外国為替とニューメレール

Masaru Okada

October 16, 2025

Abstract

Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing - Martin Baxter, Andrew Rennie の 3 章の自主ゼミのノート。2020 年 6 月 3 日に書いたもの。

外国為替市場における基本資産は通貨である。

通貨の保有は株式の保有と同様にリスクを伴う。

例えば 1 円は何ドルかという為替レートは株価と同じく、刻一刻と値が変動している。

このリスクの存在からデリバティブの需要が生まれる。

1 Black-Scholes 通貨モデル

ドル債券 B_t、円債券 D_t、為替レート C_t （1 円 $= C_t$ ドル）とする。

このとき、Black-Scholes による通貨モデルは、

$$\begin{aligned} B_t &= e^{rt} \\ D_t &= e^{ut} \\ C_t &= C_0 \exp(\sigma W_t + \mu t) \end{aligned}$$

ただし W_t は $\mathbb{P}$-Brown 運動であり、r, u, σ, μ は定数とする。

1.1 ドルの世界の投資家

ドルの世界の投資家は 2 種類の資産（B_t と C_tD_t）が取引可能であり、Black-Scholes モデルで株と債券を考えたときのように複製ポートフォリオを構築することができる。

C_t は 1 円のドル建て価格を表しているが、円の現金自体はドルの世界の投資家は取引できない。

なぜならば、もし取引可能だと仮定すると、現金そのものを持つことがキャッシュボンドの保有に対して裁定機会を生んでしまうからである。（現金は利子率がゼロだが円債からは利子率 u が発生するので、市場参加者は任意の量の円債をロングして現金をショートすることで無限の利益を得られることになってしまう。）

C_tD_t はドルによって取引が可能な資産である。円債 D_t のドル建て価格を表している。

以上の 2 つの確率過程 B_t、C_tD_t を用いて複製ポートフォリオを構築する。

1.1.1 複製ポートフォリオの構築

取引可能資産 B_t、C_tD_t を用いて契約 X の複製ポートフォリオを構築し、無裁定条件より価格を決定する。

以下の 3 段階で行う。（あらすじ）

1. 円債をドル債で割り引いた過程 $Z_t = B_t^{-1}C_tD_t$ がマルチンゲールになるような測度 $\mathbb{Q}^{\$}$ を見つける。
2. 契約 X を過程 $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t)$ に変換する。
3. $dE_t = \phi_t dZ_t$ となる可予測過程 ϕ_t を見つける。

円債をドル債で割り引いた過程 Z_t は

$$
\begin{aligned}
Z_t &= B_t^{-1}C_tD_t \\
&= e^{-rt}e^{ut}C_0\exp(\sigma W_t + \mu t) \\
&= C_0\exp\left[\sigma W_t + (\mu + u - r)t\right]
\end{aligned}
$$

その確率微分は、

$$
\begin{aligned}
dZ_t &= \left(\frac{\partial Z_t}{\partial t}\right)dt + \left(\frac{\partial Z_t}{\partial x}\right)dW_t + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 Z_t}{\partial x^2}\right)(dW_t)^2 \\
\frac{dZ_t}{Z_t} &= \left(\mu + u - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t
\end{aligned}
$$

ここに Girsanov の定理を適応する。

$$
\gamma \;=\; \frac{\mu + u - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}
$$

を用いて、Z_t がマルチンゲールになるような測度 $\mathbb{Q}^{\$}$ の下での Brown 運動 $W_t^{\$}$ の確率微分が

$$
dW_t^{\$} = dW_t + \gamma dt
$$

になればよく、また Radon-Nikodym の定理によってそのような測度 $\mathbb{Q}^{\$}$ は次で定義される。

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{Q}^{\$}}{d\mathbb{P}} &= \exp\left(-\int_0^T \gamma dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2 dt\right) \\
&= \exp\left(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T\right)
\end{aligned}
$$

