Introduction to mathematical statistics ゼミ (第？回)

担当: 伊藤真道

未定

5 Chap.5. Consistency and Limiting Distributions

5.2 Convergence in Distribution / 分布収束

前節では，確率収束という概念を紹介した．この概念によって，統計量がパラメータに収束することを言えて，さらに，多くのケースで統計量の分布関数を知らなくてもこのことを示せるということがわかった．しかし，統計量がどれほど推定量に近いかについては未だ不明である．この節で議論する収束は，これまでの結果と組み合わせること，この疑問に答えてくれるであろう．

定義 5.1. 分布収束 *(Convergence in Distribution)* $\{X_n\}$ を確率変数列，X を確率変数とする．さらに F_{X_n}, F_X をそれぞれ，X_n, X の累積分布関数とする．$C(F_X)$ で F_X が連続であるような点全ての集合を表すとする．X_n が X に分布収束するとは，

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)\ \forall x \in C(F_X)$$

が成立することを言い，

$$X_n \overset{D}{\to} X$$

と表す．

漸近理論 (asymptotic theory) では，ここでの X の分布を**漸近分布** *(asymptotic distribution)* や確率変数列 $\{X_n\}$ の**極限分布** *(limitting distribution)* と呼んだりする．

例えば，$X_n \overset{D}{\to} X$ で，X が標準正規分布を持つ場合，

$$X_n \overset{D}{\to} N(0,1)$$

のように表すこともある．

F_X の連続な点**のみ**を考えることの意義というのは，以下の単純な例によって明確になる．X_n を全ての質量が n^{-1} に集中している確率変数であるとし，X を全ての質量が 0 に集中している確

率変数とする．
¡図を描いてみよう¿

図からわかるように，X_n の全ての質量は $0(= X$ の分布) に収束する．F_X の不連続な点においては，$\lim F_{X_n}(0) = 0 \neq 1 = F_X(0)$ であり，一方 F_X の連続な点 $x(\neq 0)$ においては，$\lim F_{X_n}(x) = F_X(x)$ である．よって，定義から，$X_n \overset{D}{\to} X$ が言える．

確率収束は確率変数列が，別の確率変数に近づいていくことを表す．一方，分布収束は，X_n の累積分布関数 F_{X_n} が，X の累積分布関数 F_X に近づいていくことのみを考慮している．再び，単純な例を見てみよう．X を連続型確率変数とし，その確率密度関数は原点対称 $(f_X(-x) = f_X(x))$ とする．この時，明らかに，確率変数 $-X$ の密度関数は $f_X(x)$ である．ゆえに，X と $-X$ は同一の分布を持つ．確率変数の列を以下のように定める．

$$X_n = \begin{cases} X & if\ n\ is\ odd \\ -X & if\ n\ is\ even \end{cases} \tag{1}$$

明らかに，任意の X の台において $F_{X_n}(x) = F_X(x)$ であるため，$X_n \overset{D}{\to} X$ である．一方，X_n の列は，X に近づきはしない (振動する)．特に $X_n \overset{P}{\to} X$ は成り立たない．

例 5.1. $\bar{X}_n$ が

$$F_n(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\bar{x}} \frac{1}{\sqrt{1/n}\sqrt{2\pi}} e^{-nw^2/2} dw$$

という累積分布関数を持つとする．ここで，$v = \sqrt{n}w$ という変数変換が行われたとするならば，

$$F_n(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\sqrt{n}\bar{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv$$

を得る．明らかに，

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \bar{x} < 0 \\ \frac{1}{2} & \bar{x} = 0 \\ 1 & \bar{x} > 0 \end{cases}$$

である．ここで，関数

$$F(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \bar{x} < 0 \\ 1 & \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

は累積分布関数であり，$F(\bar{x})$ の連続である点すべてで，$\lim_{n\to\infty} F_n(\bar{x}) = F(\bar{x})$ である (下の空白に図を書いて確認しましょう)．実際 $\lim_{n\to\infty} F_n(0) \neq F(0)$ であるが，$F(\bar{x})$ は $\bar{x} = 0$ において連続ではない．結果として．数列 $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \ldots$ は $\bar{x} = 0$ にて退化した分布を持つ確率変数に分布収束する．

