

クオント

Masaru Okada

October 17, 2025

Abstract

Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing - Martin Baxter, Andrew Rennie の 4 章の自主ゼミのノート。2019 年 11 月 3 日に書いたもの。このノートではクオント・デリバティブの価格評価について、その手順を詳細に解説する。まず、外国の株価指数と為替レートの相関を持つランダムな動きを記述する 2 ファクターモデルを定義する。続いて、マーケット・プライス・オブ・リスクを算出することによってリスク中立測度へ移行するプロセスを示し、最終的にクオント・フォワードとクオント・デジタル・オプション双方の価格評価式を導出する。

Contents

1	クオントモデル	2
2	取引可能資産	3
3	クオント・フォワード	8
4	クオントデジタルオプション	9

クオントと呼ばれる契約について考える。

2019 年 11 月 1 日 (金)、SPX の終値は 3066.91 ドルだった。

日本円を持つ投資家からすると、この 3066.91 の単位はドルであるので、為替レートが例えばドル円レートが 1 ドル 108.18 円であれば、 $3066.91 \times 108.18 = 331778.3238$ (円) に換算されて取引される。

しかしこのドルという単位をある意味で無視して、SPX が S_t ドルのときに S_t 円を支払うというデリバティブを考えることもできる。

つまりペイオフに為替レートを掛けないという契約であり、SPX が 3066.91 ドルのときに 3066.91 円を支払うという、投資家側からすれば考慮する値動きが 1 ファクターで済むような取引である。

このような契約をクオントと呼ぶ。

クオントの 3 つの例について考える。

- ・ 1. クオントフォワード
- ・ 2. クオントデジタルオプション
- ・ 3. クオントコールオプション

クオントフォワードは、例えば満期時 T において SPX の株価が S_T ドルのときに、予め決めておいた値段 K 円 (K ドルではない) を支払うという契約である。

クオントデジタルは、例えば満期時 T において SPX の株価が予め決めておいた値段 K ドルを超えた場合、(1 ドルではなく) 1 円を支払うという契約である。

クオントコールオプションは、例えば満期時 T において SPX の株価が S_T ドルのときに、予め決めておいた権利行使価格 K ドルを超過した場合に限り $(S_T - K)$ 円を支払うという契約である。

原資産 (例えば SPX) を測っている通貨での数値を変えずに異なる通貨に変更して支払われるということは、単純に為替レートに乗じるといったこととは本質的に異なる。

原資産に為替レートに乗じたものは同じ原資産として実際取引される。

しかし原資産の単位だけを変更した証券は概念上の存在であり、実際取引されている原資産ではなく、それはもはや派生商品である。

1 クオントモデル

今回は為替レートと株価という 2 つのランダムネスの源泉がある。

2 つの \mathbb{P} -Brown 運動 $W_1(t), W_2(t)$ があるとき、定数 $\rho \in (-1, 1)$ を用いると、

$$W_3(t) = \rho W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W_2(t)$$

もまた \mathbb{P} -Brown 運動になる。

そして W_1 と W_3 は ρ の相関を持つ。同様に W_2 と W_3 は $\sqrt{1 - \rho^2}$ の相関を持つ。

以上を踏まえて、 \mathbb{P} -Brown 運動の 2-ファクターのモデルとして以下のものを考える^{*1}。

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp(\sigma_1 W_1(t) + \mu t) \\ C_t &= C_0 \exp(\rho \sigma_2 W_1(t) + \bar{\rho} \sigma_2 W_2(t) + \nu t) \\ B_t &= \exp(rt) \\ D_t &= \exp(ut) \end{aligned}$$

ただし $\bar{\rho} = \sqrt{1 - \rho^2}$ のように略記した。

S_t は時刻 t における米株のドル建て価格であり、

C_t は為替レート (1 ドル = C_t 円)、

B_t は円のキャッシュボンド、

D_t はドルのキャッシュボンドである。

(復習)

n 次元の確率変数のベクトル $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ が与えられたとき、 (i, j) 要素が次のような $n \times n$ 行列を X の共分散 (行列) と呼ぶ。

