# 第 13 回. クラメルの公式と特殊な行列式 (三宅先生の本, 3.4, 3.5 の内容)

岩井雅崇 2022/07/14

この授業で行う内容は理解しなくても構いません (結構マニアックな話題を扱います). また覚える必要もございません.

## 1 クラメルの公式

**定理 1.** $A$ を正則な $n$ 次正方行列とし, 列ベクトル $a_1, \ldots, a_n$ を用いて $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ と表されているとする. このとき連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は次のようになる.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \boldsymbol{b} & \cdots & a_n \end{pmatrix}}{\det A}.$$

**例 2.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする. 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると,

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & a_2 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{7}, \; x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{7} \text{となる.}$$

## 2 特殊な行列式

**定理 3.**

1. (ヴァンデルモンドの行列式)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i).$$

2. (ヴァンデルモンドの行列式の応用) $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ を実数とし, $b_1, \ldots, b_n$ は相異なると仮定する. このとき実数係数の $n$ 次式 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ があって, 任意の $i = 1, \ldots, n$ について $f(b_i) = c_i$ となる.

$\prod_{1 \leqq i < j \leqq n}$ は積の記号で, $\prod_{1 \leqq i < j \leqq n}(x_j - x_i)$ は「$1 \leqq i < j \leqq n$ を満たす $(i, j)$ について $(x_j - x_i)$ を全てかけた数」を表している.

**定理 4.**

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

## 3　終結式と判別式

以下の内容は「永田雅宜著 理系のための線型代数の基礎 (紀伊國屋書店)」の第 3 章に基づく.

**定義 5.** $a_0, a_1, \ldots, a_n$ を複素数とし, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ とする (ただし $a_0 \neq 0$ とする). $f(x) = 0$ の解を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とするとき,

$$D = a_0^{2n-2} \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (\alpha_j - \alpha_i)^2$$ を $f(x)$ の判別式という.

簡単にわかることとして, 「$D \neq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ の解が相異なる」である.

**例 6.** $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ の判別式 $D$ を求める (ただし $a_0 \neq 0$ とする). $\alpha_1, \alpha_2$ を $f(x) = 0$ の解とすると, 解と係数の関係から

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

であるので, $-a_1 = a_0(\alpha_1 + \alpha_2), a_2 = a_0\alpha_1\alpha_2$ となる. よって

$$D = a_0^2(\alpha_2 - \alpha_1)^2 = a_0^2\{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2\} = a_1^2 - 4a_0a_2.$$

**定義 7.** 複素係数多項式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$ (ただし $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$) について, $m + n$ 次正方行列を次で定める.

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_m \end{pmatrix}$$

この行列の行列式を$f, g$ の終結式と言い, $R(f, g)$ と表す.

**定理 8.**

1. $f(x) = 0$ の解を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とし, $g(x) = 0$ の解を $\beta_1, \ldots, \beta_m$ とすると

$$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq m} (\alpha_i - \beta_j) = a_0^m \prod_{1 \leqq i \leqq n} g(\alpha_i) \text{ である.}$$

特に $R(f, g) = 0$ は $f(x) = g(x) = 0$ が共通解を持つことと同値である.

2. $f'$ を $f$ の微分とすると,

$$R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D.$$

特に $f(x)$ の判別式 $D$ は $a_0, \ldots, a_n$ の式でかける. また $R(f, f') = 0$ は $f(x) = 0$ が重根を持つことと同値である.