2. 位相空間

岩井雅崇 2022/10/11

問 2.1 $X=\{0,1\}, \mathscr{O}=\{\varnothing, X, \{0\}\}$ とするとき $(X,\mathscr{O})$ は位相空間になることを示せ.

問 2.2 $X=(0,1)$ とし,

$$\mathscr{O}=\left\{\left(0,1-\frac{1}{n}\right) | n\in\mathbb{N}, n\geqq 2\right\}\cup\{X,\varnothing\}$$

とする. $(X,\mathscr{O})$ は位相空間になることを示せ.

問 2.3 (補有限位相) $\mathbb{R}$ に関して部分集合の族 $\mathscr{O}_c\subset\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ を次で定める.

$$\mathscr{O}_c=\{V\subset\mathbb{R}|\mathbb{R}\setminus V \text{ は有限集合である }\}\cup\{\varnothing\}$$

次の問いに答えよ.

(a) $(\mathbb{R},\mathscr{O}_c)$ は位相空間になることを示せ.

(b) $\mathbb{R}$ のユークリッド位相を $\mathscr{O}_{Euc}$ とするとき $\mathscr{O}_c\subset\mathscr{O}_{Euc}$ を示せ.

(c) $A\in\mathscr{O}_{Euc}$ かつ $A\notin\mathscr{O}_c$ なる A の例を一つあげよ.

問 2.4 (上半連続位相) $\mathbb{R}$ に関して部分集合の族 $\mathscr{O}_{usc}\subset\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ を次で定める.

$$\mathscr{O}_{usc}=\{(-\infty,t)|t\in\mathbb{R}\}\cup\{\varnothing,\mathbb{R}\}$$

次の問いに答えよ.

(a) $(\mathbb{R},\mathscr{O}_{usc})$ は位相空間になることを示せ.

(b) $\{0\}$ は $(\mathbb{R},\mathscr{O}_{usc})$ での閉集合ではないことをしめせ.

問 2.5 $\mathbb{R}$ に関して部分集合の族 $\mathscr{O}_{sc}\subset\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ を次で定める.

$$\mathscr{O}_{sc}=\{U\cup A\subset\mathbb{R}|U \text{ はユークリッド位相に関する開集合}, A \text{ は } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ の部分集合 }\}$$

次を示せ.

(a) $(\mathbb{R},\mathscr{O}_{sc})$ は位相空間になることを示せ.

(b) $\{0\}$ は $(\mathbb{R},\mathscr{O}_{sc})$ での開集合かつ閉集合であることを示せ.

問 2.6 (Fortissimo Space) $X=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ とし[1]

$$\mathscr{O}_F=\{V\subset X|V \text{ は高々可算集合, または } \infty\in V\}$$

とおくと $(X,\mathscr{O}_F)$ は位相空間になることを示せ.

[1] ∞ は $\mathbb{R}$ の元ではないことに注意する. ∞ という記号が嫌な場合は ∞ を $\mathbb{R}$ に含まれない元だと思ってください.

問 2.7 位相空間 $(X,\mathscr{O})$ で距離化可能でないものの例をあげよ.[2]

問 2.8 $\mathbb{R}$ にユークリッド位相 $\mathscr{O}_{Euc}$ をいれる. $X=(0,1)\cup(2,3]$ とし, X に $\mathbb{R}$ の部分位相を入れる. このとき $(2,3]$ は X 上の開集合かつ閉集合であることを示せ.

問 2.9 $\mathbb{R}$ にユークリッド位相 $\mathscr{O}_{Euc}$ をいれる. $A=\mathbb{Q}$ について $A^i, \overline{A}$ を求めよ.

問 2.10 $\mathbb{R}$ にユークリッド位相 $\mathscr{O}_{Euc}$ をいれる. 次の問いに答えよ.

(a) $A=\mathbb{Q}$ とし, A に相対位相 $\mathscr{O}_A$ を入れる. $\{0\}$ は A の開集合かどうか判定せよ.

(b) $\{0\}$ は A の閉集合かどうか判定せよ.

(c) $\mathbb{R}$ の部分集合 B で, B は無限集合であり, $(B,\mathscr{O}_B)$ 上において $\{0\}$ が開集合かつ閉集合となる例を一つあげよ. ここで $\mathscr{O}_B$ は相対位相とする.

問 2.11 $(X,\mathscr{O})$ を位相空間とし, A を X の部分集合とする. 次を示せ.

(a) $(A^c)^a=(A^i)^c$;

(b) $(A^c)^i=(A^a)^c$.

問 2.12 * 位相空間 $(X,\mathscr{O})$ とその部分集合 $A,B\subset X$ を考える. 次の主張に関して, 真である場合は証明し, 偽である場合は反例をあげよ.

(a) $(A\cap B)^i=A^i\cap B^i$

(b) $(A\cup B)^i=A^i\cup B^i$

(c) $(A\cap B)^a=A^a\cap B^a$

(d) $(A\cup B)^a=A^a\cup B^a$

問 2.13 * $A, A^i, \overline{A}, \overline{A^i}, (\overline{A})^i, \left(\overline{A^i}\right)^i, \overline{(\overline{A})^i}$ が全て違うような A の例をあげよ. ここで $\overline{A^i}$ は A の内部の閉包, $(\overline{A})^i$ は A の閉包の内部, $\left(\overline{A^i}\right)^i$ は A の内部の閉包の内部, $\overline{(\overline{A})^i}$ は A の閉包の内部の閉包である.

問 2.14 * (Zariski 位相) $\mathbb{Z}$ を整数の集合とする. 素数 p について

$$(p):=\{a\in\mathbb{Z}|\text{ ある } b\in\mathbb{Z} \text{ があって } a=bp\}\subset\mathbb{Z}$$

とし, $Spec(\mathbb{Z}):=\{(p)|p \text{ は素数 }\}$ とする. また整数 n について

$$V_n:=\{(p)\in Spec(\mathbb{Z})|n\in(p)\}\subset Spec(\mathbb{Z})$$

と定義し, $\mathfrak{A}:=\{V_n|n\in\mathbb{Z}\}\subset\mathfrak{P}(Spec(\mathbb{Z}))$ とおく. このとき $\mathfrak{A}$ は閉集合の公理を満たし $(Spec(\mathbb{Z}),\mathfrak{A})$ は位相空間になることを示せ.

[2]つまり「ある距離 d があってその位相が $\mathscr{O}$ となる」ということがない例を挙げてください.