

Radon-Nikodym 微分を用いた測度変換 と Cameron-Martin-Girsanov の定理

岡田 大 (Okada Masaru)

October 15, 2025

Contents

1	ここまでの現状と課題の整理	2
2	測度変換と Radon-Nikodym 微分	2
3	同値性	4
4	期待値と Radon-Nikodym 微分の関係	5
5	Radon-Nikodym 微分の過程	6
6	例題：離散過程	7
6.1	問題	7
6.2	解答	7
7	Brown 運動の同時密度関数	9
8	Radon-Nikodym 微分 - 連続型	9
9	積率母関数の復習	10
10	単純な測度変換 (Brown 運動 + 定数ドリフト)	10
10.1	時刻 $t(< T)$ についての確認	11
11	例題：連続過程	12
11.1	解答	13
12	Cameron-Martin-Girsanov の定理	13
12.1	Cameron-Martin-Girsanov の定理	14
12.2	Cameron-Martin-Girsanov の定理の逆	14
13	Cameron-Martin-Girsanov の定理と確率微分	14
14	例 - 測度変換	15
14.1	例 1: \mathbb{Q} -Brown 運動の定数倍	15

1 ここまでの現状と課題の整理

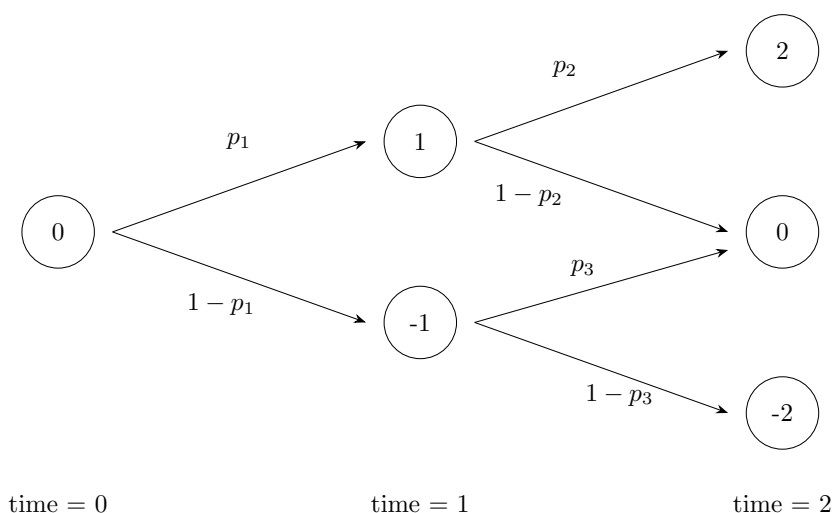
前節は伊藤解析について展開されたが、確率測度について意識していなかった。

つまり、 \mathbb{P} -Brown 運動 W_t についての伊藤解析について見てきたが、測度 \mathbb{P} と独立ではない測度 \mathbb{Q} の下での Brown 運動（教科書では \tilde{W}_t と書かれる）について取り扱う処方（ \mathbb{P} と \mathbb{Q} の間を互いに行き来する方法）を我々はまだ知らないで、これから知見を広げていきたい。

テキストは Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing - Martin Baxter, Andrew Rennie [1] を用いる。

2 測度変換と Radon-Nikodym 微分

まずは測度変換の効果についての直感を養うために離散時間の過程を見ていく。



この図で表現される再結合される 2 期間のランダムウォークを考える。

この図の各頂点は値を表し、道の上下には遷移確率が示されている。

時点 0 から最終時点までの経路を値で表現すると、

$$\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 0\}, \{0, -1, 0\}, \{0, -1, -2\}$$

の計 4 パターンの取り得る経路がある。

表 1 にこれらの経路と辿る確率（順に $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ と定義する）がまとめられている。

経路	最終時点到達確率
$\{0, 1, 2\}$	$p_1 p_2 = \pi_1$
$\{0, 1, 0\}$	$p_1 (1 - p_2) = \pi_2$
$\{0, -1, 0\}$	$(1 - p_1) p_3 = \pi_3$
$\{0, -1, -2\}$	$(1 - p_1) (1 - p_3) = \pi_4$

表 1: 経路とそれに対応する確率

今までの説明の流れ（表 3.1 の確率のカラム）では p_1, p_2, p_3 が与えられると $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ が求まるとした。

しかし逆に p_1, p_2, p_3 が未知である場合、 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ が与えられると逆算して p_1, p_2, p_3 が求まる。

