第14回 内積と外積

一応シラバスにあるのでやります

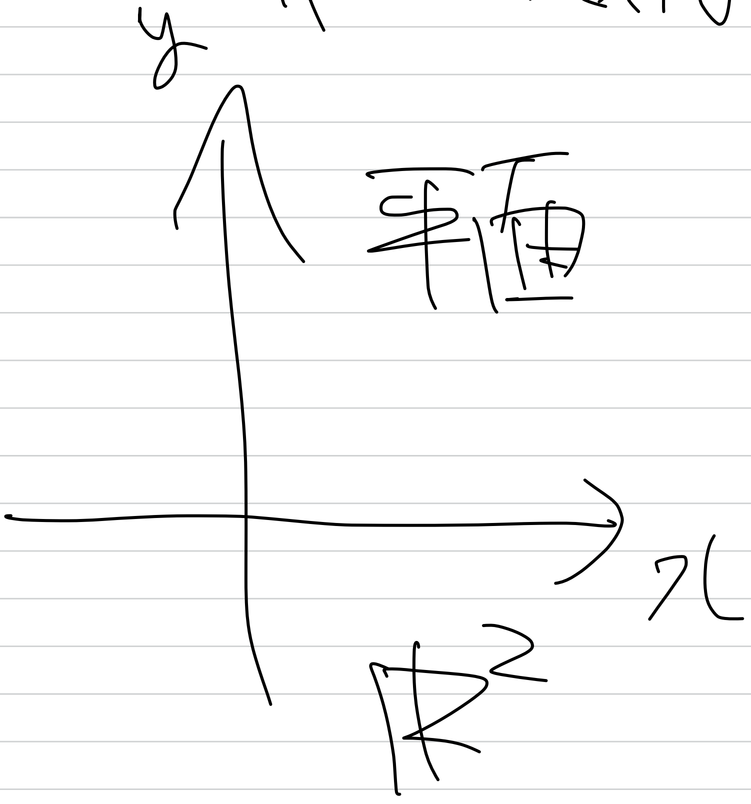
のちのち役に立つかもしれません
(ベクトル解析とかで)

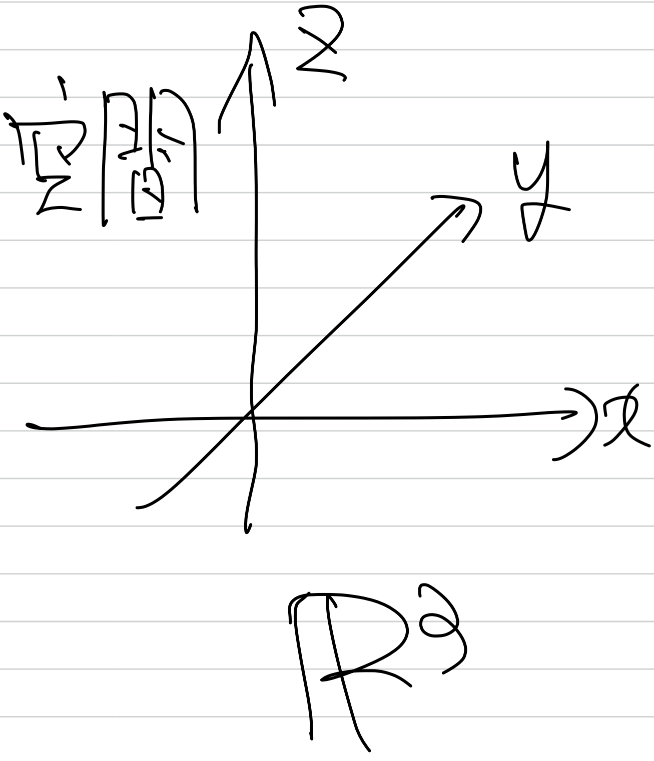
以下 $\mathbb{R}$を実数とし $n \geqq 1$(自然数)とする。

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \ldots x_n \in \mathbb{R}\}$$ とする