¡note¿

例 5.2. たとえ，確率変数列 $X_1, X_2, X_3, \ldots$ が，確率変数 X に分布収束するとしても，一般には，X_n の確率質量関数 (probability mass function, pmf) の極限をとることで X の分布を求めることはできない．このことは，X_n が以下のような確率質量関数を持つとすることで示される．

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & x = 2 + n^{-1} \\ 0 & elsewhere. \end{cases}$$

明らかに，任意の x にて $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = 0$ である．このことは，任意の $n = 1, 2, 3, \ldots$ で，X_n は分布収束しないということを意味しているように見える．しかし，X_n の累積分布関数は

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 + n^{-1} \\ 1 & x \geq 2 + n^{-1} \end{cases}$$

であり，さらに

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

である．

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

が累積分布関数であることと，$F(x)$ の全ての連続点で $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ であることから，確率変数列 $X_1, X_2, X_3, \ldots$ は，累積分布関数として $F(x)$ を持つ確率変数に分布収束する．
(ぱっと見わかりずらいが，上の例では，分布収束することを，「確率質量関数に注目する」→「累積分布関数に注目する」と視点を変えることで示している．)

以上の例では，単に，確率質量関数や確率密度関数を考えるのでは，極限分布を決められないということを示している．しかし，次に続く例のように，ある特定の状況下では，確率質量関数や確率密度関数のみを考慮しても分布収束を示すことができる．
¡note¿

例 5.3. T_n が自由度 $n(n = 1, 2, 3, \ldots)$ の t 分布を持つとする．累積分布関数は，

$$F_n(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n}\Gamma(n/2)} \frac{1}{(1+y^2/n)^{(n+1)/2}} dy$$

である．累積分布関数の極限をとると，

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{t} f_n(y)dy = \int_{-\infty}^{t} \lim_{n\to\infty} f_n(y)dy$$

となる．なお，二つ目の等号で優収束定理 *(*詳しくは，ルベーグ積分の教科書を参照してください*)* を利用している．この極限と積分の順序交換が可能であることから，$\lim_{n\to\infty} F_n(t)$ を求めるには，$\lim_{n\to\infty} f_n(y)$ を求めたのち，積分すればよいということがわかる．$\lim_{n\to\infty} f_n(y)$ は

$$\lim_{n\to\infty} f_n(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{n/2}\Gamma(n/2)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+y^2/n)^{1/2}}$$
$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + \frac{y^2}{n})^{-n/2}$$

と計算でき，

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{y^2}{n})^n = e^{y^2}$$

であることから，三つ目の極限は標準正規分布の密度関数となる．二つ目の極限は *1* である．一つ目の極限は，　スターリンの公式から *1* である．ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

となり，T_n は極限分布として，標準正規分布を持つ．

¡note¿

Remark 5.1. スターリングの公式 *(Stirling's formula)* より高次の解析学のテキストでは，以下の近似を導出する．

$$\Gamma(k+1) \approx \sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k}$$

この公式は，スターリングの *(Stirling's formula)* であり，k が大きい場合の近似法である．

Remark 5.2. この節の証明を単純にするために，数列の $\underline{\lim}$ と $\overline{\lim}$ を利用する．$\{a_n\}$ を実数の列とし，以下の二つの部分列を定義する．

$$b_n = sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\},\ n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

$$c_n = inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\},\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ はそれぞれ，非増加列，非減少列である．よって，これらの極限 *(*$\pm\infty$*)* は常に存在し，それぞれ，$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$，$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ で表されるとする．さらに，$c_n < a_n < b_n$ である．このことから，はさみうちの定理を用いると，もし，$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ ならば，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在し，$\lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ で与えられる．

Appendix A で議論されているように，他のいくつかの性質も便利である．例えば，$\{p_n\}$ を確率の数列とし，$\overline{\lim}_{n\to\infty} p_n = 0$ とする．この時，$0 \leq p_n \leq sup p_n, p_{n+1}, \ldots$ から，はさみうちの定理によって，$\underline{\lim}_{n\to\infty} p_n = 0$ を得る．また，任意の二つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について，容易に $\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ が成り立つ．