分かりにくいので具体的にやってみると、

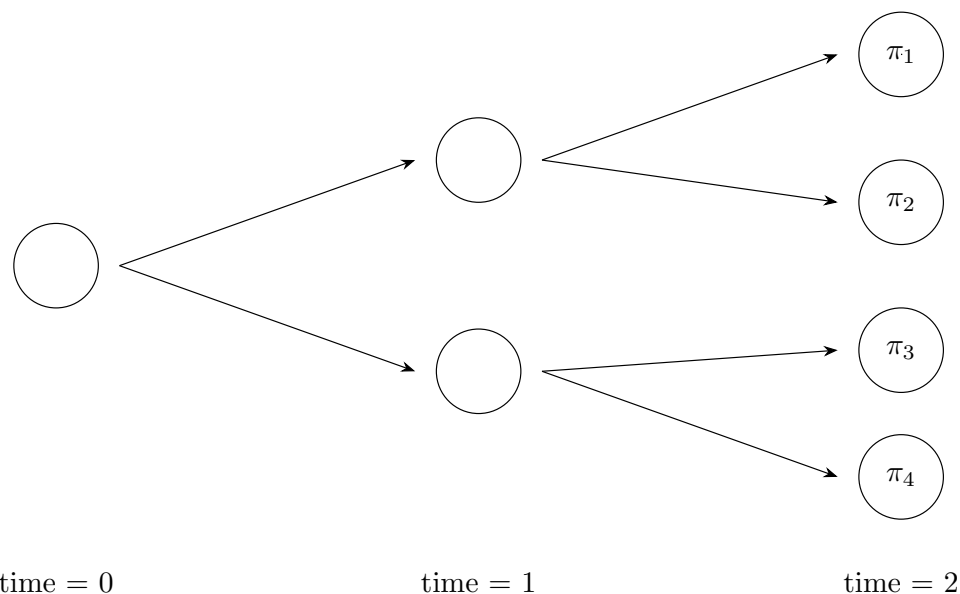
$$\begin{cases} p_1 p_2 = \pi_1 \\ p_1 (1 - p_2) = \pi_2 \\ (1 - p_1) p_3 = \pi_3 \\ (1 - p_1) (1 - p_3) = \pi_4 \end{cases}$$

これらを p_1, p_2, p_3 について解くと

$$\begin{cases} p_1 = \pi_1 + \pi_2 \\ p_2 = \frac{\pi_1}{\pi_1 + \pi_2} \\ p_3 = \frac{\pi_3}{\pi_3 + \pi_4} \end{cases}$$

のようになる。

つまり最終時点における到達確率 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ を与えることは p_1, p_2, p_3 を定めること、すなわち測度 \mathbb{P} を定めることと等しい。この図では値の経路（各交点が値のツリー）が示されていたが、値ではなく、最終時点への到達確率に焦点を当てると、ツリーは次の図のようになる。



さっきの図は時点 2 において再結合されていたが、こちらの図では $\{0, 1, 0\}$ 、 $\{0, -1, 0\}$ が重ならないツリーになることに留意する。最終時点に到達する確率 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ を与えることで測度 \mathbb{P} が定まることを見た。

次に、 p_1, p_2, p_3 の代わりに q_1, q_2, q_3 で表現されるような測度 \mathbb{Q} を考える。

そのときの最終時点に到達する確率をそれぞれ $\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3, \pi'_4$ と置く。

今までで展開してきた測度 \mathbb{P} の場合と全く同様の議論で、 q_1, q_2, q_3 が与えられることと $\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3, \pi'_4$ が定まることは同じことである。

■ここまでを一旦整理

測度 \mathbb{P} について、頂点間の遷移確率 p_1, p_2, p_3 が与えられると最終時点における到達確率 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ が定まる。

逆に、最終時点における到達確率 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ が与えられることは測度 \mathbb{P} が与えられていることと同じこと。

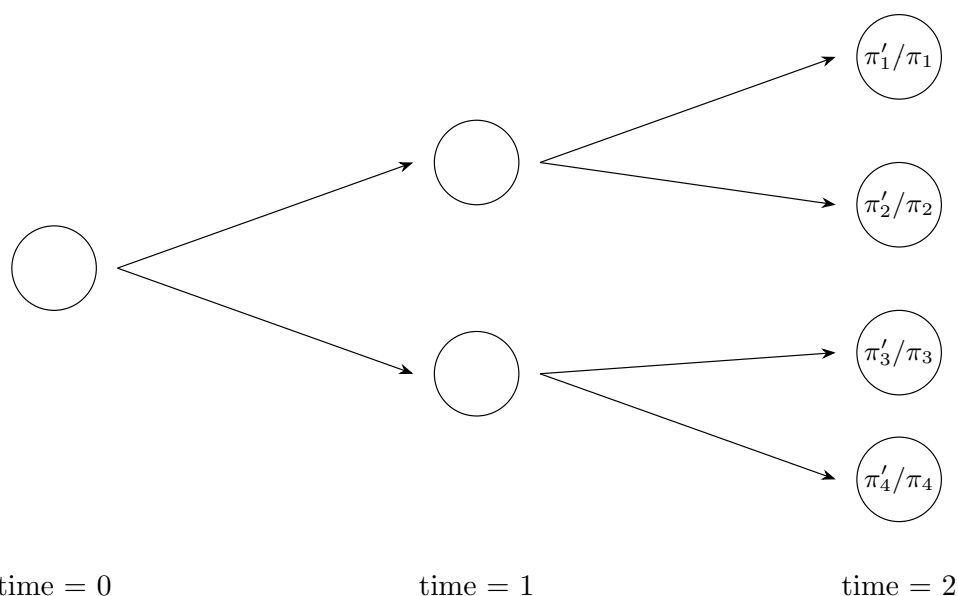
測度 \mathbb{Q} についても記号を変えただけの全く同じ議論で、頂点間の遷移確率 q_1, q_2, q_3 が与えられると最終時点に到達する確率 $\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3, \pi'_4$ が定まる。

これも逆も同じで、最終時点に到達する確率 $\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3, \pi'_4$ が与えられると測度 \mathbb{Q} も定まる。測度 \mathbb{P} と測度 \mathbb{Q} それぞれの最終時点の到達確率の比 $\frac{\pi'_1}{\pi_1}, \frac{\pi'_2}{\pi_2}, \frac{\pi'_3}{\pi_3}, \frac{\pi'_4}{\pi_4}$ を考えてみる。

もし測度 \mathbb{Q} についての各頂点間の遷移確率 q_1, q_2, q_3 がはじめに与えられていない場合でも、測度 \mathbb{P} と比の値 $\frac{\pi'_i}{\pi_i}$ (ただし $i = 1, 2, 3, 4$) の値が与えられると逆算することで q_1, q_2, q_3 が定まる。