例 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$





(みなさんが使うのは $n=2$ or 3 なので
以下 $n=2,3$ と思ってよいです)

$\boxed{定義}$ $\cdot\ a=(a_1,\dots,a_n),\ b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$

$\cdot\ \alpha\in\mathbb{R}$ とする

① 和 $a+b=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)$

差 $a-b=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\dots,a_n-b_n)$

スカラー倍 $\alpha a=(\alpha a_1,\ \alpha a_2,\dots,\alpha a_n)$

② a と b の内積を

$a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$ とする

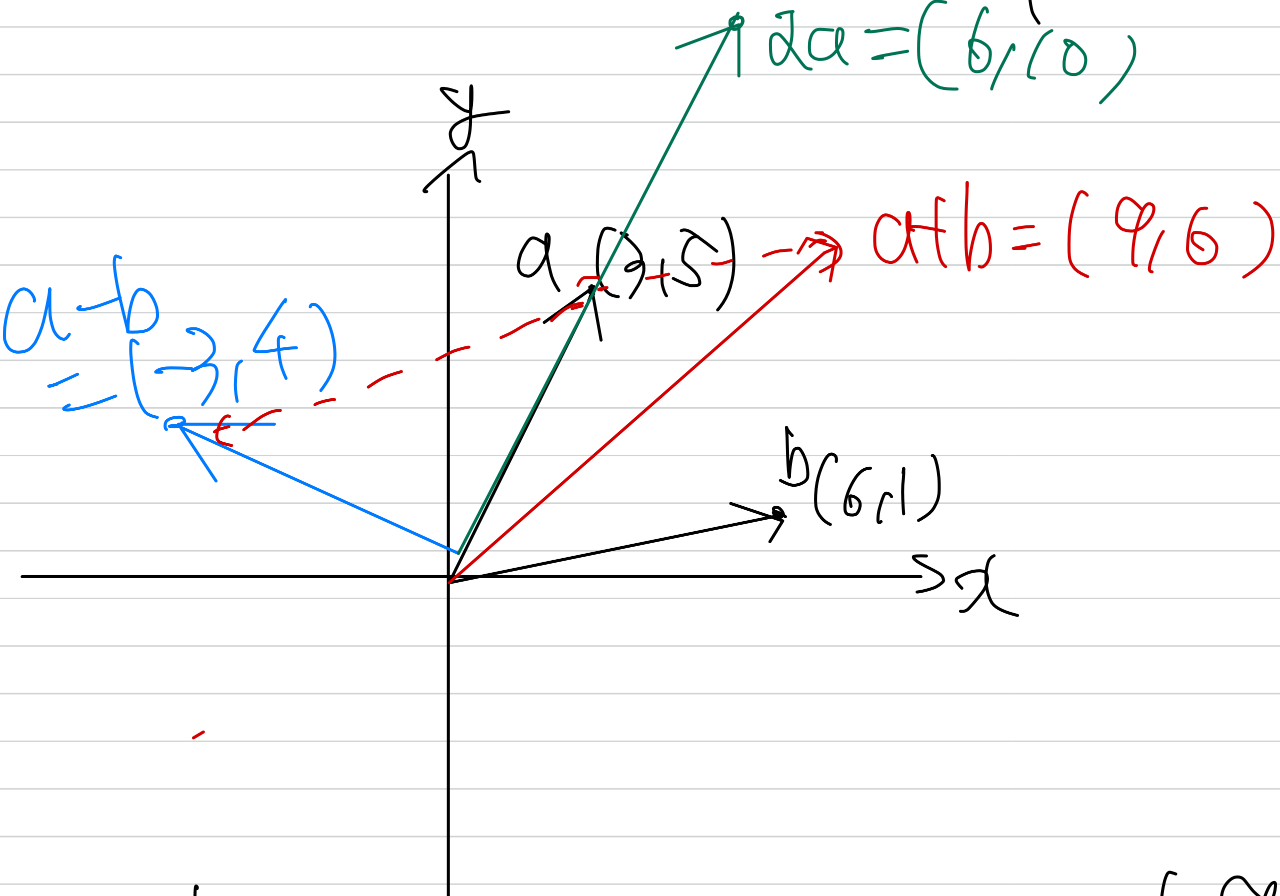
③ a の長さ（ノルム）を

$\|a\|=\sqrt{a\cdot a}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}$

とする

$\boxed{例1}$ $n=2,\ a=(3,5)\ b=(6,1)\in\mathbb{R}^2$

$\alpha=2\in\mathbb{R}$



$$a+b=(3+6,\ 5+1)=(9,6)$$

$$a-b=(3-6,\ 5-1)=(-3,4)$$

$$\alpha a=(2\cdot 3,\ 2\cdot 5)=(6,10)$$

$$a\cdot b=3\times 6+5\times 1=23$$

