三角比・三角関数

2021 年 2 月 25 日

目次

1 三角比の導入 1

2 三角関数 2
- 2.1 三角関数とは . . . 2
- 2.2 座標の回転 . . . 3
- 2.3 三角関数と方程式・不等式 . . . 5

3 各定理 6
- 3.1 余弦定理 . . . 6
- 3.2 正弦定理 . . . 9
- 3.3 加法定理 . . . 11
  - 3.3.1 加法定理の証明 . . . 11
  - 3.3.2 倍角の公式 . . . 14
  - 3.3.3 積和の公式・和積の公式 . . . 16
  - 3.3.4 三角関数の合成 . . . 17

1　三角比の導入

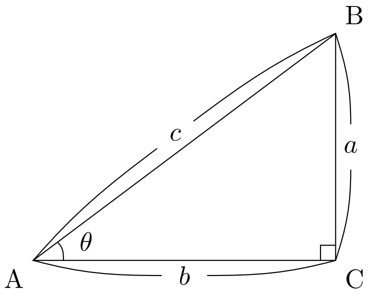
三角比とはまず直角三角形の辺の比を表現する方法として導入された．以下のように定義づけした．$\angle$X(X) を構成しない辺を小文字の x で表現することとする．つまり a =BC, b=AC, c =AB とする．

三角比

余弦 (cosine)　$\cos\theta = \dfrac{b}{c}$

正弦 (sine)　$\sin\theta = \dfrac{a}{c}$

正接 (tangent)　$\tan\theta = \dfrac{a}{b}$



重要公式についてまとめる．

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

(3) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

(1) の証明

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \sin\theta \times \frac{1}{\cos\theta} \\ &= \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} \\ &= \frac{a}{b} \\ &= \tan\theta\end{aligned}$$

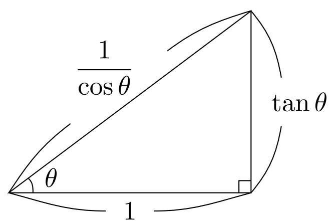
(2) の証明

$$\begin{aligned}\cos^2\theta + \sin^2\theta &= \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \\ &= \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{c^2}\end{aligned}$$

三平方の定理より，$c^2 = a^2 + b^2$ であるから，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

(3) の証明

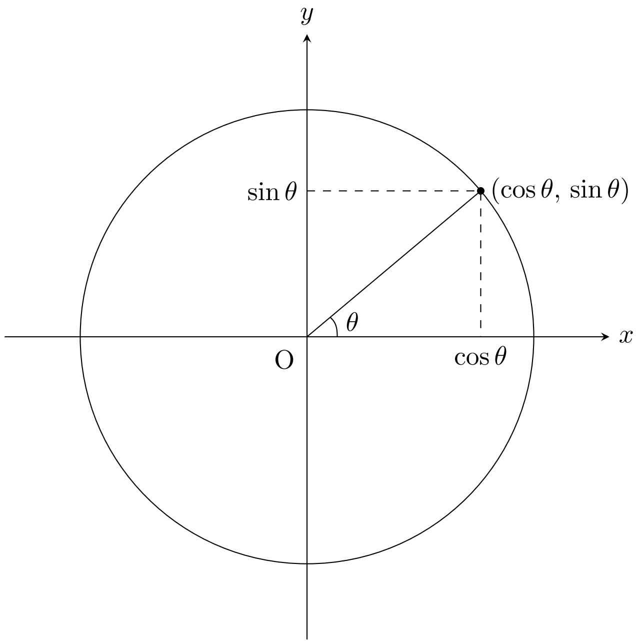
$$\begin{aligned}1 + \tan^2\theta &= 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2\theta}\end{aligned}$$



2　三角関数

2.1　三角関数とは

前章の定義であると三角形が形成できないと三角比を導入することはできない．つまり $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ でないと三角比を表すことができない．これであると応用性が効かないので, θ がどのような値であっても定義できるように単位円の座標という考え方を用いる．**単位円**とは半径 1 の円のことである．原点を中心とする単位円において, $(1, 0)$ を基準として反時計回りに θ 回転させてできる点の x 座標を $\boldsymbol{\cos\theta}$, y 座標を $\boldsymbol{\sin\theta}$ と定義する．また, $\boldsymbol{\tan\theta}$ とは原点とその点とが作る直線の傾きである．



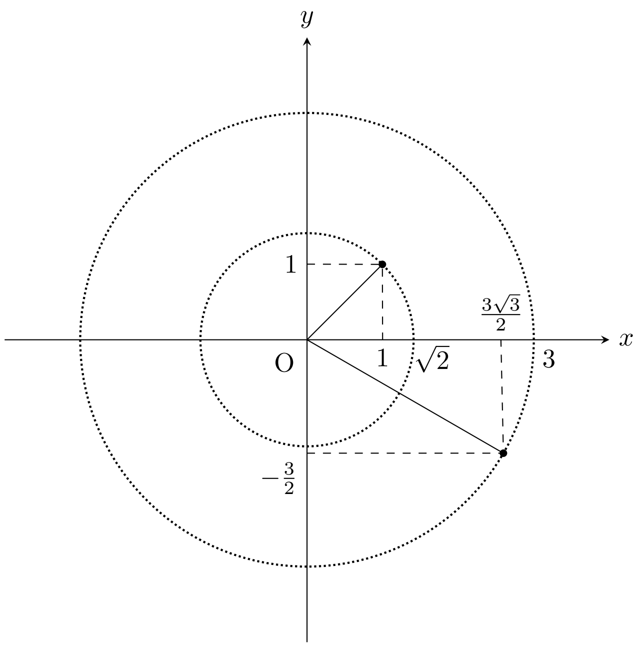
注意事項:

