時系列ゼミ
第 6 回

伊藤真道

June 22nd 2020

＜今回のお言葉＞
このゼミの準備だいぶ負担に感じます．ですがここでやめたら今までの労力もったいない... いつかなんとかなるかなぁ... という不安もある．サンクコストバイアス．(おそらく一人で読んでたら即やめてます．あはは)

2 Chap2 つづき

2.5 Recursive Calculation of the h-Step Prediction

(2.5.10) の

$$E[(\text{誤差}) \times (\text{予測変数})] = 0$$

$$E[(X_{n+k} - P_{n+k-1}X_{n+k})X_{n+j-1}] = 0,\ j = 1, \ldots, n$$

という関係式から，

$$P_n(X_{n+k} - P_{n+k-1}X_{n+k}) = 0,\ k \geq 1 \tag{2.5.29}$$

が導かれ，これを変形すると

$$\begin{aligned} P_nX_{n+h} &= P_nP_{n+h-1}X_{n+h} \\ &= P_n\hat{X}_{n+h} \\ &= P_n\left(\sum_{j=1}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}\left(X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j}\right)\right) \end{aligned}$$

となる．ここで，予測子の線形性を用いたのちに，再度 (2.5.29) 式を適用すると，$h - j \geq 1$ なる h について，$P_n(X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j}) = 0$ となるから，h 時点先の予測結果は，

$$P_nX_{n+h} = \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}\left(X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j}\right) \tag{2.5.30}$$

となる．ここで，$\theta_{n,j}$ はそれまでの Inovations algorithm で推定されているよ〜．さらに，実際の X_{n+h} と予測値 P_nX_{n+h} の平均二乗誤差は，

$$\begin{aligned} E[(X_{n+h}-P_nX_{n+h})^2] &= E[X_{n+h}^2]-E[P_nX_{n+h}]^2 \\ &= \kappa(n+h,n+h)-\sum_{j=h}^{n+h-1}\theta_{n+h-1,j}^2 v_{n+h-j-1} \end{aligned} \tag{2.5.31}$$

($\kappa(n+h,n+h)$ は X_{n+h} の分散を表す．) のように表される．

¡note¿

2.6 Prediction of a Stationary Process in Terms of Infinitely Many Past Values

$X_m, X_{m+1}\ldots, X_0, X_1, \ldots, X_n$，$(m<0)$ のように大量の過去の観測が利用可能な際に，X_{n+h} の最良線形予測子を $X_m,\ldots,X_0,\ldots,X_n$ の観点で評価することはしばしば有用である．$P_{m,n}$ で表されるこの予測子は以前紹介した方法で容易に評価できる．もし，$|m|$ が大きいならば，この予測子はより簡便に (な時もあるけどいつもではない) 計算可能な二乗平均の極限

$$\tilde{P}_nX_{n+h} = \lim_{m\to-\infty} P_{m,n}X_{n+h}$$

によって近似される．特に，$\tilde{P}_n$ を**無限の過去の観測値** $\{X_t,\ -\infty<t\le n\}$ **に基づく予測子**と呼び，P_n を**有限の過去の観測値** $\{X_1,\ldots,X_n\}$ **に基づく予測子**と呼ぶ．二乗平均収束については Appendix C. を参照．

¡note¿

2.7 Determination of $\tilde{P}_nX_{n+h}$

もし，$\{X_n\}$ が平均 0，共分散関数 $\gamma(\cdot)$ の定常過程であるとすると，P_nX_{n+h} が

$$E[(\text{誤差})\times(\text{予測変数})]=0$$

によって特徴づけられるのと同様に，$\tilde{P}_n X_{n+h}$ も

$$E\left[\left(X_{n+h} - \tilde{P}_n X_{n+h}\right) X_{n+1-i}\right] = 0,\ i = 1, 2, \ldots$$

によって特徴付けられる．もし，これらの方程式の解を求められたら，それによって $\tilde{P}_n X_{n+h}$ は一意に決定される．この問題に対する多くの場合に効果的なアプローチは，$\tilde{P}_n X_{n+h}$ が

$$\tilde{P}_n X_{n+h} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j X_{n+1-j}$$

という形で表されると仮定することである．これを上の式に代入すると，

$$E\left[\left(X_{n+h} - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j X_{n+1-j}\right) X_{n+1-i}\right] = 0,\ i = 1, 2, \ldots$$

$$E[\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j X_{n+1-j} X_{n+1-i}] = E[X_[n+h] X_{n+1-i}]$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \gamma(i-j) = \gamma(h+i-1),\ i = 1, 2, \ldots$$

のようになる．これは (系列 $\alpha_j X_{n+1-j}$ が収束するときに存在する)$\tilde{P}_n X_{n+h}$ を決定する未知係数 α_i の無限個の線形方程式である．

$\tilde{P}_n$ の性質

$E[U^2] < \infty,\ E[V^2] < \infty$ とし，$a,\ b,\ c$ を定数とし，$\Gamma = Cov(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W})$ とする．

1. $E[(U - \tilde{P}_n(U))X_j] = 0,\ j \le n$
2. $\tilde{P}_n(aU + bV + c) = a\tilde{P}_n(U) + b\tilde{P}_n(V) + c$(線形性)
3. もし，U が $X_j,\ j \le n$ の線型結合の極限ならば，$\tilde{P}_n(U) = U$
4. もし，$\forall j \le n, Cov(U, X_j) = 0$ ならば，$\tilde{P}_n(U) = E[U]$

これらの性質は，時系列 $\{X_t\}$ が ARMA 過程の時，$\tilde{P}_n X_{n+h}$ の計算をものすごく単純化するために利用される．

¡note¿

例 **2.1.** *causal* かつ *invertible* な *ARMA(1,1)* 過程 $\{X_t\}$ は

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1},\ \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

で定義される．*causal* であることから，

$$X_{n+1} = Z_{n+1} + (\phi + \theta)\sum_{j=1}^{\infty}\phi^{j-1}Z_{n+1-j}$$

であり，*invertible* であることから，

$$Z_{n+1} = X_{n+1} - (\phi + \theta)\sum_{j=1}^{\infty}(-\theta)^{j-1}X_{n+1-j}$$

と表される．Z_{n+1} の方に $\tilde{P}_n$ を作用させると，$Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ から，$\forall j \leq n,\ Cov(Z_{n+1}, X_j) = 0$ であり，$\tilde{P}_n Z_{n+1} = E[Z_{n+1}] = 0$ であり，これを整理すると，

$$\tilde{P}_n X_{n+1} = (\phi + \theta)\sum_{j=1}^{\infty}(-\theta)^{j-1}X_{n+1-j}$$

を得る．X_{n+1} の方に $\tilde{P}_n$ を作用させると，$\tilde{P}_n$ の線形性と，さっきの $\tilde{P}_n(Z_{n+1}) = E[Z_{n+1}] = 0$ を用いて，

$$\tilde{P}_n Z_{n+1} = (\phi + \theta)\sum_{j=1}^{\infty}\phi^{j-1}X_{n+1-j}$$

を得る．よって，これらの結果を元の定常解に再び代入することで

$$X_{n+1} - \tilde{P}_n X_{n+1} = Z_{n+1}$$

となる．これを用いて，$\tilde{P}_n X_{n+1}$ の平均二乗誤差は，

$$E[(X_{n+1} - \tilde{P}_n X_{n+1})^2] = E[Z_{n+1}^2] = \sigma^2$$

と計算できる．

¡note¿