$$\|a\|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$$

$$\|b\|=\sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}.$$

命題 $a, b \in \mathbb{R}^n$ とする

① (中線定理)

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

② $a \cdot b = \frac{1}{4}(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2)$

$$= \frac{1}{2}(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a-b\|^2)$$

③ (Cauchy-Schwarzの不等式)

$$(a \cdot b)^2 \leqq \|a\|^2 \|b\|^2.$$

④ (三角不等式)

$$\|a+b\| \leqq \|a\| + \|b\|$$

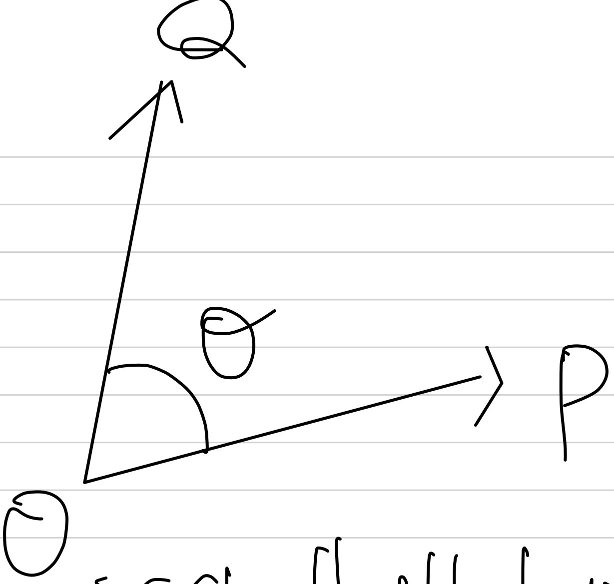
⑤ $n = 3$ とする. $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ とする

点 $P\ (a_1, a_2, a_3)$

点 $Q\ (b_1, b_2, b_3)$ とし

点 $O\ (0, 0, 0)$

線分OPとOQのなす角をθとする



このとき

$$a \cdot b = \|a\| \cdot \|b\| \cos\theta$$

とくに $\|a\| \neq 0$ かつ $\|b\| \neq 0$ のとき

「$a \cdot b = 0$」は「a と b が直交する」と同値

$\boxed{証}$ ① ②

$$\|a+b\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + 2a_ib_i + b_i^2)$$