$\tan 90^\circ$,　$\tan 270^\circ$ は存在しない (正確には $\tan(90+180n)^\circ$ (n は整数) は存在しない)．これは傾きが存在しないことに起因する．つまり $\dfrac{1}{0}$ が定義できないために $\tan 90^\circ$,　$\tan 270^\circ$ は存在しない．この理由として, x が正の数であるとする．このとき $\dfrac{1}{x}$ の x を 0 に近づけるととてつもなく大きい値を取る (正確には正の無限大に発散するという)．一方で x が負の数であるとする．$\dfrac{1}{x}$ の x を 0 に近づけるととてつもなく小さい値を取る (正確には負の無限大に発散するという)．このことから $\dfrac{1}{0}$ となる値の可能性がとてつもなく大きい正の数またはとてつもなく小さい負の数であるかということになり一意に定まらないため, 定義することができない.

θ 回転させた座標ということから, 360° 回転させた座標はもとの座標と一致することがわかる．それゆえ, $\cos 60^\circ = \cos 420^\circ = \cos 780^\circ = \cos(-300^\circ)$ である.

2.2　座標の回転

しばしば図形を回転させるときに $\cos\theta, \sin\theta$ を用いることがある．研究の分野においては回転させて標準形というものにし一般化することで計算を楽にする目的もある．ここでは導入として数 III で扱う**極座標**について触れる．座標は x 座標と y 座標を指定することで位置を決めることができる．点を x, y で捉えるのではなく半径 r 上の円の周上に乗っているという考え方で捉える．たとえば, $(1,1)$ について考える．この点は半径 $\sqrt{2}$ の円周上に乗っていると考えることができる．そして角度 45° 分回転させた位置に存在するといえる．また, $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ については半径 3 の円周上に乗っていると考えることができる．そして角度 $330^\circ(-30^\circ)$ 分回転させた位置に存在するといえる．



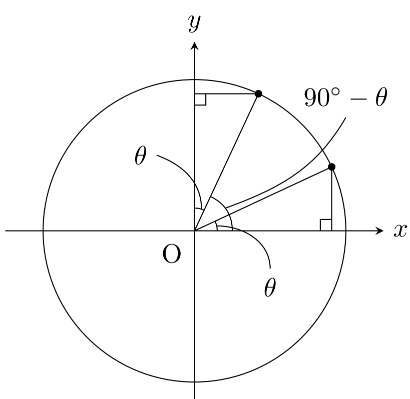
したがって, 極座標とは原点と点までの距離 r と回転角 θ を用いて, (r, θ) と表現する．いままでの (x, y) については**直交座標**という．極座標と直交座標の対応関係は以下になる．

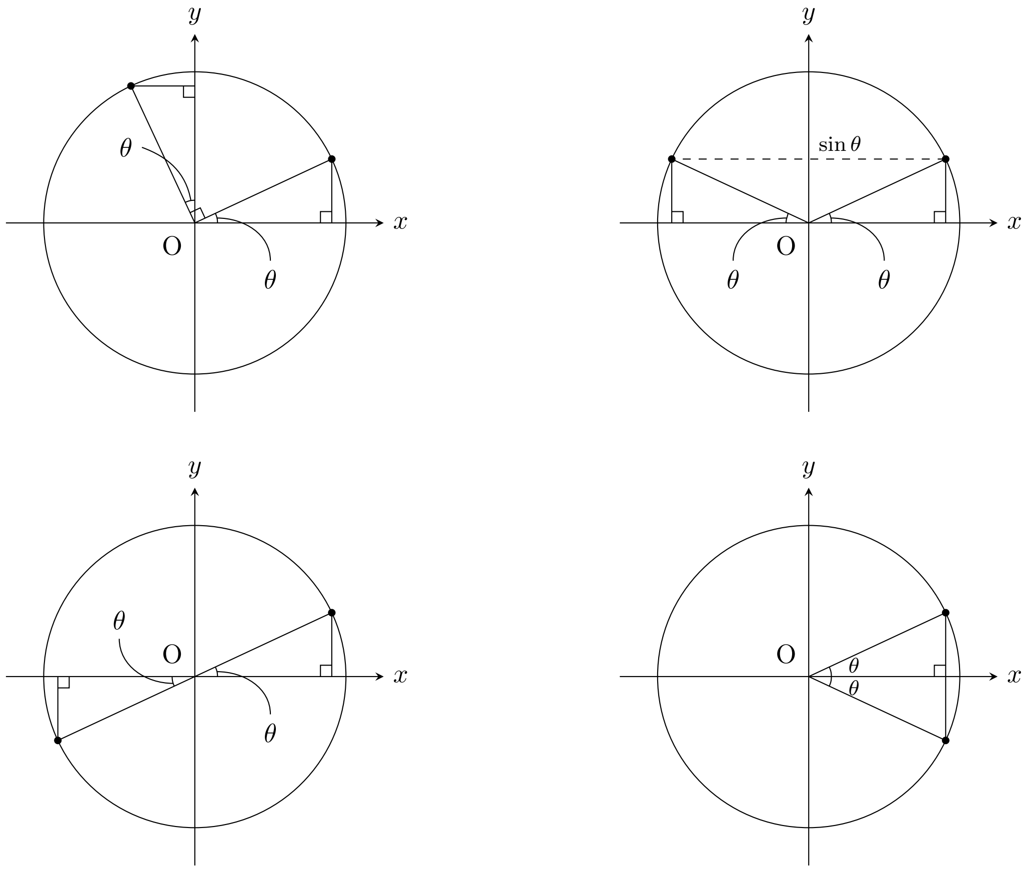
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

