マーケット・プライス・オブ・リスク

Masaru Okada

October 17, 2025

Abstract

Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing - Martin Baxter, Andrew Rennie の 3 章の自主ゼミのノート。2020 年 6 月 3 日に書いたもの。取引可能であるとはどういう意味かを考察する。

Contents

確率過程には取引可能なものと取引不可能なものとがある。

例えば為替レートそれ自体はそのままでは取引不可能である。他国/自国の為替レートであれば、他国の通貨建ての資産の価格をそのレートに乗じて自国通貨の資産の価格に換算する等、あくまでそのレートによって換算された通貨建ての資産が取引されているのであって、為替レートそれ自体が取引されているわけではない。

取引可能か取引不可能の区別はどのように判断されるのかを考える。

ただし、このことは突き詰めて考えると、市場参加者が取引したいかどうか（取引してくれる相手がいるかどうか）という人間の感情によって判断されるところもある。

まずは取引可能とはどういう意味か、から考える必要がある。

ある特定の確率過程 S_t が表す資産は取引可能であると判断し、それを割り引く為の適切な確率過程 B_t を上手く選ぶと、S_t と B_t から構成される市場について考察を進めることができる。

1　マルチンゲールは取引可能である

取引可能資産 $Z_t = B_t^{-1} S_t$ をマルチンゲールにするような測度 $\mathbb{Q}$ が存在し、同じフィルトレーション $\mathcal{F}_t$ に適合的な別の確率過程 V_t を割り引いた価格 $E_t = B_t^{-1} V_t$ が $\mathbb{Q}$-マルチンゲールである場合を考える。

Z_t のボラティリティがゼロにならない場合、マルチンゲール表現定理から

$$dE_t \;=\; \phi_t dZ_t$$

を満たす $\mathcal{F}_t$-可予測な確率過程 ϕ_t が存在する。

これまでの例と同様に、

・ϕ_t 単位の S_t を保有する。

・ψ_t 単位の B_t を保有する。

このような戦略に基づいて ϕ_t, ψ_t からなるポートフォリオを作る。

ただし、ψ_t は

$$\phi_t S_t + \psi_t B_t \;=\; B_t E_t \;=\; V_t$$

を満たすように選ぶ。

すなわち、$\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$ である。この戦略よって構成されるポートフォリオの価格が V_t に常に等しくなるように ψ_t を選ぶ。

この戦略は自己資金調達的である。つまりポートフォリオの価格変化は資産価格の変化によってのみもたらされる。

以上から、S_t と B_t によって V_t を作り出すことができた。

このような V_t を取引可能資産と呼ぶ。

ある確率過程を割り引いたものが $\mathbb{Q}$-マルチンゲールになるということは、取引可能資産（今回の例では S_t と B_t）を用いてその確率過程をコスト無しに作り出すことができるという意味である。

逆に言えば、そのような $\mathbb{Q}$-マルチンゲールそれ自体も取引可能資産ということである。

2　マルチンゲールでなければ取引不可能である

$E_t = B_t^{-1} V_t$ が $\mathbb{Q}$-マルチンゲールでないと仮定する。

このとき、ある時刻 T と s について正の確率で

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} V_T | \mathcal{F}_s) \;\neq\; B_s^{-1} V_s$$

が成立する。

契約 $X = V_T$ を複製する為のコストを U_t とする。すなわち

$$U_t \;=\; B_t^{-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} V_T | \mathcal{F}_t)$$

とする。

　$t=T$ において $U_T=V_T$ であるが、$t(0<t<T)$ においては正の確率で $U_t \neq V_t$ となる。この場合を考察する。

　まず $U_t>V_t$ であるとき、V_t を買って U_t を売れば無限の利益を得ることができる。
　続いて $U_t<V_t$ であるとき、U_t を買って V_t を売れば無限の利益を得ることができる。

　以上から、$E_t=B_t^{-1}V_t$ が $\mathbb{Q}$-マルチンゲールでないと仮定すると、V_t を用いた取引により裁定機会が作り出されてしまい、そのような機会は極短い時間で消滅する。（永続する場合は当事者が無限の富または無限の損が発生する。）
　言い換えると、V_t は取引不可能である。（裁定機会が発生している極短い時間を除けば取引不可能である。）

　取引可能資産 S_t, B_t からなる市場において、別の過程が取引可能か否かについて以上の考察のように判断することができる。
　まとめると、$B_t^{-1}S_t$ のマルチンゲール測度を $\mathbb{Q}$ とすると、過程が $\mathbb{Q}$-マルチンゲールであれば取引可能であり、$\mathbb{Q}$-マルチンゲールでなければ取引不可能である。