このとき測度 $\mathbb{Q}^{\$}$ の下で、

$$
\begin{aligned}
\frac{dZ_t}{Z_t} &= \sigma dW_t^{\$} \\
Z_t &= Z_0\exp\left(\int_0^t \sigma dW_s^{\$} - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds\right) \\
&= C_0\exp\left(\sigma W_t^{\$} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \\
C_t &= B_tZ_tD_t^{-1} \\
&= e^{rt}C_0\exp\left(\sigma W_t^{\$} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)e^{-ut} \\
&= C_0\exp\left[\sigma W_t^{\$} + \left(r - u - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]
\end{aligned}
$$

となる。

測度 $\mathbb{Q}^{\$}$ の下でフィルトレーション $\mathcal{F}_t$ の条件付き期待値

$$
E_t \;=\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t)
$$

を定義する。このとき、$s(<t)$ に対して、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\$}(E_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\$}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\$}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t)\middle|\mathcal{F}_s\right)\\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\$}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_s)\\ &= E_s\end{aligned}$$

となるので E_t は $\mathbb{Q}^\$$-マルチンゲールである。よって、マルチンゲール表現定理より、

$$dE_t \;=\; \phi_t dZ_t$$

となるような可予測過程が存在する。時刻 t における複製ポートフォリオ構築のために必要なドル建て通貨 $S_t = C_t D_t$ の保有量 ϕ_t とドル債券 B_t の保有量 ψ_t を求めたい。

複製ポートフォリオの価値 V_t は

$$V_t \;=\; \phi_t S_t + \psi_t B_t$$

である。満期において契約と全く同一となり、

$$X \;=\; \phi_T S_T + \psi_T B_T$$

である。一方で先に作った $\mathbb{Q}^\$$-マルチンゲール E_t は $t=T$ において、

$$\begin{aligned}E_T &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\$}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_T)\\ &= B_T^{-1}X\end{aligned}$$

すなわち、

$$B_T E_T \;=\; X \;=\; \phi_T S_T + \psi_T B_T$$

である。

もし $t=T$ だけでなく一般の t に対して

$$B_t E_t \;=\; V_t \;=\; \phi_t S_t + \psi_t B_t$$

であれば、複製ポートフォリオを構成するドル債券の保有量 ψ_t は、等式変形して

$$\psi_t \;=\; E_t - \phi_t Z_t$$

となる。この仮定が正しいかを確かめる。

$V_t = B_t E_t$ を確率微分する。ここで $dE_t = \phi_t dZ_t$ であることと、$E_t = \phi_t Z_t + \psi_t$ であることを用いると、

$$\begin{aligned}dV_t &= B_t dE_t + E_t dB_t\\ &= B_t(\phi_t dZ_t) + (\phi_t Z_t + \psi_t)dB_t\\ &= \phi_t(B_t dZ_t + Z_t dB_t) + \psi_t dB_t\\ &= \phi_t dS_t + \psi_t dB_t\end{aligned}$$

となるので、このポートフォリオは資金自己調達的である。

よってドル債券の保有量を $\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$ と仮定しても複製ポートフォリオを構築できることが分かった。

契約 X を複製するポートフォリオの価値 V_t はドル建ての通貨価格 Z_t がマルチンゲールとなる測度 $\mathbb{Q}^\$$ を用いて次のように書き表せることが分かった。

$$V_t = B_t E_t \;=\; B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\$}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t)$$

1.2 フォワード契約

将来の時点 $T(>t)$ において 1 円を k ドルで買う契約を考える。

時点 T におけるペイオフは

$$
\begin{aligned}
X &= C_T - k \\
&= C_0 \exp(\sigma W_T + \mu T) - k \\
&= C_0 \exp\left[\sigma W_T^{\$} + \left(r - u - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T\right] - k
\end{aligned}
$$

である。一般の時点 t における価値は

$$
\begin{aligned}
V_t &= B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}}(B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}}(C_T - k | \mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}}\left(C_0 \exp\left[\sigma W_T^{\$} + \left(r - u - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T\right] - k \middle| \mathcal{F}_t\right)
\end{aligned}
$$

