大阪大学 2022 年度春夏学期 全学共通教育科目

木曜 2 限 線形代数学 I (理 (生物・生命 (化・生)))

期末レポート

提出締め切り 2022 年 8 月 4 日 (木) 23 時 59 分 00 秒 (日本標準時刻)

担当教官: 岩井雅崇 (いわいまさたか)

● 注意事項

1. 第 1 問から第 4 問まで解くこと.
2. おまけ問題は全員が解く必要はない (詳しくは 3 ページ目を参照せよ).
3. 用語に関しては授業または教科書 (三宅敏恒著 入門線形代数 (培風館)) に準じます.
4. <u>提出締め切りを遅れて提出した場合, 大幅に減点する可能性がある.</u>
5. <u>名前・学籍番号をきちんと書くこと.</u>
6. <u>解答に関して, 答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記してください.</u> きちんと記していない場合は大幅に減点する場合がある.
7. 字は汚くても構いませんが, <u>読める字で濃く書いてください.</u> あまりにも読めない場合は採点をしないかもしれません.
8. 採点を効率的に行うため, <u>順番通り解答するようお願いいたします.</u>
9. 採点を効率的に行うため, <u>レポートは pdf ファイル形式で提出し,</u> ファイル名を「det(学籍番号).pdf」とするようお願いいたします (det は行列式 (determinant) の略です). 例えば学籍番号が「04D99999」の場合はファイル名は「det04D99999.pdf」となります.

レポート提出前のチェックリスト

- □ 締め切りを守っているか?
- □ レポートに名前・学籍番号を書いたか?
- □ 答えを導出する過程をきちんと記したか?
- □ 計算ミスしていないか?
- □ 他者が読める字で書いたか?
- □ 順番通り解答したか?
- □ レポートは pdf ファイル形式で提出したか?
- □ ファイル名を「det(学籍番号).pdf」としたか?

レポートの提出方法について

- 原則的に CLE からの提出しか認めません. レポートは余裕を持って提出してください.
- レポートは pdf ファイルで提出してください. また CLE からの提出の際, 提出ファイルを一つにまとめる必要があるとのことですので, 提出ファイルを一つにまとめてください.
- 採点を効率的に行うため, ファイル名を「det(学籍番号).pdf」とするようお願いいたします. (det は行列式 (determinant) の略です). 例えば学籍番号が「04D99999」の場合はファイル名は「det04D99999.pdf」となります.

提出用 pdf ファイルの作成の仕方について

1 つ目は「手書きレポートを pdf にする方法」があります. この方法は時間はあまりかかりませんが, お金がかかる可能性があります. 手書きレポートを pdf にするには以下の方法があると思います.

- スキャナーを使うかコンビニに行ってスキャンする.
- スマートフォンやカメラで画像データにしてから pdf にする. 例えば Microsoft Word を使えば画像データを pdf にできます. また大阪大学の学生であれば Microsoft Word を無料でインストールすることができます.
- その他いろいろ検索して独自の方法を行う.

2 つ目は「TeX でレポートを作成する方法」があります. 時間はかなりかかります. 見た目はかなり綺麗ですがあまりお勧めしません.

他にもいろいろと方法はあると思います. 最終的に私が読めるように書いたレポートであれば大丈夫です.

CLE からの提出が不可能な場合

提出の期限までに (CLE のシステムトラブル等の理由で)CLE からの提出が不可能な場合のみメール提出を受け付けます. その場合には以下の項目を厳守してください.

- 大学のメールアドレスを使って送信すること (なりすまし提出防止のため).
- 件名を「レポート提出」とすること
- 講義名, 学籍番号, 氏名 (フルネーム) を書くこと.
- レポートのファイルを添付すること.
- CLE での提出ができなかった事情を説明すること. 提出理由が不十分である場合, 減点となる可能性があります.

メール提出の場合は masataka[at]math.sci.osaka-u.ac.jp にメールするようお願いいたします.

成績の付け方について

中間レポートと期末レポートによって成績をつけます. 具体的には以下の通りになります.

- 中間レポートまたは期末レポートどちらか一方が未提出の場合.

問答無用でこの授業の単位は不可になります. なおこの期末レポートが掲示されている時点で中間レポートを出していない人は, 問答無用で不可です.

- 中間レポートと期末レポートを両方出している場合.