3　練習問題 4.1

　測度 $\mathbb{Q}$ の下で株価 S_t と債券価格 B_t が

$$\begin{aligned} S_t &= \exp\left(\sigma\tilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) \\ B_t &= e^{rt} \end{aligned}$$

であるとする。

3.1　(1) $X_t = S_t^2$

　過程 $X_t=S_t^2$ を割り引くと、

$$\begin{aligned} Z_t &= B_t^{-1}X_t \\ &= \exp\left(2\sigma\tilde{W}_t + \left(2r-\sigma^2\right)t - rt\right) \\ &= \exp\left(2\sigma\tilde{W}_t + \left(r-\sigma^2\right)t\right) \end{aligned}$$

その確率微分方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{dZ_t}{Z_t} &= \exp\left(2\sigma d\tilde{W}_t + \left(r - \sigma^2 + \frac{(2\sigma)^2}{2}\right)dt\right) \\ &= \exp\left(2\sigma d\tilde{W}_t + \left(r+\sigma^2\right)dt\right) \end{aligned}$$

であり、この確率微分方程式のドリフト $r+\sigma^2=0$ のときはマルチンゲールになって取引可能であるが、ドリフト $r+\sigma^2 \neq 0$ のときはマルチンゲールにならず取引不可能である。

3.2 (2) $X_t = S_t^{-2r/\sigma^2}$

過程 $X_t = S_t^{-2r/\sigma^2}$ を割り引くと、

$$\begin{aligned} Z_t &= B_t^{-1} X_t \\ &= \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2}\sigma\tilde{W}_t - \frac{2r}{\sigma^2}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t - rt\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2r}{\sigma}\tilde{W}_t - \frac{2r^2}{\sigma^2}t\right) \end{aligned}$$

この確率微分方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{dZ_t}{Z_t} &= \exp\left(-\frac{2r}{\sigma}d\tilde{W}_t + \left(-\frac{2r^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma}\right)^2\right)dt\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2r}{\sigma}d\tilde{W}_t\right) \end{aligned}$$

ドリフトはゼロであり、(r や σ の条件に依らず) マルチンゲールになる。よって取引可能である。

4 取引可能資産とマーケット・プライス・オブ・リスク

今までの最も基本的な Black-Scholes では株価 S_t は

$$S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + \mu t)$$

であり、その確率微分方程式は

$$dS_t = S_t \exp\left(\sigma dW_t + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt\right)$$

であるが、この節に限っては簡単のために

$$dS_t = S_t \exp\left(\sigma dW_t + \mu dt\right)$$

とする。つまり、株価を

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)$$

で定義するところから出発する。このように定義しておくと確率微分方程式を使った議論が易しくなる。

同じ市場に 2 つの異なるリスク資産 S_t^1, S_t^2 が存在する場合を考える。
これらのリスク資産はそれぞれ同一の Brown 運動 W_t に適合的であるとする。

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= S_t^1 \exp\left(\sigma_1 dW_t + \mu_1 dt\right) \\ dS_t^2 &= S_t^2 \exp\left(\sigma_2 dW_t + \mu_2 dt\right) \end{aligned}$$

これらのリスク資産は取引可能であると仮定しているので、それぞれを割り引いた過程に対して共通のマルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ が存在する。ニューメレールが

$$B_t = \exp(rt)$$

であるとすると、$i=1,2$ を用いて略記すると、割引過程は、

$$
\begin{aligned}
S_t^i &= S_0^i \exp\left(\sigma_i dW_t + \left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right) dt\right) \\
B_t^{-1} S_t^i &= S_0^i \exp\left(\sigma_i dW_t + \left(\mu_i - r - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right) dt\right) \\
d(B_t^{-1} S_t^i) &= S_0^i \exp\left(\sigma_i dW_t + (\mu_i - r)\, dt\right)
\end{aligned}
$$

であるので、割引過程 $B_t^{-1}S_t^i$ をマルチンゲールにする測度の下で

$$
\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu_i - r}{\sigma_i} t
$$

が $i=1,2$ で成立する。

つまり、

$$
\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}
$$

であり、この値を γ と置く。

$$
\gamma \;=\; \frac{\mu_i - r}{\sigma_i}
$$

リスク $(\sigma)1$ 単位当たりの、キャッシュボンドの成長率 r を上回る資産収益率 μ であるので、$\gamma = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$ はマーケット・プライス・オブ・リスクと呼ばれる。