¡note¿

以下の定理では，分布収束は確率収束より弱いということが示される．ゆえに，分布収束は，弱収束と呼ばれることもある．

定理 5.1. もし，X_n が X に確率収束するならば，X_n は X に分布収束する．

証明 5.1. x を $F_X(x)$ の連続である点とする．すべての $\epsilon > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P[X_n \le x] \\ &= P[\{X_n \le x\} \cap \{|X_n - X| < \epsilon\}] + P[\{X_n \le x\} \cap \{|X_n - X| \ge \epsilon\}] \\ &\le P[X \le x + \epsilon] + P[|X_n - X| \ge \epsilon] \end{aligned}$$

この不等式と，X_n が X に確率収束することから，

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} F_{X_n}(x) \le F_X(x + \epsilon)$$

を得る．さらに，下界を得るために，同様のことを，$P[X_n > x]$ に対しても行うと，

$$P[X_n > x] \le P[X \ge x - \epsilon] + P[|X_n - X| \ge \epsilon]$$

よって，

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} F_{X_n}(x) \ge F_X(x - \epsilon)$$

を得る．$\overline{\lim}, \underline{\lim}$ の大小関係から，

$$F_X(x - \epsilon) \le \underline{\lim}_{n \to \infty} F_{X_n}(x) \le \overline{\lim_{n \to \infty}} F_{X_n}(x) \le F_X(x + \epsilon)$$

となり，$\epsilon \downarrow 0$ とすることで，定理の結果を得る． □

¡note¿

再び，先ほど登場した，

$$X_n = \begin{cases} X & if\ n\ is\ odd \\ -X & if\ n\ is\ even \end{cases} \tag{4}$$

の数列について考える．ここで，X_n は X に分布収束するが，確率収束はしない．**一般的に，上の定理の逆は成立しない．**しかし，以下の定理に見られるように，X が退化しているならば，成立する．

定理 5.2. もし，X_n が定数 b に分布収束するならば，X_n は b に確率収束する．

証明 5.2. ある $\epsilon > 0$ が与えられているとする．その時，

$$\lim_{n\to\infty} P[|X_n - b| \le \epsilon] = \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(b+\epsilon) - \lim_{n\to\infty} F_{X_n}[(b-\epsilon)-0] = 1 - 0 = 1$$

□

定理 5.3. $X_n \xrightarrow{D} X, Y_n \xrightarrow{P} 0$ とする．この時，$X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$ である

証明 5.3. 練習問題になってた *(泣)*

この結果は以下のように利用される．X_n が X に分布収束することを示すのは難しく，その反面，Y_n が X に分布収束することと，$X_n - Y_n$ が 0 に確率収束することを示すのは容易だとする．この時，上の定理を利用すると，$X_n = Y_n + (X_n - Y_n) \xrightarrow{D} X$ のように，簡単に示すことができる．

続く二つの定理は一般的な結果を主張している．一つ目の定理の証明は，より高次の教科書を参照されたい．二つ目の定理に関しては，定理 5.6 と同様の方法で証明される．

定理 5.4. $X_n \xrightarrow{D} X$，g は X の台で連続な関数であるとする．この時，$g(X_n) \xrightarrow{D} g(X)$ である．

証明 5.4. a

定理 5.5. *Slutsky's Theorem* X_n, X, A_n, B_n を確率変数とし，a, b を定数とする．もし，$X_n \xrightarrow{D} X, A_n \xrightarrow{P} a, B_n \xrightarrow{P} b$ ならば，

$$A_n + B_n X_n \xrightarrow{P} a + bX$$

証明 5.5. a

¡note¿

5.2.1 Bounded in Probability / 確率有界

分布収束に関する別の有用な概念に，確率変数列の確率的に有界というものがある．

はじめに累積分布関数 $F_X(x)$ を持つ確率変数 X を考える．ある $\epsilon > 0$ に対し，以下のような手順で，X を制限することができる．F_X の上限と下限はそれぞれ $1, 0$ であることから，

$$F_X(x) < \epsilon/2 \ for \ x \leq \eta_1 \ and \ F_X(x) > 1 - (\epsilon/2) \ for \ x \geq \eta_2 \tag{5}$$