$$= \|a\|^2 + 2a \cdot b + \|b\|^2$$

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 - 2a \cdot b + \|b\|^2$$

より

計算すればでる。

③ $b \neq 0$ とする。$t \in \mathbb{R}$ について

$$F(t) = \|a + tb\|^2$$

$$= \|a\|^2 + 2(a \cdot b)t + \|b\|^2 t^2$$

とおると次がわかる　　　　　　　　　　　　となる

⓪ $F(t)$はtにかんする2次関数

⑨ つねに$F(t) \geqq 0$

よって $(a, b)^2 - \|a\|^2\|b\|^2 \leqq 0$ となる

$F(t) = A + 2Bt + Ct^2 \quad (C \neq 0)$

がつねに $F(t) \geqq 0$

→ $F(t) = 0$は重根または実数解をもたない

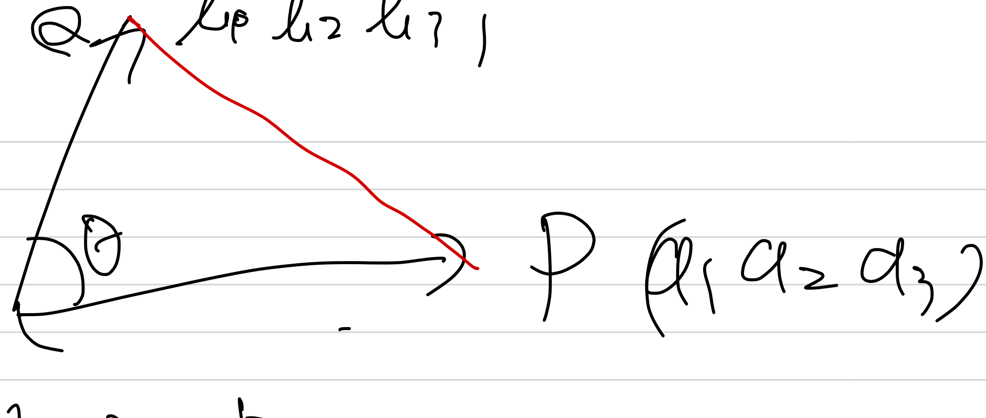
→ $(2B)^2 - 4AC \leqq 0$

④ $(\|a\| + \|b\|)^2 - \|a+b\|^2$

$= 2\|a\|\|b\| - 2a \cdot b \geqq 0$

①　　　　　　　　　　　　　　　　　②

⑤



余弦定理

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2\,OP\,OQ\cos\theta$$

$PQ = \|a-b\|$ より

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos\theta$$

$$\therefore\ \|a\|\|b\|\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a-b\|^2\right) \overset{①}{=} a\cdot b$$

$$a\cdot b = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{3}{2}\pi$$

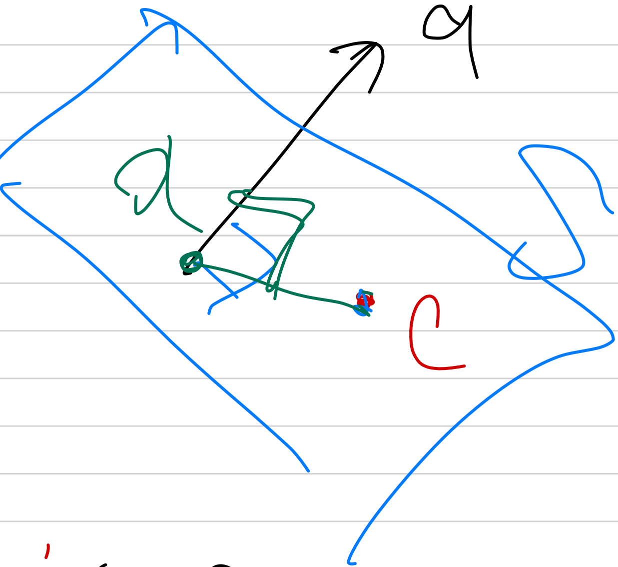
$\iff$ a と b は直交する

応用 平面の方程式

$a = (a_1, a_2, a_3)$ に直交する平面で

点 $c = (c_1, c_2, c_3)$ を

とおる平面 S をもとめる



$x = (x_1, x_2, x_3) \in S$ の時

$x - c$ と a は直交する.

⑤より $(x - c) \cdot a = 0$

$\therefore \quad a_1(x_1 - c_1) + a_2(x_2 - c_2) + a_3(x_3 - c_3) = 0$

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} a_1(x_1 - c_1) + a_2(x_2 - c_2) \\ + a_3(x_3 - c_3) = 0 \end{array} \right\}$$

