1　数列とは

数列とは文字通り数の列のことである. 高校で扱う数学はその中でも規則性に従ったものである. たとえば 1 ずつ増えていく数列は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

と書くことができる. じゃあ n 番目の数は？ これは 1 番目の数が 1, 2 番目の数が 2, 3 番目の数が 3, ということから n 番目の数字は n と推測できる. これを本当にそうなのか？ということを表すのにも数列という考え方は大事である. それ以外にも数列には数の和や積というものを簡単に求めるために有効な手段である. 高校では数列の和だけに着目して進めていく.
例えば次の数字の和はどうだろう.

$$1+2+3+4+\cdots+49+50$$

これを順に足していくとすると $1, 3, 7, 12, ...$ となり 50 個足すまでに時間もかかるし計算もミスする可能性がある. これを「数列」という考えに基づいて考えていけば楽に解ける.
次のように数字を逆さまから足したものをみるとどうなるだろうか

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots & + & 49 & + & 50 \\ 50 & + & 49 & + & 48 & + & 47 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 51 & + & 51 & + & 51 & + & 51 & + & \cdots & + & 51 & + & 51 \end{array}$$

このようにみれば, 二つ合わせたものは 51 が 50 個あるものとみなせるので, 求める和は

$$\frac{51\times 50}{2}=1275$$

と分かる. このように数列を用いれば簡単に計算できることもある. また, 文字をつかって数列を表現することもあり

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

5 以降の数字が明示されていないので, 6,7,... と続くのかどうかはわからないが, 文字を使えば 1 ずつ増えていく数列と表現することも可能となる. これは以降の章で具体的に説明する.

2　数列の用語

数列を学習する上で様々な用語が存在する. この章では用語を載せることとする.
数を一列に並べたものを**数列**, 数列の各数を**項**という. 数列は, 何番目か (正の整数) を指定すれば 1 つに決まるので, **定義域が正の整数の関数**である (ときには定義域を 0 以上としたほうが便利なときもある).
数列の項の個数が有限である数列を**有限数列**, 有限でない数列を**無限数列**という. 数列の項は最初から第 1 項 (**初項**), 第 2 項,... という. 有限数列では項の個数を**項数**, 最後の項を**末項**という.
数列ではある文字に対して何番目かを表す文字を添え字として右下に書く. これはアルファベットやあらゆる記号を用いても高々 100 項までしか表現できないためである.

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\cdots$$

と表すか, または

$$\{a_n\}$$

と表記する. 数列の第 n 項を n の式で表したものを**一般項**という. その数列の規則を表したものが一般項である.
数列 $\{a_n\}$ に対して, $b_n=a_{n+1}-a_n$ を項とする数列 $\{b_n\}$ を, 数列 a_n の**階差数列**という. ここで $a_{n+1}-a_n$ を $\{a_n\}$ の階差というが, a_n-a_{n-1} ではないことに注意する.

3　等差数列

数列の中である一定の数を項に加えると次の項が出てくる数列を**等差数列**という. つまり 1,2,3,..., という数列も等差数列である. またこのある一定の数というのを一般的に d という文字で表し, この d を等差数列の**公差**という.
発展的な考えで言えば, 等差数列は「階差数列が定数数列 (全ての項が同じ数の数列)」である数列のことである.
a, b, c がこの順で等差数列をなすための条件は $b-a=c-b \Longleftrightarrow a+c=2b$ というふうになる. つまり

$$20,\ b,\ 50$$

とこの順で等差数列がなされる場合は

$$20+50=2b \Longleftrightarrow b=35$$

となる. ここで, 等差数列の公式をまとめる.

等差数列の公式

初項 a, 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ について, 次が成り立つ.

