第7回 正則行列

やること

2 の逆数 $\frac{1}{2}$

-5 の 〃 $-\frac{1}{5}$

0 〃 ない

これを行列に拡張する

$\boxed{\text{定義}}$ A を n 次正方行列とする
ある行列 B があって
$$AB = BA = E_n$$ (n 次単位行列)
となるとき B を A の逆行列といい
$B = A^{-1}$ とかく。
A が逆行列をもつとき，A は正則行列である
(A は正則である) という

$\boxed{\text{例}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ である
なぜなら
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ から

例12 2次正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、

$ad-bc \neq 0$ ならば

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

が逆行列となる

なぜなら

$$\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例13 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

Aの逆行列は存在しない

[証] もし存在したとすると $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として

$BA = AB = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ 0 & c+d \end{pmatrix}$$

$\shortparallel$

$E_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ となり $1=0$ となり矛盾.

Q. ① 逆行列は1つ存在するのか？
（存在しなかったりしないのか？）
② 逆行列はどうやって求めるのか？

①について.

定理A Aをn次正方行列とし以下は同値

(1) $\mathrm{rank}(A)=n$

(2) Aの簡約化はE_nである

(3) 任意の列ベクトルbについて
$Ax=b$はただ1つの解をもつ

(4) $Ax=0$の解は$x=0$に限る

(5) Aは正則行列

(6) Aの行列式$\det A$は0ではない
（$ad-bc$ みたいなやつ）（9〜11回の内容）
（証明は後まで）

$\boxed{\text{補足}}$ Aに正則行列であると

$Ax=b$の解は $x=A^{-1}b$となる

(A^{-1}を左からかける)

→ 逆行列がわかっていれば
連立方程式はすぐとける!!

② について 2とおりある

(1) はきだし法をもちいる

(2) 余因子行列をもちいる

(1)のやりかた

定理B

n次正方行列Aについて、
$n\times 2n$行列$[A \mid E_n]$を考え、その簡約化が$[E_n \mid B]$となるとき
Bは Aの逆行列となる。

$\boxed{例1}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列をもとめよ

(解) $(A \ \ E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

これを簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (E_2 \ \vdots \ B)$$

よって $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が逆行列

$\boxed{例2}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列をもとめよ

(解) $(A \ \ E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

を簡約化する。

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_3 \mid B)$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定理A　Aをn次正方行列とし以下は同値

