

二項ツリーモデルにおけるリスク中立確率

Masaru Okada

October 14, 2025

Contents

1	はじめに	3
2	二項枝モデル	3
2.1	株式	3
2.2	債券	3
3	無リスク構築	4
3.1	債券のみの戦略	4
3.2	債券と株式の組み合わせ	4
4	価格の適正性	5
4.1	この価格より安い価格でデリバティブの売買を提案した場合	5
4.2	この価格より高い価格でデリバティブの売買を提案した場合	5
4.3	1段階での全体像	6
5	復活した期待値	6
5.1	$q < 0$ の場合	6
5.2	$q > 1$ の場合	7
5.3	受渡価格が k のフォワード取引のペイオフ	7
6	二項ツリー	8
6.1	株式	8
6.2	キャッシュボンド	8
6.3	ツリーは複雑	8
6.4	後ろ向き帰納法	8
6.5	二段階	9
6.6	ツリーについての期待値	9
6.7	帰納的な段階	10
6.8	帰納による結果	10
6.9	再び期待値	10
6.10	具体例	10
7	二項マルチンゲール表現定理	13

7.1	図に基づいた定義	13
7.2	株価過程 S の定義	13
7.3	確率測度 P, Q の定義	13
7.4	フィルトレーション (F_i) の定義	13
7.5	契約 X の定義	14
7.6	条件付き期待値オペレータ $E_Q(\cdot F_i)$	14
7.7	条件付き期待値の具体例	14
7.8	可予測過程 $\phi = \phi_i$	15
7.9	マルチンゲールの定義	15
7.10	マルチンゲールの例その 1	16
7.11	マルチンゲールの例その 2	16
7.12	マルチンゲールの例その 3	16
7.13	契約の条件付き期待値過程 (Tower Property)	16
7.14	練習問題 2.3	17
7.15	二項マルチンゲール表現定理	17
7.16	説明	18
7.17	金融への応用	19
7.18	構築戦略	19

1 はじめに

本書の究極的な目的は、裁定取引の限界を探ることです。そのために、実際の金融市場の現実的なモデルとして機能し、価格構築の技術を生み出すことができる数学的枠組みを構築していきます。

2 二項枝モデル

私たちの目的に必要な最小限の要件は、次の2つです。

- お金の時間的価値を表すもの
- 株式を表すランダムな要素

これら2つがなければ、いかなるモデルも実際の金融市場と関連性を持つとは考えられません。まずは、債券と株式から成る、可能な限りシンプルなモデルを検討することから始めましょう。

2.1 株式

時刻 $t = 0$ で始まり $t = \delta t$ で終わる、非常に短い期間を考えます。株価を表す変数は、予測不可能なランダムな要素を持っているのが理想的です。この短い期間 δt では、株価は上昇するか、もしくは下降するかの2通りの変化しか起こらないと仮定します。

このランダムさに何らかの構造を持たせることを考えます。つまり、価格の上昇と下降に確率を割り当てるのです。短い期間 δt での上昇確率を p 、下降確率を $(1 - p)$ とします。 $t = 0$ の初期価格を s_1 とします。この価格は、私たちが量に制限なく売買できる価格を表しています。私たちは δt の間、その株式を保有できます。株式を保有している間は何も起こりません。つまり、正負いずれの量を保有してもコストはかからないとします。しかし、 δt の時間が経過した後、株式は新しい価格を持つと仮定します。 δt の後、下降すれば価格は s_2 に、上昇すれば s_3 になるとします。

2.2 債券

お金の時間的価値を表す何か、すなわちキャッシュボンドも考慮に入れる必要があります。株式の場合と同様に、 $t = 0$ で始まり $t = \delta t$ で終わる非常に短い期間を考えます。 δt が経過した後、時刻 $t = 0$ における1ドルが $\exp(r\delta t)$ になるような連続複利 r が存在すると仮定します。この金利で任意の金額を貸し借りできるとします。これを表現する変数として、 $t = 0$ において価格 B_0 で売買できるキャッシュボンド B を導入します。つまり、このキャッシュボンドは、 δt が経過した後、価格が $B_0 \exp(r\delta t)$ になるのです。

これらたった2つの道具が、私たちの金融の世界のすべてです。単純化されているとはいえ、この世界は投資家にとっては相変わらず不確実性をもたらします。市場参加者にとって、 δt が経過した後の株価が取り得る2つの値のうち、どちらか一方が都合が良いのです。（例えば、株を空売りしている場合は、価格が下落する方が都合が良い。）都合が良いか悪いかは、ランダムな結果に左右されます。投資家が将来の株価に基づいた支払いを要求する場合、 δt における株価の取り得る2つの可能性である s_2 と s_3 に対して、支払額は関数 f を用いてそれぞれ $f(2)$ と $f(3)$ に対応させるような関数で表現できます。例えば、受渡価格が k と契約されたフォワード契約は、 $f(2) = s_2 - k$ および $f(3) = s_3 - k$ で表されます。

3 無リスク構築

適切な戦略によって、具体的にどのような関数 f が提供されるかを考えてみましょう。第 1 章で述べたように、フォワード契約では、時刻 $t = 0$ で s_1 の価格で株式を購入し、その購入代金を賄うために同額 s_1 のキャッシュボンドを売却し、満期 δt までそのポジションを保有します。したがって、その代金としては $s_1 \exp(r\delta t)$ を請求すればよいのです。このことから、フォワード契約の価格は

$$k = s_1 \exp(r\delta t)$$

となります。これが裁定を通した価格決定です。

より複雑な f について、価格構築戦略を見つけることは一見できないように思われます。非常に短い時間 δt の後、株価はランダムに 2 つの値を取り、同様に、デリバティブも一般的に $t = 0$ の価格とは異なる価格になります。デリバティブの各支払額に対する確率が分かっているならば、同様に満期時の f の期待価格、すなわち $(1-p)f(2) + pf(3)$ もわかるでしょう。しかし実際には、時刻 $t = 0$ の時点では、将来の時刻 $t = \delta t$ の間に価格が遷移する確率 p はわかっていません。

3.1 債券のみの戦略

キャッシュボンドだけのポートフォリオを考えてみましょう。 δt の経過で、このキャッシュボンドは $\exp(r\delta t)$ 倍に増えます。つまり、時刻 $t = 0$ で $\exp(-r\delta t)[(1-p)f(2) + pf(3)]$ の価格でキャッシュボンドを購入すると、 δt 後には $(1-p)f(2) + pf(3)$ の価格になります。この価格は、それがデリバティブの期待価格となるため、目指すべき目標として選択されます。

S を、時刻 $t = 0$ における最初の価格 s_1 、下降価値 s_2 、上昇価値 s_3 を持つ二項枝の過程とします。上昇確率 p のもとで、時刻 1 における S の期待値（または期待価格） $E_p(S_1)$ は、

$$E_p(S_1) = (1-p)s_2 + ps_3$$

となります。

S に対する契約 f は、 S_1 と同様に確率変数です。つまり、契約 f も同様に期待値が定義されます：

$$E_p[f(1)] = (1-p)f(2) + pf(3)$$

また、確率 p による期待値に割引率をかけたもの

$$\exp(-r\delta t)[(1-p)f(2) + pf(3)]$$

を、割引期待値（または割引期待価格）と呼びます。

しかし、この価格構築戦略が良いものとなる可能性はほとんどありません。これは、第 1 章で見た大数の法則が形を変えて再び現れたものであり、第 1 章の時と同様に、裁定による価格の強制を見落としています。そして、この期待値は少なくともフォワード取引には適用できないことを、すでに第 1 章で見었습니다。フォワード価格は $f(2), f(3)$ （つまり s_2, s_3 ）では表されず、むしろ債券に伴う金利 r によって $s_1 \exp(r\delta t)$ に強制されるのです。