(i) $a_{n+1}=a_n+d \Longleftrightarrow a_{n+1}-a_n=d$

(ii) 一般項 $a_n=a+(n-1)d$

(iii) 和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$
$$=\frac{a_1+a_n}{2}n\ \left(=\frac{\text{初項}+\text{末項}}{2}\times\text{項数}\right)$$

(ii) に関しては, 第 2 項に関しては初項に公差を 1 回足し

たもの, 第 3 項は第 2 項に公差を 1 回足したものつまり初項に公差を 2 回足したもの,... と順に考えていけば第 n 項は初項に公差を $n-1$ 回足したものであることが分かる.
(iii) に関しては, 初項から並べたものと末項から並べたものを順々に足していけばよいという考え方にもとづいている. 第 i 項と第 $n-i+1$ 項はそれぞれ

$$\begin{aligned} a_i &= a+(i-1)d \\ a_{n-i+1} &= a+(n-i+1-1)d \end{aligned}$$

という関係式から

$$\begin{aligned} a_i + a_{n-i+1} &= 2a+(n-1)d \\ &= a+(a+(n-1)d) \\ &= a_1 + a_n \end{aligned}$$

となるので, 初項から並べた数列と末項から並べた数列の第 i 行目のそれぞれの和は初項と末項の和であることがわかる.
単純に考えれば, 末項から並べたものは公差 d ずつ減っていき, 初項から並べたものは公差 d ずつ増えていくので合計して増分がないことがわかる.
これより (iii) の公式が導かれる.

例題 1

> 第 20 項が 59, 第 40 項が 119 である等差数列の初項は $\boxed{\text{ア}}$, 公差は $\boxed{\text{イ}}$ である. そして, 第 20 項から第 40 項までの和は $\boxed{\text{ウ}}$ である.

問題の等差数列を $\{a_n\}$ として公差を d とする. すると公差は a_{20} と a_{40} から求められる. a_{40} は a_{20} と比較して $40-20$ 回多く公差が足されているので

$$\begin{aligned} & a_{40}-a_2=(40-20)d \\ \Longleftrightarrow & 119-59=20d \\ \Longleftrightarrow & d=\mathbf{3} \end{aligned}$$

$a_{20}=a_1+(n-1)d$ として計算してもよいが, ここでは a_{20} を基準とする. a_{20} と比較して第 n 項は公差が $n-20$ 回足されているので,

$$a_n = a_{20}+3(n-20)=3n-1$$

となるので, $a_1=\mathbf{2}$. 第 20 項から第 40 項までの $40-20+1$ 項の和は

$$\begin{aligned} \frac{a_{20}+a_{40}}{2}\cdot 21 &= \frac{59+119}{2}\cdot 21 \\ &= 89\cdot 21 = \mathbf{1869} \end{aligned}$$

例題 2

> 第 3 項が 26, 第 8 項が 11 の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおく. $\{a_n\}$ の公差は $\boxed{\text{ア}}$ であり, S_n の最大値は $\boxed{\text{イ}}$ になる.

問題の等差数列の公差を d とする. すると公差は a_3 と a_8 から求められる. a_8 は a_3 と比較して $8-3$ 回多く公差が足されているので

$$\begin{aligned} & a_8-a_3=(8-3)d \\ \Longleftrightarrow & 11-26=5d \\ \Longleftrightarrow & d=-\mathbf{3} \end{aligned}$$

よって, 一般項は

$$a_n = a_3+d(n-3)=35-3n$$

であるから,
$1 \leqq n \leqq 11$ のとき $a_n>0$, $n \geqq 12$ のとき $a_n<0$. これより, 項が正のときは S_n は増加し続け, 負になると減少する一方である. ゆえに $n=11$ のとき最大となり, 以下のような大小関係になる.

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_{10} < S_{11} > S_{12} > \cdots$$

よって S_n は $n=11$ のとき最大で, 最大値は

$$S_{11}=\frac{a_1+a_{11}}{2}\cdot 11=\frac{32+2}{2}\cdot 11=\mathbf{187}$$

4 等比数列

数列のうち, 一定の数を各項に掛けて次の項が得られるものを**等比数列**という. またこの一定の数というものを r で表し, この等比数列の**公比**という. 0 でない 3 数 a,b,c がこの順に等比数列をなすための条件は $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b} \Longleftrightarrow ac=b^2$ である. ここで等比数列に関する公式をまとめる.