分野においては $y = x^2$ という式と $x = y^2$ という式があり対比させることもしばしばある．ここで $x = y^2$ というのは $y = x^2$ を $y = x$ を軸として対称移動させたものであるが, -90° 回転させても一致する．このことから θ 分回転させたということは重要であり, 極座標においては簡単に θ 移動させた位置というのは表現可能であるが直交座標は簡単にいかない．まずは $90^\circ, 180^\circ$ に関する場合について考える．問題としては直角三角形を辻褄が合うように移動させると公式が得られやすい．

回転における基礎公式

$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$	$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$
$\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$	$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$
$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$	$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$
$\cos(\theta + 180^\circ) = -\cos\theta$	$\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$





この性質は角度が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ でなくとも成り立つ．それゆえ，この性質の証明は図形を用いずとも求めることができるが少々不便である．たとえば，$90^\circ + \theta$ に着目した場合は垂直な直線を求めてそれと単位円との交点であるという性質を用いることができる．

<u>$\theta = (90n)^\circ$ の場合</u>

(1,0), (0,1), $(-1, 0)$, $(0, -1)$ は移動して (0,1), $(-1, 0)$, $(0, -1)$, (1,0) に移動する．

<u>それ以外の場合</u>

原点とその点が作る直線の式は $y = \tan\theta \cdot x$ と書ける．したがって，90° 回転した直線の式は $y = -\dfrac{1}{\tan\theta}x$ となる．ここで，$(x, y) = (\cos(90^\circ + \theta), \sin(90^\circ + \theta))$ であることを考えて，

$$
\begin{aligned}
&\cos^2(90^\circ + \theta) + \sin^2(90^\circ + \theta) = 1 \\
\Longrightarrow\ &\cos^2(90^\circ + \theta) + \left\{-\frac{1}{\tan\theta}\cos(90^\circ + \theta)\right\}^2 = 1 \\
\Longleftrightarrow\ &\left(1 + \frac{1}{\tan^2\theta}\right)\cos^2(90^\circ + \theta) = 1 \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{\sin^2\theta}\cos^2(90^\circ + \theta) = 1 \\
\Longleftrightarrow\ &\cos^2(90^\circ + \theta) = \sin^2\theta \\
\Longleftrightarrow\ &\cos(90^\circ + \theta) = \pm\sin\theta
\end{aligned}
$$

ここで，答えが一意に定まらないのは $y = -\dfrac{1}{\tan\theta}x$ という代入を行ったことによるものである．ここで，点が単位円周上のどこに存在するかということを説明しなければならず少々厄介である (もう少し簡潔な説明をする場合には数 B のベクトルの内容が必要となるので割愛)．$0^\circ < \theta < 90^\circ$ において，$90^\circ < 90^\circ + \theta < 180^\circ$ であるから.... というのが必要になってくる．

詳説

回転系の問題は一次変換といわれる分野に応用される．おもに用いられるのは大学数学 (昔は数 C という分野で高 3 で扱っていたが)．行列といわれる考え方を用いて簡潔に表現することができる．以下で記す行列については大学生になってから理解すれば良いので, 今はこのような考え方があるのだなぁ程度に思っておけば OK. (x,y) の座標を θ 回転させたとき (x',y') という座標になるならば

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

これを異なる形式で記述すると

$$\begin{cases} x' = \cos\theta\cdot x - \sin\theta\cdot y \\ y' = \sin\theta\cdot x + \cos\theta\cdot y \end{cases}$$

加法定理についても α 回転させたあと β 回転させることで $(\alpha+\beta)$ 回転させることになるので

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

を計算して導出される．

2.3　三角関数と方程式・不等式

三角関数を方程式の中に導入して計算することがある．というのも x,y の関数で表していたものを便宜上 r,θ で表すことにすれば関数の中に θ の関数が出てくるためである．三角関数はどれか一つの三角比に統一することで計算を簡略化することができる．

例題

等式 $4\sin^2\theta + 4\cos\theta - 1 = 0$ を満たす角 θ を求めよ．ただし, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