3.2 債券と株式の組み合わせ

もっと良い組み合わせを考えていきましょう。非常に短い期間のポートフォリオを構築するために、債券と株式の両方を利用することを考えます。株式とデリバティブのパフォーマンスにより強く結びついている道具は、単なるキャッシュボンドではなく、実は株式そのもののなのです。

一般的なポートフォリオを (ϕ, ψ) として、 ϕ 単位の株式 S （その価格は ϕs_1 ）と ψ 単位のキャッシュボンド B （価格は ψB_0 ）を保有すると仮定します。このポートフォリオを $t = 0$ で購入すると、その取得コストは $\phi s_1 + \psi B_0$ となります。しかし、 $t = \delta t$ では、このポートフォリオは以下の 2 つの値のうちいずれか一つになります。株価が上昇した場合の契約 f の価格:

$$f(3) = \phi s_3 + \psi B_0 \exp(r\delta t)$$

株価が下降した場合の契約 f の価格:

$$f(2) = \phi s_2 + \psi B_0 \exp(r\delta t)$$

今、私たちには 2 つの価格の可能性と、2 つの自由な変数 ϕ と ψ があります。株式が適切に動くという条件下で、一致させたい 2 つの価格 $f(3)$ と $f(2)$ が手元にあります。（※この問題は、契約 f の値 $f(2), f(3)$ と将来の株式の値 s_2, s_3 がすでに決まっている場合に、その株式と現金（債券）をどれだけ保有すればよいかという問題であり、 $s_2, s_3, f(2), f(3)$ の値が分かっている場合の ϕ と ψ の値を知りたい。） $s_3 \neq s_2$ の場合、これらは次のように等式変形できます。

$$\phi = \frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2}$$

$$\psi = B_0^{-1} \exp(-r\delta t) \left\{ f(3) - s_3 \frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2} \right\}$$

4 価格の適正性

債券と株式から成る適切なポートフォリオを使えば、いかなるデリバティブ f をも構築することができます。この事実は契約に何らかの影響を及ぼすはずであり、実際に市場は、期待価格ではなく、これを合理的な価格として認めています。このポートフォリオを $t = 0$ で購入すると、その取得コストは $V = \phi s_1 + \psi B_0$ であり、先ほどの結果を代入すると、

$$V = \frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2} s_1 + \exp(-r\delta t) \left\{ f(3) - s_3 \frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2} \right\}$$

となります。したがって、連続複利金利 r 、契約 $f(2), f(3)$ 、将来の株価 s_2, s_3 の値が分かっているならば、任意のデリバティブを複製できます。

4.1 この価格より安い価格でデリバティブの売買を提案した場合

この V より安い価格 P でデリバティブの売買が提案されたと仮定しましょう。別の市場参加者は、彼らから安いデリバティブを価格 P で任意の量購入することが可能です。また、その価格 P で任意の量購入した分と同じ金額の (ϕ, ψ) のポートフォリオを売却することもできます。極短期間 δt が経過した後、株価がどうなっていようと、デリバティブの価格 P はポートフォリオの値段を相殺できます。この取引は、購入されたデリバティブとポートフォリオの取引単位ごとに $V - P$ の利益を生み出します。つまり、誰でもリスクのない利益をいくらでも得ることができるのです。したがって、 P は市場参加者が認めるには合理的な価格ではなく、このタダで得られる利益を狙って、市場は素早く正しい価格 V へと是正されるでしょう。

4.2 この価格より高い価格でデリバティブの売買を提案した場合

この V より高い価格 P でデリバティブの売買が提案されたと仮定しましょう。別の市場参加者は、彼らから高いデリバティブを価格 P で任意の量売却することが可能です。また、その価格 P で任意の量売却し

た分と同じ金額の (ϕ, ψ) のポートフォリオを購入することもできます。極短期間 δt が経過した後、株価がどうなっていようと、デリバティブの価格 P はポートフォリオの値段を相殺できます。この取引は、売却されたデリバティブとポートフォリオの取引単位ごとに $P - V$ の利益を生み出します。つまり、誰でもリスクのない利益をいくらでも得ることができるのです。したがって、 P は市場参加者が認めるには合理的な価格ではなく、このタダで得られる利益を狙って、市場は素早く正しい価格 V へと是正されるでしょう。

契約の相手方がリスクのない利益を手にするのを避けるには、価格 V を提示することだけが唯一の方法です。こうして、 V だけが時刻 $t = 0$ におけるデリバティブの合理的な価格となります。

4.3 1 段階での全体像

4.3.1 問題

利息の付かない債券と株式があり、どちらも $t = 0$ で 1 ドルでした。将来の $t = \delta t$ では、株価は 2 ドルまたは 0.5 ドルになります。株価が上昇した場合に 1 ドルもらえる賭けに見合う賭け金はいくらでしょうか？

4.3.2 解答

債券の価格を B 、株価を S 、求めたい賭けの支払いを X とします。先ほどの V の式を参照すると、今回の問題では $r = 0$ 、 $f(3) = 1$ 、 $f(2) = 0$ 、 $s_3 = 2$ 、 $s_2 = 0.5$ 、そして $B_0 = 1$ です。

$$X = \frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2} s_1 + \exp(-r\delta t) \left\{ f(3) - s_3 \frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2} \right\}$$

代入すると $X = 1/3$ となり、この問題の答えは 0.33 ドルです。また、

$$\phi = \frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2}$$

$$\psi = B_0^{-1} \exp(-r\delta t) \left\{ f(3) - s_3 \frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2} \right\}$$

なので、それぞれ代入すると、 $\phi = 2/3$ 、 $\psi = -1/3$ となります。すなわち、このデリバティブ（というか「賭け」）を複製するには、債券を $2/3$ 単位購入し、株式を $1/3$ 単位売却すればよいのです。実際、 $t = 0$ では $2/3 \times 1 - 1/3 \times 1 = 1/3$ （ドル）であり、 $t = \delta t$ において株価が上昇した場合は $2/3 \times 2 - 1/3 \times 1 = 1$ （ドル）、株価が下降した場合は $2/3 \times 0.5 - 1/3 \times 1 = 0$ となり、今回の問題の「賭け」の支払額と全く同じ結果となります。

5 復活した期待値

大数の法則に基づくアプローチは無駄であり、偶然の一致は別として、確率 p と確率 $(1 - p)$ で計算された期待価格は裁定機会を生むことになる、とすでに述べました。ここで、唐突に以下の数値 q を考えてみましょう。

$$q = \frac{s_1 \exp(r\delta t) - s_2}{s_3 - s_2}$$

以降、 $s_3 > s_2$ と仮定します。（ $s_3 > s_2$ としても一般性は失われません。）

5.1 $q < 0$ の場合

もし $q < 0$ であれば、不等式 $s_1 \exp(r\delta t) < s_2 < s_3$ が成り立つことになります。しかし、 $s_1 \exp(r\delta t)$ は、 $t = 0$ で s_1 の価格分の債券を購入したときに得られる価格です。したがって、 $s_1 \exp(r\delta t) < s_2$ が成り立つ

