Haute Ecole de Namur - Liège - Luxembourg
Département économique
Implantation IESN

Bachelier en Informatique de Gestion
3e année

Recherche opérationnelle

Syllabus : Première partie

Isabelle Charlier

Corinne Derwa

Année académique 2015-2016

ORGANISATION DU COURS

UE : RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

- 30h ; 3 ECTS
- Prérequis :
  - Principes de programmation
  - Un langage de programmation adapté à la simulation

EVALUATION ET RÉPARTITION DES POINTS

- 30% pour le travail journalier dont
  - Un dossier :
    - Par groupe de 2 personnes ;
    - Application à informatiser ;
  - Une interrogation en milieu de quadrimestre ;
- 70% pour l'examen :
  - Evaluation sur le contenu des dossiers (10 points) ;
  - Evaluation sur le contenu du cours, répartie en
    - 1/3 théorie,
    - 2/3 exercices (avec formulaire).

MATÉRIEL

- Calculatrice
- Tables statistiques (Poisson, chi-carré,...)
- Papier semi-logarithmique
- Formulaire

PLAN DU COURS

- *Introduction*
- *Chapitre 1 : Génération de nombres pseudos-aléatoires*
- *Chapitre 2 : Files d'attente*
- *Chapitre 3 : Analyse postoptimale en programmation linéaire*

INTRODUCTION

1. Définition

Appelée aussi « Aide à la décision », la recherche opérationnelle peut être définie comme un ensemble de méthodes et de techniques rationnelles utilisées pour analyser et synthétiser des phénomènes d'organisation en vue d'élaborer de meilleures décisions.

2. Histoire

- 17e S : Blaise Pascal et les jeux de hasard
- Début du 20e S : théorie des stocks
- 1940 : Blackett, militaire anglais, dirige la première équipe de recherche opérationnelle avec l'implantation optimale de radars de surveillance et la gestion des convois d'approvisionnement.
  ⇨ Origine militaire du mot « Opérationnelle ».

3. Domaines d'application

- Problèmes d'ordre stratégique (Investir ou pas, choix d'une implantation, dimension d'un parc informatique) ;
- Planification des tâches d'un projet ;
- Gestion du renouvellement d'équipements ;
- Problèmes des files d'attente dans un centre de services ;
- Gestion scientifique de stocks : approvisionnement, vente,...
- Plans de production (éviter gaspillage des matières premières, disposition des machines ...) ;
- Affectation optimale de candidats à des postes ;
- Recherche du chemin optimal pour les transports ;
- Problèmes de rentabilité dans les entreprises : maximiser bénéfices/minimiser coûts sous certaines contraintes ;
- Problèmes d'investissement en finance ;
- Etude de la stabilité d'un réseau électrique ;
- Choix d'une architecture informatique:
  - centralisée / distribuée ;
  - traitements en temps réel/différé ;
  - réseau maillé ou en étoile ;
  - capacité de stockage ;
  - puissance du débit et de calcul ;
  - ordonnancement des systèmes d'exploitation ;
  - localisation et nombre de serveurs...

4. Relations avec d'autres disciplines

- Economie (économie d'entreprise, analyse économique)
- Mathématiques (statistiques, probabilités, théorie des graphes, théorie des jeux)
- Informatique

CHAPITRE I: GÉNÉRATION DE NOMBRES PSEUDO ALÉATOIRES

1. Exemple introductif

Sachant qu'une grande surface accueille 1 à 500 personnes/jour, combien de caisses faut-il ouvrir ?
Si trop : coût de personnel trop important et inutile.
Si trop peu : les gens attendent et ne viennent plus-> perte de clients.

- ➔ Élaboration d'un programme qui simule un mois d'ouverture.
- ➔ Besoin de générer des nombres aléatoires pour l'arrivée des clients.

2. Nombres aléatoires et pseudo-aléatoires

Un nombre aléatoire est un nombre issu d'un événement qui résulte du hasard.
Une suite de nombres aléatoires est caractérisée par deux sortes de critères :

- des critères de fréquence limite de production de chaque valeur ;
- des critères relatifs à la succession des valeurs.

Si, par une voie déterministe, on produit une suite de valeurs respectant ces critères, on aura fabriqué une suite de nombres ***pseudo-aléatoires***.

Moyens d'obtention :

- Jets de dés, roulette, tirages au sort, mélange de cartes….
- Consultation de tables « papier » ->obsolète
- Stockage électronique des tables : lourd
- Utiliser des opérations mathématiques pour générer des suites de nombres
  exemple : méthode « *middle square* » de Von Neuman qui consiste à générer des nombres à 10 chiffres, les élever au carré puis prendre les valeurs du milieu.
- Utiliser des phénomènes physiques :
  - Radioactivité ;
  - Bruits thermiques ;
  - Bruits électromagnétiques ;
  - Mécanique quantique : choix d'un photon de traverser ou non une lame réfléchissante ;
  - …

3. Générateur de nombres pseudo-aléatoires

a. DÉFINITION

Une séquence pseudo-aléatoire (Pseudo Random Sequence) est une suite de nombres entiers prenant ses valeurs dans l'intervalle [0, m [. Chaque terme de la suite est le résultat d'un calcul sur le ou les précédents termes (récurrence). Le premier terme est appelé le germe ou la valeur initiale (seed).

Les nombres entiers sont notés x_n et appartiennent à [0,m[où m est entier positif.
En divisant ces entiers par m, on obtient une suite de réels u_n appartenant à l'intervalle [0,1[.
Un générateur de nombres pseudo-aléatoires est donc une méthode permettant de générer une telle suite.

Quelles sont les qualités d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires ?

- La vitesse ;
- La simplicité : facile à programmer et facile à tester ;
- Pas de faille grave : pas de « bug » quand on arrive sur des nombres particuliers ;
- Les nombres produits ne doivent pas faire apparaître de suite logique.

Un générateur sera dit « acceptable » s'il a passé avec succès toute une série de tests statistiques que nous étudierons plus loin dans ce chapitre.

b. Formule congruentielle linéaire mixte

$$\boxed{X_{n+1} = (a X_n + c) \% m, \quad n \in \mathbb{N}}$$

Où

- X_0 valeur initiale, $0 \leq x_0 < m$
- m : modulo, $m > 0$
- a : multiplicateur, $0 \leq a < m$
- c : incrément, $0 \leq c < m$

Exemples :

1) $m = 8 \quad a = c = 7 \quad x_0 = 7$

$x_1 = (7.7 + 7) \% 8 = 0$
$x_2 = (7.0 + 7) \% 8 = 7$

cycle de longueur 2

2) $m = 8 \quad a = c = 5 \quad x_0 = 3 \qquad x_8 = 3$

$x_1 = (5.3 + 5) \% 8 = 4 \qquad x_4 = 7$
$x_2 = (5.4 + 5) \% 8 = 1 \qquad x_5 = 0$
$x_3 = (5.1 + 5) \% 8 = 2 \qquad x_6 = 5$
$\qquad x_7 = 6$

cycle de longueur 8
=> cycle < m

3) $m = 10 \qquad x_0 = a = c = 7$

$x_1 = 6 \qquad x_3 = 0$
$x_2 = 9 \qquad x_4 = 7$

c. Choix des paramètres

d. Théorème de Hull-Dobell (1962)

La méthode congruentielle mixte définie par a, m, c et x0 a une période de longueur égale à m

SSI

-c et m sont premiers entre eux ;
-Pour tout p, facteur premier de m, on a (a-1) multiple de p ;
-Si m est multiple de 4, alors (a-1) est multiple de 4

Exemples :

e. GÉNÉRATION SUR UN INTERVALLE [A,B[

x_n, entier, $\in [0, m[$

$u_n = \frac{x_n}{m}$, $\in [0, 1[$

Si on veut nb $\in [a, b[$

$(b-a)\, u_n \in [0, b-a[$

$a + (b-a)\, u_n$

f. INFORMATISATION DE LA FORMULE

$$x_{n+1} = (a.x_n + c)\%m \qquad n \in N$$

Il est possible de ne pas programmer la partie « %m » à condition de choisir m de manière adéquate.

Si on travaille en entiers non signés, m sera le plus grand entier machine + 1,
si on travaille en entiers signés, m sera le plus grand entier machine + 1 et pour tout nombre généré dont le bit du signe vaut 1, son bit passera à 0.

Exemple : $\boxed{\text{non signé}}$

8 bits $[0, \underbrace{2^8 - 1}_{255}[$

$a = 17 \quad c = 53 \quad x_0 = 144 \quad m = 256$

$x_1 = (17 \cdot 144 + 53) = 2501 \Rightarrow 1001\, \underbrace{1100\ 0101}_{8 \text{ bits}} \rightarrow 197 \quad (= 2501 \,\%\, 256)$

$\boxed{\text{signé}}$

$[-2^7, 2^7 - 1[$

$m = 128 \quad a = 13 \quad c = 29 \quad x_0 = 87$

$x_1 = 1160 \,\%\, 128 = 8$

$1160 \rightarrow \cancel{100}\ \overset{\text{signé}}{\underset{0}{\cancel{1}}}000\ 1000$

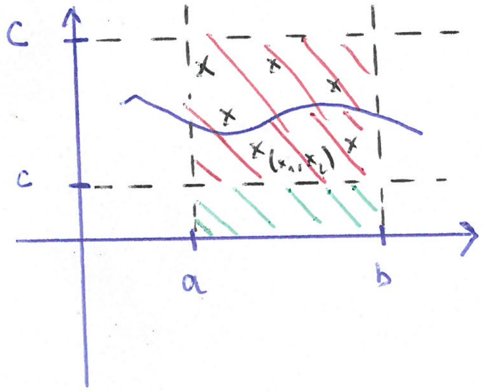
4. Application: calcul d'intégrale définie (méthode de Monte-Carlo)

Soit l'intégrale définie suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_2^7 \frac{2^x - \ln(5x+2) + arctgx}{\sqrt{x^2+9}}dx$$

Quelles sont les différentes méthodes de calcul de telles intégrales ?

- l'analyse : le calcul de primitives
- le calcul numérique : méthode de Simpson
- une méthode s'appuyant sur les nombres pseudos-aléatoires.



$y = f(x)$ $\quad A = \int_a^b f(x)\,dx$

Choisir un minorant c tel que $c \leq f(x), \forall x \in [a, b]$
majorant C $\quad C \geq f(x)$

$A = (b-a) \cdot c + (b-a)(C-c) \cdot$ fraction → limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{N(n)}{n}$

On génère aléatoirement n point dans ////
On a $N(n)$ point sous la courbe

Comment générer un point dans /// ?

On génère X_k, X_{k+1} entier

On a $U_k = \frac{X_k}{m}$, $U_{k+1} = \frac{X_{k+1}}{m} \in [0,1[$

On prend $\begin{cases} x_1 = a + (b-a)\, u_k \\ x_2 = c + (C-c)\, u_{k+1} \end{cases}$

donc $(x_1, x_2) \in$ ////

Verifier si au dessus ou en dessous de la fonction.

On a (x_1, x_2)

Si $x_2 < f(x_1)$ -> point en dessous de $f(x)$
-> comptabilisé

Si $x_2 > f(x_1)$ -> point au dessus de $f(x)$
-> on ne le compte pas

Si $x_2 = f(x_1)$ -> point sur $f(x)$
-> comptabilisé 1 fois sur 2.

5. Tests statistiques de validité

a. Introduction

Une suite pseudo-aléatoire est caractérisée par la distribution de ses valeurs et par la manière dont elles se succèdent.

Plusieurs tests statistiques y sont appliqués successivement pour savoir si la suite est acceptable. Ces tests sont de plus en plus sévères. Chaque test ne sera appliqué que si le précédent est accepté.

Le raisonnement pour chaque test ne débute pas nécessairement sur la suite d'entiers générés.
Pour rappel,

$$x_{n+1} = (a\, x_n + c) \,\%\, m \quad \in [0, m[$$

Nous pouvons considérer les réels correspondants, notés u_n. Ils sont obtenus par la formule :

$$u_n = \frac{x_n}{m} \quad \in [0, 1[$$

Chaque réel a la forme 0,xxxxxxxxxxx. Nous pouvons considérer la partie décimale comme une suite de chiffres (voire une suite de bits !).
Pour simplifier le raisonnement, nous ne prendrons jamais qu'une seule décimale notée y_n. La formule est :

$$y_n = 1^{re} \text{ décimale} = [u_n \cdot 10]_{int}$$

Exemple :

$$u_n = 0,1541\ldots$$

$$u_{n+1} = 0,5672\ldots$$

b. Rappels

La variable aléatoire khi-carré (χ2v) permet de vérifier la qualité de l'ajustement entre une distribution théorique et une distribution expérimentale. Le paramètre v représente le nombre de degrés de liberté.

Formule standard :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i}$$

Formule pratique de calcul :

$$\chi^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i^2}{p_i} \right) - n$$

c. ETAPES

Chaque test d'adéquation est fait en respectant les différentes étapes décrites ci-dessous :

Etape 1 : poser une hypothèse H_0 (suite générée acceptable ou non);
Etape 2 : fixer le niveau d'incertitude α (en général α= 5%) ;
Etape 3 : tableau recensé des fréquences observées et des fréquences théoriques + calcul de la statistique observable χ^2;
Etape 4 : vérifier les contraintes à respecter pour chaque test et, le cas échéant, retourner à l'étape 3 en effectuant des regroupements ;
Etape 5 : établir la zone de non rejet en fonction du nombre de degrés de liberté ;
Etape 6: prendre une décision, rejet ou non rejet de l'hypothèse.

d. TEST DES FRÉQUENCES

Ce test porte sur les apparitions de chaque chiffre y_n entre 0 et 10 (valeurs : 0, 1, ..., 9).