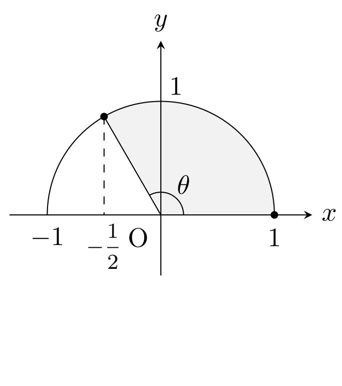
考え方

公式として $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ というものがある．このことから, $\sin^2\theta$ は $\cos\theta$ を用いて表すことができる．一方で, $\cos\theta$ というのはうまく変形する公式が存在しないので (平方根が出てくると計算が複雑かつ条件が抜ける可能性がある), そのままにする．したがって, $\cos\theta$ のみで表した方程式に変形することが大事になる．

解答

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ であるから,

$$\begin{aligned} & 4\sin^2\theta + 4\cos\theta - 1 = 0 \\ \iff & 4(1-\cos^2\theta) + 4\cos\theta - 1 = 0 \\ \iff & -4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 3 = 0 \\ \iff & (2\cos\theta+1)(2\cos\theta-3) = 0 \\ \iff & \cos\theta = -\frac{1}{2},\ \ \frac{3}{2} \end{aligned}$$



ここで $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より, $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$.

以上のことから, $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ であるから, $\theta = 120^\circ$.

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ という制約がない場合は, $\theta = (120+360n)^\circ, (240+360n)^\circ$　(n は整数) が解となる．

例題

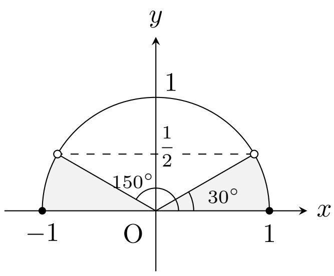
$\sin\theta < \dfrac{1}{2}$ をを満たす θ の範囲を求めよ．ただし, $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

解答

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を解くと, $\theta = 30°, 150°$．ここで, これを満たす角は単位円周上の点 y 座標が $\dfrac{1}{2}$ より小さくなる部分である．

よって,

$$0° \leqq \theta < 30°, \quad 150° \leqq \theta \leqq 180°$$



3 各定理

3.1 余弦定理

余弦定理は三平方の定理の拡張版である．三平方の定理は直角三角形に限定したものであったが, これを拡張してさまざまな三角形の形状を捉えることが可能となった．余弦定理は以下である．

余弦定理

△ABC において ∠A= A, ∠B= B, ∠C= C とし, a=BC, b=AC, c=AB とする．

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

証明

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ について述べれば一般性が成り立つことより残りの 2 式も同様に示すことができる．A の大きさで分類して証明する．

A が鋭角のとき

点 C から辺 AB に垂線を引き, その垂線との交点を H とする．すると

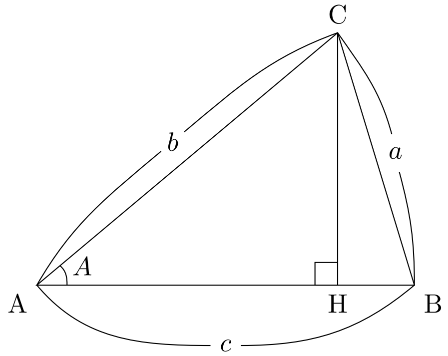
$$\mathrm{AH} = b\cos A$$
$$\mathrm{CH} = b\sin A$$

となるので,

$$\mathrm{BH} = c - b\cos A$$

であるから, 三平方の定理より

$$\begin{aligned} &\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{CH}^2 \\ \Longleftrightarrow\ & a^2 = (c - b\cos A)^2 + (b\sin A)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & a^2 = c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A \\ \Longleftrightarrow\ & a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

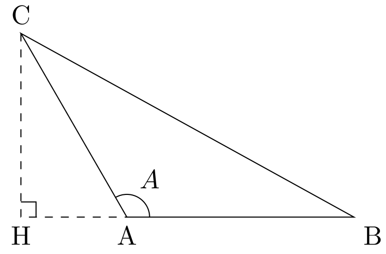


A が直角のとき

三平方の定理より成立する．

<u>A が鈍角のとき</u>
点 C から直線 AB を引き, その垂線との交点を H とする.
すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AH} &= |b\cos A| = -b\cos A \\ \mathrm{CH} &= b\sin A\end{aligned}$$



となるので,

$$\mathrm{BH} = \mathrm{AB} + \mathrm{AH} = c - b\cos A$$

であるから, 三平方の定理より

$$\begin{aligned}&\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{CH}^2 \\ \Longleftrightarrow\ & a^2 = (c - b\cos A)^2 + (b\sin A)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & a^2 = c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A \\ \Longleftrightarrow\ & a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A\end{aligned}$$

しばしば, 3 辺の長さが与えられたときに角度を求めたいときが存在する. 例えば三角形の 3 辺が与えられた場合にその 3 辺から三角形の面積を求めるなどの場合は角度情報があると計算が楽になる. 中学生の三平方の定理から導出することも可能となるが, 鋭角であるか鈍角であるか形状を知る必要がしばしば出てくる (気にしなくてもよいが, 三平方の定理の導出の際に用いる底辺 x の値が負になるので少し計算に躊躇することがある). 余弦定理を用いれば $\cos\theta$ の値で鋭角か鈍角かが明確になり, また $\sin\theta$ の値は鋭角だろうが鈍角だろうが影響ないことから計算が楽にできるという利点がある. そのため, $\cos\theta$ に着目した式に変形すると

$$\begin{cases}\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\end{cases}$$

となる.