場合、時刻 $t = 0$ で任意の量の債券を売って、そのお金で価格 s_1 の株式を任意の量購入することで、無限の利益が得られてしまいます。つまり、無裁定の仮定のもとでは、 $q < 0$ は成立しません。

5.2 $q > 1$ の場合

もし $q > 1$ であれば、不等式 $s_2 < s_3 < s_1 \exp(r\delta t)$ が成り立つことになります。 $s_1 \exp(r\delta t)$ は、時刻 $t = 0$ で s_1 の価格分の債券を購入したときに得られる価格です。したがって、 $s_3 < s_1 \exp(r\delta t)$ が成り立つ場合、時刻 $t = 0$ で任意の量の債券を購入し、そのお金で価格 s_1 の株式を任意の量売却することで、無限の利益が得られてしまいます。つまり、無裁定の仮定のもとでは、 $q > 1$ は成立しません。

以上のことから、合理的な市場構造（すなわち無裁定条件）では、数値 q は $0 \leq q \leq 1$ を満たすため、数値 q を何らかの確率と見なすことができます。

驚くべきことに、 (ϕ, ψ) のポートフォリオの価格 V

$$V = \frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2} s_1 + \exp(-r\delta t) \left\{ f(3) - s_3 \frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2} \right\},$$

は、 $q = \frac{s_1 \exp(r\delta t) - s_2}{s_3 - s_2}$ を用いて等式変形すると、次のように表現できます。

$$V = \exp(-r\delta t) \{(1 - q)f(2) + qf(3)\}$$

これは、以前出てきた期待値の演算子 $E_p[f(1)] = \exp(-r\delta t) \{(1 - p)f(2) + pf(3)\}$ を使って表現すると、

$$V = E_q[f(1)]$$

となります。つまり、 (ϕ, ψ) ポートフォリオの裁定条件によって決定された妥当な価格 V は、実は確率 q における割引期待価格だったのです。

5.3 受渡価格が k のフォワード取引のペイオフ

受渡価格が k のフォワード取引のペイオフは、

$$f(2) = s_2 - k$$

$$f(3) = s_3 - k$$

です。正しい受渡価格 k を求めましょう。この取引では、 $t = 0$ でポートフォリオを保有する必要はありません（ $t = 0$ で債券を借りて株を買い、そのまま満期を迎えたときに契約相手に株を引き渡してお金を得て、最後はそのお金で $t = 0$ で借りた借金を返済します）。 $V = 0$ であることから、

$$\begin{aligned} V &= \frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2} s_1 + \exp(-r\delta t) \left\{ f(3) - s_3 \frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2} \right\} \\ &= \frac{(s_3 - k) - (s_2 - k)}{s_3 - s_2} s_1 + \exp(-r\delta t) \left\{ (s_3 - k) - s_3 \frac{(s_3 - k) - (s_2 - k)}{s_3 - s_2} \right\} \\ &= \frac{s_3 - s_2}{s_3 - s_2} s_1 + \exp(-r\delta t) \left\{ s_3 - k - s_3 \frac{s_3 - s_2}{s_3 - s_2} \right\} = s_1 + \exp(-r\delta t)(s_3 - k - s_3) = s_1 - k \exp(-r\delta t) \end{aligned}$$

したがって、 $V = 0$ のとき、 $k = s_1 \exp(r\delta t)$ となります。

6 二項ツリー

二項枝から二項ツリーへと議論を進めていきます。1 期間だけの経過は分析しやすいですが、モデルとしては最小限のものを示すにすぎません。二項枝の場合、キャッシュボンドとランダムな株式を持っていたとしても、株価の時間経過後の価格は 2 パターンに絞られていました。二項枝から二項ツリーへと話を展開していくと何が言えるかを見ていきましょう。

以下では 1 期間ではなく、多時間の時間発展を見ます。ここでもキャッシュボンドとランダムな株式しか持たないものとし、取引費用や債務不履行に陥るリスク、ビッドとオファーの спреッド 無しに無限に売り買いできるものとしします。

6.1 株式

株価 S は前節と同様に、 $t = 0$ における S の値が $S_0 = s_1$ のとき、時間の最小単位 δt だけ経過した後、 $S_1 = s_2$ または $S_1 = s_3$ の 2 値しか取らないとします。しかし、 $2\delta t$ 時間経過後、 s_2 からは $S_2 = s_4$ または s_5 に、 s_3 からは $S_2 = s_6$ または s_7 になり得ます。自然数 i として、時間 $i\delta t$ 経過後、株式は 2^i 個の値を取ります。しかし、時間 $(i-1)$ における値が与えられると、考えられる可能性はたった 2 つしかありません。 s_j の次の値は s_{2j} 、または $s_{(2j+1)}$ です。また、株価の上昇確率（つまり s_j が $s_{(2j+1)}$ になる確率）を p_j とすると、下降確率（つまり s_j が s_{2j} になる確率）は $1 - p_j$ です。

6.2 キャッシュボンド

6.2.1 一般論

キャッシュボンドのパフォーマンスにランダムな可能性があることは認めることができます。（ただし、その実際の正確な形状については今は特に興味を持っていません。）キャッシュボンドの場合は、株式とは全く違った種類のランダムです。キャッシュボンドはお金の時間的価値と同じ構造を持っています。支払われるべき金利は時間によってのみ変化し得ます。しかし次の瞬間のキャッシュボンドの価値はいつも分かっています。なぜならば、この値は $t = 0$ で既知である金利にのみ依存するからです。

6.2.2 仮定

ここではツリーのどこでも一定である金利 r を導入します。つまり、時点 $n\delta t$ におけるキャッシュボンドの値は $B_0 \exp(rn\delta t)$ です。

6.3 ツリーは複雑

私たちの最終目的は、原資産が連続時間の中で連続した値を取る場合に、無リスク構築の限界を理解することです。そして $\delta t \rightarrow 0$ の極限では、この私たちのモデルはこの最終目的に非常に一致します。ツリーが単純だと諦めてしまうのではなく、その分析を進めていく目的に対しては、それほど複雑ではないと言うべきです。

6.4 後ろ向き帰納法

実は大半の準備はすでに 1 期間の二項枝の議論で終わっています。この多期間の二項ツリーの鍵となるポイントは、支払いが発生する最終時点から価格を求めたい期首の時間まで、ごく短い時間ごとに遡って構築

ポートフォリオを広げていく後ろ向き帰納法です。1 期間二項枝の議論と同様に最終時点（満期）での支払額（ペイオフ）の関数 f がありました。多期間の二項ツリーでは期初 $t = 0$ から満期に至るまでの途中の契約にまで考えを拡張することができます。

二項ツリーの構造は、「交点」と「株式がその交点に至るまでの経路」との間に 1 対 1 の関係を持つものがあります。ある交点へ至る経路とは異なる別の経路をたどればその交点へはたどり着きません。この条件により、「ある契約の支払額 f 」と「ある特定の終点」とを対応付けることができます。一般的な契約は、この契約の満期における交点上の関数 f と考えることができます。

