) = e^2$

$\therefore\ Z_1(1, 1) \neq Z_2(1, 1)$

となり矛盾しない

また、x, y, η は独立変数で、$g(x, \eta)$ は y によらないので

$\left(\dfrac{\partial Z_2}{\partial x}\right)_y = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)_y = (2x + x^2)e^{\eta + x}$

$\eta = y_1 - x$ なので

$\left(\dfrac{\partial Z_2}{\partial x}\right)_y = (2x + x^2)e^{y_1}$

$\therefore\ \left(\dfrac{\partial Z_1}{\partial x}\right)_y \neq \left(\dfrac{\partial Z_2}{\partial x}\right)_y$

となり矛盾しない

11.
上の例の変数､関数の区別を脳内で行う

(例)

$\boldsymbol{Z} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^2 e^{\boldsymbol{y}}$ とする。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は独立変数とする

$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ とする。$\boldsymbol{\eta}$ は独立変数とする、$\boldsymbol{y}$ は従属変数である

$\boldsymbol{Z} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 e^{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{x}} = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta})$ とする。

$\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の関数なので $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である

$\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}$ の関数なので $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta})$ である

$\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{y}} = 2\boldsymbol{x}e^{\boldsymbol{y}}$

$\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{\eta}} = (2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^2)e^{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{x}}$

$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}(1, 1) = f(1, 1) = e$

$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}(1, 1) = g(1, 1) = e^2$

$\therefore\ \boldsymbol{Z}(1, 1) \neq \boldsymbol{Z}(1, 1)$

となり矛盾しない

また $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\eta}$ は独立変数で、$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta})$ は $\boldsymbol{y}$ によらないので

$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{y}} = \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{y}} = (2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^2)e^{\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{x}}$

$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ なので

$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{y}} = (2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^2)e^{\boldsymbol{y}}$

$\therefore \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{y}} \neq \left(\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{y}}$

となり矛盾しない

12.

座標変換においても 1. の矛盾はおこる

(例)

$f(x, y) = x^2 + y^2$ とする。x, y は独立変数とする　(1)
$x = x(r, \theta) = r\cos\theta$
$y = y(r, \theta) = r\sin\theta$ とする。r, θ は独立変数とする　(2)
$f(x, y) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = r^2 = g(r, \theta)$ とする

こんな感じの座標変換はよくあるが、

(1) において x, y は独立変数と仮定しかつ

(2) において x, y は従属変数と仮定しているので 1. の矛盾になっている

矛盾しないためには独立変数 x, y と 従属変数 x_1, y_1 を区別して

$f(x, y) = x^2 + y^2$ とする。x, y は独立変数とする
$x_1 = x_1(r, \theta) = r\cos\theta$
$y_1 = y_1(r, \theta) = r\sin\theta$ とする。r, θ は独立変数とする。
$f(x_1, y_1) = f(x_1(r, \theta), y_1(r, \theta)) = r^2 = g(r, \theta)$

としなければならない。

x_1, y_1 を追加せずに、脳内で独立変数 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と 従属変数 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を区別するときは

$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2$ とする。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は独立変数とする
$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(r, \theta) = r\cos\theta$
$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(r, \theta) = r\sin\theta$ とする。r, θ は独立変数とする。
$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}(r, \theta), \boldsymbol{y}(r, \theta)) = r^2 = g(r, \theta)$ とする

となる

13.

ラグランジアンから運動方程式を導くときは

従属変数をあとから独立変数にするということをおこなう

このときもある変数を独立変数かつ従属変数とする矛盾 1. と

別の関数を同じ関数とする矛盾 7. はおこっている

(例)

$x = x(t)$
$\dot{x} = \dot{x}(t)$ とする。t は独立変数とする　(1)
ラグランジアンは $L = \dot{x}^2 - x^2$ とする
運動方程式は
$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_x - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)_{\dot{x}} = 0$ より　(2)
$\therefore\ \ddot{x} - x = 0$

という感じでラグランジアンから運動方程式を得るが、

(1) より $x,\ \dot{x}$ は従属変数である

(2) より $\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_x$ と $\left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)_{\dot{x}}$ が定義されているので 3. より $x,\ \dot{x}$ は独立変数である

