

# テンソル代数

岡田 大 (Okada Masaru)

October 18, 2025

## Contents

1	線形写像が成す双対線形空間	1
1.1	ベクトル空間の双対空間 . . . . .	1
1.2	ベクトル空間の双対空間の双対空間 . . . . .	2
1.3	ベクトル空間の基底と双対基底 . . . . .	2
2	双線形空間	4
2.1	双線形関数全体のつくるベクトル空間 . . . . .	4
2.2	テンソル積 . . . . .	5
3	多重線形関数とテンソル空間	5
4	多項式代数	6
4.1	多項式の積 . . . . .	6
4.2	代数 (多元環) . . . . .	7
5	テンソル代数	7

## 1 線形写像が成す双対線形空間

### 1.1 ベクトル空間の双対空間

$V$  を有限次元のベクトル空間とする。

$V$  から  $\mathbb{R}$  への線形写像を  $V$  の上の線形写像と呼ぶ。

線形写像  $\varphi, \psi : V \rightarrow \mathbb{R}$  は和とスカラー積が定義できる。すなわち、実数  $\alpha$ 、 $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$  に対して

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}) \\ (\alpha\varphi)(\mathbf{x}) &= \alpha\varphi(\mathbf{x})\end{aligned}$$

和とスカラー積は線形性を持つ。 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$  に対して、

例えば和については、

$$\begin{aligned}
 (\varphi + \psi)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \psi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\
 &= \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) + \psi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{y}) \\
 &= \varphi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) + \psi(\mathbf{y}) \\
 &= (\varphi + \psi)(\mathbf{x}) + (\varphi + \psi)(\mathbf{y})
 \end{aligned}$$

同様にスカラー積も

$$\begin{aligned}
 (\alpha\varphi)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \alpha(\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})) \\
 &= \alpha\varphi(\mathbf{x}) + \alpha\varphi(\mathbf{y})
 \end{aligned}$$

$V$  上の線形写像全体の集合はまたベクトル空間を成す。

ベクトル空間の公理を満たすことは例えば、

$$\begin{aligned}
 \alpha(\varphi + \psi)(\mathbf{x}) &= (\alpha\varphi + \alpha\psi)(\mathbf{x}) \\
 (\alpha + \beta)\varphi(\mathbf{x}) &= (\alpha\varphi + \beta\varphi)(\mathbf{x})
 \end{aligned}$$

等から確かめられる。

$V$  上の線形写像全体のつくるベクトル空間を双対線形空間と呼び、 $V^*$  で表す。

## 1.2 ベクトル空間の双対空間の双対空間

$V^*$  の元の  $\varphi$  は対応  $\varphi: x \rightarrow \varphi(x)$  を与えていた。

このような視点では  $x$  は変数で、 $\varphi$  は線形関数のように見える。

さらにその双対空間を考える。このとき  $x$  が固定されており、 $\varphi$  の方が  $V^*$  上を自由に動くような変数のように見ることができる。記号で書くと以下のように見る。

$$x: \varphi \rightarrow \varphi(x)$$

どちらが変数なのか分かるように、 $x$  をひとつ固定して  $\varphi$  を動かす視点のときは  $\tilde{x}$  と書くことにする。すなわち、

$$\tilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$$

このとき線形空間で満たされていた、例えば以下の等式

$$\begin{aligned}
 (\varphi + \psi)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= (\varphi + \psi)(\mathbf{x}) + (\varphi + \psi)(\mathbf{y}) \\
 (\alpha\varphi)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \alpha\varphi(\mathbf{x}) + \alpha\varphi(\mathbf{y})
 \end{aligned}$$

これらの等式はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 (\tilde{x} + \tilde{y})(\varphi + \psi) &= \tilde{x}(\varphi + \psi) + \tilde{y}(\varphi + \psi) \\
 (\tilde{x} + \tilde{y})(\alpha\varphi) &= \alpha\tilde{x}(\varphi) + \alpha\tilde{y}(\varphi)
 \end{aligned}$$