6.5 二段階

期待値オペレータ $E_p[\cdot]$ は、一つの枝（1 期間二項枝）に対して定義されました。ここでは二段階、すなわち 3 つの枝を持つツリーについて計算していきます。どの枝にも適用される金利も金利 r で一定であるとします。1 期間二項枝の議論より、単位時間 i における交点 j のデリバティブの価格 $f(j)$ を示す、適切な q_j の組み合わせが存在し、

$$f(j) = \exp(-r\delta t)(q_j f(2j+1) + (1 - q_j)f(2j))$$

となります。これは時点 $(i+1)$ における契約価格 $f(2j+1)$ と $f(2j)$ の確率（測度） q_i の下での割引期待値です。 $j = 3, 2$ でそれぞれ

$$f(3) = \exp(-r\delta t)(q_3 f(7) + (1 - q_3)f(6))$$

$$f(2) = \exp(-r\delta t)(q_2 f(5) + (1 - q_2)f(4))$$

ここで確率 q_j は、

$$q_j = \frac{s_j \exp(r\delta t) - s_{2j}}{s_{(2j+1)} - s_{2j}}$$

すなわち、

$$q_3 = \frac{s_3 \exp(r\delta t) - s_6}{s_7 - s_6}$$

$$q_2 = \frac{s_2 \exp(r\delta t) - s_4}{s_5 - s_4}$$

です。

$$f(1) = \exp(-r\delta t)(q_1 f(3) + (1 - q_1)f(2))$$

なので、全て代入していくと、

$$f(1) = \exp(-2r\delta t)\{q_1 q_3 f(7) + q_1(1 - q_3)f(6) + (1 - q_1)q_2 f(5) + (1 - q_1)(1 - q_2)f(4)\}$$

となります。

ここから次のことが分かります。

6.6 ツリーについての期待値

ツリーの最終点における請求 f の期待値は、各々の経路の確率に支払額を掛けて合計したものです。

2 段階のツリーでは最終点に至るまでに 4 通りの経路がありました。したがって $f(1)$ は 4 項から構成されています。経路の確率はそれぞれ $q_1 q_3$, $q_1(1 - q_3)$, $(1 - q_1)q_2$, $(1 - q_1)(1 - q_2)$ でした。そのそれぞれに対応する請求は各終点 $f(7)$, $f(6)$, $f(5)$, $f(4)$ でした。期間は $2\delta t$ あり、割引率として $\exp(-2r\delta t)$ が乗じられています。

6.7 帰納的な段階

時点 $(n-1)$ における 1 交点から時点 n における 2 つの交点（合計で 3 点）を考えます。前節の結果により、時点 n においては株式と債券からなるリスクの無いポートフォリオ (ϕ, ψ) によって複製することができます。そして、この 3 点のみ考えると 1 期間の二項枝モデルと区別が付きません。（1 期間の二項枝モデルと全く同じです。）

6.8 帰納による結果

帰納法によって、ツリーを時間発展と逆向きに（つまり契約満期から $t=0$ へ）と辿っていくことで、それぞれの枝におけるポートフォリオ (ϕ, ψ) を構築（複製）することができます。ツリー全体の根幹である $t=0$ にただ一つの値だけが到達します。これは $t=0$ におけるデリバティブの価格です。これは、1 期間二項枝モデルの場合と同様に、その株式が実際にどんな経路を辿ろうとも、私たちは裁定という強い制約の下で唯一のポートフォリオ (ϕ, ψ) を構築（複製）することができるためです。このポートフォリオ (ϕ, ψ) は各単位時間ごとに変動します。この構築ポートフォリオでは、一つの交点における一つの株式保有量 ϕ だけでなく、全ての交点におけるそれぞれ全ての株式保有量 ϕ が求まっています。つまり、運命のコイン（表か裏しか出ないコイン）が投げられ、ツリー上で株式が変動したとき、この保有量（保有すべき量） ϕ も変動します。この構築ポートフォリオ (ϕ, ψ) は株式と同様にランダムではありますが、株式と異なる最も重要な点は、「株式とは異なり、構築ポートフォリオ (ϕ, ψ) はちょうどそのタイミングに売買できるような量が、その単位時間分 1 つ事前に分かる」ということです。（例えば前節の p.28 の例題）全ての契約は株式と債券から成るポートフォリオで複製することができます。そして全ての契約は無裁定価格を持ちます。

6.9 再び期待値

今まで確率 p_j （前述の株価の上昇確率、すなわち s_j が $s_{(2j+1)}$ になる確率）を必要としませんでした。たまたま立式上で p_j を必要としなかったのではなく、ここにはしっかりとしたロジックがあります。前節の結論は、適切な「確率」に関して期待値オペレータが正しいローカル（各時における、時間に依存する）ヘッジを与えるということと同値であるということこれから見ていきます。

6.10 具体例

図 2.5 のように各点における株価の上昇確率は $3/4$ 、下降確率は $1/4$ という 3 期間二項ツリーを考えます。問題は、時点 3 において値段 100 で株式を購入できるというオプションの価格を求めよ、というものです。

図 2.5 の最終時点（満期）における価格はそれぞれ 160, 120, 80, 40 であり、100 より大きければ権利行使をして、100 より小さければ権利放棄することから、オプション価格の二項ツリーの満期時の価格はそれぞれ $60 (= 160 - 100)$, $20 (= 120 - 100)$, $0, 0$ となります。

