場合の数

順列と組み合わせ

1. 順列を数える順序

A, B, C, D の 4 文字を一列に並べて造られる順列の総数は,

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ 通り}$$

である. これは樹形図を書けばすぐにわかることである.
では, A が 2 番目のものは? これは,

$$(4 \times 3 \times 2 \times 1) \div 4 = 3 \times 2 \times 1 \text{ 通り}$$

と数えることができる. この様になる理由としてこの個数を A_2 と書くことにすれば

A, B, C, D の順列において
A, B, C, D は**対等**であるから
当然 $\mathrm{A}_2 = \mathrm{B}_2 = \mathrm{C}_2 = \mathrm{D}_2$ となるはず

ということからである.
たとえば, A か B が 2 番目であるものの個数は

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_2 &= (3 \times 2 \times 1) \times 2 && (1) \\ &= 2 \times (3 \times 2 \times 1) && (2) \end{aligned}$$

この (2) を左から順に見ていくと,
· 最初の 2 は, 2 番目が A か B の 2 通りの 2
· つぎの 3 は, 1 番目として, 2 番目の文字を除く 3 通りの可能性があることの 3
· つぎの 2 は $\cdots$ というように考えていくことができる.
このことから

順列というものは, 作られる段階においては, たとえ '左から順に' であったにせよ数えるときは, 何番目から数えようと自由である

ということを意味する.
この**数える順序の自由さ**が順列の最大の特徴である. これは

対等性と, 積の交換法則 ((1)→(2))

によって導かれる.
またこの特徴を生かして, できるだけ数えやすい順序を設定して数えるべきである.

次の例題を考えてみよう.

例題 1

0〜9 の 10 個の数字から異なる 3 個を選んで 3 桁の整数を作るとき (たとえば, 012 は 3 桁でないものとする),
(1) 全部で何通りできるか.
(2) 偶数は何通りできるか.

(解答) 3 桁の整数を ABC とする.
(1) A$\neq 0$ に注意して, A $\to$ B $\to$ C の順に数えると,

$$9 \times 9 \times 8 = \mathbf{648} \text{ 通り}$$

(2) C=偶数 (0, 2, 4, 6, 8) で A$\neq 0$ である順列の個数を数えればよいが, C $\to$ A $\to$ B の順に数えると,

$$\begin{aligned} \mathrm{C} = 0 &\ :\ 1 \times 9 \times 8 \text{ 通り} \\ \mathrm{C} \neq 0 &\ :\ 4 \times 8 \times 8 \text{ 通り} \end{aligned}$$

したがって答えは, $8 \times (9 + 32) = \mathbf{328}$ 通り

順列は一般に '規制の強い順' に数えるのがよい.

2. 順列の束である組み合わせ

異なる n 個から, 例えば 3 個選んで作られる順列の個数は, 樹形図をイメージして

$$n \times (n-1) \times (n-2) \text{ 通り}$$

と数えることができる. 一般に

> n 個の異なるものから r 個を選んで作られる**順列の個数**は
>
> $$n \times (n-1) \times \cdots \times \{n-(r-1)\} \text{ 通り}$$
>
> であり, この個数を ${}_n\mathrm{P}_r$ と記号化する.

この順列の個数は次のように数えることもできる.

とりあえず n 個の中から r 個の組み合わせを選んでから (この組み合わせが x 通りあるとする) その r 個を並べて作られる順列の総数であるから

$${}_n\mathrm{P}_r = x \times {}_r\mathrm{P}_r$$

とかける. つまり,

> n 個の異なるものから r 個を選んで作られる**組み合わせの個数**は ${}_n\mathrm{C}_r$ と記号化されていて上のことから
>
> $${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{{}_r\mathrm{P}_r} = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

この式から言えることは ${}_n\mathrm{C}_r$ は, ${}_n\mathrm{P}_r$ 通りの順列を $r!$ 個ずつを束にした時の束の数であるということである. この　**同じ個数からなる束**という観点は, 場合の数, 確率のどちらにおいても非常に重要で, たとえば次の問題でも応用できる.

> **例題 2**
>
> SHODAI という語の全部の文字を用いて作る順列の中で, 母音 O, A, I がこの順にあるものは何通りあるか.

普通に考えるとすればまず母音 (O, A, I) の '場所の組み合わせ' を決めてから母音を並べ次に子音 3 文字 (S, H, D) を並べるところで, すると,

$${}_6\mathrm{C}_3 \times 1 \times 3! \text{ 通り}$$

となるが.....

(解答) 答えを x 通りとすると, なんの制約もない 6 文字の順列の個数について,

$$x \times 3! = 6!$$
$$x = \mathbf{120} \text{ 通り}$$

(注)

6!通りの順列のうちに, 題意に適するものは 3! 通りにつき 1 つの割合である, と考えたわけで, このことから, O, A, I がこの順に並ぶ確率は 1/3! であることが瞬間的にわかる.

ちなみに「まず子音 3 文字を自由に並べてから母音を並べる」と考えてから, $(6 \times 5 \times 4) \times 1$ と数えるのも上手な数え方である.

3. 同じものがある順列

確率では, どんなに同じように見える 2 つのものであっても, その 2 つのを区別するのが原則である. でないと, '同様に確からしい' が満たされるとは限らない.

ところが場合の数の問題において「3 個の白石, 4 個の黒石」といえば同色の色は区別しないのが普通である. このように, '同じようなもの' に対する扱いは確率と場合の数とでは食い違うのだがこのようなパターンにもマスターしておく必要がある.

このタイプの基本公式として

> たとえば, a 個の A, b 個の B, c 個の C のすべてを並べて作られる順列の個数は
>
> $$\frac{(a+b+c)!}{a!\cdot b!\cdot c!}\text{通り}$$

であって, これは順列 → 組み合わせと同様に「求める個数を x とする. $a+b+c$ 個の文字がすべて異なるとみなした順列の個数について, 次の等式が成り立つ

$$x\times a!\cdot b!\cdot c! = (a+b+c)$$

」

と, 束をもちだして得られる.

> 例題 3
>
> HOKKAIDO の 8 文字から 7 文字を取り出して 1 列に並べる方法の総数をもとめよ.

O と K が 2 個ずつで, 残り 4 文字が 1 個ずつであるから, 8 文字全部を並べるとすると....

$$\frac{8!}{2!\cdot 2!} = 2\cdot 7!\ \text{通り} \tag{1}$$

(解答) 取り出さない 1 個が O か K の場合と, そうでない場合とに分けて数えると,

$$\begin{aligned}\frac{7!}{2!}\times 2+\frac{7!}{2!\cdot 2!}\times 4 &= 7!+7!\\ &= 2\cdot 7! = \mathbf{10080}\ \text{通り}\end{aligned}$$

結論として, 8 文字全部を並べる場合の (1) と同じになる.(その理由を考えてみよう)

> 例題 4
>
> A, A, B, B, C, C の 6 文字を 1 列に並べる順列の総数はいくつあるか求めよ. またそのうち同じ文字が隣り合わない順列の総数を求めよ.

