第11回 行列式3 行列式の基本性質

定理 A, B n次正方行列とする

① $\det {}^tA = \det A$

② $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

とくに $\det(AB) = \det(BA)$

③ $\det A \neq 0$ であることと

Aが正則(逆行列をもつ)ことは同値

④ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & a_{23} & & \\ 0 & a_{2n} & \cdots & \end{pmatrix}$ とすると $(a_{i1} = 0 \quad i > 1)$

$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{23} & & \\ \vdots & & \\ a_{2n} & \cdots & \end{vmatrix}$

⑤ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ とすると

$(a_{ij} = 0 \ (i > j))$

$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ a_i : 行ベクトルとする

$(a_i = (a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in})$ である

⑥ 1つの行をc倍すると行列式はc倍される

$\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ca_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$

⑦ $\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i + c_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$

b_i, c_i 行ベクトル

⑧ 2つの行をいれかえたら行列式は(-1)倍される

$\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$

⑨ i行目のc倍をj行目にくわえても行列式はかわらない

$\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j + ca_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$

⑩ 列ベクトルにかんしても⑥〜⑨と同じことが成りたつ

$\begin{vmatrix} a_1 a_2 \cdots ca_j \cdots a_n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_1 \cdots a_j \cdots a_n \end{vmatrix}$

系 $AB = E_n$ ならばAは正則で

BはAの逆行列

~~証明します~~

証明は次回

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$ について、

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$ であった

以下行ベクトル $a_1 \cdots a_n$ をつかって

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ とする $\left(\begin{array}{l} a_1 = (a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}) \\ a_2 = (a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n}) \end{array} \right.$

$\boxed{\text{命題}}$

① τ を n 次の置換として

$$\det \begin{pmatrix} a_{\tau(1)} \\ a_{\tau(2)} \\ \vdots \\ a_{\tau(n)} \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}\,\tau \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(交代性)

② $$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \alpha b_i + \beta c_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(多重線形性)

(b_i, c_i 行ベクトル, α, β 定数)

$\boxed{\text{証}}$ ①

$$\boxed{\text{左辺}} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\tau(1)\sigma(1)}\, a_{\tau(2)\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$$

$$= \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma\tau^{-1})\, a_{\tau(1)\sigma(1)}\, a_{\tau(2)\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$$

$\tau(1) = k_1,\ \tau(2) = k_2, \ldots, \tau(n) = k_n$ とすると

$$a_{\tau(1),\sigma(1)}\, a_{\tau(2),\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n),\sigma(n)}$$

$$= a_{k_1\, \sigma(\tau^{-1}(k_1))}\, a_{k_2\, \sigma(\tau^{-1}(k_2))} \cdots a_{k_n\, \sigma(\tau^{-1}(k_n))}$$

$$= a_{1\, \sigma(\tau^{-1}(1))}\, a_{2\, \sigma(\tau^{-1}(2))} \cdots a_{n\, \sigma(\tau^{-1}(n))}$$

($k_1, \ldots, k_n$ は $1 \sim n$ の並びかえ)

$$= \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma\tau^{-1})\, a_{1\, \sigma\tau^{-1}(1)} \cdots a_{n\, \sigma\tau^{-1}(n)}$$

$$= \mathrm{sgn}(\tau)\ \det A\ 。$$

②

$\boxed{\text{左辺}} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots (\alpha b_{i\sigma(i)} + \beta c_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)}$

$= \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

$+ \beta \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots c_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

となる。//

実は交代性と多重線型性をみたすものは"行列式"ぐらいしかない

$\boxed{\text{定理2}}$ $x_1, \ldots, x_n$ 行ベクトルについて

$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ は数を対応させる関数とする

Fが交代性と多重線型性をみたすとする

つまり

$\boxed{1}$ $F\begin{pmatrix} x_{\tau(1)} \\ \vdots \\ x_{\tau(n)} \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}(\tau)\, F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(τ 置換)

② $$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \alpha y_i + \beta z_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(y_i, z_i 行ベクトル, α, β 定数)

このとき $f_i = (0 \cdots \underset{i}{1} \cdots 0)$ 行ベクトル として.

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{F\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}}_{定数} \cdot \det\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となる

特に 行列Aにかんして 数F(A)を対応させる関数F(A)が 行にかんして交代性と多重線型性 をみたすとき

$$F(A) = F(E_n) \det A$$ となる

$$\left(E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 単位行列} \right)$$

証 $x_i = x_j$ ならば $F\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = 0$ である

$$\left(F\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = 0 \right)$$

なぜならば $\tau = (i\ j)$ として

$$F\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = (-1)\, F\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \text{ より}$$

$x_i = x_j$ なら $2F\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = 0$ となるから.

