第6回. 連立1次方程式3-一般的な解法- (三宅先生の本, 2.3の内容)

岩井雅崇 2022/05/26

1 簡約化を用いた連立1次方程式の解法

定理 1. 連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つ $\Leftrightarrow \mathrm{rank}([A : \boldsymbol{b}]) = \mathrm{rank}(A)$.

連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解きかた (掃き出し法・ガウスの消去法).

手順1. 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ から拡大係数行列 $[A : \boldsymbol{b}]$ を作る.

手順2. 拡大係数行列 $[A : \boldsymbol{b}]$ を (行) 基本変形で簡約化する.

手順3. その簡約化された行列のデータから連立方程式を書き下し, 一般解を求める.

例 2. 連立1次方程式 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases}$ を解け.

(解). 連立方程式の拡大係数行列は $[A : \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ である. これを簡約化すると $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる. よってこれより $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$ である.

以上より解は $\begin{cases} x_1 = 2 - 2c_2 \\ x_2 = c_2 \end{cases}$ (c_2 は任意定数) となる.

解の書き方として $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ と書くこともある.

例 3. 連立1次方程式 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$ を解け.

(解). 連立方程式の拡大係数行列は $[A : \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ である. これを簡約化すると $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる. よってこれより $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 1 \end{cases}$ である. 以上より解は存在しない.

例 4. 連立1次方程式 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$ を解け.

(解). 拡大係数行列は $[A : \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ である. これを基本変形で簡約化する

と $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる. これをもう一回式に書き下すと

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$ である.

以上より解は $\begin{cases} x_1 = 2 + 2c_2 - 3c_4 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = -1 + c_4 \\ x_4 = c_4 \\ x_5 = 1 \end{cases}$ (c_2, c_4 は任意定数) となる.

解の書き方として $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ と書くこともある.

補足 **5.** 実際に連立 1 次方程式をプログラミングで解くときも, 掃き出し法・ガウスの消去法によって解きます. 実際に c++で書いたソースコードを以下のホームページで見ることができます.[1]

- Gauss-Jordan の掃き出し法と、連立一次方程式の解き方
  `https://drken1215.hatenablog.com/entry/2019/03/20/202800`

2 演習問題

演習問題の解答は授業動画にあります.

1. 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 + x_5 = -6 \end{cases}$ を解け.

[1] 第 7 回授業で簡約化の証明をする際にもこのホームページを参考にさせていただきました.