数理ファイナンス・チートシート（基礎編）

M. O.

October 6, 2025

Abstract

暗記は大嫌いだけど、職業上、反射的に、無意識に言えるようにしておかないといけない悲しい数式集。必要に気づいたら適宜追加します。

1. BS モデルは？
2. BS 方程式は？
3. ヨーロピアン・コールオプションの解は？
4. Fut を使ったヨーロピアン・コールオプションの解は？
5. Local Volatility モデルは？
6. Dupire's Local Volatility は？
7. ギルザノフの定理の逆は？
8. 指数マルチンゲール SDE とその解は？

1 BS モデル

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{S} &= \mu dt + \sigma dW \\ \dfrac{dB}{B} &= r dt \end{cases}$$

2 BS 方程式

$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

3 ヨーロピアン・コールオプションの解

$$C = e^{-q(T-t)} S\Phi(d_+) - e^{-r(T-t)} K\Phi(d_-)$$

ここで、$d_\pm$ と Φ はそれぞれ、

$$d_\pm = \frac{\log\dfrac{S}{K} + (r - q \pm \dfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy$$

4 Fut を使ったヨーロピアン・コールオプションの解

Fut を使うとシンプルに表現できるだけでなく、金利が定数でなくても使える表式を得る。

$$C = e^{-\int_0^T r(s)ds}\Big(F\Phi(d_+) - K\Phi(d_-)\Big)$$

ここで、F、$d_\pm$ はそれぞれ、

$$F = Se^{\int_0^T r(s)ds}$$

$$d_\pm = \frac{\log\dfrac{F}{K} \pm \dfrac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

5 Dupire's Local Volatility

$$\sigma^2_{\mathrm{LV}}(T,K) = \frac{\dfrac{\partial C}{\partial T} + r(T)K\dfrac{\partial C}{\partial K}}{\dfrac{1}{2}K^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial K^2}}$$

これは BS 方程式と似た形をしているので以下から頭の中で式変形して思い出せば良い。

$$\iff \qquad \frac{\partial C}{\partial T} + r(T) K \frac{\partial C}{\partial K} - \frac{1}{2} K^2 \sigma_{\mathrm{LV}}^2 (T, K) \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = 0$$

$$c.f., \text{ BS eqn:} \qquad rf = \frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

6 ギルザノフの定理の逆

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{R}} + \int_0^t \gamma_s ds$$

$$\iff \qquad \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(- \int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right)$$

符号に注意。

7 指数マルチンゲール SDE とその解

$$\frac{dX_t}{dt} = \sigma_t dW_t$$

$$\iff \qquad X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 dt \right)$$

符号に注意。