第9回 行列式1 ー置換ー

あらすじ A = $n \times n$ 行列

Q. 行列 A は いつ 正則になる？

(逆行列 A^{-1} をもつ)

((A が正則 $\Longleftrightarrow$ $Ax = b$ の解がただ1つに定まる。 ($x = A^{-1}b$)))

判定法

$\boxed{\det A \text{（}A\text{の行列式）}}$ が0でない

$\Longleftrightarrow$ A が正則

この3回で定義する

置換

定義 $\{1,\dots,n\}$ から $\{1,\dots,n\}$ への1対1写像を置換 という のであります

つまり $k_1,\dots,k_n$ を相異なる $\{1,\dots,n\}$ の数とし
1 を k_1 に, 2 を k_2, $\dots$, n を k_n に変化させる規則を置換という

$$
\sigma : \left(\begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & k_1 \\
2 & \longrightarrow & k_2 \\
3 & \longrightarrow & k_3 \\
 & \vdots & \\
n & \longrightarrow & k_n
\end{array}\right)
$$

こうかくと

こんなかき方は この授業のみ

例

$$
\sigma : \begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & 2 \\
2 & \longrightarrow & 3 \\
3 & \longrightarrow & 1
\end{array}
$$

置換

同じものをつかってる!

例2

$$
\sigma : \begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & 2 \\
2 & \longrightarrow & 2 \\
3 & \longrightarrow & 1
\end{array}
$$

置換ではない!

$\boxed{\text{例13}}$

$$\sigma : \begin{array}{l} 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 3 \\ 3 \longrightarrow \underbrace{2と3} \end{array}$$

置換ではない。

（k_3は数にならないといけない）

・置換

$$\sigma : \begin{array}{l} 1 \longrightarrow k_1 \\ 2 \longrightarrow k_2 \\ \quad \vdots \\ n \longrightarrow k_n \end{array}$$

について、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

とおけば

$\sigma(1) = k_1, \sigma(2) = k_2, \cdots, \sigma(n) = k_n$

とかく

$\boxed{\text{例11}}$

$$\sigma = \begin{array}{l} 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 3 \\ 3 \longrightarrow 1 \end{array}$$

について

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sigma(1) = 2$

$\sigma(2) = 3$

$\sigma(3) = 1$,

$\boxed{\text{例12}}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ とする

$1 \longrightarrow 3$

$2 \longrightarrow 1$ へかえる規則

$3 \longrightarrow 4$

$4 \longrightarrow 2$

$\sigma(1) = 3$　$\sigma(2) = 1$　$\sigma(3) = 4$　$\sigma(4) = 2$

となる

$\boxed{\text{例13}}$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　$\sigma(1) = 2$

$\sigma(2) = 1$

$\sigma(3) = 3$

ここで"3"はなにもしないのでかかないこともある.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とかく.

$\boxed{\text{定義}}$ σ, τ を置換とし、
その積 $\sigma\tau$ を

$\sigma\tau(i) = \underbrace{\sigma(\tau(i))}$ で定める

(i を $\tau(i)$ にかえて、
その後 $\sigma(\tau(i))$ にかえる)

$\boxed{\text{注意}}$ $\sigma\tau = \tau\sigma$ とは限らない)