等比数列の公式

初項 a, 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ について, 次が成り立つ.

(i) $a_{n+1} = a_n$

(ii) 一般項 $a_n = ar^{n-1}$

(iii) 和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ は, $r=1$ のとき, na, $r\neq 1$ のときは

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

となる. ここで, 末項の次の項というもの (末項に公比 r をかけたもの) を考えれば以下のように和はかける.

$$\frac{\text{最初}-\text{最後の次}}{1-\text{公比}}$$

(iii) について $r\neq 1$ について示す.
和を S_n とおくと

$$\begin{aligned} S_n =& a+ar+ar^2+\cdots ar^{n-1} \\ rS_n =& \quad\ ar+ar^2+\cdots ar^{n-1}+ar^n \end{aligned}$$

これから辺々引くと, $(1-r)S_n = a-ar^n$ を得る.
因数分解の公式

$$r^n-1 = (r-1)(r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots r+1)$$

を用いても証明することができる.

$$\begin{aligned} S_n &= a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \\ &= a(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}) \\ &= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \end{aligned}$$

例題 3

3 つの実数 a, b, c がこの順で等差数列をなし, a, c, b の順で等比数列をなす. さらに $abc=8$ であるとき, a, b, c の値を求めよ.

a, b, c の順で等差数列をなすので

$$a+c=2b$$

a, c, b の順で等比数列をなすので

$$ab=c^2$$

最後の条件より

$$abc=8$$

2 つめと 3 つめから

$$abc=c^3=8 \iff c=2$$

これから c を消去すると $a=2b-2$, $ab=4$ が導かれる.
1 つめの式から a を消去すると

$$(2b-2)b=4 \iff b^2-b-2=0$$

これを解くと

$$(b-2)(b+1)=0 \iff b=-1, 2$$

よって答えは

$$\boldsymbol{(a, b, c) = (2, 2, 2),\ (-4, -1, -2)}$$

5 群数列

数列を区画に分けて, 各区画を群にして, 群の列とみたものを**群数列**という. 各群の項数は何個か, 各群の最後の項は数列の第何項かに着目すると, 群数列を捉えやすくなる.

例題 4

自然数が n が 2^{n-1} 個ずつ続く次のような数列

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \cdots$$

について最初の 7 は第 $\boxed{\text{ア}}$ 項であり, 第 2016 項は $\boxed{\text{イ}}$ である.

数列の第 k 群を

$$k,\ k,\ \cdots,\ k\ \ (k\ \text{が}\ 2^{k-1}\text{個})$$

とする. 第 $1\sim k$ 群にある項数は

$$1+2+\cdots+2^{k-1} = \frac{2^k-1}{2-1} = 2^k-1$$

ゆえに第 $k+$ 群の最初の項のは

$$2^{k-1}+1 = 2^k$$

より, 第 2^k 項である. ゆえに最初の 7 は第 7 群の 1 番目の項であることから

$$2^7 = \mathbf{64}\ \text{項}$$

また, 第 2016 項にある数について, 第 2016 項は第何群に属するかが重要である. 第 k 群までの項数は 2^k-1 であり $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$ であることから, 第 11 群にあることがわかる. ゆえに **11**.

