第 11 回. 行列式 3 -行列式の基本性質- (三宅先生の本, 3.2, 3.3 の内容)

岩井雅崇 2022/06/30

一部の内容について, 齋藤正彦著 線型代数学 (東京図書) の第 3 章を参考にした.

命題 **1.** $a_1, \dots, a_n$ を行ベクトルとし, n 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ とする.

1. τ を n 次の置換とすると

$$\det \begin{pmatrix} a_{\tau(1)} \\ \vdots \\ a_{\tau(n)} \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}(\tau) \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}(\tau) \det(A). \text{ (交代性)}$$

2. b_i, c_i を行ベクトルとし, α, β を数とすると,

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \alpha b_i + \beta c_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{(多重線型性)}$$

定理 **2.** 行ベクトル $x_1, \dots, x_n$ について, 数 $F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を対応させる関数 F を考える. この F が交代性と多重線型性を満たすとき,

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

ここで $f_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \overset{i}{\hat{1}} & \dots & 0 \end{pmatrix}$ という行ベクトルとする.
特に行列 A に対して数 $F(A)$ を対応させる関数が, 行に関して交代性と多重線型性を満たすとき $F(A) = F(E_n) \det(A)$ となる.