第6回 連立1次方程式3 ー 一般的な解法

やること

$Ax=b$

階数
簡約化を用いて

連立方程式をとく

$$[A \vdots b] \underset{\text{基本変形}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$ =かんたん

連立方程式の解があるかもわかる

連立方程式 $Ax=b$

⟷ 拡大係数行列 $[A \vdots b]$ がきまる

$[A \vdots b]$ の簡約化

A

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & * & 0 & * & 0 & \cdots & & * \\
 & & 1 & * & 0 & & & * \\
 & & & & 1 & \cdots & & * \\
0 & \cdots & & & & & 0 & 0 \\
 & & & \text{零ベクトル} & & & &
\end{array}\right)
$$

B

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & * & & & & & * & * \\
 & & 1 & & * & & & \\
 & & & & 1 & & * & * \\
0 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 & 1 \\
 & & & \text{零ベクトル} & & & &
\end{array}\right)
$$

B になったとき $Ax=b$ に解はない

($\boxed{}$ は $0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=1$ を表わしているから)

Ⓐになったときは $Ax=b$ に解はある
[ただし変数をふくむこともある]
(例でいいます)

[定理] $Ax=b$ が解をもつ
$\Longleftrightarrow \operatorname{rank}([A \vdots b]) = \operatorname{rank} A$
(← Ⓑがおこりえない)

$\boxed{例}$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases}$$
をとけ.

(解). 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

簡約化
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Ⓐの形より
解がある

$\boxed{解は?}$ この行列が表わす式をかきだすと…
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

これは $x_1 = 2-2x_2$ と同じ

答 $\begin{cases} x_1 = 2-2c_2 \\ x_2 = c_2 \end{cases}$ (c_2 は任意定数)

もしくは $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

とかく (tは実数をうごく)

例12 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$ をとけ。

(解) 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

簡約化

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(B) の形!!

式をかきくだすと

- $x_1 + 2x_2 = 0$
- $\boxed{0x_1 + 0x_2 = 1}$

解なし

$\boxed{例13}$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 = -2 \\ -x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_5 = 1 \end{cases}$$

をとけ

解). 拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

これを簡約化する

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bの形より解なし

$\boxed{例14}$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$

を解け。

(解) 拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

これを簡約化する。

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列があらわす式をかきくだすと

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 \quad + 3x_4 \quad &= 2 \\ x_3 - x_4 \quad &= -1 \\ x_5 &= 1 \end{aligned}$$

[illegible]

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2c_2 - 3c_4 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = -1 + c_4 \\ x_4 = c_4 \\ x_5 = 1 \end{cases} \quad (c_2 \, c_4 \ \text{任意定数})$$

もしくは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2s - 3t \\ s \\ -1 + t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

とかいても良い。

または

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$s, t \in \mathbb{R}$

〜しかいてもいい

(書き方はいろいろあるが
伝わるかきかたであればよい)

演習問題

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 + x_5 = -6 \end{cases}$$

を解け.

(解) 拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

これを簡約化する.

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \times\frac{1}{6}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$x_1 + 2x_3 - x_4 = 1$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = -2$$

$$x_5 = 1$$

(答) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2c_3 + c_4 \\ -2 + c_3 - c_4 \\ c_3 \\ c_4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c_3, c_4 任意定数

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$s, t \in \mathbb{R}$ でもいい

$s, t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{補足}}$ 実際に

プログラミングでとくときも

こうやってとく

(はきだし法, ガウスの消去法)