のように視点を変えて見える。

この  $\tilde{x}$  は  $V^*$  の双対空間の元になっているので、 $\tilde{x} \in V^{**}$  と表す。

## 1.3 ベクトル空間の基底と双対基底

### 1.3.1 ベクトル空間の基底

$V$  は有限次元のベクトル空間であり、その次元を  $n$  とする。また、その基底を  $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$  と表すと、 $\mathbf{x} \in V$  は

$$\begin{aligned}
 V \ni \mathbf{x} &= x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + \dots + x^n e_n \\
 &= \sum_{k=1}^n x^k e_k
 \end{aligned}$$

と表される。

### 1.3.2 双対基底

$V^*$  を考えると、その元は線形写像  $\varphi$  であった。 $V^*$  の基底を考えたいので、基底の記号らしく線形写像を ( $\varphi$  やではなく)  $e^k$  のように表すと、線形写像  $\{e^1, e^2, e^3, \dots, e^n\}$  によって  $V^*$  は張られる。 $\varphi(e_1) = a_1, \varphi(e_2) = a_2, \dots, \varphi(e_n) = a_n$  と置いて、この記法で  $\varphi \in V^*$  は

$$\begin{aligned} V^* \ni \varphi &= a_1 e^1 + a_2 e^2 + a_3 e^3 + \dots + a_n e^n \\ &= \sum_{k=1}^n a_k e^k \end{aligned}$$

と表される。

$V$  の基底  $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$  に対して、 $V^*$  の基底、すなわち複数の線形写像たち  $\{e^1, e^2, e^3, \dots, e^n\}$  を双対基底と呼ぶ。

### 1.3.3 双対空間の双対空間 $V^{**}$ の双対基底

双対基底の定義

$$\begin{aligned} V^* \ni \varphi &= a_1 e^1 + a_2 e^2 + a_3 e^3 + \dots + a_n e^n \\ &= \sum_{k=1}^n a_k e^k \end{aligned}$$

これを用いると、ベクトル空間との基底との対応は以下になる。

$$V^* \ni x^i = e^i(x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + \dots + x^n e_n)$$

ここで  $j$  成分の係数を 1、 $j$  成分以外の係数をすべて 0 とすると、

$$e^i(0e_1 + 0e_2 + \dots + 1e_j + \dots + 0e_n)$$

これより、次の基底の間の関係式が得られる。

$$e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & (i = j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases}$$

#### ■ $V$ と $V^{**}$ の 1 対 1 対応

$x, y \in V$  と  $\tilde{x}, \tilde{y} \in V^{**}$  に対して、 $x \neq y \Rightarrow \tilde{x} \neq \tilde{y}$  が成り立つ。

なぜならば、

$$x = \sum_{k=1}^n x^k e_k, \quad y = \sum_{k=1}^n y^k e_k$$

と表すと、 $x \neq y$  であれば、ある  $j$  に対して  $x^j \neq y^j$  が成り立つ。

双対基底として  $\{e^1, e^2, e^3, \dots, e^n\}$  を取ると、

$$\tilde{x}(e^j) = e^j(x) = x^j, \quad \tilde{y}(e^j) = e^j(y) = y^j$$

なので、 $\tilde{x}$  と  $\tilde{y}$  は  $e^j$  における値が異なる。よって、 $x \neq y \Rightarrow \tilde{x} \neq \tilde{y}$  が言える。

#### ■ $V^{**}$ の双対基底

$V^*$  の双対基底と  $V$  の基底との間の関係式

$$e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & (i = j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases}$$

これについて  $V^{**}$  の元を用いて表すと、

$$\tilde{e}_i(e^j) = \begin{cases} 1, & (i = j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases}$$

