Introduction to mathematical statistics ゼミ (第？回)

担当: 伊藤真道

未定

5 Chap.5. Consistency and Limiting Distributions

5.1 Convergence in Probability / 確率収束

この節では，$n \to \infty$ の時に，ある確率変数列 $\{X_n\}$ が別の確率変数 X に"近づく"，ということを定義する．

定義 5.1. 確率収束 *(Convergence in Probability)* $\{X_n\}, X$ を，それぞれ，標本空間上で定義された確率変数列，確率変数とする．$\{X_n\}$ が X に確率収束するとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} P[|X_n - X| \geq \epsilon] = 0$$

もしくは，これと同等な

$$\lim_{n\to\infty} P[|X_n - X| < \epsilon] = 1$$

が成立することをいい，

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

と表す．

もし，$X_n \xrightarrow{P} X$ ならば，X_n と X の差は，0 に収束すると言う．統計学においては，極限確率変数 X は定数であることが多い．このような確率変数 X を，ある定数 a との差が退化した (degenerated) 確率変数といい，$X_n \xrightarrow{P} a$ で表す．

確率収束を示す方法に，チェビシェフの不等式を利用する方法がある．以下の定理の証明にてその利用例を示す．

定理 5.1. 大数の弱法則 *(Weak Law of Large numbers)* $\{X_n\}$ を共通の平均 μ，分散 σ^2 を持つ独立同分布の確率変数列とする．$\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とする．この時，

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

が成立する．

証明 5.1. $\bar{X}_n$ の期待値，分散は，それぞれ，$\mu, \sigma^2/n$ である．これらをチェビシェフの不等式に代入すると，

$$P[|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon] = P[|\bar{X}_n - \mu| \geq (\epsilon\sqrt{n}/\sigma)(\sigma/\sqrt{n})] \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to 0$$

となるが，確率の非負性に注意すると，

$$\lim_{n\to\infty} P[|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon] = 0$$

が成立する． □

¡note¿

この定理は，$n \to \infty$ の時，$\bar{X}_n$ のすべての質量は μ に収束するということを述べている．ある意味，n が大きければ，$\bar{X}_n$ は μ に近づくということである． より高度な数理統計学のテキストでは，大数の強法則 (Strong Law of Large Numbers) の証明を行なっている．ここでは説明しないが，大数の強法則は，確率変数が独立同分布を持つことと，有限の平均 μ を持つことのみを仮定としており，大数の弱法則の仮定を緩めたものとなっている． 次の二つの定理は，線形変換の下で確率収束は閉じているということを述べている．

定理 5.2. $X_n \xrightarrow{P} X$，$Y_n \xrightarrow{P} Y$ とする．この時，

$$X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$$

が成立する．

証明 5.2. ある $\epsilon > 0$ が与えられたとする．三角不等式を利用して，

$$|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq |(X_n - X) + (Y_n - Y)| = |(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \epsilon$$

とかける．確率関数 P は作用させる集合に関して単調であるので，

$$\begin{aligned} P[|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \epsilon] &\leq P[|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \epsilon] \\ &\leq P[|X_n - X| \geq \frac{\epsilon}{2}] + P[|Y_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2}] \\ &\to 0 + 0 = 0 \ (as\ n \to \infty) \end{aligned}$$

確率の非負性に注意すると，$0 \leq P[|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \epsilon] \leq 0$ となり，$P[|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \epsilon] = 0$，つまり，$X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$ が成立する． □

¡note¿

定理 5.3. $X_n \xrightarrow{P} X$，a は定数とする．この時，

$$aX_n \xrightarrow{P} aX$$

が成立する．

証明 5.3. $a = 0$ の時は明らか．そのため，$a \neq 0$ とする．ある正の数 ϵ に対して，

$$\begin{aligned} P[|aX_n - aX| \geq \epsilon] &= P[|a||X_n - X| \geq \epsilon] \\ &= P[|X_n - X| \geq \frac{\epsilon}{|a|}] \to 0 \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

よって，$aX_n \xrightarrow{P} aX$ である． □

¡note¿

定理 5.4. $X_n \xrightarrow{P} a$，実関数 g が a において連続であるとする．この時，

$$g(X_n) \xrightarrow{P} g(a)$$

証明 5.4. $\epsilon > 0$ とする．g が a において連続であることから，もし，$|x - a| < \delta$ なら，$|g(x) - g(a)| < \epsilon$ となるような $\delta > 0$ が存在する *(*ピンとこない人は，連続の定義を確認しましょう．*)*．これの対偶は，

$$|g(x) - g(a)| \geq \epsilon \Rightarrow |x - a| \geq \delta$$

である．x に X_n を代入して，確率関数を作用させることで，

$$P[|g(x) - g(a)| \geq \epsilon] \leq P[|x - a| \geq \delta] \to 0$$

を得る．よって，定理の結果を得た． □

この定理は，例えば，以下のように用いる．

$$X_n^2 \xrightarrow{P} a^2$$
$$1/X_n \xrightarrow{P} 1/a$$
$$\sqrt{X_n} \xrightarrow{P} \sqrt{a}$$

より上級のテキストでは，$g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$ であることの証明を行なっているが，今回は証明無しで用いる．証明が気になる方は，Tucker(1967) の 104 ページを参照．これらを用いて，次の定理を導く．

定理 5.5. $X_n \xrightarrow{P} X$，$Y_n \xrightarrow{P} Y$ とする．この時，

$$X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$$

証明 5.5. 以下に定理 *5.4* を用いる．

$$\begin{aligned} X_n Y_n &= \frac{1}{2}X_n^2 + \frac{1}{2}Y_n^2 - \frac{1}{2}(X_n - Y_n)^2 \\ &\to \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}(X - Y) \\ &= XY \end{aligned}$$

□

ここで再び，標本抽出と統計量の議論に戻る．その分布が，未知パラメータ $\theta \in \Theta$ を持つような確率変数 X を考える．ここで，我々の目的は，θ の推定が可能であるような標本に基づく推定量を見つけ出すことであった．定義 4.1.3 では，推定量の不偏性 (unbiasedness) を定義した．以下では，一致性 (Consisitency) を定義する．

定義 5.2. 一致推定量 *(Consistent estimator)* X を累積分布関数 $F(x, \theta), \theta \in \Theta$ を持つ確率変数とする．$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を X の分布からの標本，T_n を統計量とする．T_n が θ の一致推定量 *(consistent estimator)* であるとは，

$$T_n \xrightarrow{P} \theta$$

が成立すること，つまり，統計量 T_n が未知パラメータ θ に確率収束することである．

¡note¿

例 5.1. *(標本分散)*

¡note¿

Exercises

今回はなれない概念なのでいくつか例題をやってみました.

Ex. 5.1.

Ex. 5.2.

Ex. 5.3.