後半の問いには A, B, C が全く '対等' であることに着目しよう. 数学では, 対称性や対等性に着目して議論をすっきりさせることが, 重要なポイントの 1 つである.

(解答)

1 つ目の問いについて,

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = \mathbf{90}$$

以下, 2 つ目の問いについて：

題意に適する順列のはじめの 2 文字について

AB, BA, AC, CA, BC, CB

の 6 タイプあり各タイプ同数ずつある.

そこで, AB$***$$*$ タイプの個数を求め, それを 6 倍すれば求まる. この $****$ についてさらに分解して C$*$C$*$, C$**$C, $*$C$*$C

の 3 タイプ考えられる. この 3 タイプのうちはじめの 2 つは 2 通りずつ, 最後のは 1 通りであるから求める総数は

$$(2+2+1)\times 6 = \mathbf{30}$$

「一部の文字は隣り合ってはいけない」という条件の問題もよく出題されていて,

このタイプは, まず隣り合ってもよい文字を並べるのが定石

である.

4. 和の法則, 余事象

集合 A の要素の個数を記号 $n(A)$ で表すことにする. また, U を全体集合としたときの A の補集合（確率では, 余事象ともいう) を $\overline{A}$ で表すと,

$$
\begin{aligned}
&n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) &(1)\\
&n(A) = n(U) - n(\overline{A}) &(2)
\end{aligned}
$$

が成り立っている. (1) は '和の法則' と呼ばれている. そのまま確率の和の法則につながる重要公式であるが, ベン図を書けば, これが成立することは明らかである.
(2) も明らかであるが, この公式は $n(A)$ よりも $n(\overline{A})$ のほうが数えやすいときに使われる公式である. とくに集合 A を規定する条件に

少なくとも 1 つは〜 $\cdots$ **(∗)**

という言葉が使われているときでは有効である. ちなみに, A, B がともに (∗) の形であり, $n(A \cap B)$ を数えたいときは,

$$
\begin{aligned}
n(U) - n(\overline{A \cap B}) &= n(U) - n(\overline{A} \cup \overline{B})\\
&= n(U)\{n(\overline{A}) + n(\overline{B}) - n(\overline{A} \cap \overline{B})\}
\end{aligned}
$$

によって数えるのがよい.

例題 5

4 桁の電話番号は 0000 から 9999 までの 10000 通りある. このうち,
(1) 0007, 3556 のように同じ数字が連続しているものは何通りあるか.
(2) 数字 1 と 6 の両方を含むものは何通りあるか.

(1) は連続する 2 数の組 (3 組ある) のうち

少なくとも 1 組が同じ数

という条件であり, (2) も, 1 を含むとは,

少なくとも 1 つが 1 である

ということで, 余事象を使うのが良い.

(解答)
(1) 題意の条件を否定すると
どの連続する 2 数も異なる
であり, この条件をみたすものは,

$$10 \times 9 \times 9 \times 9 = 7290 \text{ 通り}$$

よって答えは,

$$10000 - 7290 = \mathbf{2710} \text{ 通り}$$

(2) 数字 1 を含む番号の集合を A, 同じく 6 については B とすると, 求めるものは,

$$n(A \cap B) = 10000 - n(\overline{A} \cup \overline{B})$$

ここで, 和の法則により,

$$
\begin{aligned}
n(\overline{A} \cup \overline{B}) &= n(\overline{A}) + n(\overline{B}) - n(\overline{A} \cap \overline{B})\\
&= 9^4 + 9^4 - 8^4 = 9026
\end{aligned}
$$

よって, 答えは,

$$10000 - 9026 = \mathbf{974} \text{ 通り}$$

(1) を直接数えるには, まずは**排反** (共通部分がない) の場合分けがポイントである.
(1) のように「どこか少なくとも 1 か所である状態になっている」というときは,
どこで初めてその状態になるか
で場合を分けると '排反で**もれのない**' 場合分けが確実に得られる.
したがって,
$aa{*}{*},\ abb{*},\ abcc,\ abaa$ (∗は自由)
の 4 タイプに分けて数えると

$$
\begin{aligned}
&10 \cdot 10 \cdot 10 + 10 \cdot 9 \cdot 10 + 10 \cdot 9 \cdot 8 + 10 \cdot 9 \cdot 1\\
&= \mathbf{2710}
\end{aligned}
$$

演習問題 (難しい場合は基礎演習から解くこと)
解答 p14

1. 1 から 9 までの数字から異なる 5 個をとって作った順列のうちで, 次の条件を満たすものの個数をそれぞれ求めよ.
   (1) 奇数番目は必ず奇数がある.
   (2) 奇数は必ず奇数番目にある.

2. SHIBAURA の 8 文字から 3 文字を選ぶ組み合わせの数を求めよ.

3. 1 から 10 までの自然数の順列 $a_1a_2a_3\cdots a_{10}$ は全部で 10!通りあるが, このうち次の条件

$$a_1 < a_4 < a_7 < a_{10},$$
$$a_2 > a_5 > a_8,$$
$$a_3 < a_6 < a_9$$

   をすべて満たすものは何通りあるか求めよ.

4. KOKADAI の 7 文字から作られる順列を考える.
   (1) 母音 4 文字が隣り合わないものは何通りか.
   (2) 子音 3 文字が隣り合わないものは何通りか.

5. YOKOHAMA という語の 8 文字をすべて並べてできる順列のうちで, AA か OO の並びをすべて含むものは何通りあるか.

基礎演習 解答 p16

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6 の番号のついたカードが 1 枚ずつ合計 6 枚ある. この中から 3 枚取り出して 1 列に並べる並べ方の総数を求めよ.

2. 大人 2 人, 子ども 5 人の 7 人が 1 列に並ぶとき, 大人 2 人が隣り合う並べ方は何通りあるか.

3. 1 から 7 までの 7 つの数字をすべて 1 回ずつ使ってできる 7 桁の整数のうち, 両端の数字が偶数であるものの総数を求めよ.

4. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 7 個の数字から異なる 3 個の数字を選んで, 3 桁の整数をつくるとき, 次の整数は何個できるか.
(1) 奇数　　　　　(2) 偶数

5. バレーボールの選手 6 人が, 円形になって練習をするとき, その並び方は何通りあるか.

6. 男子 4 人と女子 3 人が円形のテーブルに向って座るとき, 次のような座り方は何通りあるか.
(1) 女 3 人が隣り合う.
(2) 特定の 2 人が隣り合う.

7. education の 9 文字を 1 列に並べるとき, 次の問いに答えよ.
(1) 母音と子音が交互に並ぶ並び方は何通りあるか.
(2) d と t の間に 2 文字入る並べ方は何通りあるか.

8. 3 組の夫婦 6 名が円形のテーブルに向かって座るとき, 次のような座り方は何通りあるか.
(1) それぞれの夫婦が隣り合う.
(2) 男女が交互になる.

9. 0, 1, 2, 3, 4, 5 の 6 個の数字から異なる 3 個の数字を選んで, 3 桁の整数をつくるとき, 次の問いに答えよ
(1) 全部でいくつできるか.
(2) 430 以下の数はいくつあるか.