(1) $\mathrm{rank}(A)=n$

(2) Aの簡約化はE_nである

(3) 任意の列ベクトルbについて
　　$Ax=b$はただ1つの解をもつ

(4) $Ax=0$の解は$x=0$に限る

(5) Aは正則行列

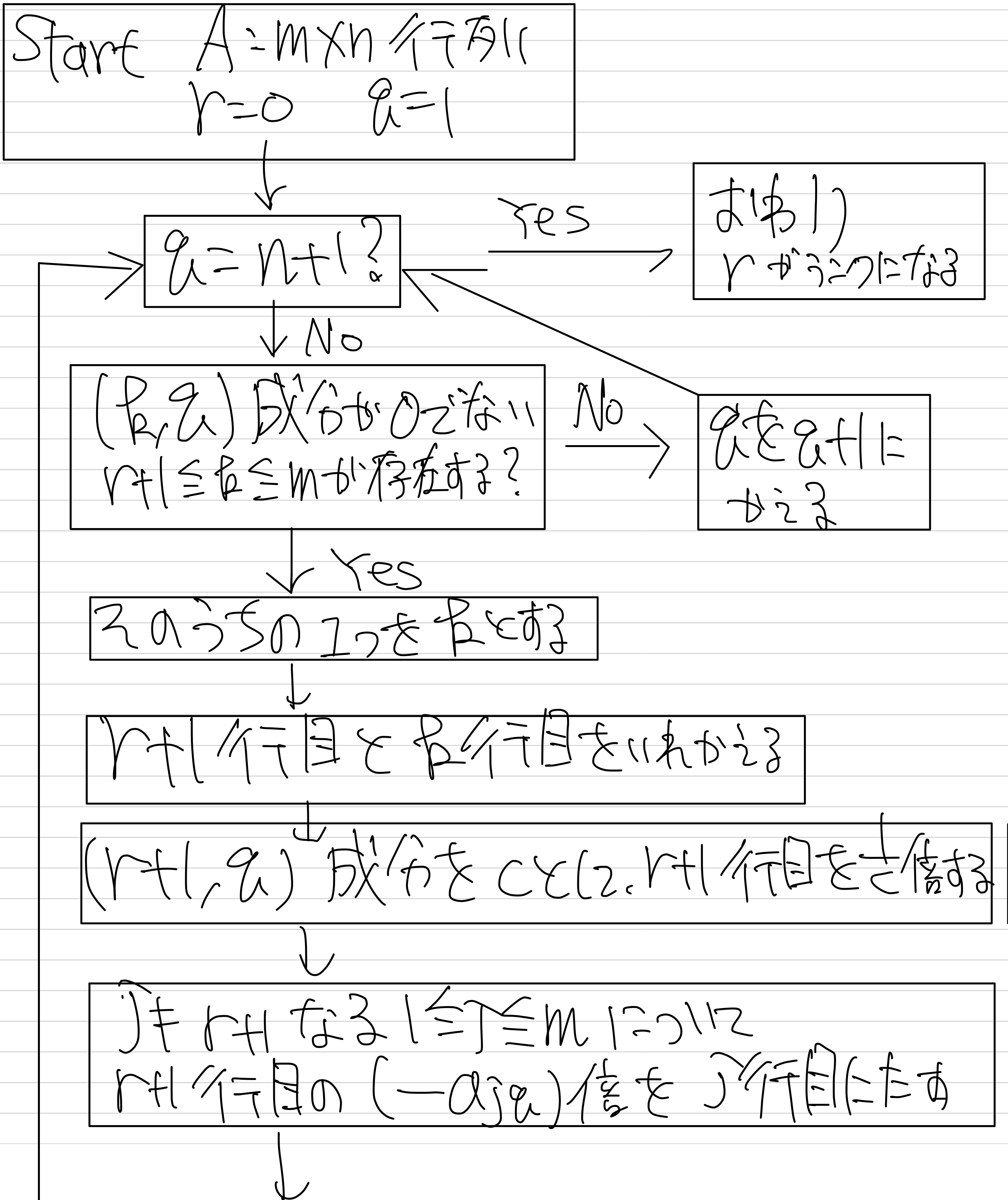
定理B

n次正方行列Aについて、
$n\times 2n$行列$[A \,\vdots\, E_n]$を考え、その簡約化が$[E_n \,\vdots\, B]$となるとき
　BはAの逆行列となる。

定理C　任意の行列は基本変形をくりかえすことにより簡約化でき
その簡約化は一意にさだまる

証明 定理C. の証明

簡約化の存在について、次のアルゴリズムを考える



$\boxed{r \text{ を } r+1 \text{ にかえる}, \ q \text{ を } q+1 \text{ にかえる}}$

具体的にやると・・・　$m=4$　$n=5$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$r=0$, $q=1$ とす

→ $q=1 \neq 5=n+1$

→ $(k,1)$ 成分が 0 でない $r+1 \leqq k \leqq m$ は存在する?

No → $q=2$ にかえる $(1+1=2)$

→ $q=2 \neq 5=n+1$

→ $(k,2)$ 成分が 0 でない $r+1 \leqq k \leqq m$ は存在する?

Yes → $k=3$ とする

→ 1行目と3行目をいれかえる

→ $c=a_{r+1\,q}=a_{12}=1$

$$\begin{pmatrix} 0 & \overset{c}{1} & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

→ 1行目を $\underset{=1}{\frac{1}{c}}$ 倍する

→ $j \neq 1$ なる $1 \leqq j \leqq 4$ について1行目の

$-a_{j2}$ 倍を j 行目に足す

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

×0

×0

(−3)

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -16 & -4 \end{pmatrix}$$

→ $r = 1$ になる，$q = 3$ になって

→ ・・・

$\boxed{\text{今のアルゴリズムは今までやってきたことを文字におこしただけ}}$

一意性の証明

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad E_{ij}$$

$$F_i^{c} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & i & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \end{array} & \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & c & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \qquad F_i^{\frac{1}{c}}$$

$(c \neq 0)$

$$G_{ij}^{c} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & c & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cccc} & i & & \end{array} \end{array} \qquad G_{ij}^{-c}$$

これらは正則行列
(逆行列がかんたんにわかる)

$E_{ij}A \longleftrightarrow$ Aのi行目とj行目をいれかえる

$F_i^c A \longleftrightarrow$ Aのi行目をc倍する

$G_{ij}^c A \longleftrightarrow$ Aのi行目のc倍をj行目にくわえる。

簡約化とは

$\boxed{\text{$E_{ij}$, F_i^c, G_{ij}^c を有限個左からかけてAを簡約行列にすること!}}$

一意性を示すには R, R' (E_{ij}, F_i^c, G_{ij}^c の有限積) とし B B' 簡約行列としたとき

$$\left\{\begin{array}{l} RA = B \\ R'A = B' \end{array}\right.$$

ならば $B = B'$ を示せばよい

Rは正則より $Q = R'R^{-1}$ とおく

$QB = B'$ となる.