外積 $n=3$のときしか定義できない

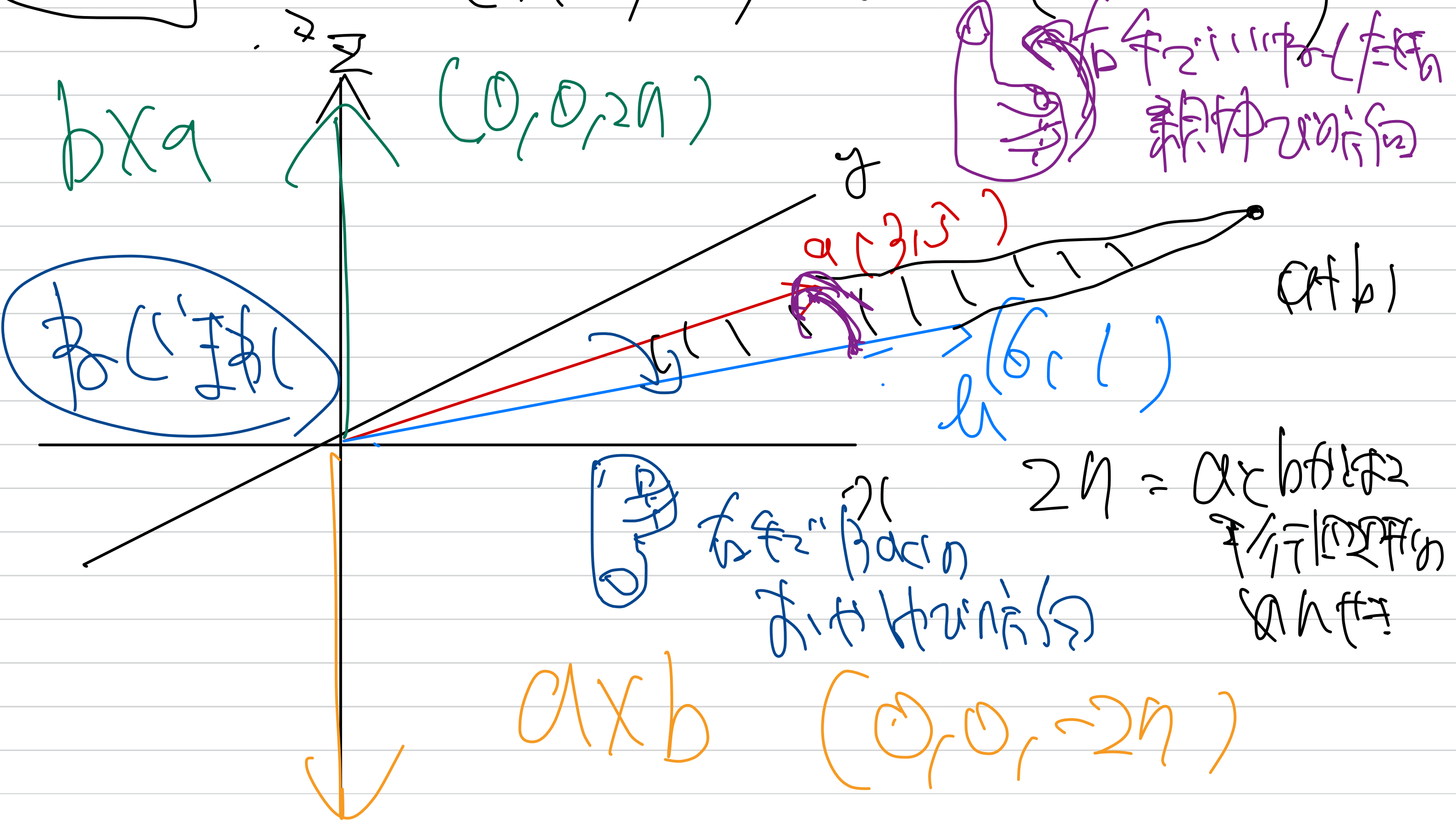
定義 $a=(a_1,a_2,a_3)$ $b=(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3$ について

外積 $a \times b$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

例1 $a=(3,5,0)$ $b=(6,1,0)$



$$a \times b = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (0, \quad 0, \quad -27)$$

$b \times a$

$$= \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (0, \quad 0, \quad 27)$$

$$a \times b \neq b \times a$$

($a \times b = -b \times a$ なので)