10. 色の異なる 6 個の玉を糸をつないで腕輪をつくるとき, 腕輪は何通りあるか.

11. A, B, C, D, E と書かれた 5 枚のカードから 2 枚取り出すとき, その取り出し方は何通りあるか.

12. 1 から 9 までの 9 個の自然数から 4 個の数を取り出すとき, 次のような取り出し方は何通りあるか.
(1) 偶数 2 個と奇数 2 個
(2) 少なくとも 1 個は偶数

13. motto の 5 文字すべてを並べてできる順列の総数を求めよ.

14. WORLDCUP の 8 文字を 1 列に並べるとき, 次の問いに答えよ.
(1) 異なる並べ方は全部で何通りあるか.
(2) W, R, C, P がこの順にある並べ方は何通りあるか.

対応を考える

今回, 見た目には順列, 組み合わせに関係していなくても

言い換えると, 順列, 組み合わせ
に帰着できるもの

について, 身につけたいタイプをまとめることとする. その言いかえは, 言い換えの前後で, **1 対 1 対応**できれば理想的であるが, 1 対 k 対応であっても, k で割ればいいだけのことである.

1. 整数解の個数

整数解の個数で公式化して覚えるのは次の 4 タイプである.

① $1 \leqq x_1 < x_2 < x_3 \leqq 10$
② $1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq 10$
③ $x_1 + x_2 + x_3 = 10,\ x_i \geqq 1\ (i = 1,\ 2,\ 3)$
④ $x_1 + x_2 + x_3 = 10,\ x_i \geqq 0\ (i = 1,\ 2,\ 3)$

①については一気に ${}_{10}\mathrm{C}_3 = \mathbf{120}$ 通りと数えることができる. 理由として
①の解の集合と, 1〜10 のうちの 3 数からなる組み合わせの集合とが, 1 対 1 に対応するため (例 : $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 7 \Leftrightarrow \{2,\ 3,\ 7\}$).
②もうまい対応を考えると, ①の形に帰着できる. それは

$$② \Leftrightarrow 1 \leqq x_1 < x_2 + 1 < x_3 + 2 \leqq 12$$

の同値変形によって①の形にすることで②は, ${}_{12}\mathrm{C}_3 = \mathbf{220}$ 通りと数えられる.
②ではたとえば,

$$\begin{aligned} & x_1 = 3,\ x_2 = 3\ x_3 = 9 \\ \Leftrightarrow & x_1 = 3, x_2 + 1 = 4,\ x_3 + 2 = 11 \\ \leftrightarrow & \{3,\ 4,\ 11\} \end{aligned}$$

という風に対応させている.

一般化させると

増加条件の公式
① $1 \leqq x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leqq n$
満たす整数の組 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$ は,
${}_n\mathrm{C}_k$ 通り
② $1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_k \leqq n$
$(\Leftrightarrow 1 \leqq x_1 < x_2 + 1 < \cdots$
$< x_k + k - 1 \leqq n + k - 1)$
については, ${}_{n+k-1}\mathrm{C}_k$ 通り

③について, 例えば,

$$\begin{aligned} &\cdot\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 7 \\ &\cdot\ x_2 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 7 \end{aligned}$$

の 2 通りの解 (組み合わせとしては同じ) は異なるものとすることに注意する.
③もいままでと同様に, 1 つの ${}_n\mathrm{C}_r$ の形で数えることができるような, うまい対応の仕方がある. 少し考えてみよう.
③は 10 個のものを 3 組に分けるという話で, ものを ◯, 分割のしきりを ｜ とすると,

$$\begin{matrix} \bigcirc\bigcirc\bigcirc & | & \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc & | & \bigcirc\bigcirc\bigcirc \\ x_1 = 3 & & x_2 = 4 & & x_3 = 3 \end{matrix}$$

というように 2 本のしきりで 3 分割でき, しきりの場所は隣接する 2 つの ◯ の間で,
$10 - 1 = 9$ か所あるから, ${}_9\mathrm{C}_2 = \mathbf{36}$ 通り
となる.
④に関しても ② → ①と同じように, ④ の形に帰着できる.

$$④ \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) = 13 \\ x_i + 1 \geqq 1\ (i = 1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

したがって, ④は ${}_{12}\mathrm{C}_2 = \mathbf{66}$ 通り.

一般化すると

和の条件の公式

③ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$

$x_i \geqq 1\ (i=1,\ 2,\cdots,\ k)$

を満たす整数の組 $(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_k)$ は,

n 個の ◯ と $k-1$ 本のしきり | で考えて

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \text{ 通り}$$

④ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$

$x_i \geqq 0\ (i=1,\ 2,\cdots,\ k)$

については, これを, ③の形

$(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_k+1)=n+k$

$x_i+1 \geqq 1\ (i=1,\ 2,\cdots,\ k)$

同値変形させることにより,

$${}_{n+k-1}\mathrm{C}_{k-1} \text{ 通り}$$

(注) ④の分割の個数は, 重複組み合わせの個数でもある.

2. 分割の個数

和の条件の③, ④は,

「n 個のミカン (区別しない) を, 異なる k 箱に分割して入れる」

と, 分割 (あるいは分配) の話に翻訳して公式をつくった. (③と ④は空箱をゆるすかどうかの違い, 分割とは逆に,

「k 種類の果物 (各種十分にたくさんあるものとする) をつかって, n 個からなる果物の盛り合わせをつくる」

というストーリーも考えられる.

この ‘盛り合わせ’ は, 同じ種類の果物を重複して何個も使ってもよい, という意味で

とくに④は, **重複組み合わせ**

とよばれている.

このように, 組を区別し, ものを区別しない分割は ‘重複組み合わせ’ を意味するが, じつはたんに分割といえば

ものを区別して, 組を区別しない

というケースが一般的である. 次の例題を考えてみよう.

例題 1

(1) 6 人を 3 人ずつの 2 組に分ける方法は何通りあるか.

(2) 6 人を 2 人と 4 人の 2 組に分ける方法は何通りあるか.

(3) 7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける方法は何通りあるか.

特に断りがない場合は,

人間は区別するが, 組は区別しない

と解釈する (組を区別するということは各組に固有な名称を付けるということである).

(解答)

(1) 2 組に A, B の名前をつけると, A 組の決め方は

$${}_6\mathrm{C}_3 = 20 \text{ 通り}$$

で, A 組を決めると B 組は自動的に決まるので 20 通りである.

ここで, 題意の 1 つの組分けに対し, 名前 A, B のつけ方が 2!通りあるから答えは

$$20 \div 2! = \mathbf{10} \text{ 通り}$$

(2) (1) と同様に A, B 組として考えると A 組の決め方は, 2 人と 4 人の場合があって,

$${}_6\mathrm{C}_2 + {}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 \cdot 2 \text{ 通り}$$

答えは, これに 2!で割って,

$${}_6\mathrm{C}_2 = \mathbf{15} \text{ 通り}$$

(3) 3 組に A, B, C の名前をつける. すると下のようなタイプが考えられる.