であるが、これは  $V^{**}$  の双対基底  $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \dots, \tilde{e}_n\}$  が  $V^*$  の双対基底  $\{e^1, e^2, e^3, \dots, e^n\}$  の双対基底となっていることを表している。

ここまでの別の表現でまとめると、

$V$  と  $V^{**}$  の 1 対 1 対応

$V$  から  $V^{**}$  への 1 対 1 の写像  $\Phi: V \rightarrow V^{**}$  があり、これは

$$\Phi: V \ni x = \sum_{k=1}^n x^k e_k \mapsto \tilde{x} = \sum_{k=1}^n x^k \tilde{e}_k \in V^{**}$$

と表される。

## 2 双線形空間

ここまではベクトル空間の双対はベクトル空間であり、その双対もまた（線形写像の集合がつくる）ベクトル空間であるということで、話がベクトル空間で閉じていた。ここからベクトル空間を拡張していくことを考える。

$V^* \times V^*$  という直積集合を考える。

$$V^* \times V^* = \{ (\tilde{x}, \tilde{y}) \mid \tilde{x} \in V^*, \tilde{y} \in V^* \}$$

この  $V^* \times V^*$  上で定義される 2 変数関数  $\varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$  の双線形性を次で定義する。

双線形関数

$V^* \times V^*$  上で定義される 2 変数関数  $\varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$  が次の性質（双線形性）を満たすとき、 $V^*$  上の双線形関数という。（ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ）

1.  $\varphi(\alpha\tilde{x} + \beta\tilde{x}', \tilde{y}) = \alpha\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) + \beta\varphi(\tilde{x}', \tilde{y})$
2.  $\varphi(\tilde{x}, \alpha\tilde{y} + \beta\tilde{y}') = \alpha\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) + \beta\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}')$

双線形関数とは、各変数について線形な関数である。

### 2.1 双線形関数全体のつくるベクトル空間

#### ■双線形関数の和とスカラー倍

$V^*$  上の双線形関数  $\varphi, \psi$  について、 $\varphi + \psi$ ,  $\alpha\varphi$  もまた双線形関数になる（ $\alpha \in \mathbb{R}$ ）。

つまり、 $V^*$  上の双線形関数全体はベクトル空間をつくる。

$V^*$  上の双線形関数全体のつくるベクトル空間を  $L_2(V^*)$  と表すことにする。添え字の 2 は 2 変数であることを意味する。

この書き方を用いると、 $V^*$  上の線形関数全体のつくるベクトル空間  $V^{**}$  は  $L_1(V^*)$  と表すことができる。そしてこのベクトル空間  $L_1(V^*)$  は  $V$  と同一視できるのであった。

$$V = L_1(V^*)$$

## 2.2 テンソル積

$L_1(V^*)$  と  $L_2(V^*)$  をつなぐ演算として、テンソル積を導入する。

テンソル積

$V \otimes V = L_2(V^*)$  とおく。ベクトル空間  $V \otimes V$  を  $V$  の 2 階のテンソル積と呼ぶ。

この記法では、

$$V = L_1(V^*)$$

$$V \otimes V = L_2(V^*)$$

となり、さらに高階のテンソル積の定義に役に立つ。

$x, y \in V, \tilde{x}, \tilde{y} \in V^*$  に対して、

$$x \otimes y(\tilde{x}, \tilde{y}) = x(\tilde{x})y(\tilde{y})$$

と定めると、これは  $V^* \times V^*$  から  $\mathbb{R}$  への写像となる。

$$x \otimes y : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

この写像はテンソル積の元となる。

$$x \otimes y \in V \otimes V$$

## 3 多重線形関数とテンソル空間

テンソル積の記法を重ねることで多重線形関数とテンソル空間を定義することができる。

$k$  重線形関数

$V^*$  の  $k$  個の直積集合  $V^* \times \cdots \times V^*$  上で定義された関数  $\varphi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_k)$  が次の性質を満たすとき、 $\varphi$  を  $V^*$  上の  $k$  重線形関数と呼ぶ。

$$\varphi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1, \cdots, \alpha \tilde{x}_i + \beta \tilde{y}_i, \cdots, \tilde{x}_k) = \alpha \varphi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_i, \cdots, \tilde{x}_k) + \beta \varphi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1, \cdots, \tilde{y}_i, \cdots, \tilde{x}_k)$$

