

# **熱方程式に対する差分法 II**

— 円盤領域、円柱領域、球における熱方程式 —

桂田 祐史

2004年某月某日～ 2025年12月23日

(<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab0/text/heat-fdm-2.pdf>)

# 目 次

<b>第1章 序</b>	<b>5</b>
1.1 なぜ円盤、円柱、球？ . . . . .	5
1.2 過去の卒研から関係するレポートの内容紹介 . . . . .	5
1.3 今後誰かに挑戦させたいこと . . . . .	6
1.4 その他 . . . . .	7
1.5 2024/9 今後の見直し計画 . . . . .	8
<b>第2章 準備: Bessel 関数</b>	<b>9</b>
2.1 はじめに — なぜ Bessel の微分方程式を考える必要があるのか . . . . .	9
2.2 定義と Bessel の微分方程式 . . . . .	10
2.2.1 寝た子を起こす話 . . . . .	14
2.3 $J_n(z)$ の基本的な性質 . . . . .	17
2.3.1 零点に関する性質とその証明 . . . . .	18
2.4 Fourier-Bessel 展開 . . . . .	21
2.5 Bessel の微分方程式を素朴に解いてみる . . . . .	25
2.6 UNIX 上で遊ぶ . . . . .	26
2.6.1 グラフを描こう . . . . .	26
2.6.2 零点を求める . . . . .	27
2.7 メモ . . . . .	31
2.7.1 Bessel の積分, Hansen の積分 . . . . .	31
2.7.2 加法定理 . . . . .	31
2.7.3 漸化式 (基本関係) . . . . .	32
2.7.4 半整数次数の Bessel 関数 . . . . .	33
2.7.5 漸近挙動 . . . . .	33
2.8 変形 Bessel 関数 . . . . .	33
2.9 Bessel について . . . . .	34
<b>第3章 Laplacian の極座標表示</b>	<b>36</b>
3.1 2次元の場合 . . . . .	36
3.2 3次元の場合 . . . . .	36
3.3 一般の $n$ 次元の場合 . . . . .	37
<b>第4章 円盤領域における熱方程式</b>	<b>38</b>
4.1 円盤領域での Dirichlet 境界値問題 . . . . .	38
4.2 円盤領域での Neumann 境界値問題 . . . . .	41
<b>第5章 円柱領域における熱方程式</b>	<b>42</b>
5.1 同次 Dirichlet 境界条件の場合 . . . . .	42
5.2 非同次 Dirichlet 境界条件 . . . . .	42
5.2.1 側面で非同次データ . . . . .	43

5.2.2	上面で非同次データ	43
5.2.3	底面で非同次データ	43
<b>第6章</b>	<b>円盤領域における波動方程式</b>	<b>44</b>
6.1	Dirichlet 境界条件の場合	44
<b>第7章</b>	<b>球における問題</b>	<b>46</b>
7.1	目標	46
7.2	球関数	46
<b>第8章</b>	<b>球における Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題</b>	<b>49</b>
8.1	Fourier の方法	49
8.1.1	変数分離: 固有値問題を導出する	49
8.1.2	$U$ を求める	50
8.1.3	$v$ を求める	51
8.1.4	変数分離した微分方程式	53
8.1.5	変数分離解と一般解	53
8.2	境界値問題の解の公式	53
8.3	おまけ: 球面 Laplace 作用素の固有値・固有関数	53
8.4	球面調和関数 $Y_k^m(x)$	54
8.5	Legendre 多項式, Legendre 倍多項式の計算	54
<b>第9章</b>	<b>円盤領域における差分法</b>	<b>56</b>
9.1	ターゲット問題	56
9.2	原点以外での Laplacian の差分近似 (素朴版)	56
9.3	原点以外での Laplacian の差分近似 – Swartztrauber-Sweet 近似	57
9.4	原点での Laplacian の差分近似	58
9.5	陽解法	59
9.5.1	差分方程式	59
9.5.2	陽解法プログラム例	59
9.5.3	陽解法の安定性	63
9.6	「半陰」スキーム	64
9.6.1	差分方程式	64
9.6.2	「周期3重対角行列」係数の方程式	66
9.6.3	「半陰」スキームのプログラム例	67
9.6.4	「半陰」スキームの安定性	71
9.7	ADI スキーム	71
9.7.1	2005年春の時点での見解	71
9.7.2	差分方程式	72
9.7.3	ADI スキームのプログラム例	74
9.8	いわゆる $\theta$ 法	79
9.8.1	最初にお断り	79
9.8.2	差分方程式	80
9.8.3	プログラム例	83
9.9	$\theta$ 法の安定性の解析	88
9.9.1	$\theta$ 法の差分方程式	88
9.9.2	$\ \cdot\ _\infty$ に関する $\theta$ 法の安定性解析	88

<b>第 10 章 円盤領域における Laplacian の Shortley-Weller 近似</b>	91
10.1 1 次元楕円型境界値問題に対する Shortley-Weller 近似 . . . . .	91
10.1.1 自力で考えたメモ . . . . .	92
10.2 2 次元 Laplacian の Shortley-Weller 近似 . . . . .	92
10.3 発展問題の陽解法やってみました . . . . .	93
<b>第 11 章 円柱領域における差分法</b>	95
11.1 やりかけですが… . . . . .	95
<b>第 12 章 球領域における差分法</b>	96
<b>付 錄 A 「周期三重対角行列」</b>	97
A.1 ルーツ . . . . .	97
A.2 pptrilu.h . . . . .	97
A.3 pptrilu.c . . . . .	97
A.4 testpptrilu.c . . . . .	99
<b>付 錄 B 楕円領域での Laplacian</b>	101
B.1 はじめに . . . . .	101
B.2 極座標でウォーミングアップ . . . . .	101
B.3 極座標もどき . . . . .	102
<b>付 錄 C Fourier の方法に現れる固有値問題</b>	105
C.1 一般論 . . . . .	105
C.2 熱方程式 . . . . .	105
C.2.1 問題の設定 . . . . .	105
C.2.2 固有値問題の導出 . . . . .	105
C.2.3 復習: 空間 1 次元の場合 . . . . .	107
C.2.4 2 次元長方形領域 . . . . .	108
C.2.5 2 次元円板領域 . . . . .	110
C.2.6 2 次元円環領域 . . . . .	113
C.2.7 3 次元の円柱領域 . . . . .	114
C.2.8 3 次元球領域 . . . . .	114
<b>付 錄 D 解析的なクラスの微分方程式</b>	
— 微分方程式の級数解法 —	115
D.1 はじめに . . . . .	115
D.2 正則な場合の基礎理論 . . . . .	116
D.2.1 問題設定 . . . . .	116
D.2.2 正則点近傍の解 . . . . .	117
D.2.3 参考: 偏微分方程式の場合 — Cauchy Kowalewsky の定理 . . . . .	119
D.3 線形方程式の確定特異点近傍の解 — Frobenius の理論 . . . . .	119
D.4 特殊関数 . . . . .	120
D.5 Legendre の微分方程式 . . . . .	120
D.5.1 一体どこから出て来たのか . . . . .	120
D.5.2 Legendre の多項式 . . . . .	120
D.6 Bessel の方程式と Bessel 関数 . . . . .	120
D.6.1 Bessel の方程式 . . . . .	121

D.7	Gauss の微分方程式、超幾何関数	121
D.8	Fuchs 型方程式	121
<b>付 錄 E</b>	<b>可視化の手法</b>	<b>122</b>
E.1	円盤領域で定義された関数の可視化	122
E.1.1	call_gnuplot.c	122

# 第1章 序

## 1.1 なぜ円盤、円柱、球？

区間における熱方程式については、既に「熱方程式に対する差分法 I — 区間における熱方程式 —」である程度分かってきたと思う。

この文書では、円盤領域、扇形領域、円環領域、円柱領域、球領域などの「丸い」領域をターゲットにしたい。

その理由の一つは、長方形でない領域を1つくらいは調べてみたい（学生に経験させたい）からである。これらの領域に対しては、ある程度の Fourier 解析も適用可能であるし（ただし特殊関数の知識が必要になる — それはそれで学生に「初めての特殊関数との出会い」をさせることが出来て面白い）、極座標を利用することで比較的素朴に差分法が適用できる。

もっとも、この極座標は、誰でも思いつくという意味で「自然」であるが、極度の特異性を持つため扱いが難しい（調べがいがあるとも言える？）。

円盤などでは、極座標変換ではなく、Shortley-Weller 近似を採用する方がよいのではないか？という疑問もあり、その優劣を調べるのは面白い研究テーマになると思う。Shortley-Weller 近似はどのように陰解法プログラムを書けばよいのか、筆者には現時点では見当がつかない。

もう一つ、こちらの方が大事と言えるかも知れないが、応用上多くの状況で、球領域は特殊ではあっても、重要な問題となることがある。

工学的な目的で実際に熱方程式を解くときは、有限要素法や、自動数値格子生成に基づく差分法を採用するのが良いであろうが、数学村に住む人間にとっては、有限要素法はともかく、数値格子生成に基づく差分法はまだ敷居が高いと思う（時間が経てばこの状況は変わるか？）。

## 1.2 過去の卒研から関係するレポートの内容紹介

2025年12月23日現在、円盤領域における熱方程式を極座標変換で変換した方程式を差分法によって解く話が主な内容である。 $r = 0$  のところの処理が自明ではなく、問題の種となる。

これまでに以下の卒業研究がある。

1. 松本 英久, 2次元領域における熱伝導方程式 — 円・円環領域に対する追求… —, 1996年度桂田研卒業研究レポート,

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab0/report/pdf/1996-matsumoto.pdf> (1997年3月).

手書きだったので電子化が遅っていたが、このたび(2004年10月) PDF 化に成功して WWW ページにおいた。この年度の卒研は ADI 法による数値シミュレーションがテーマで、このレポートでも ADI 法により円盤内の熱方程式を解いている。

Bessel 関数について、しっかりと勉強して、詳しく書いてある。一時期、卒研で Bessel 関数が必要な学生達の間で、この松本君のレポートが「ベストセラー」になった。

2. 養田 孝, 2次元領域における波動方程式の研究, 1997年度桂田研卒業研究レポート,

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab0/report/1997-youda.pdf> (1998年3月).

円盤上で波動方程式を解くこと（太鼓のシミュレーション？）にチャレンジした。実はうまく解けなかつたのだが、今から考えると、安定性の問題に打ち当たった可能性が高い。誰かの再チャレンジを待っている問題であると思う。

3. 遠藤 洋一, 高木 章裕, 内藤 達也, 円盤領域における熱方程式の研究, 1998 年度桂田研卒業研究レポート,  
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab/report/1998-endou-takagi-naitou.pdf> (1999 年 3 月).  
 陽解法の安定性について興味深い結果が得られた。 $\tau \leq \frac{h_r^2 h_\theta^2}{2(1 + h_r^2)}$  であれば安定である、という予想が提出された。これは非常に厳しい条件である。また角度に関する導関数の差分近似のみ陰的にあつかう「半陰」解法でその条件が緩和されることも実験的に示した。
4. 岡田 俊宣, 热方程式に対する差分法, 2004 年度桂田研卒業研究レポート,  
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab/report/2004-okada.pdf> (2005 年 2 月).  
 円盤や円柱上で熱方程式を解く際に現れる係数行列の固有値を、MATLAB を用いて解析した。
5. 吉原 健治, 3 次元円柱領域における熱方程式・Laplace 方程式の厳密解について, 2004 年度桂田研卒業研究レポート,  
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab/report/2004-yoshiwara.pdf> (2005 年 2 月).  
 陽解法では、安定性の条件が非常に厳しくなる（らしい）。少なくとも  $r$  方向については陰解法にしないと、実用的なアルゴリズムにはならない。その場合に現れる方程式は 3 項方程式ではなく、

$$A_i := \left(1 + \frac{2\lambda}{r_i}\right) I - \frac{\lambda_\theta}{r_i^2} J, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のような係数行列を持つ連立 1 次方程式である。この形の行列を LU 分解するプログラム `ptrilu.c` は上の卒業研究でも使われているが、

『公開プログラムのページ』

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/>

にある。

### 1.3 今後誰かに挑戦させたいこと

**円柱領域における熱方程式の厳密解の公式の導出** 同次 Dirichlet 境界条件の場合は、「てらかん」寺沢 [31] などにも公式が載っているが、それ以外は？ということで学生に挑戦させたのだが、非同次 Dirichlet 境界条件の場合は、Laplace 方程式を解くことに帰着され、それは解決した（吉原 [34]）。ところが Neumann 境界条件の場合は書いてくれなかった…でも考えてみれば、円盤だって Neumann 境界値問題やってくれていないのだね。

**円盤領域で Neumann 境界条件 厳密解の導出。**

**Shortley-Weller の差分近似** 山本哲朗先生は Poisson 方程式に対して色々やっているが、発展問題はどうか？そもそもどうやってプログラムを書くのか。

円柱領域における熱方程式の差分法によるシミュレーション ADI 法で問題なく計算できると思っていたが、間違いであると分かった。未だ不完全。

球領域における熱方程式 かの Fourier は地球の冷却問題から地球の年齢を推定しようと考えた。球領域における熱方程式は由緒正しい問題と言えるだろう。ただ一般的な条件下で真面目に解くのは多分難しい(その前に球における Laplace 方程式を誰かにやらせよう)。最初は球対称な解<sup>1</sup>を考えることにすれば、卒研向けの課題として適度な難易度になるであろう(???)。

## 1.4 その他

### 他の文書の紹介

#### 1. 「発展系の数値解析」

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab0/text/heat-fdm-0.pdf>

放送大学の講義科目「応用数学」(藤田宏担当、私も差分法のところをお手伝いしました)のテキストの一部です。1次元区間における熱方程式の初期値境界値問題に対する差分法の入門的解説です。

もともとは藤田先生と共同で担当していた卒研の内容から、適當な部分を抜き出したものです。最初に参考にしたのは、菊地文雄・山本昌宏「微分方程式と計算機演習」山海堂、という本です。

#### 2. 「『発展系の数値解析』に加えること」

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab0/text/heat-fdm-0-add.pdf>

1はそのまま卒研のテキストとして使うには不便なところがあるので、少し補ったものです。LU 分解や安定性を解析するための行列法など。

#### 3. 「熱方程式に対する差分法 I — 区間における熱方程式 —」

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab0/text/heat-fdm-1.pdf>

2次元の区間、つまり長方形領域における熱方程式を扱っています。

#### 4. 「熱方程式に対する差分法 II — 円盤領域、円柱領域、球における熱方程式 —」

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab0/text/heat-fdm-2.pdf>

この文書です。ここはまだ基本的に工事中です。

熱方程式ではないですが、

#### 1. 「Poisson 方程式に対する差分法」

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab0/text/poisson.pdf>

2次元長方形領域における Poisson 方程式の差分解の厳密解への収束証明(これは内容的には F.John の本の読み解いたものです)と、プログラムなど。

#### 2. 「波動方程式に対する差分法」

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab0/text/wave.pdf>

1次元波動方程式の初期値境界値問題に対する差分法の収束証明など。

なお、プログラムの多くは、

「公開プログラムのページ」

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/>

に置いてあります。

---

<sup>1</sup>適當な2変数関数  $U$  を用いて、 $u(x, t) = U(|x|, t) = U(r, t)$  と書ける解のことを球対称な解という。

## 1.5 2024/9 今後の見直し計画

2024年夏、久しぶりに差分法を用いる機会だったので、古いノートにもチェックを入れて、多少の改善はしようと考えている。

- 証明の見直し。行列解析の言葉を使ってもっと分かりやすく書けないか。M 行列とか。
- 行列の対称性の問題。
- 結局、どういう方法を採用するのが良いのか。無条件安定な公式が良いのか、「半陰」公式のようなもので良いのか。条件安定な公式を採用して刻み幅を小さくして解くのか、無条件安定な公式を採用して刻み幅をある程度（どの程度？）大きくして解くのと、どちらが良いか。
- 熱方程式以外の方程式式（移流がある場合とか、反応拡散方程式とか）への適用。
- 可視化の方法について。
- サンプル・プログラムの他のプログラミング言語への翻訳。

# 第2章 準備: Bessel 関数

(ここはあくまでも準備の部分であって、必要になったところをつまみ食いするので構わない。)

文献としては、Watson [21] が定番の「辞書」で入手もしやすい。入門書としては、ボウマン [29] が定評がある。以上の二書は、狙いどころが異なるが、いずれも評判を裏切らない良書である。

一方、個人的には、有名な「テラカン」、寺沢 [32] の第11章も勧めたい。こういう本が書かれて、今でも入手が難しくないというのは素晴らしい(この機会にこの本に触れるのは有意義であると考える)。

私(桂田)や卒研の学生が参考にした本としては、その他に吉田・加藤 [37]、笠原 [5]、小松 [14]、一松 [2] などがある。後の二書は特殊関数全般について書かれた本である。最近出た時弘 [17] もなかなか良さそうな特殊関数の入門書である<sup>1</sup>。

ネット上にある庵原 [3] には、Bessel 関数の歴史についての簡単な覚え書きがある。

自分で作成したメモとしては、現時点では、ある意味では、桂田 [10] の方が充実しているところがある。

## 2.1 はじめに — なぜ Bessel の微分方程式を考える必要があるのか

Bessel の微分方程式

$$(2.1) \quad J'' + \frac{1}{z} J' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J = 0$$

は、2次元の円板領域や円環領域などで、熱方程式や波動方程式を Fourier の方法で解く際に現れる(例えば 4.1 節)。この文書の大きな目的の一つは、それを具体的かつ詳しく説明する、ということである。

余談 2.1.1 筆者が学部学生のとき、ある教官が Bessel 関数を勉強するのはお勧めだ、というので、わざわざ本(ボウマン [29])を買って読み始めたのだが、悲しいかな、何でこんな関数の勉強をするのか、今一つ分からなかった。色々な人がいるだろうが、自分で Bessel 関数の勉強をする必要を感じないうちは、ほっぽっておいても構わないと思う。偏微分方程式の勉強を始めた人は、特別な領域における問題ではあるが、解が具体的に表示できて、それから解の色々な性質が読み取れる貴重なケースを理解するために、Bessel 関数の勉強をするのがよいだろう<sup>2</sup>。とりあえずファーロウ [1]、金子 [4]などを勧めておく。特にファーロウ [1] の第30課「太鼓の膜の振動」は楽しく読めると思う。 ■

<sup>1</sup> 特殊関数は「古い」数学で、今更大部の本を書くことはないと思われるかも知れないが、Bourbaki 後の「主張は明晰で当たり前」な書き方と、コンピューターの使用(多数桁の数値計算、数式処理)を前提にした内容など、新たに工夫を凝らせるところは多いと思われる。そのうち凄い参考資料が登場するのでは?と期待している。

<sup>2</sup> 筆者達に Bessel 関数の勉強を勧めた教官がその時に教えていたのが、偏微分方程式でなかったのが筆者が分かりにくかった原因だろう(きっと口頭では偏微分方程式について言及したはずだと思うが、板書してくれなかつたので、右の耳から左の耳だったのだと思う)。偏微分方程式の入門講義をしてくれた教官が Bessel 関数の紹介をしてくれたのならばすんなり理解できたと思う。

## 2.2 定義と Bessel の微分方程式

以下では、0 以上の整数全体を  $\mathbf{N}_0$  と書く:  $\mathbf{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbf{N} \cup \{0\}$ .

まずは天下りに Bessel 関数の定義を与える。

**定義 2.2.1 (第 1 種の Bessel 関数)** 複素数  $\nu$  に対して

$$(2.2) \quad J_\nu(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

で定められる関数  $J_\nu$  を  $\nu$  次の (第 1 種) **Bessel 関数** (Bessel's function of order  $\nu$ ) あるいは**円柱関数**と呼ぶ。

$J_\nu(z) = (z/2)^\nu \times$  整関数 の形をしている<sup>3</sup>。ゆえに  $J_\nu(z)$  は負軸を除いた領域  $\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$  で正則な関数が得られる。特に  $\nu = n \in \mathbf{N}_0$  ならば  $J_\nu(z) = J_n(z)$  自身が整関数である。

$\nu$  が偶数ならば  $J_\nu$  は偶関数、 $\nu$  が奇数ならば  $J_\nu$  は奇関数となる。

**注意 2.2.2**  $\nu$  が 0 以上の整数  $n \in \mathbf{N}_0$  に等しいとき、 $\Gamma(\nu + k + 1) = (k + n)!$  であるから、

$$J_\nu(z) = J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}.$$

$\nu$  が負の整数  $-m$  (つまり  $m \in \mathbf{N}$ ) に等しいとき、 $k = 0, \dots, m-1$  に対して  $\Gamma(-m+k+1) = \infty$  であるので ( $-m+k+1$  は  $\Gamma$  の極であるので、が正しい?)、項は 0 になり、

$$J_\nu(z) = J_{-m}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-m+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-m+2k} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-m+2k}$$

と読む。 ■

**定義 2.2.3 (第 2 種の Neumann の Bessel 関数)**  $\nu$  を複素数とするとき、 $\nu$  次の **Neumann 関数** (あるいは  $\nu$  階第 2 種の Neumann の Bessel 関数, Neumann's Bessel function of the second kind of order  $\nu$ )  $Y_\nu(z)$  を以下のように定める。

(i)  $\nu \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$  に対しては

$$(2.3a) \quad Y_\nu(z) := \frac{J_\nu(z) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu \pi}.$$

(ii)  $\nu = m \in \mathbf{Z}$  に対しては

$$(2.3b) \quad Y_\nu(z) := \lim_{\mu \rightarrow m} Y_\mu(z).$$

$Y_\nu$  のことを  $N_\nu$  と書くことが多い。また Weber の Bessel 関数と呼ばれることもある。

**余談 2.2.1** 第 2 種 Bessel 関数というのは、本来は、Bessel の微分方程式 (後述) の解のうちで、 $J_\nu$  の定数倍ではないもののことというらしい。従って、 $Y_\nu$  は確かに第 2 種 Bessel 関数であるが、逆

<sup>3</sup>老婆心: 整関数とは  $\mathbf{C}$  全体で正則な関数のことをいう。この場合はベキ級数で定義されているので、収束半径が  $\infty$  であること (任意の  $z \in \mathbf{C}$  に対して収束すること) を確かめればよい。 $(z/2)^2$  についてのベキ級数とみなすと、簡単な ratio test (ダランベールの判定法) が適用できる。

は必ずしも真ならず、ということになる。しかし、多くの本で「第2種 Bessel 関数 =  $Y_\nu$ 」とされている。 ■

**命題 2.2.4 ( $Y_n(z)$  の展開 (多分使わない))**  $n \in \mathbf{Z}$  のとき、

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \log \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\psi(m+1) + \psi(n+m+1)}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1-m)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}.$$

ここで  $\psi$  は次式で定義される関数である:

$$\psi(k+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}.$$

ただし  $\gamma$  は Euler の定数である:

$$(2.4) \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right) \\ = 0.57721 56649 01532 86060 65120 90082 402 \dots$$

(Mathematica には、Euler 定数  $\gamma$  は、EulerGamma という名前で用意されているので、例えば 50 衡の近似値が欲しければ、N[EulerGamma, 50] とすれば良い。)

**余談 2.2.2** 次のように書いてある本も多い。

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} \left( \log \frac{z}{2} + \gamma \right) J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\phi(m) + \phi(n+m)}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1-m)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}.$$

ここで  $\phi$  は次式で定義される関数である:  $\phi(m) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$ . ■

**例 2.2.5**

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \log \frac{x}{2} + \frac{2\gamma}{\pi} + \frac{(1-\gamma)}{2\pi} x^2 + \frac{2\gamma-3}{64\pi} x^4 + \frac{11-6\gamma}{6912\pi} x^6 + \frac{12\gamma-25}{884736} x^8 + \frac{137-60\gamma}{442368000} x^{10} + \cdots$$

**注意 2.2.6 (名前の混沌)** 日本では権威のある (?) 寺沢 [32] では、この  $Y_\nu$  のことを Neumann 関数と呼んでいる。ところで、ボウマン [29] では、この  $Y_\nu$  のことを “Weber の Bessel 関数” と呼んでいて、以下に紹介する別の関数のことを「 $\nu$  階第2種の Neumann の Bessel 関数」と呼んでいるようである (大混乱 !! )。

実際、ボウマンは

$$(2.5) \quad Y_0(x) := J_0(x) \int \frac{dx}{x J_0(x)^2} = J_0(x) \int \left( \frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \frac{23x^5}{576} + \frac{677x^7}{73728} + \frac{7313x^9}{3686400} + \dots \right) dx$$

$$(2.6) \quad = J_0(x) \left( \log x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \frac{677x^8}{589824} + \frac{7313x^{10}}{36864000} + \dots \right)$$

$$(2.7) \quad = J_0(x) \log x + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13824} - \frac{25x^8}{1769472} + \frac{137x^{10}}{884736000} + \dots$$

で定義された関数  $Y_0(x)$  ( $Y$  が立体 (roman) であることに注意) を、「0 階第 2 種の Neumann の Bessel 関数 (Neumann's Bessel function of the second kind of zero order)」と呼び、

$$Y_0(x) := \frac{2}{\pi} \{ Y_0(x) - (\log 2 - \gamma) J_0(x) \}$$

を Weber の Bessel 関数  $Y_0(x)$  ( $Y$  が italic であることに注意) と呼んでいる (これは Watson の §3.54 に書いてあるそうだ)。

Mathematica の `BesselY[n,x]` は、 $Y_n$  (ボウマンの言う Weber の Bessel 関数) である。このことは Wolfram の MathWorld に明記されているし、実際、

```
romany[x_] := Simplify[BesselJ[0,x] (Log[x]
    + Integrate[1/(t BesselJ[0,t]^2) - 1/t, {t, 0, x}])]
italicy[x_] := 2/Pi*(romany[x] - (Log[2] - EulerGamma) BesselJ[0,x])
```

とすると `italicy[x]` は `BesselY[0,x]` となることが確かめられる (このような面倒なことを明解に確かめられるのは Mathematica さまざま 様様である)。

なお、(2.5), (2.6), (2.7) を確かめるには

```
Series[1/(x BesselJ[0,x]^2), {x, 0, 10}]
Integrate[Series[1/(x BesselJ[0,x]^2), {x, 0, 10}], x]
(% - Log[x]) BesselJ[0,x]
```

とすればよい。

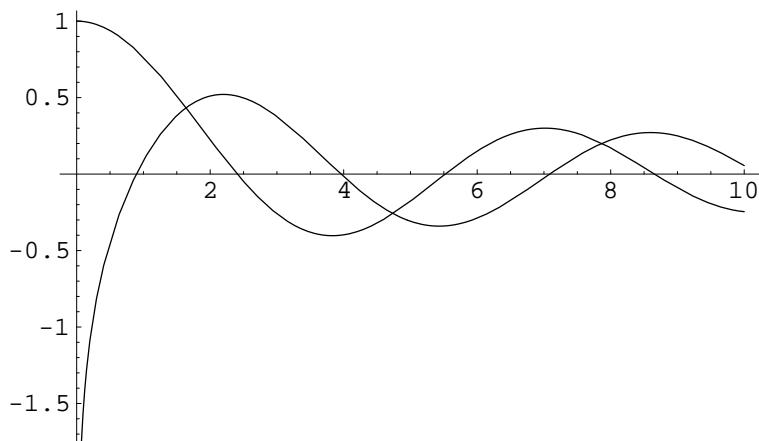


図 2.1:  $J_0$  と  $Y_0$  のグラフ (`Plot[{BesselJ[0,x], BesselY[0,x]}, {x, 0, 10}]`)

また、UNIX の数学関数ライブラリに入っている  $y0(x)$ ,  $y1(x)$ ,  $yn(n,x)$  も Weber の Bessel 関数  $Y_n$  であるようだ。

ついでに Wolfram MathWorld によると、

A Bessel function of the second kind  $Y_n(x)$  (e.g, Gradshteyn and Ryzhik 2000, p. 703, eqn. 6.649.1), sometimes also denoted  $N_n(x)$  (e.g, Gradshteyn and Ryzhik 2000, p. 657, eqn. 6.518), is a solution to the Bessel differential equation which is singular at the origin. Bessel functions of the second kind are also called Neumann functions or Weber functions.

とある。

私なりの結論は、名前だけで議論するのは危険だ、式で記号を定義・約束してから議論を始めるべきだ、というものである。 ■

**補題 2.2.7 (Neumann 関数の性質)**  $t \neq 0$  に対して

$$Y_m(t) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(t) - (-1)^m \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(t) \right) \Big|_{\nu=m},$$

$$Y'_m(t) = \lim_{\nu \rightarrow m} Y'_\nu(t), \quad Y''_m(t) = \lim_{\nu \rightarrow m} Y''_\nu(t).$$

$\nu$  を与えられた複素数として、 $x = x(t)$  に関する微分方程式

$$x''(t) + \frac{1}{t} x'(t) + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) x(t) = 0$$

を  $\nu$  次の Bessel の微分方程式という。

微分方程式だけを考える場合は、 $\operatorname{Re} \nu \geq 0$  として一般性を失わない ( $\operatorname{Re} \nu < 0$  のときは、 $-\nu$  を  $\nu$  と置き直せばよい)。しかし  $\operatorname{Re} \nu < 0$  に対しても  $J_\nu(z)$  を考えたいので、それはしない。

Bessel の微分方程式は、 $t = 0$  を確定特異点を持つ<sup>4</sup>。

**定理 2.2.8 (Bessel の微分方程式の一般解)**  $\nu \in \mathbf{C}$  とする。

(1)  $\nu \notin \mathbf{Z}$  のとき

$$x(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 J_{-\nu}(t) \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

は  $\nu$  次 Bessel の微分方程式の一般解である。

(2)  $\nu$  が何であっても

$$x(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 Y_\nu(t) \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

は  $\nu$  次 Bessel の微分方程式の一般解である。

**証明** ロンスキアン  $W(f, g) := \det \begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix}$  を調べると、

$$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = -\frac{2 \sin \nu \pi}{z}, \quad W(J_\nu(z), Y_\nu(z)) = \frac{2}{\pi z}$$

となるので、 $\nu \notin \mathbf{N}_0$  であれば  $W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) \neq 0$ 、また  $\nu$  が何であっても  $W(J_\nu(z), Y_\nu(z)) \neq 0$ 。  
■

$m \in \mathbf{Z}$  のとき  $J_{-m}(t) = (-1)^m J_m(t)$  が成り立つので、 $\nu = m \in \mathbf{Z}$  の場合は  $x(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 J_{-\nu}(t)$  は一般解とならないことが明らかである (もちろんロンスキアンからも分かる)。なお、非

<sup>4</sup> 微分方程式  $x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = 0$  が  $t = 0$  を確定特異点に持つとは、 $t^k a_k(t)$  ( $1 \leq k \leq n$ ) が  $t = 0$  の近傍で正則なことをいう。内輪向けのノートだが、「常微分方程式ノート」(桂田 [8]) に、確定特異点の話を書いておいた。

整数の  $\nu$  に対しては、 $J_\nu, J_{-\nu}$  の間にこのような比例関係はない。例えば

$$(2.8) \quad J_{1/2}(x) = \left( \frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \left( \frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \cos x,$$

$$(2.9) \quad J_{3/2}(x) = \left( \frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right), \quad J_{-3/2}(x) = \left( \frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \left( -\sin x - \frac{\cos x}{x} \right)$$

であることに注目しよう ( $J_\nu$  を定義する級数を整理すれば容易に求まる)。

**系 2.2.9**  $\nu \in \mathbf{C}, k \neq 0$  とする。微分方程式

$$(2.10) \quad x''(t) + \frac{1}{t} x'(t) + \left( k^2 - \frac{\nu^2}{t^2} \right) x(t) = 0$$

について、以下の (1), (2) が成り立つ。

(1)  $\nu \notin \mathbf{Z}$  のとき

$$x(t) = c_1 J_\nu(kt) + c_2 J_{-\nu}(kt) \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

は微分方程式 (2.10) の一般解である。

(2)  $\nu$  が何であっても

$$x(t) = c_1 J_\nu(kt) + c_2 Y_\nu(kt) \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

は微分方程式 (2.10) の一般解である。

## 2.2.1 寝た子を起こす話

### 問題のありか

前項であげた定義式

$$(2.11) \quad J_\nu(z) = \left( \frac{z}{2} \right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \left( \frac{z}{2} \right)^{2m}$$

について、説明を補足する。一言で言うと、 $\nu$  が整数で無い場合、 $(z/2)^\nu$  は 0 で特異性を持つことに注意する必要がある、ということだが、細かい話ではあるし、 $\nu \in \mathbf{Z}$  の場合しか考えないときは一切必要がないので (せいぜい 2.2.1 を見れば十分)、急いでいるときは飛ばしても構わない。

### 簡単な $\nu \in \mathbf{Z}$ の場合を片付けておく

$\nu = n \in \mathbf{Z}$  のとき、後で証明するように

$$m \in \mathbf{N} \implies J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z)$$

が成り立つので、 $n \geq 0$  を考えてから裏返すということをやればよい。 $J_n(z)$  自身が整関数になり、 $m := |n|$  とおくとき

$$J_n(z) \sim \frac{z^m}{2^m m!} \quad (z \rightarrow 0)$$

が成り立つ。特に

$$J_n(0) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0). \end{cases}$$

## $\nu \notin \mathbf{Z}$ の場合 (問題点をウォッチ)

式 (2.11) の  $\sum$  の部分

$$e_\nu(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

は容易に整関数であることが証明でき (例えば d'Alembert の収束判定法)、

$$e_\nu(0) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \neq 0$$

ということも分かる。従って  $J_\nu$  は  $z \mapsto (z/2)^\nu$  と同じ特異性を持つことが分かる。

以下、この文書では  $\nu \in \mathbf{R}$  の場合のみを考えることにする。この文書の目的には明らかにそれで十分であるので、 $\nu$  が虚数である場合の議論をさぼっても構わないであろう。

## $\nu \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ の場合 — 方針

高等学校で、 $a > 0$  に対して、指数関数  $\mathbf{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbf{R}$  を学んだ。従って、 $z > 0, \nu \in \mathbf{R}$  に対しては、幕乗  $z^\nu$  は定義済みであると言える。正数でない  $z$  に対して  $z^\nu$  をいかに定めるかが問題であるが、大ざっぱに言って、

$$z^\nu = \exp(\nu \log z)$$

という等式を基礎にする。この右辺に現れる  $\log z$  が曲者である。

## 寄り道?: 多価関数としての $z^\nu$

複素関数論で、多価関数としての  $\log z$  について学んだはずである。与えられた  $z$  に対して  $\exp w = z$  を満たす  $w$  を  $z$  の対数と呼んで、 $\log z$  と表すのであるが、 $w$  が一意的には定まらないのが注意を要するところである。

**補題 2.2.10**  $z = re^{i\theta}$  ( $r > 0, \theta \in \mathbf{R}$ ) とするとき、任意の  $w \in \mathbf{C}$  に対して、次が成り立つ。

$$\exp w = z \iff \exists k \in \mathbf{Z} \text{ s.t. } w = \log|z| + i(\theta + 2k\pi).$$

ただし、右辺に現れる  $\log|z|$  は  $e^y = |z|$  を満たす  $y \in \mathbf{R}$  (これは一意的に存在する) を意味する。