A 組	B 組	C 組
2 人	2 人	3 人
2 人	3 人	2 人
3 人	2 人	2 人

これより

$${}_7\mathrm{C}_2 \cdot {}_55_2 \times 3 \text{ 通り} \qquad ①$$

である.

答えはこれを 3!で割れば得られるので

$${}_7\mathrm{C}_2 \cdot {}_55_2 \div 2 = \mathbf{105} \text{ 通り}$$

(注) (3) の①で, 各タイプ 2 人, 3 人, 3 人の順に数え上げるとどれも ${}_7\mathrm{C}_2 \cdot {}_5\mathrm{C}_2$ 通りになることに着目している. (1)〜(3) は結局

$$(1)\ {}_6\mathrm{C}_3 \div 2!,\ (2)\ {}_6\mathrm{C}_2,\ (3)\ {}_7\mathrm{C}_2 \cdot {}_55_2 \div 2$$

となるが, これを慣れれば一気にまとめて計算してもよいことがわかるだろう.

次に例題 1 と異なり, 各組の数が定められていない場合どうなるかを考察する.

例題 2

9 人を 3 組に分ける方法は全部で何通りあるか. ただし人は区別し, 組は区別しないものとし, 1 組 1 人以上いるものとする.

逆に, 組を区別し, 人を区別しない場合は, すでに解説済み (和の公式③) であるが, 本問は一気に ${}_n\mathrm{C}_r$ の形では数えられない.

例題 1 に結びつけるとすれば, 3 組の人数について下のようなタイプが考えられる.

${}_9\mathrm{C}_1 \cdot {}_8\mathrm{C}_1 \div 2$	(1)	1,	1,	7
$+{}_9\mathrm{C}_1 \cdot {}_8\mathrm{C}_2$	(2)	1,	2,	6
$+{}_9\mathrm{C}_1 \cdot {}_8\mathrm{C}_3$	(3)	1,	3,	5
$+{}_9\mathrm{C}_1 \cdot {}_8\mathrm{C}_4 \div 2$	(4)	1,	4,	4
$+{}_9\mathrm{C}_2 \cdot {}_7\mathrm{C}_2 \div 2$	(5)	2,	2,	5
$+{}_9\mathrm{C}_2 \cdot {}_8\mathrm{C}_3$	(6)	2,	3,	4
$+{}_9\mathrm{C}_3 \cdot {}_6\mathrm{C}_3 \div 3!$	(7)	3,	3,	3

$= \cdots = 3025$ 通り

となるが少しめんどうである.

例 1 と同じように, とりあえずは組を区別して数え, それを束ねるという方法がうまい数え方である.

(解答)

組も区別すると, 各人 3 通りの可能性が考えられるので,

3^9 通り　　　$\cdots$ ①
ただし, この数え方だと, 0 人の組も出現するので, ①から,
9 人が 1 つの組に集中する $\cdots$ 3 通り
2 つの組に集中する $\cdots {}_3\mathrm{C}_2(2^9-2)$ 通りを除いて,

$$3^9-\{3+3(2^9-2)\}=3^9-3\cdot 2^9+3 \text{ 通り}$$

組を区別しない場合は, これを 3!で割って

$$(3^8-2^9+1)\div 2=\cdots=\mathbf{3025} \text{ 通り}$$

組は区別した方が数えやすく, k 組の場合は, 区別するかしないかは, $k!$: 1 の対応になる, というのがポイント.
以上の '分割' について整理しておく

n 個のものを k 組で分割する (各組 1 個以上とする). その場合の数は,
(1) ものは区別せずに, 組は区別する場合
公式③と同じことで

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\text{通り}$$

(0 個の組をゆるす④は, 重複組み合わせ (k 種 n 個) の個数である.)
(2) ものは区別し, 組は区別しない場合

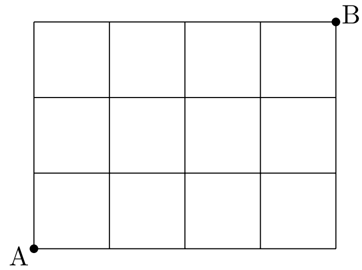
$$(k^n\text{を補正})\div k!\text{通り}$$

一般論だとこの '補正' が難しいので, このタイプの問題は, 各組の個数が指定されているものが多い.
$k=5$ で, 2, 2, 2, 1, 1 個の場合は,

$${}_8\mathrm{C}_2\cdot{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1\div(3!\cdot 2!) \text{ 通り}$$

3. 図形と場合の数

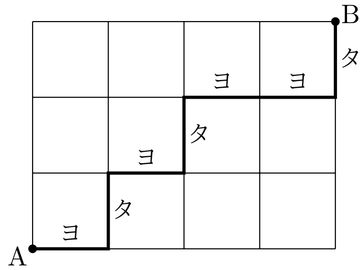
図形に関連した場合の数として, 最も有名なのは, たとえば下の図において A→B の**最短経路**の本数は?というものである.



最短経路の長さは, 横方向が 4, 縦方向が 3 で, 横がヨ, 縦をタと書くと, 下の太線の経路は,

ヨタヨタヨヨタ

と表現するとができる.



このように, 最短経路は,

4 個のヨと 3 個のタの順列に対応する

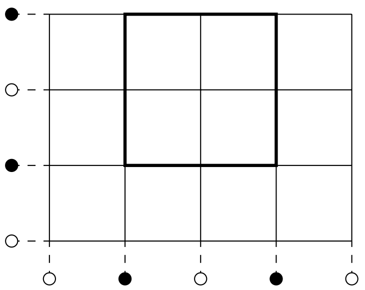
ので, その本数は,

3 個のタの場所に着目して ${}_7\mathrm{C}_3$ 本

というふうに数えるとができる.

話を変えて, 先の図において

四角形は全部でいくつあるか?



これも有名問題である. たとえば上の図の太線の四角形は,

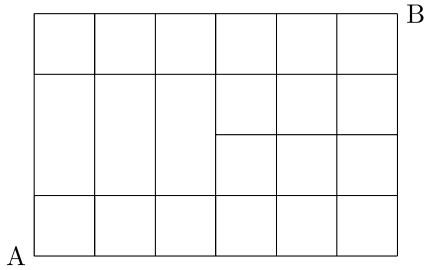
- 印をつけた 2 本の横線と 2 本の縦線の組に対応するので,

$$ {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 = 60 \text{ 個} $$

と数えることができる.

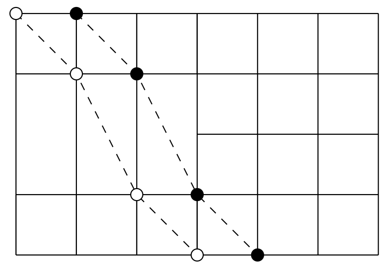
例題 3

下の図において, A から B への最短経路は何本あるか.



完全な碁盤の目状ではないので, 一気に数えることはできない. そこで, 場合の数の大原則'排反ですべてを尽くした場合分け'の方針をとってみる.