よって $x,\ \dot{x}$ は従属変数かつ独立変数となり 1. より矛盾である

また L の変数が明記されていないため L は $L(x, \dot{x})$ かもしれないし $L(t)$ かもしれないし、その他かもしれない。

もし $L(t)$ であるならば

(2) において L を 関数 $L(x, \dot{x})$ と仮定しているので

異なる関数 $L(t)$ と $L(x, \dot{x})$ を同じ関数 L としていることになり 7. より矛盾する

また もし $L(x, \dot{x})$ であっても

(1) では $L(x, \dot{x}), x, \dot{x}$ は従属変数

(2) では $L(x, \dot{x}), x, \dot{x}$ は独立変数

としているので 8. よりこれら L は異なる関数である。よって 7. より矛盾する

矛盾しないようにするには、従属変数 $x, \dot{x}$ と 独立変数 x_1, x_2 を区別し

さらに 関数 L と 関数 L_1 を区別しておけばよい

$x = x(t)$
$\dot{x} = \dot{x}(t)$ とする。t は独立変数とする
ラグランジアンは $L = \dot{x}^2 - x^2$ とする
$L_1(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2$ とする。x_1, x_2 は独立変数とする
運動方程式は
$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L_1}{\partial x_2}\right)_{x_1}\Bigg|_{\substack{x_1=x\\x_2=\dot{x}}} - \left(\dfrac{\partial L_1}{\partial x_1}\right)_{x_2}\Bigg|_{\substack{x_1=x\\x_2=\dot{x}}} = 0$ より
$\therefore\ \ddot{x} - x = 0$

こうすると矛盾はおこらない。

従属変数 $\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}$ と 独立変数 $\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}$ を脳内で区別し

さらに関数 $\boldsymbol{L}$ と 関数 $\boldsymbol{L}$ を脳内で区別するならば

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$
$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{x}}(t)$ とする。t は独立変数とする
ラグランジアンは $\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{x}}^2 - \boldsymbol{x}^2$ とする
$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \dot{\boldsymbol{x}}^2 - \boldsymbol{x}^2$ とする。$\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}$ は独立変数とする
運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right)_{\boldsymbol{x}}\Bigg|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\\ \dot{\boldsymbol{x}}=\dot{\boldsymbol{x}}}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\dot{\boldsymbol{x}}}\Bigg|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\\ \dot{\boldsymbol{x}}=\dot{\boldsymbol{x}}}} = 0 \text{ より}$$

$$\therefore\ \ddot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} = 0$$

となる。

P.18 熱力学で扱う状態 '25 7.11

熱力学で扱う状態の定義

(説明)

定義は明記されていない。熱力学的状態は経験的に決まる

熱力学の歴史において水と水蒸気の系の温度と圧力は熱力学状態として認められた

少し遅れて磁化も熱力学状態として認められた

なにが熱力学的状態であるかは発見されるものである

なにかの現象の熱力学的な説明が発見できればそれは熱力学的現象であり熱力学的状態であったということになる

もともと水と水蒸気の圧力と温度の法則を記述したものが熱力学である

水と水蒸気の理論を抽象化し (つまり理論の水と水蒸気の部分を A,B にして) 色々な物質や量や現象を当てはめて拡張を試み、うまくいけばそれは熱力学になる

P.18 平衡状態 '25 7.14

十分長い時間放っておくとマクロに見る限り変化が起こらない状態になる、これを平衡状態という

(説明)

この定義と矛盾するが過冷却した水は平衡状態でない。準安定状態である。熱力学の対象ではない

熱力学的な平衡状態というのは経験的にきまる。おおむね上の定義のとおりであるが、そうでない場合もある。

P.19 マクロな物理量 '25 7.12

マクロな物理量の定義

(説明)

マクロな物理量の公理的定義がはっきり示されることはない

ある量がマクロな物理量かどうかは経験的に決まる

温度、圧力、体積、密度、粒子数は熱力学の歴史においてマクロな物理量と認められている

磁化も少し遅れてマクロな物理量と認められた

ある量がマクロな物理量であるためには、それを用いた熱力学的説明が存在すればよい

P.27 (2.12) その 1 '25 7.5

系が均一でかつ X が相加変数とする

$V^{(i)} = \lambda V^{(1)}$ ならば $X^{(i)} = \lambda X^{(1)}$

(証明)