**証明** (流石に簡単なので省略する。) ■

要するに、ここで定義した「関数」  $\log z$  は無限多価である (通常の意味の写像にはならない)。そのため、

$$z^\nu = \exp(\nu \log z) = \exp\{\nu [\log|z| + i(\theta + 2k\pi)]\} = |z|^\nu e^{i\nu\theta} \exp(2i\nu k\pi)$$

(| $z$ | $^\nu$  は高校数学の意味での巾乗)

も多価関数になりうる (最後の因子に注意)<sup>5</sup>。例えば  $\nu = \frac{1}{\ell}$  ( $\ell \in \mathbf{Z}$ ) の場合、 $z^\nu := \exp(\nu \log z)$  は  $|\ell|$  値関数である。

しかし、 $|z^\nu| = |z|^\nu$  は成立する。ここで  $\nu \in \mathbf{R}$  であることが効いていることに注意しよう。

<sup>5</sup>ただし、 $\nu \in \mathbf{Z}$  のときは、 $\exp(2i\nu k\pi) = 1$  であるから、値が一つに定まる。

## 本道?: 主値

$z = re^{i\theta}$  ( $r > 0, \theta \in (-\pi, \pi)$ ) に対して、

$$\text{Log } z := \log r + i\theta$$

と定め、これを  $z$  の対数の主値と呼ぶ。

複素平面から負軸を除いた領域  $\Omega := \mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$ において、写像  $\text{Log}: \Omega \ni z \mapsto \text{Log } z \in \mathbf{C}$  が定まるが、これは正則関数となる。これは高校数学の意味での対数関数の拡張になっていて、

$$\frac{d}{dz} \text{Log } z = \frac{1}{z}, \quad \exp(\text{Log } z) = z$$

を満たす。

我々は  $\nu \in \mathbf{R}, z \in \Omega = \mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$  に対して、

$$z^\nu := \exp(\nu \text{Log } z)$$

として  $z^\nu$  を定める。

$$\forall z \in \Omega \quad (z^\nu)' = \nu z^{\nu-1}, \quad |z^\nu| = |z|^\nu \quad (|z|^\nu \text{ は高校数学の巾乗})$$

が成り立つ。特に

$$\lim_{\substack{z \in \Omega \\ z \rightarrow 0}} z^\nu = \begin{cases} 0 & (\nu > 0) \\ \infty & (\nu < 0). \end{cases}$$

これから  $\nu > 0$  の場合、 $0^\nu = 0$  と約束すると、 $J_\nu(z)$  は  $\Omega \cup \{0\}$  上の連続関数に拡張できることが分かる。

余談 2.2.3 (もしも  $\nu \in \mathbf{R}$  でなければ) やはり対数の主値  $\text{Log}$  を用いて

$$z^\nu := \exp(\nu \text{Log } z)$$

により  $z^\nu$  を定める。こうしても

$$\frac{d}{dz} z^\nu = \nu z^{\nu-1}$$

は成り立つ。しかし  $|z^\nu|$  はあまり簡単ではない。

$\nu = \alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ) とするとき、 $z = re^{i\theta}$  ( $r > 0, \theta \in (-\pi, \pi)$ ) に対して、

$$\begin{aligned} z^\nu &= \exp(\nu \text{Log } z) = \exp[(\alpha + i\beta)(\log r + i\theta)] \\ &= \exp[(\alpha \log r - \beta \cdot \theta) + i(\beta \log r + \alpha \cdot \theta)] \end{aligned}$$

であるから

$$|z^\nu| = \exp(\alpha \log r - \beta \cdot \theta) = r^\alpha e^{-\beta \cdot \theta} \leq r^\alpha e^{|\beta| \pi}.$$

特に  $\alpha = \text{Re } \nu > 0$  である場合は

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \Omega}} z^\nu = 0.$$

主値でない場合は  $|z^\nu|$  自体が無限多価であり、 $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \Omega}} z^\nu = 0$  も成立しないが、主値を選ぶということ

で何とかなりそうである。 ■

## 2.3 $J_n(z)$ の基本的な性質

$n \in \mathbf{N}_0$  に対する Bessel 関数の性質を列挙する。

1. 任意次数の Bessel 関数の零点はすべて実数であり、0 を中心として対称に分布する。
2. 任意次数の Bessel 関数の零点は単純である。
3.  $\frac{d}{dz} (z^{-n} J_n(z)) = -z^{-n} J_{n+1}(z), \quad \frac{d}{dz} (z^{n+1} J_{n+1}(z)) = z^{n+1} J_n(z).$
4.  $J_n$  と  $J_{n+1}$  の零点は重なることなく、交互に並んでいる。
5. 任意の  $m \in \mathbf{N}$  に対して、 $J_n$  と  $J_{n+m}$  は共通零点を持たない。
6.  $n$  次 Bessel 関数  $J_n(t)$  の正の零点は無限個存在するが、小さい方から順に並べたものを  $\{\mu_{nm}\}_{m \in \mathbf{N}}$  とすると、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{nm} = \infty,$$

もっと詳しく

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\mu_{n,m+1} - \mu_{n,m}) = \pi$$

が成り立つ (つまり、 $J_n(t)$  は  $t$  が大きいところでは、零点の間隔がほぼ  $\pi$  に等しい、ということである)。さらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_{n+1,1} - \mu_{n,1}) = 1.$$

7.  $0 < x \ll 1$  に対して (というよりも  $x \rightarrow 0$  のときと言うべき?)

$$J_n(x) \sim \frac{1}{2^n n!} x^n \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$Y_n(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \log x & (n = 0) \\ -\frac{2^n (n-1)!}{\pi} x^{-n} & (n \in \mathbf{N}). \end{cases}$$

$x \gg n$  のとき (というよりも  $x \rightarrow \infty$  のときと言うべき?)

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - (2n+1)\frac{\pi}{4} \right),$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - (2n+1)\frac{\pi}{4} \right).$$

8. (整数次 Bessel 関数の母関数)

$$\exp \left[ \frac{x}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n.$$

### 2.3.1 零点に関する性質とその証明

$\nu \in \mathbf{R}$  とするとき、 $J_\nu$  の零点について調べる。  
ものすごく大ざっぱには、 $J_\nu$  は Bessel の微分方程式

$$w''(z) + \frac{1}{z} w'(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) w(z) = 0$$

の解であり、この方程式は  $|z|$  が大きいとき、単振動の方程式

$$w''(z) + w(z) = 0 \quad (\text{この解は三角関数 } w(z) = A \cos z + B \sin z)$$

に「近い」から、Bessel 関数  $J_\nu(z)$  は  $z$  が大きいとき、挙動が三角関数のそれに似ていると想像できる。

まず、 $J_\nu$  の零点は、0 であるか、

$$e_\nu(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \quad (\text{この記号を以下しばらくの間だけ用いる})$$

の零点であるかのどちらかである。

**命題 2.3.1**  $\nu \in \mathbf{R}$  とするとき、 $J_\nu$  は (0 以外の) 純虚数の零点は持たない。

**証明** これには  $e_\nu$  が (0 以外の) 純虚数の零点は持たないことを確かめればよい。

$z = it$  ( $t \in \mathbf{R}, t \neq 0$ ) とするとき、

$$e_\nu(it) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \frac{(-1)^m t^{2m}}{2^{2m}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{t^2}{4}\right)^m.$$

これは 0 以上の項の和であり、十分大きい  $m$  に対して、第  $m$  項は正であるから、 $e_\nu(it) > 0$ . ゆえに  $e_\nu$  は純虚数の零点は持たない。 ■

**補題 2.3.2**  $\nu \in \mathbf{R}$  とするとき、

$$z \in \mathbf{C} \setminus (-\infty, 0] \implies \overline{J_\nu(z)} = J_\nu(\bar{z}).$$

**証明**  $e_\nu(z)$  を定義する級数の係数は実数であるから、

$$\overline{e_\nu(z)} = e_\nu(\bar{z}) \quad (z \in \mathbf{C})$$

が成り立つ。

一方、

$$\nu \in \mathbf{R}, \quad z \in \mathbf{C} \setminus (-\infty, 0] \implies \overline{z^\nu} = (\bar{z})^\nu$$

が成り立つ<sup>6</sup>。ゆえに

$$\overline{J_\nu(z)} = \overline{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu e_\nu(z)} = \overline{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu} \overline{e_\nu(z)} = \left(\frac{\bar{z}}{2}\right)^\nu e_\nu(\bar{z}) = J_\nu(\bar{z}). \blacksquare$$

<sup>6</sup> 実際、 $z = re^{i\theta}$  ( $r > 0, \theta \in (-\pi, \pi)$ ) とするとき、

$$z^\nu = \exp(\nu \operatorname{Log} z) = \exp[\nu(\log r + i \cdot \theta)] = r^\nu \exp(i\nu\theta)$$

であり、一方  $\bar{z} = re^{-i\theta}$  であるから

$$(\bar{z})^\nu = \exp(\nu \operatorname{Log} \bar{z}) = \exp[\nu(\log r - i\theta)] = r^\nu \exp(-i\nu\theta) = \overline{r^\nu \exp(i\nu\theta)} = \overline{z^\nu}.$$

**命題 2.3.3**  $\nu \in \mathbf{R}$  とするとき、 $J_\nu$  は虚数の零点を持たない。

**証明**  $J_\nu$  が虚数の零点  $\mu = \alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbf{R}, \beta \neq 0$ ) を持つと仮定する。このとき補題によって、 $\bar{\mu} = \alpha - i\beta$  も零点になる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 x |J_\nu(\mu x)|^2 dx &= \int_0^1 x J_\nu(\mu x) \overline{J_\nu(\mu x)} dx = \int_0^1 x J_\nu(\mu x) J_\nu(\bar{\mu} x) dx \\ &= \frac{1}{\mu^2 - \bar{\mu}^2} [\bar{\mu} J_\nu(\mu) J'_\nu(\bar{\mu}) - \mu J_\nu(\bar{\mu}) J'_\nu(\mu)] = 0. \end{aligned}$$

これから  $J_\nu(\mu x) \equiv 0$  となるが、明らかな矛盾である。— 以上の議論は  $\nu$  が小さいときは成立しない。その場合の証明は準備中。 ■

**命題 2.3.4**  $\nu \in \mathbf{R}$  とする。 $J_\nu$  の正の零点全体は小さい方から順に番号づけることができる。すなわち、狭義単調増加数列

$$0 < \mu_{\nu,1} < \mu_{\nu,2} < \dots$$

が存在して、 $\{\mu_{\nu,m}\} \cup \{-\mu_{\nu,m}\} \cup \{0\}$  が  $J_\nu$  の零点全体となる。

**証明** 上の命題から、 $J_\nu$  の零点は実軸上にしか存在しない。 $J_\nu$  の零点は 0 または  $e_\nu$  の零点であり、 $e_\nu$  は偶関数または奇関数であるから、 $J_\nu$  の零点は 0 に関して左右対称の位置にある。また  $e_\nu$  は恒等的に 0 ではない整関数であるから、零点は集積せず(「一致の定理」による)、任意の有界な区間  $I \subset \mathbf{R}$  には有限個の零点しか存在しないことが分かる。 ■

この時点ではまだ零点が無限個存在することを証明していない。

次の補題は、ボウマン [29] を参考にした。

**補題 2.3.5**  $\forall \nu \in \mathbf{R}, \forall k > 1, \exists A > 0, \forall a \geq A, \exists x \in [a, a + \pi]$  s.t.  $J_\nu(kx) = 0$ .

**証明**  $u(x) := \sqrt{kx} J_\nu(kx)$  とおくと、 $J_\nu(t) = t^{-1/2} u(t/k)$  となるので、

$$\begin{aligned} J'_\nu(t) &= -\frac{1}{2} t^{-3/2} u\left(\frac{t}{k}\right) + t^{-1/2} u'\left(\frac{t}{k}\right), \\ J''_\nu(t) &= \frac{3}{4} t^{-5/2} u\left(\frac{t}{k}\right) - \frac{1}{k} t^{-3/2} u'\left(\frac{t}{k}\right) + \frac{1}{k^2} t^{-1/2} u''\left(\frac{t}{k}\right). \end{aligned}$$

Bessel の微分方程式に代入して整理すると

$$u''\left(\frac{t}{k}\right) + k^2 \left[1 + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right) t^{-2}\right] u\left(\frac{t}{k}\right) = 0.$$

ゆえに

$$(2.12) \quad u''(x) = -w(x)u(x), \quad w(x) := k^2 - \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right) x^{-2}.$$

$v(x) := \sin(x - a)$  とおくと  $v'' = -v$  が成り立つ。これに  $u$  をかけた方程式から、(2.12) に  $v$  を書いた方程式を辺々引き算すると

$$u(x)v''(x) - u''(x)v(x) = (w(x) - 1)u(x)v(x).$$

左辺が  $[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)]'$  に等しいことに注意して、区間  $[a, a + \pi]$  で積分すると

$$[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)]_a^{a+\pi} = \int_a^{a+\pi} (w(x) - 1)u(x)v(x) dx.$$

左辺については、 $v(a) = v(a + \pi) = 0$ ,  $v'(a) = 1$ ,  $v'(a + \pi) = -1$  であるから

$$[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)]_a^{a+\pi} = -u(a + \pi) - u(a).$$

一方、右辺については、 $a$  を十分大きく取ると  $[a, \infty)$  で  $w(x) - 1 > 0$  であり、また一般に  $(a, a + \pi)$  で  $v > 0$  であるから、 $(a, a + \pi)$  で  $(w(x) - 1)v(x) > 0$ . また  $a > 0$  ならば  $[a, \infty)$  で  $u$  は連続であるので、積分の平均値の定理から、

$$\exists \xi \in [a, a + \pi] \quad \text{s.t.} \quad \int_a^{a+\pi} (w(x) - 1)u(x)v(x) dx = u(\xi) \int_a^{a+\pi} (w(x) - 1)v(x) dx.$$

ゆえに

$$-(u(a + \pi) + u(a)) = u(\xi) \int_a^{a+\pi} (w(x) - 1)v(x) dx.$$

右辺の積分は正であるから、 $u(a)$ ,  $u(a + \pi)$ ,  $u(\xi)$  の 3 つがすべて正になったり、あるいはすべて負になったりすることはあり得ない。ゆえに少なくとも一つが 0 になるか、正のものと負のものが存在する。後者の場合は中間値の定理を用いて、結局  $u$  は  $[a, a + \pi]$  のどこかで 0 になることが分かる。■

**命題 2.3.6**  $\nu \in \mathbf{R}$  とするとき、 $J_\nu$  の正の零点は無限個存在し、小さい方から順に並べたものを  $\{\mu_{\nu,m}; m \in \mathbf{N}\}$  とするとき、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{\nu,m} = \infty.$$

**証明** 零点が無限個存在することは補題から分かる。集積点を持たないので、 $\infty$  に発散する。■

**命題 2.3.7** ( $J_\nu$  の 0 でない零点は単純である)  $\nu \in \mathbf{R}$  とするとき、 $\mu \neq 0$  が  $J_\nu$  の零点ならば  $J'_\nu(\mu) \neq 0$ .

**証明**  $J_\nu(\mu) = 0$  であるから、 $\mu \in \mathbf{R}$  であることに注意する。 $J'_\nu(\mu) = 0$  とすると、 $t = \mu$  を初期時刻とする常微分方程式の初期値問題

$$u''(t) + \frac{1}{t}u'(t) + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)u(t) = 0, \quad u(\mu) = u'(\mu) = 0$$

の解は、解の一意性により  $u(t) \equiv 0$  でなければならない。ゆえに  $J_\nu(t) \equiv 0$ . これは矛盾であるから  $J'_\nu(\mu) \neq 0$ . ■

**証明**  $w = J_\nu(z)$  は Bessel の微分方程式

$$w'' + \frac{1}{z}w' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)w = 0$$

の解である。 $\mu \neq 0$  が  $J_\nu(\mu) = J'_\nu(\mu) = 0$  を満たすならば、微分方程式に代入して、

$$J''_\nu(\mu) = 0$$

が成り立つ。微分方程式を  $z$  で微分してから  $z = \mu$  を代入するという操作を続けていくと

$$J_\nu^{(m)}(\mu) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

が得られる。これから  $J_\nu(z) \equiv 0$  が得られ、矛盾となる。■

**補題 2.3.8**

$$\frac{d}{dz} (z^{-\nu} J_\nu(z)) = -z^\nu J_{\nu+1}(z), \quad \frac{d}{dz} (z^{\nu+1} J_{\nu+1}(z)) = z^{\nu+1} J_\nu(z).$$

**証明** 単なる計算である。 ■

**命題 2.3.9**  $J_\nu$  の零点と  $J_{\nu+1}$  の零点は互い違いに並んでいる。

**証明**  $\alpha$  と  $\beta$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) が  $J_\nu$  の零点であるとするとき、これらは  $f(t) := t^{-\nu} J_\nu(t)$  の零点でもある。Rolle の定理から、

$$\exists \gamma \in (\alpha, \beta) \text{ s.t. } f'(\gamma) = 0.$$

$f'(t) = -t^{-\nu} J_{\nu+1}(t)$  であるから、 $-\gamma^{-\nu} J_{\nu+1}(\gamma) = 0$ . ゆえに  $J_{\nu+1}(\gamma) = 0$ . ゆえに「 $J_\nu$  の二つの正の零点の間には  $J_{\nu+1}$  の零点が存在する」。

同様にして「 $a$  と  $b$  ( $0 \leq a < b$ ) が  $J_{\nu+1}$  の零点であるとするとき、 $J_\nu(c) = 0$  を満たす  $c \in (a, b)$  が存在する」。 ■

**命題 2.3.10 (零点の分布)**  $\nu \in \mathbf{R}$  とするとき、 $J_\nu$  の正の零点を小さい方から順に並べたものを  $\{\mu_{\nu,m}; m \in \mathbf{N}\}$  とするとき、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\mu_{\nu,m+1} - \mu_{\nu,m}) = \pi.$$

( $J_\nu(t)$  は  $t$  が大きいところでは、零点の間隔はほぼ  $\pi$  に等しい — 三角関数に近いと言ったことの裏付け。) さらに

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\mu_{\nu+1,1} - \mu_{\nu,1}) = 1.$$

**証明** 前半は例えば大谷 [35] に書いてある (定理 6.5)。 ■

**命題 2.3.11** 任意の  $\nu \in \mathbf{R}$  と任意の  $m \in \mathbf{N}$  に対して、 $J_\nu$  と  $J_{\nu+m}$  は共通の零点を持たない。

**証明** (これは金子 [4] に書いてあった命題。準備中…)

$$J_{\nu+m}(z) = R_{\nu,m}(z)J_{\nu+1}(z) + S_{\nu,m}(z)J_\nu(z)$$

と書けることと、Siegel の定理「 $s$  が 0 でない代数的数のとき、 $J_\nu(s)$  は超越数である。」による。 ■

## 2.4 Fourier-Bessel 展開

$u(x) := J_\nu(\alpha x)$ ,  $v(x) := J_\nu(\beta x)$  とおくと、

$$(2.13) \quad xu'' + u' + \left( \alpha^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) xu = 0,$$

$$(2.14) \quad xv'' + v' + \left( \beta^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) xv = 0$$

であるから、第 1 式に  $v$  をかけたものから、第 2 式に  $u$  をかけたものを引くと

$$x(u''v - v''u) + (u'v - v'u) + (\alpha^2 - \beta^2)xuv = 0.$$

これから

$$\frac{d}{dx} [x(u'v - uv')] = (\beta^2 - \alpha^2)xuv$$

が得られる。

$\nu \in \mathbf{N}_0$  として<sup>7</sup>両辺を  $[0, 1]$  で積分すると

$$(2.15) \quad (\beta^2 - \alpha^2) \int_0^1 x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) dx = \alpha J'_\nu(\alpha) J_\nu(\beta) - \beta J'_\nu(\beta) J_\nu(\alpha).$$

これを Lommel の積分という。

式 (2.13) の両辺に  $xu'(x)$  をかけて

$$2x^2 u'' u' + 2x (u')^2 + 2(\alpha^2 x^2 - \nu^2) uu' = 0.$$

これから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ x^2 (u')^2 + (\alpha^2 x^2 - \nu^2) u^2 \right] &= 2x (u')^2 + x^2 \cdot 2u'' u' + 2\alpha^2 x u^2 + 2(\alpha^2 x^2 - \nu^2) uu' \\ &= 2\alpha^2 x u^2. \end{aligned}$$

$u = J_\nu(\alpha x)$ ,  $u' = \alpha J'_\nu(\alpha x)$  を代入すると

$$\frac{d}{dx} \left[ \alpha^2 x^2 J'_\nu(\alpha x)^2 + (\alpha^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\alpha x)^2 \right] = 2\alpha^2 x J_\nu(\alpha x)^2.$$

この左辺を、Bessel 関数の漸化式から得られる

$$\begin{aligned} J_\nu(t)^2 - J_{\nu-1}(t) J_{\nu+1}(t) &= J_\nu(t)^2 - \left( \frac{\nu}{t} J_\nu(t) + J'_\nu(t) \right) \left( \frac{\nu}{t} J_\nu(t) - J'_\nu(t) \right) \\ &= J_\nu(t)^2 - \left( \frac{\nu^2}{t^2} J_\nu(t)^2 - J'_\nu(t)^2 \right) = J'_\nu(t)^2 + \left( 1 - \frac{\nu^2}{t^2} \right) J_\nu(t)^2 \end{aligned}$$

を用いて変形すると

$$\frac{d}{dx} \left[ x^2 (J_\nu(\alpha x)^2 - J_{\nu-1}(\alpha x) J_{\nu+1}(\alpha x)) \right] = 2x J_\nu(\alpha x)^2.$$

これを  $[0, 1]$  で積分すると

$$2 \int_0^1 x J_\nu(\alpha x)^2 dx = \left[ x^2 (J_\nu(\alpha x)^2 - J_{\nu+1}(\alpha x) J_{\nu-1}(\alpha x)) \right]_0^1 = J_\nu(\alpha)^2 - J_{\nu+1}(\alpha) J_{\nu-1}(\alpha).$$

すなわち

$$(2.16) \quad \int_0^1 x J_\nu(\alpha x)^2 dx = \frac{1}{2} (J_\nu(\alpha)^2 - J_{\nu+1}(\alpha) J_{\nu-1}(\alpha)).$$

$\alpha$  と  $\beta$  を Bessel 関数の零点に選ぶと直交性が得られる。

**命題 2.4.1 (Bessel 関数の直交関係式)**  $\nu \in \mathbf{N}_0$  とするとき、 $J_\nu$  の正の零点を小さい方から順に

$$\mu_{\nu,1} < \mu_{\nu,2} < \dots$$

とおくと、

$$\int_0^1 r J_\nu(\mu_{\nu,n} r) J_\nu(\mu_{\nu,m} r) dr = \frac{J_{\nu+1}(\mu_{\nu,n})^2}{2} \delta_{nm} \quad (n, m \in \mathbf{N})$$

(もしかすると  $\operatorname{Re} \nu > 0$  となる  $\nu \in \mathbf{C}$  に対しても成立するのか？)

<sup>7</sup>もっと緩い条件で良いように書いてある本もあったが、筆者は納得できなかった。 $xuv$  が  $[0, 1]$  で可積分であるだけでなく、 $x \rightarrow 0$  のとき  $x(u'v - uv') \rightarrow 0$  となる必要がある。 $\operatorname{Re} \nu > 0$  などの条件が必要ではないか？この種の議論が省略されている本が多く、少々イライラさせられる。こういうところは Bourbaki 流に明解に書いて欲しいものだ。

**証明** まず (2.15) に  $J_\nu(\alpha) = J_\nu(\beta) = 0$  を代入すると、

$$(\beta^2 - \alpha^2) \int_0^1 x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) dx = 0.$$

ここで  $\alpha \neq \beta$  ならば、割り算により直交関係

$$\int_0^1 x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) dx = 0$$

が得られる。

一方、漸化式

$$\frac{2\nu}{t} J_\nu(t) = J_{\nu-1}(t) + J_{\nu+1}(t)$$

の  $t$  に、 $J_\nu(\alpha) = 0$  を満たす  $\alpha \neq 0$  を代入すると

$$J_{\nu-1}(\alpha) = -J_{\nu+1}(\alpha)$$

が得られるので、(2.16) に代入して

$$\int_0^1 x J_\nu(\alpha x)^2 dx = \frac{1}{2} (0^2 - J_{\nu+1}(\alpha) (-J_{\nu+1}(\alpha))) = \frac{J_{\nu+1}(\alpha)^2}{2}. \blacksquare$$

**定理 2.4.2 (Bessel の展開)**  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbf{C}$  が連続で、 $\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx$  が絶対収束するとき、 $f$  が有界変分であるような任意の閉区間  $I \subset (0, 1)$  の任意の  $x$ , 任意の  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  に対して、

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_n(\lambda_j x)$$

が成り立つ。ただし

$$A_j := \frac{2}{J_{n+1}(\lambda_j)^2} \int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_j x) dx \quad (j \in \mathbf{N})$$

で、 $\lambda_j$  は  $J_n$  の正の零点を小さい順に並べたものである：

$$\{x > 0; J_n(x) = 0\} = \{\lambda_j\}_{j \in \mathbf{N}}, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_j < \lambda_{j+1} < \cdots.$$

次のような展開も可能である。

(1)

$$f(x) = B_0 x^n + \sum_{j=1}^{\infty} B_j J_n(\mu_j x),$$

$$B_0 = (2n+2) \int_0^1 f(x) x^{n+1} dx,$$

$$B_j = \frac{2}{J_n(\mu_j)^2} \int_0^1 x f(x) J_n(\mu_j x) dx \quad (j \in \mathbf{N}).$$

ここで  $\mu_j$  は  $J_{n+1}(x)$  の零点を小さい方から順に並べたものである。

(2) (Dini の展開)  $h > 0$  を任意に固定する。

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_n(\nu_j x).$$

ただし

$$C_j = \frac{2\nu_j^2}{[\nu_j^2 - h(2n-h)] J_n(\nu_j)^2} \int_0^1 x f(x) J_n(\nu_j x) dx.$$

ここで  $\nu_j$  は

$$x J_{n+1}(x) - h J_n(x) = 0$$

の正根を小さい方から順に並べたものとする。

**注意 2.4.3 (不連続関数の展開)**  $f$  が連続でなくて、単に  $\sqrt{x}f(x)$  が  $(0, c)$  上 Lebesgue 可積分とするだけで、結果の等式を

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_n(\lambda_j x)$$

で置き換えたものが成立する。 — 普通の Fourier 級数と同じだ。 ■

**定理 2.4.4 (Fourier-Bessel の展開)** 円盤  $\{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$  の完全系

$$\begin{aligned} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{0j} J_0(\mu_{0j} r) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} J_n(\mu_{nj} r) (A_{nj} \cos n\theta + B_{nj} \sin n\theta) \\ A_{nj} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{nj})^2} \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) J_n(\mu_{nj} r) \cos n\theta d\theta \right) r dr, \\ B_{nj} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{nj})^2} \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) J_n(\mu_{nj} r) \sin n\theta d\theta \right) r dr. \end{aligned}$$

**証明**  $r \in (0, 1)$  を固定して、 $\theta \mapsto f(r, \theta)$  を考えると、Fourier 級数展開

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta),$$

$$a_n(r) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n(r) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin n\theta d\theta$$

が得られる。 $a_n(r), b_n(r)$  は  $(0, 1)$  上の関数だから、Fourier-Bessel 展開ができる。

$$a_n(r) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} J_n(\mu_{nj} r), \quad A_{nj} := \frac{2}{J_{n+1}(\mu_{nj})^2} \int_0^1 r a_n(r) J_n(\mu_{nj} r) dr,$$

$$b_n(r) = \sum_{j=1}^{\infty} B_{nj} J_n(\mu_{nj} r), \quad B_{nj} := \frac{2}{J_{n+1}(\mu_{nj})^2} \int_0^1 r b_n(r) J_n(\mu_{nj} r) dr.$$

以上まとめると定理を得る。 ■

### 系 2.4.5 円盤 $\{(x, y); x^2 + y^2 < R^2\}$ の完全系

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{0j} J_0(\mu_{0j} r) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} J_n(\mu_{nj} r) (A_{nj} \cos n\theta + B_{nj} \sin n\theta)$$

$$A_{nj} = \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}(\mu_{nj} R)^2} \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) J_n(\mu_{nj} r) \cos n\theta d\theta \right) r dr,$$

$$B_{nj} = \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}(\mu_{nj} R)^2} \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) J_n(\mu_{nj} r) \sin n\theta d\theta \right) r dr.$$

## 2.5 Bessel の微分方程式を素朴に解いてみる

(要するに Bessel の微分方程式は未定係数法もどきで解くことができ、自然に Bessel 関数が得られる、という話である。)

Bessel の微分方程式は  $t = 0$  を確定特異点に持つので、Frobenius の理論で扱うことができるが（桂田 [8]）、そういう“一般論を知っていると仮定しての説明”はやめて、素朴に始めてみよう。

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{\lambda+k} \quad (b_0 \neq 0)$$

の形に書けると仮定する<sup>8</sup>。微分方程式に代入して

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1)b_k x^{k+\lambda-2} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)b_k x^{k+\lambda-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right) b_k x^{k+\lambda} = 0.$$

整理すると

$$(\lambda^2 - n^2)b_0 x^{\lambda-2} + [(\lambda+1)^2 - n^2] b_1 x^{\lambda-1} + \sum_{k=0}^{\infty} ((k+\lambda+2)^2 - n^2) b_{k+2} x^{k+\lambda} = 0.$$

まず最低次の項の係数を考えて、

$$\lambda^2 - n^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \lambda = \pm n.$$

$\lambda = n$  の場合  $x^{\lambda-1}$  の係数が  $(n+1)^2 - n^2 \neq 0$  となるから  $b_1 = 0$  でなければならない。係数の漸化式は

$$b_{k+2} = -\frac{b_k}{(k+n+2)^2 - n^2} = -\frac{b_k}{(k+2)(k+2n+2)}.$$

これから

$$\begin{aligned} b_2 &= -\frac{b_0}{2(2n+2)} = -\frac{n!b_0}{2^2(n+1)!1!}, \\ b_4 &= -\frac{b_2}{4(2n+4)} = \frac{n!b_0}{2^4(n+2)!2!}, \\ b_6 &= -\frac{b_4}{6(2n+6)} = -\frac{n!b_0}{2^6(n+3)!3!}, \end{aligned}$$

<sup>8</sup>老婆心: Bessel の微分方程式の係数は  $t = 0$  で正則ではないので、 $t = 0$  で正則でない解がありうる。こういう場合は（結果論になるが）、普通のベキ級数ではなくて、 $t^\lambda$  ( $\lambda$  は半端になりうる数) をかけた級数の形で解が得られる。

一般に

$$b_{2k} = \frac{(-1)^k n!}{2^{2k}(n+k)!k!} b_0, \quad b_{2k-1} = 0 \quad (k \in \mathbf{N})$$

したがって、このときの解は

$$x(t) = b_0 2^n n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)!k!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}.$$

すなわち

$$x(t) = b_0 2^n n! J_n(t).$$

$\lambda = -n$  の場合 漸化式が

$$b_{k+2} = -\frac{b_k}{(k-n+2)^2 - n^2} = -\frac{b_k}{(k+2)(k-2n+2)}.$$

となる。以下の計算は省略するが、こうすると  $J_{-n}(x)$  が現れる。

これでめでたく解けたようだが、 $n \in \mathbf{Z}$  の場合は  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$  なので、解の基本系が得られていないのである ( $n \notin \mathbf{Z}$  の場合は  $J_n, J_{-n}$  が解の基本系となることが示せる)。我々が本当に欲しいのは  $n \in \mathbf{N}_0$  の場合なのでちょっと困った事態である。

もちろん Frobenius の理論では、この壁を突破する処方箋が用意されているが、それに従わず、前節で見たような Neumann 関数の導入で切り抜けることができるわけである。

## 2.6 UNIX 上で遊ぶ

UNIX の数学関数ライブラリには、第1種、第2種の整数次 Bessel 関数  $j0(x), j1(x), jn(n, x)$ ,  $y0(x), y1(x), yn(n, x)$  が含まれている（便利、便利）。Windows などでは用意されていないが、そういう場合は GSL (GNU Scientific Library) が利用できる。なお、この手の数値計算に関する話題については、桂田 [10] というメモも参照せよ。

### 2.6.1 グラフを描こう

次のプログラムは、UNIX の数学関数ライブラリを利用してグラフを描くためのものである。

```
/*
 * draw-Bessel-glsc.c --- Bessel 関数のグラフを描く。
 *   コンパイル: ccmg draw-Bessel-glsc.c
 */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#define G_DOUBLE
#include <glsc.h>

int main(int argc, char **argv)
{
    int n, n0, n1, N, i;
    double a, b, dx, margin, height, x;
```

```

a = 0.0;
b = 20.0;
height = 1.2;
margin = (b - a) / 10;

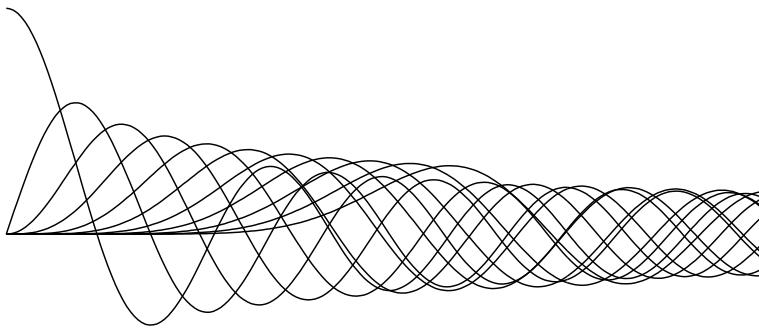
g_init("BESSEL", 320.0, 220.0);
g_device(G_BOTH);
g_def_scale(0, a - margin, b + margin, - height, height,
           10.0, 10.0, 300.0, 200.0);
g_sel_scale(0);
g_def_line(0, G_BLACK, 0, G_LINE_SOLID);

if (argc == 3) {
    n0 = atoi(argv[1]);
    n1 = atoi(argv[2]);
}
else {
    printf("何次から何次までの Bessel 関数のグラフを書きますか?: ");
    scanf("%d %d", &n0, &n1);
}

N = 200;
dx = (b - a) / N;
for (n = n0; n <= n1; n++) {
    g_move(a, jn(n, a));
    for (i = 1; i <= N; i++) {
        x = a + i * dx;
        g_plot(x, jn(n, x));
    }
}
g_sleep(-1.0);
g_term();

return 0;
}

