第 10 回. 行列式 2 -行列式の計算方法- (三宅先生の本, 3.2, 3.3 の内容)

岩井雅崇 2022/06/23

1 行列式

定義 1. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ について

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$ を$\underline{A\text{ の行列式}}$と言う.

A の行列式は $\det(A)$, $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ともかく.

例 2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とすると $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ である.

(証). $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ であるので, A の行列式は

$$\det(A) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

例 3. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式を求める.

$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ であるので, A の行列式は

$$\begin{aligned} \det(A) &= \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_{12}a_{21}a_{33} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32} \\ &\quad + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} a_{13}a_{22}a_{31} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{23}a_{31} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} a_{13}a_{21}a_{32} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \end{aligned}$$

以上より $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$ である.

補足 4. 2 次正方行列や 3 次正方行列の行列式は視覚的に綺麗に表わすことができる (サラスの公式と呼ばれる).

2　行列式の基本性質

定理 5. A, B を n 次正方行列とする.

1. $\det({}^tA) = \det(A)$.
2. $\det(AB) = (\det(A))(\det(B)) = \det(BA)$.
3. $\det(A) \neq 0$ であることと A が正則であることは同値.
4. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$
5. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$
6. 1 つの行を c 倍すると行列式は c 倍される: $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$
7. $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$
8. 2 つの行を入れ替えたら, 行列式は -1 倍される:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

9. 第 i 行の c 倍を第 j 行に加えても行列式は変わらない:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ca_{i1} & \cdots & a_{jn}+ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

10. 列ベクトルに関して上の 6 から 9 と同様のことが成り立つ.

系 **6.** A, B を n 次正方行列とする. $AB = E_n$ ならば, A は正則で B は A の逆行列.

3 行列式の計算方法

定理 5 を用いると行列式を比較的簡単に計算できる.

例 **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式を定理 5 を用いて計算すると次の通りになる.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 5.(9)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 5.(4)}}{=} 1 \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 5.(6)}}{=} 11 \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{例 2}}{=} 11 \{1 \times 1 - 15 \times 1\} = -154.$$

例 **8.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の行列式を定理 5 を用いて計算すると次の通りになる.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 5.(8)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 2 & -4 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 5.(9)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -47 \\ 0 & 0 & -1 & 19 \\ 0 & -1 & 4 & 21 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{定理 5.(4)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ -1 & 4 & 21 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 5.(9)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ 0 & 6 & -26 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 5.(4)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 19 \\ 6 & -26 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{例 2}}{=} (-1) \{(-1) \times (-26) - 6 \times 19\} = 88.$$

4　演習問題

演習問題の解答は授業動画にあります.

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -6 & 15 \\ -2 & 5 & 14 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 15 & 10 & 10 & -5 \end{vmatrix}$ を計算せよ.