スピン空間における異方的 BCS-南部グリーン関数

岡田 大 (Okada Masaru)

October 21, 2025

Abstract

このノートでは、スピン一重項および三重項を扱える南部 $\otimes$ スピン空間における異方的 BCS 平均場ハミルトニアンを導入し、ボゴリューボフ変換を用いて対角化することでその固有値と変換行列を導出する。さらに、運動方程式を用いて南部 $\otimes$ スピン空間におけるグリーン関数（通常および異常成分）を導出し、その具体的な表式を与える。

Contents

1 （南部⊗スピン）空間の平均場ハミルトニアン

1.1 スピン一重項（従来の BCS）の場合

まずはハミルトニアンを用意する。

$$H = H_0 + H_{\mathrm{MF}} \tag{1}$$

ここで、

$$H_0 = \sum_{\boldsymbol{k},\sigma} \xi_{\boldsymbol{k}} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma} \quad = \quad \sum_{\boldsymbol{k}} \begin{pmatrix} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} & , & c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\boldsymbol{k}} & 0 \\ 0 & -\xi_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k}\uparrow} \\ c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{MF}} &= \Delta^* \sum_{\boldsymbol{k}} \left(c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} c_{\boldsymbol{k}\uparrow} - c_{-\boldsymbol{k}\uparrow} c_{\boldsymbol{k}\downarrow} \right) + \Delta \sum_{\boldsymbol{k}} \left(c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} - c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow} \right) && (3) \\ &= \Delta \sum_{\boldsymbol{k},\sigma} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\bar{\sigma}} \quad + \mathrm{H.c.} && (4) \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} \begin{pmatrix} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} & , & c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k}\uparrow} \\ c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \end{pmatrix}, && (5) \end{aligned}$$

すると、

$$
\boldsymbol{c_k}^{\dagger} = \left(c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow} \ \ , \ \ c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \right) \ , \qquad \boldsymbol{c_k} \ \ = \ \ \begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k}\uparrow} \\ \\ c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \end{pmatrix} , \tag{6}
$$

は 2 成分（南部）スピノルと呼ばれる。また、異常期待値 Δ は次のように定義される。

$$
\Delta = \sum_{\boldsymbol{k}} \langle c_{\boldsymbol{k}\uparrow} c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \rangle \tag{7}
$$

これで、このハミルトニアン H はスピノル $\boldsymbol{c_k}^{(\dagger)}$ と 2×2 行列 $\hat{H}$ を使って表すことができる。

$$
H = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{c_k}^{\dagger} \begin{pmatrix} \xi_{\boldsymbol{k}} & \Delta \\ \\ \Delta^* & -\xi_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \boldsymbol{c_k} \ \ = \ \ \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{c_k}^{\dagger} \ \hat{H} \ \boldsymbol{c_k}. \tag{8}
$$

$\hat{H}$ は任意の実数パラメータ λ を用いて容易に対角化できる。

$$
\det(\hat{H} - \lambda \, \hat{1}_{2\times 2}) = 0 \tag{9}
$$

$$
\longrightarrow \quad \lambda = \pm \sqrt{\xi_{\boldsymbol{k}}^2 + |\Delta_{\boldsymbol{k}}|^2} \ = \ \pm E_{\boldsymbol{k}}. \tag{10}
$$

これで固有値 $E_{\boldsymbol{k}}$ が定義された。

対角化された基底 $\boldsymbol{a}$ を得るために、ボゴリューボフ変換の行列 $\hat{U}$ を用いる。

$$
\boldsymbol{c_k} = \hat{U} \boldsymbol{a_k} \ = \ \begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}} & -v_{\boldsymbol{k}} e^{i\varphi} \\ \\ v_{\boldsymbol{k}} e^{-i\varphi} & u_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\boldsymbol{k}\uparrow} \\ \\ a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \end{pmatrix} \tag{11}
$$

$$
H = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{c_k}^{\dagger} \ \hat{H} \ \boldsymbol{c_k} \ = \ \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{a_k}^{\dagger} \ \hat{U}^{\dagger} \ \hat{H} \ \hat{U} \ \boldsymbol{a_k} \ = \ \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{a_k}^{\dagger} \begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{k}} & 0 \\ \\ 0 & -E_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \boldsymbol{a_k}. \tag{12}
$$

特に知る必要があるのはユニタリーな場合（$\hat{U}^{\dagger} = \hat{U}^{-1}$ となり、整数 n に対して $\varphi = 2\pi n$ とおける場合）だけ。

$$
\hat{1}_{2\times 2} = \hat{U}^{\dagger} \hat{U} \ = \ \begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}} & v_{\boldsymbol{k}} e^{i\varphi} \\ \\ -v_{\boldsymbol{k}} e^{-i\varphi} & u_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}} & -v_{\boldsymbol{k}} e^{i\varphi} \\ \\ v_{\boldsymbol{k}} e^{-i\varphi} & u_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}}^2 + v_{\boldsymbol{k}}^2 & 0 \\ \\ 0 & u_{\boldsymbol{k}}^2 + v_{\boldsymbol{k}}^2 \end{pmatrix}. \tag{13}
$$

$u_{\boldsymbol{k}}^2 + v_{\boldsymbol{k}}^2 = 1$ という条件が現れた。行列 $\hat{U}$ の成分に関する連立方程式を解くこともできる。

$$
\hat{H} \ \hat{U} = \hat{U} \begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{k}} & 0 \\ \\ 0 & -E_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \quad \hat{U}^{\dagger} \ \hat{H} \ \hat{U} \ = \ \begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{k}} & 0 \\ \\ 0 & -E_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \tag{14}
$$

$$
\begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}} \xi_{\boldsymbol{k}} + v_{\boldsymbol{k}} \Delta & u_{\boldsymbol{k}} \Delta - v_{\boldsymbol{k}} \xi_{\boldsymbol{k}} \\ \\ \Delta^* u_{\boldsymbol{k}} - v_{\boldsymbol{k}} \xi_{\boldsymbol{k}} & -v_{\boldsymbol{k}} \Delta^* - u_{\boldsymbol{k}} \xi_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} = E_{\boldsymbol{k}} \begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}} & v_{\boldsymbol{k}} \\ \\ v_{\boldsymbol{k}} & -u_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \tag{15}
$$

$$
\longrightarrow \quad u_{\boldsymbol{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}}} \right), \quad v_{\boldsymbol{k}}^2 \ = \ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}}} \right) \tag{16}
$$

これで、スピン一重項の場合について、固有値 $E_{\boldsymbol{k}}$ とボゴリューボフ変換行列の成分 $u_{\boldsymbol{k}}, v_{\boldsymbol{k}}$ が、既知の値 $\xi_{\boldsymbol{k}}, \Delta$ で書き表された。

1.2　一般化されたスピンの場合

次に、スピン一重項の場合だけでなく、任意のスピン三重項の場合についても物理量を計算できるように、2 成分の南部スピノル $\boldsymbol{c_k}$ を 4 成分のものに一般化する。

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{c_k}^{\dagger}\hat{H}\boldsymbol{c_k} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}} \left(c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\downarrow}\ ,\ c_{-\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right)\begin{pmatrix} \xi_{\boldsymbol{k}}\hat{1}_{2\times2} & \hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{\Delta}^{*}_{\boldsymbol{k}} & -\xi_{\boldsymbol{k}}\hat{1}_{2\times2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k}\uparrow} \\ c_{\boldsymbol{k}\downarrow} \\ c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\uparrow} \\ c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \end{pmatrix} \tag{17}$$

異常期待値から構成される行列 $\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}$ の定義は、

$$(\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}})_{\sigma\sigma'} = -V\sum_{\boldsymbol{k'}} \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k'}\langle c_{\boldsymbol{k'}\sigma}c_{-\boldsymbol{k'}\sigma'}\rangle. \tag{18}$$

クーパー対の全角運動量に垂直なベクトル $\boldsymbol{d}$ の成分を、行列 $\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}$ の基底として選ぶことができる。

$$\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} -d^{x}_{\boldsymbol{k}} + id^{y}_{\boldsymbol{k}} & d^{z}_{\boldsymbol{k}} \\ d^{z}_{\boldsymbol{k}} & d^{x}_{\boldsymbol{k}} + id^{y}_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