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E}(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j)$$

今、ベクトル (S_t, C_t) の共分散を考えたい。簡単の為に成分に対数を取ったもの $(\log S_t, \log C_t)$ を考え

^{*1} 以下ではテキストを置換 (ドル \rightarrow 円、ポンド \rightarrow ドル)

ると、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \log S_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\log S_0 + \sigma_1 W_1(t) + \mu t) \\
&= \log S_0 + \mu t \\
\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \log C_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\log C_0 + \rho \sigma_2 W_1(t) + \bar{\rho} \sigma_2 W_2(t) + \nu t) \\
&= \log C_0 + \nu t \\
\log S_t - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \log S_t &= \log S_0 + \sigma_1 W_1(t) + \mu t - (\log S_0 + \mu t) \\
&= \sigma_1 W_1(t) \\
\log C_t - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \log C_t &= \rho \sigma_2 W_1(t) + \bar{\rho} \sigma_2 W_2(t)
\end{aligned}$$

であるので、共分散 σ は

$$\begin{aligned}
&\sigma \\
&= \begin{pmatrix} \mathbb{E}[\sigma_1 W_1(t)]^2 & \mathbb{E}[\sigma_1 W_1(t)(\rho \sigma_2 W_1(t) + \bar{\rho} \sigma_2 W_2(t))] \\ \mathbb{E}[(\rho \sigma_2 W_1(t) + \bar{\rho} \sigma_2 W_2(t))\sigma_1 W_1(t)] & \mathbb{E}[(\rho \sigma_2 W_1(t) + \bar{\rho} \sigma_2 W_2(t))^2] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 t & \rho \sigma_1 \sigma_2 t \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 t & \rho^2 \sigma_2^2 t + \bar{\rho}^2 \sigma_2^2 t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} t
\end{aligned}$$

となる。その相関行列 R は $(1/\sqrt{\Sigma_{ii}})$ を (i, i) 成分に持つ対角行列 P を挟んで (左右から掛けて) 得られる。

$$\begin{aligned}
R &= P \sigma P \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{t}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{t}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{t}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

以上から

- ・ $\log S_t$ のボラティリティは σ_1
- ・ $\log C_t$ のボラティリティは σ_2
- ・ $\log S_t$ と $\log C_t$ の相関は ρ

であることが分かった。

2 取引可能資産

ここでは円によって取引できる資産は3つある。

1. 円建てのドルキャッシュボンド $C_t D_t$
2. 円建ての米株 $C_t S_t$
3. 円キャッシュボンド B_t

円キャッシュボンドをニューメレールに選ぶと、1. と 2. の割引資産過程はそれぞれ以下になる。

$$\begin{aligned} Y_t &= B_t^{-1} C_t D_t \\ &= C_0 D_0 e^{-rt} \exp(\rho\sigma_2 W_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 W_2(t) + \nu t) e^{ut} \\ &= Y_0 \exp\{\rho\sigma_2 W_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 W_2(t) + (\nu + u - r)t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_t &= B_t^{-1} C_t S_t \\ &= C_0 S_0 e^{-rt} \exp(\rho\sigma_2 W_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 W_2(t) + \nu t) \\ &\quad \times \exp(\sigma_1 W_1(t) + \mu t) \\ &= Z_0 \exp\{(\sigma_1 + \rho\sigma_2)W_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 W_2(t) + (\mu + \nu - r)t\} \end{aligned}$$