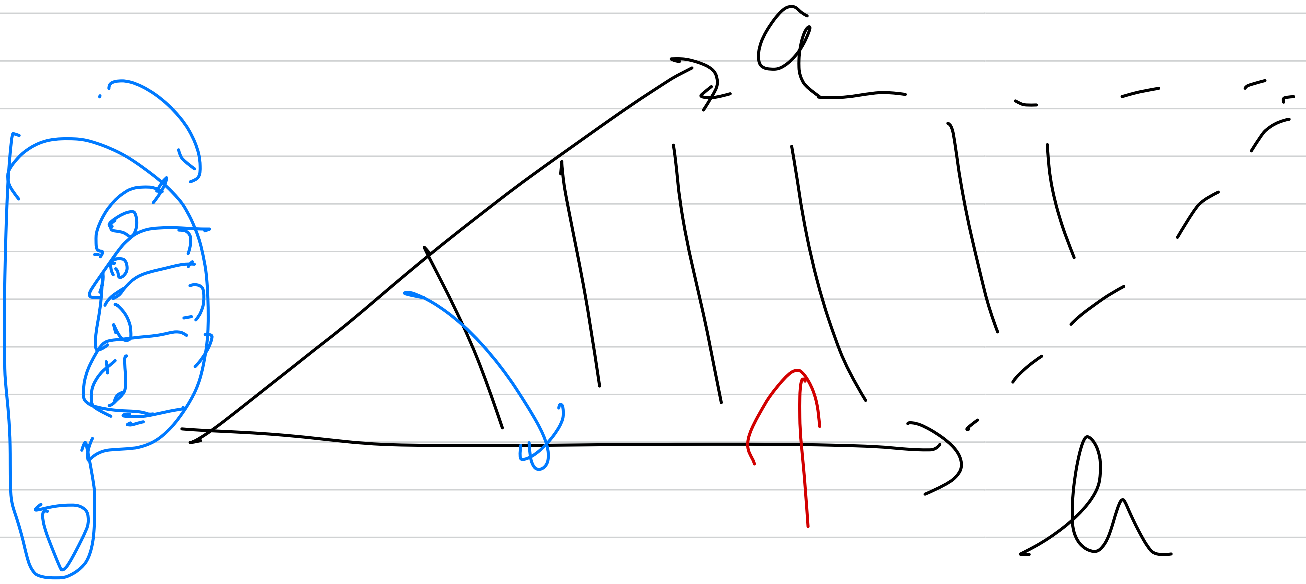
$\boxed{\text{性質}}$ $a, b \in \mathbb{R}^3$

① $a\times b = -b\times a$, $a\times a = 0$

② $a\times b$ は a や b と直交する

③ $a\times b = 0 \Longleftrightarrow$ a と b は平行

④ $\|a\times b\|$ は a と b がはる平行四辺形の面積にひとしい



このめんせきが $\|a\times b\|$

むきは a から b へ右手で good (or bad) したときの親指のむき

$\boxed{\text{証}}$ ①

$$b \times a = \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(-\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -a \times b$$

よって

$a \times a = -a \times a$ より $a \times a = 0$

② $(a \times b) \cdot a = 0$ を示す。

$$(a \times b) \cdot a = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

③ $b \neq 0$ において

a と b が平行なら $a = \lambda b$ となるので

$a \times b = \lambda(b \times b) = 0$ となる。

逆に $a \times b = 0$ なら

$$\begin{cases} a_2 b_3 = a_3 b_2 \\ a_3 b_1 = a_1 b_3 \\ a_1 b_2 = a_2 b_1 \end{cases}$$

