圏論における極限について

岡田 大 (Okada Masaru)

October 5, 2025

Abstract

圏論における極限についてのメモ。

1 集合から新しい集合、圏から新しい圏を作る

集合から新しい集合を作る操作がある。

1. 集合 X, Y から直積集合を作る操作： $X \times Y$
2. 集合の要素 $x \in X$ に関する条件 $\phi(x)$ があったときに、部分集合を作る操作：$\{x \in X|\phi(x)\}$
3. 集合 X, Y から直和（非交和）集合を作る操作： $X \coprod Y$
4. 集合 X から同値関係 $\sim$ で割って商集合を作る操作： $X/\sim$

それぞれ圏論では

1. 直積
2. equalizer
3. 余直積
4. coequalizer

に対応する。さらに、以下の 2 つとして統一的に理解される。

1. 極限（直積と equalizer の一般化）
2. 余極限（余直積と coequalizer の一般化）

	集合論の言葉	対応する圏論の言葉	圏論のさらに統一的な見かた
$X \times Y$	直積	直積	極限
$\{x \in X\|\phi(x)\}$	部分集合	equalizer	極限
$X \coprod Y$	非交和	余直積	余極限
$X/\sim$	商集合	余 equalizer	余極限

2 直積

2.1 直積の定義

圏 C の対象 a, b に対して、a と b の直積とは、三つ組み $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ で以下の 2 条件を満たすもの。

$$
\begin{tikzcd}
& u \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
$$

1. （直積の要素）$u \in C$ で、$p_0 : u \to a$ 、 $p_1 : u \to b$
2. （普遍性）$\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件を満たすとき、$\exists! h : v \to u$ で、$p_0 \circ h = q_0, p_1 \circ h = q_1$

$$
\begin{tikzcd}
& v \arrow[d, dashed, "\exists!\ h"] \arrow[ddl, bend right, "q_0"'] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\
& u \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
$$

2.2　直積の例

集合の圏 **Set** で、$x, y \in \mathbf{Set}$ に対して、$p_0 : x \times y \to x :< a, b > \mapsto a$ 、$p_1 : x \times y \to y :< a, b > \mapsto b$ とすると、$\langle x \times y, p_0, p_1 \rangle$ は x と y の直積。

2.2.1　確認

■可換性チェック　$\langle v, q_0, q_1 \rangle$ を以下のように取る。

$$
\begin{tikzcd}
& v \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[ddl, bend right, "q_0"'] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\
& x \times y \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
x & & y
\end{tikzcd}
$$

つまり、$a \in v$ に対して、 $h(a) = \langle q_0(a), q_1(a) \rangle \in x \times y$ となるように取る。
そうすると、$h : v \to x \times y$ は、$p_0 \circ h(a) = p_0(\langle q_0(a), q_1(a) \rangle) = q_0(a)$ より、

$$p_0 \circ h = q_0$$

同様に、

$$p_1 \circ h = q_1$$

となるので、図式は可換になる。

■普遍性チェック　次に、もし別の $h' : v \to x \times y$ があって、

$$
\begin{tikzcd}
& v \arrow[d, dashed, "h'"] \arrow[ddl, bend right, "q_0"'] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\
& x \times y \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
x & & y
\end{tikzcd}
$$

となると仮定する。
このときに $h' = h$ となることが言えれば一意であり、普遍性が成り立つ。

$h'(a) = \langle q'_0(a), q'_1(a) \rangle \in x \times y$ となるとすると、
$q_0(a) = p_0 \circ h'(a) = p_0(\langle q'_0(a), q'_1(a) \rangle) = q'_0(a)$ なので、

$$q'_0 = q_0$$

同様に

$$q'_1 = q_1$$

よって、$h'(a) = \langle q'_0(a), q'_1(a) \rangle = \langle q_0(a), q_1(a) \rangle = h(a)$ すなわち、任意の a に対して

$$h' = h$$

が成り立つ。
よって h は一意であり、直積の普遍性も満たされる。

3 equalizer

3.1 equalizer の定義

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "p"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
v \arrow[u, dashed, "\exists!\ h"] \arrow[ur, "q"'] & &
\end{tikzcd}$$

