Introduction to mathematical statistics ゼミ (第？回)

担当: 伊藤真道

未定

7 Chap.7 Sufficiency

7.4 Completeness and Uniqueness

Def. 7.4.1 完備族 (Complete family)

連続もしくは，離散の確率変数 Z が，分布族 $\{h(z;\theta):\theta\in\Omega\}$ のある元である pdf(or pmf) を持つとする．もし，全ての $\theta\in\Omega$ に対して，$E[u(Z)]=\int u(z)h(z;\theta)dz=0$ であるとき，つまり，$h(z;\theta)$, $\theta\in\Omega$ の確率が 0 となる点を除いて，$u(z)=0$ となるとき，分布族 $\{h(z;\theta):\theta\in\Omega\}$ を pdf(or pmf) の完備族と呼ぶ.

Theorem 7.4.1(Lehmann and Sheffé)

ある固定された正定数 n に対して，$X_1,\ldots,X_n$ を pdf(or pmf)$f(x;\theta)$, $\theta\in\Omega$ を持つ分布からの無作為標本とし，$Y:=u_1(X_1,\ldots,X_n)$ を θ の十分統計量とし，分布族 $\{f_{Y_1}(y_1,\theta):\theta\in\Omega\}$ が完備族であるとする．もし，Y_1 の関数で θ の不偏推定量であるものが存在するならば，この Y_1 の関数は，θ の一意な MVUE である．

証明 7.1. もし，十分統計量である Y_1 の他に，θ の不偏推定量 Y_2*(Y_1 だけの関数ではないとする)* が存在するならば，Y_1 の関数であり，かつ θ の不偏推定量であるようなものが少なくとも一つは存在し，最良な θ の推定量の探索範囲は，Y_1 の関数クラス上に制限される *(Rao-Blackwell の定理)*. ここで，ある関数 $\phi(Y_1)$ が全ての $\theta\in\Omega$ に対して，$E[\phi(Y_1)]=\theta$ を満たすことがわかっているとする．また，十分統計量 Y_1 のみの別の関数 $\psi(Y_1)$ が存在するとすると，$E[\psi(Y_1)]=\theta,\ \forall\theta\in\Omega$ であり，

$$E[\phi(Y_1)-\psi(Y_1)]=\theta-\theta=0,\ \theta\in\Omega$$

となる．もし，分布族 $\{f_{Y_1}(y_1;\theta):\theta\in\Omega\}$ が完備であるとき，$f_{Y_1}(y_1;\theta)=0$ となる集合上を除い

て，$\phi(y_1)-\psi(y_1)=0$ である．つまり，全ての他の θ の不偏推定量 $\psi(Y_1)$ に対して，

$$\phi(y_1)=\psi(y_1)$$

が，ほとんど至るところで成立する．ゆえに，"確率が *0* となる集合上を除いて $\phi(y_1)=\psi(y_1)$" となるという意味で，$\phi(Y_1)$ は，Y_1 の一意な *(unique)* 関数であり，θ の不偏推定量である．*Rao-Blackwell* の定理から，$\phi(Y_1)$ は他の θ の不偏推定量よりも分散が小さい．つまり，$\phi(Y_1)$ は θ の *MVUE* である． □

以降，その分布族 $\{f_{Y_1}(y_1;\theta):\theta\in\Omega\}$ が完備であり，Y_1 が θ の十分統計量であるような統計量のことを**完備十分統計量**と呼ぶ.

例 7.1. *(一様分布からの標本)*$X_1,\ldots,X_n\overset{i.i.d}{\sim}U(0,\theta)$ とする．$Y_n:=max\{X_1,\ldots,X_n\}$ が十分統計量であることはわかっているものとする．このとき，Y_n の *pdf* は

$$g(y_n;\theta)=\begin{cases}\frac{ny_n^{n-1}}{\theta^n} & 0<y_n<\theta\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

である *(*$F(y_1)=P(Y_1\leq y_1)=\prod_{i=1}^n P(X_i\leq y_1)=y_1^n/\theta^n$ の両辺を y_1 で微分すると，この *pdf* が得られる*)*．Y_n が完備であることを示すために，任意の関数 $u(t)$ と θ に対して，$E[u(Y_n)]=0$ である，つまり，

$$0=\int_0^\theta u(t)\frac{nt^{n-1}}{\theta}dt$$

であるとする．$\theta>0$ から，この等式は,

$$0=\int_0^\theta u(t)t^{n-1}dt$$

と等しい．両辺を θ で偏微分して，微積分の基本定理を用いると，

$$0=u(\theta)\theta^{n-1}$$

を得る．$\theta>0$ から，任意の $\theta>0$ に対して，$u(\theta)=0$ となる．ゆえに，Y_n は完備であり，θ の十分統計量である．

$$E[Y_n]=\int_0^\theta y\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{n}{n+1}\theta$$