例題

$a=9,\ \ b=8,\ \ c=7$ である △ABC の面積 S を求めよ.

解答

余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ &= \frac{64+49-81}{2\cdot 8\cdot 7}\\ &= \frac{32}{16\cdot 7}\\ &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1-\cos^2 A}\\ &= \sqrt{\frac{45}{49}}\\ &= \frac{3\sqrt{5}}{7}\end{aligned}$$

よって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}bc\sin A\\ &= \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7\cdot \frac{3\sqrt{5}}{7}\\ &= 12\sqrt{5}\end{aligned}$$

この問題は $\cos A$ でなくても $\cos B,\ \cos C$ に着目して計算しても答えを導出することができる.

三平方の定理を用いた解き方は以下.

点 C から辺 AB に対し垂線を引き, その垂線と AB との交点を H とする. AH=x とおくと, BH= $7-x$ と書ける.

三平方の定理より高さの 2 乗について方程式を立てると

$$\begin{aligned}&\mathrm{AC}^2-\mathrm{AH}^2=\mathrm{BC}^2-\mathrm{BH}^2\\ \iff\ & 8^2-x^2=9^2-(7-x)^2\\ \iff\ & 64-x^2=-x^2+14x+32\\ \iff\ & 14x=32\\ \iff\ & x=\frac{16}{7}\end{aligned}$$

したがって, 高さは

$$\begin{aligned}\mathrm{CH} &= \sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{AH}^2}\\ &= \sqrt{64-\left(\frac{16}{7}\right)^2}\\ &= \frac{24\sqrt{5}}{7}\end{aligned}$$

よって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CH}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 7\cdot\frac{24\sqrt{5}}{7}\\ &= 12\sqrt{5}\end{aligned}$$

計算量として三平方の定理は高さの計算で大きな値をとりうるのでなるべくこの手法は避けるべきである.

3.2　正弦定理

余弦定理は「余弦」という名がつく通り $\cos\theta$ に関するものであった．正弦定理は「正弦」という名がつく通り $\sin\theta$ に関するものである．正弦定理は以下である．

正弦定理

$\triangle$ABC において $\angle$A$=A$, $\angle$B$=B$, $\angle$C$=C$ とし, $a=$BC, $b=$AC, $c=$AB とする．
また $\triangle$ABC の外接円 C における半径 R とする．

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

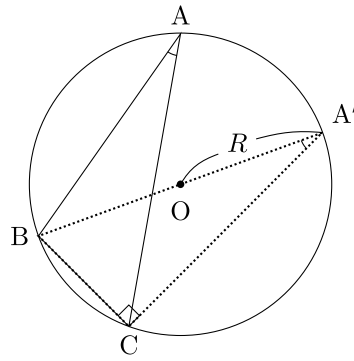
証明

式の対称性より $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ について述べれば残りの 2 式も同様に示すことができる．A の大きさで分類して証明する．

A が鋭角のとき

$\angle$A$'$CB$=90^\circ$ となるように円周上に点 A$'$ をとる．
すると円周角の定理より $A=A'$ となる．これより

$$\begin{aligned} &\mathrm{BC}=\mathrm{A'B}\sin A' \\ \iff\ & a=2R\sin A' \\ \iff\ & a=2R\sin A \\ \iff\ & \frac{a}{\sin A}=2R \end{aligned}$$



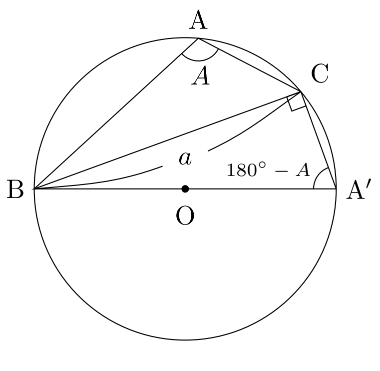
A が直角のとき

A が直角のとき, BC は直径であるから $a=2R$. また $\sin A=1$ になるので, 与式は成立する．

A が鈍角のとき

$\angle$A$'$CB$=90^\circ$ となるように円周上に点 A をとる．
すると四角形 ABA$'$C は $\triangle$ABC の外接円に内接する．したがって, 円周角の定理より $A'=180^\circ-A$ となる．これより

$$\begin{aligned} &\mathrm{BC}=\mathrm{A'B}\sin(180^\circ-A) \\ \iff\ & a=2R\sin(180^\circ A) \\ \iff\ & a=2R\sin A \\ \iff\ & \frac{a}{\sin A}=2R \end{aligned}$$

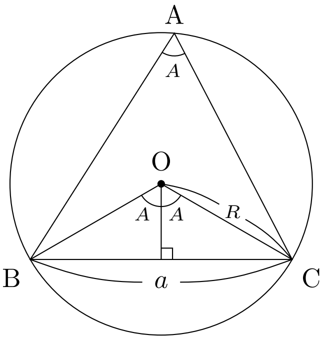


別の方法でも導出することができる.

