複製ポートフォリオを用いた ヘッジポートフォリオの構築戦略

岡田 大 (Okada Masaru)

2025 年 10 月 1 日

概要

複製ポートフォリオを用いたヘッジポートフォリオの構築戦略の概要を述べます。

1　複製ポートフォリオ構築の概略

これから述べる複製戦略は以下 3 段階に沿って進めます。

1. 割引株価過程 Z_t をマルチンゲールにする測度 $\mathbb{Q}$ を見つける。
2. 契約を過程に変換する。 $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t)$
3. $dE_t = \phi_t dZ_t$ となる可予測過程 ϕ_t を見つける。

このステップについてざっくりとまとめます。
定理の証明が必要であればそれに応じて適当な教科書や文献を見てください。
細かいことは置いておいてまずは全体像を確認するためのメモとなります。
最初にこの 3 ステップを無リスク金利がゼロ（$r = 0$）である簡単な場合で試します。
その次に無リスク金利がゼロで無い場合に（$r = 0$ において導出した結果に修正を加えながら）複製ポートフォリオを構築します。

2　Black-Scholes 模型の下での複製ポートフォリオの構築

Black-Scholes 模型に従ってコール・オプションの価格を求めることは、複製ポートフォリオ作成の好例となります。
Black-Scholes 模型とは、連続的に取引可能な原資産の価格（以下では例として株価とする）の過程 S_t と債券価格の過程 B_t に関する模型であり、ある定数 r, σ, μ を用いて、

- $S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + \mu t)$
- $B_t = \exp(rt)$

で表される模型です。
S_0 は（債券をニューメレールとしたときの）現在 $(t = 0)$ における株価であり、正の値。
t は時刻を表す実数であり、T と書いたときは契約の満期時点を表す。
r は無リスクな利子率を表す実数、σ は株式のボラティリティを表すノンゼロの値（ゼロであれば S_t は確率過程にならない）。
μ はドリフト（$= \mathbb{P}$ メジャーの人の期待収益率）であり実数。

W_t は $\mathbb{P}$ - Brown 運動です。すなわち、

1. W_t は連続でかつ $W_0 = 0$ を満たす。
2. 測度 $\mathbb{P}$ の下で W_t の値の分布は正規分布 $N(0,t)$ に従う。
3. 増分 $W_{s+t} - W_s$ は確率測度 $\mathbb{P}$ の下で正規分布 $N(0,t)$ に従い、時刻 s までの履歴 $\mathcal{F}_s$ と独立。

この Black-Scholes 模型においては、マーケットは無リスクで固定された利子率のキャッシュボンドと、幾何 Brown 運動に従う（リスクのある）株式から成立すると仮定します。

株式変動の模型は複雑すぎても複製戦略を見つけられなくなってしまうし、単純すぎて現実を表現を実現する模型としての妥当性を欠いても困ります。

株価を Brown 運動として表現する模型は現実世界を表すものとして最低限の性質は満たしています。

2.1 $r = 0$：無リスク金利の利子率がゼロの場合

まずは無リスク金利の利子率 $r = 0$ の場合に複製ポートフォリオを構築してみます。その場合の複製戦略構築は次の 3 ステップに単純化されます。

1. S_t をマルチンゲールにする測度 $\mathbb{Q}$ を見つける。
2. 契約を過程に変換する。 $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t)$
3. $dE_t = \phi_t dS_t$ となる可予測過程 ϕ_t を見つける。

これらの各段階でそれぞれ以下の定理を用いる：

- Girsanov の定理と Radon-Nikodim の定理（段階 1., 段階 2.）
- マルチンゲール表現定理（段階 3.）

2.2 ステップ 1：S_t をマルチンゲールにする測度 $\mathbb{Q}$ を見つける。

S_t が満たす確率微分方程式を求めます。Girsanov の定理を適応し、与えられた測度 $\mathbb{Q}$ の下で S_t がマルチンゲールかどうかを調べる作業です。

Black-Scholes 模型に基づく仮定より株価は幾何 Brown 運動

$$S_t = \exp(\sigma W_t + \mu t)$$

になる。よって株価の対数

$$Y_t = \log S_t = \sigma W_t + \mu t$$

は単なるドリフト付きの Brown 運動であるので、確率微分をする（伊藤の補題の適応をする）ことで確率微分方程式が求まります。

伊藤の補題によると、$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$ を満たす確率過程 X_t の関数 $f(X_t)$ の確率微分 $df(X_t)$ は次のように与えられます。

$$df(X_t) = \sigma_t f'(X_t) dW_t + \left(\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 f''(X_t) \right) dt$$