```



この図には 0 次から 10 次までの Bessel 関数の、 $[0, 20]$  の範囲のグラフを描いてある。いずれも振動しながら減衰していくのが分かる。

## 2.6.2 零点を求める

Bessel 関数の零点をまとめて求めるための賢い方法もあるらしいが、まだ読んでいないので、ここではライブラリ関数を使って方程式を解いて求めてみる（ものすごい安直）。なお桂田 [10] も参照せよ。

```

/*
 * find_Bessel_roots.c -- 二分法 (bisection method) で方程式 Jn(x)=0 を解く
 *
 * 正の解を小さい方から指定した個数だけ求める
 * コンパイルは gcc -o find_Bessel_roots find_Bessel_roots.c -lm
 */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

void print(int N, int n, double *a)
{
    int i;
    printf(" k %d %d\n", n, n);
    for (i = 1; i <= N; i++)
        printf("%3d %25.18e %15e %f\n", i, a[i], jn(n,a[i]), a[i]-a[i-1]);
}

int main(int argc, char **argv)
{
    int i, j, maxitr = 100;
    double a, b, c, eps;
    double fa, fb, fc;
    int n;
    int num_of_roots;
    double *roots;

    if (argc == 3) {
        n = atoi(argv[1]);
        num_of_roots = atoi(argv[2]);
    }
    else {
        printf("Jn の最初の N 個の零点を求めます。 \n");
        printf("n="); scanf("%d", &n);
        printf("N="); scanf("%d", &num_of_roots);
    }
    if ((roots = malloc(sizeof(double) * (num_of_roots + 1))) == NULL) {
        fprintf(stderr, "cannot allocate memory\n");
        exit(1);
    }
    a = 0.1; b = 0.2; eps = 5e-16;
    roots[0] = 0;
    fa = jn(n, a); fb = jn(n, b);
    for (i = 1; i <= num_of_roots; i++) {
        while (fa * fb > 0) {
            a = b; fa = fb;
            b += 0.1; fb = jn(n, b);
        }
        for (j = 0; j <= maxitr && (b - a) / a > eps; j++) {
            c = (a + b) / 2; fc = jn(n, c);
            if (fc == 0.0)
                break;
            else if (fa * fc <= 0.0) {
                /* 左側 [a,c] に根がある */
                b = c; fb = fc;
            }
            else {
                /* 左側 [a,c] には根がないかもしない。 [c,b] にあるはず */
                a = c; fa = fc;
            }
        }
    }
}

```

```
}

if (j >= maxitr) {
    fprintf(stderr, "%d 番目で失敗\n", i+1);
    print(i, n, roots);
    exit(1);
}
roots[i] = a;
a = b; b = a + 0.1;
fa = jn(n, a); fb = jn(n, b);
}
print(num_of_roots, n, roots);
return 0;
}
```

```
oyabun% ./find_Bessel_roots 0 10
k          μ 0,k           J0( μ 0k)
1  2.404825557695771998e+00  4.166805e-16 2.404826
2  5.520078110286313233e+00 -1.586477e-16 3.115253
3  8.653727912911008957e+00  8.856492e-16 3.133650
4  1.179153443901428133e+01 -6.583883e-17 3.137807
5  1.493091770848778488e+01  2.208658e-16 3.139383
6  1.807106396791091996e+01 -4.855568e-16 3.140146
7  2.121163662987925846e+01  8.563933e-17 3.140573
8  2.435247153074930182e+01 -1.482501e-16 3.140835
9  2.749347913204025318e+01  2.464784e-16 3.141008
10 3.063460646843197210e+01 -4.344645e-16 3.141127

oyabun% ./find_Bessel_roots 1 10
k          μ 1,k           J1( μ 1k)
1  3.831705970207510692e+00  7.917475e-16 3.831706
2  7.015586669815595755e+00 -2.454516e-15 3.183881
3  1.017346813506271985e+01  5.547780e-16 3.157881
4  1.332369193631422100e+01 -4.450934e-16 3.150224
5  1.647063005087763088e+01  3.800637e-16 3.146938
6  1.961585851046823592e+01 -1.098267e-15 3.145228
7  2.276008438059276529e+01  1.106161e-15 3.144226
8  2.590367208761837503e+01 -1.190324e-15 3.143588
9  2.904682853491684469e+01  1.535575e-15 3.143156
10 3.218967991097439096e+01 -1.780232e-15 3.142851

oyabun% ./find_Bessel_roots 2 10
k          μ 2,k           J2( μ 2k)
1  5.135622301840683690e+00  4.440892e-16 5.135622
2  8.417244140399862573e+00 -5.967449e-16 3.281622
3  1.161984117214905865e+01  1.942890e-16 3.202597
4  1.479595178235125630e+01 -9.089951e-16 3.176111
5  1.795981949498782626e+01  3.816392e-17 3.163868
6  2.111699705302184071e+01 -8.500145e-16 3.157178
7  2.427011231357309384e+01  1.417269e-15 3.153115
8  2.742057354998455665e+01 -1.006140e-16 3.150461
9  3.056920449551638796e+01  1.309716e-15 3.148631
10 3.371651950922269236e+01 -1.037365e-15 3.147315

oyabun%
```

(後の (2.18) を使えば、導関数が計算出来るので、Newton 法で計算できるはず。今度遊んでみよう。)

## 2.7 メモ

### 2.7.1 Bessel の積分, Hansen の積分

$n \in \mathbf{N}_0$  とする。

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}$$

であるが、実は  $C$  を原点のまわりを正の向きに一周する閉曲線とすると

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{(z/2)(\zeta-1/\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}$$

が成り立つ。実際  $\zeta = 2u/z$  と変数変換して得られる

$$\text{右辺} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \oint_{C'} \frac{e^u}{u^{n+m+1}} du$$

で、右辺の線積分を留数計算すれば  $J_n(z)$  に等しいことが分かる。

これから

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - z \sin \varphi) d\varphi$$

が得られる。これを  $J_n$  に対する Bessel の積分 (Bessel's integral for  $J_n$ ) とよぶ。

要するに

$$e^{(z/2)(\zeta-1/\zeta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta^n J_n(z). = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [\zeta^n + (-1)^n \zeta^{-n}] J_n(z)$$

が成立するわけで、 $e^{(z/2)(\zeta-1/\zeta)}$  は  $J_n(z)$  の母関数 (generating function) である。

ちなみに、先に母関数表示

$$\exp \left[ \frac{z}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n$$

からスタートして、 $t = e^{i\theta}$  とおいて、

$$\cos(z \sin \theta), \quad \sin(z \cos \theta)$$

の Fourier 級数展開を考えてもよい。

余談 2.7.1 上式を

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\varphi - z \sin \varphi) d\varphi$$

と書き換えると、解析的周期関数の 1 周期にわたる積分なので、台形公式で高精度に計算できる。例えば  $J_4(5)$  の計算に、区間を (わずか) 32 等分した台形公式で  $10^{-16}$  オーダーの精度の値が得られる。 ■

### 2.7.2 加法定理

(準備中)

### 2.7.3 漸化式 (基本関係)

$J_\nu$  の級数による定義式から、単純な計算によって、次の 2 つの漸化式 (recurrence formulae) が確かめられる。

$$(2.17) \quad \frac{2\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z),$$

$$(2.18) \quad 2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z).$$

$\nu = 0$  の場合は特に  $J_{-1}(z) = -J_1(z)$  であるから、

$$J'_0(z) = -J_1(z).$$

(2.17), (2.18) を方程式とみなして解くと

$$(2.19) \quad J_{\nu-1}(z) = \frac{n}{z} J_\nu(z) + J'_\nu(z),$$

$$(2.20) \quad J_{\nu+1}(z) = \frac{n}{z} J_\nu(z) - J'_\nu(z).$$

これらは次のように変形できる。

$$(2.21) \quad \frac{d}{dz} (z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z),$$

$$(2.22) \quad \frac{d}{dz} (z^{-\nu} J_\nu(z)) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z).$$

特に

$$\frac{d}{dz} (z J_1(z)) = z J_0(z).$$

少なくとも次のことは言える。

Bessel 関数の導関数 (不定積分) は番号をずらしたりして簡単に計算できる。

余談 2.7.2 少数の Bessel 関数だけを使って他のものを表すこと。

1. 次数の低いもので表す。(2.19) により、 $J_{\nu+1}$  は  $J_\nu$  と  $J'_\nu$  で表現できるわけだが、 $J_\nu$  は 2 階の微分方程式の解であるから、 $J_{\nu+1}$  の導関数達も  $J_\nu$  と  $J'_\nu$  で表現できることが分かる:

$$\forall k \in \mathbf{N}_0 \quad \exists P(t), Q(t) \in \mathbf{C}[t] \quad \text{s.t.} \quad \left( \frac{d}{dz} \right)^k J_{\nu+1}(z) = P \left( \frac{1}{z} \right) J_\nu(z) + Q \left( \frac{1}{z} \right) J'_\nu(z).$$

2. 次数の高いもので表す。

$$\forall k \in \mathbf{N}_0 \quad \exists \tilde{P}(t), \tilde{Q}(t) \in \mathbf{C}[t] \quad \text{s.t.} \quad \left( \frac{d}{dz} \right)^k J_{\nu-1}(z) = \tilde{P} \left( \frac{1}{z} \right) J_\nu(z) + \tilde{Q} \left( \frac{1}{z} \right) J'_\nu(z).$$

3. (上の二つを使うと) 例えば  $\nu = n \in \mathbf{Z}$  のとき、 $J_n(z)$  とそのすべての導関数は

$$P \left( \frac{1}{z} \right) J_0(z) + Q \left( \frac{1}{z} \right) J'_0(z) = P \left( \frac{1}{z} \right) J_0(z) - Q \left( \frac{1}{z} \right) J_1(z)$$

の形に表現できる (数式処理を使うと少し遊べそう)。 ■

## 2.7.4 半整数次数の Bessel 関数

(準備中)

すでに  $J_{\pm 1/2}$ ,  $J_{\pm 3/2}$  が三角関数を用いて表されることは紹介済みである ((2.8), (2.9))。漸化式

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \quad (x > 0)$$

が成り立つので、帰納法で、任意の  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して、有理関数  $P_n(x)$ ,  $Q_n(x)$  が存在して、

$$J_{n\pm 1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (P_n(x) \cos x + Q_n(x) \sin x)$$

が得られる。

## 2.7.5 漸近挙動

(準備中 — 既に簡単な結果だけは紹介してあるが…)

## 2.8 変形 Bessel 関数

円柱で Laplace 方程式を解く際に現れる変形 Bessel 関数を導入する。

この節では、 $i$  で虚数単位を表す ( $i^2 = -1$ )。

$\nu \in \mathbf{C}$  に対して、

$$(2.23) \quad u'' + \frac{1}{z} u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0$$

を  $\nu$  次の変形 Bessel の方程式とよぶ。

カッコ内の 1 を  $-1$  に置き換えると通常の Bessel の微分方程式になる。このことから、特解として  $J_\nu(iz)$ ,  $Y_\nu(iz)$  があることが分かるが、応用上は、 $z = x \in \mathbf{R}$  とするときに実数値となる解が望ましい。少し考えると、正則な解として

$$I_\nu(z) := e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(iz) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

が得られる。これを  $\nu$  次の変形 Bessel 関数 (modified Bessel function of the first kind of order  $\nu$ ) という<sup>9</sup>。特に  $\nu = n \in \mathbf{N}_0$  の場合は

$$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz)$$

である。例えば

$$I_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sinh z, \quad I_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cosh z.$$

Bessel 関数と同様に、

$$\det \begin{pmatrix} I_\nu(z) & I_{-\nu}(z) \\ I'_\nu(z) & I'_{-\nu}(z) \end{pmatrix} = I_\nu(z) I'_{-\nu}(z) - I'_\nu(z) I_{-\nu}(z) = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi z},$$

$$I_{-n}(z) = I_n(z) \quad (n \in \mathbf{N})$$

---

<sup>9</sup> というわけで、複素変数の Bessel 関数  $J_\nu$  について完全な知識が得られれば、わざわざ  $I_\nu$  を持ち出す必要はない、ということになる。

が成り立つ。ゆえに  $\nu \notin \mathbf{Z}$  の場合、

$$u = C_1 I_\nu(z) + C_2 I_{-\nu}(z) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

は変形 Bessel の方程式の一般解を与えるが、 $\nu \in \mathbf{Z}$  の場合はそうならない。

そこで  $\nu \notin \mathbf{Z}$  の場合、

$$K_\nu(z) := \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi},$$

$\nu = n \in \mathbf{Z}$  の場合、

$$K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z) = \frac{(-1)^n}{2} \left( \frac{\partial I_{-\nu}}{\partial \nu}(z) - \frac{\partial I_\nu}{\partial \nu}(z) \right) \Big|_{\nu=n}$$

とおくことによって  $K_\nu(z)$  を定める<sup>10</sup>。こうすると

$$y = C_1 I_\nu(z) + C_2 K_\nu(z) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

は (2.23) の一般解になる。

$k \neq 0$  に対して、微分方程式

$$u'' + \frac{1}{z} u' - \left( k^2 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) u = 0$$

の一般解は

$$y = C_1 I_\nu(kz) + C_2 K_\nu(kz) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

余談 2.8.1 Kelvin 卿により導入された  $\text{ber } x$ ,  $\text{bei } x$  という関数があるが、これは

$$I_0 \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} x \right) = \text{ber } x + i \text{ bei } x$$

で定義される。

$$\begin{aligned} \text{ber } x &= 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \cdots \\ \text{bei } x &= \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \cdots \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.9 Bessel について

Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846, Minden に生まれ、Königsberg にて没する, 天文学に顕著な業績がある) は、Kepler の方程式を解くために Bessel 関数の基礎固めをすることになった。

### Bessel の問題

太陽の回りを 1 つの惑星がまわる二体問題を考える。楕円軌道が  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$  で、焦点  $(c, 0)$  ( $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ) に太陽があるとする。近日点  $(a, 0)$  が  $\pi = (1, 0)$  となるように縮尺を変えると、太陽の位置は  $S = (e, 0)$  となる ( $e = c/a$ )。単位円周上を等角速度で動く仮想の天体を考える。ただし、周期と近日点を過ぎるタイミングは問題としている惑星と同じとする。ある時刻に平均近点角が  $M$  であるとは、その仮想の天体の座標が  $(\cos M, \sin M)$  ということである。問題の惑星の位置を  $P = (x, y)$  とする。単位円周上の点  $P'$  を  $P' = (x, \sqrt{1-x^2} \operatorname{sign} y)$  で定める。 $E = \angle \pi O P'$

---

<sup>10</sup> 不定形の極限なので、ロピタルの定理が適用できることに注意しよう。

を離心近点角という。Kepler の法則から、離心近点角 (eccentric anomaly)  $E$ , 平均近点角 (mean anomaly)  $M$ , 楕円の離心率 (eccentricity)  $e \in [0, 1)$  について

$$(2.24) \quad E - e \sin E = M$$

という関係式が成り立つ。これを **Kepler の方程式**とよぶ(これは文献に初めて現れた超越方程式という評判がある)。この方程式を解いて  $E$  や  $\cos(mE)$ ,  $\sin(mE)$  を  $M$  で表すことを **Bessel の問題**といふ。

これを解くために Bessel 関数が必要になった、ということである。実際、解は

$$(2.25) \quad E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(ne) \sin(nM),$$

$$(2.26) \quad \cos(mE) = -\frac{e}{2} \delta_{m1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n} (J_{n-m}(ne) + J_{n+m}(ne)) \cos(nM),$$

$$(2.27) \quad \sin(mE) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n} (J_{n-m}(ne) + J_{n+m}(ne)) \sin(nM)$$

と表される。

なお、 $E$  から真近点角 (true anomaly)  $\angle \pi SP = \nu$  を求めるには、方程式

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

を解けばよい。

**余談 2.9.1 (Kepler の方程式を数値的に解く)** 具体的に数値で与えられた  $M, e$  に対して、(2.24) の解  $E$  を求めるには、数値解法を使うのが簡単である。筆者は初めてパソコンを買った頃に遊んでいた天文計算プログラム(中野主一氏作)の中でこの方程式に出会い、「(Kepler の方程式を解くと言っても、微分方程式を解いているわけではないし) 一体何をしているのだろう?」と不思議に思った経験がある。■

# 第3章 Laplacian の極座標表示

## 3.1 2次元の場合

$\mathbf{R}^2$  における極座標

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

で Laplacian を表すと

$$(3.1) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

この公式の導出は例えば、桂田『解析概論 I 講義ノート』[6] (あるいはその改訂版 [12]) に載せてある。その要点は

$$\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

これから

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 u + \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 u.$$

後はこれをていねいに計算するだけである。

また付録の B 章「楕円領域のラプラシアン」にこの公式を数式処理で導出するための Mathematica プログラムを載せてある。

## 3.2 3次元の場合

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Lambda, \\ \Lambda &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.\end{aligned}$$

この公式の導出も桂田『解析概論I講義ノート』[6] (あるいはその改訂版 [12]), 『極座標と Laplacian』[11] に載せてある。

Mathematica プログラムも書いてみたい。

はてな?  $n = 2$  のときを

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

と書くと、何か不思議な感じがする (Laplacian も漸化式で書ける?)。

### 3.3 一般の $n$ 次元の場合

$n$  次元空間  $\mathbf{R}^n$  における Laplacian の極座標表示は、島倉 [19] にあったような記憶がある。

$u(x) = f(r)$ ,  $r = |x|$  となる場合は、

$$\Delta u = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r)$$

となる (「微分方程式2」の講義ノート (桂田 [7])) にも書いたが、簡単であるので自力で確認するとよい)。

一般の場合は

$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{n-1} u_r) + \frac{1}{r^2} \Lambda u = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} \Lambda u.$$

ここで  $\Lambda$  は単位球面の Laplace-Beltrami 作用素である。

$n = 2$  のときは

$$(3.2) \quad \Lambda = \Lambda_\theta = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

$n = 3$  のときは

$$(3.3) \quad \Lambda = \Lambda_{\theta,\phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

# 第4章 円盤領域における熱方程式

境界条件は同次の場合を考える。

## 4.1 円盤領域での Dirichlet 境界値問題

2次元の単位円盤領域

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$$

における熱方程式の初期値境界値問題

$$(4.1) \quad u_t = \Delta u, \quad u(x, y, t) = 0 \quad ((x, y) \in \partial\Omega), \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{\Omega})$$

を Fourier の方法で解いてみよう。

いつものように、熱方程式と境界条件を満たし、 $u(x, y, t) = \eta(t)\zeta(x, y)$  という形をしている非自明な  $u$  を求めることを目標にする。まず熱方程式に代入すると

$$\frac{\Delta\zeta(x, y)}{\zeta(x, y)} = \frac{\eta'(t)}{\eta(t)}.$$

これは定数なので  $-\lambda$  とおくと、

$$\eta'(t) = -\lambda\eta(t), \quad \Delta\zeta(x, y) = -\lambda\zeta(x, y).$$

一方、境界条件に代入すると

$$\zeta(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \partial\Omega)$$

を得る。

こうして、 $\Omega$  における Laplacian の固有値問題が登場する。

$\Omega$  は、1次元区間の直積ではないから、このままでは Fourier の方法は適用できないが、極座標を用いて問題を変換するとうまく解けるようになる。

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta$$

により変数を  $(x, y)$  から  $(r, \theta)$  に変換し、

$$Z(r, \theta) := \zeta(x, y)$$

とおくと、 $-\Delta\zeta = \lambda\zeta$  は

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} = -\lambda\zeta \quad (0 < r < 1, \theta \in [0, 2\pi])$$

という方程式に変換される。ここで

$$Z(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

とおいて、代入すると

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = -\lambda R(r)\Theta(\theta).$$

両辺を  $R(r)\Theta(\theta)$  で割って、

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\lambda.$$

移項すると

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2R(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

(いつものように) この式の値は定数であることが分る。それを  $\alpha$  とおくと、

$$\begin{aligned}\Theta''(\theta) + \alpha\Theta(\theta) &= 0, \\ r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \alpha)R(r) &= 0.\end{aligned}$$

$\Theta$  は周期  $2\pi$  の関数であるから<sup>1</sup>、

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi).$$

こうして  $\Theta$  についての固有値問題

$$(4.2) \quad \Theta''(\theta) = -\alpha\Theta(\theta), \quad \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$$

が導かれた。これは (よく知られているように)

$$(4.3) \quad \alpha = n^2, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad \Theta(\theta) = A \cos n\theta + B \sin n\theta \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

と解ける。一方  $R$  については、境界条件も考慮して

$$(4.4) \quad R'(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0, \quad R(1) = 0, \quad R(0) \text{ は有限}.$$

多くの本で、この形で条件を書いてあるが、固有値問題であるから

$$R'(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{n^2}{r^2}R(r) = -\lambda R(r), \quad R(1) = 0, \quad R(0) \text{ は有限}.$$

と書く方が良いかもしない。

ここで

$$\rho := \sqrt{\lambda}r, \quad W(\rho) := R(r)$$

とおくと  $R(r) = W(\sqrt{\lambda}r)$  より、

$$R'(r) = \sqrt{\lambda}W'(\rho), \quad R''(r) = \lambda W''(\rho)$$

であるから、上の方程式に代入して、

$$(4.5a) \quad W''(\rho) + \frac{1}{\rho}W'(\rho) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)W(\rho) = 0,$$

$$(4.5b) \quad W(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad W(0) \text{ は有限}.$$

---

<sup>1</sup> 任意の  $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  に対して  $\Theta^{(k)}(0) = \Theta^{(k)}(2\pi)$  が成り立つが、微分方程式から  $k = 0, 1$  のときだけ考えれば良いことが分かる。

(4.5a) は Bessel の微分方程式である。一般解は

$$W(\rho) = AJ_n(\rho) + BY_n(\rho) \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

である (定理 2.2.8)。ここで  $J_n$  は  $n$  次の Bessel 関数、 $Y_n$  は  $n$  次の Neumann 関数である。

$$J_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}.$$

$Y_n$  については、原点の近傍で有界でないこと以外は使わないので、ここでは定義式は省略する (定義 2.2.8 を見よ)。

原点の近傍で  $W$  は有界であることから、 $B = 0$  でなければならない。すなわち

$$W(\rho) = AJ_n(\rho).$$

ゆえに

$$R(r) = AJ_n(\sqrt{\lambda}r).$$

$R(1) = 0$  であるためには、 $\sqrt{\lambda}$  は  $J_n$  の零点であることが必要十分である。

$J_n$  の正の零点は小さい方から順に並べることができる (どこかに集積したりはしない)。それを

$$\mu_{1,n} < \mu_{2,n} < \cdots < \mu_{m,n} < \cdots$$

とおくと、

$$\exists m \in \mathbf{N} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{\lambda} = \mu_{m,n}.$$

以上から円盤における固有値問題の解として

$$(4.6) \quad \lambda = \mu_{m,n}^2, \quad Z(r, \theta) = J_n(\mu_{m,n}r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix}$$

が得られる。

ゆえに円盤における熱方程式に対する変数分離解として

$$e^{-\mu_{m,n}^2 t} J_n(\mu_{m,n}r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix}$$

が得られる。

初期値境界値問題 (4.1) の解は、それらの重ね合わせ

$$(4.7) \quad u(x, y, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_{m0} e^{-\mu_{m,0}^2 t} J_0(\mu_{m,0}r) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\mu_{m,n}^2 t} J_n(\mu_{m,n}r) (A_{mn} \cos n\theta + B_{mn} \sin n\theta)$$

で与えられると期待できる。係数  $A_{mn}, B_{mn}$  は、定理 2.4.4 より

$$(4.8a) \quad A_{mn} = \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^1 \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) \cos n\theta \, d\theta \right) r J_n(\mu_{m,n}r) dr,$$

$$(4.8b) \quad B_{mn} = \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^1 \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) \sin n\theta \, d\theta \right) r J_n(\mu_{m,n}r) dr.$$

## 4.2 円盤領域での Neumann 境界値問題

(工事中…卒研でのチャレンジャー募集中)

金子 [4] に Neumann 境界値問題についての言及がある(熱方程式ではなく、波動方程式だが、固有関数はまったく同じわけだから)。

$$\begin{aligned} u_t(x, y, t) &= \Delta u(x, y, t) \quad ((x, y) \in \Omega, t > 0), \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) &= 0 \quad ((x, y) \in \partial\Omega, t > 0), \\ u(x, y, 0) &= f(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{\Omega}). \end{aligned}$$

最初の素朴な予想は、式の形は Dirichlet 境界条件の場合と同じで、

$$\begin{aligned} u(r \cos \theta, r \sin \theta, t) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_{m0} e^{-\mu_{m,0}^2 t} J_0(\mu_{m,0} r) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\mu_{m,n}^2 t} J_n(\mu_{m,n} r) (A_{mn} \cos n\theta + B_{mn} \sin n\theta). \\ A_{mn} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^1 (int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) \cos n\theta d\theta) r J_n(\mu_{m,n} r) dr. \\ B_{mn} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^1 \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) \sin n\theta d\theta \right) r J_n(\mu_{m,n} r) dr. \end{aligned}$$

ただし  $\mu_{m,n}$  は  $J'_n(x)$  の零点を順番に小さい方から順に並べたものである?

$$\mu_{1,n} < \mu_{2,n} < \mu_{3,n} < \cdots < \mu_{m,n} < \mu_{m+1,n} < \cdots$$

(この  $\mu_{m,n}$  をもう少し具体的に書けないかなとも思うけれど、仕方がないのだろうか?)  
おっと、でも固有値  $\lambda = 0$  というのがあるかな?

$$(4.9) \quad R'' + \frac{1}{r} R' + \left( 0 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0.$$

に対して、 $W(\rho) = R(r/\sqrt{0})$  という変数変換はできないから、これは別途考察を要する、だな。(4.9) は Euler の方程式か。何だ、円盤で Laplace 方程式を解くときと同じだ(例えば桂田 [7] の第3章)。一般解は

$$R(r) = \begin{cases} Ar^n + Br^{-n} & (n \neq 0) \\ A + B \log r & (n = 0) \end{cases}$$

ここで  $R'(1) = 0$  を満たすのを求める、

$$R(r) = \begin{cases} A(r^n - r^{-n}) & (n \neq 0) \\ A & (n = 0) \end{cases}$$

なるほど。これは  $n = 0$  に対応するものと考えるべきかな。

きちんと計算して解を書き下す、もちろん  $\mu_{m,n}$  の漸近挙動の解析もつけて、というのは、ちょっとした課題になるだろう。

$m, n$  が小さい(特に一方が 0)場合の変数分離解を可視化してみたい。

# 第5章 円柱領域における熱方程式

境界条件は Dirichlet 境界条件とする (Neumann や Robin どうなるのかなあ…)。

この章の内容は吉原君の卒業研究レポートである。まだチェックが入っていない。小さなミスはあると思うが、大筋は正しいのでは?と考えている。

## 5.1 同次 Dirichlet 境界条件の場合

これは寺沢 [31] にある。後で照合してみよう。

半径 1, 高さ  $h$  の円柱領域  $\Omega = \{(x, y, z); x^2 + y^2 < 1, 0 < z < h\}$  における熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_t(x, y, z, t) &= \Delta u(x, y, z, t) && ((x, y, z) \in \Omega, t > 0), \\ u(x, y, z, t) &= 0 && ((x, y, z) \in \partial\Omega, t > 0), \\ u(x, y, z, 0) &= f(x, y, z) && ((x, y) \in \bar{\Omega}) \end{aligned}$$

を考える。

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(\ell\pi/h)^2 + \mu_{mn}^2 t} J_n(\mu_{mn} r) (A_{\ell mn} \cos n\theta + B_{\ell mn} \sin n\theta) \sin \frac{\ell\pi z}{h},$$

$$\begin{aligned} A_{\ell mn} &= \frac{4}{\pi h J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \cos n\theta \sin \frac{\ell\pi z}{h} dr d\theta dz, \\ B_{\ell mn} &= \frac{4}{\pi h J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \sin n\theta \sin \frac{\ell\pi z}{h} dr d\theta dz. \end{aligned}$$

$n = 0$  のとき、本当にこれでいいのか???

## 5.2 非同次 Dirichlet 境界条件

非同次 Dirichlet 境界条件 (ただしデータは時刻  $t$  に依存しない) を与えてみる。これは Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を解けばよい。

$\Gamma_s$  は側面、 $\Gamma_t$  は上の面、 $\Gamma_b$  は底の面とする。

$$\begin{aligned} \Gamma_s &:= \{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1, 0 < z < h\}, \\ \Gamma_t &:= \{(x, y, h); x^2 + y^2 < 1\}, \\ \Gamma_b &:= \{(x, y, 0); x^2 + y^2 < 1\}. \end{aligned}$$

### 5.2.1 側面で非同次データ

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega), \\ u(x, y, z) &= \Phi(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \Gamma_s), \\ u(x, y, z) &= 0 \quad ((x, y, z) \in \Gamma_t \cup \Gamma_b).\end{aligned}$$

この問題の解は変形 Bessel 関数  $I_n$  を用いて、次のように与えられる。

$$\begin{aligned}u(r \cos \theta, r \sin \theta, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} I_n \left( \frac{\ell \pi}{h} \right) (A_{\ell n} \cos n\theta + B_{\ell n} \sin n\theta) \sin \frac{\ell \pi z}{h}, \\ A_{\ell n} &= \frac{2}{\pi h I_n(\ell \pi/h)} \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\cos \theta, \sin \theta, z) \cos n\theta \sin \frac{\ell \pi z}{h} d\theta dz, \\ B_{\ell n} &= \frac{2}{\pi h I_n(\ell \pi/h)} \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\cos \theta, \sin \theta, z) \sin n\theta \sin \frac{\ell \pi z}{h} d\theta dz.\end{aligned}$$

### 5.2.2 上面で非同次データ

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega), \\ u(x, y, z) &= \Phi(x, y) \quad ((x, y, z) \in \Gamma_t), \\ u(x, y, z) &= 0 \quad ((x, y, z) \in \Gamma_s \cup \Gamma_b).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(r \cos \theta, r \sin \theta, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sinh(\mu_{mn} z) J_n(\mu_{mn} r) (A_{mn} \cos n\theta + B_{mn} \sin n\theta), \\ A_{mn} &= \frac{2}{\pi \sinh(\mu_{mn} h) J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) \Phi(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos n\theta dr d\theta, \\ B_{mn} &= \frac{2}{\pi \sinh(\mu_{mn} h) J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) \Phi(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin n\theta dr d\theta.\end{aligned}$$

### 5.2.3 底面で非同次データ

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega), \\ u(x, y, z) &= \Phi(x, y) \quad ((x, y, z) \in \Gamma_b), \\ u(x, y, z) &= 0 \quad ((x, y, z) \in \Gamma_s \cup \Gamma_t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(r \cos \theta, r \sin \theta, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sinh(\mu_{mn}(h - z)) J_n(\mu_{mn} r) (A_{mn} \cos n\theta + B_{mn} \sin n\theta), \\ A_{mn} &= \frac{2}{\pi \sinh(\mu_{mn} h) J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) \Phi(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos n\theta dr d\theta, \\ B_{mn} &= \frac{2}{\pi \sinh(\mu_{mn} h) J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) \Phi(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin n\theta dr d\theta.\end{aligned}$$

# 第6章 円盤領域における波動方程式

金子 [4] に少し詳しく書いてあったような記憶がある。照合してみること。  
境界条件は同次 Dirichlet の場合を考える。

## 6.1 Dirichlet 境界条件の場合

単位円盤  $\Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$  における波動方程式の初期値境界値問題

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} u_{tt} &= \Delta u \quad (\text{in } \Omega \times (0, \infty)), \\ u(x, t) &= 0 \quad (\text{on } \partial\Omega \times (0, \infty)), \\ u(x, 0) &= \phi(x) \quad (x \in \bar{\Omega}), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \quad (x \in \bar{\Omega}) \end{aligned}$$

の解は

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m} J_0(\mu_{m0} r) \cos(c\mu_{m0} t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\mu_{mn} r) \cos(c\mu_{mn} t) (A_{mn} \cos n\theta + B_{mn} \sin n\theta) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} C_{0m} J_0(\mu_{m0} r) \frac{\sin(c\mu_{m0} t)}{\mu_{m0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\mu_{mn} r) \frac{\sin(c\mu_{mn} t)}{\mu_{mn}} (C_{mn} \cos n\theta + D_{mn} \sin n\theta). \\ A_{mn} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) dr \int_{-\pi}^{\pi} \phi(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos n\theta d\theta. \\ B_{mn} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) dr \int_{-\pi}^{\pi} \phi(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin n\theta d\theta. \\ C_{mn} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) dr \int_{-\pi}^{\pi} \psi(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos n\theta d\theta. \\ D_{mn} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) dr \int_{-\pi}^{\pi} \psi(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin n\theta d\theta. \end{aligned}$$

あるいは上の余談の真似をして

$$\begin{aligned}
u(r \cos \theta, r \sin \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\mu_{mn} r) \cos(c\mu_{mn}t) (A_{mn} \cos n\theta + B_{mn} \sin n\theta) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\mu_{mn} r) \frac{\sin(c\mu_{mn}t)}{\mu_{mn}} (C_{mn} \cos n\theta + D_{mn} \sin n\theta), \\
A_{mn} &= \frac{2 - \delta_{n0}}{\pi J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) dr \int_{-\pi}^{\pi} \phi(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos n\theta d\theta, \\
B_{mn} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) dr \int_{-\pi}^{\pi} \phi(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin n\theta d\theta, \\
C_{mn} &= \frac{2 - \delta_{n0}}{\pi J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) dr \int_{-\pi}^{\pi} \psi(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos n\theta d\theta, \\
D_{mn} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}(\mu_{mn})^2} \int_0^1 r J_n(\mu_{mn} r) dr \int_{-\pi}^{\pi} \psi(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin n\theta d\theta.
\end{aligned}$$

これも  $m, n$  が小さい固有振動解(定常波)をアニメーションで見てみたい。

# 第7章 球における問題

## 7.1 目標

球領域における Laplace 方程式, Poisson 方程式, 熱方程式, 波動方程式, それについてまとめておきたい(現時点では、あちこち証明が抜けていて、事実の羅列に近いところがある)。

卒業研究レポート島倉・田邊 [25] がある。Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題、熱方程式の初期値境界値問題(同次 Dirichlet 境界条件)を取り扱っている。

球における Laplace 方程式は Poisson 積分で解ける(「微分方程式2」(桂田 [7])にも引用した)。あるいは球面調和関数を用いた公式(藤田 [36])?