6　数列の和

数列をいままで最初の方の部分と最後の方の部分を書き, 途中は $\cdots$ として省略していた．これでは本当にこの数列が等差数列なのか, それとも等比数列なのかわからない．そこで数列 $\{a_n\}$ の第 1 項から第 n 項までの和を次の右辺のように表すこととする．

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

これは k が 1 から n まで順に増やしていきその和を取るという意味である．$\sum$ はシグマといい, ギリシャ文字でアルファベットの S に相当し, 英語で sum を表す．高校では扱わないが, 和ではなく積の場合は $\prod$ を用いる．特に, $a_n=c$(定数数列) のときは

$$\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+\cdots+c}_{n\text{ 個}}=nc$$

この表記方法に関して k というのは他の文字に代用しても良い．つまり

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{t=1}^{n}a_t$$

というふうに文字を変えても意味は同じである．この $\sum$ に関して性質を以下にまとめる．

$\sum$ の性質

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$　(c は定数)

(i) かつ (ii) が成り立つことを$\sum$ の線形性(linearity) という．微分・積分に関しても線形性がある．
数列の和は以下のように公式としてまとめられる．

基本的な数列の和の公式

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

(iv) $r\neq 1$ のとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}=\frac{r^n-1}{r-1}$

(i) に関しては具体的に値を書き出すと, 1,2,3,4,... とつづく数列であることがわかる．つまり等差数列であるので, 等差数列の和の公式から導かれる (初項 $a=1$, 公差 $d=1$ としたもの).
(iv) は等比数列の $a=1$ としたものである．(iii) は以降の章で説明する．(ii) は “階差” を用いて示す．
まず,

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

これに $k=n,\cdots,1$ を代入して辺々加えると左辺は

$$\{(n+1)^3-n^3\}+\{n^3-(n-1)^3\}+\cdots+(3^3-2^3)+(2^3-1^3)$$
$$=(n+1)^3-1=n^3+3n^2+3n$$

となる．右辺については

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3n(n+1)}{2}+n$$

よって, 左辺と右辺の値から方程式を立てて

$$n^3+3n^2+3n=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n$$

これを解いて

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

k^{p-2} までの和の公式がわかっていれば, k^{p-1} については階差を用いて求めることができる．

$$(k+1)^p-k^p=pk^{p-1}p+{}_p\mathrm{C}_2\sum_{k=1}^{n}k^{p-2}+\cdots+n$$

これより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}$ を求められる．

例題 5

n を自然数とするとき, 和 $\displaystyle\sum_{k=2n}^{3n}(3k^2+5k-1)$ を n の整式 (降べきの順) として表わせ．

$k=2n$ というものがなく $k=1$ しかない．これを次のように考えてもとめる．$2n$ から $3n$ というのは 1 から $3n$ というものから 1 から $2n-1$ までのものを引いたものである. ゆえに

$$\sum_{k=1}^{3n}(3k^2+5k-1)-\sum_{k=1}^{2n-1}(3k^2+5k-1)$$

これを一つずつ計算するのは大変なのでまず

$$f(m)=\sum_{k=1}^{m}(3k^2+5k-1)$$

とおくことで, $f(3n)-f(2n-1)$ として求めることを考える. そのため $f(m)$ を整理すると

$$\begin{aligned} f(m) &= \sum_{k=1}^{m}(3k^2+5k-1) \\ &= 3\sum_{k=1}^{m}k^2+5\sum_{k=1}^{m}k-\sum_{k=1}^{m}1 \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{2}+\frac{5m(m+1)}{2}-m \\ &= m^3+4m^2+2m \end{aligned}$$

よって代入して

$$\begin{aligned} &27n^3+36n^2+6n-(2n-1)^3-4(2n-1)^2-2(2n-1) \\ =&19n^3+(36+12-16)n^2+(6-6+16-4)n+1-4+2 \\ =&\boldsymbol{19n^3+32n^2+12n-1} \end{aligned}$$

7 多項式と等比の融合問題

多項式と等比数列が混ざっとような問題は等比分だけかけて式変形をおこなう. 多項式は一般に等差数列であることが多い.

