スピン空間における異方的 BCS-南部グリーン関数

岡田 大 (Okada Masaru)

October 21, 2025

Abstract

このノートでは、スピン一重項および三重項を扱える南部 $\otimes$ スピン空間における異方的 BCS 平均場ハミルトニアンを導入し、ボゴリューボフ変換を用いて対角化することでその固有値と変換行列を導出する。さらに、運動方程式を用いて南部 $\otimes$ スピン空間におけるグリーン関数（通常および異常成分）を導出し、その具体的な表式を与える。

Contents

1 （南部⊗スピン）空間の平均場ハミルトニアン

1.1 スピン一重項（従来の BCS）の場合

まずはハミルトニアンを用意する。

$$H = H_0 + H_{\mathrm{MF}} \tag{1}$$

ここで、

$$H_0 = \sum_{\vec{k},\sigma} \xi_{\vec{k}} c^\dagger_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}\sigma} \quad = \quad \sum_{\vec{k}} \begin{pmatrix} c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} & , & c_{-\vec{k}\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\vec{k}} & 0 \\ 0 & -\xi_{\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\vec{k}\uparrow} \\ c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{MF}} &= \Delta^* \sum_{\vec{k}} \left(c_{-\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\uparrow} - c_{-\vec{k}\uparrow} c_{\vec{k}\downarrow} \right) + \Delta \sum_{\vec{k}} \left(c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} - c^\dagger_{-\vec{k}\uparrow} c^\dagger_{\vec{k}\downarrow} \right) && (3) \\ &= \Delta \sum_{\vec{k},\sigma} c^\dagger_{\vec{k}\sigma} c^\dagger_{-\vec{k}\bar{\sigma}} \quad + \mathrm{H.c.} && (4) \\ &= \sum_{\vec{k}} \begin{pmatrix} c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} & , & c_{-\vec{k}\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\vec{k}\uparrow} \\ c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} \end{pmatrix}, && (5) \end{aligned}$$

すると、

$$\vec{c}_{\vec{k}}^{\,\dagger} = \left(c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} \ , \ c_{-\vec{k}\downarrow} \right) , \qquad \vec{c}_{\vec{k}} \ = \ \begin{pmatrix} c_{\vec{k}\uparrow} \\ c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

は 2 成分（南部）スピノルと呼ばれる。また、異常期待値 Δ は次のように定義される。

$$\Delta = \sum_{\vec{k}} \left\langle c_{\vec{k}\uparrow} c_{-\vec{k}\downarrow} \right\rangle \tag{7}$$

これで、このハミルトニアン H はスピノル $\vec{c}_{\vec{k}}^{\,(\dagger)}$ と 2×2 行列 $\hat{H}$ を使って表すことができる。

$$H = \sum_{\vec{k}} \vec{c}_{\vec{k}}^{\,\dagger} \begin{pmatrix} \xi_{\vec{k}} & \Delta \\ \Delta^* & -\xi_{\vec{k}} \end{pmatrix} \vec{c}_{\vec{k}} \ = \ \sum_{\vec{k}} \vec{c}_{\vec{k}}^{\,\dagger} \ \hat{H} \ \vec{c}_{\vec{k}}. \tag{8}$$

$\hat{H}$ は任意の実数パラメータ λ を用いて容易に対角化できる。

$$\det(\hat{H} - \lambda \, \hat{1}_{2\times 2}) = 0 \tag{9}$$

$$\longrightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2} \ = \ \pm E_{\vec{k}}. \tag{10}$$

これで固有値 $E_{\vec{k}}$ が定義された。

対角化された基底 $\vec{a}$ を得るために、ボゴリューボフ変換の行列 $\hat{U}$ を用いる。

$$\vec{c}_{\vec{k}} = \hat{U} \vec{a}_{\vec{k}} \ = \ \begin{pmatrix} u_{\vec{k}} & -v_{\vec{k}} e^{i\varphi} \\ v_{\vec{k}} e^{-i\varphi} & u_{\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{k}\uparrow} \\ a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$H = \sum_{\vec{k}} \vec{c}_{\vec{k}}^{\,\dagger} \ \hat{H} \ \vec{c}_{\vec{k}} \ = \ \sum_{\vec{k}} \vec{a}_{\vec{k}}^{\,\dagger} \ \hat{U}^\dagger \ \hat{H} \ \hat{U} \ \vec{a}_{\vec{k}} \ = \ \sum_{\vec{k}} \vec{a}_{\vec{k}}^{\,\dagger} \begin{pmatrix} E_{\vec{k}} & 0 \\ 0 & -E_{\vec{k}} \end{pmatrix} \vec{a}_{\vec{k}}. \tag{12}$$

特に知る必要があるのはユニタリーな場合（$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ となり、整数 n に対して $\varphi = 2\pi n$ とおける場合）だけ。

$$\hat{1}_{2\times 2} = \hat{U}^\dagger \hat{U} \ = \ \begin{pmatrix} u_{\vec{k}} & v_{\vec{k}} e^{i\varphi} \\ -v_{\vec{k}} e^{-i\varphi} & u_{\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\vec{k}} & -v_{\vec{k}} e^{i\varphi} \\ v_{\vec{k}} e^{-i\varphi} & u_{\vec{k}} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 & 0 \\ 0 & u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1$ という条件が現れた。行列 $\hat{U}$ の成分に関する連立方程式を解くこともできる。

$$\hat{H} \ \hat{U} = \hat{U} \begin{pmatrix} E_{\vec{k}} & 0 \\ 0 & -E_{\vec{k}} \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \quad \hat{U}^\dagger \ \hat{H} \ \hat{U} \ = \ \begin{pmatrix} E_{\vec{k}} & 0 \\ 0 & -E_{\vec{k}} \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{pmatrix} u_{\vec{k}}\xi_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\Delta & u_{\vec{k}}\Delta - v_{\vec{k}}\xi_{\vec{k}} \\ \Delta^* u_{\vec{k}} - v_{\vec{k}}\xi_{\vec{k}} & -v_{\vec{k}}\Delta^* - u_{\vec{k}}\xi_{\vec{k}} \end{pmatrix} = E_{\vec{k}} \begin{pmatrix} u_{\vec{k}} & v_{\vec{k}} \\ v_{\vec{k}} & -u_{\vec{k}} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\longrightarrow \qquad u_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}}\right), \qquad v_{\vec{k}}^2 \ = \ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}}\right) \tag{16}$$

これで、スピン一重項の場合について、固有値 $E_{\vec{k}}$ とボゴリューボフ変換行列の成分 $u_{\vec{k}}, v_{\vec{k}}$ が、既知の値 $\xi_{\vec{k}}, \Delta$ で書き表された。

1.2 一般化されたスピンの場合

次に、スピン一重項の場合だけでなく、任意のスピン三重項の場合についても物理量を計算できるように、2 成分の南部スピノル $\vec{c}_{\vec{k}}$ を 4 成分のものに一般化する。

$$H \ = \ \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \vec{c}_{\vec{k}}^{\,\dagger} \hat{H} \vec{c}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \left(c^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\ ,\ c^\dagger_{\vec{k}\downarrow}\ ,\ c_{-\vec{k}\uparrow}\ ,\ c_{-\vec{k}\downarrow} \right) \begin{pmatrix} \xi_{\vec{k}}\hat{1}_{2\times 2} & \hat{\Delta}_{\vec{k}} \\ \hat{\Delta}^*_{\vec{k}} & -\xi_{\vec{k}}\hat{1}_{2\times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\vec{k}\uparrow} \\ c_{\vec{k}\downarrow} \\ c^\dagger_{-\vec{k}\uparrow} \\ c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} \end{pmatrix} \tag{17}$$

異常期待値から構成される行列 $\hat{\Delta}_{\vec{k}}$ の定義は、

$$(\hat{\Delta}_{\vec{k}})_{\sigma\sigma'} = -V \sum_{\vec{k}'} \vec{k}\cdot\vec{k}' \langle c_{\vec{k}'\sigma} c_{-\vec{k}'\sigma'} \rangle. \tag{18}$$

クーパー対の全角運動量に垂直なベクトル $\vec{d}$ の成分を、行列 $\hat{\Delta}_{\vec{k}}$ の基底として選ぶことができる。

$$\hat{\Delta}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} -d^x_{\vec{k}} + i d^y_{\vec{k}} & d^z_{\vec{k}} \\ d^z_{\vec{k}} & d^x_{\vec{k}} + i d^y_{\vec{k}} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

行列 $\hat{\Delta}_{\vec{k}}$ がユニタリーであるとき、

$$\hat{\Delta}_{\vec{k}}\hat{\Delta}^\dagger_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} {d^x_{\vec{k}}}^2 + {d^y_{\vec{k}}}^2 + {d^z_{\vec{k}}}^2 & 0 \\ 0 & {d^x_{\vec{k}}}^2 + {d^y_{\vec{k}}}^2 + {d^z_{\vec{k}}}^2 \end{pmatrix} \ \propto \ \hat{1}_{2\times 2} \tag{20}$$

すなわち、

$${d^x_{\vec{k}}}^2 + {d^y_{\vec{k}}}^2 + {d^z_{\vec{k}}}^2 \ = \ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\hat{\Delta}_{\vec{k}}\hat{\Delta}^\dagger_{\vec{k}}\big], \qquad \hat{\Delta}_{\vec{k}}\hat{\Delta}^\dagger_{\vec{k}} \ = \ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\hat{\Delta}_{\vec{k}}\hat{\Delta}^\dagger_{\vec{k}}\big] \ \ \hat{1}_{2\times 2}. \tag{21}$$

すると、4×4 のハミルトニアンは具体的に次のように書ける。

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \xi_{\vec{k}} & 0 & -d^x_{\vec{k}} + i d^y_{\vec{k}} & d^z_{\vec{k}} \\ 0 & \xi_{\vec{k}} & d^z_{\vec{k}} & d^x_{\vec{k}} + i d^y_{\vec{k}} \\ -d^x_{\vec{k}} - i d^y_{\vec{k}} & d^z_{\vec{k}} & -\xi_{\vec{k}} & 0 \\ d^z_{\vec{k}} & d^x_{\vec{k}} - i d^y_{\vec{k}} & 0 & -\xi_{\vec{k}} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