(1) λ が正の整数の場合

$V^{(i)} = \lambda V^{(1)}$ とする

系が均一で X は相加変数なので

$$X^{(i)} = \sum_{j=1}^{\lambda} X^{(1)} = \lambda X^{(1)}$$

(2) λ が正の有理数の場合

$\lambda = \dfrac{p}{q}$ とする。$p,\ q$ は正の整数

$V^{(i)} = \dfrac{p}{q} V^{(1)}$ とする

$V^{(1)'} = \dfrac{1}{q} V^{(1)}$ とすると

$qV^{(1)'} = V^{(1)}$

$qX^{(1)'} = X^{(1)} \quad (\because \ (1))$

$\therefore X^{(1)'} = \dfrac{1}{q} X^{(1)}$

$V^{(i)} = pV^{(1)'}$ なので

$$\begin{aligned}\therefore X^{(i)} &= pX^{(1)'} \quad (\because (1)) \\ &= \frac{p}{q} X^{(1)}\end{aligned}$$

(3) λ が正の無理数の場合

$\dfrac{1}{2}\lambda < q_1 < \lambda$ である 有理数 q_1 が存在する

$\lambda - q_1 = \xi_1$ とする $0 < \xi_1 < \dfrac{\lambda}{2}$ である

さらに

$\dfrac{1}{2}\xi_1 < q_2 < \xi_1$ である 有理数 q_2 が存在する

$\xi_1 - q_2 = \xi_2$ とする $0 < \xi_2 < \dfrac{\xi_1}{2} < \dfrac{\lambda}{2^2}$ である

同様に

$\dfrac{1}{2}\xi_{n-1} < q_n < \xi_{n-1}$ である 有理数 q_n が存在する

$\xi_{n-1} - q_n = \xi_n$ とする $0 < \xi_n < \dfrac{\xi_{n-1}}{2} < \dfrac{\lambda}{2^n}$ である

$$\therefore \lambda - \sum_{i=1}^{n} q_n = \xi_n,\ 0 < \xi_n < \frac{\lambda}{2^n}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\Big(\lambda - \sum_{n=1}^{n} q_n\Big) = \lim_{n\to\infty}\xi_n$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\Big(\lambda - \sum_{n=1}^{n} q_n\Big) = 0$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \lambda\ (\because\ \ \lim(f-g)=0, \lim f = a \text{ならば} \lim g = a)$$

この数列 q_n を使って

$$\begin{aligned} V^{(i)} &= \lambda V^{(1)} \\ &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} q_n\Big) V^{(1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (q_n V^{(1)})\ (\because\ \ \text{収束する級数は線型性をもつ}) \end{aligned}$$

体積が $q_n V^{(1)}$ である部分系の X を $X_n^{(1)}$ とする。X は相加変数なので

$$X^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(1)}$$

(2) より $X_n^{(1)} = q_n X^{(1)}$

よって

$$\begin{aligned} X^{(i)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (q_n X^{(1)}) \\ &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} q_n\Big) X^{(1)}\ (\because\ \ \text{収束する級数の線型性}) \\ &= \lambda X^{(1)} \end{aligned}$$

(1),(2),(3) より $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$ に対して

$V^{(i)} = \lambda V^{(1)}$ ならば $X^{(i)} = \lambda X^{(1)}$

P.27 (2.12) その 2 '25 7.5

系が均一でかつ X が相加変数とする

$X^{(i)} = KV^{(i)}$ (2.12)

(証明)

系が均一で X が相加変数のとき

$V^{(i)} = \lambda V^{(1)}$ ならば $X^{(i)} = \lambda X^{(1)}$ (別頁)

よって

$$\frac{X^{(i)}}{V^{(i)}} = \frac{\lambda X^{(1)}}{\lambda V^{(1)}} = \frac{X^{(1)}}{V^{(1)}}$$

