7. 分離公理

岩井雅崇 2022/12/13

分離公理は正規や正則など色々あるが, ハウスドルフが一番大事だと思われるので, 今回ハウスドルフの問題を集めた.[1]

問題の上に • がついている問題は解けてほしい問題である. 問題の上に * がついている問題は面白いかちょっと難しい問題である. 以下断りがなければ $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド位相を入れたものを考える. また位相空間 X は 2 点以上の点を含むものとする.

問 7.1 • 演習で出てきた位相空間を 1 つあげハウスドルフかどうか判定せよ. ただしこの問題はまだ発表していない人のみ解答でき, 複数人の回答を可とする.[2]

問 7.2 • $f : X \to Y$ を連続な単射写像とする. Y がハウスドルフならば X もハウスドルフであることを示せ. またハウスドルフ空間 X の部分集合 $A \subset X$ に相対位相を入れたものはハウスドルフであることを示せ.

問 7.3 • 連続な全射写像 $f : X \to Y$ で X はハウスドルフだが Y がハウスドルフでない例を一つあげよ.

問 7.4 • 「位相空間 $(X, \mathscr{O})$ について X が T_1 空間であるとは, 任意の異なる 2 点 $a, b \in X$ についてある $U \in \mathscr{O}$ があって $a \in U$ かつ $b \notin U$ となること」とする. 次の問いに答えよ.

(a) X が T_1 空間であることは, 任意の点 $x \in X$ について $\{x\}$ が閉集合であることと同値であることを示せ.

(b) X がハウスドルフ空間 (T_2 空間) であれば T_1 空間であることを示せ.

(c) T_1 空間であるがハウスドルフ空間 (T_2 空間) でない例を一つあげよ.

問 7.5 X を位相空間とする. 次は同値であることを示せ.

(i) X はハウスドルフである.

(ii) 対角集合 $\{(x, x) \in X \times X\}$ は $X \times X$ の閉集合である.

(iii) 任意の位相空間 T と任意の連続写像 $f, g : T \to X$ に対し, $\mathrm{Ker}(f, g) = \{t \in T | f(t) = g(t)\}$ は T の閉集合である.

(iv) 任意の位相空間 T と任意の連続写像 $f : T \to X$ について $\{(t, x) \in T \times X | f(t) = x\}$ は $T \times X$ の閉集合である.

問 7.6 $f, g : X \to Y$ を位相空間の間の連続写像とし, A を X の稠密な部分集合とする. Y がハウスドルフかつ $f|_A = g|_A$ ならば, $f = g$ であることを示せ.

[1] $T_{2\frac{1}{2}}$ 空間など出しても良かったが, 無駄知識になる気がしたのでやめておきました. もし正規や正則などの分離公理が期末試験にでたらすみません.

[2] 例えば距離空間, 離散位相空間, 密着位相空間などが挙げられる. なお難しそうな空間に関して解答したい人は第 9 回の最後の問題を見てください.

問 7.7 $\mathbb{R}^2$ に対し同値関係 $\sim$ を

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ かつ } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$$

で定め, 2 次元トーラス $T^2 := \mathbb{R}^2/\sim$ とする. $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ という商写像により T^2 に商位相を入れるとき, T^2 はハウスドルフ空間であることを示せ.

問 7.8 問 6.8 を用いて $\mathbb{RP}^n$ はハウスドルフ空間であることを示せ.

問 7.9 $M(n+1, \mathbb{R})$ を $(n+1) \times (n+1)$ 実行列の集合とし, $M(n+1, \mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ と同一視して位相を入れる. $\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to M(n+1, \mathbb{R})$ を次で定める:

$$\begin{array}{cccc} \sigma : & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \to & M(n+1, \mathbb{R}) \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \mapsto & \frac{1}{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_{n+1} \\ x_2 x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2 x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_{n+1} x_1 & x_{n+1} x_2 & \cdots & x_{n+1}^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

σ は連続な単射写像 $\tilde{\sigma} : \mathbb{RP}^n \to M(n+1, \mathbb{R})$ を引き起こすことを示し, それを用いて $\mathbb{RP}^n$ はハウスドルフ空間であることを示せ.

問 7.10 X を位相空間とする. 「任意の異なる 2 点 $p, q \in X$ について, ある連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で $f(p) = 0, f(q) \neq 0$ となるものが存在する」と仮定する. このとき X はハウスドルフ空間であること示せ. またこれを用いて $\mathbb{RP}^n$ はハウスドルフ空間であることを示せ. [3]

問 7.11 $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ について, 同値関係 $\sim$ を

$$z \sim w \Leftrightarrow 0 \text{ でない複素数 } \alpha \text{ が存在して } z = \alpha w$$

と定義する. $\mathbb{CP}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ と書き複素射影空間と呼ぶ. [4] $\mathbb{CP}^n$ に商位相を入れるとき, $\mathbb{CP}^n$ はハウスドルフ空間であることを示せ.

問 7.12 * $1 \leq k < n$ となる自然数について, $A_{k,n}$ を $k \times n$ 実数行列でランクが k となる行列全体の集合とし, $\mathbb{R}^{kn}$ の部分集合とみなすことで $A_{k,n}$ に $\mathbb{R}^{kn}$ の相対位相を入れる. $A_{k,n}$ に同値関係 $\sim$ を

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{正則な } k \times k \text{ 実数行列 } G \text{ が存在して } A = GB$$

と定義する. $G_{k,n} := A_{k,n}/\sim$ と書き実グラスマン多様体と呼ぶ. $G_{k,n}$ に商位相を入れるとき, $G_{k,n}$ はハウスドルフ空間であることを示せ.

演習の問題は授業ページ (`https://masataka123.github.io/2022_winter_generaltopology/`) にもあります. 右下の QR コードからを読み込んでも構いません.

[3]ヒント: 直線への射影を用いる. この手法は後の問題でも使える.

[4]実射影空間と同様に $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$ を $\mathbb{CP}^n$ の元とみなしたものを $(z_1 : \cdots : z_{n+1})$ と書き複素同次座標と呼ぶ.