行列 $\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}$ がユニタリーであるとき、

$$\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}\hat{\Delta}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} {d^{x}_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^{y}_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^{z}_{\boldsymbol{k}}}^2 & 0 \\ 0 & {d^{x}_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^{y}_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^{z}_{\boldsymbol{k}}}^2 \end{pmatrix} \quad \propto \quad \hat{1}_{2\times2} \tag{20}$$

すなわち、

$${d^{x}_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^{y}_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^{z}_{\boldsymbol{k}}}^2 \ = \ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}\hat{\Delta}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\big], \qquad \hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}\hat{\Delta}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}} \ = \ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}\hat{\Delta}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\big]\ \ \hat{1}_{2\times2}. \tag{21}$$

すると、4×4 のハミルトニアンは具体的に次のように書ける。

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \xi_{\boldsymbol{k}} & 0 & -d^{x}_{\boldsymbol{k}} + id^{y}_{\boldsymbol{k}} & d^{z}_{\boldsymbol{k}} \\ 0 & \xi_{\boldsymbol{k}} & d^{z}_{\boldsymbol{k}} & d^{x}_{\boldsymbol{k}} + id^{y}_{\boldsymbol{k}} \\ -d^{x}_{\boldsymbol{k}} - id^{y}_{\boldsymbol{k}} & d^{z}_{\boldsymbol{k}} & -\xi_{\boldsymbol{k}} & 0 \\ d^{z}_{\boldsymbol{k}} & d^{x}_{\boldsymbol{k}} - id^{y}_{\boldsymbol{k}} & 0 & -\xi_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

固有値方程式 $\det(\hat{H} - \lambda\hat{1}_{4\times4})$ は、いくつかの面倒なプロセスを経れば解くことができる。

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix}
\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda & 0 & -d^x_{\boldsymbol{k}} + id^y_{\boldsymbol{k}} & d^z_{\boldsymbol{k}} \\
0 & \xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda & d^z_{\boldsymbol{k}} & d^x_{\boldsymbol{k}} + id^y_{\boldsymbol{k}} \\
-d^x_{\boldsymbol{k}} - id^y_{\boldsymbol{k}} & d^z_{\boldsymbol{k}} & -\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda & 0 \\
d^z_{\boldsymbol{k}} & d^x_{\boldsymbol{k}} - id^y_{\boldsymbol{k}} & 0 & -\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda
\end{vmatrix} \\
&= (\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda) \begin{vmatrix}
\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda & d^z_{\boldsymbol{k}} & d^x_{\boldsymbol{k}} + id^y_{\boldsymbol{k}} \\
d^z_{\boldsymbol{k}} & -\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda & 0 \\
d^x_{\boldsymbol{k}} - id^y_{\boldsymbol{k}} & 0 & -\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda
\end{vmatrix} \\
&\quad + (-d^x_{\boldsymbol{k}} - id^y_{\boldsymbol{k}}) \begin{vmatrix}
0 & -d^x_{\boldsymbol{k}} + id^y_{\boldsymbol{k}} & d^z_{\boldsymbol{k}} \\
\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda & d^z_{\boldsymbol{k}} & d^x_{\boldsymbol{k}} + id^y_{\boldsymbol{k}} \\
d^x_{\boldsymbol{k}} - id^y_{\boldsymbol{k}} & 0 & -\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda
\end{vmatrix} \\
&\quad - d^z_{\boldsymbol{k}} \begin{vmatrix}
0 & -d^x_{\boldsymbol{k}} + id^y_{\boldsymbol{k}} & d^z_{\boldsymbol{k}} \\
\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda & d^z_{\boldsymbol{k}} & d^x_{\boldsymbol{k}} + id^y_{\boldsymbol{k}} \\
d^z_{\boldsymbol{k}} & -\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda & 0
\end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{23}
$$

右辺の各項は、以下のように展開できる。

$$
(\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda) \begin{vmatrix}
\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda & d^z_{\boldsymbol{k}} & d^x_{\boldsymbol{k}} + id^y_{\boldsymbol{k}} \\
d^z_{\boldsymbol{k}} & -\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda & 0 \\
d^x_{\boldsymbol{k}} - id^y_{\boldsymbol{k}} & 0 & -\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda
\end{vmatrix} = ({\xi_{\boldsymbol{k}}}^2 - \lambda^2)({\xi_{\boldsymbol{k}}}^2 - \lambda^2 + {d^x_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^y_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^z_{\boldsymbol{k}}}^2) \tag{24}
$$

$$
(-d^x_{\boldsymbol{k}} - id^y_{\boldsymbol{k}}) \begin{vmatrix}
0 & -d^x_{\boldsymbol{k}} + id^y_{\boldsymbol{k}} & d^z_{\boldsymbol{k}} \\
\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda & d^z_{\boldsymbol{k}} & d^x_{\boldsymbol{k}} + id^y_{\boldsymbol{k}} \\
d^x_{\boldsymbol{k}} - id^y_{\boldsymbol{k}} & 0 & -\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda
\end{vmatrix} = ({d^x_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^y_{\boldsymbol{k}}}^2)({\xi_{\boldsymbol{k}}}^2 - \lambda^2 + {d^x_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^y_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^z_{\boldsymbol{k}}}^2) \tag{25}
$$

$$
-d^z_{\boldsymbol{k}} \begin{vmatrix}
0 & -d^x_{\boldsymbol{k}} + id^y_{\boldsymbol{k}} & d^z_{\boldsymbol{k}} \\
\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda & d^z_{\boldsymbol{k}} & d^x_{\boldsymbol{k}} + iy \\
z & -\xi_{\boldsymbol{k}} - \lambda & 0
\end{vmatrix} = {d^z_{\boldsymbol{k}}}^2({\xi_{\boldsymbol{k}}}^2 - \lambda^2 + {d^x_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^y_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^z_{\boldsymbol{k}}}^2) \tag{26}
$$

全ての項をまとめると、次のようになる。

$$
({\xi_{\boldsymbol{k}}}^2 - \lambda^2 + {d^x_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^y_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^z_{\boldsymbol{k}}}^2)^2 = 0 \tag{27}
$$

$$
\rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{\xi^2_{\boldsymbol{k}} + {d^x_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^y_{\boldsymbol{k}}}^2 + {d^z_{\boldsymbol{k}}}^2} = \pm\sqrt{\xi^2_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}\hat{\Delta}^\dagger_{\boldsymbol{k}}]} = \pm E_{\boldsymbol{k}} \tag{28}
$$

最終的に、4×4 行列 $\hat{H}$ に対する固有値 $E_{\boldsymbol{k}}$ を得ることができた。

対角化された基底 $\boldsymbol{a}$（これは 2 成分ベクトルではなく 4 成分ベクトルである）をどのように表現するかを知るため、2×2 のブロック行列 $\hat{u}_{\boldsymbol{k}}$ と $\hat{v}_{\boldsymbol{k}}$ を用いて、4×4 のボゴリューボフ変換行列 $\hat{U}$ を定義する。

$$\boldsymbol{c_k} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{\boldsymbol{k}} & -\hat{v}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{v}^*_{-\boldsymbol{k}} & \hat{u}_{-\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\boldsymbol{k}\uparrow} \\ a_{\boldsymbol{k}\downarrow} \\ a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow} \\ a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \end{pmatrix} \quad = \quad \hat{U}\boldsymbol{a_k} \tag{29}$$

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{c_k}^\dagger \ \hat{H} \ \boldsymbol{c_k} \ = \ \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{a_k}^\dagger \ \hat{U}^\dagger \ \hat{H} \ \hat{U} \ \boldsymbol{a_k} \ = \ \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{a_k}^\dagger \begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{k}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\boldsymbol{k}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{\boldsymbol{k}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \boldsymbol{a_k}. \tag{30}$$

この時点では、2×2 のブロック行列 $\hat{u}_{\boldsymbol{k}}$ と $\hat{v}_{\boldsymbol{k}}$ は未知である。

