

9. 連結

岩井雅崇 2022/12/13

問題の上に・がついている問題は解けてほしい問題である。問題の上に*がついている問題は面白いかちょっと難しい問題である。以下断りがなければ \mathbb{R}^n にはユークリッド位相を入れたものを考える。また位相空間 X は2点以上の点を含むものとする。

問 9.1 ・演習で出てきた位相空間を1つあげ連結かどうか判定せよ。ただしこの問題はまだ発表していない人のみ解答でき、複数人の回答を可とする。¹

問 9.2 ・連続な全射写像 $f: X \rightarrow Y$ について X が連結ならば Y も連結であることを示せ。またこれを用いて $(0, 1)$, $[0, 1)$, $[0, 1]$ はどれも互いに同相ではないことを示せ。

問 9.3 ・ X を位相空間とし、 $A \subset X$ を X の連結集合とする。任意の $A \subset B \subset \overline{A}$ となる部分集合 B は X の連結集合であることを示せ。

問 9.4 ・ X をコンパクト位相空間、 Y を連結ハウスドルフ空間とする。連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が開写像であるならば、 f は全射であることを示せ。

問 9.5 ・ X を集合とし、 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ となる開集合系とする。次の問いに答えよ。²

- (a) 位相空間 (X, \mathcal{O}_1) がハウスドルフならば、位相空間 (X, \mathcal{O}_2) もハウスドルフである。
- (b) 位相空間 (X, