第13回 クラメルの公式と特殊な行列

補足　今回やる内容は覚えなくてよい
（試験にださない）

理由
・マニアックだから
・私自身そんなに使わないから
（てか覚えてない）

ということで
とてもマニアックな話題を扱います
（理解できなくてもok）
（おまけ回）

① クラメルの公式

定理 A n次正方行列で正則とする

$A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と表す (a_i 列ベクトル)

連立方程式 $Ax=b$ の解は

$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくと $x_i = \dfrac{\det[a_1 \cdots \overset{i}{\check{b}} \cdots a_n]}{\det A}$ となる

例 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする

$Ax=b$ の解は

$A=(a_1\ a_2)$ $a_1=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $a_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ として

$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を解として、

$$x_1 = \frac{\det(b, a_2)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{7}$$

$$x_2 = \frac{\det(a_1, b)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{7}$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{証明}}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を解とする

$b = Ax = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$ と表せる

$$\det(a_1, \ldots, \overset{i}{b}, \ldots a_n)$$

$$= \det(a_1, \ldots, x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n, \ldots, a_n)$$

$$= x_i \det(a_1, \ldots, a_n) = x_i \det A$$

$$\therefore \quad x_i = \frac{\det(a_1, \ldots, \overset{i}{b}, \ldots, a_n)}{\det A}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & \cdots & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

x倍

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ \vdots & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

きのうほう

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad //$$

$\boxed{\text{応用}}$

定理 $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ を実数とし $b_1, \ldots, b_n$ は相異なるとする。

このとき $f(b_i) = c_i$ となる

n次方程式 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$

が一意に定まる (a_iは実数)

(証) $B = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1^2 & \cdots & b_1^{n-1} \\ 1 & b_2 & b_2^2 & \cdots & b_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & b_n & b_n^2 & \cdots & b_n^{n-1} \end{pmatrix}$ とおく。

よって $(a_1, \ldots, a_n)$ が存在するためには

$$B \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - b_1^n \\ c_2 - b_2^n \\ \vdots \\ c_n - b_n^n \end{pmatrix}$$ となる

連立方程式が解をもてばよい

ここで $\det B = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\ell_j - \ell_i) \neq 0$ より

Bは正則で $\begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}$ は唯一の解で

$$B^{-1} \begin{pmatrix} c_1 - \ell_1^n \\ \vdots \\ c_n - \ell_n^n \end{pmatrix}$$ をもつ.

B^{-1} は実数係数より、a_iも実数である

定理

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

証 帰納法

・$n=1$ のとき $\begin{vmatrix} a_0 & -1 \\ a_1 & x \end{vmatrix} = a_0 x + a_1$

・$n-1$ で成立するとして。

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & x \end{vmatrix} - (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & & & \cdots & x \end{vmatrix}}_{\text{手の式}}$$

$$= a_0 x^n + (a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)$$

//

・終結式と判別式

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ に $(a_0 \neq 0)$

$f(x) = 0$ の解を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とし

$$D = a_0^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)^2$$ とする

D を $f(x)$ の判別式という

$\boxed{例}$ $n=2$ のとき

$$a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

α_1

$$-a_0(\alpha_1+\alpha_2) = a_1$$

$$a_0 \alpha_1 \alpha_2 = a_2$$

$$D = a_0^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2$$

$$= a_0^2 \left((\alpha_1+\alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2\right)$$

$$= a_1^2 - 4a_0 a_2.$$

【性質】 $D \neq 0 \iff f(x)=0$ の解は相異なる.

終結式

$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m \quad (b_0 \neq 0)$$

とおく.