これらが満たす確率微分方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dY_t}{Y_t} &= \rho\sigma_2 dW_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 dW_2(t) + (\nu + u - r) dt \\ &\quad + \frac{1}{2}(\rho\sigma_2)^2 dt + \frac{1}{2}(\bar{\rho}\sigma_2)^2 dt \\ &= \rho\sigma_2 dW_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 dW_2(t) + \left(\nu + u + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r\right) dt \end{aligned}$$

n -ファクターになっても伊藤の公式は同じで、各ブラウン運動の係数を見て、その二乗の半分に dt をかけたものをそれぞれ n 個足し上げれば良い。

Z_t についても同様に

$$\begin{aligned} \frac{dZ_t}{Z_t} &= (\sigma_1 + \rho\sigma_2) dW_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 dW_2(t) + (\mu + \nu - r) dt \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \rho\sigma_2)^2 dt + \frac{1}{2}(\bar{\rho}\sigma_2)^2 dt \\ &= (\sigma_1 + \rho\sigma_2) dW_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 dW_2(t) \\ &\quad + \left(\mu + \nu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}\rho^2\sigma_2^2 + \frac{1}{2}\bar{\rho}^2\sigma_2^2 - r\right) dt \\ &= (\sigma_1 + \rho\sigma_2) dW_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 dW_2(t) \\ &\quad + \left(\mu + \nu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r\right) dt \end{aligned}$$

取引可能資産 Y_t, Z_t が満たすべき確率微分方程式が求まった。

次は Y_t, Z_t をマルチンゲールにするような測度を見つける。

これはドリフト変換を表すマーケット・プライス・オブ・リスクを求めることと同値である。

今、2-ファクターの問題を考えているので、マーケット・プライス・オブ・リスクはスカラーではなく 2 次元のベクトルになる。

確率微分方程式は行列表現で

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} dY_t/Y_t \\ dZ_t/Z_t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2 & \nu + u + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r \\ \sigma_1 + \rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2 & \mu + \nu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \\ dt \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2 \\ \sigma_1 + \rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \nu + u + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r \\ \mu + \nu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r \end{pmatrix} dt
\end{aligned}$$

Brown 運動の微分の項と時間微分の項に分けた。

Brown 運動の微分の項の係数行列をボラティリティ行列と呼び、 Σ で表す。

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2 \\ \sigma_1 + \rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2 \end{pmatrix}$$

ドリフトベクトル μ を次で定義する。

$$\mu = \begin{pmatrix} \nu + u + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \\ \mu + \nu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

ボラティリティ行列 Σ とドリフトベクトル μ を用いると、確率微分方程式は見通し良く次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} dY_t/Y_t \\ dZ_t/Z_t \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} + (\mu - r\mathbf{1})dt$$

このドリフト項を打ち消す為には、ある測度 \mathbb{Q} の下での Brown 運動 $(\tilde{W}_1(t), \tilde{W}_2(t))$ を用いて、

$$\begin{pmatrix} dY_t/Y_t \\ dZ_t/Z_t \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} d\tilde{W}_1(t) \\ d\tilde{W}_2(t) \end{pmatrix}$$

と書ければよく、右辺同士を比較すると

$$\Sigma \begin{pmatrix} d\tilde{W}_1(t) \\ d\tilde{W}_2(t) \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} + (\mu - r\mathbf{1})dt$$

ボラティリティ行列 Σ が逆行列を持てば、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} d\tilde{W}_1(t) \\ d\tilde{W}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} + \Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1})dt \\
&= \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} + \gamma dt
\end{aligned}$$

ただし γ は $(W_1(t), W_2(t))$ に対応するマーケット・プライス・オブ・リスク $\gamma^T = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ である。

$$\gamma = \Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1})$$

\mathbb{Q} -Brown 運動 $(\tilde{W}_1(t), \tilde{W}_2(t))$ を用いて確率微分方程式を記述する為には、マーケット・プライス・オブ・リスクを計算すれば良い。

まずボラティリティ行列の逆行列は、

$$\begin{aligned}\Sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} \rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2 \\ \sigma_1 + \rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\rho\sigma_2\bar{\rho}\sigma_2 - \bar{\rho}\sigma_2(\sigma_1 + \rho\sigma_2)} \begin{pmatrix} \bar{\rho}\sigma_2 & -\bar{\rho}\sigma_2 \\ -\sigma_1 - \rho\sigma_2 & \rho\sigma_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\bar{\rho}\sigma_1\sigma_2} \begin{pmatrix} \bar{\rho}\sigma_2 & -\bar{\rho}\sigma_2 \\ -\sigma_1 - \rho\sigma_2 & \rho\sigma_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\gamma &= \Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{\bar{\rho}\sigma_1\sigma_2} \begin{pmatrix} \bar{\rho}\sigma_2 & -\bar{\rho}\sigma_2 \\ -\sigma_1 - \rho\sigma_2 & \rho\sigma_2 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \nu + u + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r \\ \mu + \nu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r \end{pmatrix}\end{aligned}$$