マーケット・プライス・オブ・リスクは Girsanov の定理による Brown 運動のドリフト変換に現れる因子そのものである。

マーケット・プライス・オブ・リスクという言葉を用いると、「同一市場における全ての取引可能資産は同一のマーケット・プライス・オブ・リスクを持つ」と言える。

以上は μ、σ が定数の場合であったが、より一般の場合として、μ_t、σ_t が可予測過程であるとき、マーケット・プライス・オブ・リスク $\gamma_t = \dfrac{\mu_t - r}{\sigma_t}$ は確率過程になるが、市場にある全ての取引可能資産に対して γ_t は同一の確率過程になる。

5 リスク中立確率測度

割引過程のマルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ はリスク中立確率測度とも言われる。

その理由は、

$$
\begin{aligned}
d(B_t^{-1} S_t^i) &= B_t^{-1} S_t^i \exp\left(\sigma_i dW_t + (\mu_i - r)\, dt\right) \\
&= B_t^{-1} S_t^i \exp\left(\sigma_i d\tilde{W}_t\right)
\end{aligned}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
B_t^{-1} S_t^i &= B_0^{-1} S_0^i \exp\left(\int_0^t \sigma_i d\tilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_i^2 ds\right) \\
&= B_0^{-1} S_0^i \exp\left(\sigma_i \tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma_i^2 t\right) \\
S_t^i &= S_0^i \exp\left(\sigma_i \tilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right) t\right) \\
dS_t^i &= S_t^i \exp\left(\sigma_i \tilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2 + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right) t\right) \\
&= S_t^i \exp\left(\sigma_i \tilde{W}_t + rt\right)
\end{aligned}
$$

よって、$\mathbb{Q}$ の下での取引可能なリスク資産の価格 S_t^i の確率微分方程式のドリフトはキャッシュボンドの成長率になる。

特に注意すべきなのが、$\mathbb{Q}$ の下では確率微分方程式のドリフト r はリスク (σ_i) に依存していない点である。

つまり、全ての取引可能資産は $\mathbb{Q}$ の下ではドリフトはリスク (σ_i) によらず、キャッシュボンドと同じ成長率になる。

（今回の例は $i = 1, 2$ だが、一般に $i \in \mathbb{N}$ で成立することも全く同じ議論で示すことができる。）

このように $\mathbb{Q}$ はリスク (σ_i) によらない確率測度であるので、リスク中立確率測度と呼ばれる。

マーケット · プライス · オブ · リスクの観点から以上の議論を振り返り、別解答を与える。

一般に S_t の確率微分方程式は $\mathbb{Q}$ の下で

$$dS_t = S_t \exp\left(\sigma \tilde{W}_t + \tilde{\mu} t\right)$$

の形式で書かれる。ここで仮にドリフトを $\tilde{\mu}$ と置いている。

Girsanov の定理を思い出すと、$\mathbb{Q}$-マルチンゲールの下では取引可能資産のマーケット · プライス · オブ · リスクはゼロになる必要がある。

すなわち、

$$\frac{\tilde{\mu} - r}{\sigma} \;=\; 0$$

これは

$$\tilde{\mu} \;=\; r$$

であるので、取引可能資産であれば、一般に、S_t の確率微分方程式は $\mathbb{Q}$ の下で

$$dS_t = S_t \exp\left(\sigma \tilde{W}_t + r t\right)$$

となる。（さっきの式に $\tilde{\mu} \leftarrow r$ を代入しただけ。）つまり $\mathbb{Q}$ の下では σ に依らないリスク中立な表現になっている。

6 取引不可能なものについて

取引不可能である確率過程 X_t を考える。その確率微分方程式が

$$dX_t \;=\; \sigma_t dW_t + \mu_t dt$$

に従うとする。ただし W_t は $\mathbb{P}$-Brown 運動であり、σ_t, μ_t は可予測過程であるとする。

（右辺は前節のように dX_t/X_t ではなく今回は dX_t である。すなわち今までのように exp の過程ではないことに注意する。）X_t それ自身は取引不可能であるが、それに変換 f を施した $Y_t = f(X_t, t)$ は取引可能であるとする。