ゼロ時点（現在）における契約の価値は無裁定条件からゼロになるべきである。

$$
\begin{aligned}
0 &= V_0 \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}} C_0 \exp\left[\sigma W_T^{\$} + \left(r - u - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T\right] - e^{-rT} k
\end{aligned}
$$

よって無裁定な受け渡し価格 F（$t=0$ において $V_0 = 0$ となる k の値）は、

$$
\begin{aligned}
F &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}} C_0 \exp\left[\sigma W_T^{\$} + \left(r - u - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T\right] \\
&= C_0 \exp\left[\left(r - u - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T\right] \times \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}} \exp \sigma W_T^{\$} \\
&= C_0 \exp\left[\left(r - u - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T\right] \times \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \\
&= C_0 e^{(r-u)T}
\end{aligned}
$$

と等しい。

この値は円ドルの為替レートを 2 通貨間の金利差で割り引いた価格になっている。

F を用いることで t 時点におけるフォワード契約の価格 V_t も求まる。

$$
\begin{aligned}
V_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}}(C_T - F | \mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}}(C_T | \mathcal{F}_t) - e^{-r(T-t)} F \\
&= B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}}(B_T^{-1} C_T | \mathcal{F}_t) - e^{-r(T-t)} C_0 e^{(r-u)T} \\
&= C_t - e^{-uT} e^{rt} C_0 \\
&= e^{-uT}\left(e^{uT} C_t - e^{rt} C_0\right)
\end{aligned}
$$

ポートフォリオの割引価格は

$$
\begin{aligned}
E_t &= B_t^{-1} V_t \\
&= e^{-rt} e^{-uT}\left(e^{uT} C_t - e^{rt} C_0\right) \\
&= e^{-rt} C_t - e^{-uT} C_0 \\
&= e^{uT} Z_t - e^{-uT} C_0
\end{aligned}
$$

であるので、[*1]

$$dE_t = e^{-uT} dZ_t$$

である。複製ポートフォリオを構築する為の株式保有量 ϕ_t と債券保有量 ψ_t はそれぞれ t に対して定数になる。

$$\phi_t = e^{-uT} = D_T^{-1}$$

$$\begin{aligned}\psi_t &= E_t - \phi_t Z_t \\ &= (e^{uT} Z_t - e^{-uT} C_0) - e^{-uT} Z_t \\ &= -e^{-uT} C_0 \\ &= -D_T^{-1} C_0\end{aligned}$$

[*2]

1.3 コールオプション

円のコールオプションを考える。1 円を T 時点に k ドルで買う権利を得る契約の $t(< T)$ 時点の価格を計算する。

T 時点のペイオフは

$$X \ = \ \mathrm{Max}(C_T - k,\ 0)$$

または、表記を簡単に

$$X \ = \ (C_T - k)^+$$

と記述する。

一般に、契約 X の t 時点の価格 V_t は

$$V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\$}(B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t)$$

である。これを求めたい。以下、丁寧に準備を進める。

対数正規のケースにおけるコールオプション価格の計算公式

Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数のとき以下の公式が成立する。

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left\{F \exp\left(\bar{\sigma} Z - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\right) - k\right\}^+ \\ &= F\,\Phi\left(\frac{\log\dfrac{F}{k} + \dfrac{1}{2}\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}}\right) - k\,\Phi\left(\frac{\log\dfrac{F}{k} - \dfrac{1}{2}\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}}\right)\end{aligned}$$

または、

$$d_\pm \ = \ \frac{\log(F/k)}{\bar{\sigma}} \pm \frac{1}{2}\bar{\sigma}$$

と書くと、

$$\mathbb{E}\left(F e^{\bar{\sigma} Z - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2} - k\right)^+ \ = \ F\,\Phi\left(d_+\right) - k\,\Phi\left(d_-\right)$$

