第 9 回. 行列式 1 -置換- (三宅先生の本, 3.1 の内容)

岩井雅崇 2022/06/16

1 置換

定義 1.

- $\{1,\ldots,n\}$ から $\{1,\ldots,n\}$ への 1 対 1 写像を置換と言い σ で表す．つまり置換 σ とは $k_1,\ldots,k_n$ を 1 から n の並び替えとして, 1 を k_1 に, 2 を k_2 に, $\cdots$, n を k_n にと変化させる規則のことである.
- 上の置換 σ を
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$
とかき, $\sigma(1) = k_1, \sigma(2) = k_2, \ldots, \sigma(n) = k_n$ とする.

例 2. 置換 σ を $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ とする．これは「1 を 3 に, 2 を 1 に, 3 を 4 に, 4 を 2 にと変化させる規則」である．$\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 2$ である.

例 3. 置換 σ を $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする．これは「1 を 2 に, 2 を 1 に, 3 を 3 にと変化させる規則」である．$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 3$ である.

この置換は 3 に関しては何も変化させていないので $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ともかく.

定義 4. 置換 σ, τ について, その積 $\sigma\tau$ を $\sigma(\tau(i))$ で定める.

例 5. 置換 σ, τ を $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{array}{rcccc} \sigma(\tau(1)) & = & \sigma(2) & = & 3 \\ \sigma(\tau(2)) & = & \sigma(3) & = & 1 \\ \sigma(\tau(3)) & = & \sigma(4) & = & 2 \\ \sigma(\tau(4)) & = & \sigma(1) & = & 4 \end{array}$$
であるので, $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ である.

定義 6.

- $\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を単位置換という.

- $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix}$ について, $\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$ を<u>σ の逆置換</u>と言い σ^{-1} で表す.

例 **7.** $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&3&2\end{pmatrix}$ とするとき $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}4&5&1&3&2\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{pmatrix}$ である.

定義 **8.** $\sigma=\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_l\\ k_2 & k_3 & \cdots & k_1\end{pmatrix}$ となる置換 σ を<u>巡回置換</u>と言い $\sigma=\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_l\end{pmatrix}$ と表す.
特に $\sigma=\begin{pmatrix}k_1 & k_2\\ k_2 & k_1\end{pmatrix}$ となる巡回置換を<u>互換</u>と言い $\sigma=\begin{pmatrix}k_1 & k_2\end{pmatrix}$ と表す.

定理 **9.** 任意の置換 σ は互換の積 $\tau_1\cdots\tau_l$ で表わすことができ, l の偶奇は σ によってのみ定まる.

定義 **10.** 置換 σ が互換の積 $\tau_1\cdots\tau_l$ で表せられているとする.

- $\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^l$ とし, これを<u>σ の符号</u>と呼ぶ.
- $\mathrm{sgn}(\sigma)=1$ なる置換 σ を<u>偶置換</u>といい, $\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$ なる置換 σ を<u>奇置換</u>という.

例 **11.** $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&1&6&2&7&5&3\end{pmatrix}$ を互換の積で表し, その符号を求めよ.

(解). $1\xrightarrow{\sigma}4\xrightarrow{\sigma}2\xrightarrow{\sigma}1$ と変化し, $3\xrightarrow{\sigma}6\xrightarrow{\sigma}5\xrightarrow{\sigma}7\xrightarrow{\sigma}3$ と変化するので,

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&6&5&7\end{pmatrix} \text{ である.}$$

さらに $\begin{pmatrix}1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&6&5&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&7\end{pmatrix}$ であるので,

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&7\end{pmatrix}$$

となり, $\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^5=-1$ である.

命題 **12.** 置換 σ,τ について, $\mathrm{sgn}(\epsilon)=1$, $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})=\mathrm{sgn}(\sigma)$, $\mathrm{sgn}(\sigma\tau)=\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$ が成り立つ (ただし ϵ は単位置換とする).

定義 **13.** S_n を n 文字置換の集合とし, A_n を n 文字置換の集合とする.

[1]

[1]専門用語で S_n は対称群と言い, A_n は交代群と言います.

命題 14.

- S_n の個数は $n!$ 個である.
- 偶置換と奇置換の個数は同じである.
- A_n の個数は $\frac{n!}{2}$ 個である.
- $\sigma, \tau \in A_n$ ならば $\sigma\tau \in A_n$

第 10 回. 行列式 2 -行列式の計算方法- (三宅先生の本, 3.2, 3.3 の内容)

岩井雅崇 2022/06/23

2 行列式

定義 15. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ について

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$ を $\underline{A \text{ の行列式}}$ と言う.