$\boxed{\text{例}}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の場合、

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$\sigma\sigma$ はどうなる？

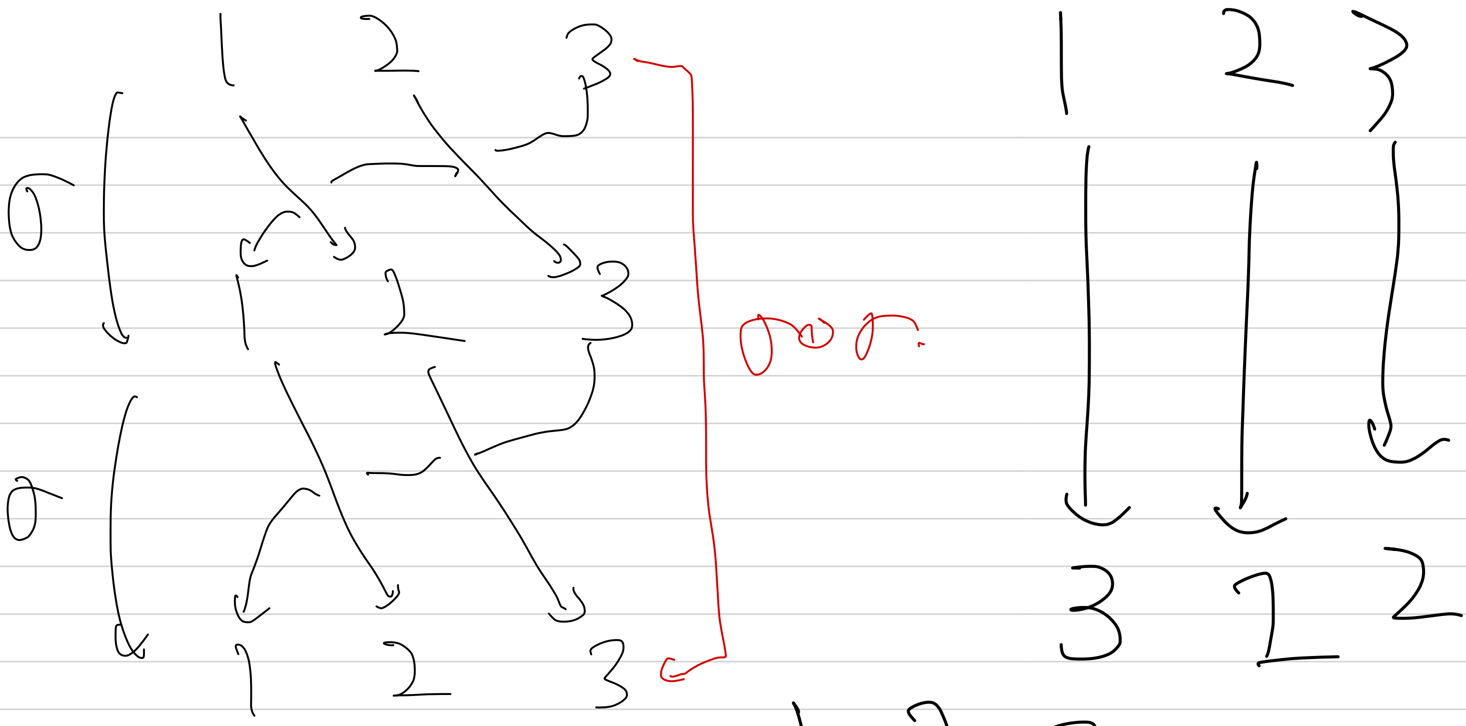
$\sigma\sigma(1) \overset{\text{定義}}{=} \sigma(\sigma(1)) = \sigma(2) = 3$

$\sigma\sigma(2) = \sigma(\sigma(2)) = \sigma(3) = 1$

$\sigma\sigma(3) = \sigma(\sigma(3)) = \sigma(1) = 2$.

$\sigma\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1つ わかりやすい(?)方法、あみだくじ方式



$$\therefore \quad \sigma\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{例}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