ここで新しい確率 q と契約価格 f のための新しい方程式が必要になります。それぞれは、

$$q = \frac{s_{\text{now}} - s_{\text{down}}}{s_{\text{up}} - s_{\text{down}}}$$

$$f_{\text{now}} = qf_{\text{up}} + (1 - q)f_{\text{down}}$$

でそれぞれ求まります。

この新しい確率 q は全ての交点において $1/2$ となります。実際、例えば時点 2 で株価が 140 の枝については、

$$q = \frac{140 - 120}{160 - 120} = 1/2$$

時点 1 で株価が 80 の枝については、

$$q = \frac{80 - 60}{100 - 60} = 1/2$$

契約価格は、例えば時点 2 で株価が 140 だった交点については、

$$f_{now} = (1/2) \times 60 + (1/2) \times 20 = 40$$

時点 1 で株価が 80 の枝については、

$$f_{now} = (1/2) \times 10 + (1/2) \times 0 = 5$$

以上の手続きを進めることで全ての時点（交点）でのリスク中立確率、契約価格が分かります。

6.10.1 q と f の実際の利用方法について

具体的なヘッジ戦略を考えます。以下で定義される ϕ を計算していきます。

$$\phi = \frac{f_{up} - f_{down}}{s_{up} - s_{down}}$$

これは二項枝モデルにおける当初 ($t = 0$) の複製ポートフォリオの株式の保有量です。

- **$t = 0$ における戦略（株価=100、オプション価格=15 の交点）** 先ほどの手続きで時点 0 におけるオプションの価格は 15 と求まりました。（この「オプションの価格」は例題における「ブックメーカー（胴元、今回は私たちの立場）に支払われるゲームの参加料」と同じ意味です。）まず最初はオプションには 15 の価値があります。（つまりこの「ゲーム」の参加料は 15 です。）さて、この $t = 0$ においては $\phi = (25 - 5)/(120 - 80) = 1/2$ です。 $t = 0$ 時点では株式の値段は 100 であり、これを $1/2$ 単位購入するには 50 のコストがかかります。つまり、(期初オプション価格) - (保有すべき株価) = $15 - 50 = -35$ であり、 $\phi (= 0.5)$ 単位の株式を保有するには 35 の借り入れが必要になります。以上から、時点 0 における借り入れは 35 です。
- **時点 1 における戦略（株価=120、オプション価格=25 の交点に到達した場合）** 時点 1 のこの交点における ϕ は $\phi = (40 - 10)/(140 - 100) = 3/4$ です。 $t = 0$ では $\phi = 1/2$ だったので、新たな ϕ に一致させるためには ϕ を（つまり株式の保有量を） $3/4 - 1/2 = 1/4$ だけ増やさなければなりません。この交点での株価は 120 なので、新たな ϕ に一致させるために $120 \times (1/4) = 30$ だけ株式を買い増ししたいです。したがって、新たな ϕ に一致させるためにさらに 30 だけ借り入れを行います。 $t = 0$ で 35 だけ借り入れていたので、この交点においてトータルの借り入れは 65 になりました。
- **時点 2 における戦略（株価=140、オプション価格=40 の交点に到達した場合）** 時点 2 のこの交点における ϕ は $\phi = (60 - 20)/(160 - 120) = 1$ です。1 つ前の交点では $\phi = 3/4$ だったので、新たな ϕ に一致させるためには ϕ を（つまり株式の保有量を） $1 - 3/4 = 1/4$ だけ増やさなければなりません。この交点での株価は 140 なので、新たな ϕ に一致させるために $140 \times (1/4) = 35$ だけ株式を買い増ししたいです。したがって、新たな ϕ に一致させるためにさらに 35 だけ借り入れを行います。1 つ前の交点で 65 だけ借り入れていたので、この交点においてトータルの借り入れは 100 になりました。
- **時点 3(満期時) における戦略（株価=120、オプション価格=20 の交点に到達した場合）** $120 > 100$ （満期時の株価 > オプションの権利行使価格）なので、オプションは権利行使されます。私たちは

$\phi = 1$ だけ株式を受け渡します。1 つ前の時点でトータル 100 だけ借り入れた分を返済するために、株式を受け渡した相手から現金を 100 受け取ります。以上から、オプションの価格は $t = 0$ において 15 でなければオプションを売る側が損をしてしまうので、15 が妥当な価格であることが分かりました。

以上が ϕ の利用方法です。もう一度同じツリーで今の例とは別の経路の例を考えてみます。

- **$t = 0$ における戦略 (株価=100、オプション価格=15 の交点)** $t = 0$ においては $\phi = (25 - 5) / (120 - 80) = 1/2$ であり、オプションの価格 = 複製ポートフォリオの債券 + 複製ポートフォリオの株式 債券 = オプション - 株式 = オプション - 株価保有量 $\phi * 株価 = 15 - (1/2) \times 100 = -35$ です。つまり $t = 0$ でまずは $\phi = 1/2$ にするために 35 の借り入れを行います。(さっきの例と全く同じ議論です。)
- **時点 1 における戦略 (株価=80、オプション価格=5 の交点に到達した場合)** $\phi = (10 - 0) / (100 - 60) = 1/4$ です。債券 = オプション - 株式 = $5 - 80 \times 1/4 = -15$ です。前時点で 35 の借り入れでしたが、この交点においては 15 まで借り入れを縮小します。(つまり、借り入れている額を 15 まで縮小するように、保有していた株式を部分的に値段 20 で売ります。)
- **時点 2 における戦略 (株価=100、オプション価格=10 の交点に到達した場合)** $\phi = (20 - 0) / (120 - 80)$ です。債券 = オプション - 株式 = $10 - 100 \times (1/2) = -40$ です。前時点で 15 の借り入れでしたが、さらに 25 だけ追加で借り入れて借り入れ額を 40 にします。(その追加した 25 の借り入れ額は株式の購入金額に費やしています。今、世界は債券か株式しか存在しないので、債券か株式のどちらかに交換されています。つまり保有している債券の資産量が減少しているとするならば、保有している株式の量が増加しているのです。)
(なぜ「株式」と「債券」の「2 つ」を考えるのか。例えば「石ころ」と「水」と「ごはん」の「3 つ」ではだめなのか？この問いは 2 つに分けられます。まず、種類の個数がなぜ 2 個なのか。それから、種類は「株式」と「債券」のみに限られるのか。→まず、今は最も簡単なモデルを考えています。何か物と物を交換するので、交換を行うには 1 よりも大きい最小の自然数個の種類 (つまり 2 種類のもの) があれば良いのです。さらに、期初のデリバティブの価格は原資産のランダムさを反映した契約の支払価格ですが、ランダムというのは債券の立場に立ったときに債券の価格から測るとランダムに動くという意味です。逆に、株式の立場からすれば債券がランダムに動いているのです。例えば、1 株の値段が債券 100 円 → ある日には 110 円 → また別の日には 105 円と変わるように。何かランダムに動く資産と、一つ価値基準になる資産があれば、「水」と「石ころ」でも良いのです。水 1 リットルを買うにはダイヤモンド 1g → ある日には 2g → また別の日には 0.5g と変わるように。何か一つの価値基準から見ると、もう一つがランダムに動くものであればキャッシュフローが複製できます。もし 3 種類のものがあれば、そのうち 1 つを使わないことによって 2 種類の資産のモデルに還元できます。なので、3 以上の自然数 n 種類の商品を考えても別にいいですが、そのうち $n - 2$ 種類は考察に使う必要がありません。)
- **時点 3 (満期) における戦略 (株価=80、オプション価格=0 の交点に到達した場合)** オプションの権利行使はされません。(株価=80 < 権利行使価格=100 なので) 保有している株数は前時点の $\phi = 1/2$ なので、株式の資産は $80 \times (1/2)$ で 40 です。借り入れ額は前時点で 40 なので、損得なく取引を終了できます。

ここでも期待値を用いることができます。リスク中立上昇確率 q のもとで、最終交点に到達する各確率は、満期時に取り得る価格 4 点で、 $1/8, 3/8, 3/8, 1/8$ です。この確率 q の下での f の期待値はオプションの無裁定価格の 15 になります。しかし元の株式での最終交点に到達する各確率は、満期時に取り得る価格

4点で、 $27/64, 27/64, 9/64, 1/64$ です。この確率 p の下での f の期待値は 33.75 となります。

この確率 p の下での S の期待値は $(160 \times 27 + 120 \times 27 + 80 \times 9 + 40 \times 1)/64 = 130$ となり、別に今までの計算のどこかに出てきた値というわけでもなく、意味の無い値です。どうやら確率 q の下での f の期待値という (q, f) の組み合わせだけがどうやら意味を持ちそうです。

7 二項マルチンゲール表現定理

「ある交点 j における無リスク中立上昇確率 q_j が存在して、その q_j の下での計算が簡単な割引期待値オペレータによって、どんなデリバティブでも価格設定することができる」という我々の発見を、ある定理としてまとめます。この定理は形式ばっていると思ってしまうがちですが、連続モデルを見ていく時に役に立ちます。連続モデルでは直観に反することがあります。しかし期待値の結果は連続モデルでも利用可能で、なおかつ簡単にすることができます。

7.1 図に基づいた定義

無意識に利用していた概念の定義を 7 つ用意します。

7.2 株価過程 S の定義

ツリーの各交点に示される、可能な株価の組み合わせと相互の連結のパターンを株価過程 S と呼びます。確率変数 S_i は、時点 i における株価過程の値を表しています。図 2.9 の S_1 は、交点 2 か交点 3 のいずれかによってそれぞれ 60 か 120 のどちらかになるような確率変数です。