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{\boldsymbol{k}} & -\hat{v}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{v}^*_{-\boldsymbol{k}} & \hat{u}_{-\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \xi_{\boldsymbol{k}}\hat{1}_{2\times2} & \hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{\Delta}^*_{\boldsymbol{k}} & -\xi_{\boldsymbol{k}}\hat{1}_{2\times2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{\boldsymbol{k}} & -\hat{v}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{v}^*_{-\boldsymbol{k}} & \hat{u}_{-\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{k}}\hat{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & -E_{\boldsymbol{k}}\hat{1}_{2\times2} \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_{\boldsymbol{k}}\hat{1}_{2\times2} & \hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{\Delta}^*_{\boldsymbol{k}} & -\xi_{\boldsymbol{k}}\hat{1}_{2\times2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{\boldsymbol{k}} & -\hat{v}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{v}^*_{-\boldsymbol{k}} & \hat{u}_{-\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{\boldsymbol{k}} & -\hat{v}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{v}^*_{-\boldsymbol{k}} & \hat{u}_{-\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{k}}\hat{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & -E_{\boldsymbol{k}}\hat{1}_{2\times2} \end{pmatrix} \tag{32}$$

この手順が許されるのは、$\hat{U}$ がユニタリー（$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$）だからである。ただちに、行列 $\hat{u}_{\boldsymbol{k}}$ と $\hat{v}_{\boldsymbol{k}}$ に対するいくつかの拘束条件が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \hat{u}_{\boldsymbol{k}} & = & \dfrac{\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}} - \xi_{\boldsymbol{k}}}\hat{v}^*_{-\boldsymbol{k}} & \cdots \ (1,1,\mathrm{A}) \\ \hat{v}_{\boldsymbol{k}} & = & \dfrac{\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}} + \xi_{\boldsymbol{k}}}\hat{u}_{-\boldsymbol{k}} & \cdots \ (1,2,\mathrm{A}) \\ \hat{v}^*_{-\boldsymbol{k}} & = & \dfrac{\hat{\Delta}^*_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}} + \xi_{\boldsymbol{k}}}\hat{u}_{\boldsymbol{k}} & \cdots \ (2,1,\mathrm{A}) \\ \hat{u}_{-\boldsymbol{k}} & = & \dfrac{\hat{\Delta}^*_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}} - \xi_{\boldsymbol{k}}}\hat{v}_{\boldsymbol{k}} & \cdots \ (2,2,\mathrm{A}) \end{array} \right. \tag{33}$$

これらの関係は、もし $\hat{u}_{\boldsymbol{k}}$（あるいは $\hat{v}_{\boldsymbol{k}}$）が単位行列 $\hat{1}_{2\times2}$ に比例するならば、$\hat{v}_{\boldsymbol{k}}$（あるいは $\hat{u}_{\boldsymbol{k}}$）は $\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}$ に比例することを示している。ここでは、$\hat{u}_{\boldsymbol{k}} \propto \hat{1}_{2\times2}$ という条件を選ぶことにしよう。

$$\hat{u}_{\boldsymbol{k}} \ = \ \frac{\hat{1}_{2\times2}}{f(\boldsymbol{k})}\,, \qquad \hat{u}^{-1}_{\boldsymbol{k}} \ = \ f(\boldsymbol{k})\hat{1}_{2\times2} \tag{34}$$

このとき、$f(\boldsymbol{k})$ は未知の関数である。いかにして関数 $f(\boldsymbol{k})$ の表現を得るか、という問題に行き着いた。

$$
\begin{cases}
\hat{v}_{\boldsymbol{k}} &= \dfrac{\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}}}\hat{u}_{-\boldsymbol{k}} &= \dfrac{\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}}}\cdot\dfrac{1}{f(-\boldsymbol{k})} & & \\
\hat{u}_{-\boldsymbol{k}} &= \dfrac{\hat{\Delta}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}}-\xi_{\boldsymbol{k}}}\hat{v}_{\boldsymbol{k}} &= \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}\hat{\Delta}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\big]}{E^2_{\boldsymbol{k}}-\xi^2_{\boldsymbol{k}}}\cdot\dfrac{1}{f(-\boldsymbol{k})}\hat{1}_{2\times2} &= \dfrac{\hat{1}_{2\times2}}{f(-\boldsymbol{k})} & \cdots(\text{自明}) \\
\hat{v}^{*}_{-\boldsymbol{k}} &= \dfrac{\hat{\Delta}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}}}\hat{u}_{\boldsymbol{k}} &= \dfrac{\hat{\Delta}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}}}\cdot\dfrac{1}{f(\boldsymbol{k})} & & \\
\hat{u}_{\boldsymbol{k}} &= \dfrac{\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}}-\xi_{\boldsymbol{k}}}\hat{v}^{*}_{-\boldsymbol{k}} &= \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}\hat{\Delta}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\big]}{E^2_{\boldsymbol{k}}-\xi^2_{\boldsymbol{k}}}\cdot\dfrac{1}{f(\boldsymbol{k})}\hat{1}_{2\times2} &= \dfrac{\hat{1}_{2\times2}}{f(\boldsymbol{k})} & \cdots(\text{自明})
\end{cases}
\tag{35}
$$

これらの拘束条件に加えて、$\hat{U}$ に対するユニタリー条件は次のように記述できる。

$$
\begin{aligned}
1 &= \left|\det\begin{pmatrix}\hat{u}_{\boldsymbol{k}} & -\hat{v}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{v}^{*}_{-\boldsymbol{k}} & \hat{u}_{-\boldsymbol{k}}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\Big(\hat{u}_{\boldsymbol{k}}\Big)\ \det\Big[\hat{u}_{-\boldsymbol{k}}-\hat{v}^{*}_{-\boldsymbol{k}}\hat{u}^{-1}_{\boldsymbol{k}}(-\hat{v}_{\boldsymbol{k}})\Big]\right| \\
\longleftrightarrow\quad & \left|\det\Big(\hat{u}_{\boldsymbol{k}}\Big)\det\Big(\hat{u}_{-\boldsymbol{k}}\Big)+\det\Big(\hat{v}_{\boldsymbol{k}}\Big)\det\Big(\hat{v}^{*}_{-\boldsymbol{k}}\Big)\right| = 1,
\end{aligned}
\tag{36}
$$

これは次の関係を導く。

$$
\begin{aligned}
1 &= \left|\det\Big(\hat{u}_{\boldsymbol{k}}\Big)\det\Big(\hat{u}_{-\boldsymbol{k}}\Big)+\det\Big(\hat{v}_{\boldsymbol{k}}\Big)\det\Big(\hat{v}^{*}_{-\boldsymbol{k}}\Big)\right| \\
\longleftrightarrow\quad & \Big|f(\boldsymbol{k})f(-\boldsymbol{k})\Big| = 1+\frac{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}\hat{\Delta}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\big]}{\Big(E_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}}\Big)^2}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

したがって、$\hat{u}_{\boldsymbol{k}}=\hat{u}_{-\boldsymbol{k}}$ のとき、次を得る。

$$
\begin{pmatrix}\hat{u}_{\boldsymbol{k}} & -\hat{v}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{v}^{*}_{-\boldsymbol{k}} & \hat{u}_{-\boldsymbol{k}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\Big(E_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}}\Big)^2+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}\hat{\Delta}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\big]}}\begin{pmatrix}(E_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}})\hat{1}_{2\times2} & -\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{\Delta}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}} & (E_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}})\hat{1}_{2\times2}\end{pmatrix}
\tag{38}
$$

これがこの小節の目標である。

この結果は、三重項の場合から一重項の場合に帰着できるだろうか？秩序パラメータの (2,1) 成分 $(\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}})_{\uparrow\downarrow}=d_z=\Delta$ を考えてみよう。

$$
\begin{aligned}
{(\hat{v}_{\boldsymbol{k}})_{\uparrow\downarrow}}^2 &= \frac{\Delta^2}{\Big(E_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}}\Big)^2+E^2_{\boldsymbol{k}}-\xi^2_{\boldsymbol{k}}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\xi_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}}}\right)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