金子 [4] の 2.5 節(私の記憶が確かならば)が参考になりそう。

## 7.2 球関数

空間次元が 3 の場合、つまり  $\mathbf{R}^3$  での話である。以下出て来る  $n$  は空間次元ではないことに注意せよ。

参考書としては、藤田 [36] の §4.5, 寺沢 [32] の第 10 章がある。

$r^n Y(\theta, \phi)$  の形をしている調和関数を  $n$  次の**体球関数**、 $Y(\theta, \phi)$  を  $n$  次の**球面調和関数**(spherical harmonics)、あるいは**球関数**(spherical function)という。

$$\begin{aligned}\triangle(r^n Y(\theta, \phi)) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} (r^n Y) \right) + \frac{1}{r^2} \Lambda_{\theta, \phi}(r^n Y(\theta, \phi)) \\ &= \frac{n(n+1)}{r^2} Y(\theta, \phi) + \frac{1}{r^2} \Lambda Y(\theta, \phi) \\ &= \frac{1}{r^2} (\Lambda Y + n(n+1)Y)\end{aligned}$$

であるから( $\Lambda$  は (3.3) で定義される Laplace-Beltrami 作用素である)、 $Y$  が  $n$  次の球面調和関数であるためには

$$(7.1) \quad \Lambda Y + n(n+1)Y = 0$$

が必要十分である。つまり球面調和関数は Laplace-Beltrami 作用素  $\Lambda$  の固有関数である。

余談 7.2.1 2 次元で  $r^n Y(\theta)$  の形をした調和関数を探すと

$$Y'' + n^2 Y = 0$$

という方程式が得られ、 $Y(\theta) = A \cos n\theta + B \sin n\theta$  となる。 ■

任意の多重指数  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbf{N}_0^3$  に対して、

$$\partial_x^\alpha \left( \frac{1}{|x|} \right) = \frac{P^{(\alpha)}(x)}{|x|^{2|\alpha|+1}}$$

で  $P^{(\alpha)}(x)$  を定めると、 $P^{(\alpha)}(x)$  は  $|\alpha|$  次の同次多項式で、かつ調和関数である（藤田 [36] の定理 4.17）。したがって  $Y^{(\alpha)}(x) := P^{(\alpha)}(x)/|x|^{\alpha}$  は  $|\alpha|$  次の球面調和関数になる。 $\partial_x^\alpha(1/|x|)$  を  $\alpha$  に対応する**多重極ポテンシャル**、 $P^{(\alpha)}(x)$  を  $\alpha$  に対応する**調和多項式**、 $Y^{(\alpha)}$  を  $\alpha$  に対応する**球面調和関数**という。

$\Lambda$  の固有値は  $\lambda_n = -n(n+1)$  ( $n \in \mathbf{N}_0$ ) であり、 $\lambda_n$  に属する固有空間は

$$\mathcal{L}_n := \text{span}\{P^{(\alpha)}(x); |\alpha| = n\}$$

であり、その次元は  $2n+1$  である。 $\mathcal{L}_0$  は、1 で張られ、これは基底となる。 $\mathcal{L}_1$  は、 $x_1, x_2, x_3$  で張られ、これらは基底となる。 $\mathcal{L}_2$  は、 $2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, 2x_2^2 - x_3^2 - x_1^2, 2x_3^2 - x_1^2 - x_2^2, 3x_2x_3, 3x_3x_1, 3x_1x_2$  で張られるが、これらは線型独立ではない（1つ余計）。

**余談 7.2.2** 2 次元では、 $S^1$  における作用素  $\Lambda = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$  の固有値は  $-n^2$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) で、対応する固有関数  $\cos n\theta, \sin n\theta$  で  $S^1$  上の任意の関数が展開できる。■

（以下書いてあることは、8 章の内容で上書きされるかもしれない。）

$$Y_n(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

と変数分離する。

$$\frac{\sin^2 \theta}{\Theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + n(n+1)\Theta \right) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}.$$

$\Phi$  については、

$$\Phi'' + c\Phi = 0$$

となるので、 $c = m^2$  ( $m \in \mathbf{N}_0$ ) と解ける。

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0.$$

$\cos \theta =: \mu$  とおくと、

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right] + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right) \Theta = 0.$$

これは Legendre の陪関数の微分方程式である。 $\theta = 0$  で連続な解は  $P_n^m(\mu)$  であるので、結局

$$P_n(\cos \theta), \quad P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi, \quad P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

これらは 1 次独立であるので、これが  $\mathcal{L}_n$  の基底となる。

$P_n^m(x)$  は次式で定義される、(次数  $n$ , 異数  $m$  の) 第 1 種の Legendre 培多項式 (associated Legendre function) である (寺沢 [32] §10.11)。

$$(7.2) \quad P_n^m(x) := (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x),$$

ここで  $P_n(x)$  は  $n$  次の Legendre 多項式で、例えば Rodrigues の公式

$$(7.3) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

で定めることができる。これは Legendre の微分方程式

$$(7.4) \quad (1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

の 1 つの特解である。

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \dots \blacksquare$$

本当は 3 次元の Laplace 方程式に興味を持ったときに、このあたり勉強しておかないといけないのだな。

次数が低い場合に、可視化したいが、どうやればよいのだろうか？球面上に等高線を描いたり、レベルを色で表現したりするのか？例えば球面が震えている様子が描けるか？

# 第8章 球における Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

半径  $R > 0$  の球

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$$

における Laplace 方程式の同次 Dirichlet 境界値問題

$$(8.1) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad u = \psi \quad (\text{on } \Gamma)$$

を考える。ここで  $\Gamma := \partial\Omega$  である。

## 8.1 Fourier の方法

### 8.1.1 変数分離: 固有値問題を導出する

極座標

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

を用いると

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_S, \\ \Delta_S &:= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

となる。ここで  $\Delta_S$  は球面 Laplace 作用素 (Laplace-Beltrami 作用素) と呼ばれる微分作用素である (前の章と記号が違っている…)。

そこで (8.1) は、次の方程式に書き直される。

$$(8.2) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_S \right) u = 0 \quad (0 < r < R, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]),$$

$$(8.3) \quad u(R, \theta, \phi) = \psi(R, \theta, \phi) \quad (\theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]).$$

この微分方程式 (8.2) の解で、 $u(r, \theta, \phi) = U(r)v(\theta, \phi)$  の形をしたものを探す。

$$\Delta u = (U''(r) + \frac{2}{r}U'(r))v(\theta, \phi) + \frac{1}{r^2}U(r)\Delta_S v(\theta, \phi)$$

であるから、

$$\frac{r^2(U''(r) + \frac{2}{r}U'(r))}{U(r)} = -\frac{\Delta_S v(\theta, \phi)}{v(\theta, \phi)}.$$

この等式の値は定数である。これを  $\mu$  とおくと、

$$(8.4) \quad U''(r) + \frac{2}{r}U'(r) - \frac{\mu}{r^2}U(r) = 0,$$

$$(8.5) \quad -\Delta_S v(\theta, \phi) = \mu v(\theta, \phi).$$

$\mu, v$  は  $-\Delta_S$  の固有値、固有ベクトルに他ならない。 $\mu \geq 0$  であることを示すために補題を一つ準備する。

**補題 8.1.1**  $S$  を単位球面、 $u, v \in C^2(S)$  とするとき、

$$-\int_S \Delta_S uv \, d\sigma = \int_S \nabla_S u \cdot \nabla_S v \, d\sigma.$$

ただし  $\Delta_S$  は球面上の Laplace-Beltrami 作用素で、 $\nabla_S$  は次式で定義される作用素である。

$$\nabla_S w = \left( \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^T.$$

(ちなみに  $C^2(S)$  は何だろうとか、 $\frac{1}{\sin \theta}$  があって大丈夫だろうかとか、細部を詰める必要がある。)

**証明**  $D := \{(\theta, \phi); \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]\}$  とおく。

$$\begin{aligned} -\int_S \Delta_S uv \, d\sigma &= -\iint_D \left( u_{\theta\theta} + \cot \theta u_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} u_{\phi\phi} \right) v \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= -\int_0^{2\pi} \left\{ [u_\theta v \sin \theta]_0^\pi - \int_0^\pi u_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta) \, d\theta \right\} d\phi \\ &\quad - \iint_D u_\theta v \cos \theta \, d\theta \, d\phi - \int_0^\pi \left\{ \left[ u_\phi \frac{v}{\sin \theta} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} u_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{v}{\sin \theta} \right) \, d\phi \right\} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_\theta (v_\theta \sin \theta + v \cos \theta) \, d\theta \, d\phi - \iint_D u_\theta v \cos \theta \, d\theta \, d\phi + \iint_D u_\phi v_\phi \frac{1}{\sin \theta} \, d\theta \, d\phi \\ &= \iint_D \left( u_\theta v_\theta + \frac{u_\phi v_\phi}{\sin^2 \theta} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_S \left( u_\theta v_\theta + \frac{u_\phi v_\phi}{\sin^2 \theta} \right) \, d\sigma \\ &= \int_S \nabla_S u \cdot \nabla_S v \, d\sigma. \blacksquare \end{aligned}$$

**系 8.1.2**  $S$  は単位球面で、 $u \in C^2(S)$  と  $\mu \in \mathbf{C}$  が  $-\Delta_S u = \mu u$ ,  $u \not\equiv 0$  を満たすとき、 $\mu \geq 0$ .

**証明**

$$\mu \int_S |u|^2 \, d\sigma = \int_S \mu u \bar{u} \, d\sigma = \int_S (-\Delta u) \bar{u} \, d\sigma = \int_S \|\nabla_S u\|^2 \, d\sigma.$$

ゆえに

$$\mu = \frac{\int_S \|\nabla_S u\|^2 \, d\sigma}{\int_S |u|^2 \, d\sigma} \geq 0. \blacksquare$$

## 8.1.2 $U$ を求める

(この項の内容は、円盤のときと同じであり、繰り返しになる。)

$r = e^s$  により<sup>1</sup>、変数を  $r$  から  $s$  に変換すると

$$\frac{d^2U}{ds^2} + \frac{dU}{ds} - \mu U = 0.$$

これは特性根の方法で解くことができる。

特性方程式は

$$\nu^2 + \nu - \mu = 0.$$

前項で  $\mu \geq 0$  であることが分かっている。 $\mu > 0$  である場合は正の根と負の根を持ち、 $\mu = 0$  である場合は 0 と負の根を持つ。いずれにせよ、大きい根を  $\nu_1$ 、小さい根を  $\nu_2$  とすると、 $\nu_1 \geq 0 > \nu_2$  であり、一般解は

$$U = Ae^{\nu_1 s} + Be^{\nu_2 s} \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

これから

$$U(r) = Ar^{\nu_1} + Br^{\nu_2}$$

となるが、 $U(r)$  は  $r = 0$  で有限の値を取るので、実は  $B = 0$  でなければならない。ゆえに

$$U(r) = Ar^{\nu_1}.$$

調和関数は  $C^\infty$  級であることから、 $U(r)$  は  $r = 0$  でも無限回微分可能であり、 $\nu_1$  が整数でなければならぬことが分かる。ゆえに

$$\exists \nu \in \mathbf{N} \cup \{0\} \quad \text{s.t.} \quad \nu^2 + \nu - \mu = 0 \quad \text{すなわち} \quad \mu = \nu(\nu + 1).$$

まとめておく。 $U$  は微分方程式 (8.4) の解のうち、 $[0, R)$  で無限回微分可能であることから、

$$(8.6) \quad (\exists \nu \in \mathbf{N} \cup \{0\}) \quad U(r) = r^n, \quad \mu = \nu(\nu + 1).$$

### 8.1.3 $v$ を求める

$v$  についての条件は、球面全体で  $C^2$  級であり、

$$(8.7) \quad -\Delta_S v(\theta, \phi) = \mu v(\theta, \phi) \quad ((\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi])$$

を満たすというものである。前項の議論で、 $\mu$  は非負整数  $\nu$  を用いて  $\mu = \nu(\nu + 1)$  と書けることが分かっている。

再び Fourier の変数分離法を用いる。 $v(\theta, \phi) = V(\theta)W(\phi)$  とおくと、

$$-\left(V''(\theta)W(\phi) + \cot \theta V'(\theta)W(\phi) + \frac{1}{\sin^2 \theta}V(\theta)W''(\phi)\right) = \nu(\nu + 1)V(\theta)W(\phi).$$

これから

$$\sin^2 \theta \frac{V''(\theta) + \cot \theta V'(\theta) + \nu(\nu + 1)V(\theta)}{V(\theta)} = -\frac{W''(\phi)}{W(\phi)}.$$

いつもの議論によって、この値は定数である。それを  $c$  とおくと、

$$(8.8) \quad -W''(\phi) = cW(\phi) \quad (\phi \in [0, 2\pi]),$$

$$(8.9) \quad V''(\theta) + \cot \theta V'(\theta) + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{c}{\sin^2 \theta}\right]V(\theta) = 0 \quad (\theta \in [0, \pi]).$$

---

<sup>1</sup> この変数変換で、より一般的な  $r^2U'''(t) + prU'(r) + qU(r) = 0$  という Euler の微分方程式が解ける。この元ネタは良く知らない（調べたことがない）が、平面極座標の関係で現れたのだろうか？ そういうれば円環領域で差分法をするときにもそうすることがあるのだったか。

この  $W$  は周期  $2\pi$  の関数でなければならない。ゆえに良く知られているように

$$\exists \ell \in \mathbf{N} \cup \{0\} \quad \text{s.t.} \quad c = \ell^2.$$

さらにこのとき

$$W(\phi) = A \cos \ell \phi + B \sin \ell \phi \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

$c = \ell^2$  を方程式に代入すると

$$V''(\theta) + \cot \theta V'(\theta) + \left[ \nu(\nu+1) - \frac{\ell^2}{\sin^2 \theta} \right] V(\theta) = 0.$$

$t = \cos \theta$  とおいて、 $\theta$  から  $t$  に変数変換すると

$$(1-t^2) \frac{d^2 V}{dt^2} - 2t \frac{dV}{dt} + \left[ \nu(\nu+1) - \frac{\ell^2}{1-t^2} \right] V = 0 \quad (-1 < t < 1).$$

これは **Legendre の陪微分方程式** (英語では general Legendre equation というのが普通?) と呼ばれる微分方程式である。この方程式の解のうち、 $t = \pm 1$  でも連続なものは、**Legendre の陪多項式** (associated Legendre polynomial)

$$(8.10) \quad P_\nu^\ell(t) := (1-t^2)^{\ell/2} \left( \frac{d}{dt} \right)^\ell P_\nu(t) \quad (\ell = 0, 1, \dots, \nu)$$

の定数倍に限ることが知られている。ここで  $P_\nu$  は、**Legendre 多項式** (Legendre polynomials)

$$(8.11) \quad P_\nu(t) := \frac{1}{2^\nu \nu!} \left( \frac{d}{dt} \right)^\nu [(t^2 - 1)^\nu] \quad (\text{Rodrigues の公式})$$

である。

Mathematica には `LegendreP[]` という関数が用意されていて、`LegendreP[n, t]` で  $P_n(x)$  を、`LegendreP[n, l, t]` で  $P_n^l(x)$  を計算することができる。

———— Mathematica に質問 ————

```
In[1]:= Table[LegendreP[n,t],{n,0,5}]

Out[1]= {1, t, -(1/2) + (3 t)/2, -(3 t)/2 + (5 t)/8, -(15 t)/4 + (35 t)/8,
         15 t/8 - 35 t/4 + 63 t/8}
```

つまり

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, & P_1(t) &= t, & P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1), & P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \\ P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3), & P_5(t) &= \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t). \end{aligned}$$

以下の三点を注意しておこう (定義式を見ればすぐに分かる)。

- (i)  $P_\nu(t)$  は、 $t$  の  $\nu$  次多項式である。
- (ii)  $P_\nu^0(t) = P_\nu(t)$ .
- (iii)  $\ell (> \nu)$  に対して、(強引に) (8.10) を用いて  $P_\nu^\ell(t)$  を定義しても  $P_\nu^\ell(t) \equiv 0$ .

### 8.1.4 変数分離した微分方程式

以上から、(8.7) の変数分離解は

$$P_\nu^\ell(\cos \theta)(A \cos \ell\phi + B \sin \ell\phi) \quad (\ell = 0, 1, \dots, \nu; A \text{ と } B \text{ は任意定数})$$

と求まり、(8.7) の一般解が次のように得られる。

$$v(\theta, \phi) = \frac{1}{2}A_0 P_\nu(\cos \theta) + \sum_{\ell=1}^{\nu} P_\nu^\ell(\cos \theta)(A_\ell \cos \ell\phi + B_\ell \sin \ell\phi) \quad (A_\ell, B_\ell \text{ は任意定数}).$$

### 8.1.5 変数分離解と一般解

以上より、Laplace 方程式の変数分離解として

$$r^\nu P_\nu^\ell(\cos \theta) \cos \ell\phi, \quad r^\nu P_\nu^\ell(\cos \theta) \sin \ell\phi \quad (\nu = 0, 1, \dots; \ell = 0, 1, \dots, \nu)$$

が得られた。

この“線型結合”

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu \left( \frac{1}{2}A_{\nu,0} P_\nu(\cos \theta) + \sum_{\ell=1}^{\nu} P_\nu^\ell(\cos \theta)(A_{\nu,\ell} \cos \ell\phi + B_{\nu,\ell} \sin \ell\phi) \right)$$

はやはり Laplace 方程式の解であり、実は任意の調和関数を表せることが分かる。係数  $A_{\nu,\ell}, B_{\nu,\ell}$  は直交性から決定することができる。

## 8.2 境界値問題の解の公式

(準備中)

## 8.3 おまけ: 球面 Laplace 作用素の固有値・固有関数

上の議論で分かったことをまとめておく。 $-\Delta_S$  の固有値は  $\nu(\nu + 1)$  ( $\nu \in \mathbb{N}_0$ ) で、

$$P_\nu^\ell(\cos \theta) \cos \ell\phi, \quad P_\nu^\ell(\cos \theta) \sin \ell\phi \quad (\ell = 0, 1, \dots, \nu)$$

はそれに属する固有関数である。すなわち

$$\begin{aligned} -\Delta P_\nu^\ell(\cos \theta) \cos \ell\phi &= \nu(\nu + 1) P_\nu^\ell(\cos \theta) \cos \ell\phi, \\ -\Delta P_\nu^\ell(\cos \theta) \sin \ell\phi &= \nu(\nu + 1) P_\nu^\ell(\cos \theta) \sin \ell\phi. \end{aligned}$$

一般論から、固有関数をすべて集めた

$$P_\nu^\ell(\cos \theta) \cos \ell\phi, \quad P_\nu^\ell(\cos \theta) \sin \ell\phi \quad (\nu = 0, 1, \dots; \ell = 0, 1, \dots, \nu)$$

は  $L^2(S^2)$  の完全系となるはずである。

## 8.4 球面調和関数 $Y_k^m(x)$

前節までの議論を見ると、次のような関数を定義する意義は分かりやすい。

$$(8.12) \quad Y_k^m(\theta, \phi) := (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi} \cdot \frac{(k-|m|)!}{(k+|m|)!}} P_k^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}.$$

陪多項式の右上の添字は非負のものしか使わない。 $(m + |m|)/2$  は要するに、 $m$  が  $\max\{m, 0\}$  ( $m$  が負ならば 0, そうでなければ  $m$ ) である。

余談 8.4.1 (C++用のクラス・ライブラリ boost では) Boost<sup>2</sup> には

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

を計算する関数

```
template <class T1, class T2> std::complex<calculated-result-type>
spherical_harmonic(unsigned n, int m, T1 theta, T2 phi);

template <class T1, class T2, class Policy> std::complex<calculated-result-type>
spherical_harmonic(unsigned n, int m, T1 theta, T2 phi, const Policy&);
```

が用意されている ([http://www.boost.org/doc/libs/1\\_65\\_0/libs/math/doc/html/math\\_toolkit/sf\\_poly/sph\\_harm.html](http://www.boost.org/doc/libs/1_65_0/libs/math/doc/html/math_toolkit/sf_poly/sph_harm.html))。これは複素数値であるわけだが、 $\operatorname{Re} Y_m^k(\theta, \phi)$ ,  $\operatorname{Im} Y_m^k(\theta, \phi)$  という実数値の関数(つまり  $e^{im\phi}$  の部分が  $\cos(m\phi)$ ,  $\sin(m\phi)$  になっている)を計算する関数

```
template <class T1, class T2> calculated-result-type
spherical_harmonic_r(unsigned n, int m, T1 theta, T2 phi);

template <class T1, class T2, class Policy> calculated-result-type
spherical_harmonic_r(unsigned n, int m, T1 theta, T2 phi, const Policy&);

template <class T1, class T2> calculated-result-type
spherical_harmonic_i(unsigned n, int m, T1 theta, T2 phi);

template <class T1, class T2, class Policy> calculated-result-type
spherical_harmonic_i(unsigned n, int m, T1 theta, T2 phi, const Policy&);
```

もある。 ■

## 8.5 Legendre 多項式, Legendre 倍多項式の計算

(この節は工事中)

$P_\nu(t)$ ,  $P_\nu^\ell(t)$  の数値が計算したい場合は、色々な方法がある。連続した  $\nu$ ,  $\ell$  について求めたい場合は、漸化式を用いると良い。

定義からすぐ分かる

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

と、次の Bonnet の漸化式 (Bonnet's recursion formula) を用いると  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$  が計算出来る。

**命題 8.5.1 (Bonnet の漸化式)**

$$(8.13) \quad (\nu + 1)P_{\nu+1}(x) = (2\nu + 1)xP_\nu(x) - \nu P_{\nu-1}(x)$$

**証明 母函数表示**

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

を用いる。両辺を  $t$  について微分すると

$$\frac{x - t}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}.$$

左辺に定義式を代入して

$$(x - t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}.$$

係数比較をすると (8.13) を得る。 ■

陪多項式の方は？定義から

$$P_\ell^0(x) = P_\ell(x)$$

であり、漸化式 (たくさんある)

$$\sqrt{1 - x^2}P_\ell^{m+1} = (\ell - m + 1)P_{\ell+1}^m(x) - (\ell + m + 1)xP_\ell^m(x).$$

を用いて右上の添字を上げて行くのか？これで  $0 \leq m \leq \ell$  に対して、 $P_\ell^m(x)$  が計算出来る。右上の添字が負の場合は

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(x)$$

を使う。この辺はまだ試していないので自信がない。

# 第9章 円盤領域における差分法

## 9.1 ターゲット問題

$\Omega := \{(x, y); x^2 + y^2 < R^2\}$  における熱方程式の初期値境界値問題

$$(9.1) \quad u_t(x, y) = \Delta u(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega, t \in (0, \infty))$$

$$(9.2) \quad u(x, y, t) = 0 \quad ((x, y) \in \Gamma, t \in (0, \infty))$$

$$(9.3) \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{\Omega})$$

を差分法で解こう。ここで  $\Gamma := \partial\Omega$ .

## 9.2 原点以外での Laplacian の差分近似 (素朴版)

$\Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 < R^2\}$  という領域を極座標変換すると  $D := \{(r, \theta); 0 \leq r < R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  が対応する。Laplacian の極座標表示は、3.1 で示したように

$$(9.4) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

である。

$N_r, N_\theta \in \mathbf{N}$  を取って、

$$h_r := \frac{R}{N_r}, \quad h_\theta := \frac{2\pi}{N_\theta},$$

$$\begin{aligned} r_i &:= i h_r \quad (i = 0, 1, \dots, N_r), \quad \theta_j := j h_\theta \quad (j = 0, 1, \dots, N_\theta), \\ u_{i,j} &:= u(r_i, \theta_j) \quad (i = 0, 1, \dots, N_r; j = 0, 1, \dots, N_\theta) \end{aligned}$$

とおき、 $u(r_i, \theta_j)$  の右辺の各項を中心差分近似すると

$$(9.5) \quad \begin{aligned} \Delta u(r_i, \theta_j) &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_\theta^2} \\ &\quad + O(h_r^2 + h_\theta^2) \quad (N_r, N_\theta \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

(あれ?  $i = 1$  のときを考えると  $O(h_r^2)$  と書くのは甘いか? これは一度ゆっくり考える必要がある。)

余談 9.2.1 (原点を含まない場合に有効なある工夫) 問題とする領域そのものが原点を含まない場合は、 $\rho = \log r$  と変数変換すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

は

$$e^{2\rho} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

に変換されることを覚えておくと役に立つことがある（そうです）。

実際

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right).$$

ゆえに熱方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right).$$

両辺に  $r^2 = e^{2\rho}$  をかけると

$$e^{2\rho} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \blacksquare$$

### 9.3 原点以外での Laplacian の差分近似 – Swartztrauber-Sweet 近似

$\Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 < R^2\}$  における Laplacian の近似を考える。Laplacian の極座標表示 (9.4) は

$$(9.6) \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

のようにも書き換えられる。ここに現われる導関数を中心差分近似するというのもオーソドックスな考え方である。

前節と同様に  $h_r, h_\theta, \theta_j$  を定めるが、 $r_i$  については、添字  $i$  が「半整数」 ( $i = m + 1/2, m \in \mathbf{Z}$  と書けるということ) についても用いる：

$$r_i = ih \quad (i = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots, N_r - 1/2, N_r).$$

$1 \leq i \leq N_r - 1, j = 0, 1, \dots, N_\theta - 1$  に対して

$$(9.7) \quad \begin{aligned}\Delta u(r_i, \theta_j) &\doteq \frac{1}{r_i h_r^2} (r_{i+1/2}(u_{i+1,j} - u_{ij}) - r_{i-1/2}(u_{ij} - u_{i-1,j})) \\ &\quad + \frac{1}{r_i^2 h_\theta^2} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})\end{aligned}$$

と近似する。

山本 [23] によると、これは Swartztrauber-Sweet 近似と呼ぶべきものらしい。以下では、SS 近似と略称する。

**忘れないためのメモ** 「この近似は」 Swartztrauber-Sweet (1973) により提案されたとあるが、どこが彼らのオリジナリティなのだろう。

Strikwerda-Nagel (1986), 松永・山本 [36] (これは山本先生の著書の文献番号) というのを探そう。解析法を解説してマスターすることが望まれる。

次の論文は、コピーしに行かないといけない (fulltext で契約してくれないかな — お願いして読めるようになった。嬉しい。)。

N. Matsunaga and T. Yamamoto, Convergence of Swartztrauber Sweet's approximation for the Poisson-type euqation on a disk, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 20, pp. 917–928 (1999).

## 9.4 原点での Laplacian の差分近似

(ネットでこの文書を見た人から、以下説明する方法の出典を尋ねられたことがあります。筆者は、差分法の定番本 Smith [20] (邦訳あり) で知りました。)

原点 ( $r = 0$ ) では、(9.5) や (9.7) は使えない。そこで極座標に変換しないで差分近似した

$$\begin{aligned}\triangle u(0, 0) &= u_{xx}(0, 0) + u_{yy}(0, 0) \\ &= \frac{u(h_x, 0) - 2u(0, 0) + u(-h_x, 0)}{h_x^2} + \frac{u(0, h_y) - 2u(0, 0) + u(0, -h_y)}{h_y^2} + O(h_x^2 + h_y^2)\end{aligned}$$

に戻って考える。 $h_x = h_y = h$  とすると

$$\triangle u(0, 0) = \frac{4}{h^2} \left\{ \frac{1}{4} [u(h, 0) + u(-h, 0) + u(0, h) + u(0, -h)] - u(0, 0) \right\} + O(h^2).$$

$N_\theta$  が 4 の倍数ならば、 $u_{ij} := u(r_i, \theta_j)$  として、

$$\triangle u(0, 0) = \frac{4}{h_r^2} \left[ \frac{1}{4} (u_{1,0} + u_{1,N_\theta/4} + u_{1,N_\theta/2} + u_{1,3N_\theta/4}) - u_{00} \right] + O(h_r^2).$$

ところで Laplacian は座標系の回転に関して不变であるから<sup>1</sup>、任意の  $j_0$  について

$$\triangle u(0, 0) = \frac{4}{h_r^2} \left( \frac{1}{4} (u_{1,j_0} + u_{1,N_\theta/4+j_0} + u_{1,N_\theta/2+j_0} + u_{1,3N_\theta/4+j_0}) - u_{00} \right) + O(h_r^2)$$

が成り立つことになる。

$j_0 = 0, 1, \dots, N_\theta/4 - 1$  について平均を取ると次式が得られる:

$$(9.8) \quad \triangle u(0, 0) = \frac{4}{h_r^2} \left( \frac{1}{N_\theta} \sum_{j=0}^{N_\theta-1} u_{1,j} - u_{00} \right) + O(h_r^2).$$

この式は有名な Laplacian の球面平均の定理で解釈することもできる (準備中)。

この (9.8) にすると、 $N_\theta$  が 4 の倍数である必然性はなくなる。

---

<sup>1</sup>つまり任意の  $\theta$  について、 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  として新しい変数  $x'$ ,  $y'$  を導入したときに、 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}$  が成り立つ。「微分方程式 2」の講義ノート [7] にも書いてあります。

## 9.5 陽解法

### 9.5.1 差分方程式

熱方程式の初期値境界値問題 (9.1), (9.2), (9.3) に対して、Laplacian  $\Delta u$  を前節までに説明した方法で近似し、 $u_t$  を前進差分近似することで、差分方程式を導く。

ここでは、SS 近似でない「素朴な」近似で説明するが、SS 近似を採用した場合もほとんど同様である。

繰り返しになるが、格子点の定め方から説明する。 $N_r, N_\theta \in \mathbf{N}, \tau > 0$  に対して、

$$\begin{aligned} h_r &:= \frac{R}{N_r}, \quad h_\theta := \frac{2\pi}{N_\theta}, \\ r_i &:= ih_r \quad (i = 0, 1, \dots, N_r), \quad \theta_j := jh_\theta \quad (j = 0, 1, \dots, N_\theta). \\ t_n &:= n\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \lambda_r &:= \frac{\tau}{h_r^2}, \quad \lambda_\theta := \frac{\tau}{h_\theta^2} \end{aligned}$$

とおく。

原点以外では、次のような差分方程式を課す(時間微分を前進差分近似、空間微分は中心差分近似)。

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\tau} = \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{ij}^n + U_{i-1,j}^n}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{ij}^n + U_{i,j-1}^n}{h_\theta^2}.$$

移項して整理すると

$$\begin{aligned} (9.9) \quad U_{ij}^{n+1} &= \left(1 - 2\lambda_r - \frac{2\lambda_\theta}{r_i^2}\right) U_{ij}^n + \lambda_r \left[ \left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i+1,j}^n + \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i-1,j}^n \right] \\ &\quad + \frac{\lambda_\theta}{r_i^2} (U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, N_r - 1; j = 0, 1, \dots, N_\theta - 1; n = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

ただし  $U_{i,N_\theta}^n = U_{i,0}^n$ ,  $U_{i,-1}^n = U_{i,N_\theta-1}^n$  と考える。また  $U_{0,j}^n$  は  $j$  によらず共通の値(原点一点に対応するので)とする。

原点については、9.4 節の議論から

$$\frac{U_{00}^{n+1} - U_{00}^n}{\tau} = \frac{4 \left( \frac{1}{N_\theta} \sum_{j=0}^{N_\theta-1} U_{1j}^n - U_{00}^n \right)}{h_r^2}.$$

これから

$$(9.10) \quad U_{00}^{n+1} = (1 - 4\lambda_r) U_{00}^n + \frac{4\lambda_r}{N_\theta} \sum_{j=0}^{N_\theta-1} U_{1j}^n \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$(9.11) \quad U_{0j}^{n+1} = U_{00}^{n+1} \quad (j = 1, 2, \dots, N_\theta - 1; n = 0, 1, \dots).$$

### 9.5.2 陽解法プログラム例

次のプログラムは、単位円盤領域における熱方程式の初期値境界値問題(境界条件は Dirichlet 条件)を、初期条件が

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = J_0(\mu_{1,0} r)$$

である場合に解くものである。解のグラフの鳥瞰図を描くために gnuplot を呼び出している。厳密解は

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta, t) = J_0(\mu_{1,0}r) \exp(-\mu_{1,0}^2 t)$$

である(4.1を見よ)。

(この初期値は単純すぎてあまり良くないかもしない。角度に依存する解を試そう。)

```
1  /*
2   * heat2d-disk-e.c --- 円盤における熱方程式を陽解法で解く
3   *
4   * To compile this program on WS's in 6701,
5   *           gcc -c call_gnuplot.c
6   *           ccmg heat2d-disk-e2.c call_gnuplot.o
7   * You can get call_gnuplot.c and call_gnuplot.h on the page
8   *           http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/program/
9   *
10  * Sample input
11
12 oyabun% ./heat2d-disk-e
13 Nr, Nt: 20 80
14 Tmax: 1
15 τ (≤ 7.66336e-06): 5e-6
16 λ=0.00281057 になりました。
17 Δ t(≥ 5e-06): 5e-3
18
19 */
20
21 #include <stdio.h>
22 #include <math.h>
23
24 /* to use matrix, new_matrix() */
25 #include <matrix.h>
26
27 #include "call_gnuplot.h"
28
29 double u0(double, double);
30 double exactu(double, double, double);
31 double maxnorm(int, int, matrix);
32
33 int main()
34 {
35     int Nr, Nt, i, j, n, skip, nMax;
36     double pi, hr, ht, ri, ri2, theta_j, M, ex;
37     double lambda_r, lambda_t, lambda;
38     double tau, Tmax, t, dt, s;
39     matrix u, newu;
40     char label[100];
41     /* 次の変数を 0 にすると原点だけで誤差を計算する。
42      * 0 以外の値(例えば 1)にすると円盤全体で誤差を計算する。
43      */
44     int zentai = 1;
45
46     pi = 4.0 * atan(1.0);
47     /* 分割数を決定 */
48     printf("Nr, Nt: ");
49     scanf("%d %d", &Nr, &Nt);
50     if ((u = new_matrix(Nr + 1, Nt + 1)) == NULL) {
51         fprintf(stderr, "配列 u を確保できませんでした。");
52         exit(1);
53 }
```

```

54  if ((newu = new_matrix(Nr + 1, Nt + 1)) == NULL) {
55      fprintf(stderr, "配列 newu を確保できませんでした。");
56      exit(1);
57  }
58  /* 最終時刻の決定 */
59  printf("Tmax: ");
60  scanf("%lf", &Tmax);
61
62  /* 刻み幅 */
63  hr = 1.0 / Nr;
64  ht = 2 * pi / Nt;
65
66  /* 時間刻み幅の決定 */
67  printf("τ (≤%g): ",
68      0.5 * (hr * hr * ht * ht) / (1 + ht * ht));
69  scanf("%lf", &tau);
70
71  /* λ r, λ θ */
72  lambda_r = tau / (hr * hr);
73  lambda_t = tau / (ht * ht);
74  lambda = lambda_r + lambda_t;
75
76  printf("λ=%g になりました。\\n", lambda);
77
78  /* 結果を出力する時間間隔を決定 */
79  printf("Δ t(≥%g): ", tau);
80  scanf("%lf", &dt);
81  if (dt < tau) {
82      dt = tau;
83      printf("Δ=%g\\n", dt);
84  }
85  skip = rint(dt / tau);
86
87  /* GNUPLOT の準備 */
88  open_gnuplot();
89
90  /* 初期値の設定 */
91  for (i = 0; i <= Nr; i++) {
92      ri = i * hr;
93      for (j = 0; j <= Nt; j++) {
94          theta_j = j * ht;
95          u[i][j] = u0(ri, theta_j);
96      }
97  }
98
99  /* ループ */
100 nMax = rint(Tmax / tau);
101 for (n = 1; n <= nMax; n++) {
102     for (i = 1; i < Nr; i++) {
103         ri = i * hr;
104         ri2 = ri * ri;
105         for (j = 0; j < Nt; j++) {
106             int jm1 = j - 1;
107             if (jm1 == -1)
108                 jm1 = Nt - 1;
109             newu[i][j] = (1 - 2 * lambda_r - 2 * lambda_t / (ri2)) * u[i][j]
110             + lambda_r * (u[i + 1][j] + u[i - 1][j])
111             + lambda_r * hr / (2 * ri) * (u[i + 1][j] - u[i - 1][j])
112             + lambda_t / (ri2) * (u[i][j + 1] + u[i][jm1]);
113     }
114 }
115 for (i = 1; i < Nr; i++)