固有値方程式 $\det(\hat{H} - \lambda\hat{1}_{4\times 4})$ は、いくつかの面倒なプロセスを経れば解くことができる。

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} \xi_{\vec{k}}-\lambda & 0 & -d^x_{\vec{k}}+id^y_{\vec{k}} & d^z_{\vec{k}} \\ 0 & \xi_{\vec{k}}-\lambda & d^z_{\vec{k}} & d^x_{\vec{k}}+id^y_{\vec{k}} \\ -d^x_{\vec{k}}-id^y_{\vec{k}} & d^z_{\vec{k}} & -\xi_{\vec{k}}-\lambda & 0 \\ d^z_{\vec{k}} & d^x_{\vec{k}}-id^y_{\vec{k}} & 0 & -\xi_{\vec{k}}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\xi_{\vec{k}}-\lambda)\begin{vmatrix} \xi_{\vec{k}}-\lambda & d^z_{\vec{k}} & d^x_{\vec{k}}+id^y_{\vec{k}} \\ d^z_{\vec{k}} & -\xi_{\vec{k}}-\lambda & 0 \\ d^x_{\vec{k}}-id^y_{\vec{k}} & 0 & -\xi_{\vec{k}}-\lambda \end{vmatrix} \\
&\quad +(-d^x_{\vec{k}}-id^y_{\vec{k}})\begin{vmatrix} 0 & -d^x_{\vec{k}}+id^y_{\vec{k}} & d^z_{\vec{k}} \\ \xi_{\vec{k}}-\lambda & d^z_{\vec{k}} & d^x_{\vec{k}}+id^y_{\vec{k}} \\ d^x_{\vec{k}}-id^y_{\vec{k}} & 0 & -\xi_{\vec{k}}-\lambda \end{vmatrix} \\
&\quad -d^z_{\vec{k}}\begin{vmatrix} 0 & -d^x_{\vec{k}}+id^y_{\vec{k}} & d^z_{\vec{k}} \\ \xi_{\vec{k}}-\lambda & d^z_{\vec{k}} & d^x_{\vec{k}}+id^y_{\vec{k}} \\ d^z_{\vec{k}} & -\xi_{\vec{k}}-\lambda & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{23}
$$

右辺の各項は、以下のように展開できる。

$$
(\xi_{\vec{k}}-\lambda)\begin{vmatrix} \xi_{\vec{k}}-\lambda & d^z_{\vec{k}} & d^x_{\vec{k}}+id^y_{\vec{k}} \\ d^z_{\vec{k}} & -\xi_{\vec{k}}-\lambda & 0 \\ d^x_{\vec{k}}-id^y_{\vec{k}} & 0 & -\xi_{\vec{k}}-\lambda \end{vmatrix} = ({\xi_{\vec{k}}}^2-\lambda^2)({\xi_{\vec{k}}}^2-\lambda^2+{d^x_{\vec{k}}}^2+{d^y_{\vec{k}}}^2+{d^z_{\vec{k}}}^2) \tag{24}
$$

$$
(-d^x_{\vec{k}}-id^y_{\vec{k}})\begin{vmatrix} 0 & -d^x_{\vec{k}}+id^y_{\vec{k}} & d^z_{\vec{k}} \\ \xi_{\vec{k}}-\lambda & d^z_{\vec{k}} & d^x_{\vec{k}}+id^y_{\vec{k}} \\ d^x_{\vec{k}}-id^y_{\vec{k}} & 0 & -\xi_{\vec{k}}-\lambda \end{vmatrix} = ({d^x_{\vec{k}}}^2+{d^y_{\vec{k}}}^2)({\xi_{\vec{k}}}^2-\lambda^2+{d^x_{\vec{k}}}^2+{d^y_{\vec{k}}}^2+{d^z_{\vec{k}}}^2) \tag{25}
$$

$$
-d^z_{\vec{k}}\begin{vmatrix} 0 & -d^x_{\vec{k}}+id^y_{\vec{k}} & d^z_{\vec{k}} \\ \xi_{\vec{k}}-\lambda & d^z_{\vec{k}} & d^x_{\vec{k}}+iy \\ z & -\xi_{\vec{k}}-\lambda & 0 \end{vmatrix} = {d^z_{\vec{k}}}^2({\xi_{\vec{k}}}^2-\lambda^2+{d^x_{\vec{k}}}^2+{d^y_{\vec{k}}}^2+{d^z_{\vec{k}}}^2) \tag{26}
$$

全ての項をまとめると、次のようになる。

$$
({\xi_{\vec{k}}}^2-\lambda^2+{d^x_{\vec{k}}}^2+{d^y_{\vec{k}}}^2+{d^z_{\vec{k}}}^2)^2 = 0 \tag{27}
$$

$$
\rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{\xi^2_{\vec{k}}+{d^x_{\vec{k}}}^2+{d^y_{\vec{k}}}^2+{d^z_{\vec{k}}}^2} = \pm\sqrt{\xi^2_{\vec{k}}+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\hat{\Delta}_{\vec{k}}\hat{\Delta}^\dagger_{\vec{k}}\big]} = \pm E_{\vec{k}} \tag{28}
$$

最終的に、4×4 行列 $\hat{H}$ に対する固有値 $E_{\vec{k}}$ を得ることができた。

対角化された基底 $\vec{\alpha}$（これは 2 成分ベクトルではなく 4 成分ベクトルである）をどのように表現するかを知るため、2×2 のブロック行列 $\hat{u}_{\vec{k}}$ と $\hat{v}_{\vec{k}}$ を用いて、4×4 のボゴリューボフ変換行列 $\hat{U}$ を定義する。

$$\vec{c}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{\vec{k}} & -\hat{v}_{\vec{k}} \\ \hat{v}^*_{-\vec{k}} & \hat{u}_{-\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{k}\uparrow} \\ a_{\vec{k}\downarrow} \\ a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow} \\ a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} \end{pmatrix} = \hat{U}\vec{a}_{\vec{k}} \tag{29}$$

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \vec{c}_{\vec{k}}^{\,\dagger}\ \hat{H}\ \vec{c}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \vec{a}_{\vec{k}}^{\,\dagger}\ \hat{U}^\dagger\ \hat{H}\ \hat{U}\ \vec{a}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \vec{a}_{\vec{k}}^{\,\dagger} \begin{pmatrix} E_{\vec{k}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\vec{k}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{\vec{k}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{\vec{k}} \end{pmatrix} \vec{a}_{\vec{k}}. \tag{30}$$

この時点では、2×2 のブロック行列 $\hat{u}_{\vec{k}}$ と $\hat{v}_{\vec{k}}$ は未知である。

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{\vec{k}} & -\hat{v}_{\vec{k}} \\ \hat{v}^*_{-\vec{k}} & \hat{u}_{-\vec{k}} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \xi_{\vec{k}}\hat{1}_{2\times 2} & \hat{\Delta}_{\vec{k}} \\ \hat{\Delta}^*_{\vec{k}} & -\xi_{\vec{k}}\hat{1}_{2\times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{\vec{k}} & -\hat{v}_{\vec{k}} \\ \hat{v}^*_{-\vec{k}} & \hat{u}_{-\vec{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\vec{k}}\hat{1}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -E_{\vec{k}}\hat{1}_{2\times 2} \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_{\vec{k}}\hat{1}_{2\times 2} & \hat{\Delta}_{\vec{k}} \\ \hat{\Delta}^*_{\vec{k}} & -\xi_{\vec{k}}\hat{1}_{2\times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{\vec{k}} & -\hat{v}_{\vec{k}} \\ \hat{v}^*_{-\vec{k}} & \hat{u}_{-\vec{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{\vec{k}} & -\hat{v}_{\vec{k}} \\ \hat{v}^*_{-\vec{k}} & \hat{u}_{-\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\vec{k}}\hat{1}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -E_{\vec{k}}\hat{1}_{2\times 2} \end{pmatrix} \tag{32}$$

この手順が許されるのは、$\hat{U}$ がユニタリー（$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$）だからである。ただちに、行列 $\hat{u}_{\vec{k}}$ と $\hat{v}_{\vec{k}}$ に対するいくつかの拘束条件が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \hat{u}_{\vec{k}} &=& \dfrac{\hat{\Delta}_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}} - \xi_{\vec{k}}}\hat{v}^*_{-\vec{k}} & \cdots\ (1,1,\mathrm{A}) \\ \hat{v}_{\vec{k}} &=& \dfrac{\hat{\Delta}_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}} + \xi_{\vec{k}}}\hat{u}_{-\vec{k}} & \cdots\ (1,2,\mathrm{A}) \\ \hat{v}^*_{-\vec{k}} &=& \dfrac{\hat{\Delta}^*_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}} + \xi_{\vec{k}}}\hat{u}_{\vec{k}} & \cdots\ (2,1,\mathrm{A}) \\ \hat{u}_{-\vec{k}} &=& \dfrac{\hat{\Delta}^*_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}} - \xi_{\vec{k}}}\hat{v}_{\vec{k}} & \cdots\ (2,2,\mathrm{A}) \end{array} \right. \tag{33}$$

これらの関係は、もし $\hat{u}_{\vec{k}}$（あるいは $\hat{v}_{\vec{k}}$）が単位行列 $\hat{1}_{2\times 2}$ に比例するならば、$\hat{v}_{\vec{k}}$（あるいは $\hat{u}_{\vec{k}}$）は $\hat{\Delta}_{\vec{k}}$ に比例することを示している。ここでは、$\hat{u}_{\vec{k}} \propto \hat{1}_{2\times 2}$ という条件を選ぶことにしよう。

$$\hat{u}_{\vec{k}} = \frac{\hat{1}_{2\times 2}}{f(\vec{k})}, \qquad \hat{u}^{-1}_{\vec{k}} = f(\vec{k})\hat{1}_{2\times 2} \tag{34}$$

