# 3. 連続写像

岩井雅崇 2022/10/18

問 3.1 $(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を写像とする. 次の問いに答えよ.

(a) $\mathscr{O}_X$ が離散位相ならば $f$ は連続である.

(b) $\mathscr{O}_Y$ が密着位相ならば $f$ は連続である.

問 3.2 次を示せ.

(a) $(a, b)$ と $(c, d)$ は同相である.

(b) $(a, b)$ と $\mathbb{R}$ は同相である.

(c) $[a, b]$ と $[c, d]$ は同相である.

問 3.3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次で定める.

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leqq 0) \\ x + 2 & (x > 0) \end{cases}$$

$\mathscr{O}_{Euc}$ を $\mathbb{R}$ における通常の位相 (ユークリッド位相) とし $\mathscr{O}_c$ を補有限位相とする. 次の問いに答えよ.

(a) $f$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{Euc})$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{Euc})$ への連続写像かどうか判定せよ.

(b) $f$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{Euc})$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_c)$ への連続写像かどうか判定せよ.

(c) $f$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_c)$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{Euc})$ への連続写像かどうか判定せよ.

(d) $f$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_c)$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_c)$ への連続写像かどうか判定せよ.

問 3.4 $C([0, 1])$ を $[0, 1]$ 上の連続関数全体の集合とする. $C([0, 1])$ 上に距離 $d$ を

$$d(f, g) := \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

で定める. また $\mathbb{R}$ にユークリッド位相を入れる.

(a) $C([0, 1], d)$ は距離空間であることを示せ.

(b) $F : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ を $F(f) := \int_0^1 f(x)dx$ で定める. $F$ は連続であることを示せ.

(c) $G : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ を $G(f) := \int_0^1 f(x)^2 dx$ で定める. $G$ は連続であることを示せ.

問 3.5 $(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし, $\mathbb{R}$ にユークリッド位相を入れる. $f, g : X \to \mathbb{R}$ を $X$ から $\mathbb{R}$ への連続写像とするとき, $f + g, f - g, \alpha f, f/g$ は $X$ から $\mathbb{R}$ への連続写像となることを示せ. ここで $\alpha \in \mathbb{R}$ であり, $f/g$ は $g(x) = 0$ となる $x \in X$ が存在しないときに定義される.

問 3.6 全単射な連続写像 $f : X \to Y$ で $f^{-1}$ が連続ではないものを構成せよ.

問 3.7 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を写像とし, $\mathscr{O}_{Euc}$ をユークリッド位相, $\mathscr{O}_{usc}$ を上半連続位相 (問 2.5 の位相) とする. $f$ を $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{usc})$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{Euc})$ への連続写像とするとき, $f$ は定数写像であることを示せ.

問 3.8 * $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を写像とし, $\mathscr{O}_{Euc}$ をユークリッド位相, $\mathscr{O}_{usc}$ を上半連続位相 (問 2.5 の位相) とする. 次は同値であることを示せ.

(a) $f$ は $(\mathbb{R},\mathscr{O}_{Euc})$ から $(\mathbb{R},\mathscr{O}_{usc})$ への連続写像である.

(b) 任意の $a\in\mathbb{R}$ について $\limsup_{x\to a} f(x)=f(a)$ である.

問 3.9 * $(X,\mathscr{O}_X)$,$(Y,\mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし, $A,B$ を $X$ の部分集合で $X=A\cup B$ となるものとする. $f:X\to Y$ を $(X,\mathscr{O}_X)$ から $(Y,\mathscr{O}_Y)$ への連続写像とし, $f_A:A\to Y, f_B:B\to Y$ をそれぞれ $f$ の $A,B$ への制限とする. 次の問いに答えよ.

(a) $A,B$ が閉集合であり, $f_A,f_B$ がそれぞれ $A,B$ に関して連続であるとき, $f$ も連続であることを示せ. ここで $A,B$ には $X$ の相対位相を入れる.

(b) $f_A,f_B$ がそれぞれ $A,B$ に関して連続だが, $f$ は連続ではない例をあげよ.

問 3.10 * $(X,\mathscr{O})$ を位相空間とする. $X$ の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $x\in X$ に収束するとは, 「任意の $x$ の近傍 $V$ についてある $N\in\mathbb{N}$ があって $N<n$ ならば $x_n\in V$ である」ことで定義をする. 次の問いに答えよ

(a) 位相空間 $(X,\mathscr{O})$ で次を満たすものを構成せよ.

i. $(X,\mathscr{O})$ は密着位相ではない.

ii. ある点 $a\in X$ があって, 任意の $X$ の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a$ に収束する.

(b) $f:X\to Y$ が点 $x\in X$ で連続とする. このとき $x$ に収束する任意の $X$ の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(x)$ に収束する.

(c) 上の逆は一般には成り立たない. その例を構成せよ.[1] (つまり点列を用いた連続性の定義は一般には弱いことを意味する.)

[1]位相空間の間の写像 $f:X\to Y$ と点 $a\in X$ であって, 「$a\in X$ に収束する任意の $X$ の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束する」が「$f:X\to Y$ が点 $a\in X$ で連続」ではない例を構成してください.