第3回. 行列の演算 (三宅先生の本, 1.2と1.3の内容)

岩井雅崇 2022/04/28

1　行列の和と差

定義 1 (行列の和と差)**.**

$m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ とする.

このとき行列の和 $A+B$ と差 $A-B$ を次で定める.

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$A-B = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

例 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする**.**

このとき $A+B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A-B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ である.

例 3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ とする**.**

このとき $A+B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, $A-B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ である.

例 4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ とする**.** このとき $A+B$ は型が違うため定義されない.

命題 5 (行列の和と差の性質)**.** A, B を行列とする.

- $A \pm B = B \pm A$.
- $A \pm O = A$ (ただし O は零行列).
- $(A+B)+C = A+(B+C)$.

- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

2 行列のスカラー倍

定義 6 (行列のスカラー倍)**.**
$m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ とし, c を数とする (c をスカラーとも呼ぶ).
A の c 倍 cA を次で定める.

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}.$$

例 **7.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $c = 3$ とする．このとき $cA = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 24 \\ 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$ である.

例 **8.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $c = -1$ とする．このとき $cA = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ である.

命題 9 (行列のスカラー倍の性質)**.** A を行列, a, b を数とする.

- $0A = O$ (ただし O は零行列).
- $1A = A$.
- $(-1)A$ を $-A$ と書くことにすると, $A + (-A) = O$.
- $(ab)A = a(bA)$.

3 行列の積

定義 10 (行列の積)**.** $m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ と $n \times l$ 行列 $B = [b_{jk}]_{n\times l}$ とする．このとき A と B の積 AB は $m \times l$ 行列で, 次の式で定義される.

$$AB = [c_{ik}]_{m\times l} \text{としたとき, } c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

例 **11.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする.

A は 1×3 行列で B は 3×1 行列なので, 行列の積 AB が 1×1 行列として定義でき,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 14 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \end{pmatrix}.$$

例 **12.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

A は 2×2 行列で B は 2×1 行列なので, 行列の積 AB が 2×1 行列として定義でき,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5 + 2 \times 1 \\ 4 \times 5 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

例 **13.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

A は 2×2 行列で B は 2×2 行列なので, 行列の積 AB が 2×2 行列として定義でき,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 2 & 2 \times 2 + 3 \times 3 \\ 1 \times 5 + 4 \times 2 & 1 \times 2 + 4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}.$$

また B は 2×2 行列で A は 2×2 行列なので, 行列の積 BA が 2×2 行列として定義でき,

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}.$$

よって行列の積に関して $AB = BA$ とは限らない ($AB \neq BA$ となることがある).

例 **14.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ とする.

A は 2×3 行列で B は 1×4 行列であるので, 行列の積 AB は定義されない.

命題 **15** (行列の積の性質)**.** A, B, C を行列とする.

- $AO = O = OA$ (ただし O は零行列).
- $AE_n = E_n A = A$ (ただし E_n は単位行列).
- $(AB)C = A(BC)$.
- ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

- A を n 次正方行列とするとき $A^m = \underbrace{A \cdots A}_{m\text{ 個}}$ とする

- $A^m = O$ となる行列を冪零(べきぜろ)行列という.

命題 **16** (行列の演算の性質)**.** A, B, C を行列とし, a, b を数とする.

- $a(AB) = (aA)B$.
- $a(A+B) = aA + aB$.
- $(a+b)A = aA + bA$.
- $A(B+C) = AB + AC$.
- $(A+B)C = AC + BC$.

4 三宅先生の本 1.3 の内容に関して

この授業では三宅先生の本 1.3 の内容「行列の分割」についての説明は割愛する (重要度が低いと思われるため). ただし証明等で行列の分割の記法を用いるため, 各自で三宅先生の本 1.3 の内容を読むことをお勧めする.

5 演習問題

演習問題の解答は授業動画にあります.

1. 次の行列の計算を行え.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. 次の行列 A, B, C, D のうち, 積が定義される全ての組み合わせを求め, その積を計算せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$