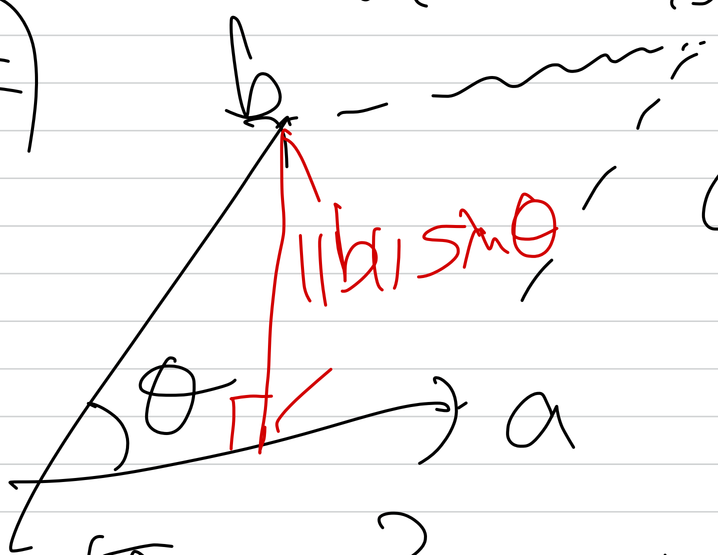
となる

$b_1 \neq 0$ なら

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(a_1, \frac{a_1}{b_1} b_2, \frac{a_1}{b_1} b_3\right)$$
$$= \frac{a_1}{b_1}(b_1, b_2, b_3)$$ より a と b は平行

$b_2 \neq 0$, $b_3 \neq 0$ とも場合分けして同じことがいえる。

(4)



a と b のなす角を θ とする

よって $(\text{面積})^2 = (\|a\| \cdot \|b\| \sin\theta)^2$

$$= \|a\|^2\|b\|^2(\sin\theta)^2$$

$$= \|a\|^2\|b\|^2(1-(\cos\theta)^2)$$

$$= \|a\|^2\|b\|^2-(a\cdot b)^2$$

$$= \|a\times b\|^2.$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

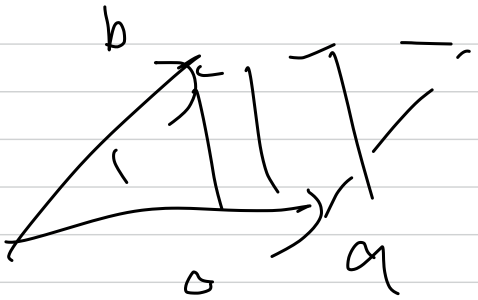
$$= \|a\|^2\|b\|^2-(a\cdot b)^2$$

応用　行列式との関係

① $a=(a_1, a_2)$, $b=(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ とする

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ の絶対値は

a と b がはる平行四辺形の面積に等しい。



[証] $a \times b = (0, 0, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ より

面積 $= |a_1 b_2 - a_2 b_1|$

$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ の絶対値
//

② 3次の行列式について

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ とする

$\boldsymbol{c} = (c_1\ c_2\ c_3)$

すると

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

スカラー3重積.

とくに $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ である。

$\boxed{\text{証}}$ (左辺) を余因子展開して

$$(\text{左辺}) = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

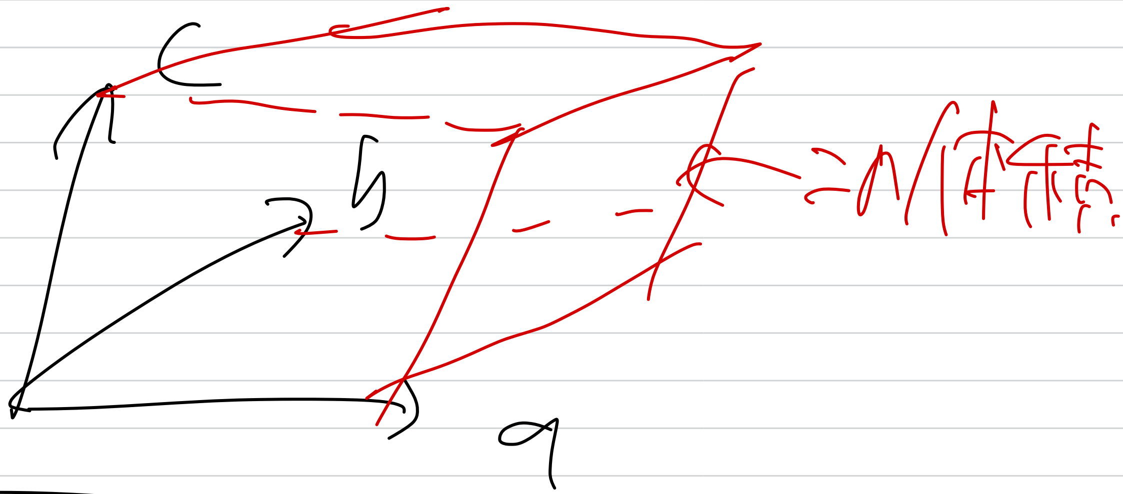
$$= \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