Exemple :

Supposons que l'on ait généré 120000 y_n. Ils constituent les fréquences observables (r_i) du test statistique.

Etape 1 :

H_0 : la suite de nombres pseudo-aléatoire est acceptable pour ce test
H_1 : ....

Etape 2 :

α=5%

Etape 3 :

X_i [1]	r_i	p_i	$n.p_i$	$(r_i-n.p_i)^2/n.p_i$
0	1 080	1/10	12 000	
1	10 700	1/10	12 000	
2	20450	...	...	
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9		1/10	12 000	
Total				X^2_{obs}= ....

[1] Attention à l'écriture : il s'agit de la variable observée dans le test !

Etape 4 :

$n.p_i >=5$ suppose que $n>=50$. Si la première condition n'est pas respectée, il faut regrouper des classes et recalculer X^2_{obs}.

Etape 5 :

Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de modalités (nombre de valeurs) de la variable diminué du nombre de contraintes.

v = 10 – 1 (une seule contrainte $\Sigma r_i=n$) = 9

Consultons les tables.

Etape 6 :

Décision :.....

Remarque :

$Y_m = \underbrace{0 \ldots}_{\times 12.000} 01 \ldots 12 \ldots 2$

$\chi^2 = 0$

χ^2 = Ecart entre observé (12000) et attendu (11000) $\leq X^2_{théorie}$ (16,92)

↳ suite acceptée

↳ test trop faible

e. TEST DES SERIES

Ce test porte sur des Q-uples de chiffres entre 0 et 9.

But : Tester l'indépendance de Q chiffres successifs.

Contrainte : $n \geq 5.d^2$ où d vaut 10.

Exemple : Q=2, on effectue la même démarche que pour le test des fréquences portant sur tous les couples de chiffres possibles

	(0,0)	(0,1)	...	(9,9)
r_i				
p_i	1/100	...		1/100

$n = \Sigma r_i$

$\alpha = 5\%$ $n.p_i = 5$ DDL = 100 − 1 = 99 → χ^2_{th}

$n \geq 500$

si $\chi^2_{calc} \leq \chi^2_{th}$ → accepte H_0

f. Test des sauts

Ce test s'applique de nouveau sur les y_n; il s'applique 10 fois (10 valeurs possibles pour le chiffre).

But : Tester les sauts entre deux mêmes valeurs.

Exemple : chiffre=9, la variable testée (saut) est le nombre de chiffres entre deux apparitions successives de 9

$y_n \to 0, 1, \ldots, 9$

$y_n = 9$

y_n 0 1 2 3 9 6 9 9 2 → longueur = nb entre l'écart/répétition = 1.

Contrainte : $n.p_i \geq 5$

a (valeur où on commence les regroupements)

lg saut	0	1	2	...	∞
n_i					
p_i	$1/10$	$9/10 \cdot \frac{1}{10}$	$\frac{9.9.1}{1000}$		

$n = \sum n_i$

$9^{\text{exposant saut}} / 10^{\text{saut}+1}$

↳ (9 suivit de 9) = chance d'avoir un 9.

← éventuel regroupement

lg saut		$[a; \to$
n_i		X
p_i		$\square$

$\sum p_i$

pas calculable $(1 - \sum p_i)$

DDL = Nb classes - 1

$\alpha = 5\%$

Que vaut a ? a tel que $np_i \geq 5$

$n \sum_{i=a}^{\infty} p_i \geq 5 \to n \sum_{i=a}^{\infty} p_i \geq 5 \to n \sum_{i=a}^{\infty} (0,9)^i (0,1) \geq 5$

Voir feuille cours

g. TEST DU POKER

But : analyser les apparitions de 5 chiffres y_n successifs et observer comme au poker les valeurs apparues.

Y_n par paquet de 5
↳ poker (5=)
↳ carré (4=)
↳ full (3=, 2=)
↳ brelan (3=)
↳ double paire (2=, 2=)
↳ simple paire (2=)
↳ tous ≠

	poker	carré	…	tous ≠
ni				
pi	x	x	…	x

il faut générer un qté de nb aléatoire multiple de 5.

$\frac{10}{100\,000}$ $\frac{150}{100\,000}$

nb chiff nb répét

↳ $\frac{C_{10}^{2} \cdot C_{2}^{1} \cdot \frac{5!}{4!}}{100\,000}$ cas possible exe : $U_n = 0,54512$ $\quad Y_n = 1^{re}$ décimale

$U_{n+1} = 0,51021$ $\quad = [U_n * 10]_{int}$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - n.p_i)^2}{np_i}$$ (écart entre l'observé et l'attendu)

$$\sum \frac{n_i^2}{np_i} + n\sum_{i=1}^{N} \frac{\cancel{n} p_i^2}{\cancel{np_i}} - 2\sum_{i=1}^{N} \frac{n_i \cancel{np_i}}{\cancel{np_i}} \qquad np_i \geq 5$$

$$\chi^2 = \frac{1}{n}\sum \frac{n_i^2}{p_i} - n$$

→ entier

$x_{n+1} = (a * x_n + c) \% m$

→ réel $[0,1[$

$U_n = \frac{x_n}{m}$

→ $Y_n = [U_n * 10]_{int}$

p11

1 Test des fréquences

P12 $Y_n = \underbrace{0 \ldots}_{12000}\ 0\ \underbrace{1 \ldots 1}_{12000}\ \underbrace{2 \ldots 2}_{12000}$

$\chi^2 = 0$ (observé = attendu égale → mais mauvaise suite → pas acceptable)

12 série $Q = 2$

	(0,0)	(0,1)	...	(9,9)
n_i				
p_i	1/100			1/100

$\alpha = 5\%$ $\quad np_i \geq 5$

$n \geq 500$ $\quad (5 . 100)$

DDL $= 100 - 1 = 99$

↳ χ^2_{th}

si $\chi^2_{cal} < \chi^2_{th}$, H_0 est acceptable

Test des sauts

$Y_n = 0, \dots 9$

$Y_n = 9$

Y_n 0 1 2 3 9 1 9 3 2

saut → longueur = nb entre l'écart/répétition = 1

↓ a (partie entière) qui a doit commencer les groupements)

lg saut	0 1 2 ..... ∞
n_i	
p_i	$1/10$ $\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}$ $\frac{9 \cdot 9 \cdot 1}{1000}$

$\frac{9\ \text{saut}}{0\ \text{saut}\ \text{en}}$ → p_i

$M = \sum n_i$

(9 suivit d'1 9) = proba d'avoir 9

9 pas 1 9 $= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{100}$

éventuel regroupement

lg saut		$\sum a_i$ →
n_i		x
p_i		$\boxed{}$

pas calculable

$1 - \sum p_i$

$\sum p_i$

DDL = Nb classe - 1

$\alpha = 5\%$

Th

Que vaut a ? a tel que $mp_i \geq 5$

$\log(0,9) \leq 0$

$\sum_{i=a}^{\infty} mp_i \geq 5 \rightarrow m \sum_{i=a}^{\infty} p_i \geq 5 \rightarrow m \sum_{i=a}^{\infty} (0,9)^i (0,1) \geq 5$

$\rightarrow m \cdot 0,1 \sum_{i=a}^{a} (0,9)^i \geq 5$ $\quad \underbrace{\sum_{i=a}^{\infty} (0,9)^i}$ $\geq \frac{50}{m}$ $\rightarrow (0,9)^a \cdot 10 \geq \frac{50}{m}$

$(0,9)^a + (0,9)^{a+1} + \dots$

$(0,9)^a * \underbrace{[1 + (0,9) + (0,9)^2 + \dots]}_{\text{série géométrique}}$

$\rightarrow \log (0,9)^a \geq \log \frac{5}{m}$

$a \log(0,9) \geq \log \frac{5}{m}$

$a \leq \frac{\log \frac{5}{m}}{\log(0,9)}$

$a \leq 87,41$

a entier $a = 87$

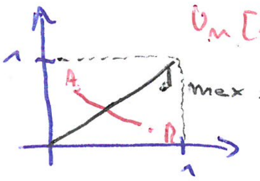
$x_{n+1} = x_n \cdot 0,9$ ↖ raison

raison < 1 $\rightarrow \frac{1}{1 - \text{raison}} = \frac{1}{0,1} = 10$

h. TEST DU CARRÉ-UNITÉ

But : considérer la suite des réels générés entre 0 et 1, former des paquets de 4 réels, constituer ainsi deux points dans le plan et mesurer l'écart entre les deux points.

$U_n \in [0;1[$



max = $\sqrt{2}$ $\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)$

$$\underbrace{U_n, U_{n+1}}_{A}, \overbrace{U_{n+2}, U_{n+3}}^{B}$$

(U_n, U_{n+1}) / (U_{n+2}, U_{n+3}) multiple de 4.

V.A. $= d^2(A,B)$ → classes et fct de répartition (proba)

$= (U_{n+2}-U_n)^2 + (U_{n+3}-U_{n+1})^2$ (diff abs)² + (diff ord)² VA continue (réel) / discret (entier)

$0 \le d^2(A,B) < 2$ (borne jamais atteinte)

Un écart ou une distance est une variable aléatoire de type continu ; par conséquent, il nous faut travailler avec la fonction de répartition F(x). On peut montrer que

$$F(x) = \Pr(d^2 \le x) = \left(\pi x - \frac{8}{3}x^{3/2} + \frac{x^2}{2}\right)1_{[0,1]}$$ → si $d \in [0,1]$ ∧ sinon 0

$$+\left(\frac{1}{3} + (\pi-2)x + 4(x-1)^{1/2} + \frac{8}{3}(x-1)^{3/2} - \frac{x^2}{2} - 4x.arcos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)1_{]1,2[}$$

d^2	n_i	p_i
$[0; 0,1[$		$\Pr(0 \le d^2 \le 0,1) = \Pr(d^2 \le 0,1) = 0,234832$
$[0,1; 0,2[$		$\Pr(0,1 \le d^2 \le 0,2) = \Pr(d^2 \le 0,2) - \Pr(d^2 \le 0,1) = 0,174971$
$[0,2; 0,3[$		$\Pr(0,2 \le d^2 \le 0,3) = \Pr(d^2 \le 0,3) - \Pr(d^2 \le 0,2) = 0,139495$
⋮		⋮
$[1,9; 2[$		

$np_i < 5$
↳ regroupement

$n = \sum n_i$

i. Test des courses

But : analyser dans la suite générée d'entiers des sous-suites d'entiers strictement croissants.

Exemple :

X_n

exemple

on redescend
indépendance phénomène

$\underbrace{(12,\ 35,\ 48,\ 102)}_{\text{course}}$ ~~7~~ $\underbrace{30,}$ ~~10~~

course

↓

longueur (VA)

= 4

↓

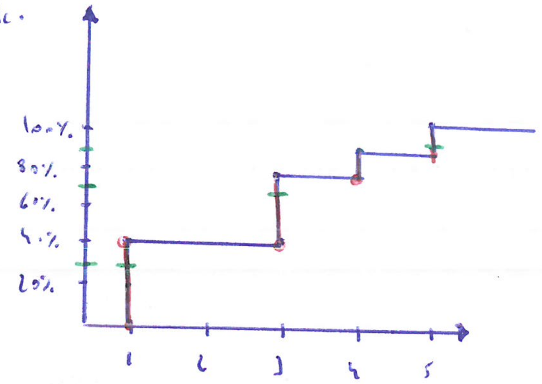
1

6. Simulation: Forcer le hasard

Lorsqu'on est amené à simuler par un programme informatique, des problèmes liés à des situations économiques réelles, on doit générer des suites de nombres (pseudos)-aléatoires qui répondent au fonctionnement du problème. On doit donc « forcer » cette suite à répondre aux contraintes imposées par les statistiques observées dans la situation réelle.

Exemple : Une pizzeria offre 5 types de pizzas ≠ (1,2,3,...). On veut générer des nombres aléatoires qui simulent la demande.

x_i n° de pizza	demande p_i	F(x)
1	40%	40%
2	0%	40%
3	35%	75%
4	10%	85%
5	15%	100%



$F(x_i) = P(x \le x_i)$

On génère $U_k \in [0,1[$

ex
0,35 → 1
0,70 → 3
0,90 → 5
0,40 → 3

```
* Pizza
  [Générer U_k]
      ↓ U_k
  if (U_k < 0,4)
      nb=1
  else
      if (U_k < 0,75)
          nb=3
      else
          ⋮
```

7. Exercices

Exercice 1

Sachant que l'on génère U_n entre 0 et 1, écrire le diagramme d'actions correspondant à une génération qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.83$.

Exercice 2 (analyse du risque au lancement d'un nouveau produit)

XX lance un nouveau produit : une imprimante portable dont le prix de vente unitaire est fixé à 249€. La première année, les frais administratifs s'élèvent à 400.000€, la publicité à 600.000€. Les coûts directs, les coûts des matières premières et la demande ne sont pas connus avec certitude.

Le coût direct est décrit par la distribution de probabilité suivante :

C_d	43	44	45	46	47
Prob	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Le coût des matières premières est décrit par une distribution de probabilité uniforme entre 80 et 100 euros.