A の行列式は $\det(A)$, $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ともかく.

例 16. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とすると $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ である.

(証). $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ であるので, A の行列式は

$$\det(A) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

例 17. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式を求める.

$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ であるので, A の行列式は

$$\begin{aligned} \det(A) &= \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_{12}a_{21}a_{33} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32} \\ &\quad + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} a_{13}a_{22}a_{31} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{23}a_{31} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} a_{13}a_{21}a_{32} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \end{aligned}$$

以上より $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$ である.

補足 18. 2 次正方行列や 3 次正方行列の行列式は視覚的に綺麗に表わすことができる (サラスの公式と呼ばれる).

3　行列式の基本性質

定理 19. A, B を n 次正方行列とする.

1. $\det({}^tA) = \det(A)$.
2. $\det(AB) = (\det(A))(\det(B)) = \det(BA)$.
3. $\det(A) \neq 0$ であることと A が正則であることは同値.
4. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.
5. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.
6. 1 つの行を c 倍すると行列式は c 倍される: $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.
7. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.
8. 2 つの行を入れ替えたら, 行列式は -1 倍される:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

9. 第 i 行の c 倍を第 j 行に加えても行列式は変わらない:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ca_{i1} & \cdots & a_{jn}+ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

10. 列ベクトルに関して上の 6 から 9 と同様のことが成り立つ.

系 **20.** A, B を n 次正方行列とする. $AB = E_n$ ならば, A は正則で B は A の逆行列.

4 行列式の計算方法

定理 19 を用いると行列式を比較的簡単に計算できる.

例 **21.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式を定理 19 を用いて計算すると次の通りになる.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 19.(9)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 19.(4)}}{=} 1 \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 19.(6)}}{=} 11 \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{例 16}}{=} 11\{1 \times 1 - 15 \times 1\} = -154.$$

例 **22.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の行列式を定理 19 を用いて計算すると次の通りになる.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 19.(8)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 2 & -4 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 19.(9)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -47 \\ 0 & 0 & -1 & 19 \\ 0 & -1 & 4 & 21 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{定理 19.(4)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ -1 & 4 & 21 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 19.(9)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ 0 & 6 & -26 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 19.(4)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 19 \\ 6 & -26 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{例 16}}{=} (-1)\{(-1) \times (-26) - 6 \times 19\} = 88.$$

5 演習問題

演習問題の解答は授業動画にあります.

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -6 & 15 \\ -2 & 5 & 14 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 15 & 10 & 10 & -5 \end{vmatrix}$ を計算せよ.

第 11 回. 行列式 3 -行列式の基本性質- (三宅先生の本, 3.2, 3.3 の内容)

岩井雅崇 2022/06/30

一部の内容について, 齋藤正彦著 線型代数学 (東京図書) の第 3 章を参考にした.

命題 23. $a_1, \ldots, a_n$ を行ベクトルとし, n 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ とする.

1. τ を n 次の置換とすると

$$\det \begin{pmatrix} a_{\tau(1)} \\ \vdots \\ a_{\tau(n)} \end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \det(A). \text{ (交代性)}$$

2. b_i, c_i を行ベクトルとし, α, β を数とすると,

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \alpha b_i + \beta c_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{(多重線型性)}$$

定理 24. 行ベクトル $x_1, \ldots, x_n$ について, 数 $F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を対応させる関数 F を考える. この F が交代性と多重線型性を満たすとき,

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

ここで $f_i = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \overset{i}{\hat{1}} & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ という行ベクトルとする.
特に行列 A に対して数 $F(A)$ を対応させる関数が, 行に関して交代性と多重線型性を満たすとき $F(A) = F(E_n) \det(A)$ となる.

第 12 回. 余因子行列と余因子展開 (三宅先生の本, 3.4 の内容)

岩井雅崇 2022/07/07

6 余因子行列

定義 25. n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の i 行と j 列を取り除いた $n-1$ 次正方行列を $\tilde{A}_{ij}$ とかく (この授業だけの記法). つまり

$$\tilde{A}_{ij}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ とする.

例 26. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のとき, $\tilde{A}_{11}=(a_{22})$, $\tilde{A}_{12}=(a_{21})$, $\tilde{A}_{21}=(a_{12})$, $\tilde{A}_{22}=(a_{11})$.

例 27. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ のとき, $\tilde{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\tilde{A}_{22}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\tilde{A}_{31}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

定義 28. n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ について, $\tilde{A}=(b_{ij})$ を $\underline{b_{ij}=(-1)^{i+j}\det\left(\tilde{A}_{ji}\right)}$ で定める. $\tilde{A}$ を A の余因子行列という.

