6. 商位相

岩井雅崇 2022/11/08

この問題を解答するにあたり以下の用語を定義しておく.(これは次回の演習の内容でもある).

定義 1. 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ とする. X がハウスドルフ空間 (または T_2 空間)であるとは, 任意の $a, b \in X$ について, ある $U, V \in \mathscr{O}$ があって $a \in U, b \in V, U \cap V = \varnothing$ となること.

また断りがなければ, $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド位相を入れたものを考える. また $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合 S^n を $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ と定め, 位相は $\mathbb{R}^{n+1}$ の相対位相を入れる.

問 6.1 実数の集合 $\mathbb{R}$ について, 同値関係 $\sim_1$ を

$$x \sim_1 y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

を考える. $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim_1$ を標準写像とし π により $\mathbb{R}/\sim_1$ に商位相を入れる. 以下の問いに答えよ.

(a) $f : \mathbb{R} \to S^1$ を $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ とする. このときある連続写像 $\tilde{f} : \mathbb{R}/\sim_1 \to S^1$ で $f = \tilde{f} \circ \pi$ となるものが唯一存在することを示せ.

(b) $\tilde{f}$ は全単射であることを示せ.

(c) $\tilde{f}^{-1}$ は連続であることを示せ. よって $\mathbb{R}/\sim_1$ と S^1 は同相である. [1]

問 6.2 実数の集合 $\mathbb{R}$ について, 同値関係 $\sim_2$ を

$$x \sim_2 y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

とし $\mathbb{R}/\sim_2$ に商位相を入れる. $\mathbb{R}/\sim_2$ はハウスドルフ空間であるか判定せよ.

問 6.3 $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0$ または $y = 1\}$ とする. 同値関係 $\sim$ を

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \text{「}x_1 \neq 0 \text{ かつ } x_1 = x_2\text{」または「}y_1 = y_2 \text{ かつ } x_1 = x_2\text{」}$$

とし $X/\sim$ に商位相を入れる. $X/\sim$ はハウスドルフ空間であるか判定せよ.

問 6.4 次の問いに答えよ.

(a) 閉写像でも開写像でない連続写像の例をあげよ.

(b) 連続全単射が開写像であれば同相写像であることを示せ.

問 6.5 * $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とし, $\sim$ を X 上の同値関係とする. $\mathscr{O}(\pi)$ を標準写像 $\pi : X \to X/\sim$ による商位相とし, $(X/\sim, \mathscr{O}(\pi))$ を商空間とする. 次の主張に関して, 真である場合は証明し, 偽である場合は反例をあげよ.

[1] もし別に同相を示す手段があるなら他の方法を用いて良い. 実は授業後半の事実を用いると (c) は簡単に示せる. (おそらく現時点だと少々厄介である.)

(a) 商写像 $\pi : X \to X/\sim$ は開写像である.

(b) 商写像 $\pi : X \to X/\sim$ は閉写像である.

問 6.6 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について, 同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Leftrightarrow 0 \text{ でない実数 } \alpha \text{ が存在して } x = \alpha y$$

と定義する. 商写像 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ によって位相を入れたものを実射影空間と呼び, $\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ と書く. 以下 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ を $\mathbb{RP}^n$ の元とみなしたものを $(x_1 : \cdots : x_{n+1})$ と書き実同次座標と呼ぶ. 次の問いに答えよ

(a) $i = 1, \ldots, n+1$ について $U_i = \{(x_1 : \cdots : x_{n+1}) | x_i \neq 0\}$ とおく. $\mathbb{RP}^n = \cup_{i=1}^{n+1} U_i$ であることをしめせ.

(b) $i = 1, \ldots, n+1$ について写像 $f_i : \mathbb{R}^n \to U_i$ を $f_i(y_1, \ldots, y_n) = (y_1 : \cdots : y_{i-1} : 1 : y_i : y_{i+1} : \cdots : y_n : 1)$ とする.[2] $f_i : \mathbb{R}^n \to U_i$ は同相写像を定めることを示せ.

問 6.7 $\mathbb{RP}^1$ は S^1 と同相であることを示せ.

問 6.8 次の問いに答えよ.

(a)

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & S^n & \to & \mathbb{RP}^n \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1 : \cdots : x_{n+1}) \end{array}$$

は全射連続写像であることを示せ.

(b) σ は商写像であることを示せ.

(c) 任意の $q \in \mathbb{RP}^n$ について $\sigma^{-1}(q)$ の個数を求めよ.

(d) $f : S^2 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ とする. このときある連続写像で $\tilde{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^3$ で $f = \tilde{f} \circ \sigma$ となるものが唯一存在することを示せ.

問 6.9 * $GL(2, \mathbb{R})$ を 2×2 の正則行列とする. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ を $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ と同一視することで, $GL(2, \mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^4$ の部分集合とみなし, $\mathbb{R}^4$ の相対位相を入れる.

$GL(2, \mathbb{R})$ に同値関係 $\sim$ を

$$A \sim B \Leftrightarrow P \in GL(2, \mathbb{R}) \text{ が存在して } A = P^{-1}BP$$

を考える. 次の問いに答えよ.

(a) 任意の $\alpha \neq 0$ なる実数について $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示せ.

(b) 商空間 $GL(2, \mathbb{R})/\sim$ はハウスドルフ空間であるか判定せよ.

[2] $i = 1$ のときは $f_1(y_1, \ldots, y_n) = (1 : y_1 : \cdots : y_n)$ とし, $i = n+1$ のときは $f_{n+1}(y_1, \ldots, y_n) = (y_1 : \cdots : y_n : 1)$ とする.