例題 6

次の和を求めよ.

$$S=2+4x+6x^2+8x^3+\cdots+2nx^{n-1}$$

$x=1$ であったとき,

$$\begin{aligned} S &= 2+4+6+\cdots+2n=\sum_{k=1}^{n}2k \\ &= \boldsymbol{n(n+1)} \end{aligned}$$

$x\neq 1$ のとき

$$a_n=2n,\ b_n=x^{n-1},\ c_n=a_nb_n$$

とすると

$$S=\sum_{k=1}^{n}c_n$$

とみることができる. ここで, a_n が一次式であるときは $a_{n+1}-a_n$ というのは定数である. 今回

$$a_{n+1}-a_n=2(n+1)-2n=2$$

と定数であるので, 公差分かけて一つずらすときれいになることが分かる. つまり以下のようになる.

$$\begin{aligned} S =& 2+4x+6x^2+\cdots+ \quad 2nx^{n-1} \\ xS =& \quad 2x+4x^2+\cdots+2(n-1)x^{n-1}+2nx^n \end{aligned}$$

これから (上式)−(下式) をすることで整理すると

$$\begin{aligned} (1-x)S &= 2+2x+2x^2+\cdots+2x^{n-1}-2nx^n \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}x^{n-1}-2nx^n \\ &= 2\cdot\frac{1-x^n}{1-x}-2nx^n \\ &= \frac{2\{1-x^n-nx^n(1-x)}{1-x} \end{aligned}$$

これより求める和は

$$S=\boldsymbol{\frac{2\{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}\}}{(1-x)^2}}$$

8 階差数列

和 → もとの数列, 階差数列 → もとの数列がどのように表されるかをまとめると, 次のようになる.

階差数列の公式

(i) (和から一般項)
数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると, $a_1=S_1$, $n\geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}$

(ii) (階差数列から一般項)
数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ $(a_{n+1}-a_n=b_n)$ とすると, $n\geqq 2$ のとき $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

階差がある求められる数列である場合は一般項も求められることを表している. たとえば, 6, 11, 18, 27, 38,... とつづくような数列の一般項はこの数列だけみてもきれいになりそうもない. しかし階差をみてみると, 5, 7, 9 11,... と等差数列になっていてこの一般項 $\{b_n\}$ は $\{b_n\}=2n+3$ より $n\geqq 2$ のときの求める一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \\ &= 6+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3) \\ &= n^2+2n+3 \end{aligned}$$

となる. この手の問題は学校の定期テスト出でる可能性はあるが, 差が等差数列ということを言わないとこの一般項は複数通りの答えが出るため入試では出ない (差が等差数列ということを説明してしまうと問題にならないため). 入試問題は通常以下のように出題される.

例題 7

数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}$ $(n \geqq 1)$ を満たすとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{a_k}$ を求めよ.

公式の (i) を使って求める. $n=1$ と $n \geqq 2$ のときで一般項は変わることに注意.
$n=1$ のとき $a_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} a_k = 1$.
$n \geqq 2$ のとき,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = -\frac{1}{n(n-1)}$$

よって,

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_k} + \sum_{k=2}^{6} \frac{1}{a_k} = 1 - \sum_{k=2}^{6} k(k-1) = \mathbf{-69}$$

9 数列の和の一般論

数列の中でも一般項が分かっていても和が求められないというケースはある. 階差の形を作ってあげればきれいに求められるケースもある. 階差の形というのは

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_1$$

という簡単な式に変換出来る形のことである.
これを以下のような定理としてまとめる.

数列の和の一般論の定理

数列 $\{a_n\}$ に対して,
$a_k = f(k+1) - f(k)$ または $a_k = g(k+1) - g(k)$ を満たす式 $f(k)$, $g(k)$ が見つかれば,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = f(n+1) - f(1)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = g(1) - g(n+1)$

この階差の形をつくるための $f(n)$, $g(n)$ は機械的に求める方法はないが, ある程度規則は存在する. 例えば, n 次式で表される一般項の和は $n+1$ 次式に変換を行う. $-n$ 次式 (分数) で表される一般項の和は $-(n-1)$ 次式に変換を行う. 分数の形は一般に部分分数分解を行うことできれいに整理されることが多い.