この比の値 $\frac{\pi'_i}{\pi_i}$ は $i = 1, 2, 3, 4$ の4つの値を取る。

この比の値は各最終到達時点ごとに値が決まる。さっきまでのようにツリーで表現すると次の図のようになる。最終到達時点の i 番目の点に到達したときの値が $\frac{\pi'_i}{\pi_i}$ であるような確率変数とみなすことができる。



この確率変数は記号で $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ と表現し、 \mathbb{P} に対する \mathbb{Q} の Radon-Nikodym 微分と呼ばれている。

この新しい記法を使って同じことを繰り返すと、

■ここまでを一旦整理

\mathbb{P} と \mathbb{Q} が与えられると $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ が定まる。 \mathbb{P} と $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ が与えられると \mathbb{Q} が定まる。

3 同値性

確率の定義から、各 p_i, q_i はそれぞれ 0 以上 1 以下の値である。(ゼロや 1 を含む。)

境界値である 0 や 1 であった場合に $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ が定義できないという問題が起こる。

$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ が取る値は最終時点の到達確率の比 $\frac{\pi'_1}{\pi_1}, \frac{\pi'_2}{\pi_2}, \frac{\pi'_3}{\pi_3}, \frac{\pi'_4}{\pi_4}$ であるので、ゼロ除算になってしまい定義ができない。

例として、 $p_1 = 0$ 、 $q_i > 0$ の場合を考えてみる。

$p_1 p_2 = \pi_1$ 、 $p_1(1 - p_2) = \pi_2$ なので、 $p_1 = 0$ が乗じられると最終時点の到達確率 π_1, π_2 もそれぞれ 0 になってしまう。

この場合、最終時点の到達確率の比 $\frac{\pi'_1}{\pi_1}$ 、 $\frac{\pi'_2}{\pi_2}$ が存在しなくなってしまう定義ができない。

テキスト [1] では

「もし \mathbb{P} の下では起こりえない経路が \mathbb{Q} の下で起こり得る場合、 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ は定義できない。」と表現されている。

この問題を防ぐために確率測度の同値性という概念が導入される。

■確率測度の同値性

同じ確率空間上の測度 \mathbb{P} 、 \mathbb{Q} に対して、その確率空間のどんな事象を取ってきたとしても、その確率が \mathbb{P} についても \mathbb{Q} についても常に 0 にならないとき、その二つの確率測度 \mathbb{P} と \mathbb{Q} は同値であると言う。

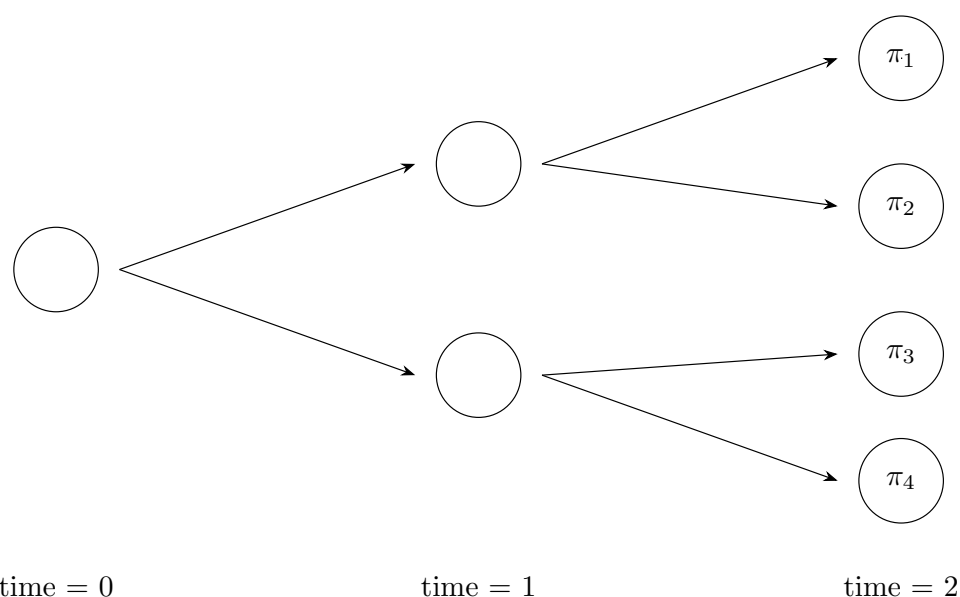
\mathbb{P} と \mathbb{Q} が同値であれば $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ が定義できる。

今までの議論を記号 \mathbb{P} 、 \mathbb{Q} を入れ替えても同じで、 $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$ が存在するためには、 \mathbb{P} と \mathbb{Q} はそれぞれ同値な確率測度でなければならない。

4 期待値と Radon-Nikodym 微分の関係

2 つ前のセクションで、「 \mathbb{P} と $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ が与えられると \mathbb{Q} が定まる。」ということを見た。これを期待値に着目して振り返ってみる。

離散的な確率測度の図のツリーをもう一度見てみる。



期待値を考えるために、確率変数 X を導入する。最終到達時点の i 番目 ($i = 1, 2, 3, 4$) の点に到達したときの確率変数 X の値を x_i とする。

X の \mathbb{P} の下での期待値 $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(X)$ は次のように計算される。

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(X) = \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \pi_3 x_3 + \pi_4 x_4$$

一方で、 X の \mathbb{Q} の下での期待値 $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}(X)$ は次のように計算される。