[*1] 最後の等式に到達できない。逆算すると $e^{uT} Z_t = e^{uT}(B_t^{-1} C_t D_t) = e^{uT} e^{-rt} C_t e^{ut}$ である。計算がどこかおかしい。

[*2] ψ_t がテキストと合わない。Z_t の係数の指数部分の符号が異なる。

ただし $F, \bar{\sigma}, k$ は定数である。また、x の関数 $\Phi(x)$ は $N(0,1)$ が x 以下となる確率であり、具体的には次のように表される。

$$\Phi(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

フォワード価格 F は

$$F \;=\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}} C_T$$

であるので、

$$C_T \;=\; F \exp\left(\bar{\sigma} Z - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\right)$$

のように表すことが出来る。ただし、このとき $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 T$ は $\log C_T$ の分散を表し、Z は $\mathbb{Q}$ の下で $N(0,1)$ に従う確率変数である。(公式との対応の為に Z の文字を使ったが、今までは $W_t^{\mathbb{Q}^{\$}}$ で表記していた。)

これは簡単に示すことができて、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}} C_T &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}} F \exp\left(\bar{\sigma} Z - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\right) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}} \exp\left(\bar{\sigma} Z\right) \times F \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\right) \\
&= \exp\left(+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\right) \times F \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\right) \\
&= F
\end{aligned}$$

ゼロ時点におけるコールオプションの価格は、この公式を用いると、

$$\begin{aligned}
V_0 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}} B_T^{-1} X \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}} (C_T - k)^+ \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}} \left\{ F \exp\left(\sigma W_T^{\mathbb{Q}^{\$}} - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) - k \right\}^+ \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}} \left\{ F \exp\left((\sigma\sqrt{T}) \frac{W_T^{\mathbb{Q}^{\$}}}{\sqrt{T}} - \frac{1}{2}(\sigma\sqrt{T})^2\right) - k \right\}^+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \; e^{-rT} \mathbb{E} \left\{ F \exp\left(\bar{\sigma} Z - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\right) - k \right\}^+ \\
&= \; e^{-rT} \left\{ F \, \Phi\left(\frac{\log \frac{F}{k} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}}\right) - k \, \Phi\left(\frac{\log \frac{F}{k} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}}\right) \right\} \\
&= \; e^{-rT} \left\{ F \, \Phi\left(\frac{\log \frac{F}{k} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - k \, \Phi\left(\frac{\log \frac{F}{k} - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right\}
\end{aligned}$$

途中で公式を適応する為に $\bar{\sigma} = \sigma\sqrt{T}$ と置いている。また、Z を $N(0,1)$ に従う確率変数とした。

いよいよ V_t を求める。具体的には

$$V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}} (B_T^{-1} (C_T - k)^+ | \mathcal{F}_t)$$

を計算する。C_t は $\mathbb{Q}^{\$}$-マルチンゲールを用いて

$$C_t = C_0 \exp\left[\sigma W_t^{\$} + \left(r - u - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t\right]$$

と書けるので、C_T は C_t を用いて次のように表すことが出来る。

$$\begin{aligned}
&C_T \\
&= C_t \exp\left[\sigma(W_T^{\$} - W_t^{\$}) + \left(r - u - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right] \\
&= C_t \exp\left[\sigma\sqrt{T-t}\frac{W_T^{\$} - W_t^{\$}}{\sqrt{T-t}} + \left(r - u - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]
\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{W_T^{\$} - W_t^{\$}}{\sqrt{T-t}}$$

は測度 $\mathbb{Q}^{\$}$ の下で $N(0,1)$ の分布を取る標準正規確率変数であり、この確率変数を Z と置く。

すると、C_T は $\mathcal{F}_t$-可測な確率変数 C_t と、$\mathcal{F}_t$-独立な確率変数

$$\exp\left[\sigma\sqrt{T-t}Z + \left(r - u - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]$$

