第2回 行列の定義

[定義]　(実数または複素数)

- $m \times n$ 個の数 a_{ij} $(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n)$ を

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のように長方形にならべたものを

m行n列の行列，$m \times n$行列

$m \times n$型の行列　(m,n)行列

(行列の型)

- a_{ij} を (i,j) 成分という

行列 A を $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, (a_{ij}) とかく．

- $(a_{i1} \cdots a_{in})$ を A の行という　行は横

上から第1行，第2行…第m行という

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ をAの列という

列はたて.

左から第1列,…,第n列という

- $1 \times n$ 型の行列 $(a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n})$ を行ベクトルと

$m \times 1$ 型の行列 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ を列ベクトルとよぶ

$\boxed{例}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

- 2行3列の行列 (2×3行列
- (1,2)成分は 2
- (2,1)成分は 3
- (2,3)成分は 4

第2行は $(3\ 10\ 4)$　第3列は $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

例

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 13 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \;1\; & \;\;2\;\; & \;\;3\;\; & \end{array} & \end{array}$$

- 3行4列の行列 (3×4行列)
- (1,1) 成分は 13
- (2,4) 成分は 5
- (3,2) 成分は 8
- 第2行は $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 第3列は $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

例13 $A = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$

1×1 行列

例14 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

1×3 行列 (行ベクトル)

・特別な行列と用語

定義

・全ての成分が0である行列を零(ぜろ)行列という

例
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (0) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots$$

・行と列の数がひとしい行列、$n \times n$ 行列を n 次正方行列という

例
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (1) \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
2次正方行列　1次正方行列　3次正方行列

・n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ について

$a_{11}, a_{12}, \cdots a_{nn}$ を A の対角成分という

・対角成分以外0の行列を対角行列という

例 $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

・対角成分がすべて1なn次対角行列を単位行列といい，E_nとかく．

例 $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

・行列Aの行と列をいれかえた行列を転置行列といい ${}^tA$ とかく

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

$${}^t({}^tA) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

一般に・A: $m \times n$ 行列ならば

${}^tA$ は $n \times m$ 行列になる

・${}^t({}^tA) = A$

$\boxed{\text{例2}}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき.

$${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad {}^t({}^tA) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

よく使うこと $A = m\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n}$ ならば

$${}^tA = n\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix}_{m}$$

${}^tA$ の (i,j) 成分を b_{ij} とおくとき

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

・クロネッカーのデルタ（略記法）

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$ を

（補足）

クロネッカーのデルタという

$\boxed{例1}$ $\delta_{11} = 1$　$\delta_{22} = 1$　$\delta_{12} = 0$　$\delta_{21} = 0$

単位行列は　$E_n = [\delta_{ij}]_{n \times n}$ とかける

（あまりみたことない…）

$\boxed{例2}$ $A = [\delta_{i+1,j}]_{3 \times 3}$ とすると

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \\ \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} \end{pmatrix}$$

$i=1, j=1$

$a_{11} = \delta_{1+1\,1}$

$= \delta_{21} = 0$

$i=1$, $j=2$

$a_{12} = \delta_{1+1\,2}$

$= \delta_{22} = 1$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

注意　上の記法はあまりしないと思います
（あかりずらいから

演習問題

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & -5 \\ 18 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$ について、次をこたえよ

(1) Aの型は？

(2) $(3,2)$成分は？

(3) Aの第2行は？

(4) Aの第3列は？

(5) ${}^tA$は？

2. ${}^tA = \boxed{-A}$ なる行列を交代行列という

n次正方

交代行列の対角成分は0であることを示せ

$-A = [-a_{ij}]_{n\times n}$

解答

1. (1) 3×4 $(3, 4)$

(2) 0

(3) $(3\ \ -1\ \ 2\ \ -5)$

(4) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 18 \\ 4 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 8 & -5 & 12 \end{pmatrix}$

2. ${}^tA = [b_{ij}]_{n\times n}$ とおくと

$b_{ij} = a_{ji}$ である。

$^tA = -A$ より

$$a_{ij} = -a_{ij} \quad となる.$$

よって $a_{ji} = -a_{ji}$ である

($i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n$ のいずれについても)

とくに $i=j$ として

$a_{ii} = -a_{ii}$ より

$a_{ii} = 0$ である。

よって A の対角成分は 0 である