第5回 連立1次方程式2 ー行列の簡約化

あらすじ(前回)

定義

(行)基本変形とは次の3つの変形のことをいう

① 1つの行を何倍かする
(ただし0倍はダメ)

② 2つの行をいれかえる.

③ 1つの行に他の何倍かをかえる.

やること

拡大係数行列を基本変形をもちいて

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$ みたいな形にする

(次回きちんと定義します)

連立方程式をときたい

きちんと定義する.

$\boxed{\text{定義}}$ 行列Aが次の①〜④をみたすとき
簡約な行列という

① 行ベクトルのうち零ベクトル(全ての成分が0な行)があればそれは零ベクトルでないものより下にある
(零ベクトルは下らへんにある)

② 零ベクトルでない行ベクトルの主成分は1
((0 0 0 1 0 ‥0)ってかんじ)

③ 第i行の主成分をa_{ij_i}とするとき
$j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ となる

④ 各行の主成分を含む他の成分はすべて0である。
つまり第i行の主成分がa_{ij_i}のとき
第j_i列のa_{ij_i}以外は0である

(うーんわかりづらいので
例をだす)

例11

②ok ③ok

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③ ①ok 簡約

②ok ④ok

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

簡約

③ok ①ok

④ok ②ok

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③ok ①ok ④ok

簡約

簡約な行列とは

0ベクトルが下らへんにある
階段状に1がならんだ行列

例12 簡約でない行列たち

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ①がダメ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ ②がダメ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ③がダメ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ④がダメ

定義 行列Aに(行)基本変形

① 1つの行を何倍かする
(ただし0倍はダメ)

② 2つの行をいれかえる.

③ 1つの行に他の行の何倍かをたす.

をくりかえして簡約な行列Bをえることを
Aを簡約化するといい, BをAの簡約化という

定理 任意の行列は(行)基本変形をくりかえすことで簡約化でき
その簡約化は一意にさだまる

(証明は7回目におこなう)

定義 Aを行列としBをその簡約化とする

$\mathrm{rank}(A) = \left(\begin{array}{c} B\text{の零ベクトルでない} \\ \text{行のこすう} \end{array} \right)$ とする

$\mathrm{rank}(A)$をAの階数(ランク)とよぶ

例

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(簡約)

(2コ)

$$\mathrm{rank}(A) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3コ

$$\mathrm{rank}(A) = 3$$

性質　$\mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$

($A = m \times n$ 行列とし) (mとnの小さい方)

why? 簡約行列の主成分はすべてことなる列にあるから

Q. 簡約化ってどうするの??

A. 前の手順の ように する

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\times(-1)$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1行目×(-1)を2行目にたす

$\times(-1)$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

2行目×(-1)

$\times(-2)$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

2行目×(-2)を1行目にたす

階段

例112 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (-2) を簡約化する

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; (-1)$$

1行目×(−2)を2行目に足す

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}$$

2行目×(−1)を3行目に足す

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \; 3 \; (-2)$$

3行目×$\frac{1}{4}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3行目×(−2)を1行目に足す
3行目×3を2行目に足す

階数は3

例1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

をかんやくかする

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{0 \;\; 2 \;\; 4 \;\; -6 \;\; -4 \;\; 2} \\ 0 \;\; 3 \;\; 6 \;\; -9 \;\; -4 \;\; 7 \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}$$

3行目と1行目いれかえ

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} (-3)$$

1行目$\times\frac{1}{2}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1行目×(−3)を2行目にたす

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; -3 \;\; -2 \;\; 1 \\ \boxed{0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 2} \\ \boxed{0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 4} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times\frac{1}{2} \\ \times\frac{1}{2} \end{matrix}$$

2行目と3行目いれかえ

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} (\times 3)$$

2行目×$\frac{1}{2}$
3行目×$\frac{1}{2}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2行目×(3)を1行目に足す

$-\frac{5}{2}$

$-\frac{3}{2}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3行目×$(-\frac{5}{2})$を1行目に足す
3行目×$(-\frac{3}{2})$を2行目に足す

階数 3

演習問題

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を簡約化し その階数を もとめよ。

$\boxed{解}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \times 1 \quad \times(-2)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad (-1)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

階数 4

おわび

本当は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を

だしたかったがまちがいました

(Ex. この行列を簡約化して階数をもとめよ)

(A. $\boxed{3}$)