

# モナドと随伴

岡田 大 (Okada Masaru)

November 23, 2025

## Contents

1	定義	1
1.1	随伴の定義 . . . . .	1
1.2	モナドの定義 . . . . .	2
2	モナドになることの確認	2
2.1	結合律: $(T, \eta, \mu)$ がモナドになることの確認 1 . . . . .	2
2.2	単位律: $(T, \eta, \mu)$ がモナドになることの確認 2 . . . . .	3
3	結論	3

## 1 定義

### 1.1 随伴の定義

圏  $C, D$  に対して、関手  $F : C \rightarrow D$ 、 $G : D \rightarrow C$  がある。このとき「 $F$  と  $G$  は随伴である」とは、記号では  $F \dashv G : C \rightarrow D$  と書き、随伴関係

$$\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \cong \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$$

が存在すること。ここで  $c \in C$ 、 $d \in D$ 。

これらから自然変換  $\eta : 1_C \rightarrow GF$  (単位)、 $\varepsilon : FG \rightarrow 1_D$  (余単位)、が構成できて、単位と余単位は以下の三角等式を満たす。

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta G} & GFG \\ & \searrow 1_G & \downarrow G\varepsilon \\ & & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\ & \searrow 1_F & \downarrow \varepsilon F \\ & & F \end{array}$$

数式で書けば以下の通りである。

$$G\varepsilon \circ \eta G = 1_G$$

$$\varepsilon F \circ F\eta = 1_F$$

## 1.2 モナドの定義

$C$  上のモナド  $(T, \eta, \mu)$  は以下で定義される。

### 1.2.1 自己関手

$$T = G \circ F = GF : C \rightarrow C$$

### 1.2.2 単位

随伴の単位をそのまま使う：

$$\eta : 1_C \rightarrow GF = T$$

### 1.2.3 乗法

乗法は随伴の余単位  $\varepsilon$  を  $G$  と  $F$  で挟んで構成する。

$$\mu = G\varepsilon F : GF GF \rightarrow GF$$

すなわち、

$$\mu : T^2 \rightarrow T$$

## 2 モナドになることの確認

### 2.1 結合律: $(T, \eta, \mu)$ がモナドになることの確認 1

$(T, \eta, \mu)$  がモナドであるためには、以下の図式が可換である必要がある。

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{T\mu} & T^2 \\ \mu T \downarrow & & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

すなわち、

$$\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$$

これを  $G, F, \varepsilon$  で書くと、

$$T\mu = GF(G\varepsilon F) = GF G\varepsilon F$$

$$\mu T = (G\varepsilon F)GF = G\varepsilon FGF$$

なので、示すべき式は

$$G\varepsilon F \circ GF G\varepsilon F = G\varepsilon F \circ G\varepsilon FGF$$

すなわち、

$$G(\varepsilon \circ FG\varepsilon)F = G(\varepsilon \circ \varepsilon FG)F$$

である。ここで両端の  $G, F$  を外した核となる部分は、自然変換  $\varepsilon$  の  $FG \xrightarrow{\varepsilon} 1_D$  に対する自然性(Naturality)の可換図式そのものである。

$$\begin{array}{ccc}
FGFG & \xrightarrow{FG\varepsilon} & FG \\
\varepsilon FG \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\
FG & \xrightarrow{\varepsilon} & 1_D
\end{array}$$

この可換性  $\varepsilon \circ FG\varepsilon = \varepsilon \circ \varepsilon FG$  より、結合律は直ちに従う。

## 2.2 単位律: $(T, \eta, \mu)$ がモナドになることの確認 2

$(T, \eta, \mu)$  がモナドであるためには、以下の図式が可換である必要がある。

$$\begin{array}{ccccc}
T & \xrightarrow{\eta T} & T^2 & \xleftarrow{T\eta} & T \\
& \searrow 1_T & \downarrow \mu & \swarrow 1_T & \\
& & T & & 
\end{array}$$

すなわち、右単位律  $\mu \circ T\eta = 1_T$  と、左単位律  $\mu \circ \eta T = 1_T$  を満たす必要がある。

### 2.2.1 右単位律の確認

定義より

$$\mu \circ T\eta = (G\varepsilon F) \circ (GF\eta) = G(\varepsilon F \circ F\eta)$$

ここで随伴の三角等式  $\varepsilon F \circ F\eta = 1_F$  を用いると、

$$\mu \circ T\eta = G(1_F) = 1_{GF} = 1_T$$

となり成立する。

### 2.2.2 左単位律の確認

同様に、

$$\mu \circ \eta T = (G\varepsilon F) \circ (\eta GF) = (G\varepsilon \circ \eta G)F$$

ここでも随伴の三角等式  $G\varepsilon \circ \eta G = 1_G$  を用いると、

$$= (1_G)F = 1_{GF} = 1_T$$

となり成立する。

## 3 結論

以上から、随伴  $F \dashv G$  から構成される  $C$  上のトリプル  $(T = GF, \eta, \mu = G\varepsilon F)$  は結合律と左右の単位律を満たすのでモナドになる。