La demande notée X suit une loi de probabilité normale de moyenne 15000 et d'écart-type 4500.

1. Ecrivez l'équation du profit.

2._ Comment générer C_d, C_m et x ?

Exercice 3 (simulation d'une gestion de stock)

Le produit concerné est une tablette vendue à 125 euros, son coût unitaire étant de 75 euros. La demande aléatoire mensuelle est décrite par une distribution de probabilité normale de moyenne 100 unités et d'écart-type 25 unités. Chaque mois, le vendeur reçoit des livraisons du fournisseur pour compléter son stock jusqu'à un niveau Q (niveau de couverture) au début de chaque mois.
Si la demande mensuelle est inférieure à Q, un coût de stockage unitaire de 15 euros par tablette non vendue. Par contre, si la demande mensuelle est supérieure à Q, un coût de pénurie de 30 euros est à supporter par tablette manquante.

Le manager souhaiterait un modèle de simulation pour déterminer le profit mensuel moyen résultant du choix de Q.

Etablir la formule du profit.

7. Exercices.

(1)

$\lambda = 0,83$

variable discrète

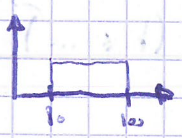
$P_i = P(P_\lambda = k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$

x_i	P_i	$f(x_i)$
0	0,436	0,436
1	0,362	0,798
2	0,150	0,948
3	0,042	0,990
4	0,009	0,999.

+ DA nbre aléatoire (générer le hasard)

$80 + U_k \cdot 20$ (mettre dans l'intervalle 80-100)

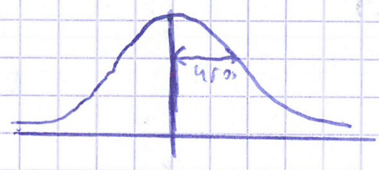
(2) $\text{Profit} = \underbrace{249\,x}_{C.A} - 400\,000 - 600\,000 - C_d\,x - C_m\,x$



loi uniforme

x = nb imprimantes vendues = demande. $N(15\,000 ; 4500)$

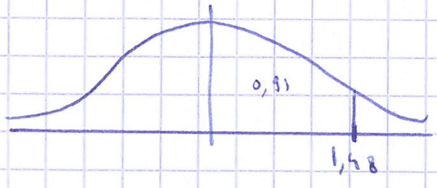
cô exc 1 + th.



$U_k \in [0, 1[$

$U_k = 0,93$

$P(x^* < 1,48) = 0,93$



$X^* = \dfrac{X - m}{\sigma}$

$X = 1,48 \times 4500 + 15000 = 21660$

(3)

$CU = 75$

$PU = 125$

demande $= X = N(100 ; 25)$

$$Profit = 125x - 75Q \begin{cases} -15(Q-x)^* & \text{si } Q > x \\ -30(x-Q)^* & \text{si } x > Q \end{cases}$$

Q optimale

Q_{min} Q_{max}

* Profit

Q = Q_{min} ProfitMax = 0

Do while ($Q \leq Q_{max}$)

profit = 0
t = 1

Do while (t ≤ ...) → tps simulation

$\boxed{Tirt}$

t++

if (Profit > ProfitMax)

Profit = ProfitMax

Qopt = Q

Q++

* Tirt

$\boxed{\text{Generer Demande}}$ d x

profit += 125 x - 75 Q

if (Q > x)

profit -= 15(Q - x)

else

profit -= 30(x - Q)

8.2.

$7x_0 + 3 = k \cdot 100 + x_1$

$x_0 = \frac{k \cdot 100 + 17}{7} = \frac{98k}{7} + \frac{14}{7} + \frac{2k}{7} + \frac{3}{7}$

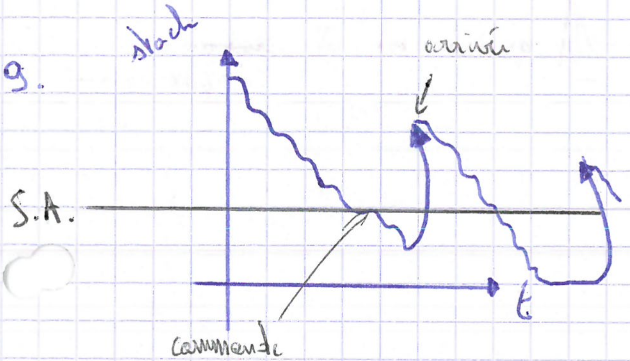
entier   entier

$\frac{2k}{7} + \frac{3}{7} \in \mathbb{N}$ donc,

$\frac{2k+3}{7} = n$, $n \in \mathbb{N}$ (entier) $k = 2$

$x_0 = \frac{2 \cdot 100 + 17}{7} = 31$

9.



si SA ↗ → coût de stockage élevé ;
SA ↘ → coût de pénurie.

```
StockMax = max        Stock =
SA = 0
while (SA < StockMax)
    FE = 0    i = 1
    t = 0
    CP = 0
    CS = 0
    while (t ≤ 1000)
        [Gen DJ] → VA_1
        D = Stock - VA_1
        if (D ≤ SA and i = 1)
            [Gen Délai] → VA_2     i = 0
        if (i = 1)
            VA_2 --
        if (VA_2 == 0)
            i = 1
            Stock += qteReap
        if (Stock ≤ 0)
            CP = -a . Stock
            Stock = 0
        CS = stock × coût stock
        FE += CP + CS
        t + 1
    [FE]
    SA + 1
```

```
~~FE = CP + CS~~
if (FE < FE_max)
    FE_max = FE
    SA = SA
```

9. solution.

$FE(SA) = \alpha \cdot nbStock + \beta\, nbPen$

CoûtStockage

TabCoût { cell $SA_{Max} - min - 1$ { Coût Stockage

⚠ quand est-il ~~reserve~~ réapprovisionné

* SA

$SA = SA_{min}$

do while ($SA \leq SA_{max}$)

stock = $stock_{ini}$
nbPenurie = nbstock = 0
t = 1
delais = -1

do while (t ≤ tSimulation)

$\boxed{\text{generation DemSam}}$ ↓ m

stock -= m

if (stock ≤ SA)

if (stock < 0)

nbPenurie -= stock
stock = 0

if (delais = -1)

$\boxed{\text{generation DelaisRea}}$ ↓ delais

if (delais = 0

Stock += qteReap

delais --

nbStock += stock
t++

TabCoût[SA - SAm] = α nbStock + β . nbPen
SA++

8. Un peu d'espionnage en cryptographie

Exercice 1

Vous êtes un espion de la CIA. Pour décrypter un message, il vous est nécessaire d'obtenir le germe d'une suite de nombres aléatoires. Les informations dont vous disposez sont les suivantes : (multiple de 100 + 20)

Formule de la suite de nombre : $X_{n+1}=(21x_n+57)\%100$

Nombre espionné : $X_1=20$

Comment allez-vous procéder pour retrouver x_0 ?

$21x_0 + 57 = k \cdot 100 + x_1, \; k \in \mathbb{N}$

$x_0 = \frac{k \cdot 100 - 37}{21}$

$x_0 = \frac{84k}{21} + \frac{16k}{21} - \frac{21}{21} - \frac{16}{21}$

$x_0 = 4k - 1$

$x_0 \in \mathbb{N}$ Donc $\frac{16k-16}{21}$ est entier

$\frac{16k-16}{21} = n, \; n \in \mathbb{N}$

$k = 1$

donc $x_0 = \frac{63}{21} = 3$

Exercice 2

x_0 doit être entier

Idem précédent avec les données suivantes :

$X_1=20$

$X_{n+1}=(7X_n+3)\%100$

9. Exemple d'algorithme de simulation

Un gestionnaire de vente d'ordinateurs souhaite que vous l'aidiez à déterminer le stock d'alerte permettant de minimiser le coût global de son secteur si le coût est proportionnel au nombre d'ordinateurs commandés non ~~encore~~ fournis et au nombre d'ordinateurs restant en stock.
La demande journalière est aléatoire ; elle est générée par le module *générationDemJour*.
Le délai de réapprovisionnement est aléatoire ; il est généré par le module *générationDélaiRéap*.
La quantité de réapprovisionnement *qteReap* est fixe.
Votre étude se fera entre deux valeurs de stock d'alerte : une minimale *stockAlerteMin* et une maximale *stockAlerteMax*.

Si un client commande et qu'il n'est pas de stock, il part et perte d'$

Chapitre II: Files d'attente

1. Introduction

Les problèmes liés à l'attente dans un centre de service sont omniprésents dans notre société. Les exemples ne manquent pas :

- attente à un guichet (caisse dans un supermarché, administration, banque...) ;
- trafic urbain ou aérien ;
- réseaux téléphoniques ;
- circulation de pièces dans un atelier ;
- machines en panne dans un atelier, qui attendent la visite d'un réparateur ;
- programmes dans un système informatique,...

On a l'habitude d'appeler ***clients*** les individus qui constituent la file d'attente et ***station*** le guichet où un ***serveur*** procure un service déterminé.

Il s'agit de phénomènes stochastiques. En effet, les clients arrivent en général au hasard et la durée d'occupation de la station par chaque client n'est, en général, pas constante.

Il est devenu inconcevable de construire un système quelconque (que ce soit un système informatique, un réseau de communication, un système de production ou un système de la vie quotidienne) sans avoir auparavant fait une analyse des performances. La pression des enjeux économiques est telle actuellement que l'on ne peut aboutir à un système sous-dimensionné et que l'on doit éviter au maximum le surdimensionnement. Construire un système adapté, respectant le plus possible les objectifs du cahier des charges est une démarche qui passe obligatoirement par une étape de modélisation et d'analyse des performances.

2. Définitions

On appelle ***file d'attente***, l'ensemble des clients qui attendent d'être servis à l'exclusion de ceux en train d'être servis et ***système d'attente***, l'ensemble des clients qui sont dans la file plus ceux qui se font servir.

Un ***système d'attente*** sera caractérisé par un centre de services (une ou plusieurs stations) et un centre d'attente (une ou plusieurs files).

L'ensemble des clients potentiels constitue la ***source*** du système.

On distingue deux principaux types de systèmes d'attente :

- ouvert : effectif illimité (ex :...client, programmes)
- fermé : effectif limité (ex :...machine → possède un nombre max)

Les stations peuvent être en nombre limité ou illimité. Dans notre cas, elles rendront des services indépendants les uns des autres.

Le centre d'attente peut avoir une capacité nulle, finie ou infinie.

Les files peuvent être gérées selon différentes techniques :

- FIFO :
- LIFO :
- Prioritaire
  - Priorité absolue → passe avant celui qui est servi
    - Régime répété → celui éjecté → recommence à 0
    - Régime continu → recommence où il s'est fait éjecté
  - Priorité relative → passe 1er mais attend que le service en cours soit terminé.

La gestion des files d'attente implique la prise en compte de deux phénomènes d'impatience :

- L'impatience a priori : … → file trop grande → j'y vais pas
- L'impatience a posteriori :… → marre d'attendre → j'en sors

La question qui nous occupe est donc : « **Combien de stations faut-il ouvrir pour minimiser les coûts ?** ».

Cette question entraîne l'étude de deux variables aléatoires :

- l'arrivée des clients ;
- la durée des services.

3. Arrivée des clients et durée des services

- Arrivée des clients : cette étude peut se faire de deux manières différentes selon la variable que l'on considère:
  - les intervalles de temps entre deux arrivées successives (variable aléatoire de type continu) ;
  - le nombre d'arrivées de clients par unité de temps (variable aléatoire de type discret)

- Durée des services : c'est une variable aléatoire de type continu.

L'expérience montre que, dans beaucoup de phénomènes d'attente, les variables aléatoires des arrivées et des durées de service sont respectivement poissonniennes et exponentielles négatives. Ce ne sont évidemment pas les seules lois que peuvent suivre ces variables mais ce sont les plus fréquentes et aussi les plus simples à employer pour obtenir un exposé facile des principes et de la théorie des phénomènes d'attente.

p. de Poisson = moyenne / espérance

Illustrons par un exemple :

X = nb arrivées/min

x_i	n_i
0	18
1	27
2	20
3	10
4	5
	80 min (Som n_i)

→ arrivé 18 fois où personne n'est arrivé

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 18/80 & 27/80 & 20/80 & 10/80 & 5/80 \end{pmatrix} \quad 117/80$$

$$E(X) = \sum x_i \cdot p_i = 1{,}4625 \ (\lambda)$$

$$P(P_\lambda = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \% \text{ total} \div n$$

DS = durée de service en minute $= \frac{1}{\mu}$ → min par service

DS_i	c_i	n_i
]0,5 ; 1,5]	1	37
	2	23
	3	16
	4	12
	5	3
	6	3
		100 services

$E(DS) = 2{,}42$ minutes $\quad \mu = \frac{1}{2{,}42}$ services/min

$$P(DS \geq t) = e^{-\mu \cdot t}$$

On va calculer $\psi = \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}4625 \cdot 2{,}42 = 3{,}53925$ → nombre de station minimum à avoir est 4

→ $\frac{\text{nb service}}{\text{min}}$ ~~min/service~~ nb de station → entre 4 et 5

6. 4.

