

第4回 連立1次方程式I - 基本変形

二つ

3回か $1x+2y+z=7$

連立1次方程式を $<!!$

$$2x+3y=5$$

$$x+4y=7 \quad \text{と} 1x+3$$

$$2x+3y+4z+5w=6$$

$$x+3y+10z+7w=14$$

$$x-2y-10z-8w=100$$

\hookrightarrow とらえかた $2x < ?$

\hookrightarrow この3回の計算で
- $1x+3y$ ふうになる!!

は \neq $=$ (注意)

定義

(n 数 m)

* 連立 1 次方程式

$$(\star) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(a_{ij} は数, x_1, x_n 未知数)

~~1 = 2~~ (2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ という行列}$$

連立 1 次方程式 (★) の係数行列は

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{とよく}$$

(\uparrow 未知数の並び)

連立 1 次方程式 (★) を $Ax = b$ と表す

$Ax = b$ といふ行列の方程式
 $x < \infty$ といふ同値がある。

$[A : b]$
 $= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

(★) の係数行列 (い)

$\boxed{\text{例}}$ $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 4y = 9 \end{cases} \quad 1 = 17$

係数行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

係数行列 $[A : b] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ といふ
 $Ax = b$ といふ方程式

$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ といふ

例12

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_1 \quad \quad - 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

係數行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

$$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

增廣係數行列

$$[A:b] = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⚡

じやあ連立1次方程式はどやどや?

かんたんな例でやろ.

例
$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$$

代入しないぞ
かろ

式の変更

=

行列の変更

式

拡大係数行列

$$\begin{cases} x+2y=5 & \text{---(1)} \\ 2x+3y=8 & \text{---(2)} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 8 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times(-2) \\ \times \dots \end{array}$$

1行目 $\times(-2)$ を 2行目に足す

① $\times(-2)$ を ② に足す

$$\begin{cases} x+2y=5 & \text{---(1)} \\ 0x+(-1)y=-2 & \text{---(2)} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times 2 \end{array}$$

2行目 $\times 2$ を 1行目に足す

② $\times 2$ を ① に足す

$$\begin{cases} x & = 1 & \text{---(1)} \\ -y & = -2 & \text{---(2)} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times(-1) \end{array}$$

2行目 $\times(-1)$ する

② $\times(-1)$ する.

$$\begin{cases} x & = 1 \\ y & = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

例12

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 4y = 9 \end{cases}$$

$$x - 4y = 9$$

式の変換

一行を別の式に変換

式

拡大係数行列

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 & - (1) \\ x - 4y = 9 & - (2) \end{cases}$$

(2) $\times (-2)$ を (1) に加

$$\begin{cases} 0x + 11y = -11 & - (1) \\ x - 4y = 9 & - (2) \end{cases}$$

(1) $| = \frac{1}{11}$ を加

$$\begin{cases} y = -1 & - (1) \\ x - 4y = 9 & - (2) \end{cases}$$

(1) $\times 4$ を (2) に加

$$\begin{cases} y = -1 & - (1) \\ x = 5 & - (2) \end{cases}$$

(1) と (2) を組み合わせ

$$\begin{cases} x = 5 & - (1) \\ y = -1 & - (2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

2 行目を (1) の (-2) 倍を (1) 行に加

$$\begin{pmatrix} 0 & 11 & -11 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

1 行目に $\frac{1}{11}$ を加 (1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

1 行目の 4 倍を 2 行目に加 (2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1 行目と 2 行目を交換 (3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

この例からなにがわかる?

→ 拡大係数行列をもちいて
"アルゴリズム"的に
連立方程式を解ける

定義

(行) 基本変形, とは次の3つの変形の
ことをいう

- ① 1つの行を何倍かする
(ただし 0倍はダメ)
- ② 2つの行をいれかえる
- ③ 1つの行に他の何倍かをかえる

やること

拡大係数行列を 基本変形 をもって

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$ みたいな形にする

(次回きちんと定義します)

$$x_3 = 0$$

自由変数

連立方程式 \rightarrow 拡大係数行列

基本変形

自由変数

$$x = *$$

$$y = *$$

$$z = *$$

$$x_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{array} \right)$$

自由変数

例

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

式

係数行列

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \text{ ①} \\ -x + 2y + 2z = 1 \text{ ②} \\ x + y - z = -2 \text{ ③} \end{cases}$$

