第 5 回. 連立 1 次方程式 2-行列の簡約化- (三宅先生の本, 2.2 の内容)

岩井雅崇 2022/05/19

1 簡約な行列

定義 1 (簡約な行列)**.** 行列 A が次の 4 つの条件を満たすとき, A を簡約な行列という.

1. 行ベクトルのうちに零ベクトル (全ての成分が 0 である行) があれば, それは零ベクトルでないものよりも下にある.
2. 零ベクトルでない行ベクトルの主成分は 1 である.
3. 第 i 行の主成分を a_{ij_i} とすると, $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ となる. すなわち各行の主成分は下の行ほど右にある.
4. 各行の主成分を含む列の他の成分は全て 0 である. すなわち第 i 行の主成分が a_{ij_i} であるならば, 第 j_i 列の a_{ij_i} 以外の成分は全て 0 である.

例 **2.** 以下の行列は全て簡約な行列である.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 **3.** 次に簡約ではない行列の例を理由とともに挙げる.

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 1 番目の条件が満たされていないので簡約ではない.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ は 2 番目の条件が満たされていないので簡約ではない.
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は 3 番目の条件が満たされていないので簡約ではない.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 4 番目の条件が満たされていないので簡約ではない.

定義 4 (簡約化)**.** 行列 A に (行) 基本変形

1. 1 つの行を何倍か ($\neq 0$ 倍) する.
2. 2 つの行を入れ替える.

3. 1つの行に他の行の何倍かを加える.

を繰り返して簡約な行列 B を得ることを<u>A を簡約化する</u>といい, <u>B を A の簡約化</u>という.

定理 5. 任意の行列は基本変形を繰り返すことによって簡約化することができ, その簡約化は一意に定まる.

定義 6 (階数 (ランク))**.** A を行列とし, B を A の簡約化とする. $\mathrm{rank}(A)$ を B の零ベクトルでない行の個数とし<u>A の階数 (ランク)</u>と呼ぶ.

$\mathrm{rank}(A)$ は簡約化の仕方によらずに定まる数である. また A を $m \times n$ 行列とすると $\mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$ である.

例 7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると, これは簡約な行列であり零ベクトルでない行の個数は 2 個である. よって $\mathrm{rank}(A) = 2$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とすると, これは簡約な行列であり零ベクトルでない行の個数は 3 個である. よって $\mathrm{rank}(B) = 3$.

例 8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を基本変形で簡約化すると次のとおりである.[1]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{①+②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

よってこの行列の階数 (ランク) は 2 である.

例 9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を基本変形で簡約化すると次のとおりである.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[②+③\times\frac{3}{2}]{①+③\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

よってこの行列の階数 (ランク) は 3 である.

[1] 第 4 回授業資料と同じで「② + ① × (−1)」は「行列の 2 行目に 1 行目の (-1) 倍を加える」を意味している.

2　演習問題

演習問題の解答は授業動画にあります.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を簡約化し, その階数を求めよ.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ を簡約化し, その階数を求めよ.