(解答)



どの最短経路も上の図の 4 つの ● のどれか 1 点だけを必ず通るから,

$$ {}_4\mathrm{C}_1 \cdot 1 + {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_5\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_6\mathrm{C}_3 + 1 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 = \cdots = \mathbf{129} \text{ 本} $$

(注) 図の 4 つの白丸に着目するなど, 場合分けの方法はいろいろ考えられる.
なお, 完全な碁盤の目にして数え, 補ったところを通るものを除くという '余事象' の解法をとってもできる.

演習問題 (難しい場合は基礎演習から解くこと)
解答 p18

1. 12 脚の椅子が 1 列に並べてある. A, B, C, D の 4 人が, どの 2 人も隣り合わない椅子に座る方法は何通りあるか.

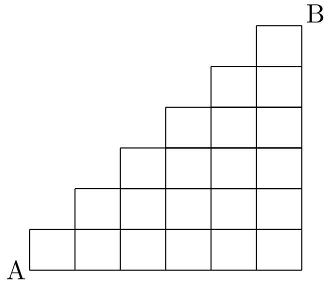
2. 赤玉 6 個と白玉 4 個の 10 球を, 異なる 3 つの箱に入れる方法は何通りあるか. ただし, 空箱があってもよいものとする.

3. $a+b+c \leqq 20$ を満たす自然数 $(a,\ b,\ c)$ の組は何通りあるか. また, そのうちに a が奇数のものは半数以上あることを示せ.

4. 12 人の生徒を 4 人ずつ 3 組に分ける方法は何通りあるか. また, 特定の 3 人 A, B, C が互いに異なる組に入るように 4 人ずつ 3 組に分る方法は何通りあるか.

5. 1 そうあたり 4 人まで乗れるボート 2 そうに, 6 人が分乗するとき, 次の乗り方は何通りあるか.
(1) 人は区別しないが, ボートは区別する場合.
(2) 人もボートも区別する場合.
(3) 人は区別するが, ボートは区別しない場合.

6. (1) 下の図の A から B に至る最短経路は全部で何本あるか.



(2) 上の図に四角形は全部でいくつあるか.

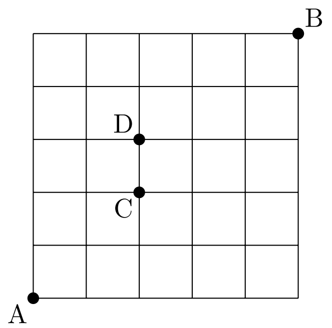
7. どの 3 本の対角線もその内部では 1 点で交わらない凸 10 角形がある. そのすべての対角線を引くと, 凸 10 角形の内部にいくつの交点ができるか.

基礎演習 解答 p21

1. 9 人の生徒を, 次のような組に分ける分け方は何通りあるか.
   (1) 3 人ずつ A, B, C の 3 組
   (2) 3 人ずつ 3 組

2. 正六角形の対角線の本数を求めよ.

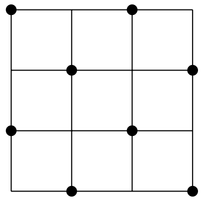
3. 下の図のような道のある町がある. 次の場合の最短経路は何通りあるか.



   (1) A から B まで行く.
   (2) D から B まで行く.
   (3) A から CD 間を通って B まで行く.
   (4) CD が工事中のため通れない時, A から B まで行く.

4. 12 人の生徒を, 次のような組に分ける分け方は何通りあるか.
   (1) 5 人, 4 人, 3 人の 3 組
   (2) 4 人, 4 人, 4 人の 3 組
   (3) 6 人, 3 人, 3 人の 3 組

5. 8 個の点が下の図のように並んでいる. このとき, これらの点を頂点とする三角形は全部でいくつあるか.



6. 1 個のさいころを 4 回投げて, 出る目の数を順に $a,\ b,\ c,\ d$ とする. このとき,
$$a+b+c+d=8$$
となる場合の数を求めよ.

7. 方程式
$$x+y+z=11$$
を満たす $x,\ y,\ z$ の 0 以上の整数解の組の総数を求めよ.

解答:
順列と組み合わせ
演習問題

1. (1) は ‘奇数番目から’ に着目して容易に数えることができるが, (2) は直接的に数えようとすると場合分けが生じて面倒である.
   (1) まず, 奇数番目 (1, 3, 5 番目) にどの奇数 (1, 3, 5, 7, 9) を並べるかについて,
   $$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ 通り}$$
   そのそれぞれについて, 偶数番目の並べ方は, 奇数番目に並べた 3 個以外のどれを並べようと自由であるから
   $$6 \times 5 = 30 \text{ 通り}$$
   したがって, 答えは
   $$60 \times 30 = \mathbf{1800} \text{ 通り}$$
   (2) 偶数は 4 個であるから, 奇数は少なくとも 1 個使うことになり, また, 奇数は高々 3 個しか使えない.
   奇数を k 個使う場合に, (2) の条件を満たす順列が a_k 個あるとすると,
   $$\begin{aligned} a_1 &= {}_5\mathrm{C}_1 \cdot 3 \times 4! = 15 \times 4! \\ a_2 &= {}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{P}_2 \times {}_4\mathrm{P}_3 = 60 \times 4! \\ a_3 &= {}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_3\mathrm{P}_3 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 30 \times 4! \end{aligned}$$
   よって, 答えは
   $$15 \times 4! \times (1+4+2) = \mathbf{2520} \text{ 通り}$$
   別解:
   x が奇数ならば x は奇数番目にある, の対偶は,
   x が偶数番目にあるならば x は偶数である.
   (つまり, 偶数番目に必ず偶数がある)
   であり, これを満たすものは (1) と同様に,
   偶数番目の 2 つについては, $4 \cdot 3 = 12$ 通り
   残りの 3 つについては, $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ 通り
   よって, 答えは
   $$12 \times 210 = \mathbf{2520} \text{ 通り}$$

2. A だけが 2 つある. そこで
   ·A を 2 個含む組み合わせ
   ·A を 1 個含む組み合わせ
   ·A を含まない組み合わせ
   の 3 タイプに分けて数えたくなるが, 下 2 つのタイプは合わせて数えることができる.
   A を 2 個含むものは ${}_6\mathrm{C}_1$ 通り.
   A を高々 1 個含むものは, S, H, I, B, A, U, R の 7 文字から 3 文字選べばよいから, ${}_7\mathrm{C}_3$ 通り.
   したがって, 答えは
   $${}_6\mathrm{C}_1 + {}_7\mathrm{C}_3 = 6 + 7 \cdot 5 = \mathbf{41} \text{ 通り}$$

3. 例題 2 と似たような雰囲気の問題である. 例えば, $a_1,\ a_4,\ a_7,\ a_{10}$ の 4 個の組み合わせを決めると, $a_1,\ a_4,\ a_7,\ a_{10}$ は 1 通りに定まるので求める個数は
   $${}_{10}\mathrm{C}_4 \cdot {}_6\mathrm{C}_3 \cdot {}_3\mathrm{C}_3$$
   と数えることができるが今回は束で考えてみる.
   10!通りの順列のうちに, 題意に適するものは,
   $$4! \cdot 3! \cdot 3! \text{通りにつき 1 つ}$$

であるから, 答えは

$$\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6\cdot 6}$$
$$= 10\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 5$$
$$= = \mathbf{4200}\text{ 通り}$$

4. まず, 隣り合ってよいものを並べ (図では 5 つの ◯), 次に隣り合ってはいけないものを, 6 か所の ↓ にそれぞれ高々 1 つ入れていく (すると, 隣り合わない).