```

```

116     newu[i][Nt] = newu[i][0];
117     /* Dirichlet 境界条件 */
118     for (j = 0; j <= Nt; j++)
119         newu[Nr][j] = 0.0;
120
121     /* 原点での値 */
122     s = 0;
123     for (j = 0; j < Nt; j++)
124         s += u[1][j];
125
126     newu[0][0] = lambda_r * (4 * (s / Nt - u[0][0])) + u[0][0];
127     for (j = 1; j <= Nt; j++)
128         newu[0][j] = newu[0][0];
129
130     /* 値の更新 */
131     for (i = 0; i <= Nr; i++)
132         for (j = 0; j <= Nt; j++)
133             u[i][j] = newu[i][j];
134
135     t = tau * n;
136
137     /* 誤差を測る */
138     if (zentai) {
139         M = 0.0;
140         for (i = 0; i <= Nr; i++) {
141             ri = i * hr;
142             for (j = 0; j <= Nt; j++) {
143                 double e;
144                 theta_j = j * ht;
145                 e = fabs(exactu(ri, theta_j, t) - u[i][j]);
146                 if (e > M)
147                     M = e;
148             }
149         }
150         printf("n=%d, norm=%g, t=%g, 誤差=%g\n",
151               n, maxnorm(Nr + 1, Nt + 1, u), t, M);
152     }
153     else {
154         ex = exactu(0.0, 0.0, t);
155         M = fabs(u[0][0] - ex);
156         printf("n=%d, norm=%g, t=%g, exactu=%g , 誤差=%g\n",
157               n, maxnorm(Nr + 1, Nt + 1, u), t, ex, M);
158     }
159
160     /* Δ t の整数倍の時刻ではグラフを描く */
161     if (n % skip == 0) {
162         t = tau * n;
163         sprintf(label, "t=%g", t);
164         disk(Nr, Nt, u, label);
165     }
166 }
167
168 close_gnuplot();
169
170     return 0;
171 }
172
173 /* 厳密解を計算する関数 */
174
175 #define mu01      (2.404825557695773)
176
177 double exactu(double r, double theta, double t)

```

```

178  {
179      return exp(- mu01 * mu01 * t) * j0(mu01 * r);
180  }
181
182 /* 初期データ */
183 double u0(double r, double theta)
184 {
185     return j0(mu01 * r);
186 }
187
188 double maxnorm(int m, int n, matrix u)
189 {
190     int i, j, i0, j0;
191     double tmpmax, absu;
192     i0 = 0;
193     j0 = 0;
194     tmpmax = fabs(u[0][0]);
195     for (i = 0; i < m; i++)
196         for (j = 0; j < n; j++)
197             if ((absu = fabs(u[i][j])) > tmpmax) {
198                 tmpmax = absu;
199                 i0 = i;
200                 j0 = j;
201             }
202     printf("(i,j)=(%d,%d)", i0, j0);
203     return tmpmax;
204 }

```

### 9.5.3 陽解法の安定性

数値実験によると<sup>2</sup>、上で説明した陽解法スキームの安定性条件はかなり厳しいようである。  
まだ完全に解析しきれていないが、安定性条件は(9.9)の係数を正とするための

$$(9.12) \quad \lambda_r \leq \frac{1}{4}, \quad \min_{1 \leq i \leq N_r - 1} \left( 1 - 2\lambda_r - \frac{2\lambda_\theta}{r_i^2} \right) \geq 0$$

ではないかと予想している<sup>3</sup>。前者の不等式は

$$(9.13) \quad \tau \leq \frac{h_r^2}{4}$$

と書き直せ、また後者は

$$0 \leq 1 - 2\lambda_r - \frac{2\lambda_\theta}{r_1^2} = 1 - \frac{2\tau}{h_r^2} - \frac{2\tau}{h_\theta^2 h_r^2} = 1 - \tau \left( \frac{2}{h_r^2} + \frac{2}{(h_\theta h_r)^2} \right)$$

すなわち

$$(9.14) \quad \tau \leq \left( \frac{2}{h_r^2} + \frac{2}{(h_r h_\theta)^2} \right)^{-1} = \frac{(h_r h_\theta)^2}{2(1 + h_\theta^2)}$$

と書き直すことができる。

---

<sup>2</sup>前項のプログラムでは、初期条件として  $\theta$  に依存しないものを採用しているが、この場合は時間刻み幅をかなり大きくしても破綻なく計算できる。安定性条件を実験的に調べるには、初期条件を  $\theta$  に依存するものに変更する必要があるようである。そのうちにプログラムを差し換えるつもりだが、急ぐ場合は遠藤・高木・内藤レポート [26] を参照せよ。

<sup>3</sup>これが十分であることは、以下に証明を書いてあるわけだが、必要であることの厳密な証明は難しい。「離散最大値原理を満たすために必要」くらいならば簡単に証明できるかな。

一目見て、(9.14) の方が (9.13) よりも厳しい条件である。実際、 $h_\theta^2 \leq 1$  の場合は、(9.13) は (9.14) から導かれる。

この不等式が十分条件になることの証明は、1 次元区間における熱方程式に対する陽解法の安定性の証明と同様である。

$\|\cdot\|$  を最大値ノルムとする。例えば

$$\|U^n\| := \max_{\substack{0 \leq i \leq N_r \\ 0 \leq j \leq N_\theta}} |U_{ij}^n|$$

である。 $i \neq 0, N_r$  のとき、

$$\begin{aligned} |U_{ij}^{n+1}| &\leq \left(1 - 2\lambda_r - \frac{2\lambda_\theta}{r_i^2}\right) |U_{ij}^n| + \lambda_r \left[ \left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) |U_{i+1,j}^n| + \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) |U_{i-1,j}^n| \right] \\ &\quad + \frac{\lambda_\theta}{r_i^2} (|U_{i,j+1}^n| + |U_{i,j-1}^n|) \\ &\leq \left(1 - 2\lambda_r - \frac{2\lambda_\theta}{r_i^2}\right) \|U^n\| + \lambda_r \left[ \left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) \|U^n\| + \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) \|U^n\| \right] \\ &\quad + \frac{\lambda_\theta}{r_i^2} (\|U^n\| + \|U^n\|) \\ &= \|U^n\|. \end{aligned}$$

また  $i = 0$  の場合は、 $1 - 4\lambda_r \geq 0$  に注意すると

$$\|U_{00}^{n+1}\| \leq (1 - 4\lambda_r) |U_{00}^n| + \frac{4\lambda_r}{N_\theta} \sum_{j=0}^{N_\theta-1} |U_{1,j}^n| \leq (1 - 4\lambda_r) \|U^n\| + \frac{4\lambda_r}{N_\theta} \cdot N_\theta \|U^n\| = \|U^n\|.$$

$i = N_r$  の場合は

$$U_{ij}^{n+1} = \alpha_{ij}$$

であるから、 $\|U_{ij}^{n+1}\| \leq |\alpha_{ij}| \equiv \|\alpha\|$ .

ゆえに  $\|U^{n+1}\| \leq \max\{\|U^n\|, \|\alpha\|\}$ . これから

$$\|U^n\| \leq \max\{\|U^0\|, \|\alpha\|\} = \max\{\|u_0\|, \|\alpha\|\}.$$

( $u_0$  は初期値、 $\alpha$  は境界値であったことを思いだそう。)

こうして、解(差分解)の最大値ノルムが、初期値と境界値で定まる量によって抑えられることが分かった。すなわちこの差分スキームは、最大値ノルムの意味で安定である。 ■

一応安定性の十分条件 (9.14) は得られたというものの、 $\tau = O((h_r h_\theta)^2)$  でないといけないというのは、長方形領域における安定性の条件と比べると非常に厳しく、到底受け入れられるものではない。

なお、数値実験の結果によると、(9.14) は安定性の必要条件でもあるらしい。数値実験以外にも状況証拠は得られていて、筆者としては必要条件であることを信じているが、その証明は今後の課題である。

## 9.6 「半陰」スキーム

### 9.6.1 差分方程式

以下  $\theta$  方向の微分係数を陰的に扱うことにする。すなわち

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\tau} = \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{ij}^n + U_{i-1,j}^n}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{ij}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}}{h_\theta^2}.$$

原点の処理に関してはこれまで通りとする。こうして出来るスキームを、この文書では「半陰」スキームと呼ぶことにする。 $r$  方向についてはこれまで通りで、 $\theta$  方向だけ陰解法、つまり半分だけ陰解法という意味で「半」と付けたのだが、かなり自分勝手な命名であり、ここに書いてあることを「外で」話すときはくれぐれも注意すること。いずれにせよ、暫定的な名前で、その気分をカッコ「」で表している。

(片方向陰解法とか、角度方向陰解法とか、偏角方向陰解法とか、色々考えてはいるのだけど、ぐっと来るものが無い…)

ともあれ、上の差分方程式を整理すると

$$(9.15) \quad \begin{aligned} & \left(1 + \frac{2\lambda_\theta}{r_i^2}\right) U_{ij}^{n+1} - \frac{\lambda_\theta}{r_i^2} (U_{i,j+1}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) \\ &= (1 - 2\lambda_r) U_{ij}^n + \lambda_r \left[ \left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i+1,j}^n + \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i-1,j}^n \right] \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, N_r - 1; j = 0, 1, \dots, N_\theta - 1; n = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

ただし、左辺に現れる  $U_{i,-1}^{n+1}, U_{i,N_\theta}^{n+1}$  はそれぞれ  $U_{i,N_\theta-1}^{n+1}, U_{i,0}^{n+1}$  のことであり、右辺に現れる  $U_{N_r,j}^n$  は境界値から計算され ( $= u|_{r=1, \theta=\theta_j}$ )、もちろん  $U_{0j}^n$  は ( $j$  が何であっても) 原点での値である。

ここで

$$(9.16) \quad A_i := \left(1 + \frac{2\lambda_\theta}{r_i^2}\right) I - \frac{\lambda_\theta}{r_i^2} J, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(N_\theta; \mathbf{R}),$$

$$(9.17) \quad \mathbf{U}_i^{n+1} := (U_{i0}^{n+1}, \dots, U_{i,N_\theta-1}^{n+1})^T,$$

$$(9.18) \quad \mathbf{b}_i^n := \begin{pmatrix} (1 - 2\lambda_r) U_{i0}^n + \lambda_r \left[ \left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i+1,0}^n + \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i-1,0}^n \right] \\ \vdots \\ (1 - 2\lambda_r) U_{ij}^n + \lambda_r \left[ \left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i+1,j}^n + \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i-1,j}^n \right] \\ \vdots \\ (1 - 2\lambda_r) U_{i,N_\theta-1}^n + \lambda_r \left[ \left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i+1,N_\theta-1}^n + \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i-1,N_\theta-1}^n \right] \end{pmatrix}$$

とおくと

$$(9.19) \quad A_i \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{b}_i^n \quad (i = 1, 2, \dots, N_r - 1).$$

原点においては、陽解法のときと同様に

$$(9.20) \quad U_{00}^{n+1} = (1 - 4\lambda_r) U_{00}^n + \frac{4\lambda_r}{N_\theta} \sum_{j=0}^{N_\theta-1} U_{1j}^n$$

を採用する。

この「半陰」スキームでは、未知数の個数が  $N_\theta$  の連立 1 次方程式を  $N_r - 1$  個解くことになる。普通の陰解法では、未知数の個数が  $N_\theta N_r$  の連立 1 次方程式を 1 個解くことになるので、それと比べると、「半陰」スキームでは計算量がかなり節約されることになる。

(ここはもっと具体的に書こう。)

## 9.6.2 「周期3重対角行列」係数の方程式

(ここは FFT 使うという手もあるかも。調べよう。)

3重対角行列の LU 分解と、それに基づく三重対角行列を係数行列とする連立1次方程式の解法は有名だが、(9.16) のように

$$\begin{pmatrix} d_1 & u_1 & & \ell_1 \\ \ell_2 & d_2 & u_2 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ell_{N-1} & d_{N-1} & u_{N-1} \\ u_N & & \ell_N & d_N \end{pmatrix}$$

の形をした行列の場合はどうなるだろうか？実はこの行列をもう少し一般化した

$$\begin{pmatrix} d_1 & u_1 & & r_1 \\ \ell_2 & d_2 & u_2 & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & r_{N-2} \\ & \ell_{N-1} & d_{N-1} & u_{N-1} \\ b_1 & \dots & b_{N-2} & \ell_N & d_N \end{pmatrix}$$

の形の行列は

$$\begin{pmatrix} * & & & \\ * & * & & \\ \ddots & \ddots & & \\ & * & * & \\ * & \dots & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & & * \\ * & * & * & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & * & * & \\ & & & * \end{pmatrix}$$

のように LU 分解できる。このことの証明はさぼるが（ちょっと考えれば明らかである）、数値実験で状況証拠を見せておこう。

MATLAB プログラム `testptrilu.m`

```

1 function a=testptrilu(n)
2 a=zeros(n,n);
3 for i=1:n
4 a(i,i)=4;
5 end
6 for i=2:n
7 a(i,i-1)=-1;
8 end
9 for i=1:n-1
10 a(i,i+1)=-1;
11 end
12 a(1,n)=-1;
13 a(n,1)=-1;
```

というプログラムを準備しておいて、以下の計算をした。

```

octave:1> a=testptrilu(8)
a =

```

4	-1	0	0	0	0	0	-1
-1	4	-1	0	0	0	0	0
0	-1	4	-1	0	0	0	0
0	0	-1	4	-1	0	0	0
0	0	0	-1	4	-1	0	0
0	0	0	0	-1	4	-1	0
0	0	0	0	0	-1	4	-1
-1	0	0	0	0	-1	4	

```

octave:2> [l u p]=lu(a);
octave:3> l
l =

```

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.25000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	-0.26667	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	-0.26786	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.26794	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.26795	1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.26795	1.00000	0.00000
-0.25000	-0.06667	-0.01786	-0.00478	-0.00128	-0.00034	-0.26804	1.00000

```

octave:4> u
u =

```

4.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-1.00000
0.00000	3.75000	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.25000
0.00000	0.00000	3.73333	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.06667
0.00000	0.00000	0.00000	3.73214	-1.00000	0.00000	0.00000	-0.01786
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	3.73206	-1.00000	0.00000	-0.00478
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	3.73205	-1.00000	-0.00128
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	3.73205	-1.00034
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	3.46392

```

octave:5> norm(l*u-a)
ans = 1.1102e-16
octave:6>

```

(後から気が付いたのだが、`[l u p]=lu(a);` でなく、`[l u]=lu(a);` とするべきかもしれない。)

この LU 分解を実行する関数 `ptrilu0()`, `ptrilu1()` とそれに基づいて連立 1 次方程式を解く C の関数 `ptrisol0()`, `ptrisol1()` を作成した。付録の A 「周期三重対角行列」を見よ。

### 9.6.3 「半陰」スキームのプログラム例

```

1  /*
2   * heat2d-disk-i.c -- solve the heat equation in a two dimensional disk
3   * by semi-implicit finite difference method.
4   *
5   * To compile this program on WS's in 6701,
6   *      gcc -o heat2d-disk-i heat2d-disk-i.c ptrilu.o call_gnuplot.o -lmatrix -lglscd -lX11 -l
7   * or try
8   *      ccmg heat2d-disk-i.c ptrilu.o call_gnuplot.o
9   */
10

```

```

11 #include <stdio.h>
12 #include <math.h>
13
14 /* to use matrix, new_matrix() */
15 #include "matrix.h"
16 /* to use gnuplot */
17 #include "call_gnuplot.h"
18 /* to use ptrilu() */
19 #include "ptrilu.h"
20
21 double u0(double, double);
22 double maxnorm(int, int, matrix);
23 double exactu(double, double, double);
24
25 double pi;
26
27 int main()
28 {
29     int Nr, Nt, i, j, n, skip, nMax;
30     double hr, ht, ri, theta_j;
31     double lambda_r, lambda_t;
32     double tau, tau_limit, tau_limit2, Tmax, t, dt, s, ex, M;
33     matrix u, newu;
34     vector *al, *ad, *au, *ab, *ar, b;
35     char label[100];
36     /* 次の変数を 0 にすると原点だけで誤差を計算する。
37      * 0 以外の値（例えば 1）にすると円盤全体で誤差を計算する。
38      */
39     int zentai = 1;
40
41     pi = 4.0 * atan(1.0);
42
43     /* 分割の細かさを指定する */
44     printf("Nr, Nt: ");
45     scanf("%d %d", &Nr, &Nt);
46     /* 差分解を記憶する変数の準備 */
47     if ((u = new_matrix(Nr + 1, Nt + 1)) == NULL) {
48         fprintf(stderr, "配列 u を確保できませんでした。");
49         exit(1);
50     }
51     if ((newu = new_matrix(Nr + 1, Nt + 1)) == NULL) {
52         fprintf(stderr, "配列 newu を確保できませんでした。");
53         exit(1);
54     }
55     /* 連立 1 次方程式の係数行列を記憶するための変数の準備 */
56     al = malloc(sizeof(vector *) * Nr);
57     ad = malloc(sizeof(vector *) * Nr);
58     au = malloc(sizeof(vector *) * Nr);
59     ab = malloc(sizeof(vector *) * Nr);
60     ar = malloc(sizeof(vector *) * Nr);
61     for (i = 1; i < Nr; i++) {
62         if ((al[i] = new_vector(Nt)) == NULL)
63             perror("cannot allocate matirx.");
64         if ((ad[i] = new_vector(Nt)) == NULL)
65             perror("cannot allocate matirx.");
66         if ((au[i] = new_vector(Nt)) == NULL)
67             perror("cannot allocate matirx.");
68         if ((ab[i] = new_vector(Nt)) == NULL)
69             perror("cannot allocate matirx.");
70         if ((ar[i] = new_vector(Nt)) == NULL)
71             perror("cannot allocate matirx.");
72     }

```

```

73 if ((b = new_vector(Nt + 1)) == NULL)
74     perror("cannot allocate matirx.");
75
76 printf("Tmax: ");
77 scanf("%lf", &Tmax);
78
79 hr = 1.0 / Nr;
80 ht = 2 * pi / Nt;
81
82 tau_limit = 0.5 * (hr * hr * ht * ht) / (1 + ht * ht);
83 tau_limit2 = 0.25 * hr * hr;
84 printf("τ (陽解法の場合の上限=%g, λ r ≤ 1/4 のための上限=%g): ",
85        tau_limit, tau_limit2);
86 scanf("%lf", &tau);
87
88 lambda_r = tau / (hr * hr);
89 lambda_t = tau / (ht * ht);
90
91 printf("Δ t: ");
92 scanf("%lf", &dt);
93 if (dt < tau) {
94     dt = tau;
95     printf("Δ t=%g\n", dt);
96 }
97 skip = rint(dt / tau);
98
99 open_gnuplot();
100
101 for (i = 0; i <= Nr; i++) {
102     ri = i * hr;
103     for (j = 0; j <= Nt; j++) {
104         theta_j = j * ht;
105         u[i][j] = u0(ri, theta_j);
106     }
107 }
108 /* 係数行列に値をセットして、LU 分解しておく */
109 for (i = 1; i < Nr; i++) {
110     double ri, ri2, d, od;
111     ri = i * hr;
112     ri2 = ri * ri;
113     d = 1 + 2 * lambda_t / ri2;
114     od = -lambda_t / ri2;
115     for (j = 0; j < Nt; j++) {
116         ad[i][j] = d;
117         al[i][j] = au[i][j] = od;
118         ab[i][j] = ar[i][j] = 0.0;
119     }
120     ab[i][0] = ab[i][Nt - 2] = ar[i][0] = ar[i][Nt - 2] = od;
121     ptrilu0(Nt, al[i], ad[i], au[i], ab[i], ar[i]);
122 }
123
124 /* 時間にに関するループ */
125 nMax = rint(Tmax / tau);
126 for (n = 1; n <= nMax; n++) {
127     for (i = 1; i < Nr; i++) {
128         double alpha, beta;
129         /* 右辺を作る */
130         alpha = lambda_r * (1.0 + 0.5 / i);
131         beta = lambda_r * (1.0 - 0.5 / i);
132         for (j = 0; j < Nt; j++) {
133             b[j] = (1 - 2 * lambda_r) * u[i][j] +
134                 alpha * u[i + 1][j] + beta * u[i - 1][j];

```

```

135     }
136     /* 連立 1 次方程式を解く */
137     ptrisolo(Nt, al[i], ad[i], au[i], ab[i], ar[i], b);
138     /* コピーする */
139     for (j = 0; j < Nt; j++)
140         newu[i][j] = b[j];
141     newu[i][Nt] = b[0];
142 }
143 /* 同次 Dirichlet 境界条件 */
144 for (j = 0; j <= Nt; j++)
145     newu[Nr][j] = 0.0;
146
147 /* 原点 */
148 s = 0.0;
149 for (j = 0; j < Nt; j++)
150     s += u[1][j];
151
152 newu[0][0] = 4 * lambda_r * (s / Nt - u[0][0]) + u[0][0];
153 for (j = 1; j <= Nt; j++)
154     newu[0][j] = newu[0][0];
155
156 /* 更新 */
157 for (i = 0; i <= Nr; i++)
158     for (j = 0; j <= Nt; j++)
159         u[i][j] = newu[i][j];
160
161 t = n * tau;
162 /* 誤差を測る */
163 if (zentai) {
164     M = 0.0;
165     for (i = 0; i <= Nr; i++) {
166         ri = i * hr;
167         for (j = 0; j <= Nt; j++) {
168             double e;
169             theta_j = j * ht;
170             e = fabs(exactu(ri, theta_j, t) - u[i][j]);
171             if (e > M)
172                 M = e;
173         }
174     }
175     printf("n=%d, norm=%g, t=%g, 誤差=%g\n",
176           n, maxnorm(Nr + 1, Nt + 1, u), t, M);
177 }
178 else {
179     ex = exactu(0.0, 0.0, t);
180     M = fabs(u[0][0] - ex);
181     printf("n=%d, norm=%g, t=%g, exactu=%g, 誤差=%g\n",
182           n, maxnorm(Nr + 1, Nt + 1, u), t, ex, M);
183 }
184
185 if (n % skip == 0) {
186     t = n * tau;
187     sprintf(label, "t=%g", t);
188     disk(Nr, Nt, u, label);
189 }
190 }
191
192 close_gnuplot();
193
194 return 0;
195 }
196

```

```

197 #define mu01 (2.404825557695773)
198
199 /* 初期値 */
200 double u0(double r, double theta)
201 {
202     return j0(mu01 * r);
203 }
204
205 /* 厳密解 */
206 double exactu(double r, double theta, double t)
207 {
208     return exp(- mu01 * mu01 * t) * j0(mu01 * r);
209 }
210
211 double maxnorm(int m, int n, matrix u)
212 {
213     int i, j, i0, j0;
214     double tmpmax, absu;
215     i0 = 0;
216     j0 = 0;
217     tmpmax = fabs(u[0][0]);
218     for (i = 0; i < m; i++)
219         for (j = 0; j < n; j++)
220             if ((absu = fabs(u[i][j])) > tmpmax) {
221                 tmpmax = absu;
222                 i0 = i;
223                 j0 = j;
224             }
225     printf("(i,j)=(%d,%d)", i0, j0);
226     return tmpmax;
227 }

```

#### 9.6.4 「半陰」スキームの安定性

これも類推と数値実験から、遠藤・高木・内藤 [26] では、上の「半陰」スキームが安定であるための必要十分条件は

$$1 - 4\lambda_r \geq 0 \quad \text{i.e.} \quad \lambda_r \leq \frac{1}{4}$$

であると予想している。これが本当ならば「半陰」スキームは一応の満足が行くと考えられる(十分性は証明できそうなので、満足??)。

### 9.7 ADI スキーム

#### 9.7.1 2005年春の時点での見解

この章は、何度も言及している 1998 年度卒研の遠藤・高木・内藤 [26] の内容をまとめるつもりで書き出したものである。最初は前節の半陰スキームでとりあえずうまく行っているが、ADI 法にする方がもっと良いだろうと(実は根拠なく)信じていた。ところが 2004 年暮れから 2005 年年明けにかけて、実際に ADI 法のプログラムを書いて実験してみる機会があり、「もっと良い」と言うことに疑問を持つようになった。特に円柱領域の数値実験の経験から「むしろ半陰スキームのままの方が良いという可能性もある」と考えている。この問題はいつかは完全に解決したいと思っているが、はてさていつになるでしょう。

(というわけで、実は疑問だらけの ADI スキームであるが、まずはやってみようということで、そのまま残す。)

## 9.7.2 差分方程式

### 第 $n$ 段から第 $n + 1/2$ 段

$\theta$  に関する導関数の部分を陰的に扱うこととする (基本的に 9.6 の半陰解法と同じである)。

$$\frac{U_{ij}^{n+1/2} - U_{ij}^n}{\tau/2} = \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{ij}^n + U_{i-1,j}^n}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{U_{i,j+1}^{n+1/2} - 2U_{ij}^{n+1/2} + U_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_\theta^2}.$$

$\lambda'_r := \tau/(2h_r^2) = \lambda_r/2$ ,  $\lambda'_\theta := \tau/(2h_\theta^2) = \lambda_\theta/2$ , とおくと、

$$U_{ij}^{n+1/2} - U_{ij}^n = \lambda'_r(U_{i+1,j}^n - 2U_{ij}^n + U_{i-1,j}^n) + \lambda'_r \frac{h_r}{2r_i}(U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n) + \frac{\lambda'_\theta}{r_i^2}(U_{i,j+1}^{n+1/2} - 2U_{ij}^{n+1/2} + U_{i,j-1}^{n+1/2}).$$

結局 (もちろん) 半陰スキームと同じ形

$$(9.21) \quad \begin{aligned} & \left(1 + \frac{2\lambda'_\theta}{r_i^2}\right) U_{ij}^{n+1/2} - \frac{\lambda'_\theta}{r_i^2} \left(U_{i,j+1}^{n+1/2} + U_{i,j-1}^{n+1/2}\right) \\ &= (1 - 2\lambda'_r) U_{ij}^n + \lambda'_r \left[ \left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i+1,j}^n + \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i-1,j}^n \right] \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, N_r - 1; j = 0, 1, \dots, N_\theta - 1; n = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

になる。(半陰解法のときと同じ注意であるが) ただし  $U_{i,-1}^{n+1/2} = U_{i,N_\theta-1}^{n+1/2}$ ,  $U_{i,N_\theta}^{n+1/2} = U_{i,0}^{n+1/2}$  とする。

$$(9.22) \quad A'_i := \left(1 + \frac{2\lambda'_\theta}{r_i^2}\right) I - \frac{\lambda'_\theta}{r_i^2} J, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(N_\theta; \mathbf{R}),$$

$$(9.23) \quad \mathbf{U}_i^{n+1/2} := \left(U_{i0}^{n+1/2}, \dots, U_{i,N_\theta-1}^{n+1/2}\right)^T,$$

$$(9.24) \quad \mathbf{b}_i^n := \begin{pmatrix} (1 - 2\lambda'_r)U_{i0}^n + \lambda'_r \left[\left(1 + \frac{h_r}{2r_1}\right) U_{i+1,0}^n + \left(1 - \frac{h_r}{2r_1}\right) U_{i-1,0}^n\right] \\ \vdots \\ (1 - 2\lambda'_r)U_{ij}^n + \lambda'_r \left[\left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i+1,j}^n + \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i-1,j}^n\right] \\ \vdots \\ (1 - 2\lambda'_r)U_{i,N_\theta-1}^n + \lambda'_r \left[\left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i+1,N_\theta-1}^n + \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i-1,N_\theta-1}^n\right] \end{pmatrix}$$

とおくと

$$(9.25) \quad A_i \mathbf{U}_i^{n+1/2} = \mathbf{b}_i^n \quad (i = 1, 2, \dots, N_r - 1).$$

原点においては、陽解法のときと同様に

$$(9.26) \quad U_{00}^{n+1/2} = (1 - 4\lambda_r)U_{00}^n + \frac{4\lambda_r}{N_\theta} \sum_{j=0}^{N_\theta-1} U_{1j}^n$$

を採用する。

## 第 $n + 1/2$ 段から第 $n + 1$ 段

今度は  $r$  に関する導関数の部分を陰的に扱うことにする。

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^{n+1/2}}{\tau/2} = \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{ij}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2h_r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{U_{i,j+1}^{n+1/2} - 2U_{ij}^{n+1/2} + U_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_\theta^2}.$$

分母を払って、

$$U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^{n+1/2} = \lambda'_r(U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{ij}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}) + \lambda'_r \frac{h_r}{2r_i}(U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}) + \frac{\lambda'_\theta}{r_i^2}(U_{i,j+1}^{n+1/2} - 2U_{ij}^{n+1/2} + U_{i,j-1}^{n+1/2}).$$

移項して整理すると

$$\begin{aligned} (1 + 2\lambda'_r)U_{ij}^{n+1} - \lambda'_r \left[ \left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i+1,j}^{n+1} + \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i-1,j}^{n+1} \right] \\ = \left(1 - \frac{2\lambda'_\theta}{r_i^2}\right) U_{ij}^{n+1/2} + \frac{\lambda'_\theta}{r_i^2}(U_{i,j+1}^{n+1/2} + U_{i,j-1}^{n+1/2}). \end{aligned}$$

$i = 1$  のとき  $U_{0j}^{n+1}$  (原点での値),  $i = N_r - 1$  のとき  $U_{N_r j}^{n+1}$  (境界  $r = 1$  での値) が差分方程式に現れるが、これは右辺に移項する。

こうして  $j = 0, 1, \dots, N_\theta - 1$  について

$$B\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{c}_j^{n+1/2}$$

を得る。ただし

$$B := \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda'_r & -\lambda'_r \left(1 + \frac{h_r}{2r_1}\right) & & & \\ -\lambda'_r \left(1 - \frac{h_r}{2r_2}\right) & 1 + 2\lambda'_r & -\lambda'_r \left(1 + \frac{h_r}{2r_2}\right) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda'_r \left(1 - \frac{h_r}{2r_{N_r-2}}\right) & 1 + 2\lambda'_r & -\lambda'_r \left(1 + \frac{h_r}{2r_{N_r-2}}\right) \\ & & & -\lambda'_r \left(1 - \frac{h_r}{2r_{N_r-1}}\right) & 1 + 2\lambda'_r \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}_j^{n+1} := (U_{1j}^{n+1}, \dots, U_{N_r-1,j}^{n+1})^T,$$

$$\mathbf{c}_j^{n+1/2} := \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2\lambda'_\theta}{r_1^2}\right) U_{1j}^{n+1/2} + \frac{\lambda'_\theta}{r_1^2}(U_{1,j+1}^{n+1/2} + U_{1,j-1}^{n+1/2}) \\ \vdots \\ \left(1 - \frac{2\lambda'_\theta}{r_i^2}\right) U_{ij}^{n+1/2} + \frac{\lambda'_\theta}{r_i^2}(U_{i,j+1}^{n+1/2} + U_{i,j-1}^{n+1/2}) \\ \vdots \\ \left(1 - \frac{2\lambda'_\theta}{r_{N_r-1}^2}\right) U_{N_r-1,j}^{n+1/2} + \frac{\lambda'_\theta}{r_{N_r-1}^2}(U_{N_r-1,j+1}^{n+1/2} + U_{N_r-1,j-1}^{n+1/2}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda'_r \left(1 - \frac{h_r}{2r_1}\right) U_{0j}^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda'_r \left(1 + \frac{h_r}{2r_{N_r-1}}\right) U_{N_r j}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

$U_{0j}^{n+1}$  は原点の値であるが、これは陽解法で

$$(9.27) \quad U_{0j}^{n+1} = U_{00}^{n+1} = (1 - 4\lambda'_r)U_{00}^{n+1/2} + \frac{4\lambda'_r}{N_\theta} \sum_{j=0}^{N_\theta-1} U_{1j}^{n+1/2}$$

と与えることにする。

$U_{N_r j}^{n+1}$  は境界上の値であるから、Dirichlet 境界条件から求めることができる:

$$U_{N_r j}^{n+1} = u|_{r=1, \theta=\theta_j, t=t_n} = f(\cos j h_\theta, \sin j h_\theta, n\tau).$$

### 9.7.3 ADI スキームのプログラム例

(まだバグ入り)

```
/*
 * heat2d-disk-adi.c --- ADI 法により二次元円盤の熱方程式を解くプログラム
 *
 * 参考: http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lab0/text/heat-fdm-2.pdf
 */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include "ptrilu.h"
#include "trid-lu.h"
/* to use gnuplot */
#define USEGNUPLOT
#ifndef USEGNUPLOT
#include "call_gnuplot.h"
#endif

#define BESSEL

/* 初期値 */
double u0(double, double);
/* 境界値 */
double boundary_data(double, double, double);
/* 厳密解 */
double exactu(double r, double theta, double t);
/* ノルム計算 */
double maxnorm(int m, int n, matrix u);
/* 円周率 */
double PI;

int main()
{
    int n, i, j, nMax, NN, Nr, Nt;
    double tau, t, Tmax, hr, ht, dt;
    double ri, rr, coef_a, coef_b, coef_c, lambda_r, lambda_t, s;
    vector b, Bd, Bl, Bu;
    matrix Ad, Al, Au, Ab, Ar, U, UU;
    int zentai = 1, output = 0;
    double MaxError;
    double tau_limit, tau_limit2;
    int skip;
    char label[100];

    PI = 4.0 * atan(1.0);

    /* いつまで計算するか */
    printf("Tmax: ");
    scanf("%lf", &Tmax);

    /* r, θ 各方向の分割数 */
    printf("Nr, Nθ: ");
    scanf("%d%d", &Nr, &Nt);

    /* 刻み幅 */
    hr = 1.0 / Nr;
    ht = 2 * PI / Nt;
```

```

tau_limit = 0.5 * (hr * hr * ht * ht) / (1 + ht * ht);
tau_limit2 = 0.25 * hr * hr;
printf("τ (陽解法の場合の上限=%g, λ r ≤ 1/4 のための上限=%g): ",
      tau_limit, tau_limit2);
printf("τ: "); scanf("%lf", &tau);

printf("結果を出力する時間間隔: "); scanf("%lf", &dt);
skip = rint(dt / tau);

/* λ r, λ θ */
lambda_r = tau / (2 * hr * hr);
lambda_t = tau / (2 * ht * ht);

/* メモリの確保 */

/* 連立 1 次方程式を解くための作業ベクトル */
NN = (Nt > Nr) ? Nt : Nr;
b = new_vector(NN + 1);
/* 差分解 */
U = new_matrix(Nr + 1, Nt + 1);
/* 差分解(作業用) */
UU = new_matrix(Nr + 1, Nt + 1);
/* 連立方程式の係数行列 B */
B1 = new_vector(Nr + 1);
Bd = new_vector(Nr + 1);
Bu = new_vector(Nr + 1);
/* 連立方程式の行列 Ai */
A1 = new_matrix(Nr + 1, Nt+1);
Ad = new_matrix(Nr + 1, Nt+1);
Au = new_matrix(Nr + 1, Nt+1);
Ar = new_matrix(Nr + 1, Nt+1);
Ab = new_matrix(Nr + 1, Nt+1);
/* 確保できたか確認 */
if ((b == NULL) || (U == NULL) || (UU == NULL)
    || (Bd == NULL) || (B1 == NULL) || (Bu == NULL)
    || (Ad == NULL) || (A1 == NULL) || (Au == NULL)
    || (Ar == NULL) || (Ab == NULL)) {
    fprintf(stderr, "memory allocation error\n");
    exit(1);
}

/* r 方向の係数行列 B を作る */
for (i = 1; i < Nr; i++) {
    Bd[i] = 1.0 + 2 * lambda_r;
    B1[i] = - lambda_r * (1.0 - 1.0 / (2 * i));
    Bu[i] = - lambda_r * (1.0 + 1.0 / (2 * i));
}
/* 係数行列 B を LU 分解する */
trilu(Nr - 1, B1 + 1, Bd + 1, Bu + 1);

/* θ 方向の係数行列 Ai を作り、LU 分解する */
for (i = 1; i < Nr; i++) {
    ri = i * hr;
    rr = ri * ri;
    coef_a = 1 + 2 * lambda_t / rr;
    coef_b = - lambda_t / rr;
    for (j = 0; j < Nt; j++) {
        A1[i][j] = coef_b; Ad[i][j] = coef_a; Au[i][j] = coef_b;
        Ar[i][j] = 0;
        Ab[i][j] = 0;
    }
    Ar[i][0] = coef_b;
}