この値は、前の小節で現れた一重項の場合の $v_{\boldsymbol{k}}$ と一致している。

2 （南部⊗スピン）空間のグリーン関数

本節では、異方的（スピン依存）BCS モデルに対するグリーン関数を導出する。まず、運動方程式から出発する。

2.1　スピン一重項（従来の BCS）の場合

南部空間におけるグリーン関数（2×2 行列）を、今、次のように定義する。

$$i\hat{G}(k)=\int dx\left\langle \hat{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{k}}(x)\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{k}}{}^{\dagger}\right]\right\rangle e^{ik\cdot x} \;=\; \int dx\left\langle \hat{\mathrm{T}}\left[\begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(x) \\ c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow} & , & c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\end{pmatrix}\right]\right\rangle e^{ik\cdot x}$$
$$=\int dx\left\langle \hat{\mathrm{T}}\left[\begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(x)c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow} & c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(x)c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \\ c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(x)c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow} & c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(x)c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\end{pmatrix}\right]\right\rangle e^{ik\cdot x} \;=\; i\int dx\begin{pmatrix} G(x) & F(x) \\ \bar{F}(x) & \bar{G}(x)\end{pmatrix} e^{ik\cdot x} \tag{40}$$

ここで $\hat{\mathrm{T}}\left[\cdots\right]$ は時間順序積演算子である。$x^{\mu}=(t,\boldsymbol{r})$ および $k^{\mu}=(\omega,\boldsymbol{k})$ (i.e., $k\cdot x=g_{\mu\nu}k^{\mu}x^{\nu}=\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ ）は、簡略記法で書かれた 4 元運動量ベクトルである。これらの関数の遅延（retarded）部分も、次のように定義される。

$$i\hat{G}^{R}(k)=\int dx\left\langle \begin{pmatrix} \left\{c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(x),c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\} & \{c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(x),c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\} \\ \left\{c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(x),c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\} & \left\{c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(x),c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\}\end{pmatrix}\right\rangle e^{ik\cdot x} \;=\; i\int dx\begin{pmatrix} G^{R}(x) & F^{R}(x) \\ \bar{F}^{R}(x) & \bar{G}^{R}(x)\end{pmatrix} e^{ik\cdot x} \tag{41}$$

対角化された基底（準粒子） $a^{(\dagger)}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ （これはスピン添字 $\sigma=\uparrow,\downarrow$ によってベクトルとみなせる）に対する運動方程式は以下で得られる：

$$\begin{aligned}
i\frac{da_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t)}{dt} &= [a_{\boldsymbol{k}\uparrow},H] \\
&= \sum_{\boldsymbol{q}}\left[a_{\boldsymbol{k}\uparrow},\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{q}}{}^{\dagger}\hat{H}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{q}}\right] \;=\; \sum_{\boldsymbol{q}}\left[a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\;,\;\begin{pmatrix} c^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\uparrow} & , & c_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_{\boldsymbol{q}} & \Delta \\ \Delta^{*} & -\xi_{\boldsymbol{q}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{q}\uparrow} \\ c^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\end{pmatrix}\right] \\
&= \sum_{\boldsymbol{q}}\left[a_{\boldsymbol{k}\uparrow},\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{q}}{}^{\dagger}\hat{U}^{\dagger}\hat{H}\hat{U}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{q}}\right] \;=\; \sum_{\boldsymbol{q}}\left[a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\;,\;\begin{pmatrix} a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\uparrow} & , & a_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{q}} & 0 \\ 0 & -E_{\boldsymbol{q}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{\boldsymbol{q}\uparrow} \\ a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\end{pmatrix}\right] \\
&= \sum_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{q}}\left[a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\;,\;a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\uparrow}a_{\boldsymbol{q}\uparrow}-a_{-\boldsymbol{q}\downarrow}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\right] \\
&= \sum_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{q}}\left(\left\{a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\,,\,a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\uparrow}\right\}a_{\boldsymbol{q}\uparrow}-a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\uparrow}\left\{a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\,,\,a_{\boldsymbol{q}\uparrow}\right\}-\left\{a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\,,\,a_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\right\}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\downarrow}+a_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\quad\left\{a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\,,\,a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\right\}\right) \\
&= E_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}
\end{aligned} \tag{42}$$

これを積分すると、

$$a_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t)=e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}(0) \tag{43}$$

同様にして、$a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}$ に対する方程式を得る。

$$i\frac{da^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}}{dt}=\left[a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow},H\right] \;=\; -E_{\boldsymbol{k}}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \tag{44}$$

そして、

$$a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t) = e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(0) \tag{45}$$

スピノル $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ の間の関係は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t) &= u_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t) - v_{\boldsymbol{k}} a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t) \\ &= u_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} a_{\boldsymbol{k}\uparrow} - v_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t) &= u_{\boldsymbol{k}} a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t) + v_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t) \\ &= u_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} + v_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} a_{\boldsymbol{k}\uparrow} \end{aligned} \tag{47}$$

(1,1) 成分の遅延グリーン関数は、以下のように明らかになる。

$$\begin{aligned}
iG^{R}_{\boldsymbol{k}}(t) \;&=\; \theta(t)\left\langle\left\{c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t), c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\}\right\rangle \;=\; \theta(t)\Big[\left\langle c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t)c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle + \left\langle c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t)\right\rangle\Big] \\
&= \theta(t)\left\langle\Big(u_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} a_{\boldsymbol{k}\uparrow} - v_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\Big)\Big(u_{\boldsymbol{k}} a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow} - v_{\boldsymbol{k}} a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\Big)\right\rangle \\
&\quad + \theta(t)\left\langle\Big(u_{\boldsymbol{k}} a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow} - v_{\boldsymbol{k}} a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\Big)\Big(u_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} a_{\boldsymbol{k}\uparrow} - v_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\Big)\right\rangle \\
&= \theta(t)\left\langle u^2_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} a_{\boldsymbol{k}\uparrow}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow} - u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} a_{\boldsymbol{k}\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow} - u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow} + v^2_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle \\
&\quad + \theta(t)\left\langle u^2_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow} - u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} - u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow} + v^2_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle \\
&= \theta(t)\left(u^2_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{\boldsymbol{k}\uparrow}a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle + v^2_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle + u^2_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle + v^2_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle\right) \\
&= \theta(t) \\
&\quad \times\Bigg[u^2_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big) + v^2_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big) \\
&\quad + u^2_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big) + v^2_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big)\Bigg] \\
&= \theta(t)\left(u^2_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + v^2_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\right)
\end{aligned} \tag{48}$$

あるいは、フーリエ空間では、

$$\begin{aligned}
G^{R}(k) \;&=\; \int dt\; G^{R}_{\boldsymbol{k}}(t) e^{i\omega t} \\
&= -i\lim_{\eta\to+0}\int_0^{\infty} dt\;\left(u^2_{\boldsymbol{k}} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + v^2_{\boldsymbol{k}} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\right) e^{i\omega t-\eta t} \\
&= \lim_{\eta\to+0}\left(\frac{u^2_{\boldsymbol{k}}}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} + \frac{v^2_{\boldsymbol{k}}}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta}\right).
\end{aligned} \tag{49}$$

虚数部は状態密度に関連している。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\sum_{\boldsymbol{k}}\mathrm{Im}G^R(k)\\
&=-\frac{1}{\pi}\lim_{\eta\to+0}\sum_{\boldsymbol{k}}\left(\mathrm{Im}\frac{u_{\boldsymbol{k}}^2}{\omega-E_{\boldsymbol{k}}+i\eta}+\mathrm{Im}\frac{v_{\boldsymbol{k}}^2}{\omega+E_{\boldsymbol{k}}+i\eta}\right)\\
&=\sum_{\boldsymbol{k}}\left[u_{\boldsymbol{k}}^2\delta(\omega-E_{\boldsymbol{k}})+v_{\boldsymbol{k}}^2\delta(\omega+E_{\boldsymbol{k}})\right]
\end{aligned}
\tag{50}
$$