例題 8

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ を求めよ.
(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ を求めよ.

このような手は各項の各成分を因数分解された形をよくみると分解の仕方がよく分かる. (1) について k, $k+1$, $k+2$ という因数の積で表されているのでこれから階差がどのような形になるかを想像する. これから一般的な手法として $n+1$ 次式にすることから, k, $k+1$, $k+2$, $k+3$ を因数に持たせるとうまく階差ができそうであると想像できる. これから $a_k = k(k+1)(k+2)$ のとき $k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)$ という形で階差をつくるとよさそうと検討がつく. 実際に計算すると

$$\begin{aligned} k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k-2) \\ = 4k(k+1)(k+2) = 4a_k \end{aligned}$$

となり, $f(k) = \dfrac{1}{4}(k-1)k(k+1)(k+2)$ とすればうまく行くことがわかる. つまり

$$a_k = f(k+1) - f(k)$$

を用いて,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) &= f(n+1) - f(1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

(2) に関しては部分分数分解というものを施す. これは一般に複雑な形であるが (数 III で詳しく扱う), ここでは簡単に分数を (分数)−(分数) という形にできないかということを考える. 分母の数を因数分解して整理するのだが $n(n+1)(n+2)$ であるので, これから階差の形をつくるとすると分母の次元が一つ下がるので $n(n+1)$ や $(n+1)(n+2)$ というように分解できることが想像できる. 分母の数が大きいほど小さい数に注意すれば $\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ という形になるのではないかという予測がたつ.$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ として 実際に計算すると

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = 2a_k$$

となり, $g(k) = \dfrac{1}{2k(k+1)}$ とすればうまく行くことがわかる. つまり

$$a_k = g(k) - g(k+1)$$

を用いて,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= g(1) - g(n+1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

他にも入試問題の形式であると以下のような形式で出される.

例題 9

次の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} \frac{2}{4k^2-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}$

(1) については $4k^2-1=(2k)^2-1$ という形から因数分解できることから部分分数分解がどのようにされるか想像がつく. つまり

$$\frac{2}{4k^2-1}=\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}$$

これから階差の形ができているので

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{40}\frac{2}{4k^2-1}&=\sum_{k=1}^{40}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\frac{1}{2\cdot1-1}-\frac{1}{2\cdot40+1}\\&=1-\frac{1}{81}=\mathbf{\frac{80}{81}}\end{aligned}$$

(2) に関しては, 分母の有利化を行うと階差の形になる.

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\cdot\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

よって, 求める和は

$$\sum_{k=1}^{120}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{121}-1=\mathbf{10}$$

10 数学的帰納法

証明を行う方法は演繹的なものか帰納的なものかに分かれる. 演繹的なものは順序立てて説明していくものである. こうならばそうなるので, つまりこれはこうだ！的なものはすべて演繹的な証明方法である. これに対し帰納的なものはこれが正しければこれも正しい. つまりこれも正しいということはあれも正しい. という一個ずつ証明されていくものである. つまり証明を行う手順は以下のようになる.

帰納法の手順

(i) $P(1)$ が成り立つ.

(ii) $P(k)$ が成り立つと仮定すると, $P(k+1)$ も成り立つ.$(k=1,\,2,\,3,\,...)$

(ii) が言っていることは, $P(1)\Longrightarrow P(2)$, $P(2)\Longrightarrow P(3)$, $P(3)\Longrightarrow P(4)$ という無数の文を意味する. (i) と (ii) が成り立てば, $P(1)$ が成り立ち, $P(2)$ が成り立ち, つまりは $P(3), P(4), ...$ とすべての整数 n に対して $P(n)$ が成り立つ. 数学的帰納法に関して, $P(1), P(2)$ が成り立つことを示して, $P(k+2)$ を $P(k), P(k+1)$ が成り立つことを仮定して成り立つことを示す方法もある.

