マルチンゲール表現定理

岡田 大（Okada Masaru）

October 15, 2025

Abstract

Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing - Martin Baxter, Andrew Rennie の 3 章の自主ゼミのノート。2020 年 5 月 20 日に書いたもの。

1　ここまでの現状と課題の整理

2 章 3 節で離散過程についてマルチンゲールとはどのような過程かを見た。

（復習）2.3 節「図による定義」の中の定義 (vii)

過程 S は、もしすべての $i \leq j$ に対して、

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(S_j|\mathcal{F}_i) = S_i$$

であれば、確率測度 $\mathbb{P}$ とフィルトレーション $\mathcal{F}_i$ に関してマルチンゲールであるという。

連続時間の過程においても同じことが成立することを見ていく。

2　（連続時間過程の）マルチンゲールの条件

確率過程 M_t が測度 $\mathbb{P}$ に関してマルチンゲールであるとは、以下の条件を満たすことである。

マルチンゲールの条件

1. 全ての t に対して $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(|M_t|) < \infty$
2. $s(< t)$ に対して $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$

2 つ目の条件が特に重要なマルチンゲールの条件になる。
離散過程と同様に、将来の期待値が現在と一致するということが表現されている。
実感を掴むためにテキストでは例が 3 つ挙げられている。

2.1　例 1: 定数過程

すべての時刻 t で $S_t = c$（一定）となる過程は任意の測度でマルチンゲールになっている。

ある将来時点 s, t（ただし $s(< t)$ とする）に対して、$S_t = S_s = c$ なので、

$$\begin{aligned} c &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(S_t|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(S_s|\mathcal{F}_s) \\ &= S_s \end{aligned}$$

が任意の測度 $\mathbb{P}$ に対して成り立つ。

2.2　例 2: 測度 $\mathbb{P}$ の下での $\mathbb{P}$-Brown 運動

$\mathbb{P}$-Brown 運動は $\mathbb{P}$-マルチンゲールであることを確認する。

時点 s, t（$s < t$)、$\mathbb{P}$-Brown 運動を W_t として、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(W_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(W_t + W_s - W_s|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(W_s|\mathcal{F}_s) + \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) \\ &= W_s + 0 \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = 0$ については、Brown 運動の性質；「$W_t - W_s$ は $\mathcal{F}_s$ とは独立であり、$\mathbb{P}$ の下で $N(0, t-s)$ の分布をする。」を用いた。

ゆえに W_t はマルチンゲールである。

2.3　例 3: 積み重ねの法則：測度 $\mathbb{P}$ の下での条件付き期待値の過程

満期 T でペイオフが確定する契約 X に対して、過程 $N_t = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(X|\mathcal{F}_t)$ は $\mathbb{P}$-マルチンゲールになることを確認する。

これを示すために時点 s, t（$s \leq t$）で成り立つ積み重ねの法則

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\Big(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(X|\mathcal{F}_t\right)\Big|\mathcal{F}_s\Big) \;=\; \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(X|\mathcal{F}_s)$$

を利用する。

これは時刻 t までの履歴で条件付けした後に時刻 s までの履歴で条件付けした期待値は、最初から s までの履歴で条件付けした期待値と等しくなるという離散過程で出てきたものと同じものである。

これを利用すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(N_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\Big(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(X|\mathcal{F}_t\right)\Big|\mathcal{F}_s\Big) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(X|\mathcal{F}_s) \\ &= N_s \end{aligned}$$

となり、N_t がマルチンゲールであることが示すことができる。

3　練習問題 3.10

3.1　問題

W_t は $\mathbb{P}$-Brown 運動であるとする。確率過程 $X_t = W_t + \gamma t$ は $\gamma = 0$ のときに $\mathbb{P}$-マルチンゲールとなることを示せ。

3.2　解答

測度 $\mathbb{P}$、時点 $s(<t)$ における履歴 $\mathcal{F}_s$ の下で期待値を取ると

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(X_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(W_t+\gamma t|\mathcal{F}_s)\\ &= W_s+\gamma t\\ &= X_s+\gamma(t-s)\end{aligned}$$

となるので、$\gamma=0$ の場合にのみ X_t は $\mathbb{P}$-マルチンゲールになる。

3.3　もう少し踏み込んでみる

$X_t=\sigma W_t+\gamma t$ のように正定数のボラティリティ $\sigma(>0)$ を与えてみる。このとき、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(X_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\sigma W_t+\gamma t|\mathcal{F}_s)\\ &= \sigma W_s+\gamma t\\ &= X_s+\gamma(t-s)\end{aligned}$$

