Dirty limit. Quasiclassical Green function θ-parameterization

岡田 大 (Okada Masaru)

October 24, 2025

磁場が入っていない Usadel 方程式は次式で与えられる。

$$iD\vec{\nabla}(\check{g}\vec{\nabla}\check{g}) + \check{H}_0\check{g} - \check{g}\check{H}_0 = 0, \tag{1}$$

ここで、準古典南部 - グリーン関数 $\check{g}$ と非摂動ハミルトニアン $\check{H}_0$ はそれぞれ

$$\check{g} \;=\; \begin{pmatrix} g & f \\ -f^{\dagger} & -g \end{pmatrix}, \qquad \check{H}_0 \;=\; \begin{pmatrix} -i\omega_n & -\Delta \\ \Delta^* & i\omega_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

g (f) は (異常) グリーン関数、Δ は超伝導ギャップで定数である。

特に、一様な状態では、グリーン関数は次のように書ける。

$$g \;=\; -\frac{\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2+|\Delta|^2}}, \qquad f \;=\; \frac{\Delta}{i\sqrt{\omega_n^2+|\Delta|^2}}. \tag{3}$$

松原周波数 ω_n は、(遅延) 解析接続によって次のように拡張できる: $i\omega_n \to E + i\eta$

ここで、超伝導励起エネルギー $E = \sqrt{\varepsilon^2+|\Delta|^2}$ は実数であり、η は無限小の正の数である。

$\check{g}$ は、 $\mathrm{Tr}\check{g} = 0$ かつ $\det\check{g} = 1$ という、2 次元回転行列の条件を満たす。

したがって、$\check{g}$ は $\theta(x)$ を用いて次のようにパラメータ表示できる:

$$\check{g}(x) \;=\; \begin{pmatrix} \cos[\theta(x)] & \sin[\theta(x)]e^{i\chi} \\ \sin[\theta(x)]e^{-i\chi} & -\cos[\theta(x)] \end{pmatrix}. \tag{4}$$

ゼロ磁場では位相 χ は定数であり、$\chi = 0$ と取っても良い。

常伝導金属中での Usadel 方程式の (2,1) 成分は、以下の形をとる。

$$-iD\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\cos[\theta(x)]\frac{\partial}{\partial x}\big(-\sin[\theta(x)]\big) + \sin[\theta(x)]\frac{\partial}{\partial x}\cos[\theta(x)]\Big\} = 2i\omega_n\sin[\theta(x)]. \tag{5}$$

さらに、以下の関係式を用いることで（これは合成関数を微分しただけ)。

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin[\theta(x)] \;=\; \cos[\theta(x)]\frac{\partial\theta(x)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\cos[\theta(x)] \;=\; -\sin[\theta(x)]\frac{\partial\theta(x)}{\partial x}. \tag{6}$$

解析接続を行うと、得られる式はより簡単な形になる。

$$D\frac{\partial^2\theta(x)}{\partial x^2} + 2iE\sin[\theta(x)] = 0. \tag{7}$$