③ $\times (-2)$ と ① に ③ を加える。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \\ \downarrow \\ \swarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ \end{matrix}$$

3行目 $\times (-2)$ と 1行目 ③ に ③ を加える

$$\begin{cases} y + z = 1 \text{ ①} \\ -x + 2y + 2z = 1 \text{ ②} \\ x + y - z = -2 \text{ ③} \end{cases}$$

③ $\times 1$ と ② に ③ を加える

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \\ \downarrow \\ \swarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \times \end{matrix}$$

3行目 $\times 1$ と 2行目 ③ に ③ を加える

$$\begin{cases} y + z = 1 \text{ ①} \\ 3y + z = -1 \text{ ②} \\ x + y - z = -2 \text{ ③} \end{cases}$$

① と ② を $\times 2$ と ③ に ② を加える。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \\ \downarrow \\ \swarrow \end{matrix} \begin{matrix} \times \\ \\ \end{matrix}$$

1行目 ② と 3行目 ② を加える

$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \text{ ①} \\ 3y + z = -1 \text{ ②} \\ y + z = 1 \text{ ③} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \\ \downarrow \\ \swarrow \end{matrix} \begin{matrix} \times \\ \times \\ \end{matrix}$$

② x ③ z を消す

$$\begin{cases} x + y - z = -2 & \text{①} \\ y + z = 1 & \text{②} \\ 3y + z = -1 & \text{③} \end{cases}$$

② $\times (-1)$ を ① に足す

② $\times (-3)$ を ③ に足す

$$\begin{cases} x & -2z = -3 & \text{①} \\ y + z = 1 & \text{②} \\ & -2z = -4 & \text{③} \end{cases}$$

③ $\times (-\frac{1}{2})$ する

$$\begin{cases} x & -2z = -3 & \text{①} \\ y + z = 1 & \text{②} \\ & z = 2 & \text{③} \end{cases}$$

③ $\times 2$ を ① に足す

③ $\times (-1)$ を ② に足す

$$\begin{cases} x & = 1 \\ y & = -1 \\ z & = 2 \end{cases}$$

2 行目と 3 行目を消す

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{1} \times (-1) \\ \textcircled{2} \times (-3) \end{array}$$

2 行目 $\times (-1)$ と 3 行目 $\times (-1)$

2 行目 $\times (-3)$ と 3 行目 $\times (-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \textcircled{3} \times (-\frac{1}{2}) \end{array}$$

3 行目 $\times (-\frac{1}{2})$ する

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{1} \times 2 \\ \textcircled{2} \times (-1) \end{array}$$

3 行目 $\times 2$ を ① に足す

3 行目 $\times (-1)$ を ② に足す

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

三行

$$x=1, y=-1, z=2$$

注意

今回は正しいにやっただけ
上のように操作手順を
かく必要はない

・ 操作 (基本変形) はおぼろげ
かってもいい

演習問題

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases} \quad \text{を解け}$$

例

拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

(-2)
 $\times 1$

次に基本変形をやる

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline 0 & -1 & 5 & 2 & \\ 0 & 3 & -5 & -1 & \end{array} \right)$$

1行目 $\times (-2)$
 2行目 $\times (-1)$
 3行目 $\times (-1)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 1 & -5 & -2 & \\ 0 & 3 & -5 & -1 & \end{array} \right)$$

2行目 $\times (-1)$
 3行目 $\times (-3)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 3 & \\ 0 & 1 & -5 & -2 & \\ \hline 0 & 0 & 10 & 5 & \end{array} \right)$$

2行目 $\times (-1)$
 1行目 $\times (-4)$
 2行目 $\times (-3)$
 3行目 $\times \frac{1}{10}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 3 & \\ 0 & 1 & -5 & -2 & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \end{array} \right)$$

3行目 $\times \frac{1}{10}$
 1行目 $\times (-4)$
 2行目 $\times (-5)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{3行目} \times (-4) \\ \text{を1行目に加} \\ \\ \text{3行目} \times 5 \\ \text{を2行目に加} \end{array}$$

二枚板の傾斜角

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

($\frac{1}{2}$ 傾斜角は、(板の傾斜角)
お、5つ、2つ、(板の傾斜角))