を満たすような η_1, η_2 を見つけることができる．ここで $\eta = \max\{|\eta_1|, |\eta_2|\}$ とすると，

$$P[|X| \leq \eta] = F_X(\eta) - F_X(-\eta - 0) \geq 1 - (\epsilon/2) \geq 1 - (\epsilon/2) - (\epsilon/2) = 1 - \epsilon$$

ゆえに，$X \sim N(0,1)$ のように，有界でない確率変数も，以上のようにすることで有界とすることができる．これは確率変数列に対する有用な概念であり，以下のように定義される．

定義 5.2. 確率有界 *(Bounded in Probability)* 確率変数列 $\{X_n\}$ が確率有界であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$n \geq N_\epsilon \Rightarrow P[|X_n| \leq B_\epsilon] \geq 1 - \epsilon$$

を満たすような，ある定数 $B_\epsilon > 0$ とある整数 N_ϵ が存在することをいう．

¡note¿

次に， 累積分布関数 F を持つ確率変数 X に分布収束するような確率変数列 $\{X_n\}$ について考える．ある $\epsilon > 0$ が与えられているとし，X に対して，(5) を満たすように η を選ぶとする．この

時，常に，$\eta, -\eta$ が F の連続点であるような η を選ぶことができる．その時，

$$\lim_{n\to\infty} P[|X_n| \leq \eta] \geq \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(\eta) - \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(-\eta - 0) = F_X(\eta) - F_X(-\eta) \geq 1 - \epsilon$$

を得る．このようにして，$n > N$ なる n について $P[|X_n| \leq \eta] \geq 1 - \epsilon$ となるような N を選択することができる．これは以下に示す定理の証明となっている．

定理 5.6. $\{X_n\}$ を確率変数列，X を確率変数とする．もし，X_n が X に分布収束するならば，$\{X_n\}$ は確率有界である．

$|X_n|$ の確率質量が ∞ に近づかないのなら，その確率変数列は，確率有界である (もしくは，ある確率変数に分布収束する) と考えることができる．分布収束よりも，確率有界はよく利用される．以降で使う確率有界の性質を定理として述べておく．

定理 5.7. $\{X_n\}$ を確率有界な確率変数列とし，$\{Y_n\}$ を 0 に確率収束する確率変数列とする．この時，

$$X_n Y_n \overset{P}{\to} 0$$

が成立する．

証明 5.12. ある $\epsilon > 0$ が与えられているとする．以下を満たすような，$B_\epsilon > 0$ と整数 N を選ぶ．

$$n \geq N \Rightarrow P[|X_n| \leq B_\epsilon] \geq 1 - \epsilon$$

この時，

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{n\to\infty}} P[|X_n Y_n| \geq \epsilon] &\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} P[|X_n Y_n| \geq \epsilon, |X_n| \leq B_\epsilon] \\
&\quad + \overline{\lim_{n\to\infty}} P[|X_n Y_n| \geq \epsilon, |X_n| > B_\epsilon] \\
&\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} P[|Y_n| \geq \epsilon / B_\epsilon] + \epsilon = \epsilon
\end{aligned}$$

これは，定理の結果である． □

5.2.2 Δ Method

これまでの 3 つの章で議論されていたのは，確率変数の分布は分かっているが，確率変数の関数の分布を決定したいという状況であった．定理 5.9，5.10 がこのような状況の一例である．他の例として，Δmethod がある．この方法を説明するために，次に説明する平均値の定理を利用する．

定理 5.8. *(平均値の定理)* $g(x)$ が x で微分可能とする．すると，

$$g(y) = g(x) + g'(x)(y - x) + o(|y - x|)$$

とかける．$o(\cdot)$ は，

$$a = o(b) \ if \ and \ only \ if \ \frac{a}{b} \to 0 \ as \ b \to 0$$

小文字の o 表記は，確率収束の場合にも利用される．$o_p(X_n)$ と書くことで，$Y_n = o_p(X_n)$ *if and only if* $\frac{Y_n}{X_n} \xrightarrow{P} 0$ *as* $n \to \infty$ を表す．大文字の O 表記も存在し，これは

$$Y_n = o_p(X_n) \ if \ and \ only \ if \ \frac{Y_n}{X_n} \ is \ bounded \ in \ probability \ as \ n \to \infty$$