S = nb de station

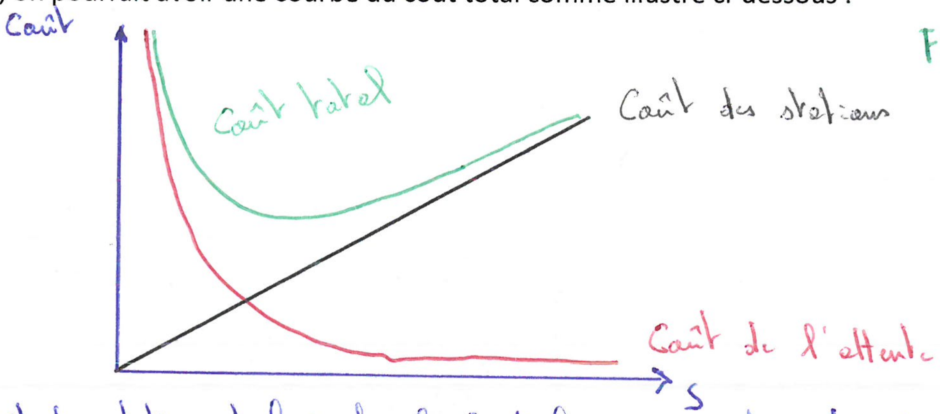
<u>Système en équilibre:</u> si $\psi < S$

$\rho < 1$ avec $\rho = \frac{\psi}{S}$

4. Position du problème

Le but est de minimiser les coûts.

Exemple : si le coût des stations est croissant linéairement et si le coût de l'attente suit une loi exponentielle négative, on pourrait avoir une courbe du coût total comme illustré ci-dessous :



FE(S) somme des deux

plus le coût des stations est élevé, plus le S idéal se rapproche du minimum (et vice-versa)

Il s'agit d'établir la formule du coût total (appelée aussi Fonction Economique, FE(S)) en fonction du nombre de stations et de calculer ses valeurs pour tout nombre de stations compris en le minimum et le maximum.

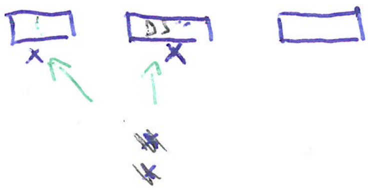
$S_{min} = 4$ $S_{max} = 24$ → test FE(4) FE(5) FE(6) ... et trouve le minimal

5. Algorithme de base

En général, le calcul du coût total nécessitera la recherche de diverses quantités décrites dans les paragraphes suivants.

Dans le cas où le coût total est proportionnel au coût du service et au nombre moyen de personnes en attente, écrivez le DA qui détermine le nombre de services à offrir.
On supposera la file unique, aucun phénomène d'impatience n'étant à considérer.

$$FE(S) = \alpha . S + \beta . \frac{\Sigma \text{ client en file}}{\text{tps simulation}}$$



1 seule file ⇒ pas de priorité - fifo

6. Symboles des grandeurs utiles

S nombre de stations

v nombre de stations inoccupées

N_S nombre de personnes dans le système

N_F nombre de personnes dans la file

W_S temps passé dans le système

W_F temps passé dans la file

DS durée de service

Remarquons que $W_S = W_F + DS$, $N_S = N_F + S - v$.

Lorsque ces variables sont surlignées, il s'agit des valeurs moyennes.

EXEMPLE : $\overline{S}$ est le nombre moyen de stations.

Les grandeurs utiles à la résolution des problèmes seront le nombre moyen de personnes dans le système, le nombre moyen de personnes dans la file, le temps moyen passé dans le système et le temps moyen passé dans la file, soit respectivement $\overline{N_S}, \overline{N_F}, \overline{W_S}$ et $\overline{W_F}$.

Algorithme.

TabDS { cell (S*) { DS

*

S = S_{min}

do while ($S \leq S_{max}$)

file = 0

t = 0

$\boxed{\text{init tab}}$ ↓tab

do while (t ≤ temp simulation)

$\boxed{\text{gen arrivée}}$ ↓nbA

file += nbA

if (DS(i) = 0)

if (file != 0)

file --

$\boxed{\text{generer DS}}$ ↓DS

else ~~tab[i].DS = DS~~

DS(i) --

i ++

fileCum += file

t ++

TabCout(S-S_{min}) = α S + β · $\frac{\text{file Cum}}{\text{temp sim}}$

S++

7. File à une station (S=1)

Prenons les hypothèses suivantes :

- Le système est ouvert (effectif illimité) ;
- Le système de gestion des files est FIFO : premier client arrivé- premier servi ;
- Pas de phénomène d'impatience à gérer ;
- Les arrivées des clients forment un processus de Poisson de taux λ ;
- Les temps de service suivent une loi exponentielle de taux μ.

→ plus < que ΔS

Considérons un intervalle de temps [t, t+ Δt] avec Δt très petit et calculons la loi de probabilité des arrivées dans la file et des sorties de la file.

A. Loi des arrivées

- N_a = v.a. nombre d'arrivée dans $[t, t+\Delta t]$
- λ = nb moyen d'arrivées / Unité Temps
- $\lambda . \Delta t$ $/ [t, t+\Delta t]$

paramètre

rappel $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$\boxed{P(P_\lambda = k) = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^k}{k!}}$$

$$P(N_a = 0) = \frac{e^{-\lambda . \Delta t} . \cancel{\lambda \Delta t}^{0}}{0!} = e^{-\lambda . \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2!} + \dots$$

$$= 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t^2)$$ → très petit donc négligeable (en plus en ² ...)

$$P(N_a = 1) = \frac{e^{-\lambda \Delta t} . \lambda \Delta t^1}{1}$$

$$= (1 - \lambda \Delta t) . \lambda \Delta t = \lambda \Delta t - o(\Delta t^2)$$

intervalle tellement petit que l'on ne peut avoir que 0 ou 1 personne qui rentre dans l'intervalle $[t, t+\Delta t]$

$P(N_a = 2)$ donne tout de suite des carrés donc négligeable

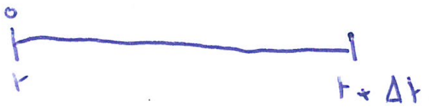
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

B. LOI DES SORTIES

N_s = V.a. nb de sortie $[t, t+\Delta t)$

Rappel $\quad P(x \geq t) = e^{-\mu t}$

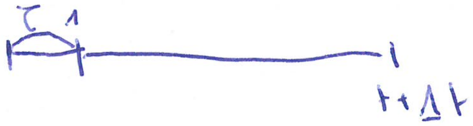
1er cas.



$P(N_s = 0) = 1 \qquad DS < \Delta t$

$P(N_s = 1) = 0$

2e cas



$$P(N_s = 0) = P_r(DS > \tau + \Delta t \mid DS > \tau)$$

$$= \frac{P_r(DS > \tau + \Delta t)}{P_r(DS > \tau)}$$

$$= e^{-\mu(\tau+\Delta t)} / e^{-\mu \tau}$$

$$= e^{-\mu \Delta t} = 1 - \mu\Delta t - \frac{\mu \Delta t^2}{2!} \text{, négligeable}$$

$$= 1 - \mu\Delta t + o(\Delta t^2)$$

$$P(N_s = 1) = \mu \Delta t - o(\Delta t^2)$$

ex

$\lambda = 0{,}25$ arrivée/min

$\overline{DS} = \frac{1}{\mu} = 3{,}11$ min/~~seconde~~ service

$[t, t + \Delta 12 sec]$ $\Delta t = 0{,}2$ min

$P(N_a = 0) = 1 - 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}05$
$= 95\%$ de chance qu'il n'y ai pas d'arrivé

$P(N_a = 1) = 5\%$

$P(N_s = 0) = 1 - \frac{1}{3{,}11} \cdot 0{,}2 = 0{,}9357$

$P(N_s = 1) = 0{,}0643$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ indépendant

C. EQUATIONS D'ÉTAT

Pour pouvoir calculer les grandeurs utiles mentionnées supra, nous devons établir les équations d'état.
A cette fin, nous devons calculer la probabilité d'avoir n personnes (n=0, 1, 2…) dans le système à l'instant t.

$P_n(t)$ = prob n personnes dans le système à l'instant t

$\underline{\underline{n=0}}$ $\quad P_0(t+\Delta t)$

	t	N_A	N_S	$t+\Delta t$
sc 1	0	0	0	0
sc 2	1	0	1	0
	~~0~~	~~1~~	~~1~~	0

DS < Δt

$$P_0(t+\Delta t) = P(\text{scenario } 1) + P(\text{scenario } 2)$$
$$= P_0(t) \cdot P(N_a = 0) \cdot P(N_s = 0) + P_1(t) \cdot P(N_a = 0) \cdot P(N_s = 1)$$
$$= P_0(t) \cdot (1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + P_1(t) \cdot (1-\lambda\Delta t) \cdot \mu\Delta t$$

(pour $1-\mu\Delta t$: $= 1$) Cas pas de N_a donc pas de N_s

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t) - P_0(t)\lambda\Delta t + P_1(t)\mu\Delta t - o(\Delta t^2)$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

Δt tend vers 0 $\quad P'_0(t)$

$\underline{n > 0}$

$P_n(t+\Delta t)$ $\quad t \longrightarrow \Delta t$

	NA	NS	
$n+1$	0	1	n
n	0	0	n
$n-1$	1	0	n
~~n~~	~~1~~	~~1~~	~~n~~ négligeable
	$P(N_a=0)$	$P(N_s=1)$	

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n+1}(t)\cdot(1-\lambda\Delta t)\cdot\mu\Delta t + P_n(t)\cdot(1-\lambda\Delta t)\cdot(1-\mu\Delta t) + P_{n-1}(t)\cdot(\lambda\Delta t)\cdot\begin{cases}(1-\mu\Delta t) & \text{si } n>1\\ & \text{si } n=1\end{cases}$$

$$= P_{n+1}(t)\,\mu\Delta t + P_n(t) - \lambda\,\Delta t\,P_n(t) - \mu\Delta t\,P_n(t) + P_{n-1}(t)\,\lambda\,\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = \mu P_{n+1} - \lambda P_n(t) - \mu P_n(t) + \lambda P_{n-1}$$

$P'_n(t)$

$S = 1$

D. CALCUL DES GRANDEURS UTILES

$\varphi = \lambda \cdot \frac{1}{\mu}$

$\varphi \leq S$

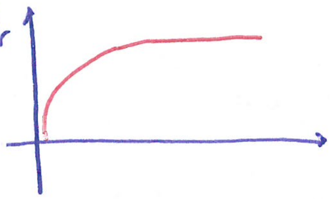
$\bar{N}_s, \bar{N}_q, \bar{W}_s, \bar{W}_q, \bar{DS} = \frac{1}{\mu}$

prob d'avoir 0 pers dans le syst à l'instant t.

$$\begin{cases} P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ P'_n(t) = -\lambda P_n(t) - \mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ régime permanent

$P_n(t) = C^{ste} = P_n$



$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1$

$$\boxed{P_1 = \frac{\lambda P}{\mu} = \varphi P_0}$$

$\boxed{n = 1}$

$0 = -\lambda P_1 - \mu P_1 + \mu P_2 + \lambda P_0$

$\mu P_2 = \lambda P_1 + \mu P_1 - \lambda P_0$

$P_2 = \varphi P_1 + \varphi_1 - \varphi P_0$

$P_2 = \varphi^2 P$

$\boxed{n}$

$P_n = \varphi^n P_0$

Or, $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$

$\lim_{n \to +\infty} P_0(1 + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^n) = 1$

$\boxed{\varphi < 1}$

suite géométrique de raison plus petite que 1.

$$P_0 \lim_{n \to +\infty} \frac{1-\varphi^n}{1-\varphi} = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1-\varphi} = 1$$

$$P_0 = 1 - \varphi$$

$$P_n = \varphi^n (1-\varphi)$$

esc $\lambda = 0{,}25$ (325 arrivé par minute)
$\frac{1}{\mu} = 3{,}11$ (durée de service moyen)

$\varphi = 0{,}7775$
$P_0 = 0{,}2225$

prob d'avoir 5 personnes dans le système ← $P_5 = (0{,}7775)^5 \times 0{,}2225$
$= 6\%$

a)

$$N_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1-\varphi & \varphi.(1-\varphi) & \varphi^2.(1-\varphi) & & & \end{pmatrix}$$

$D_\varphi \varphi^k$

$$\bar{N}_s = \sum_{k=1}^{\infty} k . \varphi^k (1-\varphi) = (1-\varphi) \sum_{k=1}^{\infty} k . \varphi^k = (1-\varphi) . \varphi \sum_{k=1}^{\infty} k . \varphi^{k-1}$$

$$= (1-\varphi) . \varphi . D_\varphi \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k \right)$$

$$\to \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k}_{\frac{1}{1-\varphi}} - 1$$

$$= (1-\varphi) . \varphi . D_\varphi \left(\frac{1}{1-\varphi} - 1 \right)$$

$$= (1-\varphi) . \varphi . \frac{1}{(1-\varphi)^2}$$

$$= \frac{\varphi}{1-\varphi} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

8. File à S stations (S>1)

Nous accepterons sans démonstration les formules suivantes :

$$\rho = \frac{\Psi}{S}$$

$$\nu = S - \Psi$$

où ν est le nombre de stations inoccupées

Pour $0 \leq n < S$: $P_n = \frac{\Psi^n}{n!} \times P_0$

Pour $n > S$: $P_n = \frac{\Psi^n}{n!} \times P_0 \times \frac{1}{S^{n-S}}$

Avec $P_0 = \dfrac{1}{1+\frac{\Psi}{1!}+\frac{\Psi^2}{2!}+\frac{\Psi^3}{3!}+\dots+\frac{\Psi^{S-1}}{(S-1)!}+\frac{\Psi^S}{S!}\times\frac{1}{1-\rho}}$

