第10回 行列式2 行列式の計算方法

あらすじ

置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ として

符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を定義した

⇓

行列式を定義する!

$\boxed{\text{定義}}$ n次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対し

$$\det A = \sum_{\sigma \in \underbrace{S_n}_{\text{(n次置換の集合)}}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

と定める

これをAの行列式とよび

$$\det A,\quad |A|,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とかく

$\boxed{\text{例1}}$ $A=(a_{11})$ のとき $\det A = a_{11}$

$\boxed{\text{例2}}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のとき

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ より

$$\det A = \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{1} a_{11} a_{22} + \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{-1} a_{12} a_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ [illegible] } \det A = ad - bc \right)$$

$\boxed{\text{예13}}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ [illegible]

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det A = \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{+1} a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$+ \underbrace{\boxed{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}}_{-1} a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$+ \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{-1} a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$+ \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{-1} a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$+ \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{+1} a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{+1} a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$\boxed{\text{ちなみに}}$ 2次と3次はきれいに解ける。

(サラスの公式)

2次

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3次

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$\boxed{\text{注意}}$ 2と3の場合たまたまうまくいった説

(4次以上はムリ)。

$\boxed{\text{例14}}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{41} & \cdots & & a_{44} \end{pmatrix}$ について

$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdots \right\}$

24コ

$\det A = \sum_{\sigma \in S_4} \cdots$ やりたくない

$\rightsquigarrow$ もっとかんたんに計算したい

定理　A, B n次正方行列とする

① $\det {}^t A = \det A$

② $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

とくに $\det(AB) = \det(BA)$

③ $\det A \neq 0$であることと
Aが正則(逆行列をもつ)ことは同値

④ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & a_{23} & & \\ 0 & a_{2n} & \cdots & \end{pmatrix}$ とすると

$(a_{i1} = 0 \ i > 1)$

$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{23} & & \\ \vdots & & \\ a_{2n} & \cdots & \end{vmatrix}$

⑤ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ とすると

$(a_{ij} = 0 \ (i > j))$

$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ a_i：行ベクトルとする

($a_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$ である)

⑥ 1つの行をc倍すると行列式はc倍される

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ c a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

⑦
$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i + c_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

b_i, c_i 行ベクトル.

⑧ 2つの行をいれかえたら行列式は(-1)倍され

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

⑨ i行目のc倍をj行目にくわえても行列式はかわらない

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j + ca_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

⑩ 列ベクトルにかんしても⑥〜⑨と同じことが成りたつ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & ca_j & \cdots & a_n \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{系}\ AB = E_n \text{ ならば A は正則で B は A の逆行列}}$

$\boxed{\text{証明は次回}}$

定理からわかること。

A ⇝ かんたんな形の行列式にかえる

- 行のいれかえ
- 行のc倍
- i行目のc倍をj行目にくわえる
- ④

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

例

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \times 2 \\ \times 3 \end{array} \overset{④}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\overset{④}{=} 1 \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 11 & 11 \end{vmatrix}$$

2×2行列の行列式

$$= 1(1 \times 11 - 11 \times 15)$$

$$= 11(1 - 15) = -154.$$

例 11 2

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{8}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 2 & -4 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 6 \\ -2 \\ -2 \end{matrix}$$

$$\overset{9}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -47 \\ 0 & 0 & -1 & 19 \\ 0 & -1 & 4 & 21 \end{vmatrix}$$

$$\overset{4}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ -1 & 4 & 21 \end{vmatrix} \quad 1$$

$$\overset{9}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 19 \\ 0 & 6 & -26 \end{vmatrix}$$

$$\overset{4}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 19 \\ 6 & -26 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\left((-1)\times(-26) - (19)\times 6\right)$$

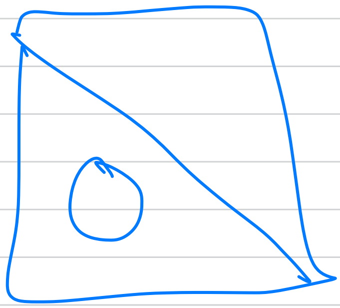
$$= (-1)(26 - 114) = 88.$$

例13

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{⑧}{=} (-1) \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

⑤がつかえる!



$$\overset{④}{=} (-1)\cdot 8 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 13 & -2 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{⑧}{=} 8 \begin{vmatrix} -6 & 1 & 2 & 2 \\ 13 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{⑧}{=} (-8)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{⑤}{=} (-8)\cdot 2\cdot(-2)\cdot 2\cdot 3$$

$$= 8\times 24 = 192 \,//$$

$\boxed{\text{演習問題}}$

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -6 & 15 \\ -2 & 5 & 14 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 15 & 10 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$ を計算せよ

解答

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -6 & 15 \\ -2 & 5 & 14 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 15 & 10 & 10 & -5 \end{vmatrix} \overset{⑥}{=} (-3)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & 14 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 15 & 10 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

6

$$= (-3)\cdot 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & 14 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

8

$$= (-3)\cdot 5\cdot(-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

2

$\times -3$

9

$$= 15 \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 8 & -16 \end{vmatrix}$$

4

$$= 15 \begin{vmatrix} -1 & 10 & 14 \\ 1 & 2 & -5 \\ 11 & 8 & -16 \end{vmatrix}$$

9

$$= 15 \begin{vmatrix} -1 & 10 & 14 \\ 0 & 12 & 9 \\ 0 & 118 & 138 \end{vmatrix}$$

⑥

$$= 15 \times (-1) \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 118 & 138 \end{vmatrix}$$

$$= (-15)(12 \times 138 - 9 \times 138)$$

$$= (-15) \cdot (1656 - 1062)$$

$$= (-15) \cdot (594)$$

$$= -8910 \;//$$