

関数繰り込み群を利用したガウス積分

岡田 大 (Okada Masaru)

October 20, 2025

Abstract

関数繰り込み群 (fRG) を利用して、厳密解が分かっているガウス積分を解いてみるという、fRG の入門的な計算例を示したノート。このノートの目的は、fRG が高エネルギーから低エネルギーへと揺らぎを順に取り込んでいく様子を、厳密解が分かっているガウス積分で実演することである。

Contents

1	このノートの流れ	1
2	Wetterch Equation	1
3	レギュレーター R_k とフロー方程式の具体化	2
3.1	Gaussian Integral	2
3.2	Effective Action の仮定	2
3.3	レギュレーター R_k	2
4	Wetterich Equation	3
4.1	Wetterich Equation へ代入	3
4.2	フローの積分	3
5	まとめ	4

1 このノートの流れ

1. 問題設定: $Z = \int dx e^{-S(x)}$ ($S(x) = \frac{1}{2}m^2x^2$) を計算したい。
2. fRG の導入: レギュレーター R_k を導入し、高エネルギースケール Λ から $k = 0$ まで、有効作用 Γ_k を流す (フローさせる)。
3. Wetterich Equation: その流れを記述するのが Wetterich Equation。
4. 計算: 方程式を解き、 $k = 0$ での有効作用 $\Gamma_{k=0}$ を求める。
5. 結論: $\Gamma_{k=0}$ から $Z = e^{-\Gamma_{k=0}(\phi=0)}$ を計算すると、ガウス積分の正しい答え $\frac{\sqrt{2\pi}}{m}$ が得られる。

2 Wetterch Equation

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} \left[(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1} (\partial_k R_k) \right]$$

ここで STr はスーパートレースを表す。

これが fRG の核心となるフロー方程式になる。

Γ_k はスケール k における有効平均作用を表す。これには k 以上の高エネルギースケールの揺らぎが取り込まれ、 k 未満の揺らぎはまだ取り込まれていない状態の作用である。

R_k はレギュレーターと呼ばれる関数であり、 k よりも低いエネルギーのゆらぎを抑制する天井のような設定になっている。 $k = \Lambda$ から $k = 0$ へと変化させることは、この上限を徐々に開放し、ゆらぎを取り込んでいく操作になる。

$\Gamma_k^{(2)} = \frac{\partial^2 \Gamma_k}{\partial \phi^2}$ はヘシアンに相当する量で、場 $\phi = \langle x \rangle$ に対する 2 階微分。

3 レギュレーター R_k とフロー方程式の具体化

3.1 Gaussian Integral

以下のガウス積分は初等的に求められる。

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2} m^2 x^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{m}$$

この積分結果を fRG の枠組みを使って再現してみるとというのがこのノートの目的である。

分配関数と作用の関係は以下である。

$$Z = e^{-\Gamma_{k=0}(\phi=0)}$$

fRG のフレームワークを用いて $\Gamma_k(\phi)$ の関数形を導出してから $\Gamma_{k=0}(\phi=0)$ と置くことで分配関数を求める。

3.2 Effective Action の仮定

この問題は相互作用の無い理論なので、 Γ_k の場 ϕ に関する部分は k に依存せず、古典作用 $S(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ と同じ形であると仮定する。そこで

$$\Gamma_k(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + C_k$$

と置く。

ここで C_k は ϕ に依らない定数項である。ここに場のゆらぎの寄与が全て蓄積される。

この仮定から

$$\Gamma_k^{(2)} = \frac{\partial^2 \Gamma_k}{\partial \phi^2} = m^2 = \text{const.}$$

となる。

3.3 レギュレーター R_k

レギュレーター R_k として

$$\begin{aligned} R_k &= k^2 \\ \partial_k R_k &= 2k \end{aligned}$$

を選択する。

$$Z_k = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2} m^2 x^2 - \frac{1}{2} R_k x^2}$$

大きな R_k の極限では classical になる。

一方で、 $R_k \rightarrow 0$ の極限で求めたい分配関数 $Z_{k=0}$ になる。

4 Wetterich Equation

4.1 Wetterich Equation へ代入

この問題は 0 次元であるので、Wetterich Equation の STr は不要で、単純なスカラーの式になる。

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2}(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}(\partial_k R_k) = \frac{1}{2}(m^2 + k^2)^{-1}(2k) = \frac{k}{m^2 + k^2}$$

この式は Γ_k のうち、 ϕ によらない定数項 C_k だけが k と共に流れていくことを示している。

4.2 フローの積分

$\partial_k \Gamma_k$ が求まったので、これを積分することで作用 Γ_k が求まる。

$$\begin{aligned} \Gamma_k(\phi) &= \Gamma_\Lambda(\phi) - \int_k^\Lambda dk' \partial_{k'} \Gamma_{k'}(\phi) \\ &= \Gamma_\Lambda(\phi) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m^2 + \Lambda^2}{m^2 + k^2} \right) \end{aligned}$$

ここで、 Λ は非常に大きい値 (UV カットオフ) である。

4.2.1 初期条件: $k = \Lambda$

$k = \Lambda$ ではレギュレーター $R_\Lambda = \Lambda^2$ によって揺らぎが抑制されている。

$\Gamma_\Lambda(\phi)$ は古典極限になっている。

このときの分配関数 Z_Λ は以下のように計算できる。

$$Z_\Lambda = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}m^2 x^2 - \frac{1}{2}R_\Lambda x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}(m^2 + \Lambda^2)x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{m^2 + \Lambda^2}}$$

Γ_Λ はこの Z_Λ と $S(\phi)$ から求まる。

$$\Gamma_\Lambda(\phi) = S(\phi) - \ln Z_\Lambda = \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - \ln \left(\sqrt{\frac{2\pi}{m^2 + \Lambda^2}} \right)$$

$$\Gamma_\Lambda(\phi) = \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m^2 + \Lambda^2}{2\pi} \right)$$

4.2.2 作用 $\Gamma_k(\phi)$ の関数形

積分結果に、この $\Gamma_\Lambda(\phi)$ を代入する。

$$\Gamma_k(\phi) = \left[\frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m^2 + \Lambda^2}{2\pi} \right) \right] - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m^2 + \Lambda^2}{m^2 + k^2} \right)$$

\ln の項が打ち消し合い、

$$\Gamma_k(\phi) = \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m^2 + k^2}{2\pi} \right)$$

となる。

4.2.3 求めたかった $k = 0$ における作用 $\Gamma_0(\phi)$ の関数形

$k = 0$ では、レギュレーター $R_0 = 0$ となり、全てのゆらぎを取り込んだ、元の理論の真の有効作用 $\Gamma_{k=0}$ が得られる。

$$\Gamma_{k=0}(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m^2}{2\pi}\right)$$

4.2.4 ガウス積分の値

求めたい Z は、 $Z = e^{-\Gamma_{k=0}(\phi=0)}$ で与えられる。

$$\Gamma_{k=0}(0) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m^2}{2\pi}\right)$$

$$Z = e^{-\Gamma_{k=0}(0)} = \exp\left[-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m^2}{2\pi}\right)\right] = \exp\left[\ln\left(\left(\frac{m^2}{2\pi}\right)^{-1/2}\right)\right] = \left(\frac{m^2}{2\pi}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{2\pi}{m^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{m}$$

5 まとめ

このノートでは、関数繰り込み群 (fRG) という高度な理論的手法を、単純なガウス積分（相互作用のない理論）に対して用いた。

fRG のフローを通して、厳密かつ系統的に「ゆらぎ」の効果（この場合は ϕ によらない定数項、すなわち分配関数そのもの）を取り込んでいくかを示した。