```

```

Ab[i][0] = coef_b;
ptrilu0(Nt, Al[i], Ad[i], Au[i], Ab[i], Ar[i]);
}

/* 初期値 */
for (i = 0; i <= Nr; i++)
    for (j = 0; j <= Nt; j++)
        U[i][j] = u0(i * hr, j * ht);

/* GNUPLOT を起動 */
#ifndef USEGNUPLOT
    open_gnuplot();
#endif

/* 時間サイクルをまわす */
nMax = rint(Tmax / tau);
for (n = 0; n < nMax; n++) {

    /* 第 n 段から第 n+1/2 段 */
    /* 原点での値を計算 (陽解法) */
    s = 0;
    for (j = 0; j < Nt; j++)
        s += U[1][j];
    UU[0][0] = 4 * lambda_r * (s / Nt - U[0][0]) + U[0][0];
    for (j = 1; j <= Nt; j++)
        UU[0][j] = UU[0][0];
    /* r 方向を陰的に解く */
    for (j = 0; j < Nt; j++) {
        /*境界の代入 */
        UU[Nr][j] = boundary_data(1.0, j * ht, (n + 0.5) * tau);
        /* 差分方程式の右辺既知項を計算 (係数を事前に計算しておくと良い?) */
        for (i = 1; i < Nr; i++) {
            ri = i * hr;
            rr = ri * ri;
            coef_a = 1.0 - 2 * lambda_t / rr;
            coef_b = lambda_t / rr;
            if (j != 0)
                b[i] = coef_a * U[i][j] + coef_b * (U[i][j - 1] + U[i][j + 1]);
            else
                b[i] = coef_a * U[i][j] + coef_b * (U[i][Nt - 1] + U[i][j + 1]);
        }
        /* 右辺に移項する処理 */
        b[1] += lambda_r * (1 - 1.0 / 2) * UU[0][j];
        b[Nr - 1] += lambda_r * (1 + 1.0 / (2 * (Nr - 1))) * UU[Nr][j];
        /* r 方向方程式を解く */
        trisol(Nr - 1, Bl + 1, Bd + 1, Bu + 1, b + 1);
        /* UU に計算結果を残す */
        for (i = 1; i < Nr; i++)
            UU[i][j] = b[i];
    }
    /* j=N θ にも値を入れておく (必要ある?) */
    for (i = 0; i <= Nr; i++)
        UU[i][Nt] = UU[i][0];

    /* 第 n+1/2 段から第 n+1 段 */
    /* θ 方向を陰的に解く */
    for (i = 1; i < Nr; i++) {
        /* 差分方程式の右辺既知項を計算 (係数を事前に計算しておくと良い?) */
        ri = i * hr;
        rr = hr / (2 * ri);
        coef_a = 1 - 2 * lambda_r;
        coef_b = lambda_r * (1 + rr);

```

```

coef_c = lambda_r * (1 - rr);
for (j = 0; j < Nt; j++)
    b[j] = coef_a * UU[i][j] + coef_b * UU[i + 1][j] + coef_c * UU[i - 1][j];

/* θ 方向方程式を解く */
ptrisolv(Nt, A1[i], Ad[i], Au[i], Ab[i], Ar[i], b);
/* U に計算結果を残す */
for (j = 0; j < Nt; j++)
    U[i][j] = b[j];
/* j=Nθ にも値を入れておく（必要ある？） */
U[i][Nt] = U[i][0];
}

/* 原点での値を計算（陽解法） */
s = 0;
for (j = 0; j < Nt; j++)
    s += UU[1][j];
U[0][0] = 4 * lambda_r * (s / Nt - UU[0][0]) + UU[0][0];
for (j = 1; j <= Nt; j++)
    U[0][j] = U[0][0];
/* 境界データの代入 */
t = (n + 1) * tau;
for (j = 0; j <= Nt; j++)
    U[Nr][j] = boundary_data(1.0, j * ht, t);

if ((n + 1) % skip == 0) {
    /* 計算結果（数値データ）の出力 */
    if (output)
        for (i = 0; i <= Nr; i++) {
            for (j = 0; j <= Nt; j++) {
                printf("%2d ", j);
                printf("%.3f,", U[i][j]);
            }
            printf("\n");
        }
    sprintf(label, "t=%g", t);
#endif USEGNUPLOT
disk(Nr, Nt, U, label);
#endif
/* 誤差を測る */
if (zentai) {
    MaxError = 0.0;
    for (i = 0; i <= Nr; i++) {
        ri = i * hr;
        for (j = 0; j <= Nt; j++) {
            double e;
            e = fabs(exactu(ri, j * ht, t) - U[i][j]);
            if (e > MaxError)
                MaxError = e;
        }
    }
    printf("n=%d, norm=%e, t=%f, 誤差=%e\n",
           n + 1, maxnorm(Nr + 1, Nt + 1, U), t, MaxError);
}
else {
    double ex = exactu(0.0, 0.0, t);
    MaxError = fabs(U[0][0] - ex);
    printf("n=%d, norm=%g, t=%g, exactu=%g, 誤差=%g\n",
           n, maxnorm(Nr + 1, Nt + 1, U), t, ex, MaxError);
}
}
return 0;
}

```

```

}

#ifndef BESSEL
/* 同次 Dirichlet 境界条件で簡単な厳密解 (Bessel 関数を利用) */
#define mu01      (2.404825557695773)

/* 初期値 */
double u0(double r, double theta)
{
    return j0(mu01 * r);
}

/* 厳密解 */
double exactu(double r, double theta, double t)
{
    return exp(- mu01 * mu01 * t) * j0(mu01 * r);
}

/* 境界値 */
double boundary_data(double r, double theta, double t)
{
    /* 同次 Dirichlet 境界条件 */
    return 0.0;
}
#else
/* 非同次 Dirichlet 境界条件で簡単な厳密解 … 定数解！ */
double u0(double r, double theta)
{
    return 1.0;
}

double exactu(double r, double theta, double t)
{
    return 1.0;
}

double boundary_data(double r, double theta, double t)
{
    return 1.0;
}
#endif

double maxnorm(int m, int n, matrix u)
{
    int i, j, ii, jj;
    double tmpmax, absu;
    ii = 0;
    jj = 0;
    tmpmax = fabs(u[0][0]);
    for (i = 0; i < m; i++)
        for (j = 0; j < n; j++)
            if ((absu = fabs(u[i][j])) > tmpmax) {
                tmpmax = absu;
                ii = i;
                jj = j;
            }
    printf("(i,j)=(%d,%d)", ii, jj);
    return tmpmax;
}

```

## 9.8 いわゆる $\theta$ 法

時間微分を後退差分近似した後退 Euler 法と陽解法を  $\theta: (1 - \theta)$  という比で「ブレンド」した  $\theta$  法のプログラムが 2006 年度卒研

池谷 隆博, 『円盤領域における熱方程式の差分法』,

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab/report/2006-ikeya.pdf>

で開発された。その内容と、その卒研の相手をしていて気が付いたことをここに取り込む…(準備中というか構想中というか必要が生じないと多分果たされないだろうなどか)

実際に円盤で計算をしない場合は、ここは読むのをカットすべきかもしれない。

### 9.8.1 最初にお断り

「 $\theta$  法」という名前を初めて見たとき、このネーミング・センスはあまり好きになれないなと思ったのだが(比を表す文字に  $\theta$  という文字を選択する理由は、多分恣意的なものしかないので)、それ見たことかというか、ここでちょっと困った事態に遭遇する。極座標を使う場合、偏角<sup>4</sup>を表すのに通常使われる  $\theta$  という文字と衝突するからである。「字体を変えてしのうか」とも思ったが、ここでは次の方針で行く。

この節では、偏角は  $\varphi$  で表す

(この瞬間、3 次元の球領域で  $\theta$  法を使う場合どうしよう?と頭に浮かんだが、まあ先のことはあまり思い煩わないことにする。)

つまり

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

ということである。もちろん Laplacian は

$$(9.28) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$(9.29) \quad = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

となる。

Laplacian の差分近似については、これまでと同様、

(1) (9.28) の各項の導関数を中心差分近似する

(2) (9.29) の各項の導関数を中心差分近似する (SS 近似)

の二つが考えられるが、( $\theta$  法の解説としては) どちらでも大差がないので、(1) の方法を中心に説明する。

---

<sup>4</sup> 「偏角」は、本当は複素関数論の用語で、ここで使うのはおかしいかもしれない。こういう基本的な概念に、きちんととした用語が用意されていないのは嫌だなあ。

## 9.8.2 差分方程式

格子点などの定め方はこれまでと同様である。

$$h_r = \frac{1}{N_r}, \quad h_\varphi = \frac{1}{N_\varphi}, \quad r_i = ih_r, \quad \varphi_j = jh_\varphi, \quad \lambda_r = \frac{\tau}{h_r^2}, \quad \lambda_\varphi = \frac{\tau}{h_\varphi^2}.$$

$u(r_i, \theta_j, t_n)$  の近似値を  $U_{ij}^n$  とするので、

$$U_{0j}^n = U_{00}^n, \quad U_{i,N_\varphi}^n = U_{i0}^n, \quad U_{i,-1}^n = U_{i,N_\varphi-1}^n.$$

原点以外のところでは、 $u_t = \Delta u$  に対して

$$\begin{aligned} \frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\tau} &= (1 - \theta) \left[ \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{h_\varphi^2} \right] \\ &\quad + \theta \left[ \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2h_r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}}{h_\varphi^2} \right] \end{aligned}$$

という差分方程式をおく。もう説明の必要はないと思うが、 $u_t$  を前進差分近似して作ったいわゆる陽解法と、 $u_t$  を後退差分近似して作ったいわゆる陰解法（後退 Euler 法）を  $(1 - \theta) : \theta$  という比でブレンドした、ということである。

いつものように両辺に  $\tau$  をかけ、 $\tau/h_r^2, \tau/h_\varphi^2$  をそれぞれ  $\lambda_r, \lambda_\varphi$  で置き換える、右肩が  $n+1$  である項が左辺に、右肩が  $n$  である項が右辺にあるように移項すると、次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} &\left(1 + 2\theta\lambda_r + \frac{2\theta\lambda_\varphi}{r_i^2}\right) U_{ij}^{n+1} - \theta\lambda_r \left[ \left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i+1,j}^{n+1} + \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i-1,j}^{n+1} \right] \\ &\quad - \frac{\theta\lambda_\varphi}{r_i^2} (U_{i,j+1}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) \\ &= \left(1 - 2(1 - \theta)\lambda_r - \frac{2(1 - \theta)\lambda_\varphi}{r_i^2}\right) U_{ij}^n + (1 - \theta)\lambda_r \left[ \left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i+1,j}^n + \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) U_{i-1,j}^n \right] \\ &\quad + \frac{(1 - \theta)\lambda_\varphi}{r_i^2} (U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, N_r - 1; j = 0, 1, \dots, N_\varphi - 1; n = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

なお、 $\frac{h_r}{2r_i} = \frac{h_r}{2ih_r} = \frac{1}{2i}$  であるから、そのように書き換えようかとも思うが…どんなものだろう。

$$\begin{aligned} \beta_i &:= \theta\lambda_r \left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right) = \theta\lambda_r \left(1 + \frac{1}{2i}\right), \quad \gamma_i := \theta\lambda_r \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right) = \theta\lambda_r \left(1 - \frac{1}{2i}\right), \quad \delta_i := \frac{\theta\lambda_\varphi}{r_i^2}, \\ \alpha_i &:= 1 + \beta_i + \gamma_i + 2\delta_i, \\ \beta'_i &:= -(1 - \theta)\lambda_r \left(1 + \frac{h_r}{2r_i}\right), \quad \gamma'_i := -(1 - \theta)\lambda_r \left(1 - \frac{h_r}{2r_i}\right), \quad \delta'_i := \frac{-(1 - \theta)\lambda_\varphi}{r_i^2}, \\ \alpha'_i &:= 1 + \beta'_i + \gamma'_i + 2\delta'_i \end{aligned}$$

とおくと、

$$\alpha_i U_{ij}^{n+1} - \beta_i U_{i+1,j}^{n+1} - \gamma_i U_{i-1,j}^{n+1} - \delta_i (U_{i,j+1}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) = \alpha'_i U_{ij}^n - \beta'_i U_{i+1,j}^n - \gamma'_i U_{i-1,j}^n - \delta'_i (U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n)$$

と書ける。

原点については、

$$\frac{U_{00}^{n+1} - U_{00}^n}{\tau} = (1 - \theta) \frac{4}{h_r^2} \left[ \frac{1}{N_\varphi} \sum_{j=0}^{N_\varphi} U_{1,j}^n - U_{00}^n \right] + \theta \frac{4}{h_r^2} \left[ \frac{1}{N_\varphi} \sum_{j=0}^{N_\varphi} U_{1,j}^{n+1} - U_{00}^{n+1} \right]$$

から次式を得る:

$$(1 + 4\theta\lambda_r)U_{00}^{n+1} - \frac{4\theta\lambda_r}{N_\varphi} \sum_{j=0}^{N_\varphi-1} U_{1j}^{n+1} = [1 - 4(1-\theta)\lambda_r]U_{00}^n + \frac{4(1-\theta)\lambda_r}{N_\varphi} \sum_{j=0}^{N_\varphi-1} U_{1j}^n.$$

以上、長方形領域における熱方程式に対する  $\theta$  法の差分方程式を理解していれば難しいところはないが、問題はこの連立 1 次方程式を実際に解くために、“係数行列  $\times$  未知ベクトル = 既知ベクトル” の形に書き直すことである。

二重添字を持つ未知数  $\{U_{ij}^{n+1}\}_{\substack{0 \leq i \leq N_r \\ 0 \leq j \leq N_\varphi}}$  を並べた未知ベクトル  $\mathbf{U}^{n+1} = (U_\ell^n)_{0 \leq \ell \leq N}$  ( $N := N_r N_\varphi$ ) を次のように定める。

$$U_{ij}^n = \begin{cases} U_0^n & (i = 0) \\ U_{(i-1)N_\varphi+j+1}^n & (1 \leq i \leq N_r, 0 \leq j \leq N_\varphi - 1). \end{cases}$$

また

$$I := N_\varphi \text{ 次の単位行列}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(N_\varphi; \mathbf{R})$$

とおく。

一つの  $i$  を固定して、 $j = 0, 1, \dots, N_\varphi - 1$  についての方程式をまとめる。 $i$  の値によって場合分けをする。

(1)  $2 \leq i \leq N_r - 2$  については、 $\ell := (i-1)N_\varphi + 1$  とおくと、

$$\begin{aligned} & -\gamma_i I \begin{pmatrix} U_{\ell-N_\varphi}^{n+1} \\ \vdots \\ U_{\ell-1}^{n+1} \end{pmatrix} + (\alpha_i I - \delta_i J) \begin{pmatrix} U_\ell^{n+1} \\ \vdots \\ U_{\ell+N_\varphi-1}^{n+1} \end{pmatrix} - \beta_i I \begin{pmatrix} U_{\ell+N_\varphi}^{n+1} \\ \vdots \\ U_{\ell+2N_\varphi-1}^{n+1} \end{pmatrix} \\ & = -\gamma'_i I \begin{pmatrix} U_{\ell-N_\varphi}^n \\ \vdots \\ U_{\ell-1}^n \end{pmatrix} + (\alpha'_i I - \delta'_i J) \begin{pmatrix} U_\ell^n \\ \vdots \\ U_{\ell+N_\varphi-1}^n \end{pmatrix} - \beta'_i I \begin{pmatrix} U_{\ell+N_\varphi}^n \\ \vdots \\ U_{\ell+2N_\varphi-1}^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。これは

$$(-\gamma_i I \quad \alpha_i I - \delta_i J \quad -\beta_i I) \begin{pmatrix} U_{\ell-N_\varphi}^{n+1} \\ \vdots \\ U_{\ell+2N_\varphi-1}^{n+1} \end{pmatrix} = (-\gamma'_i I \quad \alpha'_i I - \delta'_i J \quad -\beta'_i I) \begin{pmatrix} U_{\ell-N_\varphi}^n \\ \vdots \\ U_{\ell+2N_\varphi-1}^n \end{pmatrix}.$$

(2)  $i = 1$  については、 $U_{0,j}^{n+1} = U_{00}^{n+1}$  であることに注意すると

$$(-\gamma_1 e \quad \alpha_1 I - \delta_1 J \quad -\beta_1 I) \begin{pmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_{2N_\varphi}^{n+1} \end{pmatrix} = (-\gamma'_1 e \quad \alpha'_1 I - \delta'_1 J \quad -\beta'_1 I) \begin{pmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_{2N_\varphi}^n \end{pmatrix}.$$

ただし

$$e := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{N_\varphi}.$$

(3)  $i = N_r - 1$  については (本当は (1) の  $2 \leq i \leq N_r - 2$  にまとめられる!)、

$$\begin{aligned} & (-\gamma_{N_r-1}I \quad \alpha_{N_r-1}I - \delta_{N_r-1}J \quad -\beta_{N_r-1}I) \begin{pmatrix} U_{(N_r-3)N_\varphi+1}^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N_rN_\varphi}^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= (-\gamma'_{N_r-1}I \quad \alpha'_{N_r-1}I - \delta'_{N_r-1}J \quad -\beta'_{N_r-1}I) \begin{pmatrix} U_{(N_r-3)N_\varphi+1}^n \\ \vdots \\ U_{N_rN_\varphi}^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4)  $i = 0$  については、1つの方程式しかない。

$$\alpha_0 := 1 + 4\theta\lambda_r, \quad \beta_0 := \frac{4\theta\lambda_r}{N_\varphi}, \quad \alpha'_0 := 1 - 4(1-\theta)\lambda_r, \quad \beta'_0 := -\frac{4(1-\theta)\lambda_r}{N_\varphi}$$

とおくと、

$$\alpha_0 U_0^{n+1} - \beta_0 (U_1^{n+1} + \cdots + U_{N_\varphi}^{n+1}) = \alpha'_0 U_0^n - \beta'_0 (U_1^n + \cdots + U_{N_\varphi}^n).$$

行列  $\times$  ベクトルの形に書くと、

$$(\alpha_0 \quad -\beta_0 \mathbf{e}^T) \begin{pmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N_\varphi}^{n+1} \end{pmatrix} = (\alpha'_0 \quad -\beta'_0 \mathbf{e}^T) \begin{pmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_{N_\varphi}^n \end{pmatrix}.$$

(5)  $i = N_r$  については、

$$I \begin{pmatrix} U_{(N_r-2)N_\varphi+1}^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N_rN_\varphi}^{n+1} \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} U_{(N_r-2)N_\varphi+1}^n \\ \vdots \\ U_{N_rN_\varphi}^n \end{pmatrix} \quad (\text{境界値}).$$

以上まとめると

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\beta_0 \mathbf{e}^T & & & & \\ -\gamma_1 \mathbf{e} & \alpha_1 I - \delta_1 J & -\beta_1 I & & & \\ & -\gamma_2 I & \alpha_2 I - \delta_2 J & -\beta_2 I & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\gamma_{N_r-1} I & \alpha_{N_r-1} I - \delta_{N_r-1} J & -\beta_{N_r-1} I \\ & & & & & I \end{pmatrix},$$

$$B := \begin{pmatrix} \alpha'_0 & -\beta'_0 \mathbf{e}^T & & & & \\ -\gamma'_1 \mathbf{e} & \alpha'_1 I - \delta'_1 J & -\beta'_1 I & & & \\ & -\gamma'_2 I & \alpha'_2 I - \delta'_2 J & -\beta'_2 I & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\gamma'_{N_r-1} I & \alpha'_{N_r-1} I - \delta'_{N_r-1} J & -\beta'_{N_r-1} I \\ & & & & & I \end{pmatrix},$$

とおくと、

$$A \mathbf{U}^{n+1} = B \mathbf{U}^n.$$

### 9.8.3 プログラム例

次に掲げるのは池谷君が作成したプログラム（を古い gcc でもコンパイルできるように一部修正したもの）である。実はまだ帶行列であることを利用してメモリを節約するようになっていない。そのうち…

#### heat2d-i-en3.c

```
/*
 * heat2d-i-en3-mk.c ---円盤状の 2 次元熱方程式を陰解法で解く
 * heat2d-i-en3.c を修正した。
 *      j 方向番号付け 効率を考えたプログラム
 * コンパイルするには
 *      gcc -c bandlu.c
 *      gcc -c call_gnuplot.c
 *
 *      ccmg heat2d-i-en3.c bandlu.c call_gnuplot.c
 */
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <matrix.h>
#include "bandlu.h"
#include "call_gnuplot.h"

#define psi(i,j) ((i-1) * mm + j+1)

double u0(double, double);
double exactu(double, double, double);
double maxnorm(int, int, matrix);
double pi;

int main()
{
    double ri ,ri2, phi_j;
    int N_r, N_p, mm, NN, i, j, p, q, n, skip, nMax, L;
    matrix Uk, A;
    double *B, *vector_U;
    double h_r, h_p, lambda_r, lambda_p, lambda, tau, t, Tmax, dt, M, ex;
    double theta;
    char label[200];

    /* π の値*/
    pi = 4.0 * atan(1.0);

    /* 区間の分割数 */
    printf("Nr, Ntheta: ");
    scanf("%d %d", &N_r, &N_p);

    mm = N_p;
    NN = (N_r-1) * N_p + 1;

    /* 空間の刻み幅 */
    h_r = 1.0 / N_r;
    h_p = 2.0 * pi / N_p;

    /* 行列、ベクトルを記憶する変数のメモリー割り当て */
    if ((Uk = new_matrix(N_r+1, N_p+1)) == NULL) {
```

```

fprintf(stderr, "数列 U^k を記憶する領域の確保に失敗\n");
exit(1);
}
if ((A = new_matrix(NN, NN)) == NULL) {
    fprintf(stderr, "係数行列 A を記憶する領域の確保に失敗\n");
    exit(1);
}
if ((B = (double *) malloc(sizeof(double) * NN)) == NULL) {
    fprintf(stderr, "B を記憶する領域の確保に失敗\n");
    exit(1);
}

/* θ 法の重みの決定 */
printf("θ (0 ≤ θ ≤ 1) : "); scanf("%lf", θ);

if (theta == 1.0) {
    printf("τ = "); scanf("%lf", τ);
}
else {
    printf("τ (≤%g      ≡安定性条件): ", 
           (h_r*h_r*h_p*h_p)/((2.0)*(1 - theta)*(1 + (h_p * h_p))));
    scanf("%lf", τ);
}

/* λ r, λ θ */
lambda_r = tau / (h_r * h_r);
lambda_p = tau / (h_p * h_p);
/* 結果を出力する時間間隔の決定 */
printf("Tmax: "); scanf("%lf", &Tmax);
printf("Δ t(>=%g): ", tau); scanf("%lf", &dt);
if (dt < tau) {
    dt = tau;
}
skip = rint(dt / tau);

/* GNUPLOT の準備 */
open_gnuplot();

/* 初期値の設定 */
for (i = 0; i <= N_r; i++) {
    ri = i * h_r;
    for (j = 0; j <= N_p; j++)
        U_k[i][j] = u0(ri, (j) * h_p);
}

disk(N_r, N_p, U_k, "t=0");

/* 係数行列の値のセット */
/* 0 クリア */
for (p = 0; p < NN; p++) {
    for (q = 0; q < NN; q++)
        A[p][q] = 0.0;
}
/* 原点の係数 */
A[0][0] = 1.0 + 4.0*theta*lambda_r;

for (j = 0; j <= N_p - 1; j++) {
    L = psi(1,j);
    A[0][L] = - (4.0*theta*lambda_r) / N_p;
}

```

```

/* 内点での係数 */
for (i = 1; i < N_r; i++) {
    ri = i * h_r;
    ri2 = ri * ri;
    for (j = 0; j <= N_p - 1; j++) {
        int L1, L2, Lm;
        L = psi(i,j);
        L1 = L - 1;
        L2 = L + 1;
        Lm = L - mm;
        if (j == 0)
            L1 = psi(i,N_p-1);

        if (j == N_p-1)
            L2 = psi(i,0);

        if(i == 1)
            Lm = 0;

        if (i != N_r-1)
            A[L][L+mm] = - theta* lambda_r * (1.0 + h_r/(2.0*ri));
            A[L][Lm] = - theta* lambda_r * (1.0 - h_r/(2.0*ri));
            A[L][L] = 1.0 + 2.0*theta*lambda_r + (2.0*theta*lambda_p) / ri2;
            A[L][L1] = - theta * lambda_p / ri2;
            A[L][L2] = - theta * lambda_p / ri2;
    }
}

/* 係数行列 LU 分解 */
bandlu(A, NN, mm);

/* 境界条件 */
for (j = 0; j <= N_p; j++) {
    Uk[N_r][j] = 0.0;
}

/* 時間にに関するループ */
nMax = rint(Tmax / tau);
for (n = 1; n <= nMax; n++) {

    /* 連立 1 次方程式の右辺を用意する */
    /* 内部の格子点 */
    for (i = 1; i < N_r; i++) {
        ri = i * h_r;
        ri2 = ri * ri;
        for (j = 0; j <= N_p-1; j++) {
            int jm1, jm2;
            L = psi(i,j);
            jm1 = j-1;
            jm2 = j+1;
            if (jm1 == -1)
                jm1 = N_p-1;
            if (jm2 == N_p)
                jm2 = 0;
            B[L] = (1.0 - 2.0*(1.0 - theta)*lambda_r
                    - (2.0*(1.0 - theta)*lambda_p)/ri2) * Uk[i][j]
                    + (1.0 - theta)*lambda_r*((1.0 + h_r/(2.0*ri))*Uk[i+1][j]
                    + (1.0 - h_r/(2.0*ri))*Uk[i-1][j])
                    + ((1.0 - theta)*lambda_p / ri2) * (Uk[i][jm1] + Uk[i][jm2]);
        }
    }
}

```

```

}

/* 原点 */
B[0] = (1.0 - 4.0*(1.0 - theta)*lambda_r)*Uk[0][0];
for (j = 0; j <= N_p - 1; j++) {
    B[0] += (4.0*(1.0 - theta)*lambda_r / N_p)*Uk[1][j];
}

/* A vector_U = B を解く */
bandsolve(A, B, NN, mm);

/* 更新 */
Uk[0][0] = B[0];
for (j = 1; j <= N_p; j++) {
    Uk[0][j] = Uk[0][0];

    for (i = 1; i < N_r; i++) {
        for (j = 0; j <= N_p-1; j++) {
            L = psi(i,j);
            Uk[i][j] = B[L];
        }
        Uk[i][N_p] = B[psi(i,0)];
    }
    t = n * tau;
}

/* Δ t の整数倍の時刻ではグラフを描く */
if (n % skip == 0) {
    sprintf(label, "t=%g", t);
    disk(N_r, N_p, Uk, label);
}

/* 誤差を測る */
M = 0.0;
for (i = 0; i <= N_r; i++) {
    ri = i * h_r;
    for (j = 0; j <= N_p; j++) {
        double e;
        phi_j = j * h_p;
        e = fabs(exactu(ri, phi_j, t) - Uk[i][j]);
        if (e > M)
            M = e;
    }
}
printf("n=%d, norm=%g, t=%g, 誤差=%g\n",
       n, maxnorm(N_r, N_p, Uk), t, M);

}

close_gnuplot();

return 0;
}

/* 厳密解を計算する関数 */

#define mu01      (2.404825557695771998)
#define mu11      (3.831705970207510692)

/* 初期データ */
double u0(double r, double phi)
{
    return j0(mu01 * r) + j1(mu11 * r) * (cos(phi) + sin(phi));
}

```

```

/* 厳密解 */
double exactu(double r, double phi, double t)
{
    return exp(- mu01 * mu01 * t) * j0(mu01 * r)
        + exp(- mu11 * mu11 * t) * j1(mu11 * r) * (cos(phi) + sin(phi));
}

double maxnorm(int m, int n, matrix Uk)
{
    int i, j, i0, j0;
    double tmpmax, absu;
    i0 = 0;
    j0 = 0;
    tmpmax = fabs(Uk[0][0]);
    for(i = 0; i <= m; i++)
        for(j = 0; j <= n; j++)
            if((absu = fabs(Uk[i][j])) > tmpmax) {
                tmpmax = absu;
                i0 = i;
                j0 = j;
            }
    printf("(i,j)=(%d,%d) ", i0, j0);
    return tmpmax;
}

```

## bandlu.c

```

/*
 * bandlu.c
 * bandtest1.c を参考
 */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <matrix.h>

void bandlu(matrix a, int n, int m)
{
    int i, j, k, mm;
    double q;
    for (i = 0; i < n; i++) {
        mm = i + m; if (mm > n-1) mm = n-1;
        for (j = i + 1; j <= mm; j++) {
            q = a[j][i] / a[i][i];
            for (k = i + 1; k <= mm; k++)
                a[j][k] -= q * a[i][k];
            a[j][i] = q;
        }
    }
}

void bandsolve(matrix a, vector b, int n, int m)
{
    int i, j, mm;
    for (i = 0; i < n; i++) {
        mm = i + m; if (mm > n-1) mm = n-1;
        for (j = i + 1; j <= mm; j++)

```

```

    b[j] -= a[j][i] * b[i];
}

b[n-1] /= a[n-1][n-1];
for (i = n - 2; i >= 0; i--) {
    mm = i + m; if (mm > n-1) mm = n-1;
    for (j = i + 1; j <= mm; j++)
        b[i] -= a[i][j] * b[j];
    b[i] /= a[i][i];
}
}

```

## 9.9 $\theta$ 法の安定性の解析

ばちばち行きましょう。

### 9.9.1 $\theta$ 法の差分方程式

$$A\mathbf{U}^{n+1} = B\mathbf{U}^n.$$

$A = \text{さぼり}, \quad B = \text{めんどう}$

### 9.9.2 $\|\cdot\|_\infty$ に関する $\theta$ 法の安定性解析

(以下のように書いたのだが、実は書き直したいと考えている。離散最大値原理を前面に出して書くのが適当であると考えている。その方が必要十分条件を書くのが簡単。暇が出来たら書き直すが、多分当分の間放ったらかし。)

長方形領域の場合と大体同じである。

**補題 9.9.1** ( $B$  が非負行列であるための条件)  $B \geq 0$  であるためには、

$$\theta = 1 \quad \text{または} \quad \left( 0 \leq \theta < 1 \quad \text{かつ} \quad \tau \leq \frac{1}{2(1-\theta)} \cdot \frac{h_r^2 h_\varphi^2}{1+h_r^2} \right)$$

が必要十分である。

**証明** 大前提として  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $\lambda_r > 0$ ,  $\lambda_\varphi > 0$  を思い出すと、非対角成分は非負であることが分かる。ゆえに  $B \geq 0$  であるためには、すべての対角成分が 0 以上、すなわち

$$1 - 2(1-\theta) \left( \lambda_r + \frac{\lambda_\varphi}{r_i^2} \right) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N_r - 1)$$

であることが必要十分である。

$\theta = 1$  であればこれは明らかに常に成り立つ。以下  $0 \leq \theta < 1$  とする。 $r_i$  の最小値は  $h_r$  であるから、これは

$$\lambda_r + \frac{\lambda_\varphi}{h_r^2} \leq \frac{1}{2(1-\theta)}$$

と書き直せる。左辺は

$$\lambda_r + \frac{\lambda_\varphi}{h_r^2} = \frac{\tau}{h_\varphi^2} + \frac{1}{h_r^2} \cdot \frac{\tau}{h_\varphi^2} = \tau \left( \frac{1}{h_\varphi^2} + \frac{1}{h_r^2 h_\varphi^2} \right) = \tau \frac{1 + h_r^2}{h_r^2 h_\varphi^2}$$

と変形できることに注意すればよい。 ■

$B \geq 0$  とする。任意の  $i$  について  $\sum_{j=1}^N b_{ij} \leq 1$  が成り立つことから、

$$\|B\mathbf{v}\|_\infty \leq \|\mathbf{v}\|_\infty \quad (\mathbf{v} \in \mathbf{R}^N)$$

が得られる。(長方形の場合の繰り返しになるが) 実際

$$\left| \sum_{j=1}^N b_{ij} v_j \right| \leq \sum_{j=1}^N |b_{ij}| |v_j| \leq \max_{1 \leq j \leq N} |v_j| \sum_{j=1}^N |b_{ij}| = \|\mathbf{v}\|_\infty \sum_{j=1}^N b_{ij} \leq \|\mathbf{v}\|_\infty$$

の  $i$  についての最大値を取ればよい。

次に

$$\|A^{-1}\mathbf{v}\|_\infty \leq \|\mathbf{v}\|_\infty \quad (\mathbf{v} \in \mathbf{R}^N)$$

を証明する。 $\theta = 0$  のときは  $A = I$  であるから明らかなので、 $0 < \theta \leq 1$  とする。 $\mathbf{w} := A^{-1}\mathbf{v}$  とおくと  $\mathbf{v} := A\mathbf{w}$  である。番号  $i$  に対応する格子点の上下左右の格子点がすべて領域内部に属している場合、

$$v_i = \left[ 1 + 2\theta \left( \lambda_r + \frac{\lambda_\varphi}{r_i^2} \right) \right] w_i - \frac{\theta \lambda_\varphi}{r_i^2} (w_{i+1} + w_{i-1}) - \theta \lambda_r \left[ \left( 1 + \frac{1}{2i} \right) w_{i+p} + \left( 1 - \frac{1}{2i} \right) w_{i-p} \right]$$

が成り立っているので、

$$\begin{aligned} |v_i| &\geq \left[ 1 + 2\theta \left( \lambda_r + \frac{\lambda_\varphi}{r_i^2} \right) \right] |w_i| - \frac{\theta \lambda_\varphi}{r_i^2} (|w_{i+1}| + |w_{i-1}|) - \theta \lambda_r \left[ \left( 1 + \frac{1}{2i} \right) |w_{i+p}| + \left( 1 - \frac{1}{2i} \right) |w_{i-p}| \right] \\ &\geq \left[ 1 + 2\theta \left( \lambda_r + \frac{\lambda_\varphi}{r_i^2} \right) \right] |w_i| - \frac{\theta \lambda_\varphi}{r_i^2} (\|\mathbf{w}\|_\infty + \|\mathbf{w}\|_\infty) - \theta \lambda_r \left[ \left( 1 + \frac{1}{2i} \right) \|\mathbf{w}\|_\infty + \left( 1 - \frac{1}{2i} \right) \|\mathbf{w}\|_\infty \right] \\ &= \left[ 1 + 2\theta \left( \lambda_r + \frac{\lambda_\varphi}{r_i^2} \right) \right] |w_i| - 2\theta \left( \lambda_r + \frac{\lambda_\varphi}{r_i^2} \right) \|\mathbf{w}\|_\infty. \end{aligned}$$

この不等式はすべての  $i$  について成立する。これからすべての  $i$  について、

$$\|\mathbf{v}\|_\infty \geq \left[ 1 + 2\theta \left( \lambda_r + \frac{\lambda_\varphi}{r_i^2} \right) \right] |w_i| - 2\theta \left( \lambda_r + \frac{\lambda_\varphi}{r_i^2} \right) \|\mathbf{w}\|_\infty.$$

