2022 年度秋冬学期 大阪大学 理学部数学科
幾何学基礎 2(位相空間論) 演義

火曜 4 限 (15:10-16:40) 理学部 E210

岩井雅崇 (いわいまさたか) 2022/00/00

基本的事項

- この授業は対面授業です．火曜 4 限 (15:10-16:40) に理学部 E210 にて演習の授業を行います．
- 授業ホームページ (`https://masataka123.github.io/2022_winter_generaltopology/`) にて授業の問題等をアップロードしていきます．下に授業ホームページの QR コードを貼っておきます．

授業の QR コード

成績に関して

次の 1 と 2 を満たしているものに単位を与えます．

1. 幾何学基礎 2 の講義の単位が可以上である．
2. 14 回授業時までに演習の授業で少なくとも 1 回以上発表している．

ただし 2 の条件を達成できないものには別途救済レポートを課して 2 を達成したものとすることがある．

成績は講義の点数に演習の出来具合を加算してつける (と思います)．

解答の仕方について

- 問題の解答を黒板に書いて発表してください．正答だった場合その問題はそれ以降解答できなくなります．不正解だった場合他の人に解答権が移ります．
- 複数人が解答したい問題があるときは平和的な手段で解答者を決めます．
- 演習問題の難易度は一定ではない．難しい問題を解いた場合は成績に加点を行う．

その他

- 授業内容をあまり把握していないので, 演習問題と授業内容が噛み合ってない可能性があります．
- 休講あるいは補講をすることがあるので, こまめにホームページと CLE は確認してください．
- オフィスアワーを月曜 15:00-17:00 に設けています．この時間に私の研究室に来ても構いません (ただし来る場合は前もって連絡してくれると助かります.)
- π-base `https://topology.jdabbs.com` も活用してください．

集合と位相の問題の示し方

集合と位相の基本的な問題が解けない場合は, 次のことが疎かになっていると思います.

1. 用語の定義は何かわかっていない.
2. 何を示すかわかっていない.
3. 論理的な展開がわかっていない.

よって次の順に解決していけば良いと思います.

- 用語の定義を”理解して”覚える. 初めは問題ごとに教科書で定義を見て行っても良い.
- 何を示せば良いかゴールを明確にする
- 何から何が導かれるのかきちんと論理的に考える. 大体の基本的な問題は打つ手が一個しかないので, 集合と位相の基本的な問題は結構簡単に証明できます.[1] ちょっと難しい問題になると授業で示した定理が必要になるので, 定理の理解・暗記も必要になってきます.

例 **1.** d を $\mathbb{R}$ 上のユークリッド距離とする. $(-1,1)$ は $(\mathbb{R},d)$ 上で開集合であることをしめせ

-頭の中での思考-

- 示すことは「$(-1,1)$ は $(\mathbb{R},d)$ 上で開集合である」こと. しかしこれでは示すことが具体的にはわからないので開集合の定義を書き下す.
- 距離空間 (X,d) の部分集合 V が開集合であることの定義は「$V=V^i$ となる」こと. しかし V^i の定義がわからないのでこの定義を書き下す.
- V^i とは V の内点の集合. $a\in X$ が V の内点であるとは, ある $\epsilon>0$ があって a の ϵ 近傍

$$N(a,\epsilon)=\{x\in X|d(x,a)<\epsilon\}$$

  が V に含まれること.
- 上の二つから $(-1,1)$ が開集合であることを示すには「任意の点 $a\in(-1,1)$ が $(-1,1)$ の内点であること」を示せば良い. (ここでようやく”何を示せば良いか具体的にわかった”).
- 「任意の点 $a\in(-1,1)$ が $(-1,1)$ の内点であること」を示すには「ある $\epsilon>0$ があって

$$N(a,\epsilon)=\{x\in\mathbb{R}|d(x,a)=|x-a|<\epsilon\}\subset(-1,1)$$

  となること」を示せば良い. これは $\epsilon-\delta$ 論法でやったことを真似れば良い.[2]

ただこれを解答に書いてはいけない. これは頭の中の思考であり他人に見せるには”汚い”からである. 解答は次のようになると思う.

[1] これは簡単な詰将棋に似ています.
[2] もしかしたらここが一番難しいもしれない. ここは経験則になってしまう.

[解答例.] 距離空間 (X,d) の部分集合 V が開集合であることの定義は「V の任意の点が V の内点である」ことである.[3]よって任意 $a \in (-1,1)$ について a が $(-1,1)$ の内点であることを示す. $a \in (-1,1)$ について $\epsilon = 1-|a|$ とおくと $|x-a| < \epsilon$ ならば

$$|x| = |x-0| \leqq |x-a| + |a-0| < \epsilon + |a| = 1$$

である.[4]　よって a の ϵ 近傍 $N(a,\epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \epsilon\}$ について $N(a,\epsilon) \subset (-1,1)$ である. つまり任意の点 $a \in (-1,1)$ について a は $(-1,1)$ の内点であるので, $(-1,1)$ は開集合である.[5]

最後に大体の集合と位相の問題に言えることは次です.

集合と位相の問題で簡単に示せないものには反例がある.

[3]この一文はあってもなくても良い. あった方が採点者が試験で採点するときに”こいつは理解してそうだな”と思われるかもしれない.

[4]この ϵ は超能力あるいは経験則を使って無理やり取ってきた.

[5]ここの部分はくどいかもしれない. まあ書いておいた方が解答として何を示したか分かり易いもする.