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \pi'_1 x_1 + \pi'_2 x_2 + \pi'_3 x_3 + \pi'_4 x_4$$

$\frac{\pi'_i}{\pi_i}$ が出るように変形すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}(X) &= \pi'_1 x_1 + \pi'_2 x_2 + \pi'_3 x_3 + \pi'_4 x_4 \\ &= \pi_1 \frac{\pi'_1}{\pi_1} x_1 + \pi_2 \frac{\pi'_2}{\pi_2} x_2 + \pi_3 \frac{\pi'_3}{\pi_3} x_3 + \pi_4 \frac{\pi'_4}{\pi_4} x_4 \end{aligned}$$

この表示は、最終到達時点の i 番目の座標における値が $\frac{\pi'_i}{\pi_i} x_i$ であるような確率変数 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} X$ の \mathbb{P} の下での期待値となっている。まとめると、

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} X\right)$$

となることが確認できた。

5 Radon-Nikodym 微分の過程

今見た期待値は条件付き期待値ではない（普通の？）期待値だった。

今考えている 2 期間の 2 項モデルでは時点 t は $t = 0, 1, 2$ だけであり、終了時点を $T (= 2)$ と置いて、その時点での確率変数を $X = X_T$ と書くと、あえて今の結果を条件付き期待値として次のように表すことができる。

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}(X_T | \mathcal{F}_0) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} X_T \middle| \mathcal{F}_0\right)$$

(2 章で既出の \mathcal{F}_t は、時点 t におけるフィルトレーションを表す。2 項モデルにおいては、具体的には時点 t までに辿り得る経路全体の集合である。)

ここからはより一般の時点 $t (\neq T)$ と $s (\neq 0)$ における条件付き期待値

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}(X_t | \mathcal{F}_s)$$

が測度 \mathbb{P} の下での期待値としてどのように表現できるかを見ていく。

ここまでは Radon-Nikodym 微分について考えるときは $\frac{\pi'_i}{\pi_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) といったような、最終到達時点（時点 $t = T$ の 1 点のみ）における確率の比を見てきた。

さらに考えを拡張して、時点 $t = T$ 以外の時点での各経路の遷移確率の比を考えてみる。

$t = 1$ では遷移確率の比は $\frac{q_1}{p_1}$ または $\frac{1 - q_1}{1 - p_1}$ の値が取り得る。

時点 $t = 0$ では \mathbb{P} でも \mathbb{Q} でも確率 1 で初期値 1 点しか取り得ないので、遷移確率の比は $\frac{1}{1} = 1$ 。

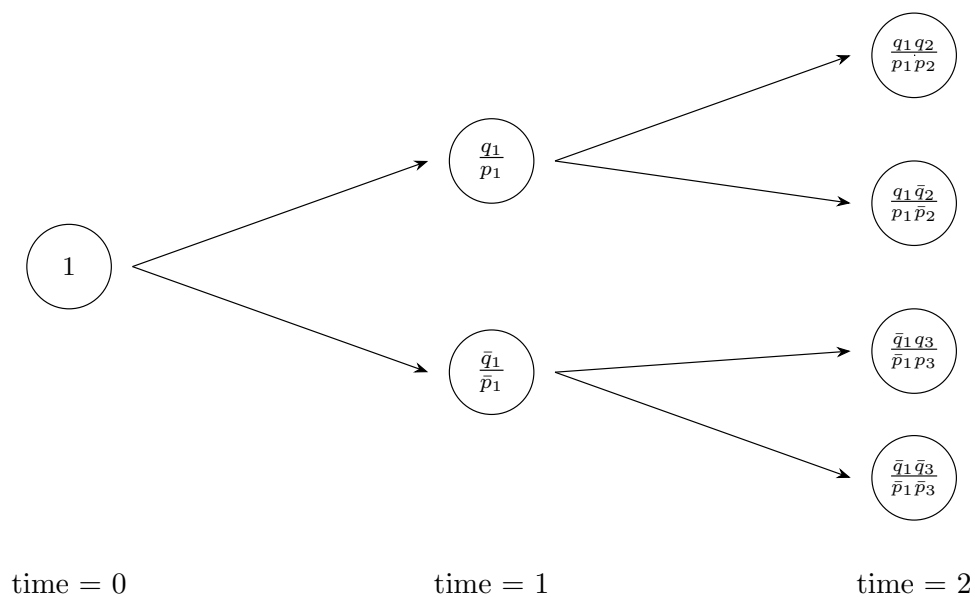
これをツリーで表示したのが次の図になる。ただし、 $1 - p_i = \bar{p}_i$ 、 $1 - q_i = \bar{q}_i$ のように略記されている。

この確率過程を ζ_t と置く。

最終時点では $\zeta_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ であり、（時点 $t = T$ でのみ定義されていた）Radon-Nikodym 微分を拡張した確率過程になっている。

時点ゼロにおいて \mathbb{P}, \mathbb{Q} それぞれ取りうる経路は確率 1 で現時点の 1 点（値をベースにした経路では $\{0\}$ のみ）であり、 $\zeta_0 = 1$ とする。

Radon-Nikodym 過程、微分過程と呼ばれている。



6 例題：離散過程

6.1 問題

今定義した確率過程を ζ_t は、測度 \mathbb{P} の下で条件 \mathcal{F}_t で取った $\frac{dQ}{dP}$ の期待値

$$\zeta_t = \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left(\frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

として表されることを $t = 0, 1, 2$ で示せ。

6.2 解答

6.2.1 $t = 2$ のとき

$t = 2 (= T)$ は最終到達時点なので、そのまま上の取り決めの通り。

あえて確かめると、下の表の通りになる。(ただし \mathcal{F}_2 の表現は図の各頂点の値を使った。)