このとき、$f(\vec{k})$ は未知の関数である。いかにして関数 $f(\vec{k})$ の表現を得るか、という問題に行き着いた。

$$
\begin{cases}
\hat{v}_{\vec{k}} = \dfrac{\hat{\Delta}_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}+\xi_{\vec{k}}}\hat{u}_{-\vec{k}} = \dfrac{\hat{\Delta}_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}+\xi_{\vec{k}}}\cdot\dfrac{1}{f(-\vec{k})} \\
\hat{u}_{-\vec{k}} = \dfrac{\hat{\Delta}^{\dagger}_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}-\xi_{\vec{k}}}\hat{v}_{\vec{k}} = \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\hat{\Delta}_{\vec{k}}\hat{\Delta}^{\dagger}_{\vec{k}}\big]}{E^2_{\vec{k}}-\xi^2_{\vec{k}}}\cdot\dfrac{1}{f(-\vec{k})}\hat{1}_{2\times 2} = \dfrac{\hat{1}_{2\times 2}}{f(-\vec{k})} & \cdots\text{(自明)} \\
\hat{v}^{*}_{-\vec{k}} = \dfrac{\hat{\Delta}^{\dagger}_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}+\xi_{\vec{k}}}\hat{u}_{\vec{k}} = \dfrac{\hat{\Delta}^{\dagger}_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}+\xi_{\vec{k}}}\cdot\dfrac{1}{f(\vec{k})} \\
\hat{u}_{\vec{k}} = \dfrac{\hat{\Delta}_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}-\xi_{\vec{k}}}\hat{v}^{*}_{-\vec{k}} = \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\hat{\Delta}_{\vec{k}}\hat{\Delta}^{\dagger}_{\vec{k}}\big]}{E^2_{\vec{k}}-\xi^2_{\vec{k}}}\cdot\dfrac{1}{f(\vec{k})}\hat{1}_{2\times 2} = \dfrac{\hat{1}_{2\times 2}}{f(\vec{k})} & \cdots\text{(自明)}
\end{cases}
\tag{35}
$$

これらの拘束条件に加えて、$\hat{U}$ に対するユニタリー条件は次のように記述できる。

$$
\begin{aligned}
1 &= \left|\det\begin{pmatrix}\hat{u}_{\vec{k}} & -\hat{v}_{\vec{k}} \\ \hat{v}^{*}_{-\vec{k}} & \hat{u}_{-\vec{k}}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\Big(\hat{u}_{\vec{k}}\Big)\ \det\Big[\hat{u}_{-\vec{k}} - \hat{v}^{*}_{-\vec{k}}\hat{u}^{-1}_{\vec{k}}(-\hat{v}_{\vec{k}})\Big]\right| \\
\longleftrightarrow \quad & \left|\det\Big(\hat{u}_{\vec{k}}\Big)\det\Big(\hat{u}_{-\vec{k}}\Big) + \det\Big(\hat{v}_{\vec{k}}\Big)\det\Big(\hat{v}^{*}_{-\vec{k}}\Big)\right| = 1,
\end{aligned}
\tag{36}
$$

これは次の関係を導く。

$$
\begin{aligned}
1 &= \left|\det\Big(\hat{u}_{\vec{k}}\Big)\det\Big(\hat{u}_{-\vec{k}}\Big) + \det\Big(\hat{v}_{\vec{k}}\Big)\det\Big(\hat{v}^{*}_{-\vec{k}}\Big)\right| \\
\longleftrightarrow \quad & \left|f(\vec{k})f(-\vec{k})\right| = 1 + \frac{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\hat{\Delta}_{\vec{k}}\hat{\Delta}^{\dagger}_{\vec{k}}\big]}{\Big(E_{\vec{k}}+\xi_{\vec{k}}\Big)^2}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

したがって、$\hat{u}_{\vec{k}} = \hat{u}_{-\vec{k}}$ のとき、次を得る。

$$
\begin{pmatrix}\hat{u}_{\vec{k}} & -\hat{v}_{\vec{k}} \\ \hat{v}^{*}_{-\vec{k}} & \hat{u}_{-\vec{k}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\Big(E_{\vec{k}}+\xi_{\vec{k}}\Big)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\hat{\Delta}_{\vec{k}}\hat{\Delta}^{\dagger}_{\vec{k}}\big]}}\begin{pmatrix}(E_{\vec{k}}+\xi_{\vec{k}})\hat{1}_{2\times 2} & -\hat{\Delta}_{\vec{k}} \\ \hat{\Delta}^{\dagger}_{\vec{k}} & (E_{\vec{k}}+\xi_{\vec{k}})\hat{1}_{2\times 2}\end{pmatrix}
\tag{38}
$$

これがこの小節の目標（原文: gorl）である。

この結果は、三重項の場合から一重項の場合に帰着できるだろうか？秩序パラメータの (2,1) 成分 $(\hat{\Delta}_{\vec{k}})_{\uparrow\downarrow} = d_z = \Delta$ を考えてみよう。

$$
\begin{aligned}
{(\hat{v}_{\vec{k}})_{\uparrow\downarrow}}^2 &= \frac{\Delta^2}{\Big(E_{\vec{k}}+\xi_{\vec{k}}\Big)^2 + E^2_{\vec{k}} - \xi^2_{\vec{k}}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}}\right)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

この値は、前の小節で現れた一重項の場合の $v_{\vec{k}}$ と一致している。

2 （南部⊗スピン）空間のグリーン関数

本節では、異方的（スピン依存）BCS モデルに対するグリーン関数を導出する。まず、運動方程式から出発する。

2.1 スピン一重項（従来の BCS）の場合

南部空間におけるグリーン関数（2×2 行列）を、今、次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
i\hat{G}(k) &= \int dx \left\langle \hat{\mathrm{T}} \left[\vec{c}_{\vec{k}}(x) \vec{c}_{\vec{k}}^{\,\dagger} \right] \right\rangle e^{ik\cdot x} \;=\; \int dx \left\langle \hat{\mathrm{T}} \left[\begin{pmatrix} c_{\vec{k}\uparrow}(x) \\ c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} & , & c_{-\vec{k}\downarrow} \end{pmatrix} \right] \right\rangle e^{ik\cdot x} \\
&= \int dx \left\langle \hat{\mathrm{T}} \left[\begin{pmatrix} c_{\vec{k}\uparrow}(x) c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} & c_{\vec{k}\uparrow}(x) c_{-\vec{k}\downarrow} \\ c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(x) c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} & c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(x) c_{-\vec{k}\downarrow} \end{pmatrix} \right] \right\rangle e^{ik\cdot x} \;=\; i \int dx \begin{pmatrix} G(x) & F(x) \\ \bar{F}(x) & \bar{G}(x) \end{pmatrix} e^{ik\cdot x}
\end{aligned} \tag{40}
$$

ここで $\hat{\mathrm{T}}\left[\cdots\right]$ は時間順序積演算子である。$x^\mu = (t, \vec{r})$ および $k^\mu = (\omega, \vec{k})$ (i.e., $k\cdot x = g_{\mu\nu} k^\mu x^\nu = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}$ ）は、簡略記法で書かれた 4 元運動量ベクトルである。これらの関数の遅延（retarded）部分も、次のように定義される。

$$
i\hat{G}^R(k) = \int dx \left\langle \begin{pmatrix} \left\{ c_{\vec{k}\uparrow}(x), c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} \right\} & \left\{ c_{\vec{k}\uparrow}(x), c_{-\vec{k}\downarrow} \right\} \\ \left\{ c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(x), c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} \right\} & \left\{ c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(x), c_{-\vec{k}\downarrow} \right\} \end{pmatrix} \right\rangle e^{ik\cdot x} \;=\; i \int dx \begin{pmatrix} G^R(x) & F^R(x) \\ \bar{F}^R(x) & \bar{G}^R(x) \end{pmatrix} e^{ik\cdot x} \tag{41}
$$

対角化された基底（準粒子） $a^{(\dagger)}_{\vec{k}\sigma}$ （これはスピン添字 $\sigma = \uparrow, \downarrow$ によってベクトルとみなせる）に対する運動方程式は以下で得られる：

$$
\begin{aligned}
i\frac{da_{\vec{k}\uparrow}(t)}{dt} &= \left[a_{\vec{k}\uparrow}, H \right] \\
&= \sum_{\vec{q}} \left[a_{\vec{k}\uparrow}, \vec{c}_{\vec{q}}^{\,\dagger} \hat{H} \vec{c}_{\vec{q}} \right] \;=\; \sum_{\vec{q}} \left[a_{\vec{k}\uparrow} \;,\; \begin{pmatrix} c^\dagger_{\vec{q}\uparrow} & , & c_{-\vec{q}\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\vec{q}} & \Delta \\ \Delta^* & -\xi_{\vec{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\vec{q}\uparrow} \\ c^\dagger_{-\vec{q}\downarrow} \end{pmatrix} \right] \\
&= \sum_{\vec{q}} \left[a_{\vec{k}\uparrow}, \vec{a}_{\vec{q}}^{\,\dagger} \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} \vec{a}_{\vec{q}} \right] \;=\; \sum_{\vec{q}} \left[a_{\vec{k}\uparrow} \;,\; \begin{pmatrix} a^\dagger_{\vec{q}\uparrow} & , & a_{-\vec{q}\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\vec{q}} & 0 \\ 0 & -E_{\vec{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{q}\uparrow} \\ a^\dagger_{-\vec{q}\downarrow} \end{pmatrix} \right] \\
&= \sum_{\vec{q}} E_{\vec{q}} \left[a_{\vec{k}\uparrow} \;,\; a^\dagger_{\vec{q}\uparrow} a_{\vec{q}\uparrow} - a_{-\vec{q}\downarrow} a^\dagger_{-\vec{q}\downarrow} \right] \\
&= \sum_{\vec{q}} E_{\vec{q}} \left(\left\{ a_{\vec{k}\uparrow} \,,\, a^\dagger_{\vec{q}\uparrow} \right\} a_{\vec{q}\uparrow} - a^\dagger_{\vec{q}\uparrow} \left\{ a_{\vec{k}\uparrow} \,,\, a_{\vec{q}\uparrow} \right\} - \left\{ a_{\vec{k}\uparrow} \,,\, a_{-\vec{q}\downarrow} \right\} a^\dagger_{-\vec{q}\downarrow} + a_{-\vec{q}\downarrow} \left\{ a_{\vec{k}\uparrow} \,,\, a^\dagger_{-\vec{q}\downarrow} \right\} \right) \\
&= E_{\vec{k}} a_{\vec{k}\uparrow}
\end{aligned} \tag{42}
$$