例 29. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のときの余因子行列 $\tilde{A}$ を求める. $\tilde{A}_{11}=(a_{22})$, $\tilde{A}_{12}=(a_{21})$, $\tilde{A}_{21}=(a_{12})$, $\tilde{A}_{22}=(a_{11})$ より次が成り立つ.

- $\tilde{A}$ の $(1,1)$ 成分は $(-1)^{1+1}\det\left(\tilde{A}_{11}\right)=a_{22}$.
- $\tilde{A}$ の $(1,2)$ 成分は $(-1)^{1+2}\det\left(\tilde{A}_{21}\right)=-a_{12}$.
- $\tilde{A}$ の $(2,1)$ 成分は $(-1)^{2+1}\det\left(\tilde{A}_{12}\right)=-a_{21}$.
- $\tilde{A}$ の $(2,2)$ 成分は $(-1)^{2+2}\det\left(\tilde{A}_{22}\right)=a_{11}$.

以上より余因子行列 $\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ となる.

定理 30. A を n 次正方行列とする.

1. 任意の $1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq n$ なる i, j について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det\left(\tilde{A}_{1j}\right) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det\left(\tilde{A}_{nj}\right) \\ &= (-1)^{i+1} a_{i1} \det\left(\tilde{A}_{i1}\right) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det\left(\tilde{A}_{in}\right).\end{aligned}$$

   これを余因子展開という.

2. $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)E_n$. 特に $\det(A) \neq 0$ ならば $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$.

例 31. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(A)$ を余因子展開で求める.

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+1} a_{11} \det\left(\tilde{A}_{11}\right) + (-1)^{2+1} a_{21} \det\left(\tilde{A}_{21}\right) + (-1)^{3+1} a_{31} \det\left(\tilde{A}_{31}\right) + (-1)^{4+1} a_{41} \det\left(\tilde{A}_{41}\right) \\ &= 2\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 3\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \times 7\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (2 \times 3 - 5 \times 7) \times (9 \times 1 - 4 \times (-2)) = -493.\end{aligned}$$

例 32. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, $\det A = ad - bc \neq 0$ ならば A は正則であり, 例 29 から

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

7 演習問題

演習問題の解答は授業動画にあります.

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$ を計算せよ.

第 13 回. クラメルの公式と特殊な行列式 (三宅先生の本, 3.4, 3.5 の内容)

岩井雅崇 2022/07/14

この授業で行う内容は理解しなくても構いません (結構マニアックな話題を扱います). また覚える必要もございません.

8 クラメルの公式

定理 33. A を正則な n 次正方行列とし, 列ベクトル $a_1, \ldots, a_n$ を用いて $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ と表されているとする. このとき連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は次のようになる.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \boldsymbol{b} & \cdots & a_n \end{pmatrix}}{\det A}.$$

例 34. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする. 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると,

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & a_2 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{7}, \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{7} \text{となる.}$$

9 特殊な行列式

定理 35.

1. (ヴァンデルモンドの行列式)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i).$$

2. (ヴァンデルモンドの行列式の応用) $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ を実数とし, $b_1, \ldots, b_n$ は相異なると仮定する. このとき実数係数の n 次式 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ があって, 任意の $i = 1, \ldots, n$ について $f(b_i) = c_i$ となる.

$\prod_{1 \leqq i < j \leqq n}$ は積の記号で, $\prod_{1 \leqq i < j \leqq n}(x_j - x_i)$ は「$1 \leqq i < j \leqq n$ を満たす (i, j) について $(x_j - x_i)$ を全てかけた数」を表している.

定理 36.

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

10　終結式と判別式

以下の内容は「永田雅宜著 理系のための線型代数の基礎 (紀伊國屋書店)」の第 3 章に基づく.

定義 37. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ を複素数とし, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ とする (ただし $a_0 \neq 0$ とする). $f(x) = 0$ の解を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とするとき,

$$D = a_0^{2n-2} \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (\alpha_j - \alpha_i)^2$$ を $f(x)$ の判別式という.

簡単にわかることとして, 「$D \neq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ の解が相異なる」である.

例 38. $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ の判別式 D を求める (ただし $a_0 \neq 0$ とする). α_1, α_2 を $f(x) = 0$ の解とすると, 解と係数の関係から

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

であるので, $-a_1 = a_0(\alpha_1 + \alpha_2), a_2 = a_0\alpha_1\alpha_2$ となる. よって

$$D = a_0^2(\alpha_2 - \alpha_1)^2 = a_0^2\{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2\} = a_1^2 - 4a_0a_2.$$

定義 39. 複素係数多項式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$ (ただし $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$) について, $m + n$ 次正方行列を次で定める.

