第 14 回. 内積と外積

岩井雅崇 2022/07/21

以下の内容は「基礎数学研究会 新版基礎線形代数 (東海大学出版会)」の第 8 章を参考にした. これも覚える必要はない (ただしベクトル解析などで役に立つ内容である).

1 内積

$\mathbb{R}$ を実数の集合とし, $n \geqq 1$ なる自然数について

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} \text{ とする.}$$

例 **1.** $\mathbb{R}^2$ は平面をあらわし, $\mathbb{R}^3$ は空間を表す.

定義 **2.** $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ について和, 差, スカラー倍, 内積, 長さ (ノルム) を次で定める.

- 和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$.
- 差 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n)$.
- スカラー倍 $\alpha \boldsymbol{a} = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$.
- 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.
- 長さ (ノルム) $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$.

例 **3.** $\boldsymbol{a} = (3, 5), \boldsymbol{b} = (6, 1), \alpha = 2$ とすると $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (9, 6)$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (-3, 4)$, $\alpha \boldsymbol{a} = (6, 10)$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3 \times 6 + 5 \times 1 = 23$, $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ となる.

命題 **4.** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とする.

1. (中線定理) $||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}||^2 + ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||^2 = 2(||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2)$.
2. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1}{4}(||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2 - ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2) = \frac{1}{2}(||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2 - ||\boldsymbol{a}||^2 - ||\boldsymbol{b}||^2) = \frac{1}{2}(||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2)$.
3. (Cauchy-Schwarz の不等式) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \leqq ||\boldsymbol{a}||^2 ||\boldsymbol{b}||^2$.
4. (三角不等式) $||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|| \leqq ||\boldsymbol{a}|| + ||\boldsymbol{b}||$.
5. $n = 3$ とし $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とする. $\mathbb{R}^3$ 上の点 P を (a_1, a_2, a_3), $\mathbb{R}^3$ 上の点 Q を (b_1, b_2, b_3), $\mathbb{R}^3$ 上の原点を点 O とする. このとき線分 OP と OQ がなす角を θ とすると
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ||\boldsymbol{a}|| ||\boldsymbol{b}|| \cos \theta \text{となる.}$$

特に $||\boldsymbol{a}|| \neq 0$ かつ $||\boldsymbol{b}|| \neq 0$ のとき, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ は直線 OP と OQ が直交していることと同値である.

例 5. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ に直交し点 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ を通る平面 S を求めよ.

(解). $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ が平面 S の点であるとき, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ は直交する. よって $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$ である.

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = a_1(x_1 - c_1) + a_2(x_2 - c_2) + a_3(x_3 - c_3)$$

であるので, $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | a_1(x_1 - c_1) + a_2(x_2 - c_2) + a_3(x_3 - c_3) = 0\}$ となる.

2 外積

定義 6. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ について, 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を次で定める.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)\end{aligned}$$

例 7. $\boldsymbol{a} = (3, 5, 0), \boldsymbol{b} = (6, 1, 0)$ とすると

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, -27),\ \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 27).$$

命題 8. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ とする.

1. $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. 特に $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$.
2. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ や $\boldsymbol{b}$ に直交する.
3. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ であることは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行であることと同値.
4. $||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい.

例 9. a_1, a_2, b_1, b_2 を実数とする. このとき $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ の行列式の絶対値 $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ は (a_1, a_2) と (b_1, b_2) を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい.

3　3 次の行列式と内積外積

定理 10. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3), \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ について,

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}).$$

特に $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ である (スカラー 3 重積とも呼ばれる).

定理 11. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3), \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ **とすると次の値は等しい.**

- $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ の絶対値.
- $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ の絶対値.
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ によって生成される平行 6 面体の体積.