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
◯ ◯ ◯ ◯ ◯

(1) 母音 4 文字が隣り合わないためには,

母, 子, 母, 子, 母, 子, 母

と並ぶしかなく, 母音 4 文字 O, A, A, I については ${}_4\mathrm{P}_2$ の並べ方 (O,I の位置の決め方) が, 子音 3 文字 K, K, D については 3 通りの並べ方があるから,

$${}_4\mathrm{P}_2 \times 3 = \mathbf{36}\text{ 通り}$$

(2) まず, 4 個の母音を区別せず, 隣り合ってはいけない 3 個の子音も区別しないものとして, 順列の個数を数える. そのような順列は, まず, 4 個の母音を並べ, 次に, 図の 5 か所の ↓ から 3 か所選んで, 子音を 1 つずつ挿入する.

↓ ↓ ↓ ↓ ↓
母 母 母 母

この方法によって得られるので, ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通りある. この 1 通りについて, (1) と同様に 36 通りの順列が得られるから, 答えは

$$10 \times 36 = \mathbf{360}\text{ 通り}$$

5. AA という並びを含む順列は,

AA, O, O, Y, K, H, M

の 7 文字を並べると考えて, $\frac{7!}{2!}$ 通り
OO という並びを含む順列も同様である.
また, AA, OO の両方の並びを含む順列は

AA, OO, Y, K, H, M

の 6 文字を並べると考えて, 6!通り.
よって和の法則より求める個数は

$$\frac{7!}{2!} + \frac{7!}{2!} - 6! = 7! - 6!$$
$$= 6\cdot 6! = \mathbf{4320}\text{ 通り}$$

基礎演習

1. 取り出す 1 枚目の候補は 6 通り, 1 枚取り出した後残るのは 5 枚なので 2 枚目の候補は 5 通り, 2 枚取り出した後残るのは 4 枚なので 3 枚目の候補は 4 通りである. したがって求める総数は

$$\begin{aligned} {}_6\mathrm{P}_3 &= 6 \times 5 \times 4 \\ &= \mathbf{120} \text{ 通り} \end{aligned}$$

2. 大人 2 人をセットの 1 人と考える. すると人 6 人を 1 列に並べる総数と等しくなる. 大人 2 人をセットする総数は 2 通りであることを考慮すると求める総数は,

$$6! \times 2 = \mathbf{1440} \text{ 通り}$$

3. '規制の強い順' に数え上げるのが簡単である. 今回の場合規制が強いのは両端の数字であるのでこの 7 桁の整数を '$abcdefg$' とすると $a \to g \to b \to c \to d \to e \to f$ の順に決めていくのがよい. a の候補は 3 通り, g の候補は 2 通り, b の候補は 5 通り,$\cdots$ というように考えていけばよい. ゆえに求める総数は

$$3 \times 2 \times 5! = \mathbf{720} \text{ 個}$$

4. 3 桁の整数を 'abc' とする.
(1) 奇数であるので $c \to a \to b$ の順に決めていけばよい. よって, 総数は

$$3 \times 5 \times 5 = \mathbf{75} \text{ 個}$$

(2) 3 桁の総数は

$$6 \times 6 \times 5 = 180 \text{ 個}$$

ゆえに奇数の個数をこれから引けばよいので求める総数は

$$180 - 45 = \mathbf{105} \text{ 個}$$

<u>別解:</u>
$c = 0$ または $c = \neq 0$ のときで分ける.
$c = 0$ のとき

$$6 \times 5 = 30 \text{ 個}$$

$c \neq 0$ のとき, c の候補は 3 通り, a の候補は 5 通りであるので総数は

$$3 \times 5 \times 5 = 75 \text{ 個}$$

よって総数は

$$30 + 75 = \mathbf{105} \text{ 個}$$

5. 円形になるので一人を固定して考えると計算がしやすい. 固定した人から時計回りに一周するとすれば, 5 人を並べる順列に等しくなる. よって, 答えは

$$5! = \mathbf{120} \text{ 通り}$$

6. (1) 女 3 人をひとまとめにして考えると人 5 人の座り方の順列と等しくなる. 3 人をひとまとめにする総数は 3!通りであるので, 答えは

$$3! \times 4! = \mathbf{144} \text{ 通り}$$

(2) 特定の 2 人をひとまとめにする総数は 2 通りである. あとは 6 人の座り方の順列と等しくなるので, 答えは

$$2 \times 5! = \mathbf{240} \text{ 通り}$$

7. (1) education は母音が 5 個, 子音が 4 個であるので 1 列に並べるとき
母　子　母　子　母　子　母　子　母
というようになる. したがって求める総数は

$$5! \times 4! = \mathbf{2880} \text{ 通り}$$

(2) d ◯ ◯ t (t ◯ ◯ d) を 1 セットとして考える. まず真ん中の 2 つに入る

順列の総数を求める. これは ${}_7\mathrm{P}_2$ 通りである. のこりは 6 文字を 1 列に並べる方法と同じように考えることができるので, 求める総数は

$$2 \times {}_7\mathrm{P}_2 \times 6! = 84 \times 6! = \mathbf{60480} \text{ 通り}$$

8. (1) 夫婦 1 組として考えると 3 人が円形のテーブルに座ると考えられる. また夫婦 1 組を並べる順列は 2 通りであるから求める総数は

$$2^3 \times 2! = \mathbf{16} \text{ 通り}$$

(2) 男女が交互になるのでまず男を配置する. 男の配置の仕方は 2!通りである. また, 女は男の間に挿入すればいいので求める総数は

$$2! \times 3! = \mathbf{12} \text{ 通り}$$

9. できる 3 桁の整数を 'abc' とする.
(1) $a \to b \to c$ の順に組めばよいので求める総数は

$$5 \times 5 \times 4 = \mathbf{100} \text{ 通り}$$

(2) 430 以下について a の値を場合分けして考える.
$a = 1,\ 2,\ 3$ のとき $b,\ c$ の取りうる総数は ${}_5\mathrm{P}_2$ 通り. $a = 4$ のときを考える.
$b = 0,\ 1,\ 2$ のとき必ず 430 以下となる. c の取りうる総数は 4 通りである.
$a = 4,\ b = 3$ のとき $c = 0$ の 1 通りであるので求める総数は

$$\begin{aligned} 3 \times {}_5\mathrm{P}_2 + 3 \times 4 + 1 &= 60 + 12 + 1 \\ &= \mathbf{73} \text{ 個} \end{aligned}$$

10. 裏返してたら同じになるものは同じものとしてカウントする. まず円順列を考える. 1 個を固定して考えると

$$5! = 120 \text{ 通り}$$

となるので, 求める総数は

$$120 \div 2 = \mathbf{60} \text{ 通り}$$

11. ${}_5\mathrm{C}_2 = \mathbf{10}$ 通り
これは 樹形図を書けば一目瞭然である.

