8. コンパクト

岩井雅崇 2022/12/13

問題の上に • がついている問題は解けてほしい問題である. 問題の上に * がついている問題は面白いかちょっと難しい問題である. 以下断りがなければ, $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド位相を入れたものを考える. また位相空間 X は 2 点以上の点を含むものとする.

問 8.1 • 演習で出てきた位相空間を 1 つあげコンパクトかどうか判定せよ. ただしこの問題はまだ発表していない人のみ解答でき, 複数人の回答を可とする.[1]

問 8.2 •$f : X \to Y$ を連続な全射写像とする. X がコンパクトならば Y もコンパクトであることを示せ. またこれを用いて $\mathbb{R}$ と $[0, 1]$ は同相ではないことを示せ.

問 8.3 • コンパクト位相空間の閉部分集合はコンパクトであることを示せ. またコンパクト位相空間のコンパクトな部分集合で閉集合でないものの例を一つあげよ.

問 8.4 • コンパクト位相空間 X の実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は最大値・最小値を持つことを示せ.

問 8.5 • ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であることを示せ. またこれを用いてコンパクト空間 X からハウスドルフ空間 Y への連続全単射 $f : X \to Y$ は同相であることを示せ.

問 8.6 $\varphi : \mathbb{CP}^1 \to S^2$ を

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{CP}^1 & \to & S^2 \\ & (z : w) & \mapsto & \left(\frac{2\mathrm{Re}(z\bar{w})}{|z|^2+|w|^2}, \frac{2\mathrm{Im}(z\bar{w})}{|z|^2+|w|^2}, \frac{|z|^2-|w|^2}{|z|^2+|w|^2} \right) \end{array}$$

とするとき, φ は well-defined な同相写像であることを示せ. (複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ に関しては問題 7.11 参照.) ただし $\bar{z}$ は z の複素共役で $|z|^2 = z\bar{z}$ とする. また $z \in \mathbb{C}$ がある実数 $u, v \in \mathbb{R}$ を用いて $z = u + \sqrt{-1}v$ と表されているとき, $\mathrm{Re}(z) := u$, $\mathrm{Im}(z) := v$ と定義する.

問 8.7 (一点コンパクト化の普遍性) 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の一点コンパクト化を $(X^*, \mathscr{O}^*)$ とする. さらに X をコンパクトではない局所コンパクトハウスドルフ空間であると仮定する. このとき任意のコンパクトハウスドルフ空間 K と連続写像 $i : X \to K$ で $i : X \to i(X)$ が同相かつ $i(X) \subset K$ が K の中で稠密となるものについて, ある連続写像 $\phi : K \to X^*$ がただ一つ存在して次の図式を満たすことを示せ.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & K \arrow[dl, "\phi"] \\ X^* & \end{tikzcd}$$

問 8.8 $\mathbb{C}$ の一点コンパクト化が S^2 と同相であることを示せ. またこれを用いて S^2 と $\mathbb{CP}^1$ は同相であることを示せ.

問 8.9 * 2 次元トーラス T^2 を問題 7.7 のように定義する. 0 でない実数 α について, $f_\alpha : \mathbb{R} \to T^2$ を $f_\alpha(x) = (x, \alpha x)$ で定め, $f_\alpha(\mathbb{R}) \subset T^2$ に T^2 の相対位相を入れる. 次の問いに答えよ.

(a) α が有理数であるとき, $f_\alpha(\mathbb{R})$ は S^1 と同相であることを示せ.

[1]例えば $\mathbb{R}^n$, S^n, 離散位相空間, 密着位相空間, T^2, $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$, 実グラスマン多様体などが挙げられる.

(b) α が無理数であるとき, $f_\alpha : \mathbb{R} \to f_\alpha(\mathbb{R})$ は全単射な連続写像だが, 同相写像ではないことを示せ. ただし中間テスト第 5 問にあった無理数の特徴づけは証明なしに用いて良い.

問 8.10 ** X を位相空間とする. 次は同値であることを示せ.[2]

(i) X はコンパクトである.

(ii) 任意の位相空間 Y, 任意の $y \in Y$, $X \times \{y\}$ の任意の開近傍 $W \subset X \times Y$ について, ある y の開近傍 $V \subset Y$ があって, $X \times V \subset W$ となる.

(iii) 任意の位相空間 Y に対し第二射影 $p_2 : X \times Y \to Y$, $p_2(x, y) = y$ は閉写像である.

問 8.11 ** (Stone 1937) X をコンパクトハウスドルフ空間とし, $C(X) := \{f : X \to \mathbb{R}, f \text{ は連続}\}$ とする. 写像 $T : C(X) \to \mathbb{R}$ で

$$T(f+g) = T(f)+T(g), T(fg) = T(f)T(g), T(\lambda f) = \lambda T(f), T(1) = 1 \quad (\forall f, g \in C(X), \forall \lambda \in \mathbb{R})$$

となるものを考える.[3] 次の問いに答えよ.

(a) 任意の $x \in X$ について $g(x) \neq 0$ ならば $T(g) \neq 0$ であることを示せ.

(b) ある $x_T \in X$ があって, 任意の $f \in C(X)$ について $T(f) = f(x_T)$ となることを示せ. [4]

問 8.12 ** (Genfand-Kolomogolov 1939) X, Y をコンパクトハウスドルフ空間とし, $C(X), C(Y)$ を問 8.11 の通りとする. 写像 $T : C(X) \to C(Y)$ で

$$T(f+g) = T(f)+T(g), T(fg) = T(f)T(g), T(\lambda f) = \lambda T(f), T(1) = 1 \quad (\forall f, g \in C(X), \forall \lambda \in \mathbb{R})$$

となるものを考える. このとき連続写像 $\varphi : Y \to X$ であって

$$T(f)(y) = f(\varphi(y)) \quad (\forall f \in C(X), \forall y \in Y)$$

となるものが存在することを示せ. [5] また T が全単射ならば φ は同相であることを示せ.

問 8.13 ** 3 次特殊直交群 $SO(3, \mathbb{R})$ を 3×3 実数行列 G で ${}^tGG = E_3$ かつ $\det(G) = 1$ なる行列全体の集合とする. $\mathbb{R}^9$ の部分集合とみなすことで $SO(3, \mathbb{R})$ に $\mathbb{R}^9$ の相対位相を入れる. $SO(3, \mathbb{R})$ は $\mathbb{RP}^3$ と同相であることを示せ.[6]

演習の問題は授業ページ (https://masataka123.github.io/2022_winter_generaltopology/) にもあります. 右下の QR コードからを読み込んでも構いません.

[2](iii) から (i) が難しい. 難しければ (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) だけを発表しても良い.

[3]$T(1) = 1$ の左辺の"1"は $x \in X$ について $1 \in \mathbb{R}$ を返す定数関数である.

[4]ヒント: 背理法を用いる. もし任意の $x \in X$ についてある $f_x \in C(X)$ があって $T(f_x) \neq f(x)$ ならば f_x を使って X の開被覆が作れる. あとはコンパクト性を使って (a) を満たさない関数を作れば良い.

[5]ヒント: 問 8.11 を使って φ を構成する. 連続性は X の閉集合の逆像が Y の閉集合であることを示せば良い. どちらにもウリゾーンの補題を用いる.

[6]ヒント: 四元数体のノルム 1 の集合が S^3 となる. ノルム 1 の四元数の元から $SO(3, \mathbb{R})$ の元を作れば良い (実はこれはゲーム開発にも用いられている. 物理だとスピノルと関係あるらしい.)