式が長くなるので成分ごとに分けると、*2

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\bar{\rho}\sigma_2(\nu + u + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r) - \bar{\rho}\sigma_2(\mu + \nu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r)}{\bar{\rho}\sigma_1\sigma_2} \\ &= \frac{u - \mu - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \frac{(-\sigma_1 - \rho\sigma_2)(\nu + u + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r) + \rho\sigma_2(\mu + \nu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r)}{\bar{\rho}\sigma_1\sigma_2} \\ &= \frac{-\sigma_1(\nu + u + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r) + \rho\sigma_2(\mu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 - u)}{\bar{\rho}\sigma_1\sigma_2} \\ &= -\frac{\nu + u + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r}{\bar{\rho}\sigma_2} + \frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 - u}{\bar{\rho}\sigma_1} \\ &= -\frac{\nu + u + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r}{\bar{\rho}\sigma_2} + \frac{1}{\bar{\rho}}\gamma_1 \\ &= -\frac{\nu + u + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r - \rho_2\gamma_1}{\bar{\rho}\sigma_2}\end{aligned}$$

今求めたマーケット・プライス・オブ・リスクを用いることで、 \mathbb{Q} -Brown 運動を用いて確率微分方程式は

*2 長い計算の挙句、 γ_2 についてはテキストときれいにマイナス 1 倍違った（符号が逆転していて後の項は全て同じ。）

次のように書き直すことができる。^{*3}

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} dY_t/Y_t \\ dZ_t/Z_t \end{pmatrix} &= \Sigma \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} + (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})dt \\
&= \Sigma \left\{ \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} + \Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})dt \right\} \\
&= \Sigma \left\{ \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} + \boldsymbol{\gamma}dt \right\} \\
&= \Sigma \begin{pmatrix} d\tilde{W}_1(t) \\ d\tilde{W}_2(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

成分表示すると、

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} dY_t/Y_t \\ dZ_t/Z_t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2 \\ \sigma_1 + \rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{W}_1(t) \\ d\tilde{W}_2(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \rho\sigma_2 d\tilde{W}_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 d\tilde{W}_2(t) \\ (\sigma_1 + \rho\sigma_2)d\tilde{W}_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 d\tilde{W}_2(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

連立微分方程式の形になっているのでこの形式で愚直に解を求めに行こうとするとボラティリティ行列の対角化をする必要があったり、色々と面倒そうに見える。

しかしマーケット・プライス・オブ・リスクの考え方をを用いると、 $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ となるような $\boldsymbol{\mu} = (\mu, \nu)$ をそれぞれ求めて元の資産の過程の $\boldsymbol{\mu}$ に代入するだけでいい。

$\gamma_1 = 0$ より、

$$u - \mu - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 = 0$$

すなわち

$$\mu = u - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2$$

$\gamma_2 = 0$ より、

$$\nu + u + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r - \rho_2\gamma_1 = 0$$

すなわち、

$$\nu = r - u - \frac{1}{2}\sigma_2^2$$

元の資産過程は \mathbb{P} -Brown 運動を用いて

$$\begin{aligned}
S_t &= S_0 \exp(\sigma_1 W_1(t) + \mu t) \\
C_t &= C_0 \exp(\rho\sigma_2 W_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 W_2(t) + \nu t)
\end{aligned}$$

のように表されていたので、 \mathbb{Q} -Brown 運動を用いて記述すると、今求めた $\boldsymbol{\mu}$ を代入して、

$$\begin{aligned}
S_t &= S_0 \exp\left(\sigma_1 \tilde{W}_1(t) + \left(u - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)t\right) \\
C_t &= C_0 \exp\left(\rho\sigma_2 \tilde{W}_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 \tilde{W}_2(t) + \left(r - u - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t\right)
\end{aligned}$$