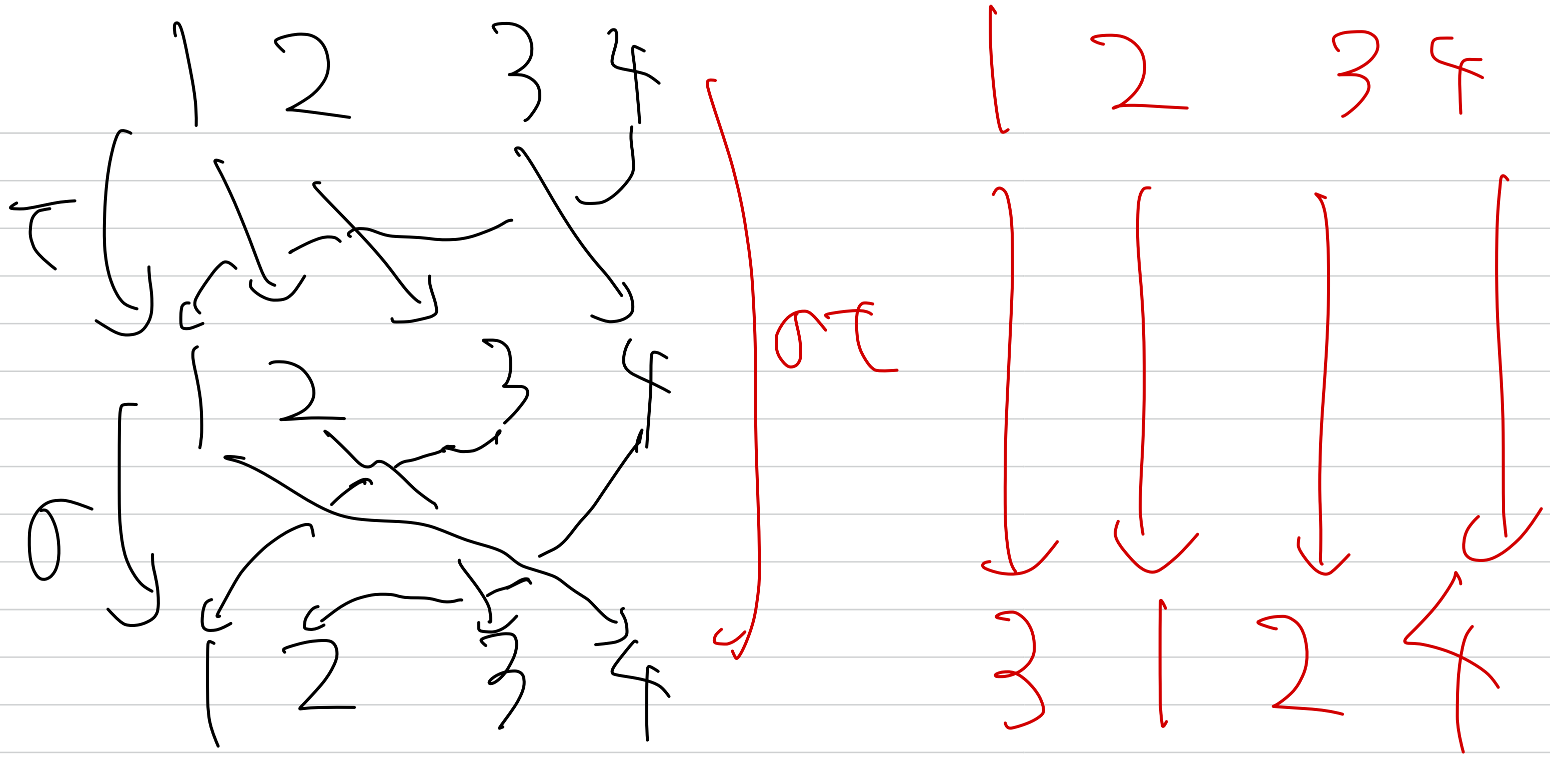
$\sigma\tau(1) = \sigma(2) = 3$

$\sigma\tau(2) = \sigma(3) = 1$

$\sigma\tau(3) = \sigma(4) = 2$

$\sigma\tau(4) = \sigma(1) = 4$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\sigma\tau = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$$

定義

・ $\varepsilon = \begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&3&\cdots&n\end{pmatrix}$ 単位置換という

・ $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\k_1&k_2&k_3&\cdots&k_n\end{pmatrix}$ について

