10. 距離空間の完備化

岩井雅崇 2022/12/13

問題の上に • がついている問題は解けてほしい問題である．問題の上に * がついている問題は面白いかちょっと難しい問題である．以下断りがなければ $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド位相を入れたものを考える．また位相空間 X は 2 点以上の点を含むものとする．

問 10.1 • $C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ は実数値連続関数$\}$ とおく．以下この問題では，関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ と言えば $f_i \in C[0,1]$ となる関数の列とする．次の問いに答えよ．

(a) 「関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が $f \in C[0,1]$ に各点収束する」ことの定義を述べよ．

(b) 「関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が $f \in C[0,1]$ に一様収束する」ことの定義を述べよ．

(c) 関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が $f \in C[0,1]$ に一様収束するならば，各点収束することを示せ．

(d) (c) の逆は一般には成り立たない．その関数列の例を一つあげよ．

(e) $f, g \in C[0,1]$ に関して $d_{\infty}(f,g) = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x) - g(x)|\}$ とおく．問題 1.2 と同様にして $(C[0,1], d_{\infty})$ は距離空間になる．$(C[0,1], d_{\infty})$ は完備であることを示せ．

問 10.2 • 実数列 $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$ となるものの集合を l^2 とする．$x, y \in l^2$ について $d_{l^2}(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}$ と定めると，問 1.3 から (l^2, d_{l^2}) は距離空間となる．l^2 はこの距離 d_{l^2} に関して完備であることを示せ．

問 10.3 • 次の問いに答えよ．

(a) 距離空間上のコンパクト集合は有界閉集合であることを示せ．

(b) (l^2, d_{l^2}) を 問 10.2 の通りとし，$O \in l^2$ を原点とする．$A := \{x \in l^2 \mid d_{l^2}(x, O) = 1\}$ とおく．A は (l^2, d_{l^2}) の有界閉集合であるがコンパクト集合ではないことを示せ．また (l^2, d_{l^2}) もコンパクトではないことを示せ．

問 10.4 (X, d) を距離空間とし，X の部分集合 A, B について $d(A,B) := \inf_{a\in A, b\in B}\{d(a,b)\}$ と定める．次の問いに答えよ．

(a) ある距離空間と互いに交わらない閉集合 A, B で $d(A,B) = 0$ となるものの例をあげよ．

(b) A をコンパクト集合，B を閉集合とするとき，A と B が互いに交わらなければ $d(A,B) \neq 0$ であることを示せ．

問 10.5 * $(C[0,1], d_{\infty})$ を問 10.1 の通りとする．次の問いに答えよ．

(a) $A = \{f \in C[0,1] \mid f([0,1]) \subset [0,1]\}$ とおくと，A は $(C[0,1], d_{\infty})$ のコンパクト集合ではないこと示せ．

(b) $B = \{f \in A \mid$ 任意の $x, y \in [0,1]$ について $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|\}$ とおくと，B は $(C[0,1], d_{\infty})$ のコンパクト集合であることを示せ．

問 10.6 * $C[0,1]$ を問 10.1 の通りとし，$f, g \in C[0,1]$ に関して

$$d_1(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$$

とおくと d_1 は $C[0,1]$ の距離となる．d_1 の距離に関して関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が $f \in C[0,1]$ に収束するとき，$\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は f に L^1 収束すると呼ぶ．次の問いに答えよ．

(a) $(C[0,1], d_1)$ は完備ではないことを示せ．

(b) 関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が $f \in C[0,1]$ に一様収束するならば，L^1 収束すること示せ．

(c) L^1 収束するが一様収束しない関数列の例を一つあげよ．

(d) 各点収束するが L^1 収束しない関数列の例を一つあげよ．

(e) 関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ であって，L^1 収束するが，任意の $x \in [0,1]$ について $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ が収束しない関数列の例を一つあげよ．

問 10.7 * $C[0,1]$ を問 10.1 の通りとする． $x \in [0,1]$ について $X_x = \mathbb{R}$ とおくことで，$C[0,1] \subset \prod_{x\in[0,1]} X_x$ とみなせる．そこで $\prod_{x\in[0,1]} X_x$ の積位相の $C[0,1]$ への相対位相を $\mathscr{O}_p$ とおく．次の問いに答えよ．

(a) 関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が $f \in C[0,1]$ に各点収束することは，位相空間 $(C[0,1], \mathscr{O}_p)$ において $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が $f \in C[0,1]$ に収束することと同値であることを示せ．(後者の収束の定義に関しては問題 3.10 を参照せよ.)

(b) $\mathscr{O}_p$ は距離空間 $(C[0,1], d_\infty)$ が作る位相 $\mathscr{O}_\infty$ よりも真に小さい，つまり $\mathscr{O}_p \subsetneq \mathscr{O}_\infty$ であることを示せ.[1]

問 10.8 * p を素数とする．0 でない有理数 $r \in \mathbb{Q}$ について，$r = p^e \frac{n}{m}$(m, n はともに p と互いに素な整数) と表せるとき，$v_p(r) := e$ と定義する．$r \in \mathbb{Q}$ について

$$|r|_p = \begin{cases} p^{-v_p(r)} & (r \neq 0) \\ 0 & (r = 0) \end{cases}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(a) 0 でない有理数 $r, s \in \mathbb{Q}$ について，$r + s \neq 0$ ならば $v_p(r+s) \geq \min(v_p(r), v_p(s))$ であることを示せ．

(b) $x, y \in \mathbb{Q}$ について $d_p(x,y) := |x-y|_p$ とおくと d_p は $\mathbb{Q}$ の距離になることを示せ．以下 $\mathbb{Q}_p$ を $\mathbb{Q}$ の d_p による完備化とする．また完備化によって誘導される $\mathbb{Q}_p$ 上の距離を d_p と同じ記号で書くことにする．

(c) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を有理数の数列とする． $(\mathbb{Q}_p, d_p)$ 上で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ がある値に収束することは $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = 0$ であることと同値であることを示せ．

(d) $(\mathbb{Q}_p, d_p)$ 上で $\sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p}$ であることを示せ．

(e) $b_n \in \{0,1\}$ かつ $(\mathbb{Q}_2, d_2)$ 上で $\frac{2}{7} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n$ となるような数列 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ を決定せよ．

演習の問題は授業ページ (`https://masataka123.github.io/2022_winter_generaltopology/`) にもあります．右下の QR コードからを読み込んでも構いません．

[1]問 10.1 と合わせると位相が小さいほど収束しやすいことがわかる．