$\bar{N}_f = \frac{S^S}{S!} \times P_0 \times \frac{\rho^{S+1}}{(1-\rho)^2}$ $\qquad$ $\bar{N}_S = \bar{N}_f + \Psi$

$\bar{W}_f = \frac{\bar{N}_f}{\lambda}$ $\qquad$ $\bar{W}_S = \frac{\bar{N}_S}{\lambda}$

rho

$$\Pr(W_f > T) = e^{-(\mu \times S - \lambda)\times T} \times P_0 \times \frac{\rho^S}{1-\rho} \times \frac{S^S}{S!}$$

file à S stations (1 = S)

$\bar{N}_s = \frac{\psi}{1-\psi} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \mu \bar{W}_f = \lambda \bar{W}_s$

$\bar{N}_f = \frac{\psi^2}{1-\psi}$

$\bar{W}_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{\bar{D}_S}{1-\psi}$

$\bar{W}_f = \psi \bar{W}_s$

$\Pr(W_f > t) = e^{-(\mu-\lambda)\cdot t} \cdot \psi$

D. Calcul des grandeurs utiles.

p31.

b) $N_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots \\ 1-\varphi+\varphi(1-\varphi) & \varphi^2(1-\varphi) & \varphi^3(1-\varphi) & \dots \end{pmatrix}$

1 en station } donc
0 en file } 2 cas
0 file

1 dans file
l'autre en station

$\bar{N}_f = \varphi\, E(N_s)$
$= \varphi^2/(1-\varphi)$

$\bar{N}_f = \dfrac{\varphi^2}{1-\varphi}$

$\overline{W}_s = \int \dots$ supposons que la file fonctionne à son allure moyenne.

λ client arrivent par unité de temps.

donc pendant une durée $\overline{W}_s$, on a $\lambda \cdot \overline{W}_s$ client qui sont arrivés

Or pendant la durée $\overline{W}_s$, on a $\bar{N}_s$ client qui sont entrés

$$\lambda \overline{W}_s = \bar{N}_s \quad \text{donc} \quad \overline{W}_s = \frac{\bar{N}_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$\overline{W}_f = \overline{W}_s - \overline{DS} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \varphi \cdot \overline{W}_s.$$

6) $\lambda = 27/\text{heures} = 0{,}45/\text{min}$

formule $\boxed{S=1}$ $P(W_q > t) = \varphi \times e^{-(\mu-\lambda)t}$

$\overline{DS} = 2\ \text{min/avion}$

$= \frac{1}{\mu} \qquad \mu = 1/2$

$P(W_q > 0)$ probabilité d'attendre

Dcl $\Rightarrow P(W_q > 0) \leq 0{,}1$ $\qquad \varphi = 0{,}9$

$\hookrightarrow \lambda \cdot \frac{1}{\mu}$

$2 \cdot 0{,}45$

$\Rightarrow S=1 \quad P(W_q > 0) = 0{,}9 \cdot e^0 = 0{,}9 \cdot 1 = 0{,}9.$

$\Rightarrow S=2$ ... trop grand.

$\Rightarrow S=3 \quad P(W_q > 0) = e^0.$

$\rho = \frac{\varphi}{S} = \frac{0{,}9}{3} = 0{,}3 \Rightarrow$ on utilise le système à 30%.

$= P_0 \cdot \frac{0{,}3^3}{1-0{,}3} \cdot \frac{3^3}{3!} = \boxed{0{,}07} \leq 0{,}1$

donc ok

$$\frac{1}{1+\varphi+\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^3}{3!}\cdot\frac{1}{1-0{,}3}} \times \frac{0{,}3^3}{1-0{,}3}\cdot\frac{3^3}{3!} = \frac{1}{1+0{,}9+\frac{0{,}81}{2}+\frac{0{,}9^3}{3}\cdot\frac{1}{0{,}7}}$$

$0{,}729$

$\hookrightarrow 0{,}4023558211$

8)

~~$\overline{DS} = 15\ \text{min} = \frac{1}{\mu} = 0{,}25/\text{heures}$~~

~~$\lambda = 3/\text{heures} = 0{,}05/\text{min}$~~

$\overline{DS} = 15\ \text{min} = 0{,}25\ \text{heures}$

$\lambda = 3/\text{heures}$

$\varphi = 0{,}75$

a). $\overline{W_q} = \frac{\overline{DS}}{1-\varphi}\,\varphi = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{0{,}25} = 0{,}75 \Rightarrow$ temps moyen d'attente 45 min.

$P_1 = \varphi(1-\varphi) = 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}1875 \qquad 18\%$

$P_2 = \varphi^2 \cdot (1-\varphi) = 0{,}75 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 0{,}140625 \qquad 14\%$

b) $P(W_q > 1) = 0{,}75 \cdot e^{-(4-3)\times 1}$

$= 0{,}75 \cdot e^{-1} = 0{,}28$

$P(W_q > 2) = 0{,}75 \cdot e^{-(4-3)\cdot 2} =$

$0{,}75 \cdot e^{-2} = 0{,}10$

c) $\lambda = 2,4$ / heures

$\overline{W_q}$ à recalculé φ à recalculé $= 0,6$

$\frac{0,25 \cdot 0,6}{0,4} = 0,375$ 37,5 min

$P(\overline{W_q} > T) = 0,10 \Rightarrow 0,6 \cdot e^{-(4-2,4) \cdot T} = 0,10$

$e^{-1,6T} = 1/6$

$-1,6T = \ln(1/6)$

$T = \frac{-1,79}{-1,6}$

$T = 1,12$ 1 heure et ~~5~~ 7,2 minutes

d)

$S = 2$

$\left.\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \mu = 4 \end{array}\right\} \varphi = 0,75$

$\overline{W_q} = 2$ min 26 seconde

$P_0 = 0,45$

$\overline{N_q} = 0,1215$

~~$P_1 = 0,3375$~~
~~$P_2 = 0,1266$~~

$P_1 = 0,3375$
$P_2 = 0,1266$

$P(W_q > 1) = 1,36 \cdot 10^{-3}$

~~$P(W_q$~~

~~e) $P_1 = 0,3375$~~

c) $\lambda = 6$
~~μ~~ $= DS = 15$ min $= 0,25$ h $\mu = 4$

$\overline{W_q} = 13$ min

$P(\overline{W_q} > 1) = 0,087$

[Exe]rcices. p 33.

$\lambda = 4200$ (demande par seconde)

$\frac{1}{\mu} = 0,2 \times 10^{-3}$ sec

$\varphi = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = 0,84$ seconde $< 1 \Rightarrow$ un disque suffit.

5 du cours

$\overline{N_s} = \frac{\varphi}{1-\varphi} = \frac{0,84}{0,16} = 5,25$ demandes (dans le système)

$\overline{N_f} = 5,25 \times 0,84 = 4,41$ $\quad \overline{W_f} = 1,25 \cdot 0,84 = 1,05$ $(\overline{W_s} - \frac{1}{\mu})$

$\overline{W_s} = \frac{5,25}{4200} = 1,25$ millisec.

3)

$\lambda = 300 \cdot 12 = 3600$ interrog / heures $\rightarrow$ 1 demande/sec

$\frac{1}{\mu} = 660$ msec

$= 0,660$ seconde

$1 \cdot 0,660 < 1 \rightarrow$ 1 serveur suffit.

$\overline{W_s} = \frac{0,660}{1-0,660} = 1,94$ seconde $\quad$ temps réponse $= 11,94$ sec

4) $S=1$

$\text{Coût} = f(\mu) = \alpha \cdot \mu + \beta \, \overline{N_s}$, α et β constante

$\frac{\varphi^2}{1-\varphi} = \frac{\lambda^2}{\mu^2(1-\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{\lambda^2}{\mu^2 - \lambda\mu}$

$= \alpha \cdot \mu + \frac{\beta\lambda^2}{\mu^2 - \lambda\mu}$

vitesse optimale $=$ ~~[illegible]~~ coût optimale $\quad \beta\lambda^2 \cdot \frac{1}{\mu^2 - \lambda\mu}$

il faut trouver les extremum : dérivé $\quad f' \mid - \; 0 \; + \quad f \mid \searrow \; \nearrow$ $\quad f'(\frac{1}{g}) = -\frac{g'}{g^2}$

$f'(\mu) = \alpha - \beta\lambda^2 \cdot \frac{2\mu - \lambda}{(\mu^2 - \lambda\mu)^2}$

$f'(\mu) = 0 \iff \alpha = \frac{\beta\lambda^2(2\mu - \lambda)}{(\mu^2 - \lambda\mu)^2}$

$\alpha(\mu^2 - \lambda\mu)^2 = \beta\lambda^2(2\mu - \lambda)$

$\alpha(\mu^4 - 2\lambda\mu^3 + \lambda^2\mu^2) = 2\beta\lambda^2\mu - \beta\lambda^3$

equation de degré 4 en μ $\Rightarrow$ repérer les points stationnaires
$\Rightarrow$ voir à gauche et à droite

5) $S = 1$

$\text{Coût} = \cancel{\quad \cdot \frac{2}{\mu} + 3 \cdot \overline{W}_1}$

$\cancel{= \frac{2}{\mu} + \frac{1}{\mu + \lambda}}$

$\text{Coût} = f(\mu) = 2\mu + 3 \cdot \overline{W}_1$

$= 2\mu + \frac{3}{\mu - 3}$ ← λ donné

$f'(\mu) = 2 - 3 \cdot \frac{1}{(\mu-3)^2}$

$f'(\mu) = 0$

$\Rightarrow 2 = 3/(\mu-3)^2$

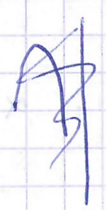
$2 \cdot (\mu - 3)^2 = 3$ $\qquad (\mu-3)^2 = 3/2$

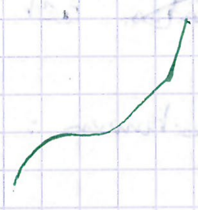
$2 \cdot (\mu^2 - \cancel{6\mu + 9}) = 3$ $\qquad (\mu - 3) = \pm\sqrt{3/2}$

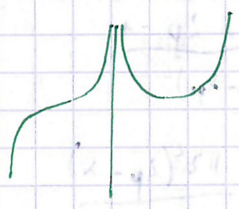
$2\mu^2 \cancel{- 12\mu + 18} = 3$ $\qquad \mu = \pm\sqrt{3/2} + 3$

$= 3 \pm \sqrt{3/2} = 3 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

μ		$3 - \frac{\sqrt{6}}{2}$		3		$3 + \frac{\sqrt{6}}{2}$	
f'	+	0	+	‖	−	0	+







9. Exercices

1. Dans une usine où existe un bureau de sécurité sociale, le chef du personnel ayant remarqué l'affluence des personnes dans ce bureau, demande une étude relative au service.
   Pendant 100 intervalles de 5 minutes, on observe les arrivées :

Ai	0	1	2	3	4	5	6
	29	34	24	9	3	1	0

   Ainsi que les durées de service:

DS	<1'	1'-2'	2'-3'	...	...	...	...	...	...	...	...	11'-12'
	23	20	14	12	9	5	4	5	3	2	2	1

   a. Vérifiez que les durées de service suivent une loi exponentielle négative.
   b. Un seul employé dans ce bureau suffit-il ?

2. Un disque est sollicité à raison de 4200 demandes par seconde. Le temps moyen d'accès à l'information est 0.2 millisecondes.
   a. Un disque suffit-il ? Justifiez.
   b. Si oui, calculez les 4 grandeurs.

3. 12 terminaux introduisent chacun 300 interrogations à l'heure à un serveur ; les demandes sont traitées une à une en FIFO. Le temps moyen de traitement de chaque interrogation est de 660 msec ; le temps de transmission d'un message est de 6 secondes. Calculez le temps de réponse moyen.

4. Sachant que le service est unique, disposant d'un système où le coût est proportionnel à la vitesse du système et au nombre moyen de clients en file, quel sera le raisonnement pour déterminer la vitesse optimale ?

5. Sachant que le service est unique, disposant d'un système où le coût est égal à la somme du double de la vitesse du système et du triple du temps moyen passé dans le système, que vaut la vitesse optimale si le nombre moyen d'arrivées par seconde vaut 3?

6. Les arrivées des avions demandant à atterrir dans un petit aéroport se font à raison de 27 arrivées par heure. Le temps moyen de service est de 2 minutes par avion. On souhaite que la probabilité d'attendre ne soit pas plus grande que 0,1. Combien de pistes faut-il envisager ?

7. Dans un atelier, des machines tombent en panne selon une loi de Poisson de taux égal à 3 par heure. Le coût de l'arrêt est de 2,5 euros par heure et par machine. On souhaite embaucher un ou deux mécaniciens, expérimentés ou non.
   Sachant qu'un moins expérimenté répare 4 machines à l'heure et coûte 12,5 euros par heure, qu'un plus expérimenté répare 5 machines à l'heure et coûte 16,25 euros par heure, que faire ?
   Embaucher un expérimenté ou un non expérimenté ?

