第3回 行列の演算

ふくしゅう

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ みたいなのを行列といった。

2×3行列

今日やること

行列の和 差 スカラー倍 積をていぎする!

$\boxed{\text{定義}}$ 行列の和と差

A, B をともに $m \times n$ 行列とする

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

(和)

$$A-B = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}-b_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

(差)

$\boxed{\text{例}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+(-2) & -2+5 & 8+1 \\ 2+3 & 5+(-1) & -1+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1-(-2) & -2-5 & 8-1 \\ 2-3 & 5-(-1) & -1-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{例12}}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 3+2 & 1+7 \\ 1+5 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 3-2 & 1-7 \\ 1-5 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{例13}}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ とする.

$A+B$はできない!（定義されない）

$\boxed{\text{why??}}$ AとBの型がちがうから.

・和と差の性質

・ $A+B = B+A$ （すべての成分が0の行列）

・ $A+O = A$ （Oは零行列）
$= O+A$

・ $(A+B)+C = A+(B+C)$

・ ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ （差も同じ）

$\boxed{\text{定義}}$（スカラー倍）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{mn} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ （$m \times n$行列）と

$\underbrace{c}_{}$ ＝数（実数 or 複素数）について
（スカラーという）

Aのc倍 cAを

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & \cdots & & ca_{2n} \\ ca_{m1} & \cdots & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$ で定める

例1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ $c = 3$ のとき

$$cA = 3\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\times 1 & 3\times(-2) & 3\times 8 \\ 3\times 2 & 3\times 5 & 3\times(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & 24 \\ 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$$

例2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $c = -1$

$$cA = -1\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

($(-1)A$ を $-A$ とかく)

[スカラー倍の性質]

- $0A = O$
- $1A = A$
- $(-1)A$ を $-A$ とかくことにすると $A + (-A) = O$
- $(ab)A = a(bA)$

定義 行列の積 (これは覚えておかない)

A が $m \times n$ 行列 $[a_{ij}]_{m \times n}$

B が $n \times l$ 行列 $[b_{jk}]_{n \times l}$ のとき

A と B の積 AB を

$$AB = [c_{ik}]_{m \times l}$$

$$c_{ik} := a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$ とする

AB を $\boxed{m \times l}$ 行列である

例 $A = \begin{pmatrix} \overset{a_{11}}{1} & \overset{a_{12}}{2} & \overset{a_{13}}{3} \end{pmatrix}$ $B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{array} \end{array}$

A 1×3 行列 $m = 1$ $n = 3$

B 3×1 行列 $n = 3$ $l = 1$

$\rightsquigarrow$ AB が定義できる!

AB 1×1 行列 (m×l 行列)

$AB = (c_{11})$ とすると

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$i=1 \ k=1$

$$= 1 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 2$$

$$= 5 + 14 + 6$$

$$= 25$$

$AB = (25)$ 1×1 行列

$\boxed{\text{例2}}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a_{21} & a_{22} \end{matrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix} \end{array}$$

A : 2×2 行列 $m=2$ $n=2$

B : 2×1 行列 $n=2$ $l=1$

⇝ AB が定義できて 2×1 行列 (m×l)

$AB = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$ とおくと

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$

$i=1\ k=1$ $= 2\times5 + 2\times1$

$= 10 + 2 = 12$

$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$

$i=2\ k=1$ $= 4\times5 + 3\times1$

$= 20 + 3 = 23$

$AB = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$ 2×1行列

よこ・たて
行・列

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times5+2\times1 \\ 4\times5+3\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$$

ここの要素たちをとると、内積っぽいことをする？

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2\\2&3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{pmatrix}$$

2

〈例13〉

$A = \begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix}5&2\\2&3\end{pmatrix}$

$A =$ 2×2行列 $\quad m=2 \quad n=2$

$B =$ 2×2行列 $\quad n=2 \quad l=2$

ABがていぎできる。

$$AB = \begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2\\2&3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\times5+3\times2 & 2\times2+3\times3\\ 1\times5+4\times2 & 1\times2+4\times3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}16&13\\13&14\end{pmatrix}$$

BA もていぎできる

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5\times2+2\times1 & 5\times3+2\times4 \\ 2\times2+3\times1 & 2\times3+3\times4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$$

この例からわかること

$\boxed{AB \neq BA}$ となる。

($AB = BA$ とはかぎらない!)