\mathcal{F}_2	ζ_2	$\mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left(\frac{dQ}{dP} \middle \mathcal{F}_2 \right)$
$\left\{ 1, \frac{q_1}{p_1}, \frac{\pi'_1}{\pi_1} \right\}$	$\frac{\pi'_1}{\pi_1}$	$\frac{\pi'_1}{\pi_1}$
$\left\{ 1, \frac{q_1}{p_1}, \frac{\pi'_2}{\pi_2} \right\}$	$\frac{\pi'_2}{\pi_2}$	$\frac{\pi'_2}{\pi_2}$
$\left\{ 1, \frac{1-q_1}{1-p_1}, \frac{\pi'_3}{\pi_3} \right\}$	$\frac{\pi'_3}{\pi_3}$	$\frac{\pi'_3}{\pi_3}$
$\left\{ 1, \frac{1-q_1}{1-p_1}, \frac{\pi'_4}{\pi_4} \right\}$	$\frac{\pi'_4}{\pi_4}$	$\frac{\pi'_4}{\pi_4}$

6.2.2 $t = 1$ のとき

$t = 1$ のときに確認する。

$\mathcal{F}_1 = \left\{1, \frac{q_1}{p_1}\right\}$ の場合、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_1\right) &= p_2 \frac{\pi'_1}{\pi_1} + (1-p_2) \frac{\pi'_2}{\pi_2} \\ &= p_2 \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} + (1-p_2) \frac{q_1(1-q_2)}{p_1(1-p_2)} \\ &= \frac{q_1}{p_1} \{q_2 + (1-q_2)\} \\ &= \frac{q_1}{p_1}\end{aligned}$$

これは $\mathcal{F}_1 = \left\{1, \frac{q_1}{p_1}\right\}$ の場合の ζ_1 の値である。

次に $\mathcal{F}_1 = \left\{1, \frac{1-q_1}{1-p_1}\right\}$ の場合、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_1\right) &= p_3 \frac{\pi'_3}{\pi_3} + (1-p_3) \frac{\pi'_4}{\pi_4} \\ &= p_3 \frac{(1-q_1)q_3}{(1-p_1)p_3} + (1-p_3) \frac{(1-q_1)(1-q_3)}{(1-p_1)(1-p_3)} \\ &= \frac{1-q_1}{1-p_1} \{q_3 + (1-q_3)\} \\ &= \frac{1-q_1}{1-p_1}\end{aligned}$$

これは $\mathcal{F}_1 = \left\{1, \frac{1-q_1}{1-p_1}\right\}$ の場合の ζ_1 の値である。

まとめると、

\mathcal{F}_1	ζ_1	$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\middle \mathcal{F}_1\right)$
$(1, \frac{q_1}{p_1})$	$\frac{q_1}{p_1}$	$\frac{q_1}{p_1}$
$(1, \frac{1-q_1}{1-p_1})$	$\frac{1-q_1}{1-p_1}$	$\frac{1-q_1}{1-p_1}$

6.2.3 $t = 0$ のとき

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_0\right) &= \pi_1 \frac{\pi'_1}{\pi_1} + \pi_2 \frac{\pi'_2}{\pi_2} + \pi_3 \frac{\pi'_3}{\pi_3} + \pi_4 \frac{\pi'_4}{\pi_4} \\ &= \pi'_1 + \pi'_2 + \pi'_3 + \pi'_4 \\ &= 1\end{aligned}$$

これはたしかに ζ_0 の値になっている。

以上ですべての t について

$$\zeta_t = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

が成立することが示された。

7 Brown 運動の同時密度関数

離散時間における確率過程の測度変換をこれまでで見てきた。ここからは Brown 運動を取り扱えるように連続時間における測度変換を見ていく。

最初に標準正規分布を例に挙げて、密度関数を或る区間で積分して周辺分布を取る方法だけでは「経路の起こりやすさ」という概念が掴めないことが説明されている。

まずいきなり連続時間を取り扱うのではなく、簡単のために有限個の離散時間を考えることにする。ある時点 t_i における \mathbb{P} -Brown 運動 W_{t_i} の確率密度関数 $f_{\mathbb{P}}^i(x)$ は正規分布 $N(0, t_i)$ の確率密度関数であり、

$$f_{\mathbb{P}}^i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_i}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t_i}\right)$$

のように書ける。

さらに進めて、時刻 t_1, t_2, \dots, t_n において、 \mathbb{P} の下でそれぞれの時点で x_1, x_2, \dots, x_n の値を取る同時密度関数 $f_{\mathbb{P}}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を考える。

Brown 運動の独立増分性を思い出すと、 $W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ は独立でそれぞれ \mathbb{P} の下で正規分布に従う。

1 より大きい番号 $i (< n)$ について、 $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ の密度関数は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right)$$

ただし t_0, x_0 は 0 とした。

簡略化して $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 、 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ として同じ式を書くと、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t_i}} \exp\left(-\frac{\Delta x_i^2}{2\Delta t_i}\right)$$

各 $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ ($i = 1, 2, \dots, i, \dots, n$) が互いに独立なので、その同時確率密度関数 $f_{\mathbb{P}}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は各確率密度関数の積になる。

$$f_{\mathbb{P}}^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t_i}} \exp\left(-\frac{\Delta x_i^2}{2\Delta t_i}\right)$$