の積である。よって、

$$\begin{aligned}
V_t &= B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}}(B_T^{-1}(C_T - k)^+ | \mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}}((C_T - k)^+ | \mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\$}}\left[\left\{F \exp\left(\sigma W_T^{\mathbb{Q}^{\$}} - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) - k\right\}^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}\left\{C_t \exp\left[\sigma\sqrt{T-t}Z + \left(r - u - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) - k\right]\right\}^+ \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}\left\{C_t e^{(r-u)(T-t)} \exp\left[\sigma\sqrt{T-t}Z - \frac{1}{2}(\sigma\sqrt{T-t})^2\right] - k\right\}^+
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\bar{F}_t &= C_t e^{(r-u)(T-t)} \\
\bar{\sigma} &= \sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}
e^{r(T-t)} V_t &= \mathbb{E}\left\{\bar{F}_t \exp\left[\bar{\sigma}Z - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\right] - k\right\}^+ \\
&= \bar{F}_t \Phi(d_+) - k\Phi(d_-)
\end{aligned}$$

この $d_\pm$ は、

$$d_\pm = \frac{\log(\bar{F}_t/k)}{\bar{\sigma}} \pm \frac{1}{2}\bar{\sigma}$$

と置いたものである。

以上で一般の時刻 $t(< T)$ における V_t の導出が完了した。

最後に複製ポートフォリオを構成するドル建て通貨とドル債券の保有量 (ϕ_t, ψ_t) を求める。
ヘッジの為のドル建て通貨の保有量は、ポートフォリオの定義式 $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$ から求める。

$$\begin{aligned} S_t &= B_t C_t \\ &= e^{rt} e^{(u-r)(T-t)} \bar{F}_t \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} V_t &= \phi_t S_t + \psi_t B_t \\ &= \phi_t e^{rt} e^{(u-r)(T-t)} \bar{F}_t + \psi_t B_t \end{aligned}$$

この V_t を $\bar{F}_t$ で偏微分すると、

$$\frac{\partial V_t}{\partial \bar{F}_t} = \phi_t e^{rt} e^{(u-r)(T-t)}$$

となるので移行して、

$$\begin{aligned} \phi_t &= e^{-rt} e^{(r-u)(T-t)} \frac{\partial V_t}{\partial \bar{F}_t} \\ &= e^{-rt} e^{(r-u)(T-t)} \times e^{-r(T-t)} \Phi(d_+) \\ &= e^{-rt} e^{-u(T-t)} \Phi(d_+) \end{aligned}$$

*3

1.4 円の世界の投資家

ドルの世界の投資家とは異なり、円の世界の投資家は取引可能資産の円建ての価格が知りたい。
まず、円債 $D_t = e^{ut}$ は取引可能である。
さらに円建てのドル債券 $C_t^{-1} B_t$ も取引可能である。
この次に 1 ドル何円かという為替レート C_t^{-1} を考えると、

$$C_t^{-1} = C_0^{-1} \exp(-\sigma W_t - \mu t)$$

である。
2 種類の資産、円債 D_t と円建てのドル債券 $C_t^{-1} B_t$ で無リスクポートフォリオを複製する。
ドル債券を円債券で割り引いた価格は

$$\begin{aligned} Y_t &= D_t^{-1} C_t^{-1} B_t \\ &= e^{-ut} C_0^{-1} \exp(-\sigma W_t - \mu t) e^{rt} \\ &= C_0^{-1} \exp(-\sigma W_t - (\mu + u - r)t) \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial Y_t}{\partial t} dt + \frac{\partial Y_t}{\partial x} dW_t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Y_t}{\partial x^2} (dW_t)^2 \\ &= -(\mu + u - r) Y_t dt - \sigma Y_t dW_t + \frac{1}{2} \sigma^2 Y_t dt \end{aligned}$$

$$\frac{dY_t}{Y_t} = -\sigma dW_t - \left(\mu + u - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt$$