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}k_1&k_2&k_3&\cdots&k_n\\1&2&3&\cdots&n\end{pmatrix}$ を逆置換という

例 $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&3&2\end{pmatrix}$ のとき

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}4&5&1&3&2\\1&2&3&4&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{pmatrix}$$

(ならびかえ)

$\boxed{\text{定義}}$ $\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_l \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_1 \end{pmatrix}$ となる置換を巡回置換といい、

$\sigma = (k_1 \cdots k_l)$ とかく。

とくに $\sigma = (k_1\ k_2)$ を互換という

$\left(\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix} \sigma = e \right)$

$\boxed{\text{例}}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$

巡回置換.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$

定理
任意の置換σは互換の積
$\tau_1 \cdots \tau_l$ であらわされる
そして l の偶奇はσによってのみ定まる

定義 $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^l$ として
σの符号とよぶ

$\mathrm{sgn}(\sigma)=1$ となる置換を偶置換とよび
$\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$ となる置換を奇置換とよぶ

性質
- $\mathrm{sgn}(\varepsilon)=1$
- $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})=\mathrm{sgn}(\sigma)$
- $\mathrm{sgn}(\sigma\tau)=\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$

例
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$
を互換の積であらわし、σの符号を決定する

解
$1 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 2 \xrightarrow{\sigma} 1$ 1つめのサイクル
上のサイクルにあらわれない数字をとる

$3 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 3$ 2つめ

この2つめの巡回で $\{1,\dots,7\}$ すべての数がでる

$$\sigma = (1\,4\,2)(3\,6\,5\,7)$$

$$(1\,4\,2) = (1\,4)(4\,2)$$

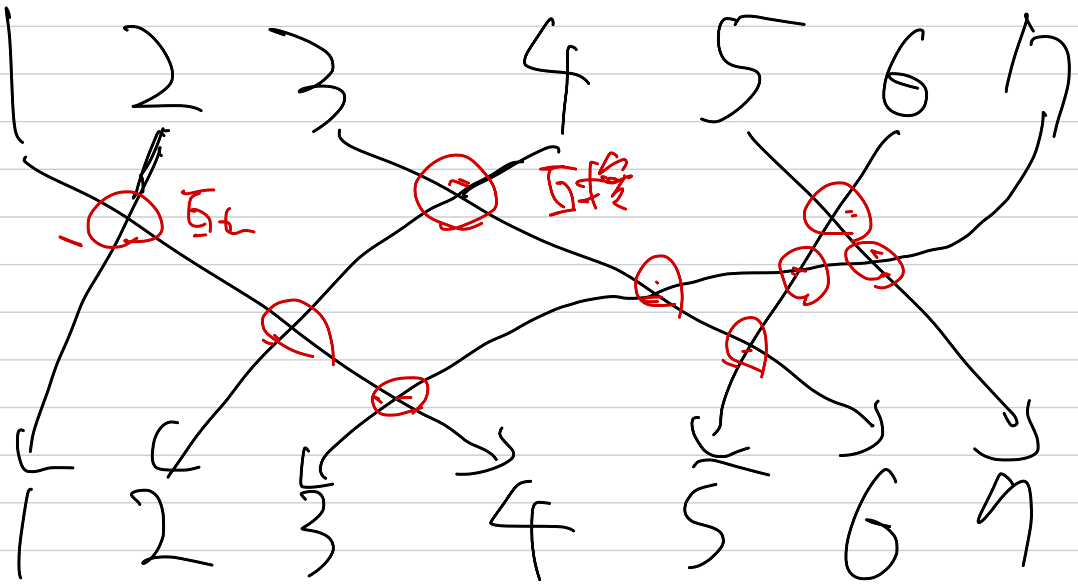
$$(3\,6\,5\,7) = (3\,6)(6\,5)(5\,7)$$

$$\sigma = (1\,4)(4\,2)(3\,6)(6\,5)(5\,7)$$

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^5 = -1$$

奇置換

$\boxed{\text{確認}}$



交点で互換がおこなわれる.