となる。

^{*3} これは練習問題 4.2 の解答にもなっている。

C_t については \mathbb{Q} -Brown 運動

$$\tilde{W}_3(t) = \rho \tilde{W}_1(t) + \bar{\rho} \tilde{W}_2(t)$$

を用いて

$$C_t = e^{(r-u)t} C_0 \exp \left(\sigma_2 \tilde{W}_3(t) - \frac{1}{2} \sigma_2^2 t \right)$$

と書けるので、ニューメレールに $e^{(r-u)t} = B_t D_t^{-1}$ を選ぶと \mathbb{Q} -マルチンゲールになり、取引可能になる。

一方で S_t は

$$S_t = e^{ut} S_0 \exp \left(\sigma_1 \tilde{W}_1(t) - \frac{1}{2} \sigma_1^2 t \right) e^{-\rho \sigma_1 \sigma_2}$$

であるが、 $e^{-\rho \sigma_1 \sigma_2}$ のような因子が入っており、ドルキャッシュボンド $e^{ut} = D_t$ をニューメレールに選んでも取引可能にはならない。

3 クオント・フォワード

以上で取引可能な資産をマルチンゲールにするような測度 \mathbb{Q} が求まったので、クオント・デリバティブの価格を求めていく。

すぐ上の S_t を \mathbb{Q} -Brown 運動を用いて記述した式について、 S_t の満期 T におけるフォワード価格 $F = e^{uT} S_0$ を用いて、

$$S_t = F \exp \left(\sigma_1 \tilde{W}_1(t) - \frac{1}{2} \sigma_1^2 t \right) e^{-\rho \sigma_1 \sigma_2}$$

と書ける。受け渡し価格 $= K$ (円) のフォワード契約の現在価値は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T - K) \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[F \exp \left(\sigma_1 \tilde{W}_1(T) - \frac{1}{2} \sigma_1^2 T \right) e^{-\rho \sigma_1 \sigma_2} - K \right] \\ &= F e^{-rT} e^{-\rho \sigma_1 \sigma_2} \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma_1^2 T \right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{\sigma_1 \tilde{W}_1(T)} - K e^{-rT} \end{aligned}$$

ここで期待値 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{\sigma_1 \tilde{W}_1(T)}$ は、 $\frac{\tilde{W}_1(T)}{\sqrt{T}}$ が測度 \mathbb{Q} の下で標準正規確率変数 Z に従うので

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{\sigma_1 \tilde{W}_1(T)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left(\sigma_1 \sqrt{T} \frac{\tilde{W}_1(T)}{\sqrt{T}} \right) \\ &= \mathbb{E} \exp \left(\sigma_1 \sqrt{T} Z \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\sigma_1 \sqrt{T} z \right) e^{-\frac{1}{2} z^2} dz \\ &= \exp \left(\frac{1}{2} (\sigma_1 \sqrt{T})^2 \right) \end{aligned}$$

のように積分できる*4。まとめると、

$$\begin{aligned}
V_0 &= e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T - K) \\
&= F e^{-rT} e^{-\rho\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T\right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{\sigma_1 \tilde{W}_1(T)} - K e^{-rT} \\
&= F e^{-rT} e^{-\rho\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T\right) \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 T\right) - K e^{-rT} \\
&= F e^{-rT} e^{-\rho\sigma_1\sigma_2} - K e^{-rT}
\end{aligned}$$

現在価値がゼロになるように（取引する双方が現時点で損も得もしないように）受渡価格 K が設定される。

よって $V_0 = 0$ のときの K の値は、

$$\begin{aligned}
0 = V_0 &= F e^{-rT} e^{-\rho\sigma_1\sigma_2} - K e^{-rT} \\
\iff K &= F e^{-\rho\sigma_1\sigma_2}
\end{aligned}$$