12. 奇数は 5 個, 偶数は 4 個ある.
(1) 奇数 2 個, 偶数 2 個選ぶので

$${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = \mathbf{60} \text{ 通り}$$

(2) 「少なくとも 1 個は〜」は排反を取ればよいので, すべてが奇数の場合を考えると

$${}_5\mathrm{C}_4 = 5 \text{ 通り}$$

すべての総数は ${}_9\mathrm{C}_4$ 通りであるので, 求める総数は

$${}_9\mathrm{C}_4 - 5 = 126 - 5 = \mathbf{121} \text{ 通り}$$

13. o と t が重複していることを考慮して並べる. まず考慮しない並べ方について, ここで o を o_1, o_2, t を t_1, t_2 と区別する. 並べ方は 5!通り考えられる. o は区別しない, t は区別しないことを考えるとそれぞれ 2 通りずつ重複するので求める総数は

$$5! \div 2 \div 2 = \mathbf{30} \text{ 通り}$$

14. (1) 文字の重複がないので,

$$8! = \mathbf{40320} \text{ 通り}$$

(2) 答えを x 通りとすると, なんの制約もない 8 文字の順列の個数について

$$\begin{aligned} x \times 4! &= 8! \\ x &= \mathbf{1680} \text{ 通り} \end{aligned}$$

対応を考える
演習問題

1. 並んでいる椅子に, はじめから順に 1, 2, $\cdots$, 12 の番号をふり, 4 人が座る椅子の番号を
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\ (x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$$
とすると '隣り合わない' という条件は,
$$1 \leqq x_1 < x_2 - 1 < x_3 - 2 < x_4 - 3 \leqq 9$$
と表現できるから, 隣り合わない 4 つの椅子の組み合わせは
$${}_9\mathrm{C}_4 = 126 \text{ 通り}$$
よって, 答えは
$$126 \times 4! = \mathbf{3024} \text{ 通り}$$
2. 赤玉, 白玉を分離して数えたそれぞれの積が答えである.
箱を $B_1,\ B_2,\ B_3$ とし, $B_i\ (i = 1,\ 2,\ 3)$ に r_i 個の赤玉と w_i 個の白玉を入れるとすると,
$$r_1 + r_2 + r_3 = 6,\ r_i \geqq 0\ (i = 1,\ 2,\ 3)$$
$$w_1 + w_2 + w_3 = 4,\ w_i \geqq 0\ (i = 1,\ 2,\ 3)$$
である. $r_i' = r_i + 1$ とおくと,
$$r_1' + r_2' + r_3' = 9,\ r_i' \geqq 1\ (i = 1,\ 2,\ 3)$$
となり, これを満たす整数解の個数は,
1 列に並んだ 9 個のものを 2 本のしきりで
3 分割する方法の数 ${}_8\mathrm{C}_2 = 28$ 通り
に等しい. 同様にして白玉についても ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 通り であるから, 答えは
$$28 \times 15 = \mathbf{420} \text{ 通り}$$
3. $a + b + c = k\ (k = 3,\ 4,\ \cdots,\ 20)$ の 18 通りについての自然数解の個数の総和を求めても良いのだが, 次のような方法がある.
$$a + b + c \leqq 20,$$
$$a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1$$
を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数は
$$a + b + c + d = 21,$$
$$a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1,\ d \geqq 1$$
を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ の個数に等しく, その個数は
1 列に並んだ 21 個のものを, 3 本のしきりで 4 分割する方法の数 ${}_{20}\mathrm{C}_3$ 通り
に等しい. よって, 答えは,
$${}_{20}\mathrm{C}_3 = \mathbf{1140} \text{ 通り}$$
証明について
$$a = 2a',\ b = b',\ c = c'$$
$$(a \text{ は偶数の自然数})$$
が上式を満たすとすると,
$$a = 2a' - 1,\ b = b',\ c = c'$$
$$(a \text{ は基数の自然数})$$
も上式を満たすので, a が奇数のものは, a が偶数のものよりも少ない.
ちなみに, a が奇数であるものは, 615 通りである.
4. 1 つ目に関しては組を区別しない. 一方 2 つ目に関しては残り 9 人を, A のいる組, B のいる組, C のいる組と区別された 3 組に分けることとなる.
1 つ目に関して,
$$\frac{{}_{12}\mathrm{C}_4 \cdot {}_8\mathrm{C}_4}{3!} = \frac{495 \cdot 70}{6}$$
$$= \mathbf{5775} \text{ 通り}$$
2 つ目に関して,
$${}_9\mathrm{C}_3 \cdot {}_6\mathrm{C}_3 = \mathbf{1680} \text{ 通り}$$

5. (1)

ボートを A, B として, A, B に乗る人数について考えればよい. すると下のようになる.

A	B
4	2
3	3
2	4

したがって, 答えは **3** 通りである.

(2) ‘4 人まで’ の定員を無視すると,
各人, A, B のどちらかに乗るか 2 通りずつあるから,

$$2^6 = 64 \text{ 通り}$$

このうち, 定員オーバーするものは下のようになる.

	A	B
①	6	0
②	5	1
③	1	5
④	0	6

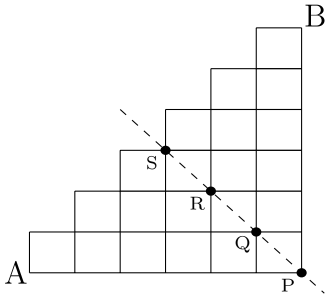
①と④に関しては 1 通りずつ,
②と③に関しては 6 通りずつ
乗り方があるから, 答えは

$$64 - (1 + 1 + 6 + 6) = \mathbf{50} \text{ 通り}$$

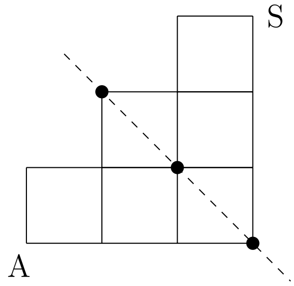
(3) ボートを区別しない場合は, (2) の答えを 2!で割ったものであるので,

$$50 \div 2! = \mathbf{25} \text{ 通り}$$

6. (1)



まず対称性を考える. たとえば
A→R が r 通り, とすると
R→B も r 通りである.
上の図において, 最短経路の前半が
A→P であるものは 1 通り
A→Q であるものは ${}_6\mathrm{C}_1 = 6$ 通り
A→R であるものは ${}_6\mathrm{C}_2 - 1 = 14$ 通り
であり, A→S については,
下図のどの ● を通るかで場合分けをする.