7.3 確率測度 P, Q の定義

株価過程とは別に、確率の組 (p_i) あるいは (q_i) を、確率測度 P あるいは確率測度 Q と呼びます。この確率測度は、それぞれの交点において上昇または下降がどれぐらいの割合で起きるかを示しています。図 2.9 では交点と交点の間の経路上で定義されています。

「上昇する確率」と「上昇幅」は二項ツリーの中では区別されており、それぞれ独立な概念です。無リスク構築を可能とする確率測度を見つける為に、実世界の確率測度 P は必要ありませんでした。無リスク構築を可能とする確率測度 Q は株価過程 S の関数であり、実世界の確率測度 P は無リスク構築を可能とする確率測度 Q とは関係ありませんでした。実世界の確率測度 P はデリバティブの価格付けには影響しません。株価の上昇の幅（下降の幅）や相互関係がデリバティブの価格に影響し、上昇する確率（前もって予測している確率 (p_i) ）には影響しません。

大数の法則が上手く行かなかったのは株価過程 S と実世界の確率測度 P に目を向けていたからである。無裁定の議論を行う上では我々は実世界の確率測度 P なんて捨て去って、株価過程 S にのみ着目しておくべきだったのである。

7.4 フィルトレーション (F_i) の定義

フィルトレーション (F_i) は、ツリー上において時点 i までの株価の履歴を表します。時点 0 におけるフィルトレーション F_0 は、一つの交点、交点 1 からのみ構成される経路（時点 0 では経路ではなく 1 つの交点）です。他にも例えば F_1 は、最初に株価が下向きに遷移すれば $F_1=(1,2)$ であり、最初に株価が上向きに遷移すれば $F_1=(1,3)$ です。

二項ツリーではある交点に到達する経路はただ一通りしかありません。従って、フィルトレーション F_i は時点 i において到達する交点と対応付けができます。フィルトレーションが株価の上昇/下降の履歴を定めます。すなわち、フィルトレーションが交点を表します。今回のモデルのように再結合しない二項ツリーモデルの場合、今考えている交点が与えられることと、フィルトレーションが与えられることは同値です。

7.5 契約 X の定義

契約 X は、満期 T における交点上の関数です。交点は、今考えているような再結合しない二項ツリーモデルではフィルトレーションと 1 対 1 に対応するので、フィルトレーション F_T 上の関数とも言えます。例えば、時点 2 (満期) における株価 S_2 は契約 $X=S_2$ です。

契約 X は株価過程 S とは異なる概念です。契約 X は満期における交点によってのみ決定されます。株価過程 S は満期に至るまでの全ての時点によって決定されます。

7.6 条件付き期待値オペレータ $E_Q(\cdot | F_i)$

条件付き期待値オペレータ $E_Q(\cdot | F_i)$ は、従来の期待値 $E(\cdot)$ とは異なり、確率測度 Q とフィルトレーション F_i に依存します。今までの期待値 $E(\cdot)$ を利用するときは、例えば時点 0 から道筋全体に沿って期待値を取ることに興味を持っていました。条件付き期待値 $E_Q(\cdot | F_i)$ は後の時点を初期値として期待値を取るような目的に合致します。

条件付き期待値 $E_Q(X | F_i)$ は、 F_i より将来の経路 (フィルトレーション) に沿った契約 X の期待値です。条件付き期待値 $E_Q(X | F_i)$ はそれ自体も確率変数です。時点 i における各交点の $E_Q(\cdot | F_i)$ の値は、もしその交点に到達していれば X の期待値となります。

7.7 条件付き期待値の具体例

$$E_P(S_0 | F_0 = (1)) = 80$$

フィルトレーション $F_0=(1)$ の時点で S_0 の値は確定していて 80 であり、期待値は 80 である。

$$E_P(S_1 | F_0 = (1)) = (120 + 60)/2$$

フィルトレーション $F_0 = (1)$ の時点では、 S_1 は 2 値 (120,60) だけ取り得るので、その 2 値の確率平均を取る。

$$E_P(S_1 | F_1 = (1, 3)) = 120$$

フィルトレーション $F_1 = (1,3)$ においては、 S_1 の値は 120 で確定している。

$$E_P(S_1 | F_1 = (1, 2)) = 60$$

フィルトレーション $F_1 = (1,2)$ においては、 S_1 の値は 60 で確定している。

$$E_P(S_2 | F_0 = (1)) = (180 + 80 + 72 + 36) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 92$$

フィルトレーション $F_0 = (1)$ において、 S_2 は満期時において 4 値 (180,80,72,36) だけ取り得るので、その 4 値の確率平均を取る。

$$E_P(S_2|F_1 = (1, 3)) = (180 + 80)/2 = 130$$

フィルトレーション $F_1 = (1, 3)$ において、 S_2 は満期時において 2 値 (180, 80) だけ取り得るので、その 2 値の確率平均を取る。

$$E_P(S_2|F_1 = (1, 2)) = (72 + 36)/2 = 54$$

フィルトレーション $F_1 = (1, 2)$ において、 S_2 は満期時において 2 値 (72, 36) を取り得るので、その 2 値の確率平均を取る。

$$E_P(S_2|F_2 = (1, 3, 7)) = 180$$

フィルトレーション $F_2 = (1, 3, 7)$ においてはすでに S_2 は確定しており 180。

$$E_P(S_2|F_2 = (1, 3, 6)) = 80$$

フィルトレーション $F_2 = (1, 3, 6)$ においてはすでに S_2 は確定しており 80。

$$E_P(S_2|F_2 = (1, 2, 5)) = 72$$

フィルトレーション $F_2 = (1, 2, 5)$ においてはすでに S_2 は確定しており 72。

$$E_P(S_2|F_2 = (1, 2, 4)) = 36$$

フィルトレーション $F_2 = (1, 2, 4)$ においてはすでに S_2 は確定しており 36。

つまり $t = 0$ の時点での条件付き期待値 $E_P(S_2|F_0 = (0))$ は、これまで利用してきた期待値 $E_P(S_2)$ と同じ値となります。しかし満期まで到達した経路であるフィルトレーション F_2 の下での期待値 $E_P(S_2|F_2)$ は S_2 の値そのものとなります。

さて、時点 i における確率測度 P での契約 X の期待値 $E_P(X|F_i)$ は、これ自身が (株価過程 S_2 等のように) 時点 i における過程と見なすことができます。実際、図 2.11 のように期待値の過程 $E_P(S_2|F_i)$ は株価 S_2 とは異なる過程となります。このようにして、何か確率測度 (例えば Q) を決めることで、契約 X は添え字に i を持つ過程 $E_Q(X|F_i)$ に変換できます。

(※ 契約が満期時にのみ値を持つのに対し、過程は二項ツリーのすべての交点で値を持つ。)

7.8 可予測過程 $\phi = \phi_i$

時点 i における交点の値が、時点 $(i - 1)$ までのフィルトレーション F_{i-1} にのみ依存するような過程です。その各交点の値は時点 0 より後の交点において値が定義されます。例として、ランダムな債券価格の過程 B_i ($i \geq 1$) は、 $B_i = \phi_i = S_{i-1}$ であり、可予測です。(図 2.12 は図 2.9 の遅れた過程である。各時点で値は定まっている。)