遅延部分の $(1,2)$ 成分 $F^R(k)$ も同様に与えられる。

$$
\begin{aligned}
&iF_{\boldsymbol{k}}^R(t)\\
&=\theta(t)\left\langle\{c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t),c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\}\right\rangle\\
&=\theta(t)\Big[\left\langle c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t)c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle+\left\langle c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t)\right\rangle\Big]\\
&=\theta(t)\left\langle\Big(u_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}-v_{\boldsymbol{k}}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}^{\dagger}\Big)\Big(u_{\boldsymbol{k}}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}+v_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}^{\dagger}\Big)\right\rangle\\
&\qquad+\theta(t)\left\langle\Big(u_{\boldsymbol{k}}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}+v_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}^{\dagger}\Big)\Big(u_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}-v_{\boldsymbol{k}}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}^{\dagger}\Big)\right\rangle\\
&=\theta(t)u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\left(e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{\boldsymbol{k}\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}^{\dagger}\right\rangle-e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}^{\dagger}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle+e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{\boldsymbol{k}\uparrow}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle-e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}^{\dagger}\right\rangle\right)\\
&=\theta(t)u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\left[e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big)-e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big)\right.\\
&\qquad\left.+\,e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big)-e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big)\right]\\
&=\theta(t)u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\left(e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}-e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\right),
\end{aligned}
\tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
F^R(k)&=-iu_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\lim_{\eta\to+0}\int_0^{\infty}dt\;\left(e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}-e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\right)e^{i\omega t-\eta t}\\
&=-u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\lim_{\eta\to+0}\left(\frac{1}{\omega-E_{\boldsymbol{k}}+i\eta}-\frac{1}{\omega+E_{\boldsymbol{k}}+i\eta}\right),
\end{aligned}
\tag{52}
$$

異常グリーン関数に対応する状態密度は

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\sum_{\boldsymbol{k}}\mathrm{Im}F^R(k)\\
&=\frac{1}{\pi}\lim_{\eta\to+0}\sum_{\boldsymbol{k}}u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\left(\mathrm{Im}\frac{1}{\omega-E_{\boldsymbol{k}}+i\eta}-\mathrm{Im}\frac{1}{\omega+E_{\boldsymbol{k}}+i\eta}\right)\\
&=\sum_{\boldsymbol{k}}u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\big[\delta(\omega+E_{\boldsymbol{k}})-\delta(\omega-E_{\boldsymbol{k}})\big].
\end{aligned}
\tag{53}
$$

遅延部分の $(2,1)$ 成分 $\bar{F}^R(k)$ は、遅延部分の $(1,2)$ 成分 $F^R(k)$ に等しい。

$$
\begin{aligned}
i\bar{F}^R_{\boldsymbol{k}}(t) &= \theta(t)\left\langle\left\{c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t), c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\}\right\rangle = \theta(t)\Big[\left\langle c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t)c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle + \left\langle c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t)\right\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta(t)\left\langle\Big(u_{\boldsymbol{k}}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} + v_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\Big)\Big(u_{\boldsymbol{k}}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} - v_{\boldsymbol{k}}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\Big)\right\rangle \\
&\quad + \theta(t)\left\langle\Big(u_{\boldsymbol{k}}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} - v_{\boldsymbol{k}}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\Big)\Big(u_{\boldsymbol{k}}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} + v_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\Big)\right\rangle \\
&= \theta(t)u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\left(-e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle + e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{\boldsymbol{k}\uparrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle + e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle - e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle\right) \\
&= \theta(t)u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\left[-e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big) + e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big)\right. \\
&\quad \left. + e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big) - e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big)\right] \\
&= \theta(t)u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\left(-e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} + e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\right) \\
&= iF^R_{\boldsymbol{k}}(t) \qquad (54)
\end{aligned}
$$

遅延部分の $(2,2)$ 成分 $\bar{G}^R(k)$ もまた $G^R(k)$ に等しい。

$$
\begin{aligned}
i\bar{G}^R_{\boldsymbol{k}}(t) &= \theta(t)\left\langle\left\{c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t), c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\}\right\rangle = \theta(t)\Big[\left\langle c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t)c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle + \left\langle c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t)\right\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta(t)\left\langle\Big(u_{\boldsymbol{k}}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} + v_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\Big)\Big(u_{\boldsymbol{k}}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow} + v_{\boldsymbol{k}}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\Big)\right\rangle \\
&\quad + \theta(t)\left\langle\Big(u_{\boldsymbol{k}}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow} + v_{\boldsymbol{k}}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\Big)\Big(u_{\boldsymbol{k}}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} + v_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\Big)\right\rangle \\
&= \theta(t)\left(u^2_{\boldsymbol{k}}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle + v^2_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{\boldsymbol{k}\uparrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle\right. \\
&\quad \left. + u^2_{\boldsymbol{k}}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle + v^2_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle\right) \\
&= \theta(t)\left[u^2_{\boldsymbol{k}}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big) + v^2_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big)\right. \\
&\quad \left. + u^2_{\boldsymbol{k}}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big) + v^2_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big)\right] \\
&= \theta(t)\left(u^2_{\boldsymbol{k}}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} + v^2_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\right) \\
&= iG^R_{\boldsymbol{k}}(t) \qquad (55)
\end{aligned}
$$

最終的に、$\hat{G}^R$ を既知の値で表す式にたどり着く。

$$
i\begin{pmatrix} G^R_{\boldsymbol{k}}(t) & F^R_{\boldsymbol{k}}(t) \\ \bar{F}^R_{\boldsymbol{k}}(t) & \bar{G}^R_{\boldsymbol{k}}(t) \end{pmatrix} = \theta(t)\begin{pmatrix} u^2_{\boldsymbol{k}}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} + v^2_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} & -u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\left(e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} - e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\right) \\ -u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\left(e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} - e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\right) & u^2_{\boldsymbol{k}}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} + v^2_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} \end{pmatrix} \qquad (56)
$$

$$
\begin{pmatrix} G^R(k) & F^R(k) \\ \bar{F}^R(k) & \bar{G}^R(k) \end{pmatrix} = \lim_{\eta\to+0}\begin{pmatrix} \dfrac{u^2_{\boldsymbol{k}}}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} + \dfrac{v^2_{\boldsymbol{k}}}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} & -u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\left(\dfrac{1}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} - \dfrac{1}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta}\right) \\ -u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\left(\dfrac{1}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} - \dfrac{1}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta}\right) & \dfrac{u^2_{\boldsymbol{k}}}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} + \dfrac{v^2_{\boldsymbol{k}}}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} \end{pmatrix} \qquad (57)
$$

2.2　一般化されたスピンの場合

南部空間におけるグリーン関数（4×4 行列）は、次のように定義される。

$$
\begin{aligned}
i\hat{G}(k) &= \int dx \left\langle \hat{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{k}}(x)\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}\right]\right\rangle e^{ik\cdot x} \\
&= \int dx \left\langle \hat{\mathrm{T}}\left[\begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(x) \\ c_{\boldsymbol{k}\downarrow}(x) \\ c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\uparrow}(x) \\ c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(x) \end{pmatrix} \left(c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\downarrow}\ ,\ c_{-\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\quad\right)\right]\right\rangle e^{ik\cdot x}
\end{aligned} \tag{58}
$$

ここで $\hat{\mathrm{T}}\left[\cdots\right]$ は時間順序積演算子である。$x^{\mu}=(t,\boldsymbol{r})$ および $k^{\mu}=(\omega,\boldsymbol{k})$ (i.e., $k\cdot x = g_{\mu\nu}k^{\mu}x^{\nu} = \omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ ）は、簡略記法で書かれた 4 元運動量ベクトルである。これらの関数の遅延（retarded）部分も、次のように定義される。

$$
\begin{aligned}
&i\hat{G}^{R}(k) \\
&= \int dx \left\langle \begin{pmatrix}
\{c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(x), c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}\} & \{c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(x), c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\downarrow}\} & \{c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(x), c_{-\boldsymbol{k}\uparrow}\} & \{c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(x), c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\} \\
\{c_{\boldsymbol{k}\downarrow}(x), c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}\} & \{c_{\boldsymbol{k}\downarrow}(x), c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\downarrow}\} & \{c_{\boldsymbol{k}\downarrow}(x), c_{-\boldsymbol{k}\uparrow}\} & \{c_{\boldsymbol{k}\downarrow}(x), c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\} \\
\{c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\uparrow}(x), c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}\} & \{c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\uparrow}(x), c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\downarrow}\} & \{c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\uparrow}(x), c_{-\boldsymbol{k}\uparrow}\} & \{c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\uparrow}(x), c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\} \\
\{c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(x), c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow}\} & \{c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(x), c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\downarrow}\} & \{c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(x), c_{-\boldsymbol{k}\uparrow}\} & \{c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(x), c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\}
\end{pmatrix} \right\rangle e^{ik\cdot x}
\end{aligned} \tag{59}
$$