これを積分すると、

$$
a_{\vec{k}\uparrow}(t) = e^{-iE_{\vec{k}}t} a_{\vec{k}\uparrow}(0) \tag{43}
$$

同様にして、$a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}$ に対する方程式を得る。

$$i\frac{da^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}}{dt} = \left[a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}, H\right] \;=\; -E_{\vec{k}}a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow} \tag{44}$$

そして、

$$a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}(t) = e^{iE_{\vec{k}}t}a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}(0) \tag{45}$$

スピノル $\vec{c}$ と $\vec{a}$ の間の関係は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} c_{\vec{k}\uparrow}(t) &= u_{\vec{k}}a_{\vec{k}\uparrow}(t) - v_{\vec{k}}a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}(t) \\ &= u_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{\vec{k}\uparrow} - v_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow} \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} c^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}(t) &= u_{\vec{k}}a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}(t) + v_{\vec{k}}a_{\vec{k}\uparrow}(t) \\ &= u_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow} + v_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{\vec{k}\uparrow} \end{aligned} \tag{47}$$

(1,1) 成分の遅延グリーン関数は、以下のように明らかになる。

$$\begin{aligned}
iG^{R}_{\vec{k}}(t) \;&=\; \theta(t)\left\langle\left\{c_{\vec{k}\uparrow}(t), c^{\dagger}_{\vec{k}\uparrow}\right\}\right\rangle \;=\; \theta(t)\Big[\left\langle c_{\vec{k}\uparrow}(t)c^{\dagger}_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle + \left\langle c^{\dagger}_{\vec{k}\uparrow}c_{\vec{k}\uparrow}(t)\right\rangle\Big] \\
&= \theta(t)\left\langle\Big(u_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{\vec{k}\uparrow} - v_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}\Big)\Big(u_{\vec{k}}a^{\dagger}_{\vec{k}\uparrow} - v_{\vec{k}}a_{-\vec{k}\downarrow}\Big)\right\rangle \\
&\quad +\theta(t)\left\langle\Big(u_{\vec{k}}a^{\dagger}_{\vec{k}\uparrow} - v_{\vec{k}}a_{-\vec{k}\downarrow}\Big)\Big(u_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{\vec{k}\uparrow} - v_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}\Big)\right\rangle \\
&= \theta(t)\left\langle u^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{\vec{k}\uparrow}a^{\dagger}_{\vec{k}\uparrow} - u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{\vec{k}\uparrow}a_{-\vec{k}\downarrow} - u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}a^{\dagger}_{\vec{k}\uparrow} + v^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}a_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle \\
&\quad +\theta(t)\left\langle u^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a^{\dagger}_{\vec{k}\uparrow}a_{\vec{k}\uparrow} - u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a^{\dagger}_{\vec{k}\uparrow}a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow} - u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{-\vec{k}\downarrow}a_{\vec{k}\uparrow} + v^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a_{-\vec{k}\downarrow}a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle \\
&= \theta(t)\left(u^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{\vec{k}\uparrow}a^{\dagger}_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle + v^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}a_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle + u^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^{\dagger}_{\vec{k}\uparrow}a_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle + v^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{-\vec{k}\downarrow}a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle\right) \\
&= \theta(t) \\
&\quad \times\Bigg[u^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big) + v^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big) \\
&\quad + u^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big) + v^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big)\Bigg] \\
&= \theta(t)\left(u^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t} + v^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}\right)
\end{aligned} \tag{48}$$

あるいは、フーリエ空間では、

$$
\begin{aligned}
G^R(k) &= \int dt\ G^R_{\vec{k}}(t)e^{i\omega t} \\
&= -i\lim_{\eta\to+0}\int_0^\infty dt\ \left(u_{\vec{k}}^2 e^{-iE_{\vec{k}}t} + v_{\vec{k}}^2 e^{iE_{\vec{k}}t}\right)e^{i\omega t-\eta t} \\
&= \lim_{\eta\to+0}\left(\frac{u_{\vec{k}}^2}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} + \frac{v_{\vec{k}}^2}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta}\right). \qquad (49)
\end{aligned}
$$

虚数部は状態密度に関連している。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\sum_{\vec{k}}\mathrm{Im}G^R(k) \\
&= -\frac{1}{\pi}\lim_{\eta\to+0}\sum_{\vec{k}}\left(\mathrm{Im}\frac{u_{\vec{k}}^2}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} + \mathrm{Im}\frac{v_{\vec{k}}^2}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta}\right) \\
&= \sum_{\vec{k}}\left[u_{\vec{k}}^2\delta(\omega - E_{\vec{k}}) + v_{\vec{k}}^2\delta(\omega + E_{\vec{k}})\right] \qquad (50)
\end{aligned}
$$

遅延部分の $(1,2)$ 成分 $F^R(k)$ も同様に与えられる。

$$
\begin{aligned}
&iF^R_{\vec{k}}(t) \\
&= \theta(t)\left\langle\left\{c_{\vec{k}\uparrow}(t), c_{-\vec{k}\downarrow}\right\}\right\rangle \\
&= \theta(t)\Big[\left\langle c_{\vec{k}\uparrow}(t)c_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle + \left\langle c_{-\vec{k}\downarrow}c_{\vec{k}\uparrow}(t)\right\rangle\Big] \\
&= \theta(t)\left\langle\Big(u_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{\vec{k}\uparrow} - v_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}\Big)\Big(u_{\vec{k}}a_{-\vec{k}\downarrow} + v_{\vec{k}}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\Big)\right\rangle \\
&\quad +\theta(t)\left\langle\Big(u_{\vec{k}}a_{-\vec{k}\downarrow} + v_{\vec{k}}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\Big)\Big(u_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{\vec{k}\uparrow} - v_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}\Big)\right\rangle \\
&= \theta(t)u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\left(e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{\vec{k}\uparrow}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle - e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}a_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle + e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}a_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle - e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{-\vec{k}\downarrow}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle\right) \\
&= \theta(t)u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\left[e^{-iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1 + \tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big) - e^{iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1 - \tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big)\right. \\
&\quad \left. + e^{-iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1 - \tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big) - e^{iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1 + \tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big)\right] \\
&= \theta(t)u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\left(e^{-iE_{\vec{k}}t} - e^{iE_{\vec{k}}t}\right), \qquad (51)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F^R(k) &= -iu_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\lim_{\eta\to+0}\int_0^\infty dt\ \left(e^{iE_{\vec{k}}t} - e^{-iE_{\vec{k}}t}\right)e^{i\omega t-\eta t} \\
&= -u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\lim_{\eta\to+0}\left(\frac{1}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} - \frac{1}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta}\right), \qquad (52)
\end{aligned}
$$

異常グリーン関数に対応する状態密度は

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\sum_{\vec{k}}\mathrm{Im}F^R(k)\\
&=\frac{1}{\pi}\lim_{\eta\to+0}\sum_{\vec{k}}u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\left(\mathrm{Im}\frac{1}{\omega-E_{\vec{k}}+i\eta}-\mathrm{Im}\frac{1}{\omega+E_{\vec{k}}+i\eta}\right)\\
&=\sum_{\vec{k}}u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\big[\delta(\omega+E_{\vec{k}})-\delta(\omega-E_{\vec{k}})\big].
\end{aligned}
\tag{53}
$$

遅延部分の $(2,1)$ 成分 $\bar{F}^R(k)$ は、遅延部分の $(1,2)$ 成分 $F^R(k)$ に等しい。

$$
\begin{aligned}
i\bar{F}^R_{\vec{k}}(t) \quad &= \quad \theta(t)\left\langle\left\{c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(t),c^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\right\}\right\rangle \quad = \quad \theta(t)\Big[\left\langle c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(t)c^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle+\left\langle c^\dagger_{\vec{k}\uparrow}c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(t)\right\rangle\Big]\\
&=\theta(t)\left\langle\Big(u_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}+v_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{\vec{k}\uparrow}\Big)\Big(u_{\vec{k}}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}-v_{\vec{k}}a_{-\vec{k}\downarrow}\Big)\right\rangle\\
&\quad+\theta(t)\left\langle\Big(u_{\vec{k}}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}-v_{\vec{k}}a_{-\vec{k}\downarrow}\Big)\Big(u_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}+v_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{\vec{k}\uparrow}\Big)\right\rangle\\
&=\theta(t)u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\left(-e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}a_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle+e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{\vec{k}\uparrow}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle+e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}a_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle-e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{-\vec{k}\downarrow}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle\right)\\
&=\theta(t)u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\left[-e^{iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big)+e^{-iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big)\right.\\
&\quad\left.+e^{-iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big)-e^{iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big)\right]\\
&=\theta(t)u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\left(-e^{iE_{\vec{k}}t}+e^{-iE_{\vec{k}}t}\right)\\
&=iF^R_{\vec{k}}(t)
\end{aligned}
\tag{54}
$$

遅延部分の $(2,2)$ 成分 $\bar{G}^R(k)$ もまた $G^R(k)$ に等しい。

$$
\begin{aligned}
i\bar{G}^R_{\vec{k}}(t) \quad &= \quad \theta(t)\left\langle\left\{c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(t), c_{-\vec{k}\downarrow}\right\}\right\rangle \quad = \quad \theta(t)\left[\left\langle c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(t)c_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle + \left\langle c_{-\vec{k}\downarrow}c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(t)\right\rangle\right] \\
&= \theta(t)\left\langle\left(u_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} + v_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{\vec{k}\uparrow}\right)\left(u_{\vec{k}}a_{-\vec{k}\downarrow} + v_{\vec{k}}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\right)\right\rangle \\
&\quad +\theta(t)\left\langle\left(u_{\vec{k}}a_{-\vec{k}\downarrow} + v_{\vec{k}}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\right)\left(u_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} + v_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{\vec{k}\uparrow}\right)\right\rangle \\
&= \theta(t)\left(u^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}a_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle + v^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{\vec{k}\uparrow}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle\right. \\
&\quad \left. + u^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{-\vec{k}\downarrow}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle + v^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}a_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle\right) \\
&= \theta(t)\left[u^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\left(1-\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right) + v^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\left(1+\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. + u^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\left(1+\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right) + v^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\left(1-\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)\right] \\
&= \theta(t)\left(u^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t} + v^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}\right) \\
&= iG^R_{\vec{k}}(t) \qquad (55)
\end{aligned}
$$