$P(k)$ が成り立つとき $P(k+1)$ が成り立つことを示すには, 式から $P(k+1)$ を表してから $P(k)$ をうまく利用して式変形を行っていく. これから $P(k+1)$ を求めたい形に持っていく.

例題 10

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

が成り立つことを証明せよ.

これを n に関する数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$ のとき左辺は 1, 右辺は 1 より与式は成り立つ.

(ii) $n=m(m$ は 1 以上の自然数$)$ のとき, 与式が成り立つと仮定すると,$n=m+1$ のときは

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}k^3&=\sum_{k=1}^{m}k^3+(m+1)^3\\&=\frac{m^2(m+1)^2}{4}+(m+1)^3\\&=\frac{(m+1)^2\{m^2+4(m+1)\}}{4}\\&=\frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}\end{aligned}$$

となり, 与式が成立する.

よって, (i),(ii) より題意は示された.

この問題に関しても, $n=m$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}k^3=\frac{m^2(m+1)^2}{4}$ を用いて, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}k^3$ をうまく変形できないかということを考えるとうまくいく.

次の例は (i) が $n=1$ だけでなく $n=2$ もあらかじめ成り立つ条件となる場合の問題である. この手の問題ははじめから $n=2$ が必要になると分かるわけではなく, 計算をするうえで証明するうえで必要だと分かるものである.

例題 11

n を自然数とするとき, 不等式 $3^n>n^2$ を示せ.

(i) $3>1$, $3^2=9>2^2=4$ より与式は $n=1,2$ のとき成り立つ.

(ii) $n=k(k \geqq 2)$ のとき成り立つと仮定すると

$$3^k > k^2 \Longleftrightarrow 3^{k+1} > 3k^2$$

ここで, $3k^2 \geqq (k+1)^2$ が示せれば $n=k+1$ $(k \geqq 2)$ のときも成り立つことがいえる.

$$3k^2-(k+1)^2 = 2k(k-1)-1 \geqq 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 > 0$$

であるから, $n=k+1$ のときも示された. よって,(i),(ii) より題意は示された.

11　基礎演習

入試レベルを取り上げた. 以下のレベルの問題は確実に解けるようにしておこう.

1. 初項 a, 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする. $S_{13}=13$, $S_{14}=-35$ であるとき, $a=\boxed{\text{ア}}$, $d=\boxed{\text{イ}}$ である. また, S_n が最大となるのは $n=\boxed{\text{ウ}}$ のときである.　(14 大阪電通大)

2. 初項が 100, 公差が -4 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき, S_n の最大値を求めよ.　(13 新潟工科大)

3. 公比が負の数である等比数列がある. 初項から第 4 項までの和は $\dfrac{75}{16}$, 第 3 項と第 4 項の和は $\dfrac{27}{16}$ である. この等比数列の初項は $\boxed{\text{ア}}$ で, 公比は $\boxed{\text{イ}}$ である.　(14 昭和薬大)

4. 自然数 n に対し, $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ とおく.
   (1) $\dfrac{A}{n(n+1)}-\dfrac{B}{(n+1)(n+2)}=a_n$ をみたす定数 A, B を求めよ.
   (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k < 0.24$ をみたす最大の自然数 n を求めよ.
   (14 東京女子大・文系)

12　標準演習

MARCH レベルを取り上げた.

1. 等差数列 $\{a_n\}$ は

$$a_4+a_5+a_6=615,\ a_{18}+a_{20}+a_{22}=-15$$

を満たす. この等差数列の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とするとき S_n の最大値を求めよ.

(16 福岡教大 (後))

2. 各項が整数の等差数列がある. この数列の諸侯から第 n 項までの和を S_n とするとき, S_n は $n=10$ のとき, 最大値 500 をとるという. この数列の初項と公差を求めよ.