圏 C の射 $f, g : a \to b$ に対して、f, g の equalizer とは、$\langle u, p \rangle$ の二つ組で

1. （equalizer の要素）$u \in C$、$p : u \to a$、$f \circ p = g \circ p$ となるもの。
2. （普遍性） $\langle v, q \rangle$ が同じ条件を満たすとき、$\exists! h : v \to u$ で、$p_0 \circ h = q$

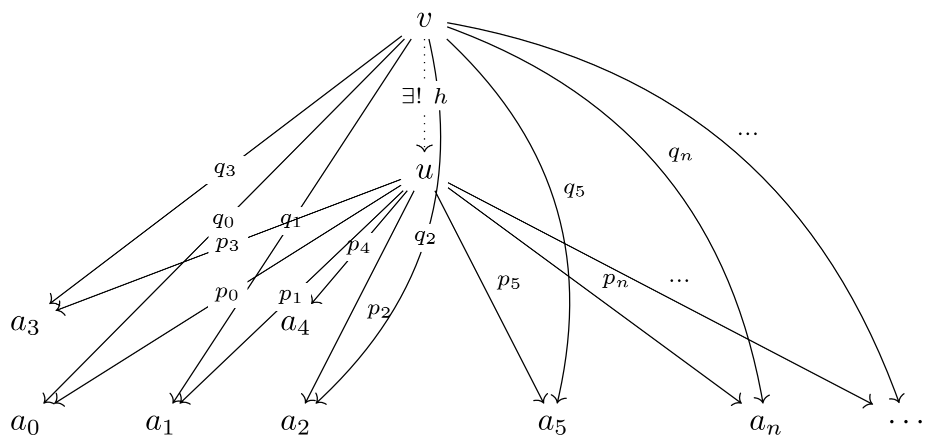
3.2 equalizer の例

Set の場合、$f, g : x \to y$ が写像であり、equalizer は $u = \{a \in x | f(a) = g(a)\}$、$p : u \hookrightarrow x$ のようになるもの。

4 極限

4.1 極限の極限らしさ

直積や equalizer の定義は、まず対象や射が与えられて、それに対する u, p のことであり、同じような v, q 等があれば一意に射が出るようなもの。



極限は、たくさん対象があったときに、それに対する $u, p_0, p_1, p_2, \cdots$ のことであり、同じような $v, q_0, q_1, q_2, , \cdots$ 等があれば一意に射 h が出るようなもの。

このように無限に対象があるときに、このような h が存在すれば、（無限個の）直積と（無限個の）equalizer の組み合わせで表されるということが知られている。

4.2 極限の例

Set における例を考えてみる。

p は素数、$X_n = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} = \{0, 1, \cdots p^n - 1\}$ と置く。

このとき次のような系列を考える。

$$X_0 \xleftarrow{f_0} X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \cdots \xleftarrow{f_n} X_{n+1} \cdots$$

集合はそれぞれ

$X_0 = \{0\}$

$X_1 = \{0, 1, \cdots p - 1\}$

$X_2 = \{0, 1, \cdots p^2 - 1\}$

射は

$$\begin{array}{cccc} f_n : & X_{n+1} & \to & X_n \\ & \cup\!\!\!\!\!\!\;\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\!\;\shortmid \\ & x & \to & x \bmod p^n \end{array}$$

である。このとき極限は $\mathbf{Z}_p$ と書かれ、

$$\mathbf{Z}_p = \left\{ x \in \prod_{n=0}^{\infty} X_n \,\middle|\, \forall n,\ f_n(x_{n+1}) = x_n \right\}$$

例えばこの例であれば、無限個の直積が入っていて、equalizer（等式で部分集合を取る操作）一つで極限が書けている。

5 余直積

直積と射の向きが逆になっているもの。

$$\begin{tikzcd} & v & \\ & u \arrow[u, dashed, "\exists!\ h"'] & \\ a \arrow[ur, "p_0"'] \arrow[uur, bend left, "q_0"] & & b \arrow[ul, "p_1"] \arrow[uul, bend right, "q_1"'] \end{tikzcd}$$

6 coequalizer

equalizer と射の向きが逆になっているもの。対象 a, b の位置も入れ替わる。

$$\begin{tikzcd} u \arrow[d, dashed, "\exists!\ h"] & b \arrow[l, "p"'] \arrow[dl, "q"] & a \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"] \\ v & & \end{tikzcd}$$