Engager deux expérimentés ou deux moins expérimentés ?

8. Un médecin a observé que la durée moyenne d'une consultation est de 15min. Il se dit qu'en convoquant ses malades à des heures fixées, par intervalle de 20min, il verra décroître l'excessive occupation de sa salle d'attente.
   a. Calculez le temps moyen d'attente et les probabilités supérieures à 5% pour qu'il y ait 1, 2, ..., n personnes chez le médecin.
   b. Quelle est la probabilité pour qu'un malade attende plus d'une heure ? plus de deux heures ?
   c. Qu'arriverait-il si le médecin décidait de ne convoquer ses malades que toutes les 25 min ? Quel serait le temps moyen d'attente ? Quel serait le temps au-delà duquel moins de 10% des clients attendent ?
   d. Le médecin s'adjoint un confrère ; ils se partagent la clientèle qui est reçue soit par l'un soit par l'autre. Pendant les premiers jours, les clients ayant déjà pris rendez-vous, ils laissent l'horaire tel quel (20 min entre 2 patients). Quel est le temps moyen d'attente ? Quelles sont les probabilités d'avoir 1, 2, ..., n personnes ? Montrez que la probabilité d'attendre une heure est devenue négligeable.
   e. Pour que chacun consulte 3 fois par heure, il faudrait convoquer les malades toutes les 10min. Quel serait le temps moyen d'attente ? Quelle serait la probabilité d'attendre plus d'une heure ?

9. Soit le tableau des arrivées suivant :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	7	13	18	18	15	9	8	4	2	1	1

Où le nombre d'arrivées est par tranche de 15min.

La durée moyenne de services est de 8,75min.

   a. On envisage un service proportionnel au nombre de clients. Que vaut S_{min} de manière à couvrir sans attente le service de la clientèle (On admet qu'il n'y a pas d'attente appréciable si plus de 99% des clients sont servis immédiatement) ? Auparavant, vérifiez les hypothèses.
   b. On trouve la solution trop coûteuse. On envisage de réduire le nombre de stations. Quel sera le nombre optimal de stations si le coût de l'attente d'un client est de 0,5 euros par minute tandis que le salaire du guichetier est de 10 euros de l'heure ?

CHAPITRE 3 : ANALYSE POSTOPTIMALE EN PROGRAMMATION LINÉAIRE

1. Introduction

L'élaboration d'un modèle de programmation linéaire comprend des paramètres tels que des coûts, des taux, des quantités de ressources, … Ces paramètres sont souvent écrits dans le modèle avec une valeur déterminée mais en réalité, ils peuvent subir des variations en fonction de l'évolution économique. Il est dès lors judicieux d'analyser la sensibilité des solutions optimales aux changements que pourraient subir les paramètres a_{ij}, c_j et b_i.

Nous pouvons ainsi définir l'analyse postoptimale ou paramétrique comme étant l'étude de l'évolution de l'optimum pour toutes les valeurs possibles des paramètres.
Cette analyse incite les décideurs à essayer d'estimer au mieux les paramètres les plus sensibles ou à mettre en place la surveillance des paramètres qui déclenchent des changements.

Deux possibilités existent :

- soit on oublie la solution optimale obtenue avec l'algorithme du simplexe appliqué avec le modèle original. On relance cet algorithme avec le modèle modifié (paramètres sous forme de variables (exemple : $c_j = 1 + 2*\lambda$)) ;
- soit on repart du tableau final obtenu avec le modèle original et on détermine une solution optimale du modèle modifié.

Dans ce chapitre, nous envisageons la deuxième piste. De plus, nous ne modifierons que les coûts de la fonction économique (c_j) ou les coefficients indépendants des contraintes (b_i).

2. Rappels

2 produits

pivot
-> plus grd FE
-> plus petit rapport entre B et x

interprétation : $X_1 = 21,25$
$X_2 = 27,5$
profit max = 265750

$e_1, e_2 = 0$ -> A_1, A_2 travaillent à 100%
$e_3 = 33,75$.
-> 180 - 33,75 , $A_3 = \frac{180 - 33,75}{180}$
= % utilisation A_3

TABLE DES MATIERES (1RE PARTIE)

CHAPITRE III : ANALYSE POSTOPTIMALE EN PROGRAMMATION LINÉAIRE

1. Introduction

L'élaboration d'un modèle de programmation linéaire comprend des paramètres tels que des coûts, des taux, des quantités de ressources, ... Ces paramètres sont souvent écrits dans le modèle avec une valeur déterminée mais en réalité, ils peuvent subir des variations en fonction de l'évolution économique. Il est dès lors judicieux d'analyser la sensibilité des solutions optimales aux changements que pourraient subir les paramètres a_{ij}, c_j et b_i.

Nous pouvons ainsi définir l'analyse postoptimale ou paramétrique comme étant l'étude de l'évolution de l'optimum pour toutes les valeurs possibles des paramètres.
Cette analyse incite les décideurs à essayer d'estimer au mieux les paramètres les plus sensibles ou à mettre en place la surveillance des paramètres qui déclenchent des changements.

Deux possibilités existent :

- soit on oublie la solution optimale obtenue avec l'algorithme du simplexe appliqué avec le modèle original. On relance cet algorithme avec le modèle modifié (paramètres sous forme de variables (exemple : $c_j = 1 + 2*\lambda$)) ;
- soit on repart du tableau final obtenu avec le modèle original et on détermine une solution optimale du modèle modifié.

Dans ce chapitre, nous envisageons la deuxième piste. Celle-ci fournit en effet une meilleure vision du degré de stabilité de la solution optimale. De plus, nous ne modifierons que les coûts de la fonction économique (c_j) ou les coefficients indépendants des contraintes (b_i).

2. Rappels

Une compagnie fabrique deux produits qui passent successivement dans trois ateliers. Voici les données pertinentes pour la prochaine production mensuelle :

Atelier	Durée du traitement (en h/tonne)		Temps disponible (en h)
	P_1	P_2	
A_1	4	6	250
A_2	2	5	180
A_3	3	3	180
Profit (en euros/tonne)	4000	6500	

Les deux inconnues du problème sont donc la quantité en tonnes de chacun des produits ; elles sont notées x_1 et x_2.

Le problème initial à résoudre s'écrit :

$$Max\ z = 4000\ x_1 + 6500\ x_2$$

Sous les contraintes :

$$4\ x_1 + 6\ x_2\ \leq 250$$

$$2\ x_1 + 5\ x_2\ \leq 180$$

$$3\ x_1 + 3\ x_2\ \leq 180$$

$$x_1, x_2\ \geq 0$$

Où $x_1\ = quantité\ de\ tonnes\ de\ P_1$ et $x_2\ = quantité\ de\ tonnes\ de\ P_2$

Transformons le modèle :

$$Min - 4000\ x_1 -\ 6500\ x_2$$

Sous les contraintes :

$$4\ x_1 + 6\ x_2\ + e_1 \qquad = \ 250$$

$$2\ x_1 + 5\ x_2 \qquad + e_2 \qquad = 180$$

$$3\ x_1 + 3\ x_2 \qquad + e_3 = 180$$

$$x_1, x_2\ , e_2\ e_1, e_3\ \geq 0$$

L'algorithme du simplexe fournit les tableaux suivants :

			-4000	-6500	0	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
e_1	0	250	4	6	1	0	0
e_2	0	180	2	5	0	1	0
e_3	0	180	3	3	0	0	1
		FE=0	4000	6500	0	0	0

Pivot

			-4000	-6500	0	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
e_1	0	34	8/5	0	1	-6/5	0
x_2	-6500	36	2/5	1	0	1/5	0
e_3	0	72	9/5	0	0	-3/5	1
		FE=-234000	1400	0	0	-1300	0

Pivot

			-4000	-6500	0	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
x_1	-4000	21.25	1	0	5/8	-3/4	0
x_2	-6500	27.5	0	1	-1/4	½	0
e_3	0	33.75	0	0	-9/8	3/4	1
		FE=-263750	0	0	-875	-250	0

Interprétons la solution optimale.

Représentation graphique

Traçons les droites correspondant aux contraintes, à savoir :

$$4\,x_1 + 6\,x_2 = 250$$

$$2\,x_1 + 5\,x_2 = 180$$

$$3\,x_1 + 3\,x_2 = 180$$

Cf. feuille annexe.

(1) $4x_1 + 6x_2 = 250$

x_1	x_2
10	35
62,5	0

(2) $2x_1 + 5x_2 = 180$

x_1	x_2
0	36
10	32

(3) $3x_1 + 3x_2 = 180$

x_1	x_2
0	60
60	0

FE $4000 X_1 + 6500 X_2 = \text{cste}$

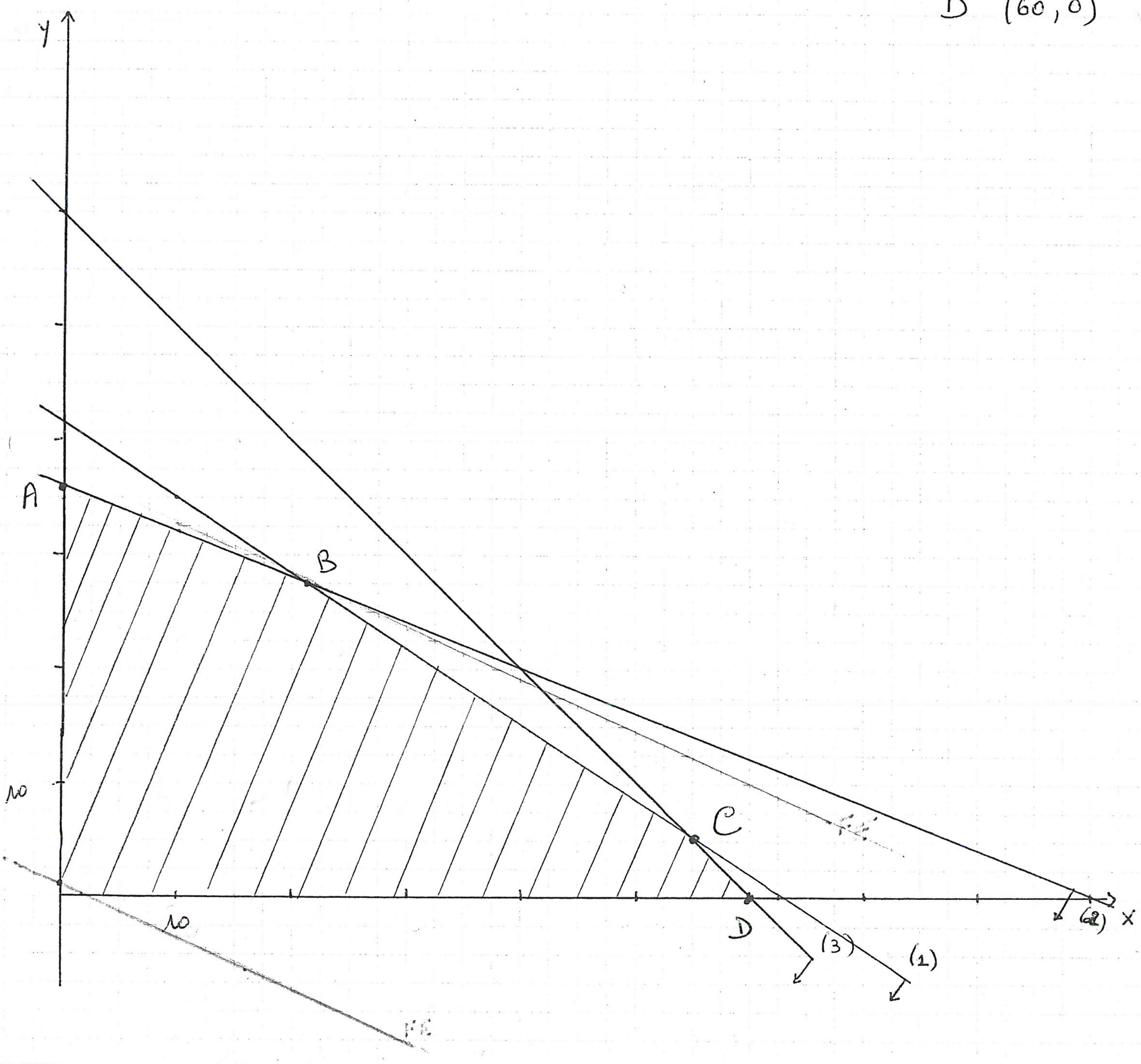
/// : région admissible

A (0, 36)

B (21,25 ; 27,5)

C (55, 5)

D (60, 0)



3. Variation d'un coefficient de FE (c_i)

On songe à augmenter le prix de vente du produit P_1. Supposons que celui-ci passe à 4 200 euros/tonne. Cette modification a-t-elle un impact sur la solution optimale ?
Vu le nombre d'inconnues dans ce modèle, à savoir 2, nous pouvons mener une réflexion géométrique dans un premier temps.

a. APPROCHE GEOMETRIQUE

On peut écrire la FE sous la forme suivante :

$$Max\ \ z = k\,x_1 + \ 6\,500\,x_2 \ \ \text{où } k \textit{ est une constante représentant le prix de vente}$$

Quelle est la pente de la droite ?

$$x_2 = \frac{-k\,x_1}{6500}$$

Quelle est la conséquence si la constante k augmente fortement ?

Coefficient ↗ droite

Si les valeurs de k diminuent ?