(99 群馬大)

3. 公比が正である等比数列 $\{a_n\}$ は, 初項から第 4 項までの和が 3, 初項から第 8 項までの和が 51 である. この数列の公比は $\boxed{\text{ア}}$ である. よって, この数列の第 9 項から第 12 項までの和は $\boxed{\text{イ}}$ である.

(16 東京薬大・薬)

4. 年利率 2.5% の複利で, 年のはじめに 1 千ドルずつ毎年外資預金をすることにした. 1 年後の元利合計が 1.025 千ドルとすると, 元利合計が 3 万ドルを初めて超えるのは何年後か求めよ. ただし,
$\log_{10}2=0.3010,\ \log_{10}4.1=0.6128,\ \log_{10}7.1=0.8513$ として計算せよ.

(16 青山学院大・経済)

5. 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=2,\ a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}\quad(n=2,3,4,\cdots)$$

を満たしている. このとき, a_{1000} を求めよ.

(02 東北学院大・経)

13　応用演習

早慶レベルを取り上げた.

1. a と d を整数とする. 数列 $\{a_n\}$ を初項 a, 公差 d の等差数列とする. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする. 次の問いに答えよ.
(1) S_n を a, d, n を用いて表わせ.
(2) $n\leqq 34$ のとき $S_n\leqq 0$, $n\geqq 35$ のとき $S_n>0$ であるとする. 次の (i),(ii) に答えよ.
　(i) S_n が最小となる n の値を求めよ.
　(ii) S_n の最小値が -289 のとき, a と d の値をそれぞれ求めよ.

(16 奈良女大・生活環境)

14　発展演習

旧帝一工レベルを取り上げた.

1. n を自然数とするとき, 条件

$$1<x<2^{n+1} \text{ および } 0<y\leqq\log_2 x$$

をみたす整数 x, y を座標とする $(x,\ y)$ の個数を求めよ.

(82 阪大)

2. 数列 $1,2,1,2,3,2,1,2,3,4,3,2,1,2,3,4,5,4,3,2,1,2,\cdots$ の第 n 項を a_n とするとき, 次の問に答えよ.
(1) $a_n=1$ となる n を小さい順に並べてできる数列 $1,3,7,13,21,\cdots$ の第 k 項を b_k とする. b_k を求めよ.
(2) a_{1000} の値を求めよ.
(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{b_k}a_n$ を求めよ.

(04 防衛大)

3. 2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α, 小さいものを β とする.
$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し,$s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく.
(1) s_1, s_2, s_3 を求めよ. また, $n\geqq 3$ に対し, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表わせ.
(2) s_n は正の整数であることを示し, s_{2003} の 1 の位の数を求めよ.
(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ.

(03 東大・文系)

4. 数列 $a(1),\ a(2),\ a(3),\ \cdots$ は

$$\begin{cases} a(1)=1 \\ a(2n)=a(n),\ a(2n+1)=a(n)+a(n+1) \\ \hfill (n=1,\,2,\,3,\cdots) \end{cases}$$

をみたす. 数列 $\{a(n)\}$ を用いて, 数列 $\{b(n)\}$ を次のように定める.

$$b(n)=a(2^{n-1})+a(2^{n-1}+1)+a(2^{n-1}+2) \\ +\cdots+a(2^n-1)\quad (n=1,\,2,\,3,\cdots)$$

(1) $b(1),\ b(2),\ b(3)$ を求めよ.

(2) 一般項 $b(n)$ を求めよ.

(3) $a(1)+a(2)+a(3)+\cdots+a(2^n-1)$ を求めよ.

(16 横浜国大 (後)・理工, 経済)

5. 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=1,\ a_{2n}=2a_n-1,\ a_{2n+1}=2a_n+1$$

をみたす.

(1) $n=2^m$ のとき, a_n を求めよ.

(2) $n=2^m+r$ $(r=1,\,2,\,\cdots,\,2^m-1)$ のとき, a_n を求めよ.

(07 一橋大 (後))