σ_1, σ_2 の値は共に正であるので、株価と為替レートが負の相関 ($\rho < 0$) を持つときに限りクオント・フォワードの価格は通常のフォワード価格 F よりも $e^{-\rho\sigma_1\sigma_2}$ 倍だけ高くなる。

4 クオントデジタルオプション

クオントデジタルオプションは、例えば満期時 T における株価 S_T （ドル）が予め決めておいた値段 K ドルを超えた場合、（1 ドルではなく）1 円を支払うという契約である。

契約は

$$X = 1_{\{S_T > K\}}$$

であり、現在価値 V_0 は

$$\begin{aligned}
V_0 &= B_T^{-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{r \times 0} X) \\
&= B_T^{-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} 1_{\{S_T > K\}} \\
&= B_T^{-1} \mathbb{Q}\{S_T > K\} \\
&= e^{-rT} \mathbb{Q}\{S_T > K\}
\end{aligned}$$

ここで $\mathbb{Q}\{B\}$ は測度 \mathbb{Q} の下で条件 B を満たす確率である。

S_T は \mathbb{Q} -Brown 運動を用いて次のように書けたことを思い出す。

$$\begin{aligned}
S_T &= F \exp\left(\sigma_1 \tilde{W}_1(T) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 T - \rho\sigma_1\sigma_2\right) \\
&= F \exp\left(\sigma_1 \sqrt{T} \frac{\tilde{W}_1(T)}{\sqrt{T}} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 T - \rho\sigma_1\sigma_2\right) \\
&= F \exp\left(\sigma_1 \sqrt{T} Z - \frac{1}{2}\sigma_1^2 T - \rho\sigma_1\sigma_2\right)
\end{aligned}$$

ただし F は満期 T におけるフォワード価格 $F = e^{uT} S_0$ である。また、 Z は \mathbb{Q} の下で $N(0, 1)$ に従う標準正規確率変数である。

*4

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 + ax} dx = e^{\frac{1}{2}a^2}$$

さらに表記の簡単のために

$$F_Q = Fe^{-\rho\sigma_1\sigma_2}$$

と置くと、見慣れた形式になる。

$$S_T = F_Q \exp\left(\sigma_1\sqrt{T}Z - \frac{1}{2}\sigma_1^2T\right)$$

条件 $S_T > K$ を変形すると、

$$\begin{aligned} S_T &> K \\ F_Q \exp\left(\sigma_1\sqrt{T}Z - \frac{1}{2}\sigma_1^2T\right) &> K \\ \exp\left(\sigma_1\sqrt{T}Z - \frac{1}{2}\sigma_1^2T\right) &> \frac{K}{F_Q} \\ \sigma_1\sqrt{T}Z - \frac{1}{2}\sigma_1^2T &> \log \frac{K}{F_Q} \\ Z &> \frac{\frac{1}{2}\sigma_1^2T + \log \frac{K}{F_Q}}{\sigma_1\sqrt{T}} = z_0 \end{aligned}$$

この右辺は煩雑なので一旦 z_0 と置く。

以上を踏まえて現在価値の計算を進めると、

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT} \mathbb{Q}\{S_T > K\} \\ &= e^{-rT} \mathbb{Q}\{Z > z_0\} \\ &= e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= e^{-rT} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - 1 + 1 \right\} \\ &= e^{-rT} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + 1 \right\} \\ &= e^{-rT} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{z_0}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \right) e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + 1 \right\} \\ &= e^{-rT} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} - \int_{z_0}^{\infty} \right) e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + 1 \right\} \\ &= e^{-rT} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + 1 \right\} \\ &= e^{-rT} \{-\Phi(z_0) + 1\} \\ &= e^{-rT} \Phi(-z_0) \\ &= e^{-rT} \Phi\left(\frac{\log \frac{F_Q}{K} - \frac{1}{2}\sigma_1^2T}{\sigma_1\sqrt{T}}\right) \\ &= e^{-rT} \Phi\left(\frac{\log \frac{F}{K} - \frac{1}{2}\sigma_1^2T - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

References

- [1] Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing - Martin Baxter, Andrew Rennie