最終的に、$\hat{G}^R$ を既知の値で表す式にたどり着く。

$$
i\begin{pmatrix} G^R_{\vec{k}}(t) & F^R_{\vec{k}}(t) \\ \bar{F}^R_{\vec{k}}(t) & \bar{G}^R_{\vec{k}}(t) \end{pmatrix} = \theta(t)\begin{pmatrix} u^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t} + v^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t} & -u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\left(e^{iE_{\vec{k}}t} - e^{-iE_{\vec{k}}t}\right) \\ -u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\left(e^{iE_{\vec{k}}t} - e^{-iE_{\vec{k}}t}\right) & u^2_{\vec{k}}e^{iE_{\vec{k}}t} + v^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t} \end{pmatrix} \qquad (56)
$$

$$
\begin{pmatrix} G^R(k) & F^R(k) \\ \bar{F}^R(k) & \bar{G}^R(k) \end{pmatrix} = \lim_{\eta\to+0}\begin{pmatrix} \dfrac{u^2_{\vec{k}}}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} + \dfrac{v^2_{\vec{k}}}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta} & -u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\left(\dfrac{1}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} - \dfrac{1}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta}\right) \\ -u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\left(\dfrac{1}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} - \dfrac{1}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta}\right) & \dfrac{u^2_{\vec{k}}}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} + \dfrac{v^2_{\vec{k}}}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta} \end{pmatrix} \qquad (57)
$$

2.2 一般化されたスピンの場合

南部空間におけるグリーン関数（4×4 行列）は、次のように定義される。

$$
\begin{aligned}
i\hat{G}(k) &= \int dx \left\langle \hat{\mathrm{T}}\left[\vec{c}_{\vec{k}}(x)\vec{c}^{\,\dagger}_{\vec{k}}\right]\right\rangle e^{ik\cdot x} \\
&= \int dx \left\langle \hat{\mathrm{T}}\left[\begin{pmatrix} c_{\vec{k}\uparrow}(x) \\ c_{\vec{k}\downarrow}(x) \\ c^\dagger_{-\vec{k}\uparrow}(x) \\ c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(x) \end{pmatrix}\left(c^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\ ,\ c^\dagger_{\vec{k}\downarrow}\ ,\ c_{-\vec{k}\uparrow}\ ,\ c_{-\vec{k}\downarrow}\quad\right)\right]\right\rangle e^{ik\cdot x} \qquad (58)
\end{aligned}
$$

ここで $\hat{\mathrm{T}}[\cdots]$ は時間順序積演算子である。$x^\mu = (t, \vec{r})$ および $k^\mu = (\omega, \vec{k})$（i.e., $k\cdot x = g_{\mu\nu}k^\mu x^\nu = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}$ ）は、簡略記法で書かれた 4 元運動量ベクトルである。これらの関数の遅延（retarded）部分も、次のように定義される。

$$
\begin{aligned}
& i\hat{G}^R(k) \\
&= \int dx \left\langle \begin{pmatrix} \{c_{\vec{k}\uparrow}(x), c^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\} & \{c_{\vec{k}\uparrow}(x), c^\dagger_{\vec{k}\downarrow}\} & \{c_{\vec{k}\uparrow}(x), c_{-\vec{k}\uparrow}\} & \{c_{\vec{k}\uparrow}(x), c_{-\vec{k}\downarrow}\} \\ \{c_{\vec{k}\downarrow}(x), c^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\} & \{c_{\vec{k}\downarrow}(x), c^\dagger_{\vec{k}\downarrow}\} & \{c_{\vec{k}\downarrow}(x), c_{-\vec{k}\uparrow}\} & \{c_{\vec{k}\downarrow}(x), c_{-\vec{k}\downarrow}\} \\ \{c^\dagger_{-\vec{k}\uparrow}(x), c^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\} & \{c^\dagger_{-\vec{k}\uparrow}(x), c^\dagger_{\vec{k}\downarrow}\} & \{c^\dagger_{-\vec{k}\uparrow}(x), c_{-\vec{k}\uparrow}\} & \{c^\dagger_{-\vec{k}\uparrow}(x), c_{-\vec{k}\downarrow}\} \\ \{c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(x), c^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\} & \{c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(x), c^\dagger_{\vec{k}\downarrow}\} & \{c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(x), c_{-\vec{k}\uparrow}\} & \{c^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(x), c_{-\vec{k}\downarrow}\} \end{pmatrix} \right\rangle e^{ik\cdot x} \qquad (59)
\end{aligned}
$$

対角化された基底（準粒子） $a^{(\dagger)}_{\vec{k}\sigma}$ に対する運動方程式は以下で得られる。：

$$
\begin{aligned}
i\frac{da_{\vec{k}\uparrow}(t)}{dt} &= \left[a_{\vec{k}\uparrow}, H\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\vec{q}} \left[a_{\vec{k}\uparrow}, \vec{c}_{\vec{q}}^{\,\dagger}\hat{H}\vec{c}_{\vec{q}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\vec{q}} \left[a_{\vec{k}\uparrow} \ , \ \left(c^\dagger_{\vec{q}\uparrow} \ , \ c^\dagger_{\vec{q}\downarrow} \ , \ c_{-\vec{q}\uparrow} \ , \ c_{-\vec{q}\downarrow}\right) \begin{pmatrix} \xi_{\vec{q}}\hat{1}_{2\times2} & \hat{\Delta}_{\vec{q}} \\ \hat{\Delta}^*_{\vec{q}} & -\xi_{\vec{q}}\hat{1}_{2\times2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\vec{q}\uparrow} \\ c_{\vec{q}\downarrow} \\ c^\dagger_{-\vec{q}\uparrow} \\ c^\dagger_{-\vec{q}\downarrow} \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\vec{q}} \left[a_{\vec{k}\uparrow}, \vec{a}_{\vec{q}}^{\,\dagger}\hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U}\vec{a}_{\vec{q}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\vec{q}} \left[a_{\vec{k}\uparrow} \ , \ \left(a^\dagger_{\vec{q}\uparrow} \ , \ a^\dagger_{\vec{q}\downarrow} \ , \ a_{-\vec{q}\uparrow} \ , \ a_{-\vec{q}\downarrow}\right) \begin{pmatrix} E_{\vec{q}}\hat{1}_{2\times2} & \\ & -E_{\vec{q}}\hat{1}_{2\times2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{q}\uparrow} \\ a_{\vec{q}\downarrow} \\ a^\dagger_{-\vec{q}\uparrow} \\ a^\dagger_{-\vec{q}\downarrow} \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\vec{q}} E_{\vec{q}}\left[a_{\vec{k}\uparrow} \ , \ a^\dagger_{\vec{q}\uparrow}a_{\vec{q}\uparrow} + a^\dagger_{\vec{q}\downarrow}a_{\vec{q}\downarrow} - a_{-\vec{q}\uparrow}a^\dagger_{-\vec{q}\uparrow} - a_{-\vec{q}\downarrow}a^\dagger_{-\vec{q}\downarrow}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\vec{q}} E_{\vec{q}}\left(\left\{a_{\vec{k}\uparrow} \ , \ a^\dagger_{\vec{q}\uparrow}\right\}a_{\vec{q}\uparrow} - a^\dagger_{\vec{q}\uparrow}\left\{a_{\vec{k}\uparrow} \ , \ a_{\vec{q}\uparrow}\right\} + \left\{a_{\vec{k}\uparrow} \ , \ a^\dagger_{\vec{q}\downarrow}\right\}a_{\vec{q}\downarrow} - a^\dagger_{\vec{q}\downarrow}\left\{a_{\vec{k}\uparrow} \ , \ a_{\vec{q}\downarrow}\right\}\right. \\
&\qquad \left. - \left\{a_{\vec{k}\uparrow} \ , \ a_{-\vec{q}\uparrow}\right\}a^\dagger_{-\vec{q}\uparrow} + a_{-\vec{q}\uparrow}\left\{a_{\vec{k}\uparrow} \ , \ a^\dagger_{-\vec{q}\uparrow}\right\} - \left\{a_{\vec{k}\uparrow} \ , \ a_{-\vec{q}\downarrow}\right\}a^\dagger_{-\vec{q}\downarrow} + a_{-\vec{q}\downarrow}\left\{a_{\vec{k}\uparrow} \ , \ a^\dagger_{-\vec{q}\downarrow}\right\}\right) \\
&= E_{\vec{k}}a_{\vec{k}\uparrow} \qquad (60)
\end{aligned}
$$

これを積分すると、

$$
a_{\vec{k}\uparrow}(t) = e^{-iE_{\vec{k}}t}a_{\vec{k}\uparrow}(0) \qquad (61)
$$

同様にして、$a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}$ に対する方程式を得る。

$$
i\frac{da^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}(t)}{dt} = \left[a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}, H\right] \ = \ -E_{\vec{k}}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} \qquad (62)
$$

そして、

$$a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}(t) = e^{iE_{\vec{k}}t} a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}(0). \tag{63}$$

スピノル $\vec{c}$ と $\vec{a}$ の間の関係は以下で与えられる。

$$\vec{c}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{\vec{k}} & -\hat{v}_{\vec{k}} \\ \hat{v}^{*}_{-\vec{k}} & \hat{u}_{-\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{k}\uparrow} \\ a_{\vec{k}\downarrow} \\ a^{\dagger}_{-\vec{k}\uparrow} \\ a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow} \end{pmatrix} \;=\; \hat{U}\vec{a}_{\vec{k}}, \tag{64}$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{\vec{k}} & -\hat{v}_{\vec{k}} \\ \hat{v}^{*}_{-\vec{k}} & \hat{u}_{-\vec{k}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\left(E_{\vec{k}} + \xi_{\vec{k}}\right)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\hat{\Delta}_{\vec{k}}\hat{\Delta}^{\dagger}_{\vec{k}}\right]}} \begin{pmatrix} (E_{\vec{k}} + \xi_{\vec{k}})\hat{1}_{2\times 2} & -\hat{\Delta}_{\vec{k}} \\ \hat{\Delta}^{\dagger}_{\vec{k}} & (E_{\vec{k}} + \xi_{\vec{k}})\hat{1}_{2\times 2} \end{pmatrix}. \tag{65}$$