対角化された基底（準粒子） $a^{(\dagger)}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ に対する運動方程式は以下で得られる。：

$$
\begin{aligned}
i\frac{da_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t)}{dt} &= [a_{\boldsymbol{k}\uparrow}, H] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{q}}\left[a_{\boldsymbol{k}\uparrow}, \boldsymbol{c_q}^{\dagger}\hat{H}\boldsymbol{c_q}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{q}}\left[a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ \left(c^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\uparrow}\ ,\ c^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\downarrow}\ ,\ c_{-\boldsymbol{q}\uparrow}\ ,\ c_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\right)\begin{pmatrix} \xi_{\boldsymbol{q}}\hat{1}_{2\times2} & \hat{\Delta}_{\boldsymbol{q}} \\ \hat{\Delta}^{*}_{\boldsymbol{q}} & -\xi_{\boldsymbol{q}}\hat{1}_{2\times2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{q}\uparrow} \\ c_{\boldsymbol{q}\downarrow} \\ c^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\uparrow} \\ c^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\downarrow} \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{q}}\left[a_{\boldsymbol{k}\uparrow}, \boldsymbol{a_q}^{\dagger}\hat{U}^{\dagger}\hat{H}\hat{U}\boldsymbol{a_q}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{q}}\left[a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ \left(a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\uparrow}\ ,\ a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\downarrow}\ ,\ a_{-\boldsymbol{q}\uparrow}\ ,\ a_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\right)\begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{q}}\hat{1}_{2\times2} & \\ & -E_{\boldsymbol{q}}\hat{1}_{2\times2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{\boldsymbol{q}\uparrow} \\ a_{\boldsymbol{q}\downarrow} \\ a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\uparrow} \\ a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\downarrow} \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{q}}\left[a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\uparrow}a_{\boldsymbol{q}\uparrow} + a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\downarrow}a_{\boldsymbol{q}\downarrow} - a_{-\boldsymbol{q}\uparrow}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\uparrow} - a_{-\boldsymbol{q}\downarrow}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{q}}\left(\left\{a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\uparrow}\right\}a_{\boldsymbol{q}\uparrow} - a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\uparrow}\left\{a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ a_{\boldsymbol{q}\uparrow}\right\} + \left\{a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\downarrow}\right\}a_{\boldsymbol{q}\downarrow} - a^{\dagger}_{\boldsymbol{q}\downarrow}\left\{a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ a_{\boldsymbol{q}\downarrow}\right\}\right. \\
&\qquad \left. - \left\{a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ a_{-\boldsymbol{q}\uparrow}\right\}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\uparrow} + a_{-\boldsymbol{q}\uparrow}\left\{a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\uparrow}\right\} - \left\{a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ a_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\right\}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\downarrow} + a_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\left\{a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\ ,\ a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}\downarrow}\right\}\right) \\
&= E_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}
\end{aligned} \tag{60}
$$

これを積分すると、

$$
a_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t) = e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}(0) \tag{61}
$$

同様にして、$a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}$ に対する方程式を得る。

$$
i\frac{da^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t)}{dt} = \left[a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}, H\right] \ = \ -E_{\boldsymbol{k}}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \tag{62}
$$

そして、

$$
a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t) = e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(0). \tag{63}
$$

スピノル $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ の間の関係は以下で与えられる。

$$
\boldsymbol{c_k} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{\boldsymbol{k}} & -\hat{v}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{v}^{*}_{-\boldsymbol{k}} & \hat{u}_{-\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{\boldsymbol{k}\uparrow} \\ a_{\boldsymbol{k}\downarrow} \\ a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\uparrow} \\ a^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \end{pmatrix} \ = \ \hat{U}\boldsymbol{a_k}, \tag{64}
$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{\boldsymbol{k}} & -\hat{v}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{v}^*_{-\boldsymbol{k}} & \hat{u}_{-\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\left(E_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}}\right)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}}\hat{\Delta}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\right]}} \begin{pmatrix} (E_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}})\hat{1}_{2\times 2} & -\hat{\Delta}_{\boldsymbol{k}} \\ \hat{\Delta}^\dagger_{\boldsymbol{k}} & (E_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}})\hat{1}_{2\times 2} \end{pmatrix}. \tag{65}$$

したがって、次のように置き換えることができる。

$$(\hat{u}_{\boldsymbol{k}})_{\sigma\sigma'} \;=\; (\hat{u}_{-\boldsymbol{k}})_{\sigma\sigma'} \;=\; u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{66}$$

$$(\hat{v}_{\boldsymbol{k}})_{\sigma\sigma'} \;=\; v_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'} \quad , \quad (\hat{v}^*_{\boldsymbol{k}})_{\sigma\sigma'} \;=\; v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}. \tag{67}$$

これで、スカラー量 $u_{\boldsymbol{k}}, v_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}$ および $v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}$ が定義された。この関係を用いて、グリーン関数についての表現を得ることができる。

$$\begin{aligned} c_{\boldsymbol{k}\sigma}(t) &= (\hat{u}_{\boldsymbol{k}})_{\sigma\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t) + (\hat{u}_{\boldsymbol{k}})_{\sigma\downarrow}a_{\boldsymbol{k}\downarrow}(t) - (\hat{v}_{\boldsymbol{k}})_{\sigma\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}(t) - (\hat{v}_{\boldsymbol{k}})_{\sigma\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t) \\ &= u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\downarrow}a_{\boldsymbol{k}\downarrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}, \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\sigma}(t) &= (\hat{v}^*_{\boldsymbol{k}})_{\sigma\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t) + (\hat{v}^*_{\boldsymbol{k}})_{\sigma\downarrow}a_{\boldsymbol{k}\downarrow}(t) + (\hat{u}_{\boldsymbol{k}})_{\sigma\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}(t) + (\hat{u}_{\boldsymbol{k}})_{\sigma\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(t) \\ &= v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}a_{\boldsymbol{k}\downarrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}. \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} iG^R_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}(t) \;&=\; \theta(t)\left\langle\left\{c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t), c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\}\right\rangle \;=\; \theta(t)\left\langle c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t)c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} + c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(t)\right\rangle \\ &= \theta(t)\Big\langle\Big(u_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\Big)\Big(u_{\boldsymbol{k}}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} - v^*_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\uparrow} - v^*_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\Big) \\ &\qquad + \Big(u_{\boldsymbol{k}}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} - v^*_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\uparrow} - v^*_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\Big)\Big(u_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\Big)\Big\rangle \\ &= \theta(t)\Big(u^2_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{\boldsymbol{k}\uparrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}|^2e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}|^2e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle \\ &\qquad + u^2_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}|^2e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{-\boldsymbol{k}\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}|^2e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle\Big) \\ &= \theta(t)\Big[u^2_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big) + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}|^2e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big) + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}|^2e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big) \\ &\qquad + u^2_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big) + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}|^2e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big) + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}|^2e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big)\Big] \\ &= \theta(t)\Big[u^2_{\boldsymbol{k}}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + \Big(|v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}|^2 + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}|^2\Big)e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\Big] \end{aligned} \tag{70}$$

あるいは、フーリエ空間では、

$$
\begin{aligned}
G^R_{\uparrow\uparrow}(k) &= \int dt\ G^R_{\boldsymbol{k}}(t) e^{i\omega t} \\
&= -i \lim_{\eta\to+0} \int_0^\infty dt\ \left[u_{\boldsymbol{k}}^2 e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + \left(|v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}|^2 + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}|^2 \right) e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} \right] e^{i\omega t - \eta t} \\
&= \lim_{\eta\to+0} \left(\frac{u_{\boldsymbol{k}}^2}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} + \frac{|v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}|^2 + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}|^2}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} \right).
\end{aligned} \tag{71}
$$