を表す．

定理 5.9. $\{Y_n\}$ を確率有界である確率変数の列とする．$X_n = o_p(Y_n)$ とすると，

$$X_n \xrightarrow{P} 0 \ as \ n \to \infty$$

となる．

証明 5.14. $\epsilon > 0$ が与えられているとする．$\{Y_n\}$ は確率有界なので，

$$n \geq N \Rightarrow P[|Y_n| \leq B_\epsilon] \geq 1 - \epsilon \tag{6}$$

となるような，正定数 N_ϵ, B_ϵ が存在する．また，$X_n = o_p(Y_n)$ であるから，

$$\frac{Y_n}{X_n} \xrightarrow{P} 0 \ as \ n \to \infty \tag{7}$$

である．よって，

$$\begin{aligned} P[|X_n| \geq \epsilon] &= P[|X_n| \geq \epsilon, |Y_n| \leq B_\epsilon] + P[|X_n| \geq \epsilon, |Y_n| > B_\epsilon] \\ &\leq P[\frac{X_n}{|Y_n|} \geq \frac{\epsilon}{B_\epsilon}] + P[|Y_n| > B_\epsilon] \end{aligned}$$

を得る．*(6),(7)* から，右辺第 *1* 項と第 *2* 項は十分大きな n を選ぶことによって，任意に小さくできる．よって，$P[|X_n - 0| \geq \epsilon] = 0$ が得られる． □

定理 5.10. *(Δ Method)* $\{X_n\}$ を

$$\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2) \tag{8}$$

となる確率変数列とする．さらに，関数 $g(x)$ が θ にて微分可能で，$g'(\theta) \neq 0$ であるとする．この時，

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(g'(\theta))^2) \tag{9}$$

が成り立つ．

証明 5.15. 平均値の定理の表現を利用すると，

$$g(X_n) = g(\theta) + g'(\theta)(X_n - \theta) + o_p(|X_n - \theta|)$$

とかける．$\sqrt{n}$ 倍して整理すると，

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) = g'(\theta)\sqrt{n}(X_n - \theta) + o_p(\sqrt{n}|X_n - \theta|)$$

となる．*(8)* と，定理 *5.11* から，$\sqrt{n}|X_n - \theta|$ は確率有界である．ゆえに，定理 *5.14* から，$o_p(\sqrt{n}|X_n - \theta|)$ は *0* に確率収束する．よって，*(8)* と定理 *5.6* から，定理の結果を得る． □

¡note¿

5.2.3 Moment generating function technique /

確率変数 $\{X_n\}$ の極限分布関数を見つけるためには，全ての正定数 n に対して，$F_{X_n}(x)$ を知ることが必要である．しかし，$F_{X_n}(x)$ の明確な形を得ることは難しい．幸運なことに，累積分布関数に対応する積率母関数が存在するならば，極限累積分布関数を決定するのに便利な方法が利用できる．

定理 5.11. $\{X_n\}$ を $-h < t < h$，任意の n で存在する積率母関数 $M_{X_n}(t)$ を持つ確率変数の列とする．X を $|t| \leq h_1 \leq h$ で存在する積率母関数 $M_X(t)$ を持つ確率変数とする．もし，$|t| < h_1$ について，$\lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M(t)$ ならば，

$$X_n \xrightarrow{D} X$$

が成り立つ．

証明 5.16. 証明は，特性関数の場合であるが，*Brieman(1968)* の *171* ページを参照してください

この節と以降の節では，定理 5.16 の様々な使用例を紹介する．使用例のいくつかでは，以下に紹介する極限を利用する．

$$\lim_{n\to\infty}[1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{n}]^{cn}$$

ここで，b, c は n と関係ない項であり，$\lim_{n\to\infty}\psi(n) = 0$ である．この時，

$$\lim_{n\to\infty}[1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{n}]^{cn} = \lim_{n\to\infty}[1 + \frac{b}{n}]^{cn} = e^{bc} \tag{10}$$