ここで

$K = \dfrac{X^{(1)}}{V^{(1)}}$ とすると

$$\frac{X^{(i)}}{V^{(i)}} = K$$

$\therefore X^{(i)} = KV^{(i)}$

P.27 相加変数、示量変数の定義 '25 7.6

相加変数、示量変数の定義

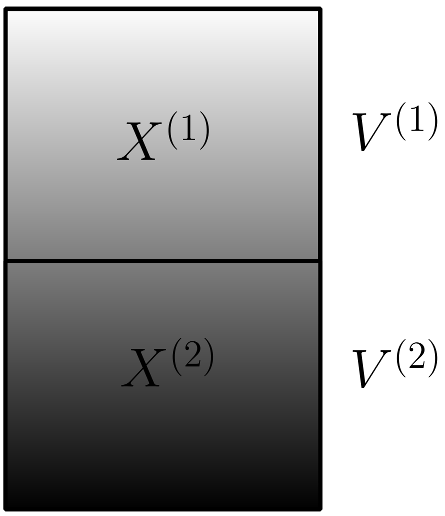
(定義)

$X = \sum_i X^{(i)}$ (2.11) が成り立つ量を相加変数とする

$X^{(i)} = KV^{(i)}$ (2.12) が成り立つ量を示量変数とする

(例)

相加変数であるが示量変数でない例



X を系の粒子数とする

X は相加変数 で、$X = X^{(1)} + X^{(2)}$ である

$V^{(1)} = V^{(2)}$ とする

$X^{(1)} = K_1 V^{(1)},\ X^{(2)} = K_2 V^{(2)}$ なる $K_1,\ K_2$ が存在する

図の場合、あきらかに $X^{(1)} \neq X^{(2)}$ なので

$K_1 \neq K_2$

よって X は示量変数ではない

P.32 問題 2.1 '25 6.29

$f(x,y)$ を考える。x, y は独立変数とする

$U^{(1)} = U^{(1)}$

$U = U^{(1)} + U^{(2)}$ とする。U, $U^{(1)}$ は独立変数とする

$Z(U^{(1)}, U) = f(U^{(1)},\ U^{(2)})$ とする

$\left(\dfrac{\partial Z}{\partial U^{(1)}}\right)_U$ を求める

(解答)

$f(x,y)$ を考える。x, y は独立変数とする

$U^{(1)} = U^{(1)}$

$U = U^{(1)} + U^{(2)}$ とする。U, $U^{(1)}$ は独立変数とする

$Z(U^{(1)}, U) = f(U^{(1)},\ U^{(2)})$ とする

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial Z}{\partial U^{(1)}}\right)_U &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\Bigg|_{\substack{x=U^{(1)}\\ y=U^{(2)}}}\left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial U^{(1)}}\right)_U + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\Bigg|_{\substack{x=U^{(1)}\\ y=U^{(2)}}}\left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial U^{(1)}}\right)_U \\ &= f_x(U^{(1)}, U^{(2)}) - f_y(U^{(1)}, U^{(2)})\end{aligned}$$

P.34 (2.23) '25 6.30

$\Delta\langle N\rangle = (V$によらない定数$) \times V$ (2.23)

(証明)

$\langle N^{(1)}\rangle = K^{(1)}V$

$\langle N^{(2)}\rangle = K^{(2)}V$

$\therefore\ \Delta\langle N\rangle = (K^{(2)} - K^{(1)})V$

P.34 (2.24) '25 6.30

$\delta N = o(V) \quad (2.24)$

(説明)

大きい系 V のなかの遠くにはなれた部分系 $V^{(i)}, V^{(j)}$ を考える

遠くに離れるほど ゆらぎ $\delta N^{(i)}$ と $\delta N^{(j)}$ の相関関係が少なくなる

よって

$$\lim_{V\to\infty} \frac{\delta N}{V} = \lim_{V\to\infty} \frac{\cdots + \delta N^{(i)} + \cdots}{V} = 0$$

証明？

たとえば $\delta N^{(i)}$ が独立なら平均 $\dfrac{\cdots + \delta N^{(i)} + \cdots}{V} = 0$ といえる。

しかし、i, j がはなれていれば $\delta N^{(i)}, \delta N^{(j)}$ は独立だが､近ければ $\delta N^{(i)}, \delta N^{(j)}$ は独立でない