今回の場合は $S_t = f(X_t) = \exp X_t = \exp(\sigma W_t + \mu t)$ であるので、

$$\begin{aligned}
df(X_t) &= \sigma_t f'(X_t) dW_t + \left(\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 f''(X_t)\right) dt \\
dS_t &= \sigma \exp X_t dW_t + \left(\mu \exp X_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \exp X_t\right) dt \\
&= \sigma S_t dW_t + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t dt
\end{aligned}$$

両辺を S_t で割って、

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma dW_t + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt$$

となる。

次に S_t のドリフトを Girsanov の定理の逆を用いて消去する。

すなわち、Girsanov の定理の逆によって W_t が $\mathbb{P}$-Brown 運動のとき、$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ が $\mathbb{Q}$-Brown 運動となるような測度 $\mathbb{Q}$ が存在することが保証され、測度 $\mathbb{Q}$ の測度 $\mathbb{P}$ による Radon-Nikodym 微分である $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right)$ となるように測度 $\mathbb{Q}$ が定められる。

ただし、Girsanov の定理の適用要件として、$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right) < \infty$ を満足する必要がある。(Novikov's condition. これは技術的な要件なので、あまり気にしなくて良いことが多いです。)

この変換で得られた $\tilde{W}_t$ は $\mathbb{Q}$-Brown 運動なので S_t は次の確率微分方程式を満たします。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma d\tilde{W}_t$$

したがって、$\mathbb{P}$-Brown 運動と $\mathbb{Q}$-Brown 運動、$d\tilde{W}_t$ と dW_t は次のような関係を持つ必要があります。

$$\begin{aligned}
\sigma S_t d\tilde{W}_t &= \sigma S_t dW_t + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t dt \\
d\tilde{W}_t &= dW_t + \frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} dt
\end{aligned}$$

よって Girsanov の定理の逆から

$$\gamma = \frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$$

としたときに、

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma ds = W_t + \gamma t$$

が $\mathbb{Q}$ -Brown 運動となるような測度 $\mathbb{Q}$ が存在し、次のように定められる。

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \gamma dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2 dt\right) = \exp\left(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T\right)$$

2.3 ステップ 2：契約を過程に変換する。 $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t)$

続いて、第 1 段階で定めた測度 $\mathbb{Q}$ の下で、ある契約 X を $\mathbb{Q}$-マルチンゲール E_t に変換します。

フィルトレーション $\mathcal{F}_t$ 、測度 $\mathbb{Q}$ の下での契約 X の条件付き期待値

$$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t)$$

これが $\mathbb{Q}$ -マルチンゲールである為には、時間 $s < t$ に対して、

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(E_t|\mathcal{F}_s) = E_s$$

であれば良い。実際、$s < t$ に対して、

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(E_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t)\ |\mathcal{F}_s\Big) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_s) = E_s$$

であるので（タワープロパティ）、

$$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t)$$

とすることで測度 $\mathbb{Q}$ の下で、契約 X は $\mathbb{Q}$-マルチンゲールになります。

2.4 ステップ 3：$dE_t = \phi_t dS_t$ となる可予測過程 ϕ_t を見つける。

マルチンゲール表現定理によって

$$dE_t = \phi_t dS_t$$

を満たすような可予測過程 ϕ_t が存在します。積分表現では、

$$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}X + \int_0^t \phi_s dS_s$$

となります。

最後に具体的に複製ポートフォリオの構築に必要な株式と債券の保有量 ϕ_t, ψ_t をそれぞれ求めて完了です。

結論、次の戦略 1,2 になります。

- 戦略 1. t 時点において ϕ_t 単位の株式を保有する。
- 戦略 2. t 時点において $\psi_t = E_t - \phi_t S_t$ 単位の債券を保有する。

これを理解するために以上の戦略 1,2 を満たすような複製ポートフォリオが self-financing になるかを確認します。t 時点における複製ポートフォリオの価値 V_t は、今は $r = 0$ を考えているので $B_t = 1$ であることに注意すると、

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = \phi_t S_t + (E_t - \phi_t S_t) \times 1 = E_t$$

これで自明に $dV_t = dE_t$ となるが、$dB_t = 0$ なので、マルチンゲール表現定理を用いることで、

$$dV_t = \phi_t dS_t = \phi_t dS_t + 0 = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$$

たしかに self-financing になっています。

終了時点での複製ポートフォリオの価値は

$$V_T = E_T = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_T) = X$$

であるので、この戦略 V_t こそが全ての時点 t における X の無裁定価格になっています。

開始時点では

$$V_0 = E_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}X$$

であるから、契約 X の価格は株価過程 S_t がマルチンゲールになるような測度 $\mathbb{Q}$ の下での期待値になることも分かります。

2.5 なぜ価格が一致する必要があるのか？

もし、複製ポートフォリオの価格（V_t）とデリバティブの理論価格（E_t）が一致しない場合、市場には「**裁定機会**（アービトラージ）」が存在することになります。

