第 4 回. 連立 1 次方程式 1-基本変形- (三宅先生の本, 1.4, 2.1 の内容)

岩井雅崇 2022/05/12

1 連立 1 次方程式

定義 1 (係数行列, 拡大係数行列)**.** m 個の式からなる n 変数連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \text{に対して}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{とおく.}$$

行列 A を連立 1 次方程式の<u>係数行列</u>といい,

$$[A : \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{を連立 1 次方程式の拡大係数行列という.}$$

これにより上の連立 1 次方程式は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とかける.

例 2. 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 7 \\ x & - & 4y & = & 9 \end{cases}$ について, 係数行列は $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ で, 拡大係数行列は $[A : \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ である.

例 3. 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 7 \\ x_1 & & & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 9x_3 & & & = & 0 \end{cases}$ について,

係数行列は $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ で, 拡大係数行列は $[A : \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

2 行列の基本変形

定義 4 (行列の基本変形)**.** 行列の次の 3 つの変形を (行) 基本変形という.

1. 1 つの行を何倍か ($\neq 0$ 倍) する.
2. 2 つの行を入れ替える.
3. 1 つの行に他の行の何倍かを加える.

拡大係数行列の (行) 基本変形を行うことで連立 1 次方程式が解ける (連立方程式の解き方に関しては, 第 6 回資料を見てください).

例 5. 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$ を考える. これを拡大係数行列の基本変形と式変形で解いてみて, その対応を表すと下の通りとなる.[1]

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{①+③\times(-2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow{①+③\times(-2)} \begin{cases} y + z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{②+③\times 1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow{②+③\times 1} \begin{cases} y + z = 1 \\ 3y + z = -1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{③と①を入れ替え} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow{③と①を入れ替え} \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 3y + z = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{②と③を入れ替え} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow{②と③を入れ替え} \begin{cases} x + y - z = -2 \\ y + z = 1 \\ 3y + z = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[③+②\times(-3)]{①+②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow[③+②\times(-3)]{①+②\times(-1)} \begin{cases} x - 2z = -3 \\ y + z = 1 \\ -2z = -4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{③\times(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow{③\times(-\frac{1}{2})} \begin{cases} x - 2z = -3 \\ y + z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

[1]途中で現れる「$① + ③ \times (-2)$」は「行列の 1 行目に 3 行目の (-2) 倍を加える」あるいは「1 行目の式に 3 行目の式の (-2) 倍を加える」を意味している (一応教科書に従った記法である).

$$\xrightarrow[\text{②}+\text{③}\times(-1)]{\text{①}+\text{③}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{対応}} \xrightarrow[\text{②}+\text{③}\times(-1)]{\text{①}+\text{③}\times 2} \begin{cases} x & & & = & 1 \\ & y & & = & -1 \\ & & z & = & 2 \end{cases}$$

以上より解は $x = 1, y = -1, z = 2$ である.

3　演習問題

演習問題の解答は授業動画にあります.

1. 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & -2 \end{cases}$ を解け.