7.9 マルチンゲールの定義

過程 S について、もし全ての $i \leq j$ に対して $E_P(S_j|F_i) = S_i$ を満たすとき、確率測度 P とフィルトレーション F_i について S はマルチンゲールであるといいます。単に「 S は F_i の下で P -マルチンゲール」と言うときもあります。確率測度 P にかんして過程 S がマルチンゲールである為には、時点 j における過程 S_j の、時点 i までのフィルトレーション F_i で条件を付けた期待値はただ単に時点 i における過程 S_i になると

いう意味です。同じことですが、 S が F_i の下で P -マルチンゲールであるとき、確率測度 P の下では過程 S は上昇や下降に偏りを持たない。ある点 i でその過程 S_i が 100 であるとき、 P -条件付き期待値もまた 100 であるということです。

7.10 マルチンゲールの例その 1

自明ですが、一定の値しか取らないような過程は任意の確率測度に対してマルチンゲールになります。

7.11 マルチンゲールの例その 2

図 2.10b に与えられた確率測度 Q の下で図 2.9 に示した過程 S はマルチンゲールである。

例えば

$$E_Q(S_1|F_0 = (0)) = (1/3) \times 120 + (2/3) \times 60 = 80$$

であり、 $S_0 = 80$ なので、 $E_Q(S_1|F_0 = (0)) = S_0$ が成立する。さらに、

$$E_Q(S_2|F_1 = (1, 3)) = (2/5) \times 180 + (3/5) \times 80 = 120$$

であり、このフィルトレーションでは $S_1 = 120$ である。従って、 $E_Q(S_2|F_1 = (1, 3)) = S_1$ が成り立つ。マルチンゲールとなるかどうかを示すためには、 $F_1 = (1, 2)$ の場合をはじめ、全ての場合で確認しなければならない。

7.12 マルチンゲールの例その 3

条件付き期待値の過程 $N_i = E_P(S_2|F_i)$ は P -マルチンゲールである。(確認) 定義の通りに N_1 を求める。

$$N_1 = E_P(S_2|F_1 = (1, 3)) = 180 \times (1/2) + 80 \times (1/2) = 130$$

または、

$$N_1 = E_P(S_2|F_1 = (1, 2)) = 72 \times (1/2) + 36 \times (1/2) = 54$$

従って、

$$E_P(N_1|F_0) = 130 \times (1/2) + 54 \times (1/2) = 92$$

となることが分かった。一方で、

$$\begin{aligned} N_0 &= E_P(S_2|F_0) \\ &= 180 \times \frac{1}{4} + 80 \times \frac{1}{4} + 72 \times \frac{1}{4} + 36 \times \frac{1}{4} \\ &= 92 \end{aligned}$$

よって、 $E_P(N_1|F_0) = N_0$ であり、 N_i は P -マルチンゲールである。

(なぜ $E_P(N_1|F_0) = N_0$ が言えただけで全ての N_i が P -マルチンゲールであることが言えるのか？誰かに質問する。)

→ 久保さんに教えていただいた。ただ単に帰納法の第一歩目 ($n = 1$ のときを試して $n = k$ で成り立つと仮定して $n = k + 1$ が成り立つとする、その $n = 1$ の場合) について示している議論ということだった。

7.13 契約の条件付き期待値過程 (Tower Property)

任意の契約 X に対して、過程 $E_P(X|F_i)$ は P -マルチンゲールである。つまり過程 $N_i = E_P(X|F_i)$ と置くと、どんな $i \leq j$ に対しても $E_P(N_j|F_i) = N_i$ である。まとめると、 $E_P(E_P(X|F_j)|F_i) = E_P(X|F_i)$ が

成り立つ。Tower property を解釈すると、時点 j までの経路で期待値を付けて、さらにもっと早い時点 i までの経路で期待値を付けることは、最初から時点 i まで遡った経路で期待値を取った値と等しいということである。

Tower property を利用すると、過程が **P**-マルチンゲールであるかどうかを簡単に調べることができる。すなわち、過程 S_i それ自身と、満期 T におけるフィルトレーション F_i の下での条件付き期待値 $E_{\mathbf{P}}(S_T|F_i)$ が等しい場合に限って S_i は **P**-マルチンゲールである。

$$S_i = E_{\mathbf{P}}(S_T|F_i) \iff S_i \text{ は } \mathbf{P} \text{-マルチンゲールである。}$$

注意すべきことは、ある確率測度についてマルチンゲールであるような過程でも、異なる別の確率測度によってはマルチンゲールにならないこともある。

7.14 練習問題 2.3

過程 S_i は **Q**-マルチンゲールであることを証明せよ。

$E_{\mathbf{Q}}(S_2|F_i) = S_i$ であることを示せば良い。

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{Q}}(S_2|F_0) &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times 180 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times 80 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 72 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 36 \\ &= 24 + 16 + 32 + 8 \\ &= 80 \\ &= S_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{Q}}(S_2|F_1 = (1, 3)) &= \frac{2}{5} \times 180 + \frac{3}{5} \times 80 \\ &= 72 + 48 \\ &= 120 \\ &= S_1 \quad (\text{for } F_1 = (1, 3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{Q}}(S_2|F_1 = (1, 2)) &= \frac{2}{3} \times 72 + \frac{1}{3} \times 36 \\ &= 48 + 12 \\ &= 60 \\ &= S_1 \quad (\text{for } F_1 = (1, 2)) \end{aligned}$$

$S_2 = E_{\mathbf{Q}}(S_2|F_2) = E_{\mathbf{Q}}(S_T|F_T) = S_T$ なので、以上から全ての $i(=0, 1, 2)$ について $E_{\mathbf{Q}}(S_2|F_i) = S_i$ であることを確認した。ゆえに過程 S_i は **Q**-マルチンゲールである。

7.15 二項マルチンゲール表現定理

二項確率過程 S, N はそれぞれ **Q**-マルチンゲールであるとする。このとき、 $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$ と置くと

$$N_i = N_0 + \sum_{k=1}^i \phi_k \Delta S_k$$

を満たす可予測過程 ϕ が存在します。

7.16 説明

過程 S, N の時点 $i-1$ から時点 i への S の増分はそれぞれ $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$ 、 $\Delta N_i = N_i - N_{i-1}$ です。次の時点に取り得る値は2つです。ある過程は他の過程のスケール（幅を増減させる）とシフト（ずれを一致させる）を用いて表すことができます。

スケールから考えます。上方向の跳躍の値と下方向の跳躍の値の差の大きさは、 S に対して

$$\delta s_i = s_{\text{up}} - s_{\text{down}}$$

、同様に N に対しても

$$\delta n_i = n_{\text{up}} - n_{\text{down}}$$

であり、これらの両方ともフィルトレーション F_{i-1} によってのみ決まります。

フィルトレーション F_{i-1} によってのみ決まる過程は可予測過程の定義です。よって、この過程の割合を可予測過程 ϕ_i によって定めます。

$$\phi_i = \frac{\delta n_i}{\delta s_i}$$

次にシフトについて考えます。それぞれの増加率 $\Delta S_i, \Delta N_i$ は、先ほどのスケーリングファクターを掛けて、そこからオフセットとしてのズレ k_i を足せば一致します。つまり、

$$\Delta N_i = \phi_i \Delta S_i + k_i$$

この k_i は ϕ と同様に F_{i-1} によって決まっています。（可予測である。）

一方で、 S, N はそれぞれ \mathbf{Q} -マルチンゲールです。つまり、

$$E_Q(\Delta N_i | F_{i-1}) = E_Q(\Delta S_i | F_{i-1}) = 0$$

なぜなら、例えば

$$\begin{aligned} E_Q(\Delta N_i | F_{i-1}) &= E_Q(N_i - N_{i-1} | F_{i-1}) \\ &= E_Q(N_i | F_{i-1}) - E_Q(N_{i-1} | F_{i-1}) \\ &= E_Q(N_T | F_{i-1}) - E_Q(N_T | F_{i-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