虚数部は状態密度に関連している。

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{Im} G^R_{\uparrow\uparrow}(k) \\
&= -\frac{1}{\pi} \lim_{\eta\to+0} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\mathrm{Im} \frac{u_{\boldsymbol{k}}^2}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} + \mathrm{Im} \frac{|v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}|^2 + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}|^2}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} \right) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}} \left[u_{\boldsymbol{k}}^2 \delta(\omega - E_{\boldsymbol{k}}) + \left(|v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}|^2 + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}|^2 \right) \delta(\omega + E_{\boldsymbol{k}}) \right].
\end{aligned} \tag{72}
$$

$$
\left(G^R_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'} \right) = \begin{pmatrix} G^R_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow} & G^R_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow} \\ G^R_{\boldsymbol{k}\downarrow\uparrow} & G^R_{\boldsymbol{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{73}
$$

次のように書き下すことができる。

$$
\begin{aligned}
iG^R_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}(t) \quad &= \quad \theta(t) \left\langle \left\{ c_{\boldsymbol{k}\sigma}(t), c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma'} \right\} \right\rangle \quad = \quad \theta(t) \left\langle c_{\boldsymbol{k}\sigma}(t) c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma'} + c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma'} c_{\boldsymbol{k}\sigma}(t) \right\rangle \\
&= \theta(t) \Big\langle \left(u_{\boldsymbol{k}} \delta_{\sigma\uparrow} a_{\boldsymbol{k}\uparrow} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + u_{\boldsymbol{k}} \delta_{\sigma\downarrow} a_{\boldsymbol{k}\downarrow} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow} a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow} a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} \right) \\
&\quad \times \left(u_{\boldsymbol{k}} \delta_{\sigma'\uparrow} a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} + u_{\boldsymbol{k}} \delta_{\sigma'\downarrow} a^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow} - v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow} a_{-\boldsymbol{k}\uparrow} - v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow} a_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \right) \\
&\qquad + \left(u_{\boldsymbol{k}} \delta_{\sigma'\uparrow} a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} + u_{\boldsymbol{k}} \delta_{\sigma'\downarrow} a^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow} - v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow} a_{-\boldsymbol{k}\uparrow} - v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow} a_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \right) \\
&\quad \times \left(u_{\boldsymbol{k}} \delta_{\sigma\uparrow} a_{\boldsymbol{k}\uparrow} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + u_{\boldsymbol{k}} \delta_{\sigma\downarrow} a_{\boldsymbol{k}\downarrow} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow} a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow} a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} \right) \Big\rangle \\
&= \theta(t) \Big(u_{\boldsymbol{k}}^2 \delta_{\sigma\uparrow} \delta_{\sigma'\uparrow} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} \left\langle a_{\boldsymbol{k}\uparrow} a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} \right\rangle + u_{\boldsymbol{k}}^2 \delta_{\sigma\downarrow} \delta_{\sigma'\downarrow} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} \left\langle a_{\boldsymbol{k}\downarrow} a^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow} \right\rangle \\
&\quad + v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} \left\langle a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow} a_{-\boldsymbol{k}\uparrow} \right\rangle + v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} \left\langle a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} a_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \right\rangle \\
&\qquad + u_{\boldsymbol{k}}^2 \delta_{\sigma\uparrow} \delta_{\sigma'\uparrow} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} \left\langle a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} a_{\boldsymbol{k}\uparrow} \right\rangle + u_{\boldsymbol{k}}^2 \delta_{\sigma\downarrow} \delta_{\sigma'\downarrow} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} \left\langle a^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow} a_{\boldsymbol{k}\downarrow} \right\rangle \\
&\quad + v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} \left\langle a_{-\boldsymbol{k}\uparrow} a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow} \right\rangle + v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow} e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} \left\langle a_{-\boldsymbol{k}\downarrow} a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \right\rangle \Big) \\
&= \theta(t) \left[u_{\boldsymbol{k}}^2 \left(\delta_{\sigma\uparrow} \delta_{\sigma'\uparrow} + \delta_{\sigma\downarrow} \delta_{\sigma'\downarrow} \right) e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + \left(v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow} \right) e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} \right] \\
&= \theta(t) \left[u_{\boldsymbol{k}}^2 \delta_{\sigma\sigma'} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + \left(v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow} \right) e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} \right],
\end{aligned} \tag{74}
$$

フーリエ変換で以下を得る。

$$
\begin{aligned}
G^R_{\sigma\sigma'}(k) \;&=\; \int dt\; G^R_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}(t) e^{i\omega t} \\
&= -i \lim_{\eta\to+0} \int_0^\infty dt\; \left[u_{\boldsymbol{k}}^2 \delta_{\sigma\sigma'} e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + \left(v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow} \right) e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} \right] e^{i\omega t - \eta t} \\
&= \lim_{\eta\to+0} \left[\frac{u_{\boldsymbol{k}}^2 \delta_{\sigma\sigma'}}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} + \frac{v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} \right],
\end{aligned}
\tag{75}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{Im} G^R_{\sigma\sigma'}(k) \\
&= -\frac{1}{\pi} \lim_{\eta\to+0} \sum_{\boldsymbol{k}} \left[\mathrm{Im} \frac{u_{\boldsymbol{k}}^2 \delta_{\sigma\sigma'}}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} + \mathrm{Im} \frac{v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} \right] \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}} \left[u_{\boldsymbol{k}}^2 \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\omega - E_{\boldsymbol{k}}) + \left(v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow} v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow} \right) \delta(\omega + E_{\boldsymbol{k}}) \right].
\end{aligned}
\tag{76}
$$

以上から次を得る。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} G^R_{\uparrow\uparrow}(k) & G^R_{\uparrow\downarrow}(k) \\ G^R_{\downarrow\uparrow}(k) & G^R_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix} \\
&= \lim_{\eta\to+0} \begin{pmatrix} \dfrac{u_{\boldsymbol{k}}^2}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} + \dfrac{|v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow}|^2 + |v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}|^2}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} & \dfrac{v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow} v^*_{\boldsymbol{k}\downarrow\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow} v^*_{\boldsymbol{k}\downarrow\downarrow}}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} \\ \dfrac{v_{\boldsymbol{k}\downarrow\uparrow} v^*_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\downarrow\downarrow} v^*_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} & \dfrac{u_{\boldsymbol{k}}^2}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} + \dfrac{|v_{\boldsymbol{k}\downarrow\uparrow}|^2 + |v_{\boldsymbol{k}\downarrow\downarrow}|^2}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{77}
$$

この結果は、$(v_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}) = v_{\boldsymbol{k}} \hat{\sigma}^x$ 、$(v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}) = v^*_{\boldsymbol{k}} \hat{\sigma}^x$ とおくことで、一重項の場合に帰着できる。

$$
\begin{pmatrix} G^R_{\uparrow\uparrow}(k) & G^R_{\uparrow\downarrow}(k) \\ G^R_{\downarrow\uparrow}(k) & G^R_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix} = \lim_{\eta\to+0} \left(\frac{u_{\boldsymbol{k}}^2}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} + \frac{|v_{\boldsymbol{k}}|^2}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} \right) \hat{1}_{2\times2}.
\tag{78}
$$

スピン空間における遅延異常グリーン関数は、

$$
\left(F^R_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'} \right) = \begin{pmatrix} F^R_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow} & F^R_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow} \\ F^R_{\boldsymbol{k}\downarrow\uparrow} & F^R_{\boldsymbol{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix},
\tag{79}
$$