Coefficient ↘ droite

Considérons deux cas.

- Prenons celui qui nous intéresse k = 4200.

Conclusion :

- Prenons une valeur de k plus élevée 6500.

Conclusion :

b. APPROCHE ALGEBRIQUE

Lorsque le nombre de variables est supérieur à deux, il est impossible d'utiliser une approche géométrique. Il est alors nécessaire de recourir à une approche algébrique.
Le principe est de repartir du tableau final obtenu au point 2 et de faire les modifications nécessaires sachant qu'à présent, la FE prend la forme suivante :

$$Max\ (4000 + \Delta)\ x_1 + 6500\ x_2 = \text{Max ancienne fonction économique} + \Delta\ x_1$$
$$\text{où } \Delta \text{ est une constante positive ou négative}$$

On a donc

			$-(4000+\Delta)$	-6500	0	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
x_1	$-(4000+\Delta)$	21.25	1	0	5/8	-3/4	0
x_2	-6500	27.5	0	1	-1/4	½	0
e_3	0	33.75	0	0	-9/8	-3/4	1
FE = -263 750 – 21.25 Δ			0	0	~~-875~~ $-875-\Delta\frac{5}{8}$	~~-250~~ $-250+\frac{3}{4}\Delta$	0

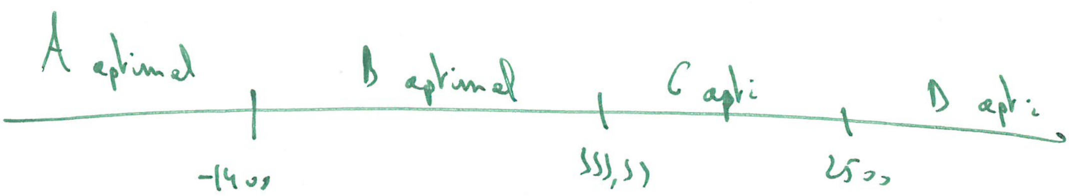
Nous devons modifier deux valeurs dans la dernière ligne du tableau, à savoir -875 et -250.

Pour rester optimal

$$\begin{cases} -875 - \frac{5}{8}\Delta \leq 0 \\ -250 + \frac{3}{4}\Delta \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \Delta \geq -1400 \\ \Delta \leq \frac{1000}{3} \end{array}$$

$$-1400 \leq \Delta \leq 333,33$$

Si Δ < à -1400 -> valeur positive donc repivoter
Si Δ > 333,33 -> valeur positive donc repivoter



Discussion

Si les deux nouvelles valeurs restent négatives, l'optimum reste identique. Déterminons l'intervalle.

$$-1250 + \frac{\Delta}{2} < 0$$

$\Rightarrow$ opti tant que $\frac{\Delta}{2} < 1250$

$\Delta > 2500$

Au limite 2 sont optimum

Si Δ < -1400 ou encore 4000 + Δ < 2600, A est optimum

Nous effectuons de nouveaux pivotages :

			$-(4000+\Delta)$	-6500	0	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
x_1	$-(4000+\Delta)$	21.25	1	0	5/8	-3/4	0
x_2	-6500	27.5	0	1	-1/4	½	0
e_3	0	33.75	0	0	-9/8	3/4	1
			0	0	$-875 - 5/8\,\Delta$	$-250 + 3/4\,\Delta$	0

			$-(4000+\Delta)$	-6500	0	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
e_1	0	34	8/5	0	1	-6/5	0
x_2	-6500	36	2/5	1	0	1/5	0
e_3	0	72	9/5	0	0	-3/5	1
			$1400+\Delta$	0	0	-1300	0

Constatons :

Si Δ > 1000/3 ou (4000 + Δ) > 13000/3, ...

Reprenons le tableau de départ et pivotons.

			- (4000 + Δ)	-6500	0	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
x_1	- (4000 + Δ)	21.25	1	0	5/8	-3/4	0
x_2	-6500	27.5	0	1	-1/4	½	0
e_3	0	33.75	0	0	-9/8	3/4	1
			0	0	-875 -5/8 Δ	-250 +3/4 Δ	0

			- (4000 + Δ)	-6500	0	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
x_1	- (4000 + Δ)	55	1	0	-1/2	0	1
x_2	-6500	5	0	1	1/2	0	-2/3
e_2	0	45	0	0	-3/2	1	4/3
			0	0	-1250 + ½ Δ	0	1000/3 - Δ

Constatons :

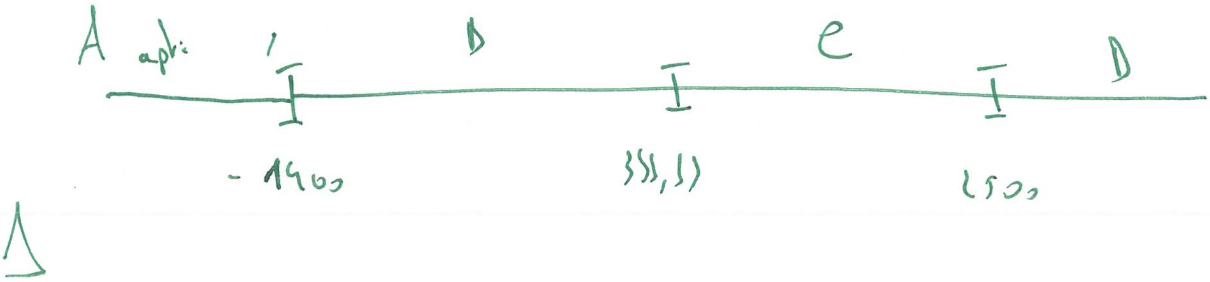
Si $\Delta > 2500$ ou $(4000 + \Delta) > 6500$, ...

Reprenons le tableau et pivotons.

			$-(4000+\Delta)$	-6500	0	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
x_1	$-(4000+\Delta)$	55	1	0	-1/2	0	1
x_2	-6500	5	0	1	1/2	0	-2/3
e_2	0	45	0	0	-3/2	1	4/3
			0	0	$-1250 + \frac{1}{2}\Delta$	0	$1000/3 - \Delta$

			$-(4000+\Delta)$	-6500	0	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
x_1	$-(4000+\Delta)$	60	1	1	0	0	1/3
e_1	0	10	0	2	1	0	-4/3
e_2	0	60	0	3	0	1	-2/3
			0	$2500 - \Delta$	0	0	$-(4000+\Delta) * 1/3$

Résumons sur une droite :



Imaginons que le bénéfice pour le produit 1 passe à 5000 euros. Que se passe-t-il ?

4. VARIATION D'UN TERME INDÉPENDANT (BI)

Supposons que le deuxième atelier dispose de 20 heures supplémentaires.

La deuxième contrainte devient donc :

$$2\,x_1 + 5\,x_2 \le 200$$

Ou

$$2\,x_1 + 5\,x_2 \le 180 + \Delta$$

Où Δ représente l'écart entre les heures réellement disponibles et les 180 heures tenues pour acquises dans le modèle d'origine.

Le tableau initial se voit complété d'une colonne.

				-4000	-6500	0	0	0
V_B	C_B	B	Δ	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
e_1	0	250	0	4	6	1	0	0
e_2	0	180	1	2	5	0	1	0
e_3	0	180	0	3	3	0	0	1
		FE=0	...	4000	6500	0	0	0

On constate que les colonnes associées au paramètre Δ et à la variable d'écart e_2 sont identiques et le resteront tout au long des itérations.

On obtient donc le tableau final suivant :

				-4000	-6500	0	0	0
V_B	C_B	B	Δ	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
x_1	-4000	21.25	-3/4	1	0	5/8	-3/4	0
x_2	-6500	27.5	1/2	0	1	-1/4	½	0
e_3	0	33.75	3/4	0	0	-9/8	3/4	1
		FE=-263750	-250 Δ	0	0	-875	-250	0

Interprétation des résultats en fonction de Δ

Quel est l'intervalle de variation de Δ pour que les conditions de positivité des variables soient respectées ?

$x_1 = 21,25 - 3/4\,\Delta \geq 0$ $\quad \Delta \leq 28,35$

$x_2 = 27,5 + 1/2\,\Delta \geq 0$ $\quad \Delta \geq -55$

$e_1 = e_2 = 0$ $\quad -45 \leq \Delta \leq 28,75$

$e_3 = 33,75 + 3/4\,\Delta$ $\quad \Delta \geq -45$

$FE = -265750 - 250\,\Delta$

Dans notre cas où Δ vaut 20, que se passe-t-il ?

$x_1 = 6,25$

$x_2 = 37,5$

$e_1 = e_2 = 0$

$e_3 = 33,75 + 15 = 48,75$ heures d'inactivité

$FE = -265750 - 250 \cdot 20$ → profite de 5k € en plus.

Imaginons que l'atelier 2 travaille 25 heures de moins. Que se passe-t-il ?

~~FE = -26375~~

5. Implémentation

L'analyse optimale doit donc fournir la solution optimale initiale complétée pour chaque c_j et pour chaque b_i, d'un intervalle de variation ou intervalle de sensibilité.

Tant que le paramètre appartient à cet intervalle, il est possible de déduire la nouvelle solution optimale de l'ancienne sans devoir poursuivre les pivotages.

Remarques :

- Si on modifie simultanément plusieurs c_j (ou plusieurs b_i), il ne suffit pas de vérifier que les nouveaux coefficients appartiennent tous aux intervalles de variation correspondants. Il faut reprendre le chemin des pivotages ou faire une analyse optimale conjointe (non vue dans ce cours).
- Si on modifie simultanément un c_j et un b_i, la solution finale s'obtient en traitant les deux changements séparément.

6. Exercices

1) Une usine produit des voitures de deux types, des berlines et des voitures sport. On y retrouve trois ateliers où la production des voitures des deux types s'effectue en parallèle.

<u>Atelier 1</u> : montage des moteurs
Monter un moteur requiert 3.5 heures de main d'œuvre dans le cas d'une berline et 4 heures dans le cas d'une voiture sport. Cet atelier dispose chaque mois de 1500 heures de main-d'œuvre.

<u>Atelier 2</u> : carrosserie
Une carrosserie de berline requiert 2 heures de main-d'œuvre ; pour la carrosserie d'une voiture sport, il faut prévoir une heure de plus. Cet atelier dispose de 2000 heures par mois.

<u>Atelier 3</u> : assemblage
Pour assembler une berline, il faut compter 1.5 heure ; pour assembler une voiture sport il faut une demi-heure de plus. Cet atelier peut assembler tout ce que produisent les ateliers 1 et 2.

Si l'on ne tient pas compte des coûts de main-d'œuvre, une berline rapporte 2345 euros et une voiture de sport 3456 euros. Les heures de main-d'œuvre reviennent chacune à 16 euros dans l'atelier 1, à 15 euros dans l'atelier 2 et à 12 euros dans l'atelier 3. Enfin, il est obligatoire de produire au moins 120 berlines par mois.

<u>Quelles sont les variables de décision ?</u>

Description du modèle

Voici le tableau optimal de ce modèle :

			-2241	-3323	0	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
X_2	-3323	270	0	1	0.25	0	0.875
e_2	0	950	0	0	-0.75	1	-0.625
X_1	-2241	120	1	0	0	0	-1
		FE=-1166130	0	0	-830.75	0	-666.25

a. Décrire le plan de production optimal. Dans quelles proportions les heures disponibles dans les ateliers 1 et 2 sont-elles utilisées ?
b. Supposons que l'on veuille porter à 128 le nombre de berlines produites sans modifier les disponibilités de main-d'œuvre des ateliers 1 et 2. De combien d'unités doit-on diminuer la production de voitures de sport ?
c. La direction voudrait produire 50 voitures de sport supplémentaires sans modifier le nombre de berlines produites. Un analyste affirme qu'il suffirait d'augmenter de 200 heures le temps disponible dans l'atelier 1. Que faut-il en penser ?
d. Supposons qu'on dispose de 500 heures en plus du temps prévu à répartir entre les ateliers 1 et 2. Un complément d'heures serait accordé à l'atelier 3 pour assembler la production supplémentaire des 2 premiers ateliers. Indiquez comment répartir ces 500 heures. Que deviendrait le plan de production optimal et de combien augmenterait la fonction économique ?

2) Une société de distribution d'aliments congelés transforme des pommes de terre en frites, en juliennes et en flocons à purée. La société se procure les pommes de terre auprès de deux fournisseurs. Chaque kilo de pommes de terre issu du premier fournisseur donne, après transformation, 200 g de frites, 200 g de juliennes, 300 g de flocons et 300 g de pertes irrécupérables. Ces poids sont respectivement de 300, 100, 270 et 330 pour le second fournisseur.
Les besoins de la clientèle limitent la production de frites à 18000 kg, celle de juliennes à 12000 kg et celle de flocons à 24000 kg.
Les fournisseurs ne pratiquent pas les mêmes prix, de sorte qu'un kg de pommes de terre acheté au premier producteur rapporte un profit égal à 6/5 du profit rapporté par un kg de pommes de terre du second fournisseur.

Quelles sont les variables de décision ?