$V^*$  上の  $k$  重線形関数全体のつくる集合もまたベクトル空間となり、これを  $L_k(V^*)$  と表す。

ベクトル空間とするには  $\varphi, \psi \in L_k(V^*), \alpha \in \mathbb{R}$  に対して、加法とスカラー積をそれぞれ次のように定義する。

$k$  重線形関数の加法とスカラー積

$$(\varphi + \psi)(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_k) = \varphi(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_k) + \psi(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_k)$$

$$(\alpha \varphi)(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_k) = \alpha \varphi(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_k)$$

自然数  $k$  を動かすと  $k$  重線形関数のつくるベクトル空間の系列が得られる。

$$L_1(V^*), L_2(V^*), L_3(V^*), \dots, L_k(V^*), \dots$$

$L_2(V^*)$  を  $V \otimes V$  と表したように、一般の  $k$  重線形空間の成すベクトル空間を  $k$  階テンソル空間と呼び、以下のように定義する。

$k$  階テンソル空間

$$L_k(V^*) = V \otimes V \otimes \dots \otimes V = \otimes^k V$$

記法を変えただけであるが、今先ほどの  $k$  重線形関数のつくるベクトル空間の系列は以下のように表される。

$$\otimes^1 V (= V), \otimes^2 V, \otimes^3 V, \dots, \otimes^k V, \dots$$

双線形空間の場合と同様に、 $V$  の  $k$  個の元  $x_1, x_2, \dots, x_k$  に対してそのテンソル積は次のような写像であると定義できる。

$$\otimes^k V \ni x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_k : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_k (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \tilde{x}_1(x_1) \dots \tilde{x}_k(x_k)$$

用語の注意として、「テンソル積」というと積の演算子をイメージしてしまうかもしれないが、そうではなく、テンソル積とは「実数に写す写像」であることに留意する。

## 4 多項式代数

### 4.1 多項式の積

テンソル代数の導入の前に、もっとイメージのわきやすい身近な多項式の代数について考えてみる。

まず、 $k$  次の単項式全体  $\mathbf{P}^k = \{ax^k \mid a \in \mathbb{R}\}$  を考える。

この  $\mathbf{P}^k$  は  $\mathbb{R}$  と同型な 1 次元のベクトル空間になっている。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^0 &\ni a_0 \\ \mathbf{P}^1 &\ni a_1 x \\ \mathbf{P}^2 &\ni a_2 x^2 \\ \mathbf{P}^3 &\ni a_3 x^3 \\ &\vdots \\ \mathbf{P}^k &\ni a_k x^k \\ &\vdots \end{aligned}$$

これらはそれぞれ集合は非交差であり、ベクトル空間の非交差和を直和と呼び、 $\oplus$  を用いて表現すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^0 &\ni a_0 \\ \mathbf{P}^0 \oplus \mathbf{P}^1 &\ni a_0 + a_1 x \\ \mathbf{P}^0 \oplus \mathbf{P}^1 \oplus \mathbf{P}^2 &\ni a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ \mathbf{P}^0 \oplus \mathbf{P}^1 \oplus \mathbf{P}^2 \oplus \mathbf{P}^3 &\ni a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ &\vdots \\ \mathbf{P}^0 \oplus \mathbf{P}^1 \oplus \mathbf{P}^2 \oplus \dots \oplus \mathbf{P}^k &\ni a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k \\ &\vdots \end{aligned}$$

単項式の積は

$$\mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^l = \mathbf{P}^{k+l} \ni a_k a_l x^{k+l}$$