から，θ の *MVUE* は $((n+1)/n)Y_n$ である．

¡note¿

7.5 The Exponential Class of Distributions

Def. 7.5.1 指数型分布族 (regular exponential class)

$$f(x;\theta) = \begin{cases} exp[p(\theta)K(x) + H(x) + q(\theta)] & x \in \mathcal{S} \\ 0 & elsewhere \end{cases} \tag{7.5.1}$$

のように表現できる pdf$f(x;\theta)$ が，指数型分布族 (regular exponential class) に属するとは，

1. X の台 $\mathcal{S}$ が θ に依存しない．
2. $p(\theta)$ は $\theta \in \Omega$ の非自明な連続関数である
3. （a）もし X が連続型確率変数なら，$K'(x) \neq 0$ で，$H(x)$ は $x \in \mathcal{S}$ の連続関数である
   （b）もし X が離散型確率変数なら，$K(x)$ は $x \in \mathcal{S}$ の非自明な関数である

が成立することである．

例 **7.2.** *(正規分布 $N(0,\theta)$ の例) この分布の pdf は，*

$$\begin{aligned} f(x,\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp^{-x^2/\theta} \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta} + \log\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\right) \\ &= \exp[p(\theta)K(x) + H(x) + q(\theta)] \\ &(p(\theta) := -1/2\theta),\ K(x) := x^2,\ H(x) := 0,\ q(\theta) := \log(1/\sqrt{2\pi\theta})) \end{aligned}$$

と表せ，定義の三つの条件を満たしているので，この分布は指数型分布族に属する．

Theorem 7.5.1

$X_1, \ldots, X_n$ を，pdf を (7.5.1) のように表すことのできる分布族 (=指数型分布族) の分布からの無作為標本とする．統計量 $Y_1 := \sum_{i=1}^n K(X_i)$ という統計量を考える．このとき，

1. Y_1 の pdf(or pmf) は，ある関数 $R(y_1)$ と，$y_1 \in \mathcal{S}_{Y_1}$ に対して，

$$f_{Y_1}(y_1;\theta) = R(y_1)\exp[p(\theta)y_1 + nq(\theta)] \tag{7.5.2}$$

という形に変形できる．ここで，$\mathcal{S}_{Y_1}$，$R(y_1)$ のいずれも，θ に依存しない．

2. $E(Y_1) = -n\frac{q'(\theta)}{p'(\theta)}$
3. $Var(Y_1) = n\frac{1}{p'(\theta)^3}\{p''(\theta)q'(\theta) - q''(\theta)p'(\theta)\}$

証明 7.2. 章末の *Exercise 7.5.5* と，*7.5.8* を参照

Theorem 7.5.2

$f(x;\theta)$, $\gamma < \theta < \delta$ を指数型分布族に属する分布の pdf(or pmf) とする．このとき，もし，$X_1, \ldots, X_n$ がその分布からの無作為標本であるならば，統計量 $Y_1 := \sum_{i=1}^n K(X_i)$ は θ の十分統計量であり，Y_1 の pdf の集合族 $\{f_{Y_1}(y_1;\theta) : \gamma < \theta < \delta\}$ は完備である．つまり，このとき，Y_1 は θ の完備十分統計量となる．

証明 7.3. 定理 7.5.1 の *1* から，Y_1 は十分統計量である．完備性を示すために，$E[u(Y_1)] = 0$ とする．これは，

$$E[u(Y_1)] = \int_{\mathcal{S}_{Y_1}} u(y_1)R(y_1)\exp[p(\theta)y_1 + nq(\theta)]dy_1 = 0$$

である．これと同じことだが，$\exp\{nq(\theta)\} \neq 0$ から，全ての θ に対して，

$$\int_{\mathcal{S}_{Y_1}} u(y_1)R(y_1)\exp[p(\theta)y_1]dy_1 = 0$$

である．しかし，$p(\theta)$ は非自明な *(*つまり，$p(\theta) \neq 0$ であるような*)*θ の連続関数であり，ゆえに，この積分は $u(y_1)R(y_1)$ のラプラス変換を行っているものとみなせる．$Q(y_1) = 0$ となる恒等関数へ変換することができる y_1 の関数は，*a.e.* で $= 0$ の恒等関数である．つまり，

$$u(y_1)R(y_1) \equiv 0$$

である．しかし，ここで，$R(y_1)$ が y_1 の *pdf* の因子であることから，$R(y_1) \neq 0,\ \forall y_1 \in \mathcal{S}_{Y_1}$ であることに注意すると，$u(y_1) \equiv 0$ *a.e.* である．ゆえに，Y_1 は θ の完備十分統計量である． □