となる．例えば,

$$\lim_{n\to\infty}[1-\frac{t^2}{n}+\frac{t^2}{n^{3/2}}]^{-n/2}=\lim_{n\to\infty}[1-\frac{t^2}{n}+\frac{t^2/\sqrt{n}}{n}]^{-n/2}=e^{t^2/2}$$

のように利用できる．

例 5.4. $Y_n \sim Bin(n,p)$ とし，平均 $\mu=np$ は全ての n について共通だとする (つまり，$p=\mu/n$). $p=\mu/n$ の時，$M_{Y_n}(t)$ の極限を求めることによって，二項分布の極限分布を求めることを考える．全ての t の実数値について,

$$M_{Y_n}(t)=E[e^{tY_n}]=[(1-p)+pe^t]^n=[1+\frac{\mu(e^t-1)}{n}]^n$$

である．よって，この極限をとると,

$$\lim_{n\to\infty}M_{Y_n}(t)=e^{\mu(e^t-1)}$$

を得る．これは平均 μ のポアソン分布の積率母関数である．よって，Y_n は平均 μ の極限ポアソン分布を持つ．

確率変数が極限分布を持つとき，極限分布を正確な分布関数の近似として利用することができる．上記の例だと，n が大きく，p が小さいときの二項分布はポアソン分布で近似できることを示している．例えば，$n=50, p=1/25$ のとき，二項分布では,

$$P[Y\le 1]=(\frac{24}{25})^{50}+50(\frac{1}{25})(\frac{24}{25})^{49}=0.400$$

であり，ポアソン分布では，$\mu=np=2$ から,

$$\frac{2^0}{0!}e^2+\frac{2^1}{1!}e^2=0.406$$

のように近似できていることがわかる．

例 5.5. $Z_n\sim\chi^2(n)$ とする．この時，Z_n の積率母関数は $(1-2t)^{-n/2}$, $t<1/2$ で，平均，分散はそれぞれ，$n, 2n$ である．$Y_n=(Z_n-n)/\sqrt{2n}$ の極限分布について考える．Y_n の積率母関数は,

$$\begin{aligned}
M_{Y_n}(t)&=E\{\exp[t(\frac{Z_n-n}{\sqrt{2n}})]\}\\
&=e^{-tn/\sqrt{2n}}E(e^{tZ_n/\sqrt{2n}})\\
&=\exp[-(t\sqrt{\frac{2}{n}})(\frac{n}{2})](1-2\frac{t}{\sqrt{2n}})^{-n/2}\\
&=(\exp[t\sqrt{\frac{2}{n}}](1-2\frac{t}{\sqrt{2n}}))^{-n/2}\\
&=,(e^{t\sqrt{2/n}}-t\sqrt{\frac{2}{n}}e^{t\sqrt{2/n}})^{-n/2}\ ,t<\sqrt{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

テイラーの公式から，

$$e^{t\sqrt{2/n}} = 1 + t\sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{1}{2!}(t\sqrt{\frac{2}{n}})^2 + \frac{e^{\xi(n)}}{3!}(t\sqrt{\frac{2}{n}})$$

であるような $\xi(n)$ が $0, t\sqrt{2/n}$ の間に存在する．$M_{Y_n}(t)$ に上の式を代入すると，

$$M_{Y_n}(t) = (1 - \frac{t^2}{n} + \frac{\psi(n)}{n})^{-n/2}$$

を得る *(*確かめてみて*)*．ただしここで，

$$\psi(n) = \frac{\sqrt{2}t^3 e^{\xi(n)}}{3\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}t^3}{\sqrt{n}} - \frac{2t^4 e^{\xi n}}{3n} \ (\to 0 \ as \ n \to \infty)$$

である．$\xi(n) \to 0, \ as \ n \to \infty$ であるため，$\lim_{n\to\infty} \psi(n) = 0$ である．よって，

$$\lim_{n\to\infty} M_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{t^2}{n})^{-n/2} = e^{t^2/2}$$

を得る．これは，標準正規分布の積率母関数であるため，$Y_n = (Z_n - n)/\sqrt{2n}$ の極限分布は標準正規分布である．