で表せる。

多項式全体の集合  $\mathbf{P}$  は

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^0 \oplus \mathbf{P}^1 \oplus \mathbf{P}^2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{P}^k \oplus \cdots$$

このようにして用意した  $\mathbf{P}$  の中でも多項式の積や和が定義できることは経験的に私たちは知っている。

直和について便利な記号を導入しておく。

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^0 \oplus \mathbf{P}^1 \oplus \mathbf{P}^2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{P}^k \oplus \cdots = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}^k$$

## 4.2 代数 (多元環)

以上のように用意された  $\mathbf{P}$  は以下のような代数的な性質を持つ。

代数 (多元環)

1.  $\mathbf{P}$  は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間である。
2.  $\mathbf{P}$  は以下の性質を持つ乗法  $\times$  が定義されている。
  - (a)  $p, q, r \in \mathbf{P}$  は結合則が成り立つ:  $p \times (q \times r) = (p \times q) \times r$
  - (b)  $p, q, r \in \mathbf{P}$  は分配則が成り立つ:  $(p + q) \times r = p \times r + q \times r$ ,  $p \times (q + r) = p \times q + p \times r$
  - (c)  $a \in \mathbb{R}$ ,  $p, q \in \mathbf{P}$  に対して、 $a(p \times q) = ap \times q = p \times aq$
  - (d)  $1 \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbf{P}$  に対して、 $1p = p$

このような性質を持つ集合は一般に代数または多元環と呼ばれ、特に  $\mathbf{P}$  は多項式代数と呼ばれる。

## 5 テンソル代数

テンソル積の場合も単項式代数と同様に、 $\xi \in \otimes^k V$  と  $\eta \in \otimes^l V$  のテンソル積は  $\xi \otimes \eta \in \otimes^{k+l} V$  のような指数法則が成り立つ。

多項式代数と同様の構成でテンソル積についても代数の構造が得られ、それをテンソル代数と呼ぶ。

テンソル代数

ベクトル空間  $V$  に対して、

$$\begin{aligned} T(V) &= \mathbb{R} \oplus V \oplus (\otimes^2 V) \oplus (\otimes^3 V) \oplus \cdots \oplus (\otimes^k V) \oplus \cdots \\ &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k V \end{aligned}$$

で定義される空間  $T(V)$  は代数の定義を満たし、テンソル代数と呼ばれる。

満たしている代数の性質は以下になる。

### テンソル代数の性質

1.  $T(V)$  は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間である。
2.  $T(V)$  は以下の性質を持つ乗法  $\otimes$  が定義されている。
  - (a)  $\xi, \eta, \zeta \in T(V)$  は結合則が成り立つ:  $\xi \otimes (\eta \otimes \zeta) = (\xi \otimes \eta) \otimes \zeta$
  - (b)  $\xi, \eta, \zeta \in T(V)$  は分配則が成り立つ:  $(\xi \oplus \eta) \otimes \zeta = \xi \otimes \zeta \oplus \eta \otimes \zeta$ ,  $\xi \otimes (\eta \oplus \zeta) = \xi \otimes \eta \oplus \xi \otimes \zeta$
  - (c)  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\xi, \eta \in T(V)$  に対して、 $a(\xi \otimes \eta) = a\xi \otimes \eta = \xi \otimes a\eta$
  - (d)  $1 \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in T(V)$  に対して、 $1\xi = \xi$

ベクトル空間から双対ベクトル空間、双線形空間を経由してテンソル空間、そしてこのノートでは最終的にテンソル代数にまで到達することができた。

テンソル代数の元はテンソルであり、これから一般相対論が開かれる。

テンソル代数にイデアルを導入することで外積代数（グラスマン代数）が得られる。

外積代数は物理でも至るところで使われる。例えばチャーン-サイモンズ形式でも利用される。

グラスマン代数の元はフェルミオンとみなすことができ、多様な物理モデルを記述する。