この場合も同様にドリフト $\gamma=0$ でなければ $\mathbb{P}$-マルチンゲールにならない。

この後すぐに「マルチンゲールであることとドリフト項が無いことは同値」ということを見る。ドリフトが定数でなく時間に依存する場合についてどういう条件が必要かが述べられる。

3.4　（追記）Brown 運動の 2 乗のマルチンゲール

$\mathbb{P}$-Brown 運動を W_t として W_t^2 の測度 $\mathbb{P}$、時点 $s(<t)$ における履歴 $\mathcal{F}_s$ の下で期待値を取ると

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(W_t^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\{W_s+(W_t-W_s)\}^2|\mathcal{F}_s]\\ &= W_s^2 \ + \ 2W_s\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(W_t-W_s|\mathcal{F}_s) \ + \ \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[(W_t-W_s)^2|\mathcal{F}_s]\\ &= W_s^2 \ + \ 0 \ + \ (t-s)\end{aligned}$$

となるので、両辺から t を引くと

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(W_t^2-t|\mathcal{F}_s)=W_s^2-s$$

となって W_t^2-t はマルチンゲールになることがわかる。（W_t-W_s は $\mathcal{F}_s$ とは独立で分散 $(t-s)$ を持つことを利用している。）

3.5　（追記）定数ボラティリティの指数マルチンゲール

$\mathbb{P}$-Brown 運動を W_t として $\exp(\sigma W_t)$ の測度 $\mathbb{P}$、時点 $s(<t)$ における履歴 $\mathcal{F}_s$ の下で期待値を取ると

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[e^{\sigma W_t}|\mathcal{F}_s]=e^{\sigma W_s}\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[e^{\sigma(W_t-W_s)}|\mathcal{F}_s]$$

ここで、前節の積率母関数の話を思い出すと、（W_t-W_s は $\mathcal{F}_s$ とは独立で分散 $(t-s)$ を持つので）

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[e^{\sigma W_t}|\mathcal{F}_s] &= e^{\sigma W_s}\exp\left(0\times\sigma+\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 t\right)\exp\left(\sigma W_s-\frac{1}{2}\sigma^2 s\right)\end{aligned}$$

両辺に $\exp\left(-\dfrac{1}{2}\sigma^2 t\right)$ を掛けると

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[e^{(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)}|\mathcal{F}_s] = e^{(\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s)}$$

となるので、$e^{(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)}$ もマルチンゲールになる。

4　マルチンゲール表現定理

（復習）二項マルチンゲール表現定理

時点 i における二項過程 M_i が $\mathbb{Q}$-マルチンゲールであるとする。さらに別の過程 N_i も $\mathbb{Q}$-マルチンゲールであるとき、ある可予測過程 ϕ_i が存在して、N_i は

$$N_i \ = \ N_0 + \sum_{k=1}^{i} \phi_k \Delta M_k$$

で表される。
（N_i が上のように表現できるような可予測過程 ϕ_i が存在する。）

マルチンゲール表現定理

過程 M_t が $\mathbb{Q}$-マルチンゲールであり、そのボラティリティ σ_t が常に 0 でないとする。さらに別の過程 N_t も $\mathbb{Q}$-マルチンゲールであるとき、

$$\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty$$

を常に満たす可予測過程 ϕ_t が存在して、N_t は

$$N_t \ = \ N_0 + \int_0^t \phi_s dM_s$$

で表される。

二項過程の定理の中の和の部分が積分に変わっただけで同じ定理である。

テキストで説明されている点「M_t が $\mathbb{Q}$-マルチンゲールとなるような測度 $\mathbb{Q}$ が存在するならば、ほかのあらゆる $\mathbb{Q}$-マルチンゲールは M_t を用いて上の式のように表すことができる。そして過程 ϕ_t は単にそれぞれボラティリティの比率となっている。」について考えてみる。

