随伴

岡田 大 (Okada Masaru)

October 19, 2025

Contents

1 定義

1.1 随伴の定義

圏 C, D に対して、関手 $F : C \to D$ 、$G : D \to C$ がある。「このとき F と G は随伴である」とは、記号では $F \dashv G : C \to D$ と書き、

随伴

圏 C の任意の対象 c 、圏 D の任意の対象 d について、自然な全単射

$$\phi_{cd} : \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$$

が存在する。

1.2 「自然な」の意味

ここでいう「自然な」の意味は、

1. d を固定したときに c について自然であり、
2. c を固定したときに d について自然である

ということを表す。

つまり 2 つの条件がある。

まず「 c について自然」という意味については、

c について自然

$$\theta_c : \mathrm{Hom}_D(F-, d) \to \mathrm{Hom}_C(-, Gd)$$

という自然変換 θ_c が存在する。

ということを表す。

自然変換なのでドメインとコドメインのそれぞれは関手である。
Hom は関手になることを思い出そう。
一般に、ある圏 C の対象 $a \in C$ について、関手 $\mathrm{Hom}_C(-, a)$ は $C^{op} \to \mathbf{Set}$ の関手になる。
同様に、$\mathrm{Hom}_C(-, Gd)$ は $Gd \in C$ という対象について、関手 $C^{op} \to \mathbf{Set}$ になっている。

もう一つの関手 $\mathrm{Hom}_D(F-, d)$ の意味を考える。
まず、F がかかっていない $\mathrm{Hom}_D(-, d)$ は関手 $D^{op} \to \mathbf{Set}$ である。
さらに $C \to D$ への関手 F があって、

$$C^{op} \xrightarrow{F} D^{op} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_D(-,d)} \mathbf{Set}$$

以上の 2 つの関手が合成されたものが $\mathrm{Hom}_D(F-, d)$ である。
この関手の間の自然変換 θ_c が存在することが、「 c について自然」という意味である。

「 d について自然」も同様で、

$$\theta_d : \mathrm{Hom}_D(Fc, -) \to \mathrm{Hom}_C(c, G-)$$

という自然変換 θ_d が存在するという意味である。

1.3 左と右

$F \dashv G : C \to D$ すなわち、
圏 C の任意の対象 c 、圏 D の任意の対象 d について、自然な全単射

$$\phi_{cd} : \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$$

が存在するとき、
F を G の左随伴関手、G を F の右随伴関手という。
左の対象に関手がかかっているのが左随伴関手であり、右の対象に関手がかかっているのが右随伴関手である。なぜか文献によって左右が逆転していることがあるらしい。

左右盲にはつらいが、$F \dashv G : C \to D$ と書いたときには、「 F が左随伴である」とも言うし、同じ意味で「 F は右随伴を持つ」とも言う。

2　例

2.1　ベクトル空間の圏と集合の圏の随伴

ベクトル空間の圏 $\mathbf{Vect}$ から対象 V を取ってくる。

V にはスカラー倍や線形性を保つ足し算などの公理が入っているが、それらの公理を条件だと思って、その条件を忘れる関手（忘却関手）U を取れる。

$$\begin{array}{cccc} U: & \mathbf{Vect} & \to & \mathbf{Set} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & V & \mapsto & U(V) \end{array}$$

$\mathbf{Vect}$ の射は線形写像 $f : V \to W$ であるが、線形構造を保つことを忘れて、単なる写像と思ったとき、$\mathbf{Set}$ の射である写像 $U(f) : U(V) \to U(W)$ となる。

この U の随伴を考える。つまり、任意の集合 X を取ってきたとき、$F(X)$ が線型空間になるような F を考える。

これは X を基底とする線型空間を取ってくることで得られる。

このとき F は関手になっていて、$F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}$ である。

しかも F は U の随伴になっている。これは自然な全単射

$$\phi_{cd} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}}(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(c, Ud)$$

を具体的に構成できることから示すことができる。

2.2　アーベル群の圏と集合の圏の随伴

アーベル群の圏 $\mathbf{Ab}$ から構造を忘れて集合の圏 $\mathbf{Set}$ とするような忘却関手 U と、$F(X)$ として、集合 X で生成される自由アーベル群を成す関手 F の間には随伴がある。

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ab} \arrow[rr, bend right, "U"'] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbf{Set} \arrow[ll, bend right, "F"'] \end{tikzcd}$$

2.3　位相空間の圏と集合の圏の随伴

位相空間の圏 $\mathbf{Top}$ から構造を忘れて集合の圏 $\mathbf{Set}$ とするような忘却関手 U と、$F(X)$ として、集合 X に離散位相を入れる関手 F の間には随伴がある。

密着位相を入れる関手 G も U の随伴になっていて、U の右随伴になっている。

$$F \dashv U \dashv G$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Top} \arrow[r, "U"'] & \mathbf{Set} \arrow[l, bend right, "F"'] \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$