したがって、次のように置き換えることができる。

$$(\hat{u}_{\vec{k}})_{\sigma\sigma'} \;=\; (\hat{u}_{-\vec{k}})_{\sigma\sigma'} \;=\; u_{\vec{k}}\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{66}$$

$$(\hat{v}_{\vec{k}})_{\sigma\sigma'} \;=\; v_{\vec{k}\sigma\sigma'} \quad , \quad (\hat{v}^{*}_{\vec{k}})_{\sigma\sigma'} \;=\; v^{*}_{\vec{k}\sigma\sigma'}. \tag{67}$$

これで、スカラー量 $u_{\vec{k}}$, $v_{\vec{k}\sigma\sigma'}$ および $v^{*}_{\vec{k}\sigma\sigma'}$ が定義された。この関係を用いて、グリーン関数についての表現を得ることができる。

$$\begin{aligned} c_{\vec{k}\sigma}(t) &= (\hat{u}_{\vec{k}})_{\sigma\uparrow} a_{\vec{k}\uparrow}(t) + (\hat{u}_{\vec{k}})_{\sigma\downarrow} a_{\vec{k}\downarrow}(t) - (\hat{v}_{\vec{k}})_{\sigma\uparrow} a^{\dagger}_{-\vec{k}\uparrow}(t) - (\hat{v}_{\vec{k}})_{\sigma\downarrow} a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}(t) \\ &= u_{\vec{k}}\delta_{\sigma\uparrow} a_{\vec{k}\uparrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} + u_{\vec{k}}\delta_{\sigma\downarrow} a_{\vec{k}\downarrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\sigma\uparrow} a^{\dagger}_{-\vec{k}\uparrow} e^{iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\sigma\downarrow} a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow} e^{iE_{\vec{k}}t}, \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned} c^{\dagger}_{-\vec{k}\sigma}(t) &= (\hat{v}^{*}_{\vec{k}})_{\sigma\uparrow} a_{\vec{k}\uparrow}(t) + (\hat{v}^{*}_{\vec{k}})_{\sigma\downarrow} a_{\vec{k}\downarrow}(t) + (\hat{u}_{\vec{k}})_{\sigma\uparrow} a^{\dagger}_{-\vec{k}\uparrow}(t) + (\hat{u}_{\vec{k}})_{\sigma\downarrow} a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow}(t) \\ &= v^{*}_{\vec{k}\sigma\uparrow} a_{\vec{k}\uparrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} + v^{*}_{\vec{k}\sigma\downarrow} a_{\vec{k}\downarrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} + u_{\vec{k}}\delta_{\sigma\uparrow} a^{\dagger}_{-\vec{k}\uparrow} e^{iE_{\vec{k}}t} + u_{\vec{k}}\delta_{\sigma\downarrow} a^{\dagger}_{-\vec{k}\downarrow} e^{iE_{\vec{k}}t}. \end{aligned} \tag{69}$$

$$iG^R_{\vec{k}\uparrow\uparrow}(t) \;=\; \theta(t)\left\langle\left\{c_{\vec{k}\uparrow}(t), c^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\right\}\right\rangle \;=\; \theta(t)\left\langle c_{\vec{k}\uparrow}(t)c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} + c^\dagger_{\vec{k}\uparrow}c_{\vec{k}\uparrow}(t)\right\rangle$$

$$= \theta(t)\Big\langle\Big(u_{\vec{k}}a_{\vec{k}\uparrow}e^{-iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\uparrow\uparrow}a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow}e^{iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\uparrow\downarrow}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}e^{iE_{\vec{k}}t}\Big)\Big(u_{\vec{k}}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} - v^*_{\vec{k}\uparrow\uparrow}a_{-\vec{k}\uparrow} - v^*_{\vec{k}\uparrow\downarrow}a_{-\vec{k}\downarrow}\Big)$$
$$+ \Big(u_{\vec{k}}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} - v^*_{\vec{k}\uparrow\uparrow}a_{-\vec{k}\uparrow} - v^*_{\vec{k}\uparrow\downarrow}a_{-\vec{k}\downarrow}\Big)\Big(u_{\vec{k}}a_{\vec{k}\uparrow}e^{-iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\uparrow\uparrow}a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow}e^{iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\uparrow\downarrow}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}e^{iE_{\vec{k}}t}\Big)\Big\rangle$$

$$= \theta(t)\Big(u^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{\vec{k}\uparrow}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle + |v_{\vec{k}\uparrow\uparrow}|^2e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow}a_{-\vec{k}\uparrow}\right\rangle + |v_{\vec{k}\uparrow\downarrow}|^2e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}a_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle$$
$$+ u^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}a_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle + |v_{\vec{k}\uparrow\uparrow}|^2e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{-\vec{k}\uparrow}a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow}\right\rangle + |v_{\vec{k}\uparrow\downarrow}|^2e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{-\vec{k}\downarrow}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle\Big)$$

$$= \theta(t)\Big[u^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big) + |v_{\vec{k}\uparrow\uparrow}|^2e^{iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big) + |v_{\vec{k}\uparrow\downarrow}|^2e^{iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big)$$
$$+ u^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1-\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big) + |v_{\vec{k}\uparrow\uparrow}|^2e^{iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big) + |v_{\vec{k}\uparrow\downarrow}|^2e^{iE_{\vec{k}}t}\frac{1}{2}\Big(1+\tanh\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\Big)\Big]$$

$$= \theta(t)\Big[u^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t} + \Big(|v_{\vec{k}\uparrow\uparrow}|^2 + |v_{\vec{k}\uparrow\downarrow}|^2\Big)e^{iE_{\vec{k}}t}\Big] \tag{70}$$

あるいは、フーリエ空間では、

$$\begin{aligned}
G^R_{\uparrow\uparrow}(k) &= \int dt\ G^R_{\vec{k}}(t)e^{i\omega t} \\
&= -i\lim_{\eta\to+0}\int_0^\infty dt\ \ \Big[u^2_{\vec{k}}e^{-iE_{\vec{k}}t} + \Big(|v_{\vec{k}\uparrow\uparrow}|^2 + |v_{\vec{k}\uparrow\downarrow}|^2\Big)e^{iE_{\vec{k}}t}\Big]\,e^{i\omega t-\eta t} \\
&= \lim_{\eta\to+0}\left(\frac{u^2_{\vec{k}}}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} + \frac{|v_{\vec{k}\uparrow\uparrow}|^2 + |v_{\vec{k}\uparrow\downarrow}|^2}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta}\right).
\end{aligned} \tag{71}$$

虚数部は状態密度に関連している。

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\sum_{\vec{k}}\mathrm{Im}G^R_{\uparrow\uparrow}(k) \\
&= -\frac{1}{\pi}\lim_{\eta\to+0}\sum_{\vec{k}}\left(\mathrm{Im}\frac{u^2_{\vec{k}}}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} + \mathrm{Im}\frac{|v_{\vec{k}\uparrow\uparrow}|^2 + |v_{\vec{k}\uparrow\downarrow}|^2}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta}\right) \\
&= \sum_{\vec{k}}\Big[u^2_{\vec{k}}\delta(\omega - E_{\vec{k}}) + \Big(|v_{\vec{k}\uparrow\uparrow}|^2 + |v_{\vec{k}\uparrow\downarrow}|^2\Big)\,\delta(\omega + E_{\vec{k}})\Big].
\end{aligned} \tag{72}$$

$$\Big(G^R_{\vec{k}\sigma\sigma'}\Big) = \begin{pmatrix} G^R_{\vec{k}\uparrow\uparrow} & G^R_{\vec{k}\uparrow\downarrow} \\ G^R_{\vec{k}\downarrow\uparrow} & G^R_{\vec{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{73}$$

次のように書き下すことができる。

$$
\begin{aligned}
iG^R_{\vec{k}\sigma\sigma'}(t) &= \theta(t)\left\langle\left\{c_{\vec{k}\sigma}(t), c^\dagger_{\vec{k}\sigma'}\right\}\right\rangle = \theta(t)\left\langle c_{\vec{k}\sigma}(t)c^\dagger_{\vec{k}\sigma'} + c^\dagger_{\vec{k}\sigma'}c_{\vec{k}\sigma}(t)\right\rangle \\
&= \theta(t)\left\langle\left(u_{\vec{k}}\delta_{\sigma\uparrow}a_{\vec{k}\uparrow}e^{-iE_{\vec{k}}t} + u_{\vec{k}}\delta_{\sigma\downarrow}a_{\vec{k}\downarrow}e^{-iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\sigma\uparrow}a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow}e^{iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\sigma\downarrow}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}e^{iE_{\vec{k}}t}\right)\right. \\
&\quad\times\left(u_{\vec{k}}\delta_{\sigma'\uparrow}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} + u_{\vec{k}}\delta_{\sigma'\downarrow}a^\dagger_{\vec{k}\downarrow} - v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow}a_{-\vec{k}\uparrow} - v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow}a_{-\vec{k}\downarrow}\right) \\
&\qquad + \left(u_{\vec{k}}\delta_{\sigma'\uparrow}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} + u_{\vec{k}}\delta_{\sigma'\downarrow}a^\dagger_{\vec{k}\downarrow} - v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow}a_{-\vec{k}\uparrow} - v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow}a_{-\vec{k}\downarrow}\right) \\
&\quad\left.\times\left(u_{\vec{k}}\delta_{\sigma\uparrow}a_{\vec{k}\uparrow}e^{-iE_{\vec{k}}t} + u_{\vec{k}}\delta_{\sigma\downarrow}a_{\vec{k}\downarrow}e^{-iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\sigma\uparrow}a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow}e^{iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\sigma\downarrow}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}e^{iE_{\vec{k}}t}\right)\right\rangle \\
&= \theta(t)\left(u^2_{\vec{k}}\delta_{\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow}e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{\vec{k}\uparrow}a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle + u^2_{\vec{k}}\delta_{\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow}e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{\vec{k}\downarrow}a^\dagger_{\vec{k}\downarrow}\right\rangle\right. \\
&\qquad + v_{\vec{k}\sigma\uparrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow}e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow}a_{-\vec{k}\uparrow}\right\rangle + v_{\vec{k}\sigma\downarrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow}e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}a_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle \\
&\qquad\quad + u^2_{\vec{k}}\delta_{\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow}e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^\dagger_{\vec{k}\uparrow}a_{\vec{k}\uparrow}\right\rangle + u^2_{\vec{k}}\delta_{\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow}e^{-iE_{\vec{k}}t}\left\langle a^\dagger_{\vec{k}\downarrow}a_{\vec{k}\downarrow}\right\rangle \\
&\qquad\left. + v_{\vec{k}\sigma\uparrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow}e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{-\vec{k}\uparrow}a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow}\right\rangle + v_{\vec{k}\sigma\downarrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow}e^{iE_{\vec{k}}t}\left\langle a_{-\vec{k}\downarrow}a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow}\right\rangle\right) \\
&= \theta(t)\left[u^2_{\vec{k}}\left(\delta_{\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow} + \delta_{\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow}\right)e^{-iE_{\vec{k}}t} + \left(v_{\vec{k}\sigma\uparrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma\downarrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow}\right)e^{iE_{\vec{k}}t}\right] \\
&= \theta(t)\left[u^2_{\vec{k}}\delta_{\sigma\sigma'}e^{-iE_{\vec{k}}t} + \left(v_{\vec{k}\sigma\uparrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma\downarrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow}\right)e^{iE_{\vec{k}}t}\right], \qquad (74)
\end{aligned}
$$

