Chern-Simons 形式の導出のメモ

岡田 大 (Okada Masaru)

September 30, 2025

Abstract

忘備録。Chern-Simons 3-形式 $\omega_3 = \mathrm{tr}\left(AdA + \frac{2}{3}A^3\right)$ を空で導出できるようにメモ。

1 p-形式の共変微分

外微分 d, 接続 A, 共変微分 $D = d + A$, 曲率 $F = D^2 = dA + A^2$ のように書く。
p-形式 C、適当な微分形式 ϕ に対して、

$$d(C\phi) = (dC)\phi + (-1)^p C d\phi$$

ここで接続 A を入れて外微分を共変微分に $d \to D$ と置き換えると、

$$D(C\phi) = (DC)\phi + (-1)^p C D\phi$$

移行して整理すると、

$$(DC)\phi = D(C\phi) - (-1)^p C D\phi$$

$$= (dC)\phi + (AC)\phi - (-1)^p CA\phi$$

$$= \big(dC + [A, C]\big)\phi$$

ここで、

$$[A, C] = AC - (-1)^p CA$$

と置いた。
よって、p-形式 C に共変微分 D を作用させたものは

$$DC = dC + [A, C]$$

となる。

2 パラメータ付き接続の導入

ここで、$s \in \mathbb{R}$ として、 $A_s = sA$ とする。
対応して、

$$\begin{cases} D_s = d + sA \\ F_s = (D_s)^2 = sdA + s^2A^2 \end{cases}$$

このとき、

$$\begin{cases} \dfrac{dF_s}{ds} = dA + 2sA^2 = D_s A \\ D_s F_s = 0 \end{cases}$$

なども得られる。

3 Chern-Simons $2n-1$ 形式の導出

Chern-Simons $2n-1$ 形式 ω_{2n-1} の定義は

$$d\omega_{2n-1} = \mathrm{tr}F^n$$

ここで

$$\mathrm{tr}F^n = \int_0^1 ds \frac{d}{ds}\mathrm{tr}F_s^n$$

と書けることを用いる。

右辺の積分の中身は

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\mathrm{tr}F_s^n &= \mathrm{tr}\frac{dF_s^n}{ds} n F_s^{n-1} \\ &= n\ \mathrm{tr}(D_s A)F_s^{n-1} \\ &= n\ \mathrm{tr}D_s(AF_s^{n-1}) \end{aligned}$$

ここで、

$$D_s F_s^{n-1} = 0$$

を用いた。

さらに

$$D_s C = dC + [A_s, C]$$

を用いると、

$$n\ \mathrm{tr}D_s(AF_s^{n-1}) = n\ \mathrm{tr}D_s(AF_s^{n-1}) + [D_s, (AF_s^{n-1})]$$

第 2 項はゼロなので、結局

$$\frac{d}{ds}\ \mathrm{tr}F_s^n = d\Big(n\ \mathrm{tr}(AF_s^{n-1})\Big)$$

Chern-Simons 形式の定義に戻ると

$$d\omega_{2n-1} = d\Big(\int_0^1 ds\ n\ \mathrm{tr}(AF_s^{n-1})\Big)$$

$$\omega_{2n-1} = \int_0^1 ds\, n\, \mathrm{tr}(AF_s^{n-1}) \quad + \text{完全形式}$$

と書ける。

$n = 2$ のとき、

$$\omega_3 = \int_0^1 ds\ 2\ \mathrm{tr}A(sdA + s^2A^2) = \mathrm{tr}\left(AdA + \frac{2}{3}A^3\right)$$