関数繰り込み群を利用したガウス積分

岡田 大 (Okada Masaru)

October 20, 2025

Abstract

関数繰り込み群 (fRG) を利用して、厳密解が分かっているガウス積分を解いてみるという、fRG の入門的な計算例を示したノート。このノートの目的は、fRG が高エネルギーから低エネルギーへと揺らぎを順に取り込んでいく様子を、厳密解が分かっているガウス積分で実演することである。

Contents

1 このノートの流れ

1. 問題設定: $Z = \int dx e^{-S(x)}$ （$S(x) = \frac{1}{2}m^2x^2$）を計算したい。
2. fRG の導入: レギュレーター R_k を導入し、高エネルギースケール Λ から $k = 0$ まで、有効作用 Γ_k を流す（フローさせる)。
3. Wetterich Equation: その流れを記述するのが Wetterich Equation。
4. 計算: 方程式を解き、$k = 0$ での有効作用 $\Gamma_{k=0}$ を求める。
5. 結論: $\Gamma_{k=0}$ から $Z = e^{-\Gamma_{k=0}(\phi=0)}$ を計算すると、ガウス積分の正しい答え $\frac{\sqrt{2\pi}}{m}$ が得られる。

2 Wetterch Equation

$$\partial_k\Gamma_k = \frac{1}{2}\mathrm{STr}\left[(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}(\partial_k R_k)\right]$$

ここで STr はスーパートレースを表す。

これが fRG の核心となるフロー方程式になる。

Γ_k はスケール k における有効平均作用を表す。これには k 以上の高エネルギースケールの揺らぎが取り込まれ、k 未満の揺らぎはまだ取り込まれていない状態の作用である。

R_k はレギュレーターと呼ばれる関数であり、k よりも低いエネルギーのゆらぎを抑制する天井のような設定になっている。$k = \Lambda$ から $k = 0$ へと変化させることは、この上限を徐々に開放し、ゆらぎを取り込んでいく操作になる。

$\Gamma_k^{(2)} = \frac{\partial^2 \Gamma_k}{\partial \phi^2}$ はヘシアンに相当する量で、場 $\phi = \langle x \rangle$ に対する 2 階微分。

3 レギュレーター R_k とフロー方程式の具体化

3.1 Gaussian Integral

以下のガウス積分は初等的に求められる。

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}m^2x^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{m}$$

この積分結果を fRG の枠組みを使って再現してみるというのがこのノートの目的である。

分配関数と作用の関係は以下である。

$$Z = e^{-\Gamma_{k=0}(\phi=0)}$$

fRG のフレームワークを用いて $\Gamma_k(\phi)$ の関数形を導出してから $\Gamma_{k=0}(\phi = 0)$ と置くことで分配関数を求める。

3.2 Effective Action の仮定

この問題は相互作用の無い理論なので、Γ_k の場 ϕ に関する部分は k に依存せず、古典作用 $S(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ と同じ形であると仮定する。そこで

$$\Gamma_k(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + C_k$$

と置く。

ここで C_k は ϕ に依らない定数項である。ここに場のゆらぎの寄与が全て蓄積される。

この仮定から

$$\Gamma_k^{(2)} = \frac{\partial^2 \Gamma_k}{\partial \phi^2} = m^2 = \mathrm{const.}$$

となる。

3.3 レギュレーター R_k

レギュレーター R_k として

$$\begin{aligned} R_k &= k^2 \\ \partial_k R_k &= 2k \end{aligned}$$

を選択する。

$$Z_k = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}m^2x^2 - \frac{1}{2}R_k x^2}$$

大きな R_k の極限では classical になる。
一方で、$R_k \to 0$ の極限で求めたい分配関数 $Z_{k=0}$ になる。

4 Wetterich Equation

4.1 Wetterich Equation へ代入

この問題は 0 次元であるので、Wetterich Equation の STr は不要で、単純なスカラーの式になる。

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2}(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}(\partial_k R_k) = \frac{1}{2}(m^2 + k^2)^{-1}(2k) = \frac{k}{m^2 + k^2}$$