これは、リスクを一切取らずに利益を上げられる魔法のような取引チャンスのことです。

2.6 ケース 1: 複製ポートフォリオが割安な場合 ($V_t < E_t$)

デリバティブの価格が、そのデリバティブを再現するコスト（複製ポートフォリオ）よりも高い場合、市場参加者は以下のように行動します。

1. **高価なデリバティブを売る（ショートする）。** これで手元にお金が入ってきます。
2. もしくは**安価な複製ポートフォリオを買う（ロングする）。** これには、売却で得たお金を使います。

この取引を組むと、満期時には複製ポートフォリオがデリバティブと同じ価値になるため、互いにリスクを相殺し合います。しかし、最初に価格差があった分だけ、手元に確実な利益が残ります。

2.7 ケース 2: 複製ポートフォリオが割高な場合 ($V_t > E_t$)

逆に、デリバティブを再現するコストの方が、デリバティブの価格よりも高い場合も同様です。

1. **安価なデリバティブを買う（ロングする）。**
2. **高価な複製ポートフォリオを売る（ショートする）。**

この場合も、満期時にリスクが相殺されるため、最初に得た利益がそのまま確定します。

2.8 市場の自己修正機能

このような無リスクな利益機会は、アービトラージャーによって瞬時に見つけ出されます。

彼らはこのチャンスがなくなるまで取引を続けるため、市場ではデリバティブの価格（E_t）と複製ポートフォリオの価格（V_t）がすぐに**一致する**ように収斂していきます。

このメカニズムこそが、複製ポートフォリオ価格が無裁定価格として、ひとつの値に決まる理由です。

3 無リスク金利の導入

ここまでで利子率 r がゼロである場合、任意の契約 X は S_t がマルチンゲールとなるような測度 $\mathbb{Q}$ の下での期待値を取ることで無裁定条件を満たし、無裁定価格が得られていたことを述べてきました。

利子率 r がゼロでない場合はここまでの上手く機能しなくなり、改善が必要です。

例えば行使価格 K のフォワード契約（ $t = T$ において $S_T - K$ の資金を受け渡す契約）の価値がゼロとなるような行使価格は $K = S_0 e^{rT}$ になります（それ以外の K ではアービトラージが発生する）。

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T - K) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T - S_0 e^{rT}) = S_0 - S_0 e^{rT} \neq 0$$

しかしこの問題は簡単に解決できます。

これまでの測度 $\mathbb{Q}$ とは別の新たな測度 $\tilde{\mathbb{Q}}$ が $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}} S_t = S_0 e^{rt}$ を満たすような測度であれば良いです。

これは割引過程 $B_t^{-1} = e^{-rt}$ を乗じた株価過程（割引株価過程）$Z_t = B_t^{-1} S_t$ がマルチンゲールとなるよ

うな（これまで考えてきた測度とは異なる新しい）測度 $\tilde{\mathbb{Q}}$ です。

経済的には資金の価値の成長が止まった世界（ニューメレールが B_t になっている世界）を考えていることに相当します。

以下ではこの世界で複製ポートフォリオの構築を試みます。

3.1　ステップ 1：割引株価過程 Z_t をマルチンゲールにする測度 $\mathbb{Q}$ を見つける。

伊藤の補題を用いると、

$$dB_t = \left(\frac{\partial B_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_t}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial B_t}{\partial x}dW_t = rB_t dt$$

$$dS_t = \left(\frac{\partial S_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_t}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial S_t}{\partial x}dW_t = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

なので

$$\frac{d\left(\frac{S_t}{B_t}\right)}{\frac{S_t}{B_t}} = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{dB_t}{B_t} - \frac{dS_t}{S_t}\frac{dB_t}{B_t} + \left(\frac{dB_t}{B_t}\right)^2 = \sigma dW_t + \left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt$$

ここに Girsanov の定理を用います。$\theta = \dfrac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$ と置いて、

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \theta dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \theta^2 dt\right) = \exp\left(-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T\right)$$

という Radon-Nikodim 微分で新しい測度 $\mathbb{Q}$ を定めればその測度の下で Z_t はマルチンゲールになります。

このとき、解くべき確率微分方程式は

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = \sigma d\tilde{W}_t$$

ただし、求めたい過程を $d\tilde{W}_t = dW_t + \theta dt$ と置いています。

3.2　ステップ 2：契約を過程に変換する。 $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t)$

$s < t$ において、

$$E_s = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_s) = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_s)$$

であり、

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(E_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t)\middle|\mathcal{F}_s\right) = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_s) = E_s$$