<u>A が鋭角のとき</u>

円周角の定理より ∠BOC=2A. したがって, 中心 O から辺 BC に垂線を引き, その交点を H とすると ∠BOH=A であるから,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{BC} = 2\cdot R\sin A \\
\iff\ & a = 2R\sin A \\
\iff\ & \frac{a}{\sin A} = 2R
\end{aligned}
$$



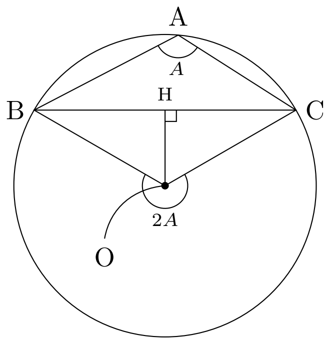
<u>A が直角のとき</u>

A が直角のとき, BC は直径であるから $a = 2R$. また $\sin A = 1$ になるので, 与式は成立する.

<u>A が鈍角のとき</u>

円周角の定理より ∠AOC $= 360^\circ - 2A$. したがって, 中心 O から辺 BC に垂線を引き, その交点を H とすると ∠AOH $= 180^\circ - A$ であるから,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{BC} = 2\cdot R\sin(180^\circ - A) \\
\iff\ & a = 2R\sin(180^\circ - A) \\
\iff\ & a = 2R\sin A \\
\iff\ & \frac{a}{\sin A} = 2R
\end{aligned}
$$



3.3 加法定理

3.3.1 加法定理の証明

座標の回転では 90°, 180° に着目したものをメインに扱ってきたが, ここでは一般的な α 回転した場合について考えていく．つまり, $(r\cos\beta, r\sin\beta)$ という座標において α 回転すると $(r\cos(\alpha+\beta), r\sin(\alpha+\beta))$ という座標になる．この $\cos(\alpha+\beta)$ や $\sin(\alpha+\beta)$ という値を $\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta$ の形で表せれば, 有名角を用いてあらゆる角度が表現可能となる．加法定理は以下である．

加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

証明

AB=1 として右の図ように考える．すると

$$\mathrm{AF} = \cos(\alpha+\beta), \quad \mathrm{BF} = \sin(\alpha+\beta)$$

と表現できる．また,

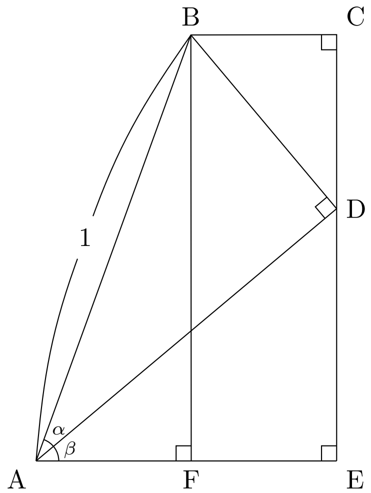
$$\mathrm{AD} = \cos\alpha, \quad \mathrm{BD} = \sin\alpha$$

AD に着目すると

$$\mathrm{AE} = \cos\alpha\cos\beta$$
$$\mathrm{DE} = \cos\alpha\sin\beta$$

BD に着目すると

$$\mathrm{BC} = \sin\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{CD} = \sin\alpha\cos\beta$$



よって,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \mathrm{AF} = \mathrm{AE} - \mathrm{FE} = \mathrm{AE} - \mathrm{BC} \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \mathrm{BF} = \mathrm{CE} = \mathrm{CD} + \mathrm{DE} \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

ここで, $\beta = -\beta$ とすると

$$\begin{aligned}&\cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) \\ \Longleftrightarrow\ &\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) \\ \Longleftrightarrow\ &\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$\tan(\alpha+\beta)$ について,

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \qquad (\text{分母分子を} \div \cos\alpha\cos\beta)\\ &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

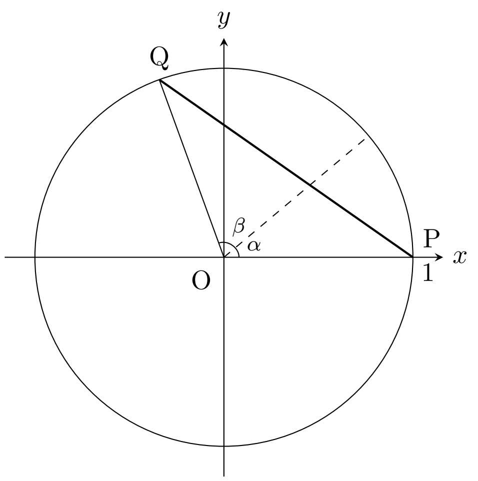
$\tan(-\theta)$ について

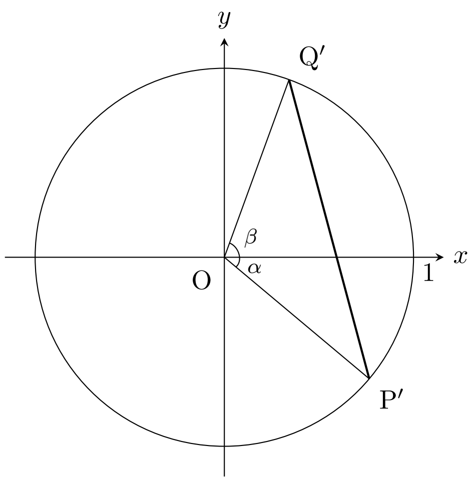
$$\tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