この式は Γ_k のうち、ϕ によらない定数項 C_k だけが k と共に流れていくことを示している。

4.2 フローの積分

$\partial_k \Gamma_k$ が求まったので、これを積分することで作用 Γ_k が求まる。

$$\begin{aligned}
\Gamma_k(\phi) &= \Gamma_\Lambda(\phi) - \int_k^\Lambda dk' \partial_{k'} \Gamma_{k'}(\phi) \\
&= \Gamma_\Lambda(\phi) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m^2 + \Lambda^2}{m^2 + k^2}\right)
\end{aligned}$$

ここで、Λ は非常に大きい値（UV カットオフ）である。

4.2.1 初期条件: $k = \Lambda$

$k = \Lambda$ ではレギュレーター $R_\Lambda = \Lambda^2$ によって揺らぎが抑制されている。
$\Gamma_\Lambda(\phi)$ は古典極限になっている。
このときの分配関数 Z_Λ は以下のように計算できる。

$$Z_\Lambda = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}m^2x^2 - \frac{1}{2}R_\Lambda x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}(m^2+\Lambda^2)x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{m^2 + \Lambda^2}}$$

Γ_Λ はこの Z_Λ と $S(\phi)$ から求まる。

$$\Gamma_\Lambda(\phi) = S(\phi) - \ln Z_\Lambda = \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \ln\left(\sqrt{\frac{2\pi}{m^2 + \Lambda^2}}\right)$$

$$\Gamma_\Lambda(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m^2 + \Lambda^2}{2\pi}\right)$$

4.2.2 作用 $\Gamma_k(\phi)$ の関数形

積分結果に、この $\Gamma_\Lambda(\phi)$ を代入する。

$$\Gamma_k(\phi) = \left[\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m^2 + \Lambda^2}{2\pi}\right)\right] - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m^2 + \Lambda^2}{m^2 + k^2}\right)$$

ln の項が打ち消し合い、

$$\Gamma_k(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m^2 + k^2}{2\pi}\right)$$

となる。

4.2.3 求めたかった $k=0$ における作用 $\Gamma_0(\phi)$ の関数形

$k=0$ では、レギュレーター $R_0=0$ となり、全てのゆらぎを取り込んだ、元の理論の真の有効作用 $\Gamma_{k=0}$ が得られる。

$$\Gamma_{k=0}(\phi)=\frac{1}{2}m^2\phi^2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m^2}{2\pi}\right)$$

4.2.4 ガウス積分の値

求めたい Z は、$Z=e^{-\Gamma_{k=0}(\phi=0)}$ で与えられる。

$$\Gamma_{k=0}(0)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m^2}{2\pi}\right)$$

$$Z=e^{-\Gamma_{k=0}(0)}=\exp\left[-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m^2}{2\pi}\right)\right]=\exp\left[\ln\left(\left(\frac{m^2}{2\pi}\right)^{-1/2}\right)\right]=\left(\frac{m^2}{2\pi}\right)^{-1/2}=\sqrt{\frac{2\pi}{m^2}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{m}$$

5 まとめ

このノートでは、関数繰り込み群 (fRG) という高度な理論的手法を、単純なガウス積分（相互作用のない理論）に対して用いた。

fRG のフローを通して、厳密かつ系統的に「ゆらぎ」の効果（この場合は ϕ によらない定数項、すなわち分配関数そのもの）を取り込んでいくかを示した。

References

[1] C. Wetterich, ”Exact evolution equation for the effective potential”, *Phys. Lett. B*, **301** (1): 90 (1993), arXiv:1710.05815, doi:10.1016/0370-2693(93)90726-X.

[2] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, ”Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical mechanics”, *Phys. Rep.*, **363** (4 – 6): 223 – 386 (2002), arXiv:hep-ph/0005122.