この定理は有用である．(7.5.1) の形式にいて，十分統計量は $Y_1 := \sum_i K(X_i)$ で表せることがわかった．もし，Y_1 の関数 $\phi(Y_1)$ が $E[\phi(Y_1)] = \theta$ となるよう構成できるなら，統計量 $\phi(Y_1)$ は一意であり，θ の MVUE であるということがわかる．

¡note¿

7.6 Functions of a Parameter

例 7.3. *(Example 7.6.1* $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} Bin(1,\theta)$*)* $Y := \sum_{i=1}^n X_i$ とし，Y/n が θ の一意な最小分散不偏推定量であるということはわかっているとする．今，Y/n の分散 $(= \theta(1-\theta))$ を推定したいという問題を考え，$\delta := \theta(1-\theta)$ とする．

- Y/n は θ の一意な *MVUE* ということがわかっている．
- じゃあ，Y/n の分散の *MVUE* は？十分統計量 Y の関数で表せない？ *(*今回の問題設定*)*

ここで，Y は θ の十分統計量であるから，探索範囲は Y の関数に絞って良い *(Rao-Blackwell* の定理*)*．δ の最尤推定量 $\tilde{\delta} = (Y/n)(1-Y/n)$ は十分統計量の関数であり，探索の初期値としては妥当であろう．この統計量の期待値は，

$$E[\tilde{\delta}] = E\left[\frac{Y}{n}(1-\frac{Y}{n})\right] = E\left[\frac{Y}{n} - \frac{Y^2}{n^2}\right] = \frac{1}{n}E(Y) - \frac{1}{n^2}E(Y^2)$$

であり，$Y \sim Bin(n,\theta)$ から，$E(Y) = n\theta,\ E(Y^2) = V(Y) + E(Y^2) = n\theta(1-\theta) + n^2\theta^2$ となることを用いると，

$$\begin{aligned} E\left[\frac{Y}{n}(1-\frac{Y}{n})\right] &= \theta - \frac{1}{n}\theta(1-\theta) - \theta^2 \\ &= \frac{n}{n}\theta(1-\theta) - \frac{1}{n}\theta(1-\theta) = \frac{n-1}{n}\theta(1-\theta) \end{aligned}$$

この両辺に $n/(n-1)$ をかけると，$(n/(n-1))(Y/n)(1-Y/n) = (n/(n-1))\tilde{\delta}$ は $V(Y/n) = \theta(1-\theta)$ の不偏推定量であり，$\delta = \theta(1-\theta)$ の一意な最小分散不偏推定量である．よって δ/n*(*$= Y/n$ の分散*)* の *MVUE* は $\tilde{\delta}/n$ である．

$\hat{\delta}$ と *MLE*$\tilde{\delta}$ の比較も面白い．*6* 章の結果から，$\tilde{\delta}$ は δ の一致推定量であり漸近正規性を持つ *(*$\sqrt{n}(\tilde{\delta} - \delta)$ が $N(0, 1/I(\delta))$ に分布収束する*)*．

$$\hat{\delta} - \tilde{\delta} = \tilde{\delta}\frac{1}{n-1} \xrightarrow{P} \delta \cdot = 0$$

から，$\hat{\delta}$ も一致推定量である．さらに，

$$\sqrt{n}(\hat{\delta}-\delta)-\sqrt{n}(\tilde{\delta}-\delta)=\frac{\sqrt{n}}{n-1}\tilde{\delta}\xrightarrow{P}0 \tag{7.6.1}$$

となることから，$\sqrt{n}(\hat{\delta}-\delta)$ も $\sqrt{n}(\tilde{\delta}-\delta)$ と同じ漸近分布を持つ．Δ 法を用いると，$\sqrt{n}(\tilde{\delta}-\delta)$ の分布を得られる．$g(\theta)=\theta(1-\theta)$ とすると，$g'(\theta)=1-2\theta$ であり，定理 5.2.9 と (7.6.1) から，$\sqrt{n}(\tilde{\delta}-\delta)$ の漸近分布は，

$$\sqrt{n}(\tilde{\delta}-\delta)\xrightarrow{D}N(0,\theta(1-\theta)(1-2\theta)^2)$$

で与えられる．ただし $\theta\neq 1/2$ とする．

¡note¿

例 **7.4.** *(Example 7.6.2* $X_1,\ldots,X_n \overset{iid}{\sim} U(0,\theta)$*)*

¡note¿

例 **7.5.** *(Example 7.6.3* $X_1, \ldots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(\theta, 1)$*)*

¡note¿