Description du modèle

Voici le tableau optimal de ce modèle :

			-6	-5	0	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
x_2	-5	30000	0	1	5	-5	0
x_1	-6	45000	1	0	-2.5	7.5	0
e_3	0	2400	0	0	-0.6	-0.9	1
		FE=-420000	0	0	-10	-20	0

a. Interprétez le résultat.
b. Si la société retirait de chaque kilo de pommes de terre acheté du second fournisseur 6/5 des profits qu'elle retire de chaque kilo de pommes de terre acheté au premier, en quoi le plan optimal de production serait-il modifié ?
c. Que deviendrait le plan optimal si la demande de frites augmentait de 2000 kg ?
d. Quelle dépenses de publicité la société serait-elle prête à engager pour augmenter sa part de marché de 10% pour chacun des trois produits qu'elle commercialise ? Combien de kg de pommes de terre devrait-elle se procurer chez chacun de ses fournisseurs ?
e. L'acheteur de la société aimerait connaître quelles augmentations de la demande en frites, en juliennes et en flocons entraînerait à l'optimum l'achat de respectivement 45000 kg et 31000 kg de pommes de terre chez les deux fournisseurs.

3) Une usine assemble trois sortes de lampes dans trois ateliers. Le tableau ci-dessous résume les données pertinentes relatives à cette production.

Atelier	Temps d'assemblage (en min/lampe)			Temps disponible (en min)
	L_1	L_2	L_3	
A_1	1	2	1	500
A_2	3	0	2	460
A_3	2	8	0	840
Profit (en euros/lampe)	6	2	8	

Quelles sont les variables de décision ?

Description du modèle

Voici le tableau optimal de ce modèle :

			-6	-2	-8	0	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3
e_1	0	60	-1	0	0	1	-0.5	-0.25
x_3	-8	230	1.5	0	1	0	0.5	0
x_2	-2	105	0.25	1	0	0	0	0.125
		FE=-2050	-6.5	0	0	0	-4	-0.25

a. Interprétez le résultat.
b. Si le fabricant dispose d'une heure supplémentaire dans l'atelier A_1, que se passe-t-il ?
c. Comment devrait-on modifier le plan de production optimal si le temps disponible en A_3 chutait de 80 minutes ?
d. Comment seraient modifiés le plan de production optimal et la fonction économique si la marge bénéficiaire unitaire de la lampe L_1 était augmentée de 5 euros ?
e. S'il était possible de répartir les minutes inutilisées de l'atelier 1 entre les ateliers 2 et 3, comment devrait-on le faire ?

3.

Variable de décisions.

x_1, x_2, x_3

Ds.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 500 \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\ 2x_1 + 8x_2 \leq 840 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + e_1 = 500 & +60 \\ 3x_1 + 2x_3 + e_2 = 460 \\ 2x_1 + 8x_2 + e_3 = 840 & -80 \end{cases}$$

$FE = -(6x_1 + 2x_2 + 8x_3)$

↳ revenir à un minimum calcul.

a. Comp. $1 = 0$
$2 = 105$
$3 = 210$

l'atelier 1 ne travaille pas à 100% (-60 min)
les autres à 100%

profit max = 2050

$x1 = e_2 = e_3 = 0$

b.

V_B	C_B	B	Δ
e_1	0	60	1
x_3	-8	210	0
x_2	-2	105	0

$\Delta = 60 = 120$ min perdue

c.

V_B	C_B	B	Δ
e_1	0	60	$-0,25\Delta$
x_3	-8	210	0
x_2	-2	105	$0,125\Delta$
			$0,25\Delta$

$\Delta = -80$

$e_1 = 60 + 0,25 \cdot 80 = 80$ nulle si.

$x_3 = 210$

$x_2 = 105 + 0,125 \cdot (-80) = 95$

$FE = -2050 - 0,25 \cdot (-80) = -2030$

d). $\Delta = 5$

V_B	C_B	b	$-(6+\Delta)$ x_1	-2 x_2	-8 x_3	0 e_1	0 e_2	0 e_3
	0	60	-1					
	-8	210	1,5					
	-2	105	0,25					
			$-6,5+\Delta$					

c_{j1} négatif donc on change pas car ~~plus~~ pas plus de simplex

e. $\Delta_2 + \Delta_3 = \Delta_1 = -60$

Δ_1	Δ_2	Δ_3
1	$-0,5$	$-0,25$
0	0,5	0
0	0	0,125
0	-4	$-0,25$

$e_1 = 60 + \Delta_1 - 0,5\Delta_2 - 0,25\Delta_3$

$x_3 = 210 + 0,5\Delta_2$ 250

$x_2 = 105 + 0,125\Delta_3$

$FE = -2050 - 4\Delta_2 - 0,25\Delta_3$ $-2050 - 4.40 - 0$ $= -2210$

$\begin{cases} \Delta_3 = 0 \\ \Delta_2 = -\Delta_1 \end{cases}$ peut-on?

x_2 = ne chang pas

$x_3 = 210 + 20 \rightarrow$ OK

$e_1 = 60 + \Delta_{12} - 0,5\Delta_2$

$60 - 1,5\Delta_2 = \Delta_2 \leq 40$

$60 - 1,5\Delta_2 \geq 0$ $\quad +1,5\Delta_2 \leq +60$

~~$60 - 1,5 \cdot 60$~~ 10 $\quad \Delta_2 \leq 40$

On met 40 min de Δ_1 à Δ_2

$B \quad \Delta$

0

1 idem que e1

0

0

→ recopier les valeurs de e_2

vérifier les contraintes d'intégrité

$$\begin{cases} x_1 = 21{,}25 - \frac{3}{4}\Delta & \geq 0 \\ x_2 = 27{,}5 + \frac{1}{2}\Delta & \geq 0 \\ e_1 = e_2 = 0 & \\ e_3 = 37{,}75 + \frac{3}{4}\Delta & \geq 0 \\ FE = -263750 - 250\Delta & \end{cases}$$

$\Delta \leq 28{,}33$

$\Delta \geq -55$

$\Delta \geq -45$

$-45 \leq \Delta \leq 28{,}75$

interpréter

$\Delta = 20 \Rightarrow$ sol idem : optimal

$\Delta = 20$

$x_1 = 6{,}25$

$x_2 = 37{,}5$

$e_1 = e_2 = 0$

$e_3 = 33{,}75 + 15 = 48{,}75$ h d'inactivité

$FE = \cancel{FE} = -263750 - 5000$ profit de 5k €

Exercices.

1)

Variable de décisions.

x_1 = nombre de voiture Berline

x_2 = nombre de voiture sport.

$$\begin{cases} 1500 \geq 3{,}5\,x_1 + 4\,x_2 \\ 2000 \geq 2\,x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 \geq 120 \end{cases}$$

$3{,}5\,x_1 + 4x_2 + c_1 = 1500$

$2x_1 + 3x_2 + c_2 = 2000$

$x_1 + c_3 = 120$

Description du modèle

$Max = 2345\,x_1 + 3456\,x_2 | -3{,}5 \cdot 16\,x_1 - 4 \cdot 16\,x_2 |$ atelier 2 coût main d'oeuvre

$Min \cdot -1.$ $| -2 \cdot 15\,x_1 - 3 \cdot 15\,x_2 |$ atelier 3 " " "

$| -1{,}5 \cdot 12\,x_1 - 2 \cdot 12\,x_2 |$

$FE = -2241\,x_1 - 3323\,x_2$

a). Profit Max = 1 166 130

$x_1 = 120$ $x_2 = 270$

$e_1 = 0$ -> atelier 1 fonctionne à 100%

$e_2 = 950$ -> atelier 2 fonction à $\frac{1050}{2000}$ %

b).

regarder les contraintes.

C_1. $3{,}5 \times 128 + 4\,x_2 = 1500$

$x_2 = 263$

vérifier C_2

↳ OK

$2 \times 128 + 4 \times 2 = 2000$

$4\,x_2 = 1744$

$x_2 = 436$

c)

nouv contrainte

$C_1 \quad 3,5 \times 120 + 4.(270 + 50) = 1500 + 200$

$C_2 \quad 2 \times 120 + 3.(270 + 50) = 1200$

d) $\Delta_1 + \Delta_2 = 500$

$$\begin{cases} 1500 + \Delta_1 \geq 3,5\, x_1 + 4\, x_2 \\ 2000 + \Delta_2 \geq 2\, x_1 + 3\, x_2 \\ x_1 \geq 120 \end{cases}$$

V_B	q_B	$\cancel{B}$	Δ_1	Δ_2
x_2	270		0,25	0
e_2	950		-0,75	1
x_1	120		0	0
			-830,75	0

subissent les mêm transfo que e_1 et e_2.

$x_1 = 120$

$x_2 = 270 + 0,25\, \Delta_1$ sgr

$e_1 = e_1$ = ne change pas

$e_2 = 950 - 0,75\, \Delta_1 + \Delta_2$

$FE = FE_{\text{ancien}} - 830\, \Delta_1$ → minimiser ⇒ $\cancel{x}$ Δ_1 max $= 500$

a. Approche Géométrique

$4000 + \Delta$

prix de vente

p. droite :

$XL = \frac{-4}{6500} x_1$

conséquence :

si $K \nearrow$ |coefficient| $\nearrow$ droite

si $K \searrow$ |coefficient| $\searrow$ droite

ccl.

la droite se redresse légèrement mais la solution reste inchangée.

$k = 6500$

ccl

C devient la solution optimale.

~~375~~ ~~250~~ $\quad 375 - \Delta 5/8 \quad 250 + \Delta 3/4$

≤ 0

pour rester optimale.

$$\begin{cases} -375 - \Delta 5/8 \leq 0 \\ -250 + \Delta 3/4 \leq 0 \end{cases}$$

~~$\Delta 5/8 \leq 375 \cdot 8$~~ $\quad \Delta \leq \frac{375 \cdot 8}{5}$

$-375 \leq \Delta 5/8$

$\Delta \geq -1400$

$\Delta \leq \frac{1000}{3} = 333,33$

$-1400 \leq \Delta \leq 333,33 \Rightarrow$ B optimum.

A optimal — B opti — C opti — D opti

$-1400 \quad 333,33 \quad 2500$

Si $\Delta \leq -1400$ -> valeur positive => re pivoter

Si $\Delta \geq 333,33$ -> valeur positive -> pivot

Discussion.

$-12500 + \Delta/2 < 0 \Leftrightarrow$ opt. tant que $\frac{\Delta}{2} < 12500$

$\Delta > 25000$

A la limite deux sont optimum.

Si $4000 + \Delta = 5000$

$\Rightarrow$ C devient optimum.

2.

VD.

$x_1 = 45000$ $e_3 = 2400$ → difference entre demande/produit.

$x_2 = 30000$ Frite et Juliette autant que la demande.

FE = 420000 profit optimal

Model

Profit = $(\frac{6}{5} x_1 + x_2)\, x$ e_1 e_2

b. inversi les valeurs

$(x_1 + \frac{6}{5} x_2) \cdot x$ -17,5 -7,5

FE = 405 000

$\Delta_1 = 2000$

c.

V	C_B	B	Δ_1	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
x_2	-5	30000	5	0	1	5	-5	0
x_1	-6	31500	-2,5	1	0	-2,6	7,5	0
e_2	0	2400	-0,6	0	0	-0,6	-0,1	1
	FE	420000	$-10\,\Delta_1$	0	0	-10	-20	.

iden e_1

$x_2 = 40000$

$x_1 = 40000$

$e_3 = 1200$ produit plus de flacon

d.

$\Delta_1 = 1800$

$\Delta_2 = 1200$

$\Delta_3 = 2400$

$x_2 = 30000 + 5 \cdot 1800 - 5 \times 1200 = 33000$

$x_1 = 45000 + \cancel{8 \cdot 1200} - 2{,}5 \cdot 1800 + 7{,}5 \cdot 1200$
$= 49500$ =

~~E~~

V	C_B	B	Δ_1	Δ_2	Δ_3	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
x_2			5	-5	0					
x_1			-2,5	7,5	0					
e_2			-0,6	-0,1	1					

Δ Profit = 42000 ⇒ Max 42000 pour €

e.

V_B	C_B	B	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	Δ_1	Δ_2	Δ_3
x_2	-5	30 000	0	1	5	-5	0	5	-5	0
x_1	-6	55 000	1	0	-2,5	7,5	0	-2,5	7,5	0
e_3	0	420 000 → 2400	0	0	-0,1	-0,9	1	-0,1	-0,9	1
			0	0	-10	-20	0	-10	-20	0

prend les valeurs de e

$x_2 = 30\,000 + 5\Delta_1 - 5\Delta_2$

$x_1 = 55\,000 - 2,5\Delta_1 + 7,5\Delta_2$

$e_3 = 2400 - 0,1\Delta_1 - 0,9\Delta_2 + \Delta_3$

$FE = 420\,000 - 10\Delta_1 - 20\Delta_2$

On veut

$x_2 = 31\,000$ et $x_1 = 55\,000$

$$\begin{cases} 1000 = 5\Delta_1 - 5\Delta_2 \\ 2,5\Delta_1 = 7,5\Delta_2 \\ e_3 = 2400 - 0,1\Delta_1 - 0,9\Delta_2 + \Delta_3 \end{cases}$$

$\Delta_1 = 3\Delta_2$

$1000 = 15\Delta_2 - 5\Delta_2 = 10\Delta_2$ $\Rightarrow \Delta_2 = 100$
$\Rightarrow \Delta_1 = 300$
$\Delta_3 = 0$

signifie que l'on la demande en frite doit augmenter de 300 kg et que la demande en juliette augmente de 100 kg.

Si dès le départ on avait eu 18300 → on aurait eu ses conditions là.