5. 積位相

岩井雅崇 2022/11/01

以下断りがなければ, $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド位相を入れたものを考える. また集合系を表す際に用いられる Λ は空でないと仮定する.

問 5.1 $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x, y) = x + y$ で定めると連続写像になることを示せ.

問 5.2 $f : X \to \mathbb{R}$ を位相空間 X から $\mathbb{R}$ への写像とする. 次は同値であることを示せ.

(a) f は連続である.

(b) $\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} | f(x) > y\}$ と $\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} | f(x) < y\}$ は共に $X \times \mathbb{R}$ の開集合である.

問 5.3 $f : X \to \mathbb{R}$ を位相空間 X から $\mathbb{R}$ への写像とする. 次の主張が正しい場合は証明し, 間違っている場合は反例をあげよ.

「$\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} | f(x) = y\}$ が $X \times \mathbb{R}$ の閉集合であるとき, f は連続である.」

問 5.4 位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ について $\Delta : X \to X \times X$ を $\Delta(x) = (x, x)$ で定める. Δ は $(X, \mathscr{O}_X)$ から $(X, \mathscr{O}_X) \times (X, \mathscr{O}_X)$ への連続写像であることを示せ.

問 5.5 (X, d) を距離空間とする. 距離関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ は積位相に関して連続であることを示せ.

問 5.6 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする. 関数 $d_{X\times Y} : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ を

$$d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

と定義する. $d_{X\times Y}$ は $X \times Y$ 上の距離関数になり, $d_{X\times Y}$ が定める位相が $X \times Y$ の積位相に一致することを示せ.

問 5.7 $\mathbb{N}$ を自然数の集合とし, 各 $i \in \mathbb{N}$ について, $X_i = \mathbb{R}$ とする. $\prod_{i\in\mathbb{N}}(0, 1)$ は積空間 $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ の開集合かどうか判定せよ.

問 5.8 (積位相の普遍性) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合系とし, $\mathscr{O}_\lambda$ を X_λ の位相とする. 「任意の位相空間 $(T, \mathscr{O}_T)$ と連続写像の族 $g_\lambda : T \to X_\lambda$ について, ある積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ への連続写像 $g : T \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ がただ一つ存在して, 任意の $\mu \in \Lambda$ について $g_\mu = p_\mu \circ g$ となる」ことを示せ.

問 5.9 $\mathbb{N}$ を自然数の集合とする. 各 $i \in \mathbb{N}$ について $X_i = \{0, 1\}$ とし $\mathscr{O}_i$ を X_i の離散位相とする. $f : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to \mathbb{R}$ を

$$f(\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$$

で定める. f が well-defined であり, 積空間 $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ から $\mathbb{R}$ への連続写像になることを示せ.

問 5.10 $(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし, $A \subset X$ や $B \subset Y$ をその部分集合とする. 次を示せ.

(a) $(A \times B)^a = A^a \times B^a$

(b) $(A \times B)^i = A^i \times B^i$

問 5.11 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合系とし, $\mathscr{O}_\lambda$ を X_λ の位相とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ について部分集合 $A_\lambda \subset X_\lambda$ を考える. 次の主張が正しい場合は証明し, 間違っている場合は反例をあげよ.

(a) $(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^a = \prod_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda^a)$

(b) $(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^i = \prod_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda^i)$