8 Radon-Nikodym 微分 - 連続型

\mathbb{P} と \mathbb{Q} を同値な測度とする。経路 ω が与えられたとき、時刻 (t_1, t_2, \dots, t_n) (ただし $t_n = T$) に対して、 $x_i = W_{t_i}(\omega)$ と定義すると、時刻 t までの Radon-Nikodym 微分 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ はそれぞれの測度の下での Brown 運動の同時確率密度の比の連続極限

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{\mathbb{Q}}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_{\mathbb{P}}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

として得られる。 $t_n = T$ は固定したまま、区間 $[0, T]$ の中で分割数を増やしていくような極限操作をしている。

連続の場合の Radon-Nikodym 微分も、離散過程の場合と同様に

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}(X_t) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}X_t\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

が成り立つ。

微分の過程も、 $\zeta_t = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right)$ として、 $s \leq t$ に対して、

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}(X_t\middle|\mathcal{F}_s) = \zeta_s^{-1}\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_t X_t\middle|\mathcal{F}_s)$$

が成り立つ。

9 積率母関数の復習

確率変数 X の測度 \mathbb{P} の下の積率母関数はパラメータを θ として、 $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\exp(\theta X)]$ で定義される。

特に X が正規分布 $N(\mu, \sigma)$ に従うとき、

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\exp(\theta X)] = \exp(\theta\mu + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2)$$

となる。

10 単純な測度変換 (Brown 運動 + 定数ドリフト)

以前の離散時間のセクションで \mathbb{P} と $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ が定められると \mathbb{Q} も定まる、ということを見た。

今回は

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T\right)$$

のときに \mathbb{P} -Brown 運動 W_T が \mathbb{Q} の下でどのような確率過程になるかを確認する。

そのために \mathbb{Q} の下の積率母関数 $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[\exp(\theta W_T)]$ を調べる。標準正規分布に従う確率変数を Z と置いて計算すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[\exp(\theta W_T)] &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \exp(\theta W_T)\right] \\ &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T + \theta W_T\right)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 T\right) \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\exp\{(\theta - \gamma)W_T\}] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 T\right) \mathbf{E}\left[\exp\{(\theta - \gamma)\sqrt{T}Z\}\right] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 T\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{(\theta - \gamma)\sqrt{T}x\} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 T\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{1}{2}(\theta - \gamma)^2 T\right) \\ &= \exp\left(-\theta\gamma T + \frac{1}{2}\theta^2 T\right) \end{aligned}$$

(3 行目から 5 行目の等式変形では、 W_T が測度 \mathbb{P} の下で正規分布 $N(0, T)$ に従うことを利用して、標準正規分布の確率密度で重み付けされた期待値計算 (積分計算) に戻した。) これと正規分布 $N(\mu, \sigma)$ の積率母関数 $\exp(\theta\mu + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2)$ を比較すると、平均 $\mu = -\gamma T$ 、分散 $\sigma = T$ の正規分布 $N(-\gamma T, T)$ となっていることがわかる。

測度 \mathbb{Q} の世界から見た \mathbb{P} -Brown 運動は、Brown 運動に定数ドリフト $(-\gamma)$ が付いた確率過程になることが確認できた。

\mathbb{Q} -Brown 運動を \tilde{W}_T と書くと、 \mathbb{P} -Brown 運動は $\tilde{W}_T - \gamma T$ と書ける。

Radon-Nikodym 微分として $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T\right)$ が与えられた場合、 \mathbb{P} -Brown 運動 W_T と、 \mathbb{Q} -Brown 運動 \tilde{W}_T との間に $\tilde{W}_T = W_T + \gamma T$ の関係があることが分かった。

10.1 時刻 $t(< T)$ についての確認

時刻 $t(< T)$ についても同様に Radon-Nikodym 微分として $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T\right)$ が与えられた場合、 \mathbb{P} -Brown 運動 W_t は測度 \mathbb{Q} の下では Brown 運動に定数ドリフトが付いた確率過程 $\tilde{W}_t - \gamma t$ になると書かれている。このことを確かめる。

10.1.1 Radon-Nikodym 微分過程を得る。

まず先に Radon-Nikodym 微分過程を求めておく*1。

$$\begin{aligned}\zeta_t &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 T\right) \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp(-\gamma W_T) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 T\right) \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\{-\gamma(W_T - W_t)\} \exp(-\gamma W_t) \middle| \mathcal{F}_t\right]\end{aligned}$$

ここで期待値の中の因子の一つに着目すると

$$\exp\{-\gamma(W_T - W_t)\} = \exp\left(-\gamma\sqrt{T-t}\frac{W_T - W_t}{\sqrt{T-t}}\right)$$

この

$$\frac{W_T - W_t}{\sqrt{T-t}}$$

は測度 \mathbb{P} の下で標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である。これを Z と置くと、期待値の中身は \mathcal{F}_t -可予測な因子

$$\exp(-\gamma W_t)$$

と \mathcal{F}_t -独立な因子

$$\exp\left(-\gamma\sqrt{T-t}Z\right)$$

の積に分解できて、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\{-\gamma(W_T - W_t)\} \exp(-\gamma W_t) \middle| \mathcal{F}_t\right] &= \exp(-\gamma W_t) \mathbf{E}\left[\exp\left(-\gamma\sqrt{T-t}Z\right)\right] \\ &= \exp(-\gamma W_t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\gamma\sqrt{T-t}x\right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \exp(-\gamma W_t) \exp\left\{\frac{1}{2}(-\gamma\sqrt{T-t})^2\right\}\end{aligned}$$