S についても同様に示せます。こうして、

$$\begin{aligned} 0 &= E_Q(\Delta N_i | F_{i-1}) \\ &= E_Q(\phi_i \Delta S_i + k_i | F_{i-1}) \\ &= 0 + k_i \end{aligned}$$

よって $k_i = 0$ となります。

以上から、二項確率過程 S, N がそれぞれ \mathbf{Q} -マルチンゲールであるとき、それぞれの過程に一般的なスケールとシフトを考えると、シフトは0となり、スケール ϕ のみ残ることが分かりました。

$$\Delta N_i = \phi_i \Delta S_i$$

にまとめることができます。

そして帰納的に証明できます。 $n = 1$ のときに成立します。

$$N_1 - N_0 = \phi_1(S_1 - S_0)$$

$n = k - 1$ のときに

$$N_{k-1} = N_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \phi_i \Delta S_i$$

上式が成立すると仮定すると、

$$N_k = N_0 + \sum_{i=1}^k \phi_i \Delta S_i$$

が成立すると言えるので、この等式は全ての自然数 k について成立することが示されました。

7.17 金融への応用

ここまでで二項ツリーの過程と確率測度に関する数学的な定理が分かりました。証明の過程では株式や債券といった金融の概念は何一つ入っていませんでした。また、裁定や市場の含意についても触れていません。反省して、ここからは二項マルチンゲール表現定理をどうやって価格決定に応用できるかを見ていきます。

二項ツリーモデルは市場を表します。株価は二項過程 S として変動するものとします。この過程 S をマルチンゲールにするような確率測度 \mathbf{Q} が存在するならば、株式価格について何か他の \mathbf{Q} マルチンゲール N_i を表すのにこの定理を応用することができます。

二項マルチンゲール表現定理から、可予測な ϕ_i は投資戦略に利用することができます。各時点において、株式を適切な量 ϕ_i だけ購入すると、その損益は \mathbf{Q} マルチンゲール N_i に従います (キャッシュフローの複製)。

さて、契約 X は確率過程ではなく、満期における確率変数であることに注意します。このままでは数学的に取り扱いにくいので、確率測度 \mathbf{Q} の下で条件付き期待値 $E_i = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(X|F_i)$ を取って、 \mathbf{Q} -マルチンゲール E_i を考えます。

債券価格は確率過程 B_i であり、可予測で正です。一般性を失うことなく $B_0 = 1$ とできます。

その逆数の過程 B_i^{-1} も可予測で正です。 B_i^{-1} を割引過程と呼びます。

株価の過程 S を割り引いた過程 $Z_i = B_i^{-1} S_i$ を定義します。この Z_i を株価割引過程と呼びます。

契約 X を満期時の割引過程で割り引いた $B_T^{-1} X$ も契約です。この $B_T^{-1} X$ を割引契約と呼びます。

7.18 構築戦略

$Z = B_i^{-1} S_i$ が \mathbf{Q} -マルチンゲールとなるような確率測度 \mathbf{Q} と、契約 X に対して、条件付き期待値 $E_i = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(B_T^{-1} X|F_i)$ を取ります。この E_i は Z から作られる \mathbf{Q} -マルチンゲールです。

今、 E_i と Z は \mathbf{Q} -マルチンゲールです。従って、二項マルチンゲール表現定理より、

$$E_k = E_0 + \sum_{i=1}^k \phi_i \Delta Z_i$$

を満たすような可予測過程 ϕ_i が存在します。

以上を用いて構築戦略 (複製戦略) を考えます。

時点 i において、株式 S を ϕ_{i+1} 単位保有します。

時点 i において、債券を $\psi_{i+1} = (E_i - \phi_{i+1} B_i^{-1} S_i)$ 単位保有します。

この2点に基づいてポートフォリオ Π_i を購入します。

つまり時点 i において次のようなポートフォリオを購入します。

$$\Pi_i = \phi_{i+1} S_i + \psi_{i+1} B_i$$

$t = 0$ において、このポートフォリオ Π_0 は次のような価値を持ちます。

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= \phi_1 S_0 + \psi_1 B_0 \\ &= E_0 \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(B_T^{-1} X) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(B_T^{-1} X | F_0)\end{aligned}$$

この値が期初にゼロからポートフォリオを保有するに当たって必要となるコストです。 ϕ_1 と ψ_1 は可予測なので決定できます。

次の時点 1 では Π_0 の価格は次の価格差だけ変化します。 $(\Pi_1$ ではなく Π_0 であることに注意します。 $t = 0$ において保有している Π_0 の状態から何も売買することなく保有しておくだけで遷移したポートフォリオ Π_0 の価格を考えています。)(つまり Π_i を構築した際の保有量 ϕ_{i+1}, ψ_{i+1} は動かず、過程 S_i, B_i だけが $i \rightarrow i+1$ に変化した場合を考えています。)

$$\begin{aligned}\phi_1 S_1 + \psi_1 B_1 &= \phi_1 S_1 + (E_0 - \phi_1 B_0^{-1} S_0) B_1 \\ &= B_1 \{E_0 + \phi_1 (B_1^{-1} S_1 - B_0^{-1} S_0)\}\end{aligned}$$

ここで割引株価過程 $Z_1 - Z_0$ を $\Delta Z_1 = B_1^{-1} S_1 - B_0^{-1} S_0$ と置くと、二項マルチンゲール表現定理 ($k = 1$) $E_1 = E_0 + \phi_1 \Delta Z_1$ を用いて

$$\phi_1 S_1 + \psi_1 B_1 = B_1 E_1$$

と表すことができます。(これは Π_1 の価格ではないことに注意します。 $i = 1$ における Π_1 の値は $\phi_2 S_1 + \psi_2 B_1$ です。)

複製戦略では時点 i において、ポートフォリオ

$$\Pi_i = \phi_{i+1} S_i + \psi_{i+1} B_i$$

を購入します。

この $B_1 E_1$ の値は時点 0 から時点 1 に遷移したときに複製ポートフォリオ Π_0 を購入するために必要になるコストです。

一般の時点 i において、ポートフォリオ Π_i を購入するには $B_i E_i$ のコストを要します。

次に時点 1 において保有していたポートフォリオ Π_1 が $t = 2$ に移った場合も同様に、

$$\begin{aligned}\Pi_1 &\rightarrow \phi_2 S_2 + \psi_2 B_2 \\ &= \phi_2 S_2 + (E_1 - \phi_2 B_1^{-1} S_1) B_2 \\ &= B_2 \{E_1 + \phi_2 (B_2^{-1} S_2 - B_1^{-1} S_1)\} \\ &= B_2 (E_1 + \phi_2 \Delta Z_1) \\ &= B_2 E_2\end{aligned}$$

となり、 $t = 2$ になった瞬間に複製ポートフォリオを構築するために Π_2 にするにはコスト $B_2 E_2$ がかかります。

References

- [1] Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing - Martin Baxter, Andrew Rennie