第 7 回. 正則行列 (三宅先生の本, 2.4 の内容)

岩井雅崇 2022/06/02

1　正則行列

定義 1. A を n 次正方行列とする. ある行列 B があって

$$AB = BA = E_n$$

となるとき$\underline{B \text{ を } A \text{ の逆行列}}$といい $B = A^{-1}$ とかく.
行列 A が逆行列 A^{-1} を持つとき, A は<u>正則行列</u>という (<u>A は正則である</u>ともいう).

例 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.
実際 $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である. 特に A は正則行列である.

例 3. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $ad - bc \neq 0$ ならば, A は逆行列を持ち

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ である.}$$

特に A は正則行列である.

例 4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は逆行列を持たない. 特に A は正則行列ではない.

定理 5. A を n 次正方行列とするとき, 以下は同値.

1. $\mathrm{rank}(A) = n$
2. A の簡約化は E_n である.
3. 任意の n 次列ベクトル $\boldsymbol{b}$ について, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ一つの解をもつ.
4. $A\boldsymbol{x} = 0$ の解は $\boldsymbol{x} = 0$ に限る.
5. A は正則行列.
6. A の行列式 $\det(A)$ は 0 ではない (行列式に関しては第 9, 10, 11 回の講義でやります).

2　掃き出し法を使った逆行列の求め方

定理 6. A を n 次正方行列とし, $n \times 2n$ 行列 $[A : E_n]$ の簡約化が $[E_n : B]$ となるとする．このとき A は正則行列で, B は A の逆行列である.

この定理により掃き出し法を用いて逆行列を得ることができる.

例 **7.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(解). $[A : E_3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を (行) 基本変形を用いて簡約化すると,
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．よって A の逆行列は $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

3　演習問題

演習問題の解答は授業動画にあります.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.