その確率微分方程式は、伊藤の補題を用いて、

$$\begin{aligned}
dY_t &= \frac{\partial Y_t}{\partial t} dt + \frac{\partial Y_t}{\partial x} dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial x^2} dx^2 \\
&= \frac{\partial Y_t}{\partial t} dt + \frac{\partial Y_t}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial x^2} dX_t^2 \\
&= \frac{\partial Y_t}{\partial t} dt + \frac{\partial Y_t}{\partial x} (\sigma_t dW_t + \mu_t dt) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial x^2} \sigma_t^2 dt \\
&= \left(\frac{\partial Y_t}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial Y_t}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 Y_t}{\partial x^2}\right) dt + \sigma_t \frac{\partial Y_t}{\partial x} dW_t \\
\frac{dY_t}{Y_t} &= \frac{1}{Y_t}\left(\frac{\partial Y_t}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial Y_t}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 Y_t}{\partial x^2}\right) dt + \frac{\sigma_t}{Y_t}\frac{\partial Y_t}{\partial x} dW_t
\end{aligned}$$

最後の等式は、これまでのマーケット・プライス・オブ・リスクと対応させるために両辺を Y_t で割った。(今回の議論の始まりの X_t の確率微分方程式は $dX_t/X_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$ ではなく、$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$ であるので、前節の表式と対応させるには dY_t/Y_t を右辺に作る必要があった。)

このとき、Y_t は取引可能であるので、Y_t のマーケット・プライス・オブ・リスクを考えることが出来る。

ドリフトは

$$\tilde{\mu}_t \;=\; \frac{1}{Y_t}\left(\frac{\partial Y_t}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial Y_t}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 Y_t}{\partial x^2}\right)$$

リスクは

$$\tilde{\sigma}_t \;=\; \frac{\sigma_t}{Y_t}\frac{\partial Y_t}{\partial x}$$

と置くと前節のマーケット・プライス・オブ・リスクと対応付けることができて、キャッシュボンドの金利が確率過程 r_t に従うとすると、

$$\begin{aligned}\gamma_t &= \frac{\tilde{\mu}_t - r_r}{\tilde{\sigma}_t} \\ &= \frac{\dfrac{\partial Y_t}{\partial t} + \mu_t \dfrac{\partial Y_t}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma_t^2 \dfrac{\partial^2 Y_t}{\partial x^2} - r_r Y_t}{\sigma_t \dfrac{\partial Y_t}{\partial x}}\end{aligned}$$

となる。

この γ_t は測度 $\mathbb{P}$ から $\mathbb{Q}$ への測度変換を表していることに留意する。

$\mathbb{Q}$-Brown 運動を $\tilde{W}_t$ とすると、Girsanov の定理から

$$d\tilde{W}_t \;=\; dW_t + \gamma_t dt$$

であるので、以上から $\mathbb{Q}$ の下での X_t の確率微分方程式を知ることが出来る。

$$\begin{aligned}&dX_t \\ &= \sigma_t dW_t + \mu_t dt \\ &= \sigma_t (d\tilde{W}_t - \gamma_t dt) + \mu_t dt \\ &= \sigma_t d\tilde{W}_t - \sigma_t \frac{\dfrac{\partial Y_t}{\partial t} + \mu_t \dfrac{\partial Y_t}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma_t^2 \dfrac{\partial^2 Y_t}{\partial x^2} - r_r Y_t}{\sigma_t \dfrac{\partial Y_t}{\partial x}} dt + \mu_t dt \\ &= \sigma_t d\tilde{W}_t - \frac{\dfrac{\partial Y_t}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma_t^2 \dfrac{\partial^2 Y_t}{\partial x^2} - r_r Y_t}{\dfrac{\partial Y_t}{\partial x}} dt \\ &= \sigma_t d\tilde{W}_t + \frac{r_r Y_t - \dfrac{1}{2}\sigma_t^2 \dfrac{\partial^2 Y_t}{\partial x^2} - \dfrac{\partial Y_t}{\partial t}}{\dfrac{\partial Y_t}{\partial x}} dt\end{aligned}$$

ただし $Y_t = f(X_t, t)$ である。

7　いくつかの例

いくつかの例で、取引不可能な過程について測度 $\mathbb{P}$ の下で確率微分方程式が与えられた場合にリスク中立確率測度 $\mathbb{Q}$ の下で従う確率微分方程式を求める。