フーリエ変換で以下を得る。

$$
\begin{aligned}
G^R_{\sigma\sigma'}(k) &= \int dt\ G^R_{\vec{k}\sigma\sigma'}(t)e^{i\omega t} \\
&= -i\lim_{\eta\to+0}\int_0^\infty dt\ \left[u^2_{\vec{k}}\delta_{\sigma\sigma'}e^{-iE_{\vec{k}}t} + \left(v_{\vec{k}\sigma\uparrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma\downarrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow}\right)e^{iE_{\vec{k}}t}\right]e^{i\omega t-\eta t} \\
&= \lim_{\eta\to+0}\left[\frac{u^2_{\vec{k}}\delta_{\sigma\sigma'}}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} + \frac{v_{\vec{k}\sigma\uparrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma\downarrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow}}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta}\right], \qquad (75)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\sum_{\vec{k}}\mathrm{Im}G^R_{\sigma\sigma'}(k) \\
&= -\frac{1}{\pi}\lim_{\eta\to+0}\sum_{\vec{k}}\left[\mathrm{Im}\frac{u^2_{\vec{k}}\delta_{\sigma\sigma'}}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} + \mathrm{Im}\frac{v_{\vec{k}\sigma\uparrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma\downarrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow}}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta}\right] \\
&= \sum_{\vec{k}}\left[u^2_{\vec{k}}\delta_{\sigma\sigma'}\delta(\omega - E_{\vec{k}}) + \left(v_{\vec{k}\sigma\uparrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma\downarrow}v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow}\right)\delta(\omega + E_{\vec{k}})\right]. \qquad (76)
\end{aligned}
$$

以上から次を得る。

$$
\begin{pmatrix} G^R_{\uparrow\uparrow}(k) & G^R_{\uparrow\downarrow}(k) \\ G^R_{\downarrow\uparrow}(k) & G^R_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix}
$$

$$
= \lim_{\eta\to+0} \begin{pmatrix} \frac{u_{\vec{k}}^2}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} + \frac{|v_{\vec{k}\uparrow\uparrow}|^2 + |v_{\vec{k}\uparrow\downarrow}|^2}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta} & \frac{v_{\vec{k}\uparrow\uparrow} v^*_{\vec{k}\downarrow\uparrow} + v_{\vec{k}\uparrow\downarrow} v^*_{\vec{k}\downarrow\downarrow}}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta} \\ \frac{v_{\vec{k}\downarrow\uparrow} v^*_{\vec{k}\uparrow\uparrow} + v_{\vec{k}\downarrow\downarrow} v^*_{\vec{k}\uparrow\downarrow}}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta} & \frac{u_{\vec{k}}^2}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} + \frac{|v_{\vec{k}\downarrow\uparrow}|^2 + |v_{\vec{k}\downarrow\downarrow}|^2}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta} \end{pmatrix}. \tag{77}
$$

この結果は、$(v_{\vec{k}\sigma\sigma'}) = v_{\vec{k}}\hat{\sigma}^x$ 、$(v^*_{\vec{k}\sigma\sigma'}) = v^*_{\vec{k}}\hat{\sigma}^x$ とおくことで、一重項の場合に帰着できる。

$$
\begin{pmatrix} G^R_{\uparrow\uparrow}(k) & G^R_{\uparrow\downarrow}(k) \\ G^R_{\downarrow\uparrow}(k) & G^R_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix} = \lim_{\eta\to+0} \left(\frac{u_{\vec{k}}^2}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} + \frac{|v_{\vec{k}}|^2}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta} \right) \hat{1}_{2\times 2}. \tag{78}
$$

スピン空間における遅延異常（原文: anormalous）グリーン関数は、

$$
\left(F^R_{\vec{k}\sigma\sigma'} \right) = \begin{pmatrix} F^R_{\vec{k}\uparrow\uparrow} & F^R_{\vec{k}\uparrow\downarrow} \\ F^R_{\vec{k}\downarrow\uparrow} & F^R_{\vec{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{79}
$$

そして、

$$
\begin{aligned}
iF^R_{\vec{k}\sigma\sigma'}(t) \;&=\; \theta(t) \left\langle \left\{ c_{\vec{k}\sigma}(t), c_{-\vec{k}\sigma'} \right\} \right\rangle \;=\; \theta(t) \left\langle c_{\vec{k}\sigma}(t) c_{-\vec{k}\sigma'} + c_{-\vec{k}\sigma'} c_{\vec{k}\sigma}(t) \right\rangle \\
&= \theta(t) \Big\langle \left(u_{\vec{k}}\delta_{\sigma\uparrow} a_{\vec{k}\uparrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} + u_{\vec{k}}\delta_{\sigma\downarrow} a_{\vec{k}\downarrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\sigma\uparrow} a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow} e^{iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\sigma\downarrow} a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} e^{iE_{\vec{k}}t} \right) \\
&\quad \times \left(v_{\vec{k}\sigma'\uparrow} a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma'\downarrow} a^\dagger_{\vec{k}\downarrow} + u_{\vec{k}}\delta_{\sigma'\uparrow} a_{-\vec{k}\uparrow} + u_{\vec{k}}\delta_{\sigma'\downarrow} a_{-\vec{k}\downarrow} \right) \\
&\qquad + \left(v_{\vec{k}\sigma'\uparrow} a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma'\downarrow} a^\dagger_{\vec{k}\downarrow} + u_{\vec{k}}\delta_{\sigma'\uparrow} a_{-\vec{k}\uparrow} + u_{\vec{k}}\delta_{\sigma'\downarrow} a_{-\vec{k}\downarrow} \right) \\
&\quad \times \left(u_{\vec{k}}\delta_{\sigma\uparrow} a_{\vec{k}\uparrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} + u_{\vec{k}}\delta_{\sigma\downarrow} a_{\vec{k}\downarrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\sigma\uparrow} a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow} e^{iE_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}\sigma\downarrow} a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} e^{iE_{\vec{k}}t} \right) \Big\rangle \\
&= \theta(t) \Big(u_{\vec{k}} v_{\vec{k}\sigma'\uparrow} \delta_{\sigma\uparrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} \left\langle a_{\vec{k}\uparrow} a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} \right\rangle + u_{\vec{k}} v_{\vec{k}\sigma'\downarrow} \delta_{\sigma\downarrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} \left\langle a_{\vec{k}\downarrow} a^\dagger_{\vec{k}\downarrow} \right\rangle \\
&\qquad - u_{\vec{k}} v_{\vec{k}\sigma\uparrow} \delta_{\sigma'\uparrow} e^{iE_{\vec{k}}t} \left\langle a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow} a_{-\vec{k}\uparrow} \right\rangle - u_{\vec{k}} v_{\vec{k}\sigma\downarrow} \delta_{\sigma'\downarrow} e^{iE_{\vec{k}}t} \left\langle a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} a_{-\vec{k}\downarrow} \right\rangle \\
&\qquad + u_{\vec{k}} v_{\vec{k}\sigma'\uparrow} \delta_{\sigma\uparrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} \left\langle a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} a_{\vec{k}\uparrow} \right\rangle + u_{\vec{k}} v_{\vec{k}\sigma'\downarrow} \delta_{\sigma\downarrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} \left\langle a^\dagger_{\vec{k}\downarrow} a_{\vec{k}\downarrow} \right\rangle \\
&\qquad - u_{\vec{k}} v_{\vec{k}\sigma\uparrow} \delta_{\sigma'\uparrow} e^{iE_{\vec{k}}t} \left\langle a_{-\vec{k}\uparrow} a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow} \right\rangle - u_{\vec{k}} v_{\vec{k}\sigma\downarrow} \delta_{\sigma'\downarrow} e^{iE_{\vec{k}}t} \left\langle a_{-\vec{k}\downarrow} a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} \right\rangle \Big) \\
&= u_{\vec{k}} \theta(t) \left[\left(v_{\vec{k}\sigma'\uparrow} \delta_{\sigma\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma'\downarrow} \delta_{\sigma\downarrow} \right) e^{-iE_{\vec{k}}t} - \left(v_{\vec{k}\sigma\uparrow} \delta_{\sigma'\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma\downarrow} \delta_{\sigma'\downarrow} \right) e^{iE_{\vec{k}}t} \right],
\end{aligned} \tag{80}
$$

$$
\begin{aligned}
F^R_{\sigma\sigma'}(k) \;&=\; \int dt \; F^R_{\vec{k}\sigma\sigma'}(t) e^{i\omega t} \\
&= -iu_{\vec{k}} \lim_{\eta\to+0} \int_0^\infty dt \left[\left(v_{\vec{k}\sigma'\uparrow} \delta_{\sigma\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma'\downarrow} \delta_{\sigma\downarrow} \right) e^{-iE_{\vec{k}}t} - \left(v_{\vec{k}\sigma\uparrow} \delta_{\sigma'\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma\downarrow} \delta_{\sigma'\downarrow} \right) e^{iE_{\vec{k}}t} \right] e^{i\omega t - \eta t} \\
&= -u_{\vec{k}} \lim_{\eta\to+0} \left[\frac{v_{\vec{k}\sigma'\uparrow} \delta_{\sigma\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma'\downarrow} \delta_{\sigma\downarrow}}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} - \frac{v_{\vec{k}\sigma\uparrow} \delta_{\sigma'\uparrow} + v_{\vec{k}\sigma\downarrow} \delta_{\sigma'\downarrow}}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta} \right].
\end{aligned} \tag{81}
$$