ノルム  $\|\cdot\|_\infty$  の定義から、 $\|\mathbf{w}\|_\infty = |w_{i_0}|$  となる  $i_0$  が存在する。 $i = i_0$  について上の不等式を用いると

$$\|\mathbf{v}\|_\infty \geq \left[ 1 + 2\theta \left( \lambda_r + \frac{\lambda_\varphi}{r_{i_0}^2} \right) \right] \|\mathbf{w}\|_\infty - 2\theta \left( \lambda_r + \frac{\lambda_\varphi}{r_{i_0}^2} \right) \|\mathbf{w}\|_\infty = \|\mathbf{w}\|_\infty.$$

すなわち

$$\|A^{-1}\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{w}\|_\infty \leq \|\mathbf{v}\|_\infty.$$

これから次の定理を得る。

### 定理 9.9.2 ( $\theta$ 法の $\|\cdot\|_\infty$ 安定性解析)

$$\theta = 1 \quad \text{または} \quad \left( 0 \leq \theta < 1 \quad \text{かつ} \quad \tau \leq \frac{1}{2(1-\theta)} \cdot \frac{h_r^2 h_\varphi^2}{1+h_r^2} \right)$$

を満たすとき、任意の  $n$  について

$$\|\mathbf{U}^{n+1}\|_\infty \leq \|\mathbf{U}^n\|_\infty.$$

**証明**  $\|\mathbf{U}^{n+1}\|_\infty = \|A^{-1}B\mathbf{U}^n\|_\infty \leq \|B\mathbf{U}^n\|_\infty \leq \|\mathbf{U}^n\|_\infty$ . ■

**余談 9.9.1**  $\|A^{-1}\mathbf{v}\|_\infty$ について、結局は長方形領域の場合と同様の評価が得られるわけだが、証明は少しだけ変更されている。実は、長方形領域（というよりも1次元開区間）の場合の $\theta$ 法の安定性の、筆者が当初思いついた証明は、おそらく回りくどいものであった（印刷されて、かなりの部数配布されてされてしまっていて、一時は穴があったら入りたい気分だった）。それに比べると、現在の長方形領域の場合の証明は大分すっきりしていると思う。円盤の場合に、その証明はそのままで通用しないことが分かって、一瞬「困った」と思ったが、ふと考えてみたら、少しだけ先祖返りすると、つまり長方形領域の場合の証明の某バージョンは、そのまま円盤の場合の証明に使えることに気が付いた。世の中捨てたものではない。 ■

さて、上の定理で書いた安定性の十分条件であるが、 $\theta < 1$  の場合は、受け入れがたいほど $\tau$ を小さく取ることになる。残念ながら、数値実験による状況証拠はこの条件が限りなく必要に近いことを示しているようである（早い話、 $\theta = 1$  の完全陰解法でないと使い物にならない、らしい）。本当は必要性の証明も出来れば良いのだが、いまのところは出来ていない。

# 第10章 円盤領域における Laplacian の Shortley-Weller 近似

Shortley-Weller 近似については、山本 [23]、[24] に紹介されている。これは不等間隔の差分法である。

正直、そういうことが出来るのではないかと昔から漠然と考えていたので、「やはりそうか」という感想を持っている。[23], [22] に紹介されていることはなかなか魅力的で、ぜひ原論文にあたって習得したいものである。

## 10.1 1次元楕円型境界値問題に対する Shortley-Weller 近似

Shortley-Weller 近似について、簡単な 1 次元問題で説明しよう（これは山本 [23] による）。未知関数  $u = u(x)$  に関する次の 2 階常微分方程式の境界値問題を考えよう。

$$(10.1) \quad -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x) \quad (x \in (a, b)),$$

$$(10.2) \quad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

ただし、 $p, q, f$  は与えられた関数で、適当な滑らかさを持ち、区間  $[a, b]$  上で  $p > 0$  と仮定する。

この区間  $(a, b)$  を

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

と分割する。刻み幅

$$h_i := x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

は定数とは限らない。

$$\begin{aligned} h &:= \max_{1 \leq i \leq n} h_i, \\ u_i &:= u(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \\ x_{i+1/2} &:= (x_i + x_{i+1})/2, \quad p_{i+1/2} := p(x_{i+1/2}) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

とおく。

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{p_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - p_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}}{(h_{i+1} + h_i)/2} + O(h_{i+1} - h_i) + O\left(\frac{h_{i+1}^3 + h_i^3}{h_{i+1} + h_i}\right)$$

が成り立つ。左辺を右辺第 1 項で近似することを Shortley-Weller 近似という。

等間隔差分の場合に

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \doteq \frac{p_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - p_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h}}{h}$$

という近似をするのは「普通」、「相場」のようだから、不等間隔刻みを採用するのが Shortley-Weller 近似の肝、ということだろう。

この問題に対してどのような誤差評価ができるかについては、山本 [23] を参照せよ。

### 10.1.1 自力で考えたメモ

$$f(x + h_r) = f(x) + f'(x)h_r + \frac{1}{2}f''(x)h_r^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)h_r^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(x)h_r^4 + \dots,$$

$$f(x - h_l) = f(x) - f'(x)h_l + \frac{1}{2}f''(x)h_l^2 - \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)h_l^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(x)h_l^4 + \dots$$

であるから、

$$\frac{f(x + h_r) - f(x)}{h_r} = f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)h_r + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)h_r^2 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(x)h_r^3 + \dots,$$

$$\frac{f(x - h_l) - f(x)}{h_l} = -f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)h_l - \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)h_l^2 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(x)h_l^3 + \dots.$$

これから

$$\frac{f(x_r) - f(x)}{h_r} - \frac{f(x) - f(x_l)}{h_l} = \frac{1}{2}f''(x)(h_r + h_l) + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)(h_r^2 - h_l^2) + \frac{1}{4!}f^{(4)}(x)(h_r^3 + h_l^3) + \dots.$$

ゆえに

$$f''(x) = \frac{2}{h_r + h_l} \left( \frac{f(x_r) - f(x)}{h_r} - \frac{f(x) - f(x_l)}{h_l} \right) - \frac{h_r - h_l}{3} f^{(3)}(x) - \frac{1}{12} f^{(4)}(x) \frac{h_r^3 + h_l^3}{h_r + h_l} + \dots.$$

これから誤差は  $O(h_r - h_l)$  であり、特に  $h_r = h_l = h$  であれば、 $O(h^2)$  であることが分る。

## 10.2 2次元 Laplacian の Shortley-Weller 近似

空間1次元の場合には、何か特別な理由がないと不等間隔格子点を用いることはないと思うが、2次元領域の場合は、不等間隔格子点の利用は自然で有効だと思われる。

$\Omega$  を  $\mathbf{R}^2$  の有界領域とする。刻み幅  $h_x = h_y = h$  の等間隔差分格子を作る。境界付近の格子点  $P$  ( $\in \Omega$ ) に対しては、その上下左右の格子点が  $\bar{\Omega}$  の外に飛び出してしまうことがある。この場合、等間隔であることをあきらめて境界上に「格子点」を定める（カッコつきにしたのは格子線の交点でないのに格子点と呼ぶのは、少々変な感じがするからである）。 $P$  の上下左右の格子点を  $P_U, P_D, P_L, P_R$  とし（気持ちは up, down, left, right だが、某君のレポートでは代わりに north, south, west, east というのを使った）、

$$h_U := |P_U - P|, \quad h_D := |P_D - P|, \quad h_L := |P_L - P|, \quad h_R := |P_R - P|$$

とおく。 $h_U, h_D, h_L, h_R \in (0, h]$  である。

$$\Delta u(P) \doteq \frac{\frac{u(P_R) - u(P)}{h_R} - \frac{u(P) - u(P_L)}{h_L}}{(h_L + h_R)/2} + \frac{\frac{u(P_U) - u(P)}{h_U} - \frac{u(P) - u(P_D)}{h_D}}{(h_U + h_D)/2}$$

山本 [23] には次の3つの文献が紹介されている。

1. G. H. Shortley and R. Weller, The numerical solution of Laplace's equation, J. Appl. Physics, 9, pp.334-344 (1938).
2. J. H. Bramble and B. E. Hubbard, On the formulation of finite difference analogues of the Dirichlet problem for Poisson's equation, Numer. Math. 4 (1962), pp.313–327.

3. N. Matsunaga and T. Yamamoto, Superconvergence of the Shortley-Weller approximation for Dirichlet problems, J. Comput. Appl. Math. 116, pp.263–273 (2000).

山本先生はその後も以下の論文を出している<sup>1</sup>。

1. Tetsuro Yamamoto, Qing Fang and Xiaojun Chen, Superconvergence and nonsuperconvergence of the Shortley-Weller approximations for Dirichlet problems, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 22 (3&4), pp.455–470 (2001).
2. Zi-Cai Li, Hsin-Yun Hu, Qing Fang and Tetsuro Yamamoto, Superconvergence of Solution Derivatives for the Shortley-Weller Defference Approximation of Poisson’s Equation. II. Singularity Problems, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 24 (3&4), pp.195–221 (2003).
3. Qing Fang, Yukihiro Shogenji and Tetsuro Yamamoto, Error Analysis of Adaptive Finite Difference Methods Using Stretching Functions for Polar Coordinate Form of Poisson-Type Equation, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 24 ( 1&2), pp.17–44 (2003).

どうやってプログラミングするか<sup>2</sup>、学生にとって挑戦的な課題であると思う（直接参考にするものがないので）。山本先生が紹介している文献は楕円型の問題のみのようだけれど、発展問題の解析はないのかなあ？

## 10.3 発展問題の陽解法やってみました

2006年度卒研で、金子裕司君が SW 近似にチャレンジしてくれたので、そのレポート『円盤領域における熱方程式に対する差分法』(<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab/report/open/2006-kaneko.pdf>) の内容の要約をそのうちここにまとめる。

と言っているうちに、2007年度卒研で、久保田祥史君が『S-W 近似によって様々な領域の熱方程式を解く』(<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab/report/open/2007-kubota.pdf>) というのを書いてくれた。円盤に限る必要はほとんどないということは良く分かった。

考えなければならないのは、スキームの安定性の問題である。例えば1次元波動方程式  $\frac{1}{c^2}u_{tt}(x, t) = u_{xx}$  の場合、普通の差分スキームでは、

$$\frac{c\tau}{h} \leq 1$$

が安定であるための必要十分条件である。2次元の場合は

$$\left(\frac{c\tau}{h_x}\right)^2 + \left(\frac{c\tau}{h_y}\right)^2 \leq 1$$

となるだろうか。Shotley-Weller 近似をした場合、どこかで非常に小さな  $h$  が生じることがありえる。その場合、 $\tau$  の取り方に厳しい制限が出ることが予想されるが、数値実験の結果はこの予想を裏付けているようである。

誰か陰解法やってくれないかなあ…

2011年度卒研で濱勇樹君が『S-W 近似による楕円領域での波動方程式のシミュレーション』(<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lab/report/pdf/2011-hama.pdf>) というレポートを書いてくれた。

<sup>1</sup>現時点では、山本先生がらみの S-W 近似の論文コピーはすべて入手済みということになる。Bramble and Hubbard も資料室にあるだろう。Shortley and Weller も遠征の必要はないだろう。

<sup>2</sup>これらの論文にプログラミング上のヒントがないかは早目に眺めておく必要があるだろう。あまり期待できないような感じもするが。

2013年度卒研では、橢円体  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 < 1$  で波動方程式を解くことに取り組んでいる学生がいる（2014年2月16日現在）。

# 第11章 円柱領域における差分法

## 11.1 やりかけですが…

実は3人の人にやってもらって、部分的に分かっていることがある。2004年度桂田研卒研レポートである吉原 [34], 岡田 [16] と、その指導の際の個人的な覚え書き桂田 [9] を参考文献としてあげておく。

9.7.1 でも述べたように、ADI法には疑問を持っていて、誰かの再挑戦を待っている状況。もう少しはっきりしたら、整理してこちらの文書に取り込む予定。

同次 Dirichlet 境界条件を課した熱方程式の初期値境界値問題の解の公式は、寺沢 [31] に載っている。

吉原君は卒研でやったことを全部書いてくれていないね…やれやれ、また発掘して書かないと（まあ、ずいぶん色々やらせたので、最後ばてたのかもしれない、それにしてももったいない）。

# 第12章 球領域における差分法

極座標変換を利用する場合、

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right)$$

を差分近似するのが真っ先に思いつくことであるが、この右辺に現われる分数の分母は  $r = 0$  や  $\theta = 0, \pi$  のときに 0 になることに注意しよう。

原点においては、2次元の場合にやったのと同様の工夫をすると、

$$\Delta u(0) = 6 \frac{u_{\text{mean}} - u(0)}{(\Delta r)^2} + O(\Delta r^2)$$

ただし  $u_{\text{mean}}$  は  $r = \Delta r$  における  $u$  の平均値を表わす。

原点以外の  $z$  軸上の点  $(0, 0, z)$  における差分近似については、素朴な取り組みではあるが、島倉・田邊の卒研レポート [25] がある。

なお、問題とする領域そのものが原点を含まない場合は、 $u = w/r$  と従属変数の変数変換を行なうと

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

は

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

に変換される。

# 付 錄 A 「周期三重対角行列」

## A.1 ルーツ

9.6.2 に書いたことは、簡単なことであるから多分よく知られているとは思うけれど、筆者は文献で目にしたことはない(だから文献を紹介することはできない)。このことに気が付いたのは、1996年度学部卒研の松本英久君の研究([30])の指導をしたときである。

円盤領域の問題で初めて遭遇したわけであるが、考えて見れば、例えば1次元問題でも周期境界条件などを課せば出て来る問題である。

三重対角行列の解析について、山本先生の業績があるが、それをもじって解析できないかな、と考えている。

## A.2 pptrilu.h

```
/*
 * pptrilu.h (version 1.1)
 */

#include <matrix.h>

void pptrilu0(int, vector, vector, vector, vector, vector);
void pptris0(int, vector, vector, vector, vector, vector);
void pptrilu1(int, vector, vector, vector, vector, vector);
void pptris01(int, vector, vector, vector, vector, vector);
```

## A.3 pptrilu.c

```
/*
 * pptrilu.c --- 周期三重対角行列の LU 分解 (version 1.1)
 */

#include <matrix.h>

/*
ptrilu(int n, vector al, vector ad, vector au, vector ab, vector ar)

機能

A =
    ad[0]  au[0]          ar[0]
    al[1]  ad[1]  au[1]      ar[1]
    al[2]  ad[2]  au[2]      ar[2]

    al[n-3] ad[n-3] au[n-3] ar[n-3]
                  al[n-2] ad[n-2] au[n-2]
ab[0]  ab[1]  ab[2] ..... ab[n-3] al[n-1] ad[n-1]
```

という周期三重対角行列 A を LU 分解する。

```

    入力
    int n;                                行列 A の次数
    vector al, ad, au, ar, ab;             行列 A の成分 (上を参照)
    al, ad, au は n 次元ベクトル
    ar, ab は n-2 次元ベクトル
    出力
    vector al, ad, au, ar, ab;             行列 L, U の成分 (上を参照)

    */

void ptrilu0(int n, vector al, vector ad, vector au, vector ab, vector ar)
{
    int k, kp1, nm1 = n - 1, nm2 = n - 2;

    for (k = 0; k < nm2; k++) {
        kp1 = k + 1;

        al[kp1] /= ad[k];
        ad[kp1] -= al[kp1] * au[k];
        if (kp1 < nm2)
            ar[kp1] -= al[kp1] * ar[k];
        else
            au[kp1] -= al[kp1] * ar[k];

        ab[k] /= ad[k];
        if (kp1 < nm2)
            ab[kp1] -= ab[k] * au[k];
        else
            al[nm1] -= ab[k] * au[k];
        ad[nm1] -= ab[k] * ar[k];
    }

    al[nm1] /= ad[nm2];
    ad[nm1] -= al[nm1] * au[nm2];
    /* */
#ifndef NEVER
    ar[nm2] = au[nm2];
    ab[nm2] = al[nm1];
    ab[nm1] = ar[nm1] = ad[nm1];
#endif
}

void ptrisol0(int n,
              vector al, vector ad, vector au, vector ab, vector ar,
              vector b)
{
    int k, nm1 = n - 1;

    for (k = 0; k < nm1; k++) {
        b[k + 1] -= al[k + 1] * b[k];
        if (k + 1 != nm1)
            b[nm1] -= ab[k] * b[k];
    }

    b[nm1] /= ad[nm1];
    for (k = n - 2; k >= 0; k--) {
        b[k] -= au[k] * b[k + 1];
        if (k + 1 != nm1)
            b[k] -= ar[k] * b[nm1];
        b[k] /= ad[k];
    }
}

void ptrilu1(int n, vector al, vector ad, vector au, vector ab, vector ar)

```

```

{
    int k, kp1, nm1 = n - 1;

    for (k = 1; k < nm1; k++) {
        kp1 = k + 1;

        al[kp1] /= ad[k];
        ad[kp1] -= al[kp1] * au[k];
        if (kp1 < nm1)
            ar[kp1] -= al[kp1] * ar[k];
        else
            au[kp1] -= al[kp1] * ar[k];

        ab[k] /= ad[k];
        if (kp1 < nm1)
            ab[kp1] -= ab[k] * au[k];
        else
            al[n] -= ab[k] * au[k];
        ad[n] -= ab[k] * ar[k];
    }
    al[n] /= ad[nm1];
    ad[n] -= al[n] * au[nm1];
}

void ptrisolv(int n,
              vector al, vector ad, vector au, vector ab, vector ar,
              vector b)
{
    int k;

    for (k = 1; k < n; k++) {
        b[k + 1] -= al[k + 1] * b[k];
        if (k + 1 != n)
            b[n] -= ab[k] * b[k];
    }
    b[n] /= ad[n];
    for (k = n - 1; k >= 1; k--) {
        b[k] -= au[k] * b[k + 1];
        if (k + 1 != n)
            b[k] -= ar[k] * b[n];
        b[k] /= ad[k];
    }
}
}

```

## A.4 testptrilu.c

```

/*
 * testptrilu.c --- ptrilu.c のテスト
 */

#include <stdio.h>
#include <matrix.h>
#include "ptrilu.h"

int main()
{
    int i, n;
    vector al, ad, au, ab, ar, b, x;
    n = 8;
    al = new_vector(n); ad = new_vector(n); au = new_vector(n);
    ab = new_vector(n); ar = new_vector(n); b = new_vector(n);

```

```

x = new_vector(n);
for (i = 0; i < n; i++) {
    al[i] = - 1; ad[i] = 4; au[i] = - 1; ar[i] = ab[i] = 0;
}
ar[0] = al[0]; ab[0] = au[n-1];
for (i = 0; i < n; i++)
    x[i] = i+1;
for (i = 0; i < n; i++) {
    if (i == 0)
        b[i] = ar[0] * x[n-1] + ad[i] * x[i] + au[i] * x[i+1];
    else if (i == n-1)
        b[i] = al[i] * x[i-1] + ad[i] * x[i] + ab[0] * x[0];
    else
        b[i] = al[i] * x[i-1] + ad[i] * x[i] + au[i] * x[i+1];
}
ptrilu0(n, al, ad, au, ab, ar);
printf("L, D, U, R\n");
for (i = 0; i < n; i++)
    if (i == 0)
        printf("%7.4f %7.4f %7.4f\n", ad[i], au[i], ar[i]);
    else if (i < n-2)
        printf("%7.4f %7.4f %7.4f %7.4f\n", al[i], ad[i], au[i], ar[i]);
    else
        printf("%7.4f %7.4f %7.4f\n", al[i], ad[i], au[i]);
printf("B\n");
for (i = 0; i < n-2; i++)
    printf("%7.4f ", ab[i]);
printf("\n");
ptrisol0(n, al, ad, au, ab, ar, b);
for (i = 0; i < n; i++) {
    printf("x[%d]=%g, sol[%d]=%g\n", i, x[i], i, b[i]);
}
return 0;
}

```

ptrilu.c による分解と連立1次方程式を解く例

```

oyabun% ./testptrilu
L, D, U, R
4.0000 -1.0000 -1.0000
-0.2500 3.7500 -1.0000 -0.2500
-0.2667 3.7333 -1.0000 -0.0667
-0.2679 3.7321 -1.0000 -0.0179
-0.2679 3.7321 -1.0000 -0.0048
-0.2679 3.7321 -1.0000 -0.0013
-0.2679 3.7321 -1.0003
-0.2680 3.4639 -1.0000
B
-0.2500 -0.0667 -0.0179 -0.0048 -0.0013 -0.0003
x[0]=1, sol[0]=1
x[1]=2, sol[1]=2
x[2]=3, sol[2]=3
x[3]=4, sol[3]=4
x[4]=5, sol[4]=5
x[5]=6, sol[5]=6
x[6]=7, sol[6]=7
x[7]=8, sol[7]=8
oyabun%

```

# 付 錄B 楕円領域での Laplacian

(2004年度卒研がらみで 2005年2月11日に書いた文書を取り込んでおく。)

## B.1 はじめに

伝統的な差分法は本質的に、四角い領域に対して有効な方法である。問題の領域を適当な写像によって四角い領域（「計算領域」と呼ばれる）に写して、そこを格子に切って差分近似することになる。

もっとも簡単なのは円盤領域の問題を極座標

$$(B.1) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

を用いて解析したりする場合であるが、ここでは楕円領域

$$(B.2) \quad \Omega := \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$$

を考えてみる ( $a, b$  は正の定数である)。

$$(B.3) \quad x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta$$

により、 $\Omega$  は

$$D := \{(r, \theta); 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

と対応する。

このとき Laplacian  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  はどうなるか？

## B.2 極座標でウォーミングアップ

普通の極座標の場合にどうやって計算するかは、多変数の微分法の標準的な練習問題であるが、Mathematica を使うと次のように簡単にすんでしまう。

$$(B.4) \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta,$$

$$(B.5) \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta$$

これを  $\partial f / \partial x, \partial f / \partial \theta$  について解く。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

これで  $x, y$  で微分するという操作を  $r, \theta$  で表わすことが出来た。後はこれを計算機に教えてやるだけだ。

```
oyabun% math
Mathematica 4.0 for Solaris
Copyright 1988-1999 Wolfram Research, Inc.
-- Motif graphics initialized --

In[1]:= Dx[f_]:=Cos[t]D[f,r]-Sin[t]D[f,t]/r

In[2]:= Dy[f_]:=Sin[t]D[f,r]+Cos[t]D[f,t]/r

In[3]:= Simplify[Dx[Dx[f[r,t]]]+Dy[Dy[f[r,t]]]]
```

```
(0,2)          (1,0)
f      [r, t]   f      [r, t]   (2,0)
Out[3]= ----- + ----- + f      [r, t]
           2                  r
```

In[4]:=

この結果は良く知られた

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

を意味する。

### B.3 極座標もどき

変数変換 (B.3) を採用すると、

$$(B.6) \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} a \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} b \sin \theta,$$

$$(B.7) \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} ar \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} br \cos \theta$$

これを  $\partial f / \partial x, \partial f / \partial \theta$  について解く。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta & b \sin \theta \\ -ar \sin \theta & br \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{abr} \begin{pmatrix} br \cos \theta & -b \sin \theta \\ ar \sin \theta & a \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\cos \theta}{a} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{ar} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\sin \theta}{b} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{br} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

```
oyabun% math
Mathematica 4.0 for Solaris
Copyright 1988-1999 Wolfram Research, Inc.
-- Motif graphics initialized --

In[1]:= Dx[f_]:=Cos[t]D[f,r]/a-Sin[t]D[f,t]/(a r)

In[2]:= Dy[f_]:=Sin[t]D[f,r]/b+Cos[t]D[f,t]/(b r)

In[3]:= Simplify[Dx[Dx[f[r,t]]]+Dy[Dy[f[r,t]]]]

Out[3]= 
$$(-((a - b) \sin[2 t] f^{(0,1)}[r, t]) +$$


$$(a \cos[t]^2 + b \sin[t]^2) f^{(0,2)}[r, t] +$$


$$r ((a \cos[t]^2 + b \sin[t]^2) f^{(1,0)}[r, t] +$$


$$(a - b) \sin[2 t] f^{(1,1)}[r, t] +$$


$$r (b \cos[t]^2 + a \sin[t]^2) f^{(2,0)}[r, t]) / (a^2 b^2 r^2)$$


In[4]:=
```

$\varphi(\theta) := a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$  とおくと、

$$(B.8) \quad \begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{a^2 b^2 r^2} \left[ (b^2 - a^2) \sin 2\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \varphi(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right. \\ &\quad \left. + r \left( \varphi(\theta) \frac{\partial f}{\partial r} + (a^2 - b^2) \sin 2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} + r (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) \right] \end{aligned}$$

という公式が得られる。

一つのチェックをしてみよう。 $a = b = R$  の場合、 $\varphi(\theta) = R^2$  であるから、

$$\Delta f = \frac{1}{R^4 r^2} \left( 0 + R^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + r \left( R^2 \frac{\partial f}{\partial r} + 0 + r R^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) \right) = \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right).$$

確かに円盤領域のラプラシアンと一致する。

(何だか複雑ですねえ…差分法で微分方程式を解くのだったら、Shortley-Weller の方が済ませたい気がする。)

# 付 錄C Fourier の方法に現れる固有値問題

## C.1 一般論

(作業中)

初めて学ぶ人には俣野 [38] にあるコンパクトな解説を読むことを勧める。クーラント & ヒルベルト [28] にも色々面白いことが書いてある。

- 対称な固有値問題の固有値は実数
- $-\Delta$  の固有値は非負の実数
- 相異なる固有値に属する固有関数は直交する
- すべての固有関数を集めると完全系をなす

固有関数をすべて揃えれば  $L^2$  における直交基底(完全正規直交系)が得られることは、Hilbert 空間における自己共役なコンパクト作用素のスペクトル分解の理論から分かる。これについては関数解析のテキストを見よ(例えば黒田 [15])。

## C.2 熱方程式

### C.2.1 問題の設定

$\Omega$  を  $\mathbf{R}^N$  の有界領域、 $\Gamma$  を  $\Omega$  の境界、 $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$  とするとき、 $\Omega$  における熱方程式の初期値境界値問題

$$(C.1) \quad u_t(x, t) = \Delta u(x, t) \quad ((x, t) \in \Omega \times (0, \infty)),$$

$$(C.2) \quad u(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in \Gamma \times (0, \infty)),$$

$$(C.3) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \bar{\Omega})$$

を Fourier の変数分離法を用いて考える。

### C.2.2 固有値問題の導出

まず

$$(C.4) \quad U(x, t) = \zeta(x)T(t)$$

の形をした  $U$  で、(C.1), (C.2), さらには条件

$$(C.5) \quad U \not\equiv 0 \quad \text{i.e. } \exists (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \quad \text{s.t. } U(x, t) \neq 0$$

を満たすものを探す。

**注意 C.2.1 (条件 (C.5) について)** 一目でわかるように、定数関数 0, すなわち

$$U(x, t) \equiv 0$$

という関数は (C.1), (C.2), (C.4) を満たす。以下の ((C.1), (C.2), (C.4) を満たす関数を探す) 議論で、しばしば (わずらわしいくらいに何回も) この定数関数 0 が顔を出す。そこで、この分かりきった解以外のものを探すことを方針にしておくことにする。

$\zeta, T$  に関する微分方程式 まず (C.4) を (C.1) に代入すると

$$\zeta(x)T'(t) = \Delta\zeta(x)T(t).$$

これから

$$\frac{\Delta\zeta(x)}{\zeta(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

左辺は  $t$  によらず、右辺は  $x$  によらないから、この式の値は定数である。その値が負になることを見越して  $-\lambda$  とおく：

$$(C.6) \quad \frac{\Delta\zeta(x)}{\zeta(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

これから

$$(C.7) \quad T'(t) = -\lambda T(t) \quad (t \in (0, \infty)),$$

$$(C.8) \quad \Delta\zeta(x) = -\lambda\zeta(x) \quad (x \in \Omega)).$$

$\zeta$  に関する境界条件 一方 (C.2) に (C.4) を代入すると

$$\zeta(x)T(t) = 0 \quad ((x, t) \in \Gamma \times (0, \infty)).$$

もしも

$$(C.9) \quad \exists x \in \Gamma \quad \text{s.t.} \quad \zeta(x) \neq 0$$

であったとすると、

$$T(t) = 0 \quad (t \in (0, \infty))$$

となるので、結局

$$U(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in \Gamma \times (0, \infty))$$

となる。これは (C.5) に反しているので、(C.9) は否定され、

$$(C.10) \quad \zeta(x) = 0 \quad (x \in \Gamma)$$

でなければならない。

**まとめ** (C.4) の  $U$  が (C.1), (C.2), (C.5) を満たすには、 $\zeta, T$  が適当な定数  $\lambda$  に対して次を満たしている必要がある。

$$(C.11) \quad \Delta\zeta(x) = -\lambda\zeta(x) \quad (x \in \Omega),$$

$$(C.12) \quad \zeta(x) = 0 \quad (x \in \Gamma),$$

$$(C.13) \quad \zeta(x) \not\equiv 0,$$

$$(C.14) \quad T'(t) = -\lambda T(t) \quad (t \in (0, \infty)),$$

$$(C.15) \quad T(t) \not\equiv 0.$$

このうち  $T$  は (C.14), (C.15) からすぐに

$$(C.16) \quad T(t) = Ce^{-\lambda t} \quad (C \text{ は } 0 \text{ でない任意定数})$$

と求まる。

$\lambda$  の値は、 $\zeta$ とともに、条件 (C.11), (C.12), (C.13) から定まることになる。条件 (C.11), (C.12), (C.13) を満たす  $\zeta, \lambda$  を求めよ、という問題は固有値問題 (eigenvalue problem)、 $\lambda$  は固有値 (eigenvalue)、 $\zeta$  は  $\lambda$  に属する固有関数 (eigenfunction) と呼ばれる。

**注意 C.2.2 (Neumann 境界条件の場合)** Dirichlet 境界条件 (C.2) の代りに Neumann 境界条件

$$(C.17) \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in \Gamma \times (0, \infty)),$$

( $n$  は  $x \in \Gamma$  における  $\Omega$  の外向き単位法線ベクトル) を課した初期値境界値問題を考えた場合は、(C.12) の代りに

$$(C.18) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n}(x) = 0 \quad (x \in \Gamma)$$

になる。

### C.2.3 復習: 空間 1 次元の場合

$N = 1$  の場合、 $\Omega$  は  $\mathbf{R}$  の有界開区間になるが、簡単のために  $\Omega = (0, 1)$  とする。この場合は、固有値問題は

$$(C.19) \quad \zeta''(x) = -\lambda \zeta(x) \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(C.20) \quad \zeta(0) = \zeta(1) = 0,$$

$$(C.21) \quad \zeta(x) \not\equiv 0$$

となる。この解は

$$(C.22) \quad (\zeta, \lambda) = (\zeta_n, \lambda_n) := (\sin n\pi x, (n\pi)^2) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

固有値はすべて単純であり、固有関数は互いに直交する

$$\int_0^1 \sin m\pi x \sin n\pi x dx = 0 \quad (m \neq n).$$

途中を飛ばして、結論を述べると

$(0, 1)$  における初期値境界値問題 (Dirichlet) の解の公式

$N = 1, \Omega = (0, 1)$  とするとき、初期値境界値問題 (C.1), (C.2), (C.3) の解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x,$$

$$b_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin n\pi x dx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

また、同次 Dirichlet 境界条件 (C.2) の代りに、同次 Neumann 境界条件 (C.17) を課した初期値境界値問題の場合、対応する固有値問題は、

$$\begin{aligned}\zeta''(x) &= -\lambda\zeta(x) \quad (x \in (0, 1)), \\ \zeta'(0) &= \zeta'(1) = 0, \\ \zeta(x) &\not\equiv 0\end{aligned}$$

となる。この解は

$$(C.23) \quad (\zeta, \lambda) = (\zeta_n, \lambda_n) := (\cos n\pi x, (n\pi)^2) \quad (n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}).$$

(0, 1) における初期値境界値問題 (Neumann) の解の公式

$N = 1, \Omega = (0, 1)$  とするとき、初期値境界値問題 (C.1), (C.17), (C.3) の解は

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t} \cos n\pi x,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \cos n\pi x \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

#### C.2.4 2 次元長方形領域

$a, b$  を正定数として、 $\Omega = (0, a) \times (0, b)$  とおく。変数を  $(x, y)$  と書くことにして、固有値問題

$$(C.24) \quad \Delta\zeta(x, y) = -\lambda\zeta(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega),$$

$$(C.25) \quad \zeta(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \Gamma),$$

$$(C.26) \quad \zeta(x, y) \not\equiv 0,$$

を考える。

ここで

$$(C.27) \quad \zeta(x, y) = X(x)Y(y)$$

の形を仮定して考える。まず (C.24) に代入して

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -\lambda X(x)Y(y).$$

両辺を  $X(x)Y(y)$  で割って、

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

さらに移項して

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\left(\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda\right).$$

この式の値は定数であることが分かるから、それを  $-\mu$  とおく：

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\left(\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda\right) = -\mu.$$

これから

$$(C.28) \quad X''(x) = -\mu X,$$

$$(C.29) \quad Y''(y) = (\mu - \lambda)Y.$$

一方、(C.27) を (C.25) に代入すると

$$\begin{aligned} X(0)Y(y) &= X(a)Y(y) = 0 \quad (y \in [0, b]), \\ X(x)Y(0) &= X(x)Y(1) = 0 \quad (x \in [0, a]). \end{aligned}$$

条件 (C.26) に注意すると

$$\begin{aligned} X(0) &= X(a) = 0, \\ Y(0) &= Y(b) = 0. \end{aligned}$$

以上まとめると、

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\mu X(x), \quad X(0) = X(a) = 0, \\ Y''(y) &= -\nu Y(y), \quad Y(0) = Y(b) = 0, \\ \lambda &= \mu + \nu \end{aligned}$$

のような 1 変数関数についての固有値問題が 2 つ導かれる。これは簡単に解けて、

$$\begin{aligned} X(x) &= X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \quad \mu = \mu_m \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2, \\ Y(y) &= \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad \nu = \nu_n \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \\ \lambda &= \lambda_{m,n} = \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right] \pi^2 \quad (m, n \in \mathbf{N}). \end{aligned}$$

こうして、固有値問題 (C.24), (C.25), (C.26) の解として

$$(C.30) \quad \zeta_{m,n}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad \lambda_{m,n} = \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right] \pi^2 \quad (m, n \in \mathbf{N})$$

が得られた。(C.24), (C.25), (C.26) の解がこれで尽くされることは後述する。

1 次元のときと異なり、 $a, b$  の値によっては固有値は単純ではない。実際、 $a = b$  の場合

$$\lambda_{m,n} = \lambda_{n,m} \quad (m, n \in \mathbf{N})$$

である。しかし、固有関数については直交性

$$\int_0^b \int_0^a \zeta_{m,n}(x, y) \zeta_{m',n'}(x, y) dx dy = 0 \quad ((m, n) \neq (m', n'))$$

が成り立つ。実際

$$\begin{aligned} \int_0^b \int_0^a \zeta_{m,n}(x, y) \zeta_{m',n'}(x, y) dx dy &= \int_0^a X_m(x) X_{m'}(x) dx \int_0^b Y_n(y) Y_{n'}(y) dy \\ &= \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} = 0 \quad ((m, n) \neq (m', n')). \end{aligned}$$