よって $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t)$ は新しい測度 $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールになる。

3.3　ステップ 3：$dE_t = \phi_t dZ_t$ となる可予測過程 ϕ_t を見つける。

ニューメレールが債券でない世界で考えたときと同様に進められる。

複製の為の株式保有量 ϕ_t、債券保有量 ψ_t として、時点 t における複製ポートフォリオの価格は

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$$

時点 T における契約の価格と複製ポートフォリオの価格が一致するので、

$$X = V_T = \phi_T S_T + \psi_T B_T$$

一方、

$$E_T = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_T) = B_T^{-1}X$$

であるので、

$$V_t = B_tE_t$$

$r=0$ の場合と同様に、

- 戦略 1. t 時点において ϕ_t 単位の株式を保有する。
- 戦略 2. t 時点において $\psi_t = E_t - \phi_tS_t$ 単位の債券を保有する。

以上の戦略 1,2 を満たすような複製ポートフォリオを考える。

$$\begin{aligned}
dV_t &= dB_tE_t + B_tdE_t \\
&= dB_tB_t^{-1}(\phi_tS_t + \psi_tB_t) + B_t(\phi_tdZ_t + \psi_t) \\
&= \phi_t(Z_tdB_t + B_tdZ_t) + \psi_tdB_t \\
&= \phi_tdS_t + \psi_tdB_t
\end{aligned}$$

以上から $r=0$ のケースと同様に、この戦略の下で (ϕ_t, ψ_t) は self-financing になる。

4 具体例

ノートの最後に、ここまでのまとめの練習問題として、単純な契約のケースに今まで述べてきたフレームワークを適応してみます。

4.1 ヨーロピアン・コールオプションの価格

満期 T 、行使価格 K のヨーロピアン・コールオプションの契約 X は、

$$X = \mathrm{Max}(S_T - K, 0)$$

であるので、無裁定条件の下での複製ポートフォリオの現在価値は、

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\mathrm{Max}(S_T - K, 0)$$

と書ける。ただしここで測度 $\mathbb{Q}$ は過程 $B_t^{-1}S_t$ のマルチンゲール測度である。

原資産 S_t を $\mathbb{Q}$ -Brown 運動 $\tilde{W}_t$ を用いて表すと、

$$d(\log S_t) = \sigma d\tilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt$$

$$S_t = S_0\exp\left[\sigma\tilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]$$

よって、平均 m、分散 v の正規分布を $N(m,v)$ と書くと、S_T の周辺分布は、$N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2T\right)$ の指数を取ったものと S_0 との積であることが分かる。

Z を $N\left(-\frac{1}{2}\sigma^2T, \sigma^2T\right)$ に従う確率変数とすると、$S_T = S_0\exp(Z + rT)$ と書けるので、（測度を意識しないような通常の）期待値で表すことができて、

$$\begin{aligned}
V_0 &= e^{-rT}\mathbb{E}\mathrm{Max}\Big(S_0\exp(Z + rT) - K, 0\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{\log(K/S_0)-rT}^{\infty}\left(S_0e^x - Ke^{-rT}\right)\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2T}\left(x + \frac{1}{2}\sigma^2T\right)\right]dx \\
&= S_0\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\Phi(d_-)
\end{aligned}$$

のように解析的に解ける。ただし、 $\Phi(x)$ は $N(0,1)$ が x 以下となる確率であり、$d_\pm$ とそれぞれ、

$$d_\pm = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

現在 $(t=0)$ から $t(<T)$ 時間経過後の複製ポートフォリオは、無裁定条件から

$$V_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathrm{Max}(S_T - K, 0)\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

であるが、これは満期までの期間が $T \to T-t$ に変わった場合の契約の現在価格であるので、単に V_0 の式の T を $T-t$ に置き換えれば無裁定価格が求まる。

そのヘッジのための原資産とニューメレールの保有量 ϕ_t 、 ψ_t はそれぞれ

$$\phi_t = \frac{\partial V_t}{\partial S_0} = \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$
$$B_t\psi_t = -Ke^{r(T-t)}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

のように取引することでポートフォリオは self-financing になり、複製可能になります。

以上が複製ポートフォリオ理論に基づいたヨーロピアン・オプションのプライシングです。ヨーロピアン・オプションの価格を求めるにはこの方針以外にも、

- Black-Scholes 方程式を解いたり、
- それを Feynman-Kac で変換した偏微分方程式を解いたり、
- 離散的な二項ツリーの価格過程の連続極限を取ったり、

色々な方法があります。

同じ現象、同じ結論を導く別解を複数手元に用意しておくことで理解の幅が広がります。このノートがその一助になれば幸いです。

4.2 参考文献

- Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing - Martin Baxter, Andrew Rennie