*1 期待値の取り方は、「ファイナンスのための確率解析 II (S. E. シュリーヴ)」の 2 章、5 章あたりを参考にしました。

ここまでのまとめると、

$$\begin{aligned}\zeta_t &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 T\right) \exp(-\gamma W_t) \exp\left\{\frac{1}{2}(-\gamma\sqrt{T-t})^2\right\} \\ &= \exp\left(-\gamma W_t - \frac{1}{2}\gamma^2 t\right)\end{aligned}$$

となる。(時刻 $t(< T)$ における微分過程は、結果的に表式の中の大文字の T (満期) が小文字の t (満期以前の時刻) に変わっただけになった。)

10.1.2 時刻 $t(< T)$ における \tilde{W}_t と W_t の関係

$t = T$ のときと同様に、 \mathbb{Q} の下での積率母関数を計算する。期待値に測度変換を施して \mathbb{P} における期待値で計算を進める。条件付き期待値の測度変換の公式を用いて、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[\exp(\theta W_t)] &= \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp(\theta W_t) \middle| \mathcal{F}_0\right] \\ &= \zeta_0^{-1} \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\zeta_t \exp(\theta W_t) \middle| \mathcal{F}_0\right] \\ &= 1 \times \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma W_t - \frac{1}{2}\gamma^2 t\right) \exp(\theta W_t)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 t\right) \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left((\theta - \gamma)W_t\right)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 t\right) \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left((\theta - \gamma)\sqrt{t}\frac{W_t}{\sqrt{t}}\right)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 t\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{(\theta - \gamma)\sqrt{t}x\right\} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 t\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{1}{2}(\theta - \gamma)^2 t\right) \\ &= \exp\left(-\theta\gamma t + \frac{1}{2}\theta^2 t\right)\end{aligned}$$

$t = T$ のときと同様に、 W_t は \mathbb{Q} の下では平均 $(-\gamma t)$ 、分散が t の正規分布 $N(-\gamma, t)$ に従うことが分かった。同じことを言い換えると、 \mathbb{Q} の下での Brown 運動 \tilde{W}_t との関係は、

$$\tilde{W}_t = W_t + \gamma t$$

であることが分かった。

11 例題：連続過程

Radon-Nikodym 微分過程を用いて、

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\theta(\tilde{W}_{t+s} - \tilde{W}_s)\right) \middle| \mathcal{F}_s\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 t\right)$$

を示し、Brown 運動の独立増分性が \mathbb{Q} の下でも成立していることを確かめる。

11.1 解答

$\tilde{W}_t = W_t + \gamma t$ の関係を用いる。測度変換して \mathbb{P} の下で期待値を計算する

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\theta (\tilde{W}_{t+s} - \tilde{W}_s) \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ \theta (W_{t+s} + \gamma(t+s) - W_s - \gamma s) \right\} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \zeta_s^{-1} \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[\zeta_{t+s} \exp \left\{ \theta (W_{t+s} - W_s + \gamma t) \right\} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \zeta_s^{-1} \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\gamma W_{t+s} - \frac{1}{2} \gamma^2 (t+s) \right) \exp \left\{ \theta (W_{t+s} - W_s + \gamma t) \right\} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \zeta_s^{-1} \exp \left(\theta \gamma t - \frac{1}{2} \gamma^2 (t+s) \right) \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left((\theta - \gamma) W_{t+s} - \theta W_s \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \zeta_s^{-1} \exp \left(\theta \gamma t - \frac{1}{2} \gamma^2 (t+s) \right) \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left((\theta - \gamma) (W_{t+s} - W_s) - \gamma W_s \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \zeta_s^{-1} \exp \left(\theta \gamma t - \frac{1}{2} \gamma^2 (t+s) \right) \exp(-\gamma W_s) \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left((\theta - \gamma) (W_{t+s} - W_s) \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \zeta_s^{-1} \exp \left(\theta \gamma t - \frac{1}{2} \gamma^2 (t+s) \right) \exp(-\gamma W_s) \exp \left(\frac{1}{2} (\theta - \gamma)^2 t \right) \\
&= \exp \left(\gamma W_s + \frac{1}{2} \gamma^2 s \right) \exp \left(\theta \gamma t - \frac{1}{2} \gamma^2 (t+s) \right) \exp(-\gamma W_s) \exp \left(\frac{1}{2} (\theta - \gamma)^2 t \right) \\
&= \exp \left(\frac{1}{2} \theta^2 t \right)
\end{aligned}$$

定数 γ 、 \mathbb{P} -Brown 運動を W_t と置く。同値な測度 \mathbb{P}, \mathbb{Q} があり、その Radon-Nikodym 微分が次のように与えられたとする。

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(-\gamma W_T - \frac{1}{2} \gamma^2 T \right)$$

微分の過程は次のようになる。

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \exp \left(-\gamma W_t - \frac{1}{2} \gamma^2 t \right)$$

さらに、 \mathbb{Q} -Brown 運動を \tilde{W}_t と置くと、 \mathbb{P} -Brown 運動 W_t との間には次のような関係が成り立つ。

$$\tilde{W}_t = W_t + \gamma t$$

12 Cameron-Martin-Girsanov の定理

上で見たような同値な測度間の対応関係（Radon-Nikodym 微分）が（天下りの的に）与えられると、ある測度で Brown 運動になるような確率過程が、ドリフト付きの Brown 運動に変換されることを見た。

教科書では「（この教科書で扱う確率過程においては）実はいかなる測度変換によっても、Brown 運動はドリフト付き Brown 運動にしかない。」と述べられている。