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{○のすう}} = (-1)^9 = -1$$

定理の証明 σを置換とする

Step1 σは巡回置換の積で表せる

やり方 $S=\{1,\dots,n\}$として

$k_{11}=1$とする

$$k_{11} \xrightarrow{\sigma} k_{12} \xrightarrow{\sigma} \cdots \to k_{1l_1}=1$$

(l_1を $\sigma^{l_1}(1)=1$なる最小のl_1)

$S_1=\{k_{11},k_{12},\dots,k_{1l_1}\}$とする

$S=S_1$なら終わり。$S\neq S_1$なら

k_{21}をS_1にふくまれないSの元として上と同じことをし

$S_2=\{k_{21},k_{22},\dots,k_{2l_2}\}$とする

これをくりかえして $S=S_1\cup\cdots\cup S_N$とできる

$$\sigma=(k_{11}\ k_{12}\cdots k_{1l_1})(k_{21}\ k_{22}\cdots k_{2l_2})\cdots(k_{N1}\cdots k_{Nl_N})$$ となる

Step2 巡回置換は互換の積であらわせる

$$(k_1, k_2 \cdots k_l)=(k_1\ k_2)(k_2\ k_3)\cdots(k_{l-1}\ k_l)$$

Step3 ℓ の偶奇について

$x_1, \dots x_n$ を変数として

$$\Delta(x_1, \dots x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

総乗の記号

（$1 \leq i < j \leq n$ となる (i, j) すべてに対して
$(x_i - x_j)$ をかけあわせなさい）

$$= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \cdots (x_1 - x_n)$$
$$\boxed{(x_2 - x_3)} \cdots (x_2 - x_n)$$
$$(x_3 - x_4) \cdots$$
$$\cdots (x_{n-1} - x_n)$$

互換について

$\sigma \Delta(x_1 \dots x_n) = \Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)})$ とする

σ が互換なら

$$\sigma \Delta(x_1, \dots x_n) = -\Delta(x_1 \dots x_n)$$

（$\sigma = (2, 3)$ なら $\boxed{}$ 以外の符号が変わらん）

σ が $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_l = \tau'_1 \cdots \tau'_{l'}$

(τ_i, τ'_j 互換) というふうに表されたとき

$\sigma\Delta(x_1 .. x_n) = (-1)^l \Delta(x_1 .. x_n)$

$= (-1)^{l'} \Delta(x_1 .. x_n)$

$\therefore \quad (-1)^l = (-1)^{l'}$

l の偶奇は σ によってのみ定まる //

$\boxed{\text{定義}}$ S_n = n 文字置換の集合

$(n \geqq 2)$ A_n = n 文字偶置換の集合

$\boxed{\text{性質}}$ ① S_n のこすうは $n!$ コ

② A_n のこすうは $\frac{n!}{2}$ コ

③ 偶置換と奇置換のこすうは同じ

④ $\sigma, \tau \in A_n$ ならば $\sigma\tau \in A_n$

① S_nのこすうは

$\{1, \cdots, n\}$の順列ならびかたのこすうと同じだから

③ P_nを奇置換の集合とし

$$f : P_n \longrightarrow A_n$$
$$\tau \longmapsto (12)\tau$$

fは全単写像である

・$f(\tau_1) = f(\tau_2)$ならば $(12)\tau_1 = (12)\tau_2$より
$\tau_1 = \tau_2$. $\boxed{\text{単射}}$

・任意の$\sigma \in A_n$について
$f((12)\sigma) = \sigma$ より $\boxed{\text{全射}}$

よってP_nとA_nのこすうは同じ。

② A_nのこすう $= \dfrac{S_n\text{のこすう}}{2} = \dfrac{n!}{2}$

④ $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$より

おまけ A_n 交代群とよばれる

(A_5 によって、5次方程式の解の公式が存在しないことがわかる)