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_m \end{pmatrix}$$

この行列の行列式をf, g の終結式と言い, $R(f,g)$ と表す.

定理 **40.** 1. $f(x)=0$ の解を $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ とし, $g(x)=0$ の解を $\beta_1,\dots,\beta_m$ とすると

$$R(f,g)=a_0^m b_0^n \prod_{1\leqq i\leqq n, 1\leqq j\leqq m}(\alpha_i-\beta_j)=a_0^m\prod_{1\leqq i\leqq n}g(\alpha_i) \text{ である.}$$

特に $R(f,g)=0$ は $f(x)=g(x)=0$ が共通解を持つことと同値である.

2. f' を f の微分とすると,

$$R(f,f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0 D.$$

特に $f(x)$ の判別式 D は $a_0,\dots,a_n$ の式でかける. また $R(f,f')=0$ は $f(x)=0$ が重根を持つことと同値である.

第 14 回. 内積と外積

岩井雅崇 2022/07/21

以下の内容は「基礎数学研究会 新版基礎線形代数 (東海大学出版会)」の第 8 章を参考にした. これも覚える必要はない (ただしベクトル解析などで役に立つ内容である).

11 内積

$\mathbb{R}$ を実数の集合とし, $n \geqq 1$ なる自然数について

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} \text{ とする.}$$

例 **41.** $\mathbb{R}^2$ は平面をあらわし, $\mathbb{R}^3$ は空間を表す.

定義 **42.** $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ について和, 差, スカラー倍, 内積, 長さ (ノルム) を次で定める.

- 和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$.
- 差 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n)$.
- スカラー倍 $\alpha \boldsymbol{a} = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$.
- 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.
- 長さ (ノルム) $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$.

例 **43.** $\boldsymbol{a} = (3, 5), \boldsymbol{b} = (6, 1), \alpha = 2$ とすると $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (9, 6)$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (-3, 4)$, $\alpha \boldsymbol{a} = (6, 10)$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3 \times 6 + 5 \times 1 = 23$, $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ となる.

命題 **44.** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とする.

1. (中線定理) $||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}||^2 + ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||^2 = 2(||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2)$.
2. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1}{4}(||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2 - ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2) = \frac{1}{2}(||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2 - ||\boldsymbol{a}||^2 - ||\boldsymbol{b}||^2) = \frac{1}{2}(||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2)$.
3. (Cauchy-Schwarz の不等式) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \leqq ||\boldsymbol{a}||^2 ||\boldsymbol{b}||^2$.
4. (三角不等式) $||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|| \leqq ||\boldsymbol{a}|| + ||\boldsymbol{b}||$.
5. $n = 3$ とし $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とする. $\mathbb{R}^3$ 上の点 P を (a_1, a_2, a_3), $\mathbb{R}^3$ 上の点 Q を (b_1, b_2, b_3), $\mathbb{R}^3$ 上の原点を点 O とする. このとき線分 OP と OQ がなす角を θ とすると
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ||\boldsymbol{a}|| ||\boldsymbol{b}|| \cos \theta \text{となる.}$$

特に $||\boldsymbol{a}|| \neq 0$ かつ $||\boldsymbol{b}|| \neq 0$ のとき, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ は直線 OP と OQ が直交していることと同値である.

例 **45.** $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ に直交し点 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ を通る平面 S を求めよ.

(解). $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ が平面 S の点であるとき, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ は直交する. よって $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$ である.

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = a_1(x_1 - c_1) + a_2(x_2 - c_2) + a_3(x_3 - c_3)$$

であるので, $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | a_1(x_1 - c_1) + a_2(x_2 - c_2) + a_3(x_3 - c_3) = 0\}$ となる.

12 外積

定義 **46.** $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ について, 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を次で定める.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)\end{aligned}$$

例 **47.** $\boldsymbol{a} = (3, 5, 0), \boldsymbol{b} = (6, 1, 0)$ とすると

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, -27),\ \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 27).$$

命題 **48.** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ とする.

1. $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. 特に $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$.
2. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ や $\boldsymbol{b}$ に直交する.
3. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ であることは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行であることと同値.
4. $||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい.

例 **49.** a_1, a_2, b_1, b_2 を実数とする. このとき $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ の行列式の絶対値 $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ は (a_1, a_2) と (b_1, b_2) を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい.

13　3 次の行列式と内積外積

定理 50. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3), \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ について,

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}).$$

特に $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ である (スカラー 3 重積とも呼ばれる).

定理 51. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3), \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ **とすると次の値は等しい.**

- $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ の絶対値.
- $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ の絶対値.
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ によって生成される平行 6 面体の体積.