次を得る。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} F^R_{\uparrow\uparrow}(k) & F^R_{\uparrow\downarrow}(k) \\ F^R_{\downarrow\uparrow}(k) & F^R_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix} \\
&= -u_{\vec{k}} \lim_{\eta\to+0} \left[\frac{1}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} \begin{pmatrix} v_{\vec{k}\uparrow\uparrow} & v_{\vec{k}\downarrow\uparrow} \\ v_{\vec{k}\uparrow\downarrow} & v_{\vec{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} - \frac{1}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta} \begin{pmatrix} v_{\vec{k}\uparrow\uparrow} & v_{\vec{k}\uparrow\downarrow} \\ v_{\vec{k}\downarrow\uparrow} & v_{\vec{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \right].
\end{aligned}
\tag{82}
$$

この結果は、$(v_{\vec{k}\sigma\sigma'}) = v_{\vec{k}}\hat{\sigma}^x$ 、$(v^*_{\vec{k}\sigma\sigma'}) = v^*_{\vec{k}}\hat{\sigma}^x$ とおくことで、一重項の場合に帰着できる。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} F^R_{\uparrow\uparrow}(k) & F^R_{\uparrow\downarrow}(k) \\ F^R_{\downarrow\uparrow}(k) & F^R_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix} \\
&= -u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} \lim_{\eta\to+0} \left(\frac{1}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} - \frac{1}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta} \right) \hat{\sigma}^x.
\end{aligned}
\tag{83}
$$

スピン空間における遅延・反異常グリーン関数は、

$$
\left(\bar{F}^R_{\vec{k}\sigma\sigma'} \right) = \begin{pmatrix} \bar{F}^R_{\vec{k}\uparrow\uparrow} & \bar{F}^R_{\vec{k}\uparrow\downarrow} \\ \bar{F}^R_{\vec{k}\downarrow\uparrow} & \bar{F}^R_{\vec{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix},
\tag{84}
$$

次のように得られる。

$$
\begin{aligned}
i\bar{F}^R_{\vec{k}\sigma\sigma'}(t) \quad &= \quad \theta(t) \left\langle \left\{ c^\dagger_{-\vec{k}\sigma}(t), c^\dagger_{\vec{k}\sigma'} \right\} \right\rangle \quad = \quad \theta(t) \left\langle c^\dagger_{-\vec{k}\sigma}(t) c^\dagger_{\vec{k}\sigma'} + c^\dagger_{\vec{k}\sigma'} c^\dagger_{-\vec{k}\sigma}(t) \right\rangle \\
&= \theta(t) \Big\langle \left(v^*_{\vec{k}\sigma\uparrow} a_{\vec{k}\uparrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} + v^*_{\vec{k}\sigma\downarrow} a_{\vec{k}\downarrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} + u_{\vec{k}} \delta_{\sigma\uparrow} a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow} e^{iE_{\vec{k}}t} + u_{\vec{k}} \delta_{\sigma\downarrow} a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} e^{iE_{\vec{k}}t} \right) \\
&\qquad \times \left(u_{\vec{k}} \delta_{\sigma'\uparrow} a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} + u_{\vec{k}} \delta_{\sigma'\downarrow} a^\dagger_{\vec{k}\downarrow} - v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow} a_{-\vec{k}\uparrow} - v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow} a_{-\vec{k}\downarrow} \right) \\
&\qquad + \left(u_{\vec{k}} \delta_{\sigma'\uparrow} a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} + u_{\vec{k}} \delta_{\sigma'\downarrow} a^\dagger_{\vec{k}\downarrow} - v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow} a_{-\vec{k}\uparrow} - v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow} a_{-\vec{k}\downarrow} \right) \\
&\qquad \times \left(v^*_{\vec{k}\sigma\uparrow} a_{\vec{k}\uparrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} + v^*_{\vec{k}\sigma\downarrow} a_{\vec{k}\downarrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} + u_{\vec{k}} \delta_{\sigma\uparrow} a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow} e^{iE_{\vec{k}}t} + u_{\vec{k}} \delta_{\sigma\downarrow} a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} e^{iE_{\vec{k}}t} \right) \Big\rangle \\
&= \theta(t) \Big(v^*_{\vec{k}\sigma\uparrow} u_{\vec{k}} \delta_{\sigma'\uparrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} \left\langle a_{\vec{k}\uparrow} a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} \right\rangle + v^*_{\vec{k}\sigma\downarrow} u_{\vec{k}} \delta_{\sigma'\downarrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} \left\langle a_{\vec{k}\downarrow} a^\dagger_{\vec{k}\downarrow} \right\rangle \\
&\qquad - u_{\vec{k}} \delta_{\sigma\uparrow} v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow} e^{iE_{\vec{k}}t} \left\langle a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow} a_{-\vec{k}\uparrow} \right\rangle - u_{\vec{k}} \delta_{\sigma\downarrow} v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow} e^{iE_{\vec{k}}t} \left\langle a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} a_{-\vec{k}\downarrow} \right\rangle \\
&\qquad + u_{\vec{k}} v^*_{\vec{k}\sigma\uparrow} \delta_{\sigma'\uparrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} \left\langle a^\dagger_{\vec{k}\uparrow} a_{\vec{k}\uparrow} \right\rangle + u_{\vec{k}} v^*_{\vec{k}\sigma\downarrow} \delta_{\sigma'\downarrow} e^{-iE_{\vec{k}}t} \left\langle a^\dagger_{\vec{k}\downarrow} a_{\vec{k}\downarrow} \right\rangle \\
&\qquad - v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow} u_{\vec{k}} \delta_{\sigma\uparrow} e^{iE_{\vec{k}}t} \left\langle a_{-\vec{k}\uparrow} a^\dagger_{-\vec{k}\uparrow} \right\rangle - v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow} u_{\vec{k}} \delta_{\sigma\downarrow} e^{iE_{\vec{k}}t} \left\langle a_{-\vec{k}\downarrow} a^\dagger_{-\vec{k}\downarrow} \right\rangle \Big) \\
&= u_{\vec{k}} \theta(t) \left[\left(v^*_{\vec{k}\sigma\uparrow} \delta_{\sigma'\uparrow} + v^*_{\vec{k}\sigma\downarrow} \delta_{\sigma'\downarrow} \right) e^{-iE_{\vec{k}}t} - \left(v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow} \delta_{\sigma\uparrow} + v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow} \delta_{\sigma\downarrow} \right) e^{iE_{\vec{k}}t} \right],
\end{aligned}
\tag{85}
$$

$$
\begin{aligned}
&F^R_{\sigma\sigma'}(k) \\
&= \int dt\ F^R_{\vec{k}\sigma\sigma'}(t) e^{i\omega t} \\
&= -iu_{\vec{k}} \lim_{\eta\to+0} \int_0^\infty dt \left[\left(v^*_{\vec{k}\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow} + v^*_{\vec{k}\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow} \right) e^{-iE_{\vec{k}}t} - \left(v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow}\delta_{\sigma\uparrow} + v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow}\delta_{\sigma\downarrow} \right) e^{iE_{\vec{k}}t} \right] e^{i\omega t - \eta t} \\
&= -u_{\vec{k}} \lim_{\eta\to+0} \left[\frac{v^*_{\vec{k}\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\uparrow} + v^*_{\vec{k}\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\downarrow}}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} - \frac{v^*_{\vec{k}\sigma'\uparrow}\delta_{\sigma\uparrow} + v^*_{\vec{k}\sigma'\downarrow}\delta_{\sigma\downarrow}}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta} \right].
\end{aligned}
\tag{86}
$$

次を得る。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \bar{F}^R_{\uparrow\uparrow}(k) & \bar{F}^R_{\uparrow\downarrow}(k) \\ \bar{F}^R_{\downarrow\uparrow}(k) & \bar{F}^R_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix} \\
&= -u_{\vec{k}} \lim_{\eta\to+0} \left[\frac{1}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} \begin{pmatrix} v^*_{\vec{k}\uparrow\uparrow} & v^*_{\vec{k}\uparrow\downarrow} \\ v^*_{\vec{k}\downarrow\uparrow} & v^*_{\vec{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} - \frac{1}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta} \begin{pmatrix} v^*_{\vec{k}\uparrow\uparrow} & v^*_{\vec{k}\downarrow\uparrow} \\ v^*_{\vec{k}\uparrow\downarrow} & v^*_{\vec{k}\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \right].
\end{aligned}
\tag{87}
$$

この結果は、$(v_{\vec{k}\sigma\sigma'}) = v_{\vec{k}}\hat{\sigma}^x$ 、$(v^*_{\vec{k}\sigma\sigma'}) = v^*_{\vec{k}}\hat{\sigma}^x$ とおくことで、一重項の場合に帰着できる。

$$
\begin{pmatrix} F^R_{\uparrow\uparrow}(k) & F^R_{\uparrow\downarrow}(k) \\ F^R_{\downarrow\uparrow}(k) & F^R_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix} = -u_{\vec{k}} v^*_{\vec{k}} \lim_{\eta\to+0} \left(\frac{1}{\omega - E_{\vec{k}} + i\eta} - \frac{1}{\omega + E_{\vec{k}} + i\eta} \right) \hat{\sigma}^x.
\tag{88}
$$