*3 なぜか指数部分が合わない。テキストでは $e^{-ut}\Phi(d_+)$ となっている。V_t の表式がそもそも間違いか？

従って、

$$dW_t^{\tilde{\mathbb{Q}}} = dW_t + \frac{\mu + u - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} dt$$
$$W_t^{\tilde{\mathbb{Q}}} = W_t + \frac{\mu + u - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} t$$

この $W_t^{\tilde{\mathbb{Q}}}$ が $\tilde{\mathbb{Q}}$-Brown 運動になるような新しい測度 $\tilde{\mathbb{Q}}$ を導入すると割引価格 Y_t がマルチンゲールになる。

円の世界におけるオプションの価格

T 時点での円建てのペイオフ X は、t 時点において

$$U_t \;=\; D_t \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}(D_T^{-1} X | \mathcal{F}_t)$$

という価値を持つ。

ここで $\tilde{\mathbb{Q}}$ は資産価値を円債券で割り引いた Y_t のマルチンゲール測度である。

1.5　ニューメレールの変更

同一の証券に対し、ドルの世界の投資家と円の世界の投資家は異なる値付けをしてしまわないだろうかと懸念を抱く。

ドルの世界においては、ペイオフ X の t 時点の価格は

$$V_t \;=\; B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\$}(B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t)$$

であり、単位はドルである。

一方で、円の世界においてはこの契約は X ドルではなく $C_T^{-1} X$ 円の支払いということになるので、t 時点における価格は

$$U_t \;=\; D_t \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}(D_T^{-1} (C_T^{-1} X) | \mathcal{F}_t)$$

であり、単位は円である。

この両者は果たして一致するのだろうか。

円の世界で決めた価格のドル換算価格 $C_t U_t$ と元の V_t は一致するのだろうか。

$\mathbb{Q}^\$$-Brown 運動 $W_t^{\mathbb{Q}^\$}$ と $\tilde{\mathbb{Q}}$-Brown 運動 $W_t^{\tilde{\mathbb{Q}}}$ はそれぞれ $\mathbb{P}$-Brown 運動 W_t を用いて

$$W_t^{\mathbb{Q}^\$} = W_t + \frac{\mu + u - r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} t$$
$$W_t^{\tilde{\mathbb{Q}}} = W_t + \frac{\mu + u - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} t$$

であり、

$$W_t^{\tilde{\mathbb{Q}}} = W_t^{\mathbb{Q}^\$} - \sigma t$$
$$dW_t^{\tilde{\mathbb{Q}}} = dW_t^{\mathbb{Q}^\$} - \sigma dt$$

よって Girsanov の逆定理より Radon-Nikodym 微分は

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}^{\$}} &= \exp\left(-\int_0^T (-\sigma) dW_t^{\mathbb{Q}^{\$}} - \frac{1}{2}\int_0^T (-\sigma)^2 dt\right) \\
&= \exp\left(\sigma W_T^{\mathbb{Q}^{\$}} - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)
\end{aligned}
$$

である必要がある。

この Radon-Nikodym 微分に測度 $\mathbb{Q}^{\$}$、フィルトレーション $\mathcal{F}_t$ の下での条件付き期待値を取ると、

$$
\begin{aligned}
\xi_t &= \mathbb{E}_{Q^{\$}}\left(\left.\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}^{\$}}\right| \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}_{Q^{\$}}\left[\left.\exp\left(\sigma W_T^{\mathbb{Q}^{\$}} - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\right| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\mathbb{E}_{Q^{\$}}\left[\left.\exp\left(\sigma W_T^{\mathbb{Q}^{\$}}\right)\right| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \\
&\times \mathbb{E}_{Q^{\$}}\left[\left.\exp\left(\sigma W_t^{\mathbb{Q}^{\$}}\right)\exp\left\{\sigma\left(W_T^{\mathbb{Q}^{\$}} - W_t^{\mathbb{Q}^{\$}}\right)\right\}\right| \mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}
$$