7.1 Black-Scholes モデル

X_t が取引可能資産 Y_t の対数であるとする。すなわち、$X_t = \log Y_t$ より

$$Y_t \;=\; \exp X_t$$

さらに $\sigma_t = \sigma = \text{const.}$, $\mu_t = \mu = \text{const.}$ のように定数であるとする。このとき $\mathbb{P}$-Brown 運動 W_t を用いて

$$\begin{aligned} & X_t = \sigma W_t + \mu t \\ \Longleftrightarrow \quad & dX_t = \sigma dW_t + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt \end{aligned}$$

と表せる。ニューメレールは無リスク金利 r を用いて $B_t = e^{rt}$ とする。
以上の設定の下、X_t が測度 $\mathbb{Q}$ の下で満たす確率微分方程式を求める。

この場合のマーケット · プライス · オブ · リスクは、

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\tilde{\mu} - r}{\tilde{\sigma}} \\ &= \frac{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) - r}{\sigma} \end{aligned}$$

であり、これが $\mathbb{Q}$ の下ではゼロになるので $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r = 0$
すなわち、

$$\mu \;=\; r - \frac{1}{2}$$

よって、求めたい答えは測度 $\mathbb{Q}$-Brown 運動 $\tilde{W}_t$ を用いて、

$$dX_t \;=\; \sigma d\tilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma\right) dt$$

以上で終わりだが、せっかく導出した公式を試しに用いて別解を与えると、

$$\begin{aligned} dX_t &= \sigma_t d\tilde{W}_t + \frac{r_r Y_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 Y_t}{\partial x^2} - \frac{\partial Y_t}{\partial t}}{\frac{\partial Y_t}{\partial x}} dt \\ &= \sigma_t d\tilde{W}_t + \frac{r_r \exp X_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 \exp X_t}{\partial x^2} - \frac{\partial \exp X_t}{\partial t}}{\frac{\partial \exp X_t}{\partial x}} dt \\ &= \sigma_t d\tilde{W}_t + \frac{r_r \exp X_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 \exp X_t - 0}{\exp X_t} dt \\ &= \sigma d\tilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt \end{aligned}$$

となり、確かに一致する。

7.2 連続配当がある場合の Black-Scholes

ある株式の株価 S_t と債券価格 B_t が Black-Scholes

$$S_t = \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)$$
$$B_t = \exp(rt)$$

に従うとする。さらに株式を保有している場合、時刻 t から $t+dt$ の時間に配当が $\delta S_t dt$ だけ支払われるとする。

測度 $\mathbb{P}$ の下では、$\mathbb{P}$-Brown 運動 W_t を用いて次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \exp\left(\sigma dW_t + \mu dt\right)$$

配当があるので今の場合 S_t は取引可能資産ではない。

もし株式を $t=0$ で S_0 で購入して時刻 t まで保有した場合、その価格は S_t ではなく、S_t に加えて配当も込みの価格になる。

配当をそのままキャッシュボンドとして持つという戦略と、配当を連続的に株式に再投資する戦略の 2 つの戦略が存在すると仮定すると裁定が発生してしまう。

なので配当を連続的に株式に再投資する戦略を考えることになる。

その連続的に配当を再投資した場合を考える。もし時刻 t で株式を ϕ_t だけ保有しているとすると、時刻 dt で以下のように $d\phi_t$ だけ増加する。

$$d\phi_t = \delta dt$$

これを解くと、

$$\phi_t \;=\; \exp(\delta t)$$

従って時刻 t における株式 S_t の保有量は $\phi_t = \exp(\delta t)$ であり、その価格は $Y_t = \phi_t S_t$ である。

Y_t の確率微分方程式は

$$Y_t = Y_0 \exp\left(\sigma W_t + (\mu + \delta)t\right)$$

なので

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \exp\left(\sigma dW_t + (\mu + \delta)dt\right)$$

となる。

割引資産過程 $B_t^{-1}S_t$ がマルチンゲールになるような確率測度 $\mathbb{Q}$、つまりリスク中立な確率測度 $\mathbb{Q}$ を考える。

Girsanov の定理より、$\mathbb{Q}$-Brown 運動 $\tilde{W}_t$ を用いて、

$$d\tilde{W}_t = dW_t + \gamma dt$$

であるが、このマーケット · プライス · オブ · リスク γ は、

$$\gamma = \frac{(\mu + \delta) - r}{\sigma}$$

であり、取引可能である為には（割引資産過程 $B_t^{-1}S_t$ がマルチンゲールである為には）$\gamma = 0$ すなわち

$$\mu = r - \delta$$

である必要がある。

以上から、取引不可能な S_t が満たすべき確率微分方程式は、リスク中立な確率測度 $\mathbb{Q}$ の下で

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= \exp\left(\sigma dW_t + \mu dt\right)\\ &= \exp\left(\sigma(d\tilde{W}_t - \gamma dt) + (r-\delta)dt\right)\\ &= \exp\left(\sigma(d\tilde{W}_t - 0dt) + (r-\delta)dt\right)\\ &= \exp\left(\sigma d\tilde{W}_t + (r-\delta)dt\right)\end{aligned}$$

