3. 連続写像

岩井雅崇 2022/10/18

問 3.1 $(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を写像とする. 次の問いに答えよ.

- (a) $\mathscr{O}_X$ が離散位相ならば f は連続である.
- (b) $\mathscr{O}_Y$ が密着位相ならば f は連続である.

問 3.2 $a < b, c < d$ となる実数 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ について, 次を示せ.

- (a) (a, b) と (c, d) は同相である.
- (b) (a, b) と $\mathbb{R}$ は同相である.
- (c) $[a, b]$ と $[c, d]$ は同相である.

問 3.3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次で定める.

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leqq 0) \\ x + 2 & (x > 0) \end{cases}$$

$\mathscr{O}_{Euc}$ を $\mathbb{R}$ における通常の位相 (ユークリッド位相) とし $\mathscr{O}_c$ を補有限位相とする. 次の問いに答えよ.

- (a) f は $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{Euc})$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{Euc})$ への連続写像かどうか判定せよ.
- (b) f は $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{Euc})$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_c)$ への連続写像かどうか判定せよ.
- (c) f は $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_c)$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{Euc})$ への連続写像かどうか判定せよ.
- (d) f は $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_c)$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_c)$ への連続写像かどうか判定せよ.

問 3.4 $C([0, 1])$ を $[0, 1]$ 上の連続関数全体の集合とする. $C([0, 1])$ 上に距離 d を

$$d(f, g) := \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

で定める. また $\mathbb{R}$ にユークリッド位相を入れる.

- (a) $C([0, 1], d)$ は距離空間であることを示せ.
- (b) $F : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ を $F(f) := \int_0^1 f(x)dx$ で定める. F は連続であることを示せ.
- (c) $G : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ を $G(f) := \int_0^1 f(x)^2 dx$ で定める. G は連続であることを示せ.

問 3.5 $(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし, $\mathbb{R}$ にユークリッド位相を入れる. $f, g : X \to \mathbb{R}$ を X から $\mathbb{R}$ への連続写像とするとき, $f + g, f - g, \alpha f, f/g$ は X から $\mathbb{R}$ への連続写像となることを示せ. ここで $\alpha \in \mathbb{R}$ であり, f/g は $g(x) = 0$ となる $x \in X$ が存在しないときに定義される.

問 3.6 全単射な連続写像 $f : X \to Y$ で f^{-1} が連続ではないものを構成せよ.

問 3.7 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を写像とし, $\mathscr{O}_{Euc}$ をユークリッド位相, $\mathscr{O}_{usc}$ を上半連続位相 (問 2.4 の位相) とする. f を $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{usc})$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{Euc})$ への連続写像とするとき, f は定数写像であることを示せ.

問 3.8 * $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を写像とし, $\mathscr{O}_{Euc}$ をユークリッド位相, $\mathscr{O}_{usc}$ を上半連続位相 (問 2.4 の位相) とする. 次は同値であることを示せ.

(a) f は $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{Euc})$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{usc})$ への連続写像である.

(b) 任意の $a \in \mathbb{R}$ について $\limsup_{x\to a} f(x) = f(a)$ である.

問 3.9 * $(X, \mathscr{O}_X)$,$(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし, A, B を X の部分集合で $X = A \cup B$ となるものとする. $f : X \to Y$ を $(X, \mathscr{O}_X)$ から $(Y, \mathscr{O}_Y)$ への連続写像とし, $f_A : A \to Y, f_B : B \to Y$ をそれぞれ f の A, B への制限とする. 次の問いに答えよ.

(a) A, B が閉集合であり, f_A, f_B がそれぞれ A, B に関して連続であるとき, f も連続であることを示せ. ここで A, B には X の相対位相を入れる.

(b) f_A, f_B がそれぞれ A, B に関して連続だが, f は連続ではない例をあげよ.

問 3.10 * $(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする. X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $x \in X$ に収束するとは, 「任意の x の近傍 V についてある $N \in \mathbb{N}$ があって $N < n$ ならば $x_n \in V$ である」ことで定義をする. 次の問いに答えよ

(a) 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ で次を満たすものを構成せよ.

i. $(X, \mathscr{O})$ は密着位相ではない.

ii. ある点 $a \in X$ があって, 任意の X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束する.

(b) $f : X \to Y$ が点 $x \in X$ で連続とする. このとき x に収束する任意の X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(x)$ に収束する.

(c) 上の逆は一般には成り立たない. その例を構成せよ.[1] (つまり点列を用いた連続性の定義は一般には弱いことを意味する.)

[1] 位相空間の間の写像 $f : X \to Y$ と点 $a \in X$ であって, 「$a \in X$ に収束する任意の X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束する」が「$f : X \to Y$ が点 $a \in X$ で連続」ではない例を構成してください.