$(m+n)$ 次正方行列を次で定める

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{a_0\ a_1\ \cdots\ \cdots\ a_n}}^{n+1} & \overbrace{\hphantom{\cdots\ \cdots\ a_n}}^{m-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} m\left\{\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right. \\ n\left\{\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right. \end{array} &
\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & & \\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & \\
 & & a_0 & & & & a_n & \\
 & & & \ddots & & & & \ddots \\
 & & & & a_0 & \cdots & \cdots & a_n \\
b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_{m-1} & b_m & & \\
 & b_0 & \cdots & \cdots & \cdots & & b_m & \\
 & & \ddots & & & & & \ddots \\
0 & & & b_0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m
\end{pmatrix}
\end{array}$$

この行列の行列式を $R(f,g)$ とかき、f と g の終結式という

$\boxed{\text{예1}}$ $f(x) = a_0 x + a_1 \qquad n=1$

$g(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2 \qquad m=2$

$$R(f,g) = \det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_0 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + b_0 \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$= a_0^2 b_2 - a_0 a_1 b_1 + a_1^2 b_0$$

定理

(1) $f(x)=0$ の解を $\alpha_1 \cdots \alpha_n$、
$g(x)=0$ の解を $\beta_1 \cdots \beta_m$ とすると

$$R(f,g) = a_0^m b_0^n \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} (\alpha_i - \beta_j)$$

となる

とくに $R(f,g)=0$ は
「$f(x)=0$ と $g(x)=0$ が共通解をもつ」
ことと同値。

また $R(f,g) = a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i)$ とかける

(2) $R(f,f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D$
(f' は f の微分)

・とくに D は $a_0, \ldots, a_n$ の式でかける

・$R(f,f')=0$ は $f(x)=0$ が
重解をもつことと同値.

$\boxed{\text{証}}$ $\boxed{\text{明}}$ $a_0 = l_0 = 1$ としてよい(行列式の性質より)

$$
B = \begin{array}{c} \\ m \\ \\ \\ n \\ \\ \end{array}
\overbrace{\begin{pmatrix}
1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & & \\
0 & 1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\
1 & l_1 & \cdots & l_{m-1} & l_m & & & \\
 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & l_m & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & l_m
\end{pmatrix}}^{n+1 \qquad\qquad m-1}
$$

とおく.

$$
B \begin{pmatrix} x^{m+n-1} \\ x^{m+n-2} \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} x^{m-1}f(x) \\ x^{m-2}f(x) \\ \vdots \\ f(x) \\ x^{n-1}g(x) \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \end{array}
$$

となる

$f(x) = g(x) = 0$ が共通解 α をもつならば

$$
B \begin{pmatrix} \alpha^{m+n-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ より } \det B = 0
$$

である

② $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$

$= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ より

1次 $a_1 = (-1)(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$

2次 $a_2 = (-1)^2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_n + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n)$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j$$

(2次対称式)

⋮

i次 $a_i = (-1)^i \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leq n} \alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\cdots\alpha_{j_i}$ となる

$\boxed{\text{示したいこと}}$ $\det B$ が $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ について $m \cdot n$ 次の斉次多項式である

ことを示す

($m \cdot n$ 次でない項はありえない!)

B_{ij} の次数.

$$B_{ij} = \begin{cases} (j-i)\text{次} & 1 \le i \le m,\ i \le j \le n+i \\ (j-i+m)\text{次} & m+1 \le i \le m+n,\ i \le j \le m+i \\ 0 & \text{他.} \end{cases}$$

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_{n+m}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, B_{1\sigma(1)} \cdots B_{m+n\,\sigma(m+n)}$$ より

$B_{1\sigma(1)} \cdots B_{m+n\,\sigma(m+n)}$ の次数

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m+n} (\sigma(i) - i)}_{0} + mn = mn \quad //$$

$\boxed{3}$ ① と ② から因数定理より

$$\det B = c \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$$

となる 数 c がある

$\det B$ には $b_m^n = (-1)^{mn} \beta_1^n \cdots \beta_m^n$

という式があり

右の式には $(-1)^{mn} (\beta_1 \cdots \beta_m)^n$ がある。

$C = 1$ となる

$\therefore \det B = \prod (\alpha_i - \beta_j)$

(一般の $R(f, g)$ には $a_0^m b_0^n$ がかかる)

$g(x) = b_0 \prod_{j=1}^{m} (x - \beta_j)$ より

$$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$$

$$= a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i)$$ ◻

(2) $f(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n$

$$= a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)$$

$$f'(x) = a_0 \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} (x - \alpha_j) \right)$$

となる

$$R(f, f')$$

$$= a_0^{n-1} \prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i)$$

$$= a_0^{2n-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} (\alpha_i - \alpha_j) \right)$$

$$= a_0^{2n-1} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D$$

//