Brown 運動がシンプルに変換されるという結果は、天下りの的に与えられた測度間の対応関係による偶然の結果ではなかった、ということが以下で展開されていく。

12.1 Cameron-Martin-Girsanov の定理

W_t を \mathbb{P} -Brown 運動、 γ_t を条件

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) < \infty$$

を満たす \mathcal{F} -可予測過程とする。

このとき以下の条件を満たすような測度 \mathbb{Q} が存在する。

1. \mathbb{Q} は \mathbb{P} と同値である。
2. $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right)$
3. $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ は \mathbb{Q} -Brown 運動になる。一方で W_t は \mathbb{Q} の下では時刻 t におけるドリフト $(-\gamma_t)$ を持つ Brown 運動になる。

前のセクションで天下一的に与えられた例は $\gamma_t = \gamma = \text{const.}$ とした特別なケースだった。

12.2 Cameron-Martin-Girsanov の定理の逆

逆も成立する。

W_t を \mathbb{P} -Brown 運動、 \mathbb{Q} を \mathbb{P} と同値な測度とすると、

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$$

が \mathbb{Q} -Brown 運動になるような \mathcal{F} -可予測過程 γ_t が存在する。さらに、Radon-Nikodym 微分は

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right)$$

になる。

13 Cameron-Martin-Girsanov の定理と確率微分

Cameron-Martin-Girsanov の定理の実例の利用例を見る。

このテキストで取り扱う確率過程はすべて Brown 運動を変形したものなので Cameron-Martin-Girsanov の定理はドリフトを操作するのに便利な道具になる。

微分形が以下のように与えられる確率過程 X を考える。

$$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$$

ここで W_t は \mathbb{P} -Brown 運動である。

この確率過程のドリフトは μ_t という関数形をしているが、別の関数形 ν_t に変更することを考える。

確率過程 X_t のドリフトが ν_t になるような確率測度を \mathbb{Q} とする。

\mathbb{Q} -Brown 運動を \tilde{W}_t と置くと、確率過程 X_t の微分形は以下のように書ける。

$$dX_t = \sigma_t d\tilde{W}_t + \nu_t dt$$

測度変換前後でボラティリティ σ_t は変化しないことに注意する。

それぞれの右辺の間で等式を立てると

$$\sigma_t dW_t + \mu_t dt = \sigma_t d\tilde{W}_t + \nu_t dt$$

これから

$$d\tilde{W}_t = dW_t + \frac{\mu_t - \nu_t}{\sigma_t} dt$$

このような関係があることがわかる。この dt の係数を γ_t と書いて、

$$\gamma_t = \frac{\mu_t - \nu_t}{\sigma_t}$$

とする。

これが Cameron-Martin-Girsanov の定理の適応条件

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) < \infty$$

を満たしていれば

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \frac{\mu_s - \nu_s}{\sigma_s} ds$$

が \mathbb{Q} -Brown 運動になるような測度 \mathbb{Q} が存在する。

14 例 - 測度変換

14.1 例 1: \mathbb{Q} -Brown 運動の定数倍

$$X_t = \sigma W_t + \mu t$$

のような確率過程を考える。 W_t は \mathbb{P} -Brown 運動である。 σ と μ は定数である。

このとき、 $\gamma = \frac{\mu}{\sigma}$ と置いて Cameron-Martin-Girsanov の定理を用いると、

$$\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu}{\sigma} t$$

が T までの \mathbb{Q} -Brown 運動になる。

X_t を \mathbb{Q} -Brown 運動 \tilde{W}_t で表すと、

$$X_t = \sigma \tilde{W}_t$$

のようになり、ドリフト項が消去される。このとき、 X_t は \mathbb{Q} -マルチンゲールであると言える。(すぐ後のセクションで登場する。)

異なる測度を用いれば異なる期待値が得られる。 X_t^2 のそれぞれの測度の下での期待値を求めてみる。

\mathbb{P} -Brown 運動を用いると、

$$X_t^2 = \sigma^2 W_t^2 + \mu^2 t^2 + 2\sigma\mu W_t t$$

\mathbb{Q} -Brown 運動を用いると、

$$X_t^2 = \sigma^2 \tilde{W}_t^2$$

なので、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(X_t^2) &= \mu^2 t^2 + \sigma^2 t \\ \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}(X_t^2) &= \sigma^2 t\end{aligned}$$

のように結果が異なる。

14.2 例 2: 幾何 Brown 運動

$$dX_t = X_t(\sigma dW_t + \mu dt)$$

のような確率過程 X_t を考える。 W_t は \mathbb{P} -Brown 運動である。 σ と μ は定数である。

別の測度 \mathbb{Q} における Brown 運動 \tilde{W}_t を用いて、

$$dX_t = X_t(\sigma d\tilde{W}_t + \nu dt)$$

というような確率微分方程式に変更できないかを調べる。

これも先ほどまでと同様に、

$$\sigma W_t + \mu t = \sigma \tilde{W}_t + \nu t$$

を満たすような \tilde{W}_t を考えてみると、

$$d\tilde{W}_t = dW_t + \frac{\mu - \nu}{\sigma} dt$$

であれば良いことがわかる。

Cameron-Martin-Girsanov の定理の適応条件

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbb{P}} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\mu - \nu}{\sigma} \right)^2 dt \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \nu}{\sigma} \right)^2 T \\ &< \infty\end{aligned}$$

は満たしているので、想定していた通り、 \tilde{W}_t が Brown 運動になるような測度 \mathbb{Q} が存在する。

(ゆえに測度 \mathbb{Q} における Brown 運動 \tilde{W}_t を用いて、

$$dX_t = X_t(\sigma d\tilde{W}_t + \nu dt)$$

という確率微分方程式に変更できることが分かった。)

References

- [1] Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing - Martin Baxter, Andrew Rennie