B の主成分 $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$

B' : $a'_{1j'_1}, a'_{2j'_2}, \dots, a'_{r'j'_{r'}}$ とする

$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ r \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} j_1 & j_2 & j_3 & j_r \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 0 & & \end{array}\right) \end{array}$$

$\mathrm{rank}\, B = r$

$$B' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r' \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} j'_1 & j'_2 & j'_{r'} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$\mathrm{rank}\, B' = r'$

$Q = [q_{ij}]$ $m \times m$ とおくと

$QB = B'$ $\quad j(1)\; Q \qquad j_1 \quad B$

$$QB = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & & & \\ q_{m1} & \cdots & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & q_{11} & & q_{12} & & q_{1r} \\ & q_{21} & & q_{22} & \cdots & \vdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & q_{m1} & & q_{m2} & & q_{mr} \end{pmatrix} \\ \qquad\quad j_1 \qquad\quad j_2 \qquad\quad j_r \end{array}$$

$$B' = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cdots & 1 & \cdots & 0 & & \\ & \vdots & & 1 & \cdots & \\ & & & \vdots & & 1 \end{pmatrix} \\ & \qquad j_1' \qquad\quad j_2' \end{array}$$

$\Rightarrow \therefore j_1 = j_1' \quad q_{11} = 1$

$q_{21} = q_{31} = \cdots = q_{m1} = 0$

$\because j_2 = j_2' \quad q_{22} = 1$

$q_{12} = q_{32} = \cdots = q_{m2} = 0$

$\vdots$

$\Rightarrow r = r',\ z\ldots$

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} E_r & C \\ \hline O & D \end{array}\right)$$ の形でないといけない

$$B = \begin{array}{c} \\ r \\ m-r \end{array}\begin{array}{c} n \\ \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline O \end{array}\right) \end{array}$$

の形になっている。

$$B' = \begin{array}{c} \\ r \\ m-r \end{array}\begin{array}{c} n \\ \left(\begin{array}{c} B_1' \\ \hline O \end{array}\right) \end{array}$$

$QB = B'$ より $B_1 = B_1'$ のため

$B = B'$ となる。

定理Aの証明 (A : $n \times n$ 行列)

(1) ⇒ (2) B を A の簡約化とすると

$n = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ で B $n \times n$ 行列より、

$$B = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$ しかありえない

(2) ⇒ (3) R (E 型、F 型、G 型の有限積) があって

$$RA = E_n$$ となる

今 $Ax = b$ より

$$x = RAx = Rb$$ とただ1つに定まる

(3) ⇒ (4) $b = 0$ とおけばよい

(4) ⇒ (1) $\mathrm{rank}(A) < n$ として矛盾を示す

ある正則行列 R と簡約行列 B があって、

$$RA = B$$ で $\mathrm{rank}(B) < n$ となる。

よって Bは簡約よりある$1 \leqq j \leqq n$

があって $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ となる

すると $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - j$ とすると

$$Ae_j = R^{-1}RAe_j$$
$$= R^{-1}Be_j = R^{-1}0 = 0$$

(4)に矛盾する.

(2) ⇒ (5) $RA = E_n$ でRは正則より
$A = R^{-1}$ でAも正則

(5) ⇒ (4) $Ax = 0$ なら
$$x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0$$
にかぎる。

定理Bの証明

A : $n \times n$ 行列

$(A \ E_n)$ の簡約化を $(E_n \ B)$ とする

すると正則行列 R があり

$$R(A \ E_n) = (E_n \ B)$$

となり

よって

$$\begin{cases} RA = E_n \\ R = B \end{cases}$$

より

$A = R^{-1}$ で正則となり

$A^{-1} = (R^{-1})^{-1} = R = B$ となる

演習問題

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ

解）$(A\ E_n)$ を簡約化する

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \times\frac{1}{2}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} (\times 2)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times(-1)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{答}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ //

$$\left((A, E_n) \xrightarrow{\text{かんかくが}} (E_n, B) \right)$$