モナドと随伴

岡田 大 (Okada Masaru)

November 22, 2025

Contents

1 定義

1.1 随伴の定義

圏 C, D に対して、関手 $F : C \to D$ 、$G : D \to C$ がある。「このとき F と G は随伴である」とは、記号では $F \dashv G : C \to D$ と書き、随伴関係

$$\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \cong \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$$

が存在すること。ここで $c \in C,\ d \in D$ 。

これらから自然変換 $\eta : 1_C \to GF$（単位)、$\varepsilon : FG \to 1_D$（余単位)、が構成できて、単位と余単位は以下の三角等式を満たす。

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

数式で書けば以下の通りである。

$$G\varepsilon \circ \eta G = 1_G$$

$$\varepsilon F \circ F\eta = 1_F$$

1.2 モナドの定義

C 上のモナド (T, η, μ) は以下で定義される。

1.2.1 自己関手

$$T = G \circ F = GF : C \to C$$

1.2.2 単位

随伴の単位をそのまま使う：

$$\eta : 1_C \to GF = T$$

1.2.3 乗法

乗法は随伴の余単位 ε を G と F で挟んで構成する。

$$\mu = G\varepsilon F : GFGF \to GF$$

すなわち、

$$\mu : T^2 \to T$$

2 モナドになることの確認

2.1 結合律: (T, η, μ) がモナドになることの確認 1

(T, η, μ) がモナドであるためには、以下の図式が可換である必要がある。

$$\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}$$

すなわち、

$$\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$$

これを G, F, ε で書くと、

$$T\mu = GF(G\varepsilon F) = GFG\varepsilon F$$

$$\mu T = (G\varepsilon F)GF = G\varepsilon FGF$$

なので、示すべき式は

$$G\varepsilon F \circ GFG\varepsilon F = G\varepsilon F \circ G\varepsilon FGF$$

すなわち、

$$G(\varepsilon \circ FG\varepsilon)F = G(\varepsilon \circ \varepsilon FG)F$$

である。ここで両端の G, F を外した核となる部分は、自然変換 ε の $FG \xrightarrow{\varepsilon} 1_D$ に対する自然性（Naturality）の可換図式そのものである。

$$\begin{tikzcd}
FGFG \arrow[r, "FG\varepsilon"] \arrow[d, "\varepsilon_{FG}"'] & FG \arrow[d, "\varepsilon"] \\
FG \arrow[r, "\varepsilon"'] & 1_D
\end{tikzcd}$$

この可換性 $\varepsilon \circ FG\varepsilon = \varepsilon \circ \varepsilon FG$ より、結合律は直ちに従う。

2.2 単位律: (T, η, μ) がモナドになることの確認 2

(T, η, μ) がモナドであるためには、以下の図式が可換である必要がある。

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "1_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "1_T"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

すなわち、右単位律 $\mu \circ T\eta = 1_T$ と、左単位律 $\mu \circ \eta T = 1_T$ を満たす必要がある。

2.2.1 右単位律の確認

定義より

$$\mu \circ T\eta = (G\varepsilon F) \circ (GF\eta) = G(\varepsilon F \circ F\eta)$$

ここで随伴の三角等式 $\varepsilon F \circ F\eta = 1_F$ を用いると、

$$\mu \circ T\eta = G(1_F) = 1_{GF} = 1_T$$

となり成立する。

2.2.2 左単位律の確認

同様に、

$$\mu \circ \eta T = (G\varepsilon F) \circ (\eta GF) = (G\varepsilon \circ \eta G)F$$

ここでも随伴の三角等式 $G\varepsilon \circ \eta G = 1_G$ を用いると、

$$= (1_G)F = 1_{GF} = 1_T$$

となり成立する。

3 結論

以上から、随伴 $F \dashv G$ から構成される C 上のモナド $(T = GF, \eta, \mu = G\varepsilon F)$ は結合律と左右の単位律を満たすのでモナドになる。