よほど成績が悪い場合を除いて単位は可以上が確定します. よほど成績が悪い方に対し救済措置を行い, 別途メールでレポートの再提出などをさせる場合があります.

- 良い成績が欲しい場合.

今回レポートで成績をつけるため, 成績に関してやや不公平が起こる可能性があります. なぜならレポートだとほとんどの人が正答できてしまうためです. また平均点の調整等で全部の問題を解いていても, 全員の成績がよいために単位が良になる可能性があります. これは大阪大学の制度によるところが大きいです.

良い成績が欲しい場合は次のことに気をつけると良いと思います.

- 第 1 問から第 4 問まで全て解く (第 4 問を難しくすることで成績に差が出るようにしました).
- 計算ミスをしていないかチェックする.
- おまけ問題を解く (期末のおまけ問題はちょっと難易度を下げました).

逆に単位を欲しいだけの人はそこまで頑張る必要はありません. とりあえず第 1 問から第 3 問までの計算問題は全て解いて, 第 4 問の証明問題は余力で解けば良いでしょう.

期末レポート問題.

第 1 問 (授業第 7, 9-12 回の内容).

以下の (1)-(4) の各行列は正則行列かどうか判定せよ. また正則行列ならばその逆行列も求めよ.

(1). $\begin{pmatrix} 1 & 2022 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ (4). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

第 2 問 (授業第 7, 9-12 回の内容).

x を実数とし, 4×4 行列 A を次のように定める.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & x & 3 \\ x & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

行列 A が逆行列を持たないような x の値を全て求めよ.

第 3 問 (授業全体の内容).

y を実数とし, 3×3 行列 B を次のように定める.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & y & 3 \\ y & 3 & 13 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

次の問いに答えよ.

(1). B の階数 $\mathrm{rank}(B)$ は 2 以上であることを示せ.
(2). B が正則行列になるための, y が満たすべき必要十分条件を求めよ.

第 4 問に続く.

第 4 問 (授業全体の内容).

以下の (1)-(8) の各主張について, 正しい場合には証明を与え, 誤っている場合には反例をあげよ.[1] ただし授業・教科書で証明を与えた定理に関しては自由に用いて良い. またこの問題において, m, n を正の整数, E_m を m 次の単位行列, $O_{n,m}$ を $n \times m$ 型の零行列とする.

(1). $m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B について, $AB = E_m$ ならば, $BA = E_n$ である.

(2). n 次正方行列 A と $n \times m$ 行列 B について, A が正則行列かつ $AB = O_{n,m}$ ならば, $B = O_{n,m}$ である.

(3). n 次正方行列 A, B について, $AB = O_{n,n}$ ならば, $B = O_{n,n}$ である.

(4). n 次正方行列 A, B について, $AB = E_n$ ならば, $AB = BA$ である.

(5). n 次正方行列 A, B について, AB が正則行列ならば, A も B も正則行列である.

(6). n 次正方行列 A, B, C について, $\det(ABC) = \det(BAC)$ である.

(7). 全ての成分が整数である n 次正則行列 A について, $\det(A) = \pm 1$ ならば, 逆行列 A^{-1} の全ての成分は整数である.

(8). 全ての成分が整数である n 次正則行列 A について, 逆行列 A^{-1} の全ての成分が整数であるならば, $\det(A) = \pm 1$ である.

期末レポートおまけ問題 (授業第 14 回の内容).

m を正の整数とし, $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_m), \boldsymbol{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ について $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を次のように定める.

$$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_0 y_0 - (x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m)$$

次の問いに答えよ.

(1). $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ ならば, $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \leqq q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$ であることを示せ.

(2). $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ かつ $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = 0$ ならば, $\boldsymbol{y} = 0$ となることを示せ.

(3). $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = 0$ ならば, ある実数 λ, μ があって, $\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y} = 0$ とできることを示せ.

(4). $\boldsymbol{x} \neq 0$ かつ $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ ならば, $q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \leqq 0$ であることを示せ.

以上.

[1] 反例とは「ある主張について, それが成立しない例」のことである. 例えば「任意の実数 x について, $x \geqq 0$ ならば, $x + 1 = 2$ である」という主張は誤りであり, その反例として $x = 5$ が挙げられる. なぜなら $x = 5 \geqq 0$ ではあるが, $x + 1 = 5 + 1 = 6 \neq 2$ であるためである. また $x = 1$ はこの主張の反例にはならない.