$(0, a) \times (0, b)$  における初期値境界値問題 (Dirichlet) の解の公式

$N = 2, \Omega = (0, a) \times (0, b)$  とするとき、初期値境界値問題 (C.1), (C.2), (C.3) の解は

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{m,n} e^{-(m^2+n^2)\pi^2 t} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

$$b_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a u_0(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (m, n \in \mathbf{N}).$$

注意 C.2.3 ((C.30) で (C.24), (C.25), (C.26) の解が尽くされること) (C.30) が固有値問題 (C.24), (C.25), (C.26) の解であることは明らかだが、逆に固有値問題 (C.24), (C.25), (C.26) の解が、(C.30) のいずれか (の線形結合) であるのかどうか？（言い換えると、変数分離形の固有関数のみ考えるだけで十分かどうか？）多くの入門書はこの点について言及していないが、答は Yes である。俣野 [38] には証明の方針が載っている。それを紹介しよう。 $\lambda$  を固有値問題 (C.24), (C.25), (C.26) の固有値、 $\varphi$  を  $\lambda$  に属する固有関数とする。その Fourier 正弦級数展開を

$$\varphi(x, y) = \sum_{\ell,m=1}^{\infty} c_{\ell m} \sin\left(\frac{\ell\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

とおく。 $\varphi \neq 0$  ゆえ、係数  $c_{\ell m}$  のうち少なくとも一つは 0 でない。そのような  $(\ell, m)$  の任意の一つを選んで、

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$$

に  $\sin\left(\frac{\ell\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$  をかけて  $\Omega$  で積分すると、

$$\lambda = \left[ \left( \frac{\ell}{a} \right)^2 + \left( \frac{m}{b} \right)^2 \right] \pi^2.$$

これから、一つの  $\lambda$  に対して  $c_{\ell m} \neq 0$  となる  $(\ell, m)$  は有限個であることが分かり、

$$\varphi(x, y) = \sum_{c_{\ell m} \neq 0} c_{\ell m} \sin\left(\frac{\ell\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (\text{有限和}).$$

すなわち  $\varphi$  は、変数分離形をした固有関数 (C.30) のいくつかの線形結合で表される。 ■

金子 [4] には、これが一般的に成り立つ原理であることの (簡単な) 説明が載っている。

$(0, a) \times (0, b)$  における初期値境界値問題 (Neumann) の解の公式

$N = 2, \Omega = (0, a) \times (0, b)$  とするとき、初期値境界値問題 (C.1), (C.17), (C.3) の解は (作業中)

## C.2.5 2 次元円板領域

$\Omega$  を  $\mathbf{R}^2$  の単位円板とする：

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}.$$

極座標

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta$$

を用いると

$$\Delta\zeta = \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2}$$

であるから、固有値問題は

$$(C.31) \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2} = -\lambda\zeta \quad (r \in (0, 1), \theta \in [0, 2\pi]),$$

$$(C.32) \quad \zeta(1, \theta) = 0 \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$

となる。ただし  $\zeta$  は  $r = 0$  で連続で、 $\theta$  について周期  $2\pi$  であることを注意する。

$$\zeta(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

を (C.31) に代入すると

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = -\lambda R(r)\Theta(\theta).$$

両辺に  $r^2$  をかけると

$$(r^2R''(r) + rR'(r))\Theta(\theta) + R(r)\Theta''(\theta) = -\lambda r^2R(r)\Theta(\theta).$$

$R(r)\Theta(\theta)$  で割って、移項して整理すると

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

この式の値は定数であることが分かるから、それを  $\mu$  とおくと、

$$(C.33) \quad r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0,$$

$$(C.34) \quad \Theta''(\theta) = -\mu\Theta(\theta).$$

まず  $\Theta$  について考えよう。 $\Theta$  はその任意階数の導関数も含めて周期  $2\pi$  であるから、特に

$$(C.35) \quad \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$$

が成り立つことに注意しておく<sup>1</sup>。

#### 補題 C.2.4 (円周上の Laplace-Beltrami 作用素の固有値問題) 固有値問題

$$(C.36) \quad -\Theta''(\theta) = \mu\Theta(\theta) \quad (\theta \in (0, 2\pi)),$$

$$(C.37) \quad \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi),$$

$$(C.38) \quad \Theta(\theta) \not\equiv 0$$

の解は

$$\{(n, \cos n\theta); n = 0, 1, 2, \dots\} \cup \{(n, \sin n\theta); n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

<sup>1</sup>逆に条件 (C.35) があれば、 $\Theta^{(k)}(0) = \Theta^{(k)}(2\pi)$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) であることが導かれる。

**補題の直感的な解説** 微分方程式の一般解が ( $\mu \neq 0$  の場合は)

$$\Theta(\theta) = A \cos \mu\theta + B \sin \mu\theta$$

であることはすぐ分かる。これは周期関数で、絶対値最小の周期が  $2\pi/\mu$  であることが分かる。周期  $2\pi$  であるための必要十分条件は

$$\exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad 2\pi = n \cdot 2\pi/\mu.$$

すなわち  $\mu$  は整数である。 $\mu = n$  と  $\mu = -n$  で同じ  $\Theta$  を与えるから、負の整数は考えなくても良い。

**補題の証明** 微分方程式の一般解は、 $\mu \neq 0$  の場合

$$\Theta(\theta) = A \cos \sqrt{\mu}\theta + B \sin \sqrt{\mu}\theta \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

ゆえに

$$A = A \cos 2\pi\sqrt{\mu} + B \sin 2\pi\sqrt{\mu}, \quad 2\pi\sqrt{\mu}B = 2\pi\sqrt{\mu}(-A \sin 2\pi\sqrt{\mu} + B \cos 2\pi\sqrt{\mu}).$$

整理して

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi\sqrt{\mu} - 1 & \sin 2\pi\sqrt{\mu} \\ -\sin 2\pi\sqrt{\mu} & \cos 2\pi\sqrt{\mu} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

非自明解が存在するには、行列式が 0 になることが必要十分。

$$(\cos 2\pi\sqrt{\mu} - 1)^2 + \sin^2 2\pi\sqrt{\mu} = 0.$$

整理して

$$\cos 2\pi\sqrt{\mu} = 1.$$

これから

$$2\pi\sqrt{\mu} = 2n\pi \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

ゆえに

$$\sqrt{\mu} = n.$$

こうして

$$\mu = n^2, \quad \Theta(\theta) = A \cos n\theta + B \sin n\theta \quad (n \in \mathbf{N}).$$

一方  $\mu = 0$  のとき、一般解は

$$\Theta(\theta) = A\theta + B.$$

周期条件は  $B = 0$  と同値であるから、

$$\mu = 0, \quad \Theta(\theta) = C \quad (C \text{ は定数}).$$

以上まとめると補題が得られる。■

長い回り道になったが、今度は  $R$  について考える。(C.33) で  $\sqrt{\lambda}r = s$  と変数変換し、 $J(s) = R(r)$  とおくと

$$(C.39) \quad \frac{d^2 J}{ds^2}(s) + \frac{1}{s} \frac{dJ}{ds}(s) + \left(1 - \frac{\mu}{s^2}\right) J(s) = 0.$$

これは Bessel の微分方程式である。

今  $\mu = n^2$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) であることに注意する。 $\mu = n^2$  に対して、(C.39) のうちで  $r = 0$  で有界であるものは、(第 1 種の)  $n$  次 Bessel 関数

$$J_n(s) = \left(\frac{s}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k}.$$

(の定数倍) に限られる。 $J_n(s)$  は、正の実軸上に、無限大に発散する零点の無限列を持つ。それを小さな順に並べて  $\{\nu_{n,m}\}_{m=1,2,\dots}$  とおこう。 $R(r)$  に対する境界条件  $R(1) = 0$  は、

$$J_n(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad \text{i.e. } \exists m \in \mathbf{N} \quad \text{s.t. } \lambda = \nu_{n,m}^2.$$

以上で、 $\zeta$  に関する固有値問題 (C.31), (C.32) は解けて、

$$(C.40) \quad (\lambda, \zeta) = \begin{cases} (\nu_{n,m}, J_n(\nu_{n,m}r) \cos n\theta) & (n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots) \\ (\nu_{n,m}, J_n(\nu_{n,m}r) \sin n\theta) & (n = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

## C.2.6 2 次元円環領域

$N = 2$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; a^2 < x^2 + y^2 < b^2\}$  の場合を考えよう (ただし  $0 < a < b$  と仮定する)。円板領域の場合とほぼ同様で、固有値問題は

$$(C.41) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} = -\lambda \zeta \quad (r \in (a, b), \theta \in [0, 2\pi]),$$

$$(C.42) \quad \zeta(a, \theta) = \zeta(b, \theta) = 0 \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$

となる。ただし、今度は  $\zeta$  は  $r = 0$  で連続である必要はなく、ただ  $\theta$  について周期  $2\pi$  であることだけを要求する。

やはり変数分離形

$$\zeta(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

をした解を探すことにする。

$$(C.43) \quad r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda r^2 - \mu) R(r) = 0 \quad (r \in (a, b)),$$

$$(C.44) \quad R(a) = R(b) = 0,$$

$$(C.45) \quad R(r) \not\equiv 0,$$

$$(C.46) \quad \Theta''(\theta) = -\mu \Theta(\theta) \quad (\theta \in [0, 2\pi]),$$

$$(C.47) \quad \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi),$$

$$(C.48) \quad \Theta(\theta) \not\equiv 0.$$

$\Theta$  については、円板とまったく同じで、

$$(\Theta(\theta), \mu) = \begin{cases} (\cos n\theta, n) & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ (\sin n\theta, n) & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

が得られる。

$$s = \sqrt{\lambda}r, J(s) = R(r) = R\left(s/\sqrt{\lambda}\right) \text{ とおいて}$$

$$(C.49) \quad \frac{d^2 J}{ds^2}(s) + \frac{1}{s} \frac{dJ}{ds}(s) + \left(1 - \frac{\mu}{s^2}\right) J(s) = 0 \quad (s \in (\sqrt{\lambda}a, \sqrt{\lambda}b)),$$

$$(C.50) \quad J(\sqrt{\lambda}a) = J(\sqrt{\lambda}b) = 0,$$

$$(C.51) \quad J(s) \not\equiv 0.$$

$\mu = n^2$  ( $n \in \mathbf{N}_0$ ) とするとき、(C.49) の一般解は

$$\alpha J_n(s) + \beta N_n(s) \quad (\alpha, \beta \text{ は任意定数})$$

である。ただし  $N_n(s)$  は  $n$  次の Neumann 関数である:

$$(C.52) \quad N_n(s) = \frac{2}{\pi} \left( \log \frac{s}{2} + \gamma \right) J_n(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k+1)!}{k!} \left( \frac{s}{2} \right)^{-n+2k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} (\varphi(k) + \varphi(n+k)) \left( \frac{s}{2} \right)^{n+2k},$$

$$(C.53) \quad \varphi(m) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(C.54) \quad \gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} (\varphi(m) - \log m) = 0.57721 \dots$$

### C.2.7 3 次元の円柱領域

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 < 1, \quad 0 < z < L\}$$

$$\begin{aligned} \zeta(x, y, z) &= v(x, y)w(z) \\ \frac{\Delta v(x, y)}{v(x, y)} + \lambda &= -\frac{w''(z)}{w(z)} = \mu. \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{(\ell\pi)^2}{L^2}, \quad w(z) = \sin\left(\frac{\ell\pi z}{L}\right) \quad (\ell = 1, 2, \dots).$$

$$-\Delta v(x, y) = (\lambda - \mu)v(x, y)$$

$$\lambda - \mu = \nu_{n,m}^2, \quad v(x, y) = J_n(\nu_{n,m}r) \cos n\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, 3, \dots)$$

### C.2.8 3 次元球領域

(書きかけ)

$N = 3$  として

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} = -\lambda \zeta.$$

$$\zeta(r, \theta, \varphi) = R(r)v(\theta, \varphi)$$

$$r^2 \frac{R''(r) + \frac{2}{r} R'(r) + \lambda R(r)}{R(r)} = -\frac{1}{v(\theta, \varphi)} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(\theta, \varphi) + \cot \theta \frac{\partial v}{\partial \theta}(\theta, \varphi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(\theta, \varphi) \right).$$

この式の値は定数だから  $\mu$  とおくと、

$$(C.55) \quad R''(r) + \frac{2}{r} R'(r) + \left( \lambda - \frac{\mu}{r^2} \right) R(r) = 0,$$

$$(C.56) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(\theta, \varphi) + \cot \theta \frac{\partial v}{\partial \theta}(\theta, \varphi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(\theta, \varphi) = -\mu v(\theta, \varphi).$$

# 付 錄D 解析的なクラスの微分方程式

## — 微分方程式の級数解法 —

解析的なクラスの微分方程式について、「級数解法」という方法論を軸にして説明する。初学者が遭遇することの多い問題について、情報へのポインターを示すことが目標である。—当分の間、工事中です。

個人的には、学部3年生の講義で学んだのが最初で、笠原 [5] がそのときメインで使った参考書である。他にも多くの参考書があり、今度勉強するときは高野 [33] を読んでみたいと思っている(忘れないようにメモ)。

## 記号

$$\mathbf{N}_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\} = 0 \text{ 以上の整数全体の集合.}$$

### D.1 はじめに

微分方程式の問題には実にさまざまなものがあるが、その中で微分方程式や各種の条件(初期条件、境界条件など)に現れる関数などがすべて解析的な問題を考えることにする。このような問題は、ともすると一般性の低い、ごく特殊なものであると考える人がいるかもしれないが、実は純理論上の見地からも、応用上の見地からも重要なクラスを占めている。

- 解の存在を保証する Cauchy Kowalewsky の定理
- 各種の特殊関数  
Bessel 関数、

(狭いクラスは、構造が豊富だから狭くなるのであって、広いクラスでは期待できないような結果がたくさん出て来る。それらは応用上も重要であることが多い。)

注意 D.1.1 (解析的な問題は必ずしも連続クラスの問題には含まれない) ともすると誤解してしまいそうなことだが(実際、筆者は学生のときに完璧に誤解していた)、この文書で扱う解析的なクラスの問題は、通常の「連続クラス」の問題に含まれてしまうわけではない。解析的なクラスでは、特異点を含む問題を考え得るからである。

例 D.1.2 (2次元の円板領域における、Laplacian を含む微分方程式) 平面  $\mathbf{R}^2$  における Laplacian

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を極座標表示すると

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

となる。そこで、例えば円板領域において

Poisson 方程式  $-\Delta u = f$

熱方程式  $u_t = \Delta u$

波動方程式  $u_{tt} = \Delta u$

を Fourier の変数分離法で取り扱おうとすると、常微分作用素

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$$

を扱う必要が出て来ることは納得できるであろう。この作用素は、 $r = 0$  で係数が不連続になっている。それゆえ、常微分方程式の初期値問題の解の存在を保証する定理としては、

### Cauchy の存在定理

常微分方程式の初期値問題  $dx/dt = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  において、 $f$  が連続ならば、(少なくとも局所的には) 解が存在する。

が有名であるが、この定理の守備範囲の外に出てしまう。

## D.2 正則な場合の基礎理論

### D.2.1 問題設定

実は偏微分方程式の場合も同様に扱えるが(後述)、まずは常微分方程式の初期値問題

$$(D.1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$(D.2) \quad y(x_0) = y_0$$

を考える(ここで  $x_0, y_0$  は定数、 $f$  は 2 变数の正則関数であり、いずれも与えられている(既知である)とする)。二つの方程式を満たす未知関数  $y = y(x)$  を求めよ、という問題である。

実数の範囲で考える場合、 $f$  が  $(x_0, y_0)$  の近傍において実解析的ならば、常微分方程式についての入門的な講義で解説される基本定理<sup>1</sup>から、滑らかな解が一意的に存在することはすぐ分かる。さらに、その解が正則であることを示すのもそれほど難しくない。しかし、この文書では、それらの理論に(あまり)頼らずに、級数解法を道具として、議論を展開する。それは一つには、級数解法が実用上の見地からも強力な方法であり、「それを説明するのは有益だから」ということもあるが、むしろ複素変数の場合(複素領域における、と言い換てもよい)は、解の解析接続や、特異点近傍での解の概念など、実数の範囲での「基礎理論」には収まらないことが多いのが大きい。

一言でまとめると

## 複素関数論の世界の話なのだ

ということになるだろうか。

**小さな、当たり前の注意** 以下では、複素変数の関数を考えることにするが、例えば正則という言葉を実解析的という言葉で置き換えることによって、実变数の関数に対しての結果を得ることはいつでも可能である。

<sup>1</sup> 「 $f$  が連続ならば、連続な解が存在する」、「 $f$  が 2 番目の变数について Lipschitz 条件を満たせば、解は一意である」、「 $f$  が  $C^m$ -級ならば、解も  $C^m$ -級である」などの定理がある。

## D.2.2 正則点近傍の解

まずは(他の方法でも簡単に解けて、結果が確認できるような)簡単な実例によって、級数解法とどんなものか見てみよう。

### 例 D.2.1 微分方程式

$$y' - xy = 0$$

の  $x = 0$  のまわりの解析解を求めよう。解析性の仮定から

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

とおけるから、

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k,$$

$$xy = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k$$

となるが、これを微分方程式に代入すると

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k.$$

係数を比較して

$$c_1 = 0, \quad (k+1)c_{k+1} = c_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

ゆえに  $k$  が奇数のときは  $c_k = 0$  で、

$$c_2 = \frac{c_0}{2}, \quad c_4 = \frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{4 \cdot 2}, \quad c_6 = \frac{c_4}{6} = \frac{c_0}{6 \cdot 4 \cdot 2}, \dots$$

つまり

$$c_{2m} = \frac{c_0}{(2m)!!} = \frac{c_0}{2^m m!} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

ゆえに

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_0}{2^m m!} x^{2m} = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^m = c_0 \exp(x^2/2). \blacksquare$$

### 例 D.2.2

$$y'' + y = 0$$

について、上の例と同様に

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

とおいて、微分方程式に代入する。

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

から

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1)c_{k+2} + c_k) x^k = 0.$$

ゆえに

$$c_{k+2} = -\frac{c_k}{(k+2)(k+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

これから

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{c_0}{(2m)!}, \quad c_{2m+1} = (-1)^m \frac{c_1}{(2m+1)!} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

が得られるから

$$y = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = c_0 \cos x + c_1 \sin x. \blacksquare$$

上の二つの例では、級数解が求めた後、それを良く知られた関数で表示することが出来たが、一般にはそこまで出来るとは期待できない。その場合、級数がちゃんと収束して正則な関数を与えるかどうか心配になるが、実は大丈夫ということを保証するのが次の定理である。

**定理 D.2.3 (正則点の近傍における解の一意存在) 微分方程式の初期値問題**

$$(D.3) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$(D.4) \quad y(a) = b$$

において、 $f$  は  $(a, b)$  の近傍

$$U \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in \mathbf{C}^2; |x - a| < r, |y - b| < \rho\}$$

において正則で、ある定数  $M$  に対して、

$$|f(x, y)| \leq M \quad ((x, y) \in U)$$

を満たすとする。このとき

$$|x - a| < r \left( 1 - \exp \left( \frac{-\rho}{2Mr} \right) \right)$$

で初期値問題 (D.3), (D.4) の正則な解がただ一つ存在する。

**証明 (その一)** 方針は、解を級数の形で書いて、係数に関する方程式を導き、そうして得られた解が  $a$  の近傍で収束することを**優級数の方法**で証明する。詳しいことは略するが、例えば村上 [18] などに載っている。 ■

**証明 (その二)** 例えば、村上 [18] などに載っている。 ■

#### 定理 D.2.4 微分方程式の初期値問題

$$(D.5) \quad \frac{dy_j}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$(D.6) \quad y_j(a) = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

において、 $f$  は  $(a, b_1, \dots, b_n)$  の近傍

$$\tilde{U} \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{C}^{n+1}; |x - a| < r, |y_1 - b_1| < \rho, \dots, |y_n - b_n| < \rho\}$$

において正則で、ある定数  $M$  に対して、

$$|f(x, y_1, \dots, y_n)| \leq M \quad ((x, y_1, \dots, y_n) \in \tilde{U})$$

を満たすとする。このとき

$$|x - a| < r \left( 1 - \exp \left( \frac{-\rho}{(n+1)Mr} \right) \right)$$

で初期値問題 (D.5), (D.6) の正則な解がただ一つ存在する。

#### D.2.3 参考：偏微分方程式の場合 — Cauchy Kowalewsky の定理

(金子 [4]、ペトロフスキイ [27] を見よ。)

### D.3 線形方程式の確定特異点近傍の解 — Frobenius の理論

ここでは 2 階線形常微分方程式に対して議論する。同様のことは、階数を一般の  $n$  階にしたり、連立にしても成立する。しかし、それらをここで展開するのは、結構面倒な割に実入りが少ないと思われる。必要になった場合は、木村 [13]などを参照すると良い。

#### 定義 D.3.1 (2 階線形常微分方程式の確定特異点) 2 階線形常微分方程式

$$(D.7) \quad x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$$

において、

$$(t - t_0)a_1(t), \quad (t - t_0)^2a_2(t)$$

が  $t = t_0$  で正則、言い換えると  $t = t_0$  の近傍で正則な (Taylor 展開可能な)  $p(t), q(t)$  によって

$$a_1(t) = \frac{p(t)}{t - t_0}, \quad a_2(t) = \frac{q(t)}{(t - t_0)^2}$$

と表されるとき、 $t = t_0$  は (D.7) の確定特異点である、という。 $t - t_0$  を新たに変数  $t$  と置き直すことによって、 $t_0 = 0$  と考えて一般性を失わない。また  $s = 1/t$  と変数変換したとき、 $s = 0$  が確定特異点になることがあるが、そのとき  $t = \infty$  は確定特異点であるという。

#### 例 D.3.2 (Euler の方程式) $p, q$ を定数とすると、

$$(D.8) \quad t^2x'' + ptx' + qx = 0$$

を Euler の方程式と呼ぶ（これは例えば、円板領域における Laplace 方程式を解く際に現れる）。この方程式は

$$x'' + \frac{p}{t}x' + \frac{q}{t^2}x = 0$$

と書き直されるので、 $t = 0$  は確定特異点である。変数変換  $t = e^s$  を施そう。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t^2} \left( \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \right)$$

となるから、(D.8) は

$$(D.9) \quad \frac{d^2x}{ds^2} + (p-1)\frac{dx}{ds} + qx = 0$$

に変換される。2 次方程式

$$\lambda^2 + (p-1)\lambda + q = 0$$

の 2 根を  $\rho_1, \rho_2$  とすると、(D.9) の一般解は

$$x = \begin{cases} c_1 e^{\rho_1 s} + c_2 e^{\rho_2 s} & (\rho_1 \neq \rho_2), \\ c_1 e^{\rho_1 s} + c_2 s e^{\rho_1 s} & (\rho_1 = \rho_2) \end{cases}$$

となる。変数を  $t$  に戻すと

$$x(t) = \begin{cases} c_1 t^{\rho_1} + c_2 t^{\rho_2} & (\rho_1 \neq \rho_2), \\ c_1 t^{\rho_1} + c_2 t^{\rho_1} \log t & (\rho_1 = \rho_2). \end{cases} \blacksquare$$

簡単のため  $t_0 = 0$  とする。

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+\lambda} \quad (b_0 \neq 0)$$

の形の級数展開を仮定して、

## D.4 特殊関数

## D.5 Legendre の微分方程式

$$(D.10) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$$

### D.5.1 一体どこから出て来たのか

### D.5.2 Legendre の多項式

## D.6 Bessel の方程式と Bessel 関数

この節の内容は、主に笠原 [5] による。コンピューターで実験するためにどうやって計算するかということについては、分かっていることを記した<sup>2</sup>桂田 [10] も参考になるだろう。

---

<sup>2</sup>「まとめた」とは到底言えない…

### D.6.1 Bessel の方程式

$\nu$  を定数とするとき、常微分方程式

$$(D.11) \quad x'' + \frac{1}{t}x' + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)x = 0$$

を **Bessel の (微分) 方程式** と呼び、 $\nu$  をその次数という。定数  $\nu$  は実数に限らず、複素数として良いが、一般性を失わずに  $\operatorname{Re} \nu \geq 0$  と仮定する。

## D.7 Gauss の微分方程式、超幾何関数

(笠原 [5] を見よ。)

## D.8 Fuchs 型方程式

(笠原 [5] を見よ。)

# 付 錄E 可視化の手法

## E.1 円盤領域で定義された関数の可視化

円盤領域で定義された関数を可視化することは、以前から簡単そうだがどうすれば良いか分からぬ、悩ましい問題であった。2007年2月現在、gnuplotを呼び出して表示させることで凌いでいる(誤魔化している)。静止画像を作成してMPEGデータ作ることもできるので、うるさいことを言わなければまあまあの使い勝手である。

### E.1.1 call\_gnuplot.c

```
/*
 * call_gnuplot.c --- gnuplot を用いて円板で定義された関数を可視化する
 *                      version 2
 *
 *   written by mk.
 *
 *   GNUPLOT manual (in Japanese)
 *   http://www.meiji.ac.jp/servers/math/staffs/mk/on-computer/gnuplotj/index.html
 *
 */
#include <sys/stat.h>          /* S_IRUSR etc */
#include <stdio.h>
#include <unistd.h>             /* unlink() */
#include <math.h>                /* atan() etc */
#include <signal.h>
#include "matrix.h"
#include "call_gnuplot.h"

int msleep(int);

#define PANIC(a) do { \
    perror(a); \
    if (temp_name) unlink(temp_name); \
    exit(1); \
} while(0)

void goodbye(int dummy)
{
    close_gnuplot();
    exit(0);
}

double pi;
char *temp_name = NULL;
FILE *gnuplot, *data;

int open_gnuplot()
{
    pi = 4.0 * atan(1.0);
    if ((temp_name = tmpnam((char *) 0)) == 0)
```

```

        PANIC("tmpnam failed");
/*
 * stat.h
 * S_IRUSR R for owner
 * S_IWUSR W for owner
 */
if (mkfifo(temp_name, S_IRUSR | S_IWUSR) != 0)
    PANIC("mkfifo failed");
gnuplot = popen("gnuplot", "w");
fprintf(gnuplot, "set data style lines\n");
fprintf(gnuplot, "set parametric\n");
fprintf(gnuplot, "set hidden3d\n");
fprintf(gnuplot, "set contour\n");
fprintf(gnuplot, "set cntrparam levels 10\n");
fflush(gnuplot);
signal(SIGINT, goodbye);
return 0;
}

int disk(int nr, int nt, matrix u, char *label)
{
    int i, j;
    double r, theta, x, y, z;
    double dr, dt;
    FILE *data;

    dr = 1.0 / nr;
    dt = 2.0 * pi / nt;

    fprintf(gnuplot, "set nolabel\n");
    fprintf(gnuplot, "set label \"%s\" at screen 0.4,0.85\n", label);
    fprintf(gnuplot, "set zrange [-1:3]\n");
    fprintf(gnuplot, "clear\n");
    fprintf(gnuplot, "splot \"%s\" with lines\n", temp_name);
    fflush(gnuplot);

    data = fopen(temp_name, "w");

    for (i = 0; i <= nr; i++) {
        r = i * dr;
        for (j = 0; j <= nt; j++) {
            theta = j * dt;
            x = r * cos(theta);
            y = r * sin(theta);
            z = u[i][j];
            fprintf(data, "%f %f %f\n", x, y, z);
        }
        fprintf(data, "\n");
    }
    fclose(data);
    msleep(100);
    return 0;
}

int open_gnuplot2()
{
    pi = 4.0 * atan(1.0);
    if ((temp_name = tmpnam((char *) 0)) == 0)
        PANIC("tmpnam failed");
/*
 * stat.h
 * S_IRUSR R for owner
 * S_IWUSR W for owner
 */

```

```

*/
if (mkfifo(temp_name, S_IRUSR | S_IWUSR) != 0)
    PANIC("mkfifo failed");
gnuplot = popen("gnuplot", "w");
fprintf(gnuplot, "set data style lines\n");
fprintf(gnuplot, "set parametric\n");
fprintf(gnuplot, "set hidden3d\n");
fprintf(gnuplot, "set contour\n");
fprintf(gnuplot, "set cntrparam levels 10\n");
fprintf(gnuplot, "set term jpeg\n");
fflush(gnuplot);
signal(SIGINT, goodbye);
return 0;
}

int disk2(int nr, int nt, matrix u, char *label, char *fname)
{
    int i, j;
    double r, theta, x, y, z;
    double dr, dt;
    FILE *data;

    dr = 1.0 / nr;
    dt = 2.0 * pi / nt;

    fprintf(gnuplot, "set nolabel\n");
    fprintf(gnuplot, "set label \"%s\" at screen 0.4,0.85\n", label);
    fprintf(gnuplot, "set zrange [-1:3]\n");
    fprintf(gnuplot, "clear\n");
    fprintf(gnuplot, "set output \"%s\"\n", fname);
    fprintf(gnuplot, "splot \"%s\" with lines\n", temp_name);
    fflush(gnuplot);

    data = fopen(temp_name, "w");

    for (i = 0; i <= nr; i++) {
        r = i * dr;
        for (j = 0; j <= nt; j++) {
            theta = j * dt;
            x = r * cos(theta);
            y = r * sin(theta);
            z = u[i][j];
            fprintf(data, "%f %f %f\n", x, y, z);
        }
        fprintf(data, "\n");
    }
    fclose(data);
    msleep(100);
    return 0;
}

void close_gnuplot()
{
    pclose(gnuplot);
    unlink(temp_name);
}

/*
 * msleep.c -- ミリ秒単位のタイマー
 */
#include <sys/types.h>
#include <sys/time.h>

```

```
int msleep(int ms)
{
    struct timeval timeout;
    timeout.tv_sec = ms / 1000;
    timeout.tv_usec = (ms % 1000) * 1000;
    if (select(0, (fd_set *) 0, (fd_set *) 0, (fd_set *) 0, &timeout) < 0) {
        perror("usleep");
        return -1;
    }
    return 0;
}
```

# 関連図書

- [1] Stanley J. Farlow. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. John Wiley & Sons, Inc, 1982. 邦訳: スタンリー・ファーロウ 著, 入理 正夫・入理 由美 訳, 偏微分方程式, 朝倉書店 (1996).
- [2] 一松信. 特殊関数入門. 森北出版, 1999.
- [3] 庵原謙治. 古典的 bessel 函数入門. <http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/iohara/doc/Bessel.pdf>.
- [4] 金子晃<sup>あきら</sup>. 偏微分方程式入門. 東京大学出版会, 1998. <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046862>.
- [5] 笠原皓司<sup>こうじ</sup>. 微分方程式の基礎. 数理科学ライブラリー. 朝倉書店, 1982.
- [6] 桂田祐史. 解析概論 I 講義ノート. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kaisekigairon-1/pdf/textbook1-2002-full.pdf>, 1995–2002.
- [7] 桂田祐史. 微分方程式 2 講義ノート (旧「応用解析 II」). <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/pde/pde2013.pdf>, 1997 年～.
- [8] 桂田祐史. 常微分方程式ノート. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labotext/members/ODE.pdf>, 2003.
- [9] 桂田祐史. 円柱領域における熱方程式に対する差分法. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labotext/cylinder.pdf>, 2004 年 12 月～.
- [10] 桂田祐史. Bessel 関数の数値計算. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labotext/computing-bessel-function.pdf>, 2005 年 3 月 9 日.
- [11] 桂田祐史. Laplacian と極座標. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labotext/polar-laplace.pdf>, 2007 年 2 月 24 日.
- [12] 桂田祐史. 多変数の微分積分学 1 講義ノート. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu1-2013/tahensuu1-2011.pdf>, 2011.
- [13] 木村俊房. 常微分方程式 II. 岩波講座 基礎数学. 岩波書店, 1977.
- [14] 小松勇作. 特殊函数. 朝倉書店, 1967. 復刊 2004.
- [15] 黒田成俊<sup>しげとし</sup>. 関数解析. 共立出版, 1980.
- [16] 岡田俊宣. 円盤・円柱領域における熱方程式に対する差分法. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labotext/report/open/2004-okada.pdf>, 2005 年 2 月.

- [17] 時弘哲治. 工学における特殊関数. 工系数学講座 13. 共立出版, 2006.
- [18] 村上温夫. 微分方程式入門. (基礎数学叢書 10). 新曜社, 1997.
- [19] 島倉紀夫. 楕円型偏微分作用素. 紀伊國屋書店, 1978.
- [20] G. D. Smith. *Numerical solution of partial differential equations third edition*. Clarendon Press Oxford, 1986. 第一版の邦訳が G. D. スミス著, 藤川洋一郎訳, コンピュータによる偏微分方程式の解法 新訂版, サイエンス社 (1996) である.
- [21] G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd edition*. Cambridge University Press, 1944, 1995.
- [22] 山本哲朗. Newton 法とその周辺. 数学, Vol. 37, pp. 1–15, 1985.
- [23] 山本哲朗. <sup>てつろう</sup> 数値解析入門 [新訂版]. サイエンス社, 2003/6/1. 1976 年初版発行の定番本の待望の改訂版.
- [24] 山本哲朗. 2 点境界値問題の数理. コロナ社, 2006.
- [25] 島倉義和, 田邊雅人. 球領域における熱方程式に対する差分法. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lab/report/open/2006-shimakura-tanabe.pdf>, 2007.
- [26] 遠藤洋一, 高木章裕, 内藤達也. 円盤領域における熱方程式の研究. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lab/report/1998-endou-takagi-naitou.pdf>, 1999 年 3 月.
- [27] I. G. Petrovskii(イ・ゲ・ペトロフスキイ). 偏微分方程式論. 東京図書, 1958. 吉田耕作校閲／渡辺毅訳。学部 3 年生のときの輪講のテキストだった。そのおかげでかなりの部分を読むことができて、とてもためになった。
- [28] R. クーラント, D. ヒルベルト. 数理物理学の方法 1–4. 東京図書, 1959–1968. 斎藤利弥監訳, 丸山滋弥訳.
- [29] フランク・ボウマン. ベッセル関数入門. 日新出版, 1963. 平野鉄太郎訳.
- [30] 松本英久. 2 次元領域における熱伝導方程式 — 円・円環領域に対する追求… —. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lab/report/pdf/1996-matsumoto.pdf>, 1997 年 3 月.
- [31] 寺沢寛一. 自然科学者のための数学概論 — 応用編 —. 岩波書店, 1960. C 編は加藤敏夫「変分法」.
- [32] 寺沢寛一. 自然科学者のための数学概論 増訂版改版. 岩波書店, 1983. 初版はいつ出たのやら….
- [33] 高野恭一. 常微分方程式. 朝倉書店, 1994/2/20. 線形微分方程式のモノドロミー表現やフックス型微分方程式等、複素領域における微分方程式の話が載っているのが特徴.
- [34] 吉原健治. 3 次元円柱領域における熱方程式・laplace 方程式の厳密解について. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lab/report/open/2004-yoshiwara.pdf>, 2005 年 2 月.
- [35] 大谷光春. 理工基礎 常微分方程式論. サイエンス社, 2011.
- [36] 藤田宏. 現代解析入門, 前篇「現代解析入門」. 岩波書店, 1991. 後篇は吉田耕作著.

- [37] 吉田耕作, 加藤敏夫. 大学演習 応用数学 I. 裳華房, 1961/5/5. 手元に置いておくことをお勧めする.
- [38] 俣野博. 微分方程式 II. 岩波講座 応用数学. 岩波書店, 1994.