[定理] 次の値はひとしい

① $\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ の絶対値

② $a\cdot(b\times c)$ の絶対値

③ a, b, c で決まる平行六面体の体積

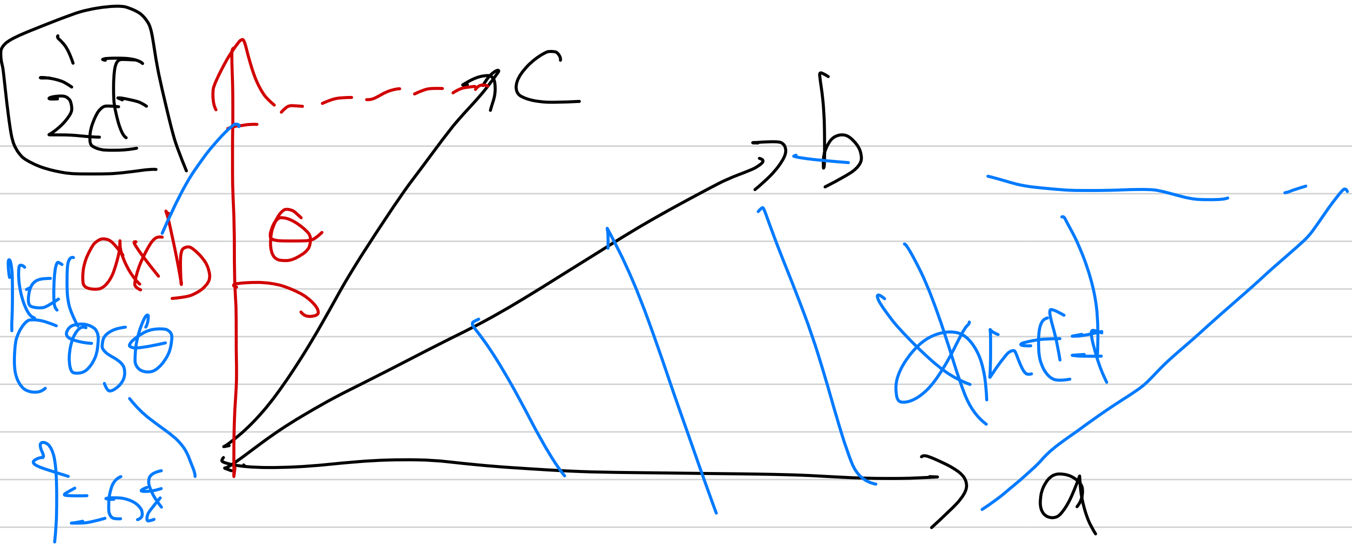


2次の行列式 ≒ 面積

3次の行列式 ≒ 体積

ってこと

証



$a \times b$ と c がなす角を θ とする

体積を V とすると、

$$V = \left| (a\text{と}b\text{がなす平行四辺形の面積} \right| \times \underbrace{\left| \, \|c\| \cos\theta \, \right|}_{\text{高さ}}$$

$$= \left| \, \|a \times b\| \, \|c\| \cos\theta \, \right|$$

$$= \left| (a \times b) \cdot c \right|$$

$$= \left| a \cdot (b \times c) \right| \quad //$$