2. 位相空間

岩井雅崇 2022/10/11

問 2.1 $X = \{0, 1\}, \mathscr{O} = \{\varnothing, X, \{0\}\}$ とするとき $(X, \mathscr{O})$ は位相空間になることを示せ.

問 2.2 $X = (0, 1)$ とし,

$$\mathscr{O} = \left\{ \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right) | n \in \mathbb{N}, n \geqq 2 \right\} \cup \{X, \varnothing\}$$

とする. $(X, \mathscr{O})$ は位相空間になることを示せ.

問 2.3 (補有限位相) $\mathbb{R}$ に関して部分集合の族 $\mathscr{O}_c \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ を次で定める.

$$\mathscr{O}_c = \{V \subset \mathbb{R} | \mathbb{R} \setminus V \text{ は有限集合である }\} \cup \{\varnothing\}$$

次の問いに答えよ.

(a) $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_c)$ は位相空間になることを示せ.

(b) $\mathbb{R}$ のユークリッド位相を $\mathscr{O}_{Euc}$ とするとき $\mathscr{O}_c \subset \mathscr{O}_{Euc}$ を示せ.

(c) $A \in \mathscr{O}_{Euc}$ かつ $A \notin \mathscr{O}_c$ なる A の例を一つあげよ.

問 2.4 (上半連続位相) $\mathbb{R}$ に関して部分集合の族 $\mathscr{O}_{usc} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ を次で定める.

$$\mathscr{O}_{usc} = \{(-\infty, t) | t \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$$

次の問いに答えよ.

(a) $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{usc})$ は位相空間になることを示せ.

(b) $\{0\}$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{usc})$ での閉集合ではないことをしめせ.

問 2.5 $\mathbb{R}$ に関して部分集合の族 $\mathscr{O}_{sc} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ を次で定める.

$$\mathscr{O}_{sc} = \{U \cup A \subset \mathbb{R} | U \text{ はユークリッド位相に関する開集合, } A \text{ は } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ の部分集合 }\}$$

次を示せ.

(a) $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{sc})$ は位相空間になることを示せ.

(b) $\{0\}$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{sc})$ での開集合かつ閉集合であることを示せ.

問 2.6 (Fortissimo Space) $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ とし[1]

$$\mathscr{O}_F = \{V \subset X | X \setminus V \text{ は高々可算集合, または } \infty \in V\}$$

とおくと $(X, \mathscr{O}_F)$ は位相空間になることを示せ.

[1] ∞ は $\mathbb{R}$ の元ではないことに注意する. ∞ という記号が嫌な場合は ∞ を $\mathbb{R}$ に含まれない元だと思ってください.

問 2.7 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ で距離化可能でないものの例をあげよ.[2]

問 2.8 $\mathbb{R}$ にユークリッド位相 $\mathscr{O}_{Euc}$ をいれる. $X = (0,1) \cup (2,3]$ とし, X に $\mathbb{R}$ の部分位相を入れる. このとき $(2,3]$ は X 上の開集合かつ閉集合であることを示せ.

問 2.9 $\mathbb{R}$ にユークリッド位相 $\mathscr{O}_{Euc}$ をいれる. $A = \mathbb{Q}$ について $A^i, \overline{A}$ を求めよ.

問 2.10 $\mathbb{R}$ にユークリッド位相 $\mathscr{O}_{Euc}$ をいれる. 次の問いに答えよ.

(a) $A = \mathbb{Q}$ とし, A に相対位相 $\mathscr{O}_A$ を入れる. $\{0\}$ は A の開集合かどうか判定せよ.

(b) $\{0\}$ は A の閉集合かどうか判定せよ.

(c) $\mathbb{R}$ の部分集合 B で, B は無限集合であり, $(B, \mathscr{O}_B)$ 上において $\{0\}$ が開集合かつ閉集合となる例を一つあげよ. ここで $\mathscr{O}_B$ は相対位相とする.

問 2.11 $(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし, A を X の部分集合とする. 次を示せ.

(a) $(A^c)^a = (A^i)^c$;

(b) $(A^c)^i = (A^a)^c$.

問 2.12 * 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ とその部分集合 $A, B \subset X$ を考える. 次の主張に関して, 真である場合は証明し, 偽である場合は反例をあげよ.

(a) $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$

(b) $(A \cup B)^i = A^i \cup B^i$

(c) $(A \cap B)^a = A^a \cap B^a$

(d) $(A \cup B)^a = A^a \cup B^a$

問 2.13 * $A, A^i, \overline{A}, \overline{A^i}, (\overline{A})^i, \overline{(A^i)}^i, \overline{(\overline{A}^i)}$ が全て違うような A の例をあげよ. ここで $\overline{A^i}$ は A の内部の閉包, $(\overline{A})^i$ は A の閉包の内部, $\overline{(A^i)}^i$ は A の内部の閉包の内部, $\overline{(\overline{A}^i)}$ は A の閉包の内部の閉包である.

問 2.14 * (Zariski 位相) $\mathbb{Z}$ を整数の集合とする. 素数 p について

$$(p) := \{a \in \mathbb{Z} | \text{ ある } b \in \mathbb{Z} \text{ があって } a = bp\} \subset \mathbb{Z}$$

とし, $Spec(\mathbb{Z}) := \{(p) | p \text{ は素数 }\}$ とする. また整数 n について

$$V_n := \{(p) \in Spec(\mathbb{Z}) | n \in (p)\} \subset Spec(\mathbb{Z})$$

と定義し, $\mathfrak{A} := \{V_n | n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathfrak{P}(Spec(\mathbb{Z}))$ とおく. このとき $\mathfrak{A}$ は閉集合の公理を満たし $(Spec(\mathbb{Z}), \mathfrak{A})$ は位相空間になることを示せ.

[2]つまり「ある距離 d があってその位相が $\mathscr{O}$ となる」ということがない例を挙げてください.