P.34 (2.25) '25 6.30

$$\frac{\delta N}{\Delta \langle N \rangle} \propto \frac{o(V)}{V} \to 0 \ (V \to \infty) \quad (2.25)$$

(証明)

$\langle N^{(1)} \rangle = K^{(1)} V$

$\langle N^{(2)} \rangle = K^{(2)} V$

$\therefore \Delta \langle N \rangle = (K^{(2)} - K^{(1)}) V$

$\delta N = o(V) \quad (2.24)$

$$\therefore \frac{\delta N}{\Delta \langle N \rangle} = \frac{\delta N}{(K^{(2)} - K^{(1)}) V} \propto \frac{\delta N}{V} = \frac{o(V)}{V}$$

ここで

$$\frac{o(V)}{V} = o(1) \to 0 \ (V \to \infty)$$ (別頁)

なので

$$\therefore \frac{\delta N}{\Delta \langle N \rangle} \propto \frac{o(V)}{V} \to 0 \ (V \to \infty)$$

P.35 (2.25.2):(2.25) の示強変数の場合 '25 7.2

示強変数のゆらぎは相対的に $\dfrac{o(V)}{V} \to 0$ となる

相対的というのは $\Delta\langle T\rangle$ と比較してという意味である

$\dfrac{\delta T}{\Delta\langle T\rangle} \propto \dfrac{o(V)}{V} \to 0 \ (V \to \infty) \quad (2.25.2)$

(証明)

示強変数は V によらないので

$\langle T^{(i)}\rangle = K^{(i)}$

$\langle T^{(j)}\rangle = K^{(j)}$

$\therefore \Delta\langle T\rangle = K^{(i)} - K^{(j)}$

(2.29) より $\delta T = \dfrac{o(V)}{V}$ なので

$\therefore \dfrac{\delta T}{\Delta\langle T\rangle} = \dfrac{\delta T}{K^{(i)} - K^{(j)}} \propto \delta T = \dfrac{o(V)}{V}$

ここで

$\dfrac{o(V)}{V} = o(1) \to 0 \ (V \to \infty)$ (別頁)

なので

$\therefore \dfrac{\delta T}{\Delta\langle T\rangle} \propto \dfrac{o(V)}{V} \to 0 \ (V \to \infty)$

上のとおり V が大きいとき示強変数のゆらぎは ($\Delta\langle T\rangle$ と比べて) 相対的に無視できると言えるが、

$\delta T = \dfrac{o(V)}{V} \to 0 \ (V \to \infty)$

なので V が大きいとき示強変数のゆらぎは ($\Delta\langle T\rangle$ によらず) 絶対的に無視できると言えるような気がする

P.36 o(V)/V=o(1) '25 6.30

$$\frac{o(V)}{V} = o(1)$$

(証明)

$$f(V) = \frac{o(V)}{V}$$

とする

$$o(V) = Vf(V)$$

$$\therefore \lim_{V \to \infty} \frac{Vf(V)}{V} = 0$$

$$\therefore \lim_{V \to \infty} f(V) = 0$$

$$\therefore \lim_{V \to \infty} \frac{f(V)}{1} = 0$$

$$\therefore f(V) = o(1)$$

$$\therefore \frac{o(V)}{V} = o(1)$$

($o(1)$ の性質)

$$f(V) = o(1) \iff \lim_{V \to \infty} f(V) = 0$$

(証明)

$f(V) = o(1)$ ならば

$$\lim_{V \to \infty} \frac{f(V)}{1} = 0 \ (\because \text{ 付録}A)$$

$$\therefore \lim_{V \to \infty} f(V) = 0$$

$\lim_{V \to \infty} f(V) = 0$ ならば

$$\lim_{V \to \infty} \frac{f(V)}{1} = 0$$

$$\therefore f(V) = o(1) \ (\because \text{ 付録}A)$$

P.36 (2.30) '25 7.2

$$U = \sum_i U^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j(\neq i)} U_{int}^{(ij)} \quad (2.30)$$

(説明)

同じ U としているが U, $U^{(i)}$, $U_{int}^{(ij)}$ はすべて異なる

U_0, U_1, $U_{2\ int}$ として区別すると

$$U_0 = \sum_i {U_1}^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j(\neq i)} U_{2\ int}^{(ij)} \quad (2.30)$$