今, $x_i = (a_{i1} \cdots a_{in})$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j$$

とかくことにする

$$F\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j} f_j \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

$$\overset{②}{=} \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} F\begin{pmatrix} f_{j_1} \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{②}{=} \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \sum_{j_2=2}^{n} a_{2j_2} F\begin{pmatrix} f_{j_1} \\ f_{j_2} \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

n^nコの和をとり

$$= \boxed{\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n}} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} F\begin{pmatrix} f_{j_1} \\ f_{j_2} \\ \vdots \\ f_{j_n} \end{pmatrix}$$

- $j_k = j_l$ なる $1 \leq k < l \leq n$ の組があると $f_{j_k} = f_{j_l}$ より $F\begin{pmatrix} f_{j_1} \\ \vdots \\ f_{j_n} \end{pmatrix} = 0$
- $j_1 \cdots j_n$ は相異なる1〜nの整数のばあい

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$ とすると

$$F\begin{pmatrix} f_{j_1} \\ \vdots \\ f_{j_n} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} f_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ f_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \overset{①}{=} \operatorname{sgn}(\sigma) F\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

d) 2.

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} F\begin{pmatrix} f_{j_1} \\ \vdots \\ f_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right) F\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot F\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad /\!/$$

定理の証明

$\left({}^tA \text{の}(i,j)\text{成分} = A\text{の}(j,i)\text{成分} \right)$

① $\det({}^tA)$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) ({}^tA)_{1\sigma(1)} ({}^tA)_{2\sigma(2)} \cdots ({}^tA)_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \cdots A_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) A_{1\sigma^{-1}(1)} A_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots A_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$= \det A.$$

② 行列 X に対して

$F(X) = \det(AX)$ という関数を考える。

F は交代性と多重線型性をみたす

(定理) $F(X) = F(E_n)\det(X)$.

$\therefore \det(AX) = \det A \det X$

また $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

$= (\det B)(\det A) = \det(BA)$

④ $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ である

$(\sigma \in S_n \ \forall (2)$

ここで $\sigma(1) \neq 1$ なら $a_{1\sigma(1)} = 0$

よって $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix}$ の時のみ

和をとればよい

$$\det A = \sum_{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{11} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{11} \sum_{\sigma' = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & n \\ p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\sigma') a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} //$$

⑤ ④をくりかえしおこなう

⑥,⑦,⑧,⑨ （⑦はも示した）

$$F_i^c = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \det は c$$

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & i & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & 1 & & \\ & & \ddots & & & \\ & 1 & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \det\ -1$$

$$G_{ij}^c = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & c & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \det\ 1$$

とおく.

⑥の証明 Aのi行目をc倍することは

Aを左からF_i^cかけることと同じ

$$\det(F_i^c A) \overset{②}{=} \det(F_i^c)\det A$$

$$= c \det A \quad [illegible]$$

⑧,⑨も同じ

⑩ ①から1,2,3

③ ($\det A \neq 0 \iff A$ 正則を示す)

・$\det A \neq 0$ とする。

A の簡約化を B とすると E_{ij}, $F_i(c)$, $G_{ij}(c)$ の有限個の積からなる行列 R があって

$RA = B$ となる

$\det(R) \neq 0$ (②より)

よって②より $\det(RA) = (\det R)(\det A) \neq 0$

$\therefore \det B \neq 0$

B は簡約行列より $B = E_n$

(そうでないと第 n 行は $(0 \cdots 0)$ となってるから)

$\therefore RA = E_n$. R は正則より

$A = R^{-1}$、A も正則。

・A が正則ならば A^{-1} があって

$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ となる。

$$\det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1})$$

$$\det(E_n) = 1$$

$\therefore \quad \det A \neq 0$

$\boxed{\text{逆の証明}}$ (定理からわかるかんたんなこと)

$AB = E_n$ とする

$$\det(A)\det B = \det E_n = 1$$

$\therefore \quad \det A \neq 0$

よって③より Aは正則。

逆行列 A^{-1} をもち

$$A^{-1} = A^{-1}E_n = A^{-1}(AB)$$
$$= (A^{-1}A)B = B.$$

$\therefore \quad B = A^{-1}$

(行列式をつかわないこの証明はでない)