第 12 回. 余因子行列と余因子展開 (三宅先生の本, 3.4 の内容)

岩井雅崇 2022/07/07

1　余因子行列

定義 1. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の i 行と j 列を取り除いた $n-1$ 次正方行列を $\tilde{A}_{ij}$ とかく (この授業だけの記法). つまり

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{とする.}$$

例 2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のとき, $\tilde{A}_{11} = (a_{22})$, $\tilde{A}_{12} = (a_{21})$, $\tilde{A}_{21} = (a_{12})$, $\tilde{A}_{22} = (a_{11})$.

例 3. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ のとき, $\tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\tilde{A}_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

定義 4. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ について, $\tilde{A} = (b_{ij})$ を $\underline{b_{ij} = (-1)^{i+j}\det\left(\tilde{A}_{ji}\right)}$ で定める. $\underline{\tilde{A} \text{ を } A \text{ の余因子行列}}$という.

例 5. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のときの余因子行列 $\tilde{A}$ を求める. $\tilde{A}_{11} = (a_{22})$, $\tilde{A}_{12} = (a_{21})$, $\tilde{A}_{21} = (a_{12})$, $\tilde{A}_{22} = (a_{11})$ より次が成り立つ.

- $\tilde{A}$ の $(1,1)$ 成分は $(-1)^{1+1}\det\left(\tilde{A}_{11}\right) = a_{22}$.
- $\tilde{A}$ の $(1,2)$ 成分は $(-1)^{1+2}\det\left(\tilde{A}_{21}\right) = -a_{12}$.
- $\tilde{A}$ の $(2,1)$ 成分は $(-1)^{2+1}\det\left(\tilde{A}_{12}\right) = -a_{21}$.
- $\tilde{A}$ の $(2,2)$ 成分は $(-1)^{2+2}\det\left(\tilde{A}_{22}\right) = a_{11}$.

以上より余因子行列 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ となる.

定理 6. A を n 次正方行列とする.

1. 任意の $1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq n$ なる i, j について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det\left(\tilde{A}_{1j}\right) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det\left(\tilde{A}_{nj}\right) \\ &= (-1)^{i+1} a_{i1} \det\left(\tilde{A}_{i1}\right) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det\left(\tilde{A}_{in}\right).\end{aligned}$$

これを<u>余因子展開</u>という.

2. $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)E_n$. 特に $\det(A) \neq 0$ ならば $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$.

例 7. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(A)$ を余因子展開で求める.

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+1} a_{11} \det\left(\tilde{A}_{11}\right) + (-1)^{2+1} a_{21} \det\left(\tilde{A}_{21}\right) + (-1)^{3+1} a_{31} \det\left(\tilde{A}_{31}\right) + (-1)^{4+1} a_{41} \det\left(\tilde{A}_{41}\right) \\ &= 2\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 3\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \times 7\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (2 \times 3 - 5 \times 7) \times (9 \times 1 - 4 \times (-2)) = -493.\end{aligned}$$

例 8. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, $\det A = ad - bc \neq 0$ ならば A は正則であり, 例 5 から

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2 演習問題

演習問題の解答は授業動画にあります.

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$ を計算せよ.