第 9 回. 行列式 1 -置換- (三宅先生の本, 3.1 の内容)

岩井雅崇 2022/06/16

1 置換

定義 1.

- $\{1,\ldots,n\}$ から $\{1,\ldots,n\}$ への 1 対 1 写像を置換と言い σ で表す．つまり置換 σ とは $k_1,\ldots,k_n$ を 1 から n の並び替えとして, 1 を k_1 に, 2 を k_2 に, $\cdots$, n を k_n にと変化させる規則のことである.
- 上の置換 σ を
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$
とかき, $\sigma(1) = k_1, \sigma(2) = k_2, \ldots, \sigma(n) = k_n$ とする.

例 2. 置換 σ を $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ とする．これは「1 を 3 に, 2 を 1 に, 3 を 4 に, 4 を 2 にと変化させる規則」である．$\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 2$ である.

例 3. 置換 σ を $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする．これは「1 を 2 に, 2 を 1 に, 3 を 3 にと変化させる規則」である．$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 3$ である.

この置換は 3 に関しては何も変化させていないので $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ともかく.

定義 4. 置換 σ, τ について, その積 $\sigma\tau$ を $\sigma(\tau(i))$ で定める.

例 5. 置換 σ, τ を $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{array}{ccccc} \sigma(\tau(1)) & = & \sigma(2) & = & 3 \\ \sigma(\tau(2)) & = & \sigma(3) & = & 1 \\ \sigma(\tau(3)) & = & \sigma(4) & = & 2 \\ \sigma(\tau(4)) & = & \sigma(1) & = & 4 \end{array}$$

であるので, $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ である.

定義 6.

- $\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を単位置換という.

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ について, $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ をσの逆置換と言い σ^{-1} で表す.

例 **7.** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ である.

定義 **8.** $\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_l \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_1 \end{pmatrix}$ となる置換 σ を巡回置換と言い $\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_l \end{pmatrix}$ と表す.
特に $\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix}$ となる巡回置換を互換と言い $\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ と表す.

定理 **9.** 任意の置換 σ は互換の積 $\tau_1 \cdots \tau_l$ で表わすことができ, l の偶奇は σ によってのみ定まる.

定義 **10.** 置換 σ が互換の積 $\tau_1 \cdots \tau_l$ で表せられているとする.

- $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^l$ とし, これをσの符号と呼ぶ.
- $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ なる置換 σ を偶置換といい, $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ なる置換 σ を奇置換という.

例 **11.** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ を互換の積で表し, その符号を求めよ.

(解). $1 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 2 \xrightarrow{\sigma} 1$ と変化し, $3 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 3$ と変化するので,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

さらに $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix}$ であるので,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix}$$

となり, $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^5 = -1$ である.

命題 **12.** 置換 σ, τ について, $\mathrm{sgn}(\epsilon) = 1$, $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$, $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$ が成り立つ (ただし ϵ は単位置換とする).

定義 **13.** S_n を n 文字置換の集合とし, A_n を n 文字置換の集合とする.

1

[1]専門用語で S_n は対称群と言い, A_n は交代群と言います.

命題 14.

- S_n の個数は $n!$ 個である.
- 偶置換と奇置換の個数は同じである.
- A_n の個数は $\frac{n!}{2}$ 個である.
- $\sigma, \tau \in A_n$ ならば $\sigma\tau \in A_n$