となる。(2 行目から 3 行目への等式整理は $\gamma = 0$ であることに留意する。)

7.3 外国為替

C_t を円ドルのレートとする。つまり 1 ドル $= C_t$ 円とする。そしてドル金利が r、円金利が u であるとする。

以上をまとめると、今回のモデルは B_t をドルキャッシュボンド、D_t を円キャッシュボンドとして、

$$\begin{aligned}C_t &= \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)\\ B_t &= \exp(rt)\\ D_t &= \exp(ut)\end{aligned}$$

である。それぞれ単位は C_t(円/ドル)、B_t(ドル)、D_t(円)。

今回は B_t, D_t は取引可能であるが、現金そのものである C_t はそれ単体では取引不可能である。

仮に現金を取引可能とすると、

・現金をそのまま $t = 0$ から $t = T$ まで保有する戦略

・キャッシュボンドを $t = 0$ から $t = T$ まで保有する戦略

この 2 つの戦略の間に裁定が生じるからである。(当然、キャッシュボンドを保有している戦略は確率 1 で現金をそのまま保有する戦略より利益が出る。)

まず、取引不可能な C_t の確率微分方程式について見てみる。測度 $\mathbb{P}$ の下では、$\mathbb{P}$-Brown 運動 W_t を用いて次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dC_t}{C_t} = \exp\left(\sigma dW_t + \mu dt\right)$$

この過程 C_t がリスク中立測度 $\mathbb{Q}$ の下では、$\mathbb{Q}$-Brown 運動 $\tilde{W}_t$ を用いてどのような確率微分方程式に従うかを考える。

ドルによって取引可能な資産はドルキャッシュボンド B_t と円キャッシュボンド D_t を円ドルの為替レート C_t で換算した過程 $Y_t = C_t^{-1}D_t$ である。

$$Y_t = \exp\left(-\sigma W_t + \left(-\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 + u\right)t\right)$$

リスク中立測度 $\mathbb{Q}$ は割引資産過程 $Z_t = B_t^{-1}Y_t$ がマルチンゲールになるような測度であり、

$$Z_t = \exp\left(-\sigma W_t + \left(-\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 + u - r\right)t\right)$$

なので Z_t の満たす確率微分方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dZ_t}{Z_t} &= \exp\left(-\sigma dW_t + \left(-\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 + u - r + \frac{1}{2}(-\sigma)^2\right) dt\right) \\ &= \exp\left(-\sigma dW_t + \left(-\mu + \sigma^2 + u - r\right) dt\right)\end{aligned}$$

Girsanov の定理より、$\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ はそれぞれ同値な測度であるから、$\mathbb{P}$-Brown 運動 W_t と $\mathbb{Q}$-Brown 運動 $\tilde{W}_t$ の間には次を満たすような可予測過程 γ が存在する。

$$d\tilde{W}_t = dW_t + \gamma dt$$

そしてこの γ は Z_t を $\mathbb{Q}$-マルチンゲールにするので、

$$-\sigma d\tilde{W}_t = -\sigma dW_t + \left(-\mu + \sigma^2 + u - r\right) dt$$

を踏まえて

$$\gamma = \frac{-\mu + \sigma^2 + u - r}{-\sigma}$$

Z_t が取引可能である為には $\gamma = 0$、すなわち $\mu = \sigma^2 + u - r$ である。

以上から、取引不可能な過程 C_t は $\mathbb{Q}$-Brown 運動 $\tilde{W}_t$ を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\frac{dC_t}{C_t} &= \exp\left(\sigma dW_t + \mu dt\right) \\ &= \exp\left(\sigma(d\tilde{W}_t - \gamma dt) + (\sigma^2 + u - r)dt\right) \\ &= \exp\left(\sigma(d\tilde{W}_t - 0dt) + (\sigma^2 + u - r)dt\right) \\ &= \exp\left(\sigma d\tilde{W}_t + (\sigma^2 + u - r)dt\right)\end{aligned}$$

References

[1] Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing - Martin Baxter, Andrew Rennie