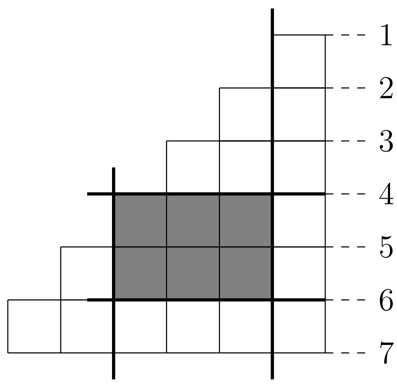
すると,

$$1^2 + ({}_3\mathrm{C}_1)^2 + 2^2 = 14 \text{ 通り}$$

である.
図の対称性より求める最短経路の本数は

$$1^2 + 6^2 + 14^2 + 14^2 = \mathbf{429} \text{ 本}$$

(2)



1 つの四角形は, 2 本の横線と 2 本の縦線に対応するが, 四角形の ‘上の辺’ が上から k 番目の横線であるものについ

ては,
下の辺の横線の選び方は,

$$7-k \text{ 通り}$$

2 本の縦線の選び方は, ${}_{k+1}\mathrm{C}_2$ 通り
である. よって, 四角形の総数は,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{6}(7-k)_{k+1}\mathrm{C}_2\\ =&6\cdot 1+5\cdot 3+4\cdot 6+3\cdot 10\\ &+2\cdot 15+1\cdot 21\\ =&\mathbf{126} \text{ 個}\end{aligned}$$

7. 1 つの交点は, 内部で交わる 2 本の対角線によって作られるが, その 2 本は,
4 つの端点 (10 角形の 4 頂点)
をもつ. 逆に, 10 角形の 4 頂点で作られる四角形はただ 1 つの対角線の交点をもち, それは, 題意の交点である. したがって, 題意の交点の集合は, 4 頂点の組である 4 つの端点の集合と 1 対 1 に対応するから, 交点の個数は

$$ {}_{10}\mathrm{C}_4=\mathbf{210} \text{ 個}$$

<u>別解:</u>
頂点を 3 個と 5 個に分ける対角線上には
$3\cdot 5$ 個の交点ができる.
ここで, 対角線の総数は

$$ {}_{10}\mathrm{C}_2-10=35 \text{ 本}$$

であり, このうちに頂点を a 個と b 個 $(a \leqq b)$ に分ける対角線が $n(a,\ b)$ 本あるとすると,

$$\begin{aligned}&n(1,\ 7)=n(2,\ 6)=n(3,\ 5)=10,\\ &n(4,\ 4)=5\end{aligned}$$

である. 以上および, 1 つの交点は 2 本の対角線上にあることから, 答えは

$$\begin{aligned}&\{(1\cdot 7+2\cdot 6+3\cdot 5)\cdot 10+4\cdot 4\cdot 5\}\div 2\\ &=\mathbf{210}\end{aligned}$$

基礎演習

1. (1) まず, A の組に 3 人選ぶのは ${}_9\mathrm{C}_3$ 通り, 残り 6 人から B の組に 3 人選ぶのは ${}_6\mathrm{C}_3$ 通り, 残り 3 人から C の組に 3 人選ぶのは ${}_3\mathrm{C}_3$ 通りである. よって, 求める総数は

$$\begin{aligned}&{}_9\mathrm{C}_3 \times {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_3\\&= \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} \times \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} \times \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1}\\&= 3\cdot 4\cdot 7 \times 20\cdot 1\\&= \mathbf{1680}\text{ 通り}\end{aligned}$$

2. 頂点から 2 点選べば辺は対角線が得られる. したがって求める総数は

$${}_6\mathrm{C}_2 - 6 = 15 - 6 = \mathbf{9}\text{ 本}$$

別解:
1 つの頂点から 5 本の線が引け, これは辺または対角線となる. 1 つの頂点から引ける対角線の本数は 3 本であり, 重複を考慮すると求める総数は

$$3 \times 6 \ \div 2 = \mathbf{9}\text{ 本}$$

3. (1) 上に 5, 右に 5 進むのが最短経路となるので, 求める総数は

$${}_{10}\mathrm{C}_5 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \mathbf{252}\text{ 通り}$$

(2) 上に 2, 右に 3 進むのが最短経路となるので, 求める総数は

$${}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = \mathbf{10}\text{ 通り}$$

(3) A から CD 間を通って B まで行くには, A から C まで行き, D から B まで行くこととなる. A から C までの最短経路は

$${}_4\mathrm{C}_2 = 6\text{ 通り}$$

なので, (2) の答えを用いて求める総数は

$$6 \times 10 = \mathbf{60}\text{ 通り}$$

(4) A から B まで行く最短経路を次のようなタイプに分けられる.
· CD 間を通る.
· CD 間を通らない.
ゆえに, (1), (3) より求める総数は余事象から

$$252 - 60 = \mathbf{192}\text{ 通り}$$

4. (1)

$$\begin{aligned}{}_{12}\mathrm{C}_5 \cdot {}_7\mathrm{C}_4 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 &= 792 \times 35\\&= \mathbf{27720}\text{ 通り}\end{aligned}$$

(2) 3 組を A, B, C と組の名前をつけると総数は

$$\begin{aligned}{}_{12}\mathrm{C}_4 \cdot {}_8\mathrm{C}_4 \cdot {}_4\mathrm{C}_4 &= 495 \times 70\\&= 34650\text{ 通り}\end{aligned}$$

A, B, C と組を区別しないので組の決め方 3!で割ると求める総数となる.

$$34650 \div 3! = \mathbf{5775}\text{ 通り}$$

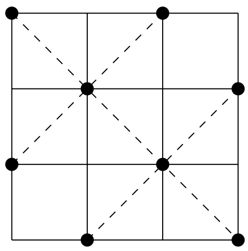
(3) 3 人, 3 人の組を A, B とし A, B が決まれば 6 人の組は自動的に一つ決まる.
A, B の決め方の総数は

$$\begin{aligned}{}_{12}\mathrm{C}3 \cdot {}_9\mathrm{C}_3 &= 220 \times 84\\&= 18480\text{ 通り}\end{aligned}$$

A, B と組を区別しない場合が答えになるので 2!で割って

$$18480 \div 2! = \mathbf{9240}\text{ 通り}$$

5. 図から 3 点を選ぶと三角形または線分ができる.



上図の点線上に 3 点並ぶとき, 線分となる. 線分となる総数は

$$1 + 1 + {}_4\mathrm{C}_3 = 6 \text{ 通り}$$

また, 3 点を選ぶ総数は

$$\begin{aligned} {}_8\mathrm{C}_3 &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 56 \text{ 通り} \end{aligned}$$

よって, 答えは

$$56 - 6 = \mathbf{50} \text{ 個}$$

6. さいころは 1〜6 の値しかとらないので, 今回 $a = 7$ という可能性を考慮しなければならない. しかし, $a,\ b,\ c,\ d$ がすべて自然数であることを考えれば $a = 7$ を考慮せずに

$$a + b + c + d = 8$$
$$(a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1,\ d \geqq 1)$$

という問題に帰着できる. したがって, 8 個の ◯ と 3 本のしきりで数えることができる.
よって, 答えは

$$\begin{aligned} {}_7\mathrm{C}_3 &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \mathbf{35} \text{ 通り} \end{aligned}$$

7. 和の条件の公式②(p.8) を用いればよいので,

$$\begin{aligned} {}_{11+3-1}\mathrm{C}_{3-1} &= {}_{13}\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{78} \text{ 組} \end{aligned}$$