であるから, $\beta=-\beta$ とすると

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+(-\beta)) &= \frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}\\ \Longleftrightarrow \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

この方法であると $0^\circ<\alpha+\beta<90^\circ$ という制約が生まれてしまう (そうではない場合には図形の形状の吟味が必要). 三角関数においては, 関数として α,β での制約がなくてもこの加法定理が満たされることが必要である. まず, 2 点間の距離を用いた証明を行う.
左図において P から単位円周上を反時計回りに $\alpha+\beta$ 回転させた点を Q とする. 右図は左図から単位円周上を時計回りに α 回転 (反時計回りに $-\alpha$ 回転) させた図である





Q の座標は $(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$ とおくことができるので, PQ の長さの 2 乗は

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= \{1-\cos(\alpha+\beta)\}^2+\{0-\sin(\alpha+\beta)\}^2\\ &= 1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)\\ &= 2-2\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

と表せる. 次に P′, Q′ の座標は $(\cos\alpha,-\sin\alpha)$, $(\cos\beta,\sin\beta)$ と表すことができるので, P′Q′ の長さの 2 乗は

$$\begin{aligned}\mathrm{P'Q'}^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(-\sin\alpha-\sin\beta)^2\\ &= \cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta\\ &= 2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

PQ=P′Q′ であるから

$$\begin{aligned} &2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta) \\ \Longleftrightarrow\ &\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

$\beta=-\beta$ とすると

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$\alpha=90^\circ-\alpha$ とすると

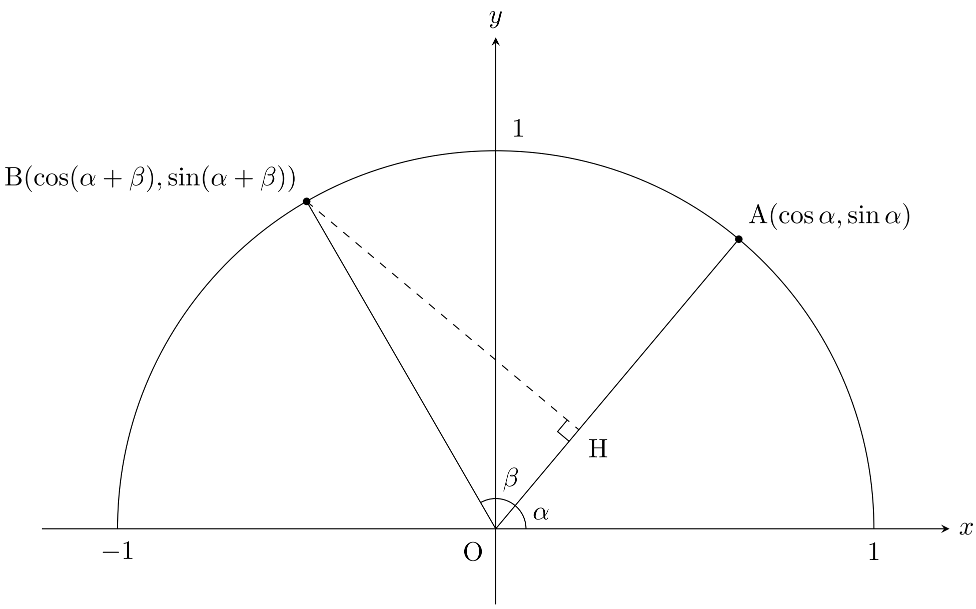
$$\begin{aligned} &\cos((90^\circ-\alpha)-\beta)=\cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta+\sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta \\ \Longleftrightarrow\ &\cos(90^\circ-(\alpha+\beta))=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ \Longleftrightarrow\ &\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

$\beta=-\beta$ とすると

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$\tan(\alpha+\beta)$ 以降の証明については先と同じ．省略.
この 2 点間の距離については, 余弦定理を用いて証明することもできる．α 回転した点を P, β 回転した点を Q とおくと $\angle$POQ=$\alpha-\beta$ と表すことができるので, 余弦定理を用いて PQ の長さを求めることができる. また, P$(\cos\alpha,\sin\alpha)$, Q$(\cos\beta,\sin\beta)$ であるから, 2 点間の距離 PQ を α,β を用いて表現することが可能となる．これによって最初に求まるのは $\cos(\alpha-\beta)$ である.

ベクトルを用いた証明も存在する．これは工夫は必要なく, 直感的な求め方である．まだベクトルの分野は触れていないので, ベクトルを既習した際に見返すとよい.