となる

U_1 は示量変数とし、$U_{2\ int}$ は非示量変数とする。

よって U_0 は非示量変数である

$${U_1}^{(i)} = K^{(i)} V^{(i)}$$

$$U_1 = \sum_i {U_1}^{(i)}$$

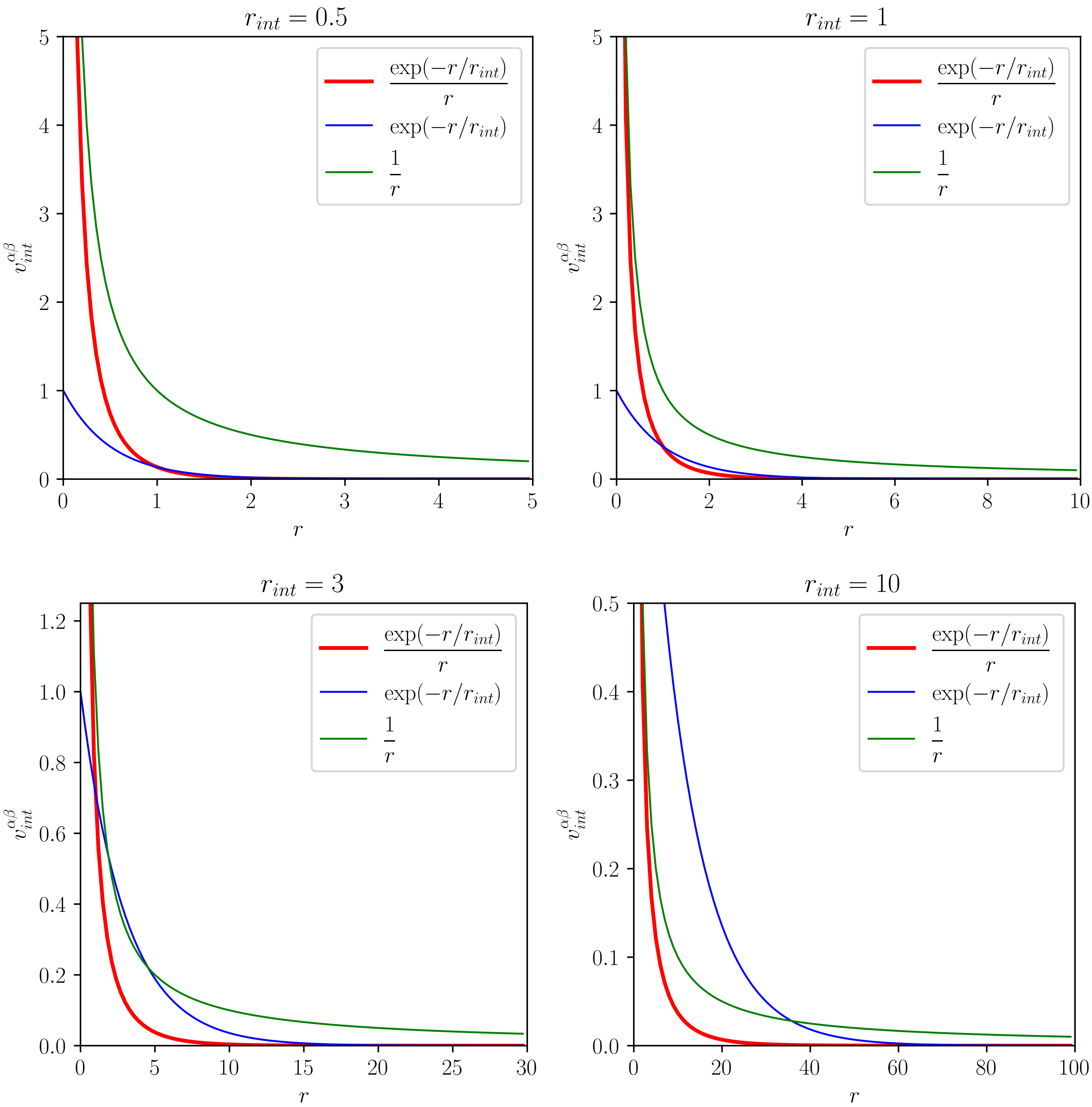
である

P.37 (2.32) '25 7.1

$v_{int}^{\alpha\beta} \sim \dfrac{\exp[-r/r_{int}]}{r}$ (2.32)

