ルンゲ＝クッタ法

Masaru Okada

October 24, 2025

1　オイラー法

まず、常微分方程式 (ODE) を数値的に解くための最も単純な方法を紹介する。これは（1 次の）ルンゲ＝クッタ法とも呼ばれる。対象とする方程式は、以下のように仮定する。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

ここで $f(x, y)$ は既知の関数である。記述を簡単にするため、$y_i = y(x_i)$ および $x_{i+1} = x_i + h$ とおく。初期条件 $(i = 0)$ は (x_0, y_0) で与えられるものとする。x のメッシュ幅 h を $|h| \ll 1$ となるように選べば、y_{i+1} は h についてテイラー展開できる。

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y(x_i + h) \\ &= y(x_i) \quad + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} h \quad + O[h^2] \\ &= y_i \quad + f(x_i, y_i)h + O[h^2] \end{aligned} \tag{2}$$

したがって、次式が得られる。

$$f(x_i, y_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \tag{3}$$

これは h の 1 次のオーダーまで正しい。解は以下の漸化式によって与えられる。

$$\begin{cases} x_{i+1} &= \quad x_i + h \\ y(x_{i+1}) &= \quad y(x_i) + f[x_i, y(x_i)] \end{cases} \qquad (x_0 \text{ is given.}) \tag{4}$$

2　2 次のルンゲ＝クッタ法（ホイン法）

同様にして、y_{i+1} を h について展開する。2 次のオーダーまで書き下すと、以下のようになる。

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y(x_i + h) \\ &= y(x_i) \quad + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=x_i} h^3 \quad + O[h^4]O[h^3] \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_{i+1} - y_i \\ &= y_1 - y_0 \\ &= y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 \end{aligned} \tag{6}$$

先ほどは $y'(x_0)$ の値を用いたが、今回はそれに加えて $y'(x_1)$ という別の値も選んでみる。

$$\Delta y = h[\alpha y'(x_0) + \beta y'(x_1)] \tag{7}$$

ただし α と β は未定の定数である。ここで $\beta y'(x_1)$ も同様に展開できる。

$$\begin{aligned} \beta y'(x_1) &= \beta y'(x_0 + h) \\ &= \beta[y'(x_0) + hy''(x_0) + O(h^2)] \end{aligned} \tag{8}$$

よって、

$$\Delta y = (\alpha + \beta)y'(x_0)h + \beta y''(x_0)h^2 \tag{9}$$

式 (6) と式 (9) を比較すれば、パラメータは $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$ と決定される。最終的に、2 次のオーダーでの漸化式は以下のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k_{1n} &=& hf(x_n, y_n) \\ k_{2n} &=& hf(x_n + h, y_n + k_{1n}) \\ y_{n+1} &=& y_n + \dfrac{1}{2}(k_{1n} + k_{2n}) \end{array} \right. \tag{10}$$

これは「**ホイン (Heun) 法**」と呼ばれ、オイラー法よりも精度の高い解を与える。

3　4 次のルンゲ＝クッタ法（RK4）

同様の手順で、h の 4 次のオーダーまで考慮すると、以下の漸化式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k_{1n} &=& hf(x_n, y_n) \\ k_{2n} &=& hf(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_1}{2}) \\ k_{3n} &=& hf(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_2}{2}) \\ k_{4n} &=& hf(x_n + h, y_n + k_{3n}) \\ y_{n+1} &=& y_n + \dfrac{1}{6}(k_{1n} + 2k_{2n} + 2k_{3n} + k_{4n}) \end{array} \right. \tag{11}$$

RK4 は、常微分方程式の数値解法として、しばしば最も合理的な手法とされる。これ以上高次の（例えば 5 次以上の）ルンゲ＝クッタ計算を用いても、同じ精度を得るために RK4 よりも多くの計算時間を要する場合があり、計算コストに見合わないことがある。