第 2 回. 行列の定義 (三宅先生の本, 1.1 の内容)

岩井雅崇 2022/04/21

1 行列の定義

- $m \times n$ 個の数 (実数または複素数) a_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ を

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  のように並べたものを $\underline{m \text{ 行 } n \text{ 列の行列}}$という. $\underline{m \times n \text{ 行列}}$, $\underline{m \times n \text{ 型の行列}}$, $\underline{(m, n) \text{ 行列}}$ ということもある.

- 上の行列を A としたとき, a_{ij} を行列 A の (i, j) 成分という. 行列 A を$\underline{[a_{ij}]_{m\times n} \text{ や } (a_{ij})}$と略記することもある.

- $\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ を$\underline{A \text{ の行}}$といい, 上から第 1 行, 第 2 行, $\cdots$, 第 m 行という.

- $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を$\underline{A \text{ の列}}$といい, 上から第 1 列, 第 2 列, $\cdots$, 第 n 列という.

- $1 \times n$ 行列 $(a_{11} \cdots a_{1n})$ を<u>行ベクトル</u>と呼び, $m \times 1$ 行列 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ を<u>列ベクトル</u>と呼ぶ (この授業や教科書での用語).

例 **1.** 行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

- A は 2 行 3 列の行列 (2×3 行列).
- (1,2) 成分は 2, (2,1) 成分は 3, (2,3) 成分は 4 である.
- 第 2 行は $\begin{pmatrix} 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$. 第 3 列は $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ である.

例 **2.** 行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

- A は 3 行 4 列の行列 (3×4 行列).

- (1,1) 成分は 13, (2,4) 成分は 5, (3,2) 成分は 8 である.
- 第 2 行は $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. 第 3 列は $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ である.

例 **3.** 行列 $A = (2)$ とすると, A は 1 行 1 列の行列 (1×1 行列) である.

2 特別な行列

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のように全ての成分が 0 の行列を零(ぜろ)行列という.
- $n \times n$ 行列のことを n 次正方行列という.
- n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  について, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ を A の対角成分という.

- 対角成分以外 0 の行列を対角行列という. 例えば以下の行列は対角行列である:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- 対角成分が全て 1 な n 次対角行列を単位行列と言い, E_n とかく. 例えば以下の行列は単位行列である:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 行列 A の行と列を入れ替えた行列を転置行列と言い ${}^tA$ とかく.

例 **4.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ についてその転置行列は ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ であり, ${}^t({}^tA) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$ である.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ についてその転置行列は ${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ であり, ${}^t({}^tA) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A$ である.

命題 5 (転置行列の性質)**.**

- A が $m \times n$ 行列なら ${}^tA$ は $n \times m$ 行列.
- $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ とし, ${}^tA = [b_{ij}]_{n \times m}$ とするとき, $b_{ij} = a_{ji}$.
- ${}^t({}^tA) = A$.

3 クロネッカーのデルタ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

をクロネッカーのデルタという.

例 6. $\delta_{11} = \delta_{22} = 1, \delta_{12} = \delta_{21} = 0$ である. n 次正方行列 E_n は $E_n = [\delta_{ij}]_{n \times n}$ と略記できる.

4 演習問題

演習問題の解答は授業動画にあります.

1. 行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & -5 \\ 18 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

次の問いに答えよ.

- A の型をいえ.
- A の $(3, 2)$ 成分をいえ.
- A の第 2 行をいえ.
- A の第 3 列をいえ.
- A の転置行列 ${}^tA$ を求めよ.

2. ${}^tA = -A$ となる n 次正方行列を交代行列という. 交代行列の対角成分は 0 であることを示せ.