図のように点をとるとき $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\cos\alpha,\sin\alpha,\cos\beta,\sin\beta$ を用いて表現できれば良い.
まず, OH の長さは $\cos\beta$(大きさが負のときは逆ベクトルの方向である) であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cdot\cos\beta}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\cos\beta\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の法線ベクトルと $\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ は一次従属の関係にある．したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| \cdot \sin\beta}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HB}} \\ \Longleftrightarrow &\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ベクトルを用いた解法であると，一回の処理で $\cos(\alpha+\beta)$ および $\sin(\alpha+\beta)$ を導出することができる．

3.3.2　倍角の公式

加法定理の応用で倍角の公式というものがある．これは $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha$ を $\cos\alpha, \sin\alpha, \tan\alpha$ で表現したものである．

倍角の公式

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\cos\alpha\sin\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha \\ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{導出}}$

$\alpha = \beta$ として加法定理に代入すればよい．

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \tan 2\alpha &= \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \end{aligned}$$

倍角の公式の応用で 3 倍角の公式というものがある．これは $\cos 3\alpha, \sin 3\alpha, \tan 3\alpha$ を $\cos\alpha, \sin\alpha, \tan\alpha$ で表すというものである．

3 倍角の公式

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha \\
\cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\sin\alpha \\
\tan 3\alpha &= \frac{-\tan^3\alpha + 3\tan\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}
\end{aligned}$$

導出

$2\alpha + \alpha$ の加法定理を適用すればよい．

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha \\
&= 2\sin\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha \\
&= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \\
&= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \\
&= -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha \\
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha \\
&= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\alpha \\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\
\tan 3\alpha &= \tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha\tan\alpha} \\
&= \frac{\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha} \\
&= \frac{2\tan\alpha + \tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1-\tan^2\alpha) - 2\tan^2\alpha} \qquad\qquad (\text{分母分子に} \times 1 - \tan^2\alpha) \\
&= \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}
\end{aligned}$$

$\tan 3\alpha$ については $\sin 3\alpha, \cos 3\alpha$ が分かっていれば加法定理を用いずに導出できる．

$$\begin{aligned}
\tan 3\alpha &= \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{-4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha}{4\cos^3\alpha - 3\sin\alpha} \\
&= \frac{-4\tan^3\alpha + 3\tan\alpha\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{4 - 3\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} \\
&= \frac{-4\tan^3\alpha + 3\tan\alpha(1+\tan^2\alpha)}{4 - 3(1+\tan^2\alpha)} \\
&= \frac{-\tan^3\alpha + 3\tan\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}
\end{aligned}$$

3.3.3 積和の公式・和積の公式

$\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta$ の積で表されたものを和の形で変形するものを積和の公式といい，その逆を和積の公式という．

積和の公式

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}\\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}\end{aligned}$$

$\cos\alpha\sin\beta$ がない理由としては $\cos(\beta+\alpha)$ の $\sin\beta\cos\alpha$ とみれば 1 つ目の式と同じになるためである．

導出

加法定理の式から連立方程式として加減を行うことで導出できる． $\sin\alpha\cos\beta$ の項が出てくるのは $\sin(\alpha+\beta), \sin(\alpha-\beta)$ である．したがって，

$$\begin{array}{r}\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \underline{+)\,\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}\\ \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta\end{array}$$

残りの 2 つの式も $\cos(\alpha+\beta), \cos(\alpha-\beta)$ の加減を行うことで導出可能である．

$$\begin{array}{r}\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \underline{-)\,\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}\\ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta\end{array}$$

$$\begin{array}{r}\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \underline{+)\,\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}\\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta\end{array}$$

和積の公式

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}$$

これを積和の形に類似した書き方をすると以下．

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta\\ \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta\\ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

$\alpha+\beta = A,\ \ \alpha-\beta = B$ とおくと，$\alpha = \dfrac{A+B}{2},\ \ \beta = \dfrac{A-B}{2}$ という関係式になる．この関係式から類似した書き方の式の α, β を A, B で表すと和積の公式が導出される．

3.3.4 三角関数の合成

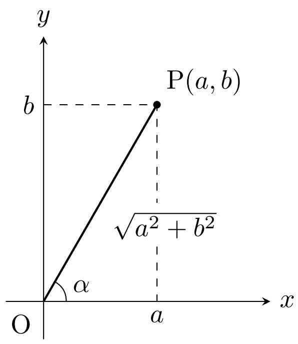
三角関数の合成とは $\sin\theta, \cos\theta$ という 2 つの関数がある場合に $\sin(\theta+\alpha)$ あるいは $\cos(\theta+\alpha)$ の 1 つの関数の式に変形することをいう.

三角関数の合成公式

- sin での合成

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

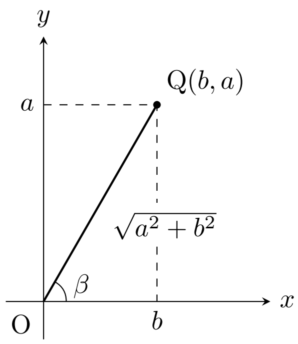
ただし, α は sin の係数 a を x 成分, cos の係数 b を y 成分とする点 P と原点 O を結ぶ線分 OP と x 軸のなす角を一般角で表したもの.



- cos での合成

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$$

ただし, β は cos の係数 b を x 成分, sin の係数 a を y 成分とする点 Q と原点 O を結ぶ線分 OQ と x 軸のなす角を一般角で表したもの.



導出

- sin での合成
sin で合成するということは, $\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha$ の形に直す必要がある.
したがって, この場合

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \qquad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

とおけば

$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \end{aligned}$$

- cos での合成
cos で合成するということは, $\cos\theta\cos\beta - \sin\theta\sin\beta$ の形に直す必要がある.
したがって, この場合

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

とおけば

$$\begin{aligned}
a\sin\theta + b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)
\end{aligned}$$