("ひかかん"
非可換)

例14

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$ 2×3行列

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$ 1×4行列

AB は定義されない

Why? Aの列とBの行の数がちがうから

積の性質

- $AO = O = OA$ （O 零行列）
- $AE = EA = A$ （E 単位行列）
- $(AB)C = A(BC)$
- ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

- A：正方行列（$m \times m$ 行列）として

積 $\underbrace{A \cdots\cdots A}_{n\text{コ}}$ を A^n とかく

- $A^n = O$ なる行列を

べきぜろ行列

- 和・差・スカラー倍、積の性質

[a, b 数
A, B, C 行列]

- $a(AB) = (aA)B$
- $a(A+B) = aA + aB$
- $(a+b)A = aA + bA$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $(A+B)C = AC + BC$

演習問題

1. $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

を計算せよ

2. 次のA B C Dで積で定義できるくみあわせをもとめ，その積を計算せよ

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例1

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -6 & -4 & -6 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & -6 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & -6 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \boxed{2\times 2+3\times(-3)+(-1)\times 7} & 2\times 5+3\times(-6)+(-1)\times 4 & 2\times 7+3\times 2+(-1)\times 3 \\ 0\times 2+5\times(-3)+4\times 7 & 0\times 5+5\times(-6)+4\times 4 & 0\times 7+5\times 2+4\times 3 \\ -1\times 2+0\times(-3)+(-2)\times 7 & \boxed{-1\times 5+0\times(-6)+(-2)\times 4} & -1\times 7+0\times 2+(-2)\times 3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 4-9-7 & 10-18-4 & 14+6-3 \\ 0-15+28 & -30+16 & 0+10+12 \\ -2+0-14 & -5+0-8 & -7+0-6 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -12 & -12 & 17 \\ 13 & -14 & 22 \\ -16 & -13 & -13 \end{pmatrix}
$$

(行列の計算は
Excel, Python C++ とかで
やってくれる)

2. 次のABCDで積で定義できるくみあわせをもとめ、その積を計算せよ

$$A=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}3&2\\4&1\\0&1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ 3×1 行列

$B=\begin{pmatrix}3&2\\4&1\\0&1\end{pmatrix}$ 3×2 行列

$C=\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}$ 1×3 行列

$D=\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}$ 2×2 行列

- AB (3×1) と (3×2) ムリ
- BA (3×2) と (3×1) ムリ

・AC (3×1) と (1×3) できる

AC 3×3 行列

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\times2 & 2\times0 & 2\times1\\1\times2 & 1\times0 & 1\times1\\-1\times2 & -1\times0 & -1\times1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4&0&2\\2&0&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}$$

・CA 1×3 と 3×1 できる

CA 1×1 行列

$$\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\times2+0\times1+1\times-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\end{pmatrix}$$

AD 3×1 と 2×2 ムリ

DA 2×2 と 3×1 ムリ

BC 3×2 と 1×3 ムリ

CB　1×3 と 3×2 できる

CB　1×2 行列

$$(2\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (2\times 3+0\times 4+1\times 0 \quad 2\times 2+0\times 1+1\times 1)$$

$$= (6 \quad 5)$$

BD　3×2 と 2×2 できる

BD　3×2 行列

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 & 9+8 \\ 8-1 & 12+4 \\ 0-1 & 0+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 7 & 16 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

DB 2×2 と 3×2 4(1)

CD 1×3 と 2×2 4(1)

DC 2×2 と 1×3 4(1)

答 積ができるくみあわせ

AC CA CB BD

$$AC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$BD = \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 17 & 16 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

補足

Pythonで積ができない組み合わせで積をするとErrorがでる

(型は重要!!)