第12回　余因子行列と余因子展開

逆行列のもとめかた

① はきだし法

$(A, E_n) \rightsquigarrow (E_n, B)$

基本変形　$(B = A^{-1})$

② 余因子行列を用いる。

こっちをおしえる

どっちが楽？

答え　①のほうが楽

（②は理論的につかう）

定義 n次正方行列

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ i行 \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

j列

i行 について.

$\tilde{A}_{ij}$ を i行とj列をとりのぞいた $n-1$次正方行列とする.

つまり

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のとき

$\tilde{A}_{11} = (a_{22})$ $\quad \tilde{A}_{12} = (a_{21})$

$\tilde{A}_{21} = (a_{12})$ $\quad \tilde{A}_{22} = (a_{11})$

$\boxed{\text{例12}}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ のとき

$$\tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{定義}}$ n次正方行列Aについて。
$\tilde{A}$を次で定める。

$\tilde{A}$の(i,j)成分は$(-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ji})$

$\tilde{A}$をAの余因子行列という

$\boxed{\text{例11}}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の余因子行列 $\tilde{A}$はどうなる

$$\tilde{A}_{11} = (a_{22}) \quad \tilde{A}_{12} = (a_{21})$$
$$\tilde{A}_{21} = (a_{12}) \quad \tilde{A}_{22} = (a_{11})$$ と表す。

$\tilde{A}$ の(1,1)成分 $(-1)^{1+1}\det(\hat{A}_{11}) = a_{22}$

$\tilde{A}$ の(1,2)成分 $(-1)^{1+2}\det(\hat{A}_{21}) = -a_{12}$

$\tilde{A}$ の(2,1)成分 $(-1)^{2+1}\det(\hat{A}_{12}) = -a_{21}$

$\tilde{A}$ の(2,2)成分 $(-1)^{2+2}\det(\hat{A}_{22}) = a_{11}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$\left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{なら} \ \underline{\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}} \right)$

$\boxed{\text{例12}}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の時

～ $\hat{A}_{ij}$ がきまる ($\det \hat{A}_{ij}$ もわかる)

$\tilde{A}$ の $(1,1)$ 成分 $(-1)^{1+1}|\tilde{A}_{11}|$

$\tilde{A}$ の $(1,2)$ 成分 $(-1)^{1+2}|\tilde{A}_{21}|$

$\tilde{A}$ の $(1,3)$ 成分 $(-1)^{1+3}|\tilde{A}_{31}|$

$\tilde{A}$ の $(2,1)$ 成分 $(-1)^{2+1}|\tilde{A}_{12}|$

$\tilde{A}$ の $(2,2)$ 成分 $(-1)^{2+2}|\tilde{A}_{22}|$

$\tilde{A}$ の $(2,3)$ 成分 $(-1)^{2+3}|\tilde{A}_{32}|$

$\tilde{A}$ の $(3,1)$ 成分 $(-1)^{3+1}|\tilde{A}_{13}|$

$\tilde{A}$ の $(3,2)$ 成分 $(-1)^{3+2}|\tilde{A}_{23}|$

$\tilde{A}$ の $(3,3)$ 成分 $(-1)^{3+3}|\tilde{A}_{33}|$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} |\tilde{A}_{11}| & -|\tilde{A}_{21}| & |\tilde{A}_{31}| \\ -|\tilde{A}_{12}| & |\tilde{A}_{22}| & -|\tilde{A}_{32}| \\ |\tilde{A}_{13}| & -|\tilde{A}_{23}| & |\tilde{A}_{33}| \end{pmatrix}$$

定理

① $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n$ なる i, j について

$$\det A$$
$$= (-1)^{1+j} a_{1j} |\tilde{A}_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{2j} |\tilde{A}_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} |\tilde{A}_{nj}|$$
$$= (-1)^{i+1} a_{i1} |\tilde{A}_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |\tilde{A}_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} |\tilde{A}_{in}|$$

これを余因子展開という

② $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = (\det A) E_n$

とくに $\det A \neq 0$ なら

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$$

$\boxed{例}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det A = ad - bc$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ より $\underline{A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

$\boxed{例11}$ $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ について

$(\det A)$

$$
\begin{aligned}
|A| \underset{①}{=} \ & (-1)^{1+1} a_{11} |\tilde{A}_{11}| \\
& + (-1)^{2+1} a_{21} |\tilde{A}_{21}| \\
& + (-1)^{3+1} a_{31} |\tilde{A}_{31}| \\
& + (-1)^{4+1} a_{41} |\tilde{A}_{41}| \\
= \ & 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\
& - 5 \begin{vmatrix} 4 & 13 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\
& + 0 \begin{vmatrix} 4 & 13 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\
& - 0 \begin{vmatrix} 4 & 13 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 7 & 18 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 3\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot 7\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (6 - 35) \times (9 \times 1 - (-2) \times 4)$$

$$= -29 \times 17 = -493.$$

$\boxed{\text{証明}}$ ①

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1j} & & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1j} & & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 & & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & a_{2j} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ a_{n1} & & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 & & a_{1n} \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ここで

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 & & a_{1n} \\ \vdots & & a_{2j} & & \vdots \\ a_{n1} & & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2−1回交換して
一番上にもってくる

$$= (-1)^{2-1} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

j−1回交換して
一番左にもってくる

$$= (-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} \boxed{a_{ij}} & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\tilde{A}_{ij}$

$$= (-1)^{i+j} a_{ij} |\tilde{A}_{ij}|$$

よって $|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} |\tilde{A}_{1j}|$

$\quad + (-1)^{2+j} a_{2j} |\tilde{A}_{2j}|$

$\quad + \cdots \quad + (-1)^{n+j} a_{nj} |\tilde{A}_{nj}|$

(列も同じ)

② $\tilde{A}$ の (i,j) 成分を $\tilde{a}_{ij}$ とおくと

$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |\tilde{A}_{ji}|$ となる

(定義より)

$A\tilde{A}$ の (i,j) 成分を c_{ij} とすると

積の定義から

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \widetilde{a_{kj}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{k+j} |A_{jk}|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} |\widetilde{A_{jk}}|$$

$i=j$ ならば ① から $c_{ii} = \det A$ である

$i \neq j$ なら $c_{ij} = 0$ を示す。

$$B = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(Bのj行目以外はAと同じで Bのj行目はAのi行目となる行列)

$\det B = 0$ (交代性)

①と同じ(i)+i+k

$$\det B = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} |\tilde{A}_{jk}| = 0$$

$\therefore\ c_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$ となる

よって $A\tilde{A} = (\det A) E_n$ となる

$\tilde{A} A = (\det A) E_n$ も同じ

故に

$\det A \neq 0$ ならば

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$$

//

演習問題

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$ を求めよ

解 いろいろやりかたはあるが余因子展開する。

$$|与式| = 3\begin{vmatrix} 6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 6 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} - 2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} \boxed{-6 \quad 0 \quad 0} \\ 5 \quad 2 \quad 3 \\ 2 \quad 1 \quad 7 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot (-6) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -48 \left(2 \times 7 - 3 \times 1 \right)$$

$$= -48 \times 11 = -528 .$$