$r \simeq r_{int}$ を過ぎると急激に小さくなる

(説明)



プロットを見ると r_{int} 近辺で $\dfrac{\exp[-r/r_{int}]}{r}$ は急激に減少しているのがわかる。数式での証明？

r_{int} 近辺で $\dfrac{1}{r}$ も急激に減少しているがそれほど 0 には近づかない。いっぽう $\dfrac{\exp[-r/r_{int}]}{r}$ はほとんど 0 になる

またプロットから

$r \sim 0$ で $\dfrac{\exp[-r/r_{int}]}{r}$ は $\dfrac{1}{r}$ に近づく

$r \gg r_{int}$ で $\dfrac{\exp[-r/r_{int}]}{r}$ は $\exp[-r/r_{int}]$ に近づく

となることがわかる

P.38 (2.35) '25 7.3

$U=\sum_i U^{(i)}+o(V)\ \ (2.35)$

$o(V)$ の項は相対的に無視できる

(説明)

同じ U としているが $U,\ U^{(i)}$ は異なる量である

$U_0,\ U_1$ として区別すると

$U_0=\sum_i U_1^{(i)}+o(V)\ \ (2.35)$

となる

U_1 は示量変数とする

よって

$U_1=\sum_i U_1^{(i)}$

$U_1=KV$

$\therefore\ \dfrac{o(V)}{U_1}\propto\dfrac{o(V)}{V}\to 0\ (V\to\infty)$

よって $o(V)$ は $U_1=\sum_i U_1^{(i)}$ と比べて相対的に無視できる

第 3 章

P.43 要請 I(i) '25 7.14

要請 I(i) 平衡状態への移行

系を孤立させて十分長い有限時間放置すれば、マクロに見て時間変化しない特別な状態へ移行する。このときの系の状態を平衡状態と呼ぶ

(説明)

「孤立させて」というのは理論の対象となるマクロ物理量が透過しない壁で囲むということだと思う。水と水蒸気の系ならば不動、防水、断熱の壁

「変化しない」というのはマクロ物理量が変化しないということだと思う。水と水蒸気の系ならば温度、体積、圧力、重さが変化しない

「特別な状態」というのは時間変化しない状態のこと

P.43 要請 I(ii) '25 7.3

要請 I(ii)

もしもある部分系の状態がその部分系をそのまま孤立させたときのときの平衡状態とマクロに見て同じ状態にあれば、その部分系の状態も平衡状態と呼ぶ

平衡状態の部分系も平衡状態

(説明)

「そのまま孤立させて」というのは部分系を対象としているマクロ物理量が透過しない壁で囲むということだと思う。水と水蒸気の系なら防水、不動、断熱の壁

「マクロに見て同じ状態」というのは理論の対象としているマクロ物理量の値が同じということだと思う。水と水蒸気の系ならば、温度、体積、圧力、密度が同じということ

話を部分系に限っているのは、対象となる系は部分系かまたは全体系しかなく、全体系の場合ただの孤立系の平衡状態となる。要請が意味をもつのは部分系に対してだけなので部分系と限っている

P.44 要請 II-(i) '25 7.14

要請 II-(i)

それぞれの平衡状態に対して値が一意的に定まるエントロピーという量 S が存在する

(説明)

「それぞれの平衡状態」というのはマクロ物理量が異なる平衡状態のこと

「一意的に定まる」というのはマクロ物理量に対して一意に定まるということ

「量 S」の量はマクロ物理量のこと

P.45 操作 '25 7.6

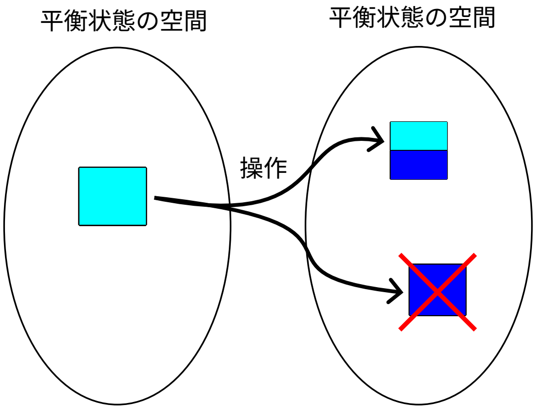
操作は関数である

(説明)

