Introduction to mathematical statistics ゼミ (第 3 回)

担当: 伊藤真道

7/31

3 Chap.3. Some Special Distributions

3.5 The Bivariate Normal Distribution / 二変量正規分布

以下の関数を考える．

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp[\frac{1}{1-\rho^2}\{(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2\}] \quad (1)$$

但し，ここで，$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$，$-1 < \rho < 1, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ である．この時点で，$\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ のような分布を特徴付けるパラメータは未知とする．加えて，$f(x,y)$ が同時確率密度関数の性質を持つかどうかもわからないとする．以下，上記の設定のもとで，

1. $f(x,y)$ は同時密度関数
2. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
3. ρ は X, Y の相関係数

であることを示す．

このような形の同時密度関数は，**二変量正規分布の確率密度関数**と呼ばれ，X, Y は**二変量正規分布**を持つという．

実のところ同時密度関数であるこの非負値関数 $f(x,y)$ は，以下のように考えることができる．X の関数を

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

と定義し，２変量正規分布の密度関数の指数部に注目すると，

$$
\begin{aligned}
(\text{指数部}) &= \frac{1}{1-\rho^2}[(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2 - 2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) + \rho^2(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 \\
&\quad -\rho^2(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 + (\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2] \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}[\{(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) - \rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})\}^2 + (1-\rho^2)(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2] \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}[(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) - \rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})]^2 + (\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}[\frac{y-\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)}{\sigma_2}]^2 + (\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}[\frac{y-b}{\sigma_2}]^2 + (\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 \\
&\quad (b := \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))
\end{aligned}
$$

のように，y に関する部分と関係しない部分に分割できる．よって，

$$
f_1(x) = \frac{exp[-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2]}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{exp[-(y-b)^2/[2\sigma_2^2(1-\rho^2)]]}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2(1-\rho^2)}} dy
$$

と表すことができる．積分記号の中は $N(b, \sigma_2^2(1-\rho^2))$ の確率密度関数だから，1 となる．以上から，

$$
f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}],\ -\infty < x < \infty
$$

となる．さらに，この結果を利用して，

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = 1
$$

が導かれることから，非負値関数 $f(x,y)$ は二つの連続型確率変数 X, Y の同時密度関数である．結果として，$f_1(x)$ は X の周辺密度関数であることと，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ であることがわかる．同様の考え方で，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ であることもわかる．

さらに，上記の議論から，同時密度関数は，

$$
f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2(1-\rho^2)}} \exp[-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}]
$$

と y に関係しない部分 (=x のみの部分) と，y に関係する部分の積として表すことができる．2 番目の因数は，$X = x$ の元での Y の条件付き分布 $N(b = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2))$ を表している．二変量正規分布に関して，$X = x$ のもとでの Y の条件付き期待値は，x に対して線形であり，

$$
E[Y|X=x] = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)
$$

で与えられる．この線形な条件付き期待値の x の係数が，$\rho(\sigma_2/\sigma_1)$ であることと，σ_1, σ_2 のそれぞれが標準偏差を表していることから，ρ は X, Y の相関係数を表している．

$Y|x$ の条件付き期待値が $\rho = 0$ でない限り，x に依存するのに対して，条件付き分散 $\sigma_2^2(1-\rho^2)$

は依存しない．

以上の議論を X と Y を入れ替えて行うことで，

$$X|y \sim N(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2))$$

であることも確認していただきたいです！お願いします！

¡note¿

二変量正規分布の積率母関数は以下のようにして導出される．全ての実数 t_1, t_2 に対して，

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x} f_1(x) [\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2 y} f(y|x) dy] dx \end{aligned}$$

が存在するとする．[] の中の積分は，$Y|x$ の積率母関数を表す．$f(y|x)$ が $N(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2))$ の密度関数であることから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2 y} f(y|x) dy = \exp\{t_2(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1) + \frac{t_2^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{2}\}$$

である．よって，$M(t_1, t_2)$ は以下のようにかける．

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= \exp\{t_2(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1) + \frac{t_2^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{2}\} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x} f_1(x) dx \\ &= \exp\{t_2\mu_2 - t_2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{t_2^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{2}\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[(t_1 + t_2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1})x] f_1(x) dx \\ &= \exp\{t_2\mu_2 - t_2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{t_2^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{2}\} \exp[\mu_1(t_1 + t_2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}) + \frac{\sigma_1^2(t_1 + t_2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1})^2}{2}] \\ &= \exp[t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}{2}] \end{aligned}$$

もし，積率母関数 $M(t_1, t_2)$ において，$\rho = 0$ とおくならば，

$$\begin{aligned}
M(t_1, t_2) &= \exp[t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}{2}] \\
&= \exp[t_1\mu_1 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2}{2}]\exp[t_2\mu_2 + \frac{\sigma_2^2 t_2^2}{2}] \\
&= M(t_1, 0)M(0, t_2) \\
(&= M_X(t_1)M_Y(t_2))
\end{aligned}$$

のように，X, Y の同時密度関数の積率母関数は，それぞれの周辺分布の積率母関数の積になる．よって，この場合 ($\rho = 0$ の場合)，X, Y は独立であるとわかる (2-4. 独立性を参照)．逆に，$M(t_1, t_2) = M(t_1, 0)M(0, t_2)$ が成立するとき，つまり，

$$\begin{aligned}
M(t_1, t_2) &= \exp[t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}{2}] \\
&= \exp[t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}{2}]\exp[\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2] \\
M(t_1, 0)M(0, t_2) &= \exp[t_1\mu_1 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2}{2}]\exp[t_2\mu_2 + \frac{\sigma_2^2 t_2^2}{2}] \\
&= \exp[t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}{2}]
\end{aligned}$$

が一致するとき，$\exp[\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2] = 1$ であり，このことと，$\sigma_1, \sigma_2 > 0$ であること，$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ に対して成り立つということから，$\rho = 0$ であることも導かれる．以上を以下の定理としてまとめる．

定理 3.3. 確率変数 X, Y が二変量正規分布 $N((\mu_1, \mu_2)^T, \Sigma)$ に従うとする．但しここで，分散共分散行列 Σ は

$$\begin{aligned}
\Sigma &= E[\{(X, Y) - (\mu_1, \mu_2)\}^T\{(X, Y) - (\mu_1, \mu_2)\}] \\
&= \begin{pmatrix} E[(X - \mu_1)^2] & E[(X - \mu_1)(Y - \mu_2)] \\ E[(X - \mu_1)(Y - \mu_2)] & E[(Y - \mu_2)^2] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．このとき，$\rho = \Leftrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$ が成立する．

これは，二変量正規分布に対しての性質であり，**一般には，$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \rho = 0$ が成立しても，$\rho = 0 \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$ が成立するとは限らない** (Exercises2.18(c) を参照)，ということに注意されたい．
¡note¿