大阪大学 2022 年度春夏学期 全学共通教育科目

木曜 2 限 線形代数学 I (理 (生物・生命 (化・生)))

中間レポート

提出締め切り 2022 年 6 月 16 日 (木) 23 時 59 分 00 秒 (日本標準時刻)

担当教官: 岩井雅崇 (いわいまさたか)

● 注意事項

1. 第 1 問から第 6 問まで解くこと.
2. おまけ問題は全員が解く必要はない (詳しくは第 1 回目授業のスライドを参照せよ).
3. 用語に関しては授業または教科書 (三宅敏恒著 入門線形代数 (培風館)) に準じます.
4. 提出締め切りを遅れて提出した場合, 大幅に減点する可能性がある.
5. 名前・学籍番号をきちんと書くこと.
6. 解答に関して, 答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記してください. きちんと記していない場合は大幅に減点する場合がある.
7. 字は汚くても構いませんが, 読める字で濃く書いてください. あまりにも読めない場合は採点をしないかもしれません.
8. 採点を効率的に行うため, 順番通り解答するようお願いいたします.
9. 採点を効率的に行うため, レポートは pdf ファイル形式で提出し, ファイル名を「lin(学籍番号).pdf」とするようお願いいたします (lin は線形 (linear) の略です). 例えば学籍番号が「04D99999」の場合はファイル名は「lin04D99999.pdf」となります.

レポート提出前のチェックリスト

- □ 締め切りを守っているか?
- □ レポートに名前・学籍番号を書いたか?
- □ 答えを導出する過程をきちんと記したか?
- □ 計算ミスしていないか?
- □ 他者が読める字で書いたか?
- □ 順番通り解答したか?
- □ レポートは pdf ファイル形式で提出したか?
- □ ファイル名を「lin(学籍番号).pdf」としたか?

レポートの提出方法について

- 原則的に CLE からの提出しか認めません. レポートは余裕を持って提出してください.
- レポートは pdf ファイルで提出してください. また CLE からの提出の際, 提出ファイルを一つにまとめる必要があるとのことですので, 提出ファイルを一つにまとめてください.
- 採点を効率的に行うため, ファイル名を「lin(学籍番号).pdf」とするようお願いいたします. (lin は線形 (linear) の略です). 例えば学籍番号が「04D99999」の場合はファイル名は「lin04D99999.pdf」となります.

提出用 pdf ファイルの作成の仕方について

1 つ目は「手書きレポートを pdf にする方法」があります. この方法は時間はあまりかかりませんが, お金がかかる可能性があります. 手書きレポートを pdf にするには以下の方法があると思います.

- スキャナーを使うかコンビニに行ってスキャンする.
- スマートフォンやカメラで画像データにしてから pdf にする. 例えば Microsoft Word を使えば画像データを pdf にできます. また大阪大学の学生であれば Microsoft Word を無料でインストールすることができます.
- その他いろいろ検索して独自の方法を行う.

2 つ目は「TeX でレポートを作成する方法」があります. 時間はかなりかかります. 見た目はかなり綺麗ですがあまりお勧めしません.

他にもいろいろと方法はあると思います. 最終的に私が読めるように書いたレポートであれば大丈夫です.

CLE からの提出が不可能な場合

提出の期限までに (CLE のシステムトラブル等の理由で)CLE からの提出が不可能な場合のみメール提出を受け付けます. その場合には以下の項目を厳守してください.

- 大学のメールアドレスを使って送信すること (なりすまし提出防止のため).
- 件名を「レポート提出」とすること
- 講義名, 学籍番号, 氏名 (フルネーム) を書くこと.
- レポートのファイルを添付すること.
- CLE での提出ができなかった事情を説明すること. 提出理由が不十分である場合, 減点となる可能性があります.

メール提出の場合は masataka[at]math.sci.osaka-u.ac.jp にメールするようお願いいたします.

中間レポート問題.

第 1 問 (授業第 2-3 回の内容).

次の行列の計算を行え.

(1). $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$ (2). $3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} - 2\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\right\}$

第 2 問 (授業第 2-3 回の内容).

次の行列 A, B, C, D のうち, 積が定義される全ての組み合わせを求め, その積を計算せよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

第 3 問 (授業第 2-3 回の内容).

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1). A^2 と A^3 をそれぞれ求めよ.
(2). P^tP と ${}^tPP$ をそれぞれ求めよ.[1]
(3). ${}^tPAP$ を求めよ.
(4). n を 1 以上の整数とする. $({}^tPAP)^n$ を n を用いて表せ.
(5). n を 1 以上の整数とする. A^n を n を用いて表せ.

第 4 問に続く.

[1] P^tP とは P と ${}^tP$(P の転置行列) の積である.

第 4 問 (授業第 4-6 回の内容).

次の行列を簡約化し, その階数を求めよ.

(1). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ (2). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ (3). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

第 5 問 (授業第 4-6 回の内容).

次の連立 1 次方程式を解け.

(1). $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

(2). $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$

(3). $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$

第 6 問 (授業第 4-6 回の内容).

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\ 5x_1 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = a \end{cases}$$

の解が存在するような a の値を全て求めよ.

中間レポートおまけ問題に続く.

中間レポートおまけ問題 (授業第 4-6 回の内容).

全ての成分が 0 か 1 である n 次正方行列について次の操作を考える.

> (操作): (i,j) 成分を自由に一つ選び, (i,j) 成分とその上下左右の全ての成分に対して, 0 と 1 を入れ替える.

例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合, $(2,2)$ 成分を選んで上の操作を行うと次のように変化する:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

上の A に対し, $(1,2)$ 成分を選んで上の操作を行うと次のように変化する:[2]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上の A に対し, $(3,3)$ 成分を選んで上の操作を行うと次のように変化する:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

次の問いに答えよ.

(1). $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. B に上の操作を何回か行なって零行列にできることを示せ.

(2). B に上の操作を何回か行なって零行列にするために必要な最小の操作回数を求めよ.

(3). 与えられた n 次正方行列 C について, 上の操作を何回か行なって零行列にすることが可能か判定し, 可能ならば零行列にするために必要な最小の操作回数を求めるアルゴリズムを構築せよ. [3]

中間レポートおまけ問題を解答するに際し, 次の点に注意すること.

注意 1. この問題に限りプログラミングや計算機を用いて解答して良い.

[2] $(1,2)$ 成分に対して, その上の成分は存在しないため, この場合は (1,1), (1,2), (1,3), (2,2) の成分について 0 と 1 を入れ替えることになる.

[3] n は 10 程度を想定しています. $n=10$ でも処理時間が 2 秒以内に収まるアルゴリズムを構築してください.

注意 2. (3) の解答については「第 7 回授業の簡約化ができることの証明」のように記述しても良いし, 実際にプログラミングをして提出しても良い. プログラミングを用いて提出した場合はボーナスとして得点を何点か加点する.

注意 3. プログラミングを用いて提出する場合に際し, プログラミング言語に関しては自由だが, あまりにもマニアックな言語は控えてください.[4] ただし処理時間があまりにも長い場合は不正解とする. 処理時間の目安は 2 秒程度とする.

注意 4. この問題をプログラミングを用いて解答する場合に限り, その提出方法は皆さんにお任せいたします. 例えば github 等にアップロードしてそのリンクをレポートに貼っても良いし, メールや CLE のダイレクトメッセージで, プログラムのソースファイルを直接私に送るなどでも良いです. プログラムのソースファイルを (スクリーンショット等で) 画像にしてその画像をそのままレポートに貼っても良いです.

以上.

[4] Haskell は大丈夫です. 私は c, c++, Python ぐらいなら読めます.