明記されていないが操作は関数であると仮定している。つまり

同一の状態から同一の操作によって遷移する状態は 1 つである

同一の状態から同一の操作によって遷移する状態が複数あることはないと仮定する



P.46 単純系 '25 7.6

単純系の定義

(定義)

外力がない場合、内部束縛のない部分系を単純系という

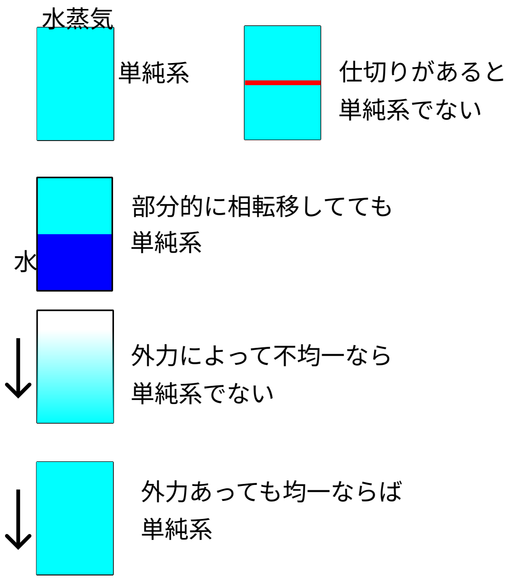
外力がある場合、内部束縛がなく外力による不均一さが無視できる部分系を単純系という

(説明)

内部束縛とは仕切りのことである

3.3.4 節にあるとおり相転移による不均一があっても単純系という

磁化云々はよくわからないので、水と水蒸気の系を考えることとする



P.47 基本関係式 '25 7.7

基本関係式

(説明)

基本変数の関数のエントロピーを基本関係式という

基本変数の定義？基本関係式の定義？

U と示量変数で S が表示できればなんでも基本変数と基本関係式になるのか？

ほかの変数で S を表示させると基本関係式にならなくなる理由？

基本変数、基本関係式はひとつだけ？

P.48 要請 II-(ii) のつづき '25 7.8 {#C3_P48_要請 II-(ii) のつづき_10}

要請 II-(ii) のつづき

単純系の部分系は元の系と同じ基本関係式をもつ

(説明)

単純系の基本関係式

$S = S(U, \boldsymbol{X})$

基本変数の定義？基本関係式の定義？

U と示量変数で S が表示できればなんでも基本変数と基本関係式になるのか？

ほかの変数で S を表示させると基本関係式にならなくなる理由？

基本変数、基本関係式はひとつだけ？

P.50 要請 II-(iv) '25 7.9

要請 II-(iv)

(1) 単純系は均一な部分系に分割できる

(2) その部分系の状態は U, X の値で一意に決まる

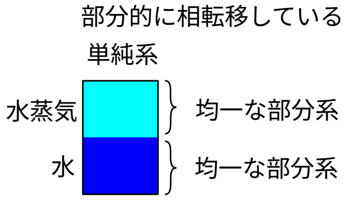
(3) その部分系の U, X と同じ値をもつ不均一な平衡状態は存在しない

(4) そのようなエントロピーの自然な変数の組 U, X が存在する

(5) 単純系の均一な平衡状態は、U, X の値と一対一対応する

(説明)

(1) 単純系は均一な部分系に分割できる



(2) その部分系の状態は U, X の値で一意に決まる

U,X から状態空間への関数関係

(3) その部分系の U, X と同じ値をもつ不均一な平衡状態は存在しない

不均一な状態空間への対応はない

(4) そのようなエントロピーの自然な変数の組 U, X が存在する

U,X,W1, U,X,W2 が異なる状態に対応することはない

(5) 単純系の均一な平衡状態は、U, X の値と一対一対応する