そして、

$$
\begin{aligned}
iF^R_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}(t) &= \theta(t)\left\langle\{c_{\boldsymbol{k}\sigma}(t), c_{-\boldsymbol{k}\sigma'}\}\right\rangle = \theta(t)\left\langle c_{\boldsymbol{k}\sigma}(t)c_{-\boldsymbol{k}\sigma'} + c_{-\boldsymbol{k}\sigma'}c_{\boldsymbol{k}\sigma}(t)\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta(t)\Big\langle\Big(u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\downarrow}a_{\boldsymbol{k}\downarrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\Big)\\
&\quad\times\Big(v_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma'\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\uparrow} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma'\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\Big)\\
&\qquad+\Big(v_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma'\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\uparrow} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma'\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\Big)\\
&\quad\times\Big(u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\downarrow}a_{\boldsymbol{k}\downarrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} - v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\Big)\Big\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta(t)\Big(u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}\delta_{\sigma\uparrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{\boldsymbol{k}\uparrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle + u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}\delta_{\sigma\downarrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{\boldsymbol{k}\downarrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle\\
&\qquad- u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle - u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle\\
&\qquad+ u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}\delta_{\sigma\uparrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle + u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}\delta_{\sigma\downarrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow}a_{\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle\\
&\qquad- u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{-\boldsymbol{k}\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle - u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

$$
= u_{\boldsymbol{k}}\theta(t)\left[\Big(v_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}\delta_{\sigma\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}\delta_{\sigma\downarrow}\Big)e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} - \Big(v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow}\Big)e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\right], \tag{80}
$$

$$
F^R_{\sigma\sigma'}(k) = \int dt\ F^R_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}(t)e^{i\omega t}
$$

$$
= -iu_{\boldsymbol{k}}\lim_{\eta\to+0}\int_0^\infty dt\left[\Big(v_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}\delta_{\sigma\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}\delta_{\sigma\downarrow}\Big)e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} - \Big(v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow}\Big)e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\right]e^{i\omega t-\eta t}
$$

$$
= -u_{\boldsymbol{k}}\lim_{\eta\to+0}\left[\frac{v_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}\delta_{\sigma\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}\delta_{\sigma\downarrow}}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} - \frac{v_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow} + v_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow}}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta}\right]. \tag{81}
$$

次を得る。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} F^R_{\uparrow\uparrow}(k) & F^R_{\uparrow\downarrow}(k) \\ F^R_{\downarrow\uparrow}(k) & F^R_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix}\\
&= -u_{\boldsymbol{k}}\lim_{\eta\to+0}\left[\frac{1}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta}\begin{pmatrix} v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow} & v_{\boldsymbol{k}\downarrow\uparrow} \\ v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow} & v_{\boldsymbol{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} - \frac{1}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta}\begin{pmatrix} v_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow} & v_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow} \\ v_{\boldsymbol{k}\downarrow\uparrow} & v_{\boldsymbol{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}\right].
\end{aligned} \tag{82}
$$

この結果は、$(v_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}) = v_{\boldsymbol{k}}\hat{\sigma}^x$ 、$(v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}) = v^*_{\boldsymbol{k}}\hat{\sigma}^x$ とおくことで、一重項の場合に帰着できる。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} F^R_{\uparrow\uparrow}(k) & F^R_{\uparrow\downarrow}(k) \\ F^R_{\downarrow\uparrow}(k) & F^R_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix}\\
&= -u_{\boldsymbol{k}}v_{\boldsymbol{k}}\lim_{\eta\to+0}\left(\frac{1}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} - \frac{1}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta}\right)\hat{\sigma}^x.
\end{aligned} \tag{83}
$$

スピン空間における遅延・反異常グリーン関数は、

$$
\left(\bar{F}^R_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}\right) = \begin{pmatrix} \bar{F}^R_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow} & \bar{F}^R_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow} \\ \bar{F}^R_{\boldsymbol{k}\downarrow\uparrow} & \bar{F}^R_{\boldsymbol{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{84}
$$

次のように得られる。

$$
\begin{aligned}
i\bar{F}^R_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}(t) \quad &= \quad \theta(t)\left\langle\left\{c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\sigma}(t), c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma'}\right\}\right\rangle \quad = \quad \theta(t)\left\langle c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\sigma}(t)c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma'} + c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma'}c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\sigma}(t)\right\rangle \\
&= \theta(t)\left\langle\left(v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}a_{\boldsymbol{k}\downarrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\right)\right. \\
&\quad \times\left(u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma'\uparrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma'\downarrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow} - v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\uparrow} - v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right) \\
&\quad + \left(u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma'\uparrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma'\downarrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow} - v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\uparrow} - v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right) \\
&\quad \left.\times\left(v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}a_{\boldsymbol{k}\downarrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t} + u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\right)\right\rangle \\
&= \theta(t)\left(v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma'\uparrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{\boldsymbol{k}\uparrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle + v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma'\downarrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{\boldsymbol{k}\downarrow}a^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle\right. \\
&\quad - u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\uparrow}v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle - u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\downarrow}v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle \\
&\quad + u_{\boldsymbol{k}}v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}a_{\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle + u_{\boldsymbol{k}}v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow}e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow}a_{\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle \\
&\quad \left. - v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\uparrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{-\boldsymbol{k}\uparrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow}\right\rangle - v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}u_{\boldsymbol{k}}\delta_{\sigma\downarrow}e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\left\langle a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right\rangle\right) \\
&= u_{\boldsymbol{k}}\theta(t)\left[\left(v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow} + v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow}\right)e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} - \left(v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}\delta_{\sigma\uparrow} + v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}\delta_{\sigma\downarrow}\right)e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\right],
\end{aligned} \tag{85}
$$

$$
\begin{aligned}
&F^R_{\sigma\sigma'}(k) \\
&= \int dt\ F^R_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}(t)e^{i\omega t} \\
&= -iu_{\boldsymbol{k}}\lim_{\eta\to+0}\int_0^\infty dt\left[\left(v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow} + v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow}\right)e^{-iE_{\boldsymbol{k}}t} - \left(v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}\delta_{\sigma\uparrow} + v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}\delta_{\sigma\downarrow}\right)e^{iE_{\boldsymbol{k}}t}\right]e^{i\omega t-\eta t} \\
&= -u_{\boldsymbol{k}}\lim_{\eta\to+0}\left[\frac{v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow} + v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow}}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} - \frac{v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\uparrow}\delta_{\sigma\uparrow} + v^*_{\boldsymbol{k}\sigma'\downarrow}\delta_{\sigma\downarrow}}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta}\right].
\end{aligned} \tag{86}
$$

次を得る。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \bar{F}^R_{\uparrow\uparrow}(k) & \bar{F}^R_{\uparrow\downarrow}(k) \\ \bar{F}^R_{\downarrow\uparrow}(k) & \bar{F}^R_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix} \\
&= -u_{\boldsymbol{k}}\lim_{\eta\to+0}\left[\frac{1}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta}\begin{pmatrix} v^*_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow} & v^*_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow} \\ v^*_{\boldsymbol{k}\downarrow\uparrow} & v^*_{\boldsymbol{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} - \frac{1}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta}\begin{pmatrix} v^*_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow} & v^*_{\boldsymbol{k}\downarrow\uparrow} \\ v^*_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow} & v^*_{\boldsymbol{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}\right].
\end{aligned} \tag{87}
$$

この結果は、$(v_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}) = v_{\boldsymbol{k}}\hat{\sigma}^x$ 、$(v^*_{\boldsymbol{k}\sigma\sigma'}) = v^*_{\boldsymbol{k}}\hat{\sigma}^x$ とおくことで、一重項の場合に帰着できる。

$$
\begin{pmatrix} F^R_{\uparrow\uparrow}(k) & F^R_{\uparrow\downarrow}(k) \\ F^R_{\downarrow\uparrow}(k) & F^R_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix} = -u_{\boldsymbol{k}}v^*_{\boldsymbol{k}}\lim_{\eta\to+0}\left(\frac{1}{\omega - E_{\boldsymbol{k}} + i\eta} - \frac{1}{\omega + E_{\boldsymbol{k}} + i\eta}\right)\hat{\sigma}^x. \tag{88}
$$