マルチンゲール表現定理を微分形で表現すると、$dN_t = \phi_t dM_t$ となる。
M_t は $\mathbb{Q}$-マルチンゲールなので $\mathbb{Q}$-Brown 運動 $\tilde{W}_t$ を用いて $dM_t = \sigma_t^{(M)} d\tilde{W}_t$ と書ける。（ただし M のボラティリティ $\sigma_t^{(M)}$ は $\sigma_t^{(M)} > 0$ とする。）よって、これを用いると dN_t は $dN_t = \phi_t \sigma_t^{(M)} d\tilde{W}_t$
一方で、N_t も $\mathbb{Q}$-マルチンゲールなので N のボラティリティを $\sigma_t^{(N)}$ と書くと、$dN_t = \sigma_t^{(N)} d\tilde{W}_t$ と表すことができる。
ゆえに dN_t を M と N のボラティリティ $\sigma_t^{(M)}, \sigma_t^{(N)}$ を用いて表すと、$\phi_t \sigma_t^{(M)} d\tilde{W}_t = \sigma_t^{(N)} d\tilde{W}_t$ これを変形して

$$\phi_t \ = \ \frac{\sigma_t^{(N)}}{\sigma_t^{(M)}}$$

テキストの説明の通り、「過程 ϕ_t は単にそれぞれボラティリティの比率となっている。」ということが分かった。

5　ドリフト無し

練習問題 3.10 ですでに少し見たように、ドリフトが無い過程はマルチンゲールである、と言う為の条件がここでより詳細に述べられている。

$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$ を満たすような確率過程 X_t は、条件

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \;<\; \infty$$

を満たすならば、X_t がマルチンゲールであることと $\mu_t = 0$ であることは同値である。

上の条件を満たさない過程は局所マルチンゲールと呼ばれる。

6　指数マルチンゲール

ドリフトの無い幾何 Brown 運動 $dX_t = \sigma_t X_t dW_t$ の場合、X_t がマルチンゲールである為の条件を上のままに当てはめると

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \sigma_s^2 X_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \;<\; \infty$$

になるが、実際には条件はさらに簡潔にすることができて、

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)\right] \;<\; \infty$$

が言えれば十分である、ということが書かれている。

加えてこの場合は解を陽に書き表すことができて、

$$X_t \;=\; X_0 \exp\left(\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)$$

になる。

このことを確かめてみる。

$X_t = X_0 e^{Y_t}$ と置く。$Y_t = \displaystyle\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds$ なので、微分は

$$dY_t \;=\; \sigma_t dW_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt$$

になる。dY_t の二乗は、

$$\begin{aligned} dY_t^2 &= \left(\sigma_t dW_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt\right)^2 \\ &= \sigma_t^2 dt \end{aligned}$$

関数 f を $f(y) = X_0 e^y$ と置いて伊藤の公式を利用する。$f'(y) = f''(y) = X_0 e^y$ なので、

$$\begin{aligned} dX_t &= df(y) \\ &= f'(y)dY_t \ + \ \frac{1}{2}f''(y)dY_t^2 \\ &= X_0 e^{Y_t}\left(\sigma_t dW_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt\right) \ + \ \frac{1}{2}X_0 e^{Y_t}\sigma_t^2 dt \\ &= X_0 e^{Y_t}\sigma_t dW_t \\ &= \sigma_t X_t dW_t \end{aligned}$$

以上から $dX_t = \sigma_t X_t dW_t$ の解が

$$X_t \ = \ X_0 \exp\left(\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)$$

になることが確認できた。

7 練習問題 3.11

7.1 問題

σ が時刻と経路の両方について有界な関数であるならば、$dX_t = \sigma_t X_t dW_t$ は $\mathbb{P}$-マルチンゲールであることを示せ。

7.2 解答

まず $dX_t = \sigma_t X_t dW_t$ にはドリフト項が無いので、指数マルチンゲールであるための条件

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)\right] \ < \ \infty$$

を満たせばマルチンゲールであることが言える。

時点 t、経路 ω を用いて $\sigma_t = \sigma(t,\omega)$ とあらわす。時刻と経路の両方について有界な関数なので、ある定数 K をもって任意の (t,ω) について $|\sigma(t,\omega)| < K$ のように評価できる。二乗して $\sigma^2(t,\omega) < K^2$ であるので、

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) \ \middle| \ \omega\right] < \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t K^2 ds\right) \ = \ \text{const.}$$

これが有限値で押さえられることから、問題の条件では X_t がマルチンゲールであることが示された。

3 章 5 節はここまで。

References

[1] Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing - Martin Baxter, Andrew Rennie