ここで期待値の中の因子

$$
\begin{aligned}
&\exp\left\{\sigma\left(W_T^{\mathbb{Q}^{\$}} - W_t^{\mathbb{Q}^{\$}}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\sigma\sqrt{T-t}\frac{W_T^{\mathbb{Q}^{\$}} - W_t^{\mathbb{Q}^{\$}}}{\sqrt{T-t}}\right\}
\end{aligned}
$$

のように変形できるが、

$$
\frac{W_T^{\mathbb{Q}^{\$}} - W_t^{\mathbb{Q}^{\$}}}{\sqrt{T-t}}
$$

この因子は測度 $\mathbb{Q}^{\$}$ の下で $N(0,1)$ の分布を取る標準正規確率変数である。

この変数を Z と置くと、期待値は $\mathcal{F}_t$-可予測な因子

$$
\exp\left(\sigma W_t^{\mathbb{Q}^{\$}}\right)
$$

と $\mathcal{F}_t$-独立な確率変数

$$
\exp\left(Z\sigma\sqrt{T-t}\right)
$$

の積に分解できて、

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{Q^{\$}}\left[\left.\exp\left(\sigma W_t^{\mathbb{Q}^{\$}}\right)\exp\left(\sigma\sqrt{T-t}\frac{W_T^{\mathbb{Q}^{\$}} - W_t^{\mathbb{Q}^{\$}}}{\sqrt{T-t}}\right)\right| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma W_t^{\mathbb{Q}^{\$}}\right)\exp\left(Z\sigma\sqrt{T-t}\right)\right] \\
&= \exp\left(\sigma W_t^{\mathbb{Q}^{\$}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(z\sigma\sqrt{T-t}\right)e^{-\frac{1}{2}z^2}dz \\
&= \exp\left(\sigma W_t^{\mathbb{Q}^{\$}}\right)\exp\left(\frac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{T-t}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

以上から

$$
\begin{aligned}
\xi_t &= \mathbb{E}_{Q^\$}\left(\left.\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}^\$}\right|\mathcal{F}_t\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \\
\times\ \mathbb{E}_{Q^\$}&\left[\exp\left(\sigma W_t^{\mathbb{Q}^\$}\right)\exp\left\{\sigma\left(W_T^{\mathbb{Q}^\$} - W_t^{\mathbb{Q}^\$}\right)\right\}\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \\
\times\ \ &\exp\left(\sigma W_t^{\mathbb{Q}^\$}\right)\exp\left(\frac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{T-t}\right)^2\right) \\
&= \exp\left(\sigma W_t^{\mathbb{Q}^\$} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)
\end{aligned}
$$

を導くことができた。

ここで、円債券をドル債券で割り引いたものの価格は

$$
\begin{aligned}
Z_t &= B_t^{-1} C_t D_t \\
&= C_0 \exp\left(\sigma W_t^{\mathbb{Q}^\$} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \\
&= C_0 \xi_t
\end{aligned}
$$

であるので、円債券をドル債券で割り引いた価格 Z_t は Radon-Nikodym 過程 ξ_t に比例する。

この過程を用いると、円の世界でつけた価格 U_t （U_t は前述の $C_T^{-1}X$ のペイオフ）をドル換算した価格は、

$$
\begin{aligned}
C_t U_t &= C_t D_t \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}(D_T^{-1}(C_T^{-1}X)|\mathcal{F}_t) \\
&= C_t D_t \xi_t^{-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\$}(\xi_T^{-1} D_T^{-1} C_T^{-1} X|\mathcal{F}_t) \\
&= B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\$}(B_T^{-1} X|\mathcal{F}_t) \\
&= V_t
\end{aligned}
$$

となる。よって T 時点のドル建てのペイオフ X は $t(<T)$ のどの時点においてもドルの世界と円の世界とで同じ価格を持つことが示された。

References

[1] Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing - Martin Baxter, Andrew Rennie