

第5回 連立1次方程式2 - 行列の簡約化

あすい (前日)

定義

(行) 基本変形, とは次の3つの変形のことをいう

- ① 1つの行を何倍かする
(ただし 0倍はダメ)
- ② 2つの行をいれかえる
- ③ 1つの行に他の何倍かをかえる

やること

拡大係数行列を基本変形を繰り返して

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$ みたいな形にする

(次回きちんと定義します)

連立1次方程式
をときたい

きちんと
定義する

定義

行列 A が 2 次の 1 ~ 4 をみたすとき
簡約な行列という

- ① 行列 A から 0 行列 (全 2 の成分が 0 の行列)
が得られることは 0 行列に等しいか? (0 行列は下 3 行にある)
- ② 0 行列に等しい行列の主成分は 1
($(00010\cdots 0)$ のように)
- ③ 第 2 行の主成分を a_{2j_2} とするとき
 $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ となる
- ④ 各行の主成分を合算、他の成分はすべて 0 である。
つまり、第 2 行の主成分が a_{2j_2} のとき、
第 j_2 列の a_{2j_2} 以外は 0 である

(一) もしくは、
行列をたか

ok
③

Handwritten matrix with annotations:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Annotations:

- Green box around the first row.
- Blue circle around the element 1 in the first row, second column.
- Green arrow pointing from the blue circle to the element 1 in the second row, fourth column.
- Green circle around the number 3.
- Red box around the third row.
- Red circle around the text "ok".

問答

2ok 4ok

Handwritten matrix and annotations:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Annotations:

- Blue circles around 1, 1, and 1.
- Purple boxes around 0, 0, and 0.
- Green line under the first row.
- Green line under the second row.
- Green line under the third row.
- Red line under the entire matrix.
- Blue text: 20k (410k)
- Green text: 20k
- Red text: 10k

40k

Qok.

Handwritten matrix with annotations:

0	0	0	1	6	0	3	0
0	0	0	0	0	1	2	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Annotations:

- Green box around the first three columns of the first two rows.
- Purple box around the fourth and fifth columns of the first two rows.
- Blue circles around the elements 1 and 1 in the first two rows.
- Green text "2/0k" above the first row.
- Green text "3/0k" to the right of the second row.
- Red box around the entire third row.
- Red text "1/0k" below the third row.

folk

新しい行列 C の計算

○ 1" 7k 1L 5" 7k 5" 7k 1= 7k 3

第二段には「かたじけなく」

例12 簡約でない行列たち

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① 簡約

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

② 簡約

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③ 簡約

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

④ 簡約

定義 行列 A に (行) 基本変形

① 1つの行を何倍かする
(ただし 0倍はダメ)

② 2つの行をいれかえる

③ 1つの行に他の何倍かをかき足す
とかいわれる。簡約な行列 B を A を簡約化するとき、 B は A の簡約化という

定理

任意の行列は (行) 基本変形を
(1) かえりこで簡約化でき
その簡約化は一意に定まる

(証明は7回目におこな)

定義

A を行列と (B をその簡約化とす)

$$\text{rank}(A) = \left(\begin{array}{c} B \text{ の } \underline{\text{ゼロ行がなくなる}} \\ \underline{\text{行の二さう}} \end{array} \right) \text{ とす}$$

$\text{rank}(A)$ を A の階数 (ランク) とする

例

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{(簡約)} \\ (2 \times) \end{array}$$

$$\text{rank}(A) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 3 \times$$

$$\text{rank}(A) = 3$$

小生質

$$\text{rank}(A) \leq \underline{\min(m, n)}$$

($A = m \times n$ 行列 $\in \mathbb{C}$) (m と n の小さい方)

(why? 簡約行列の主成分はすべて
ゼロでない行にあるから)

Q. 簡約行列はどうするの??

A. 前の授業集の ようにする

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times (-1)}$ 1 行目 $\times (-1)$ を
2 行目に加える

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2}$ 2 行目 $\times (-1)$ を
 $\times (-2)$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 5R_2}$ 2 行目 $\times (-2)$ を
1 行目に加える

Rank 階数

1512 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を簡約化する

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1行目を $\times (-2)$
と 2行目に足す

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 2行目を $\times (-1)$ と
3行目に足す

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 3行目を $\times \frac{1}{4}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 3行目を $\times (-2)$ と
1行目に足す
3行目を $\times 3$ と
2行目に足す

階数は3

例

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

をかんがえる

→

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\times \frac{1}{2}$

3 行目と
1 行目をかえ

→

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\times (-3)$

1 行目 $\times \frac{1}{2}$

→

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1 行目 $\times (-3)$

と 2 行目をかえ

→

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\times \frac{1}{2}$

$\times \frac{1}{2}$

2 行目と
3 行目
をかえ

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{2个方程} \times \frac{5}{2} \\ \text{3个方程} \times \frac{5}{2} \end{array}$$

(X3)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{2个方程} \times (3) \\ \text{1个方程} \end{array}$$

-2, -2, -2

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{3个方程} \times (-\frac{5}{2}) \\ \text{1个方程} \end{array}$$

3个方程 $\times (-\frac{3}{2})$, 2个方程

秩数 3

演習問題

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

簡約化
3段階
もめめ。

左

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\times 1$
 $\times (-2)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$\times (-2)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\times \frac{1}{6}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

← 2022/05/19 訂正:
これは簡約行列表ではないの?
これは答えではありません
正しい答えは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 です.

階数 4

「正しい」
本意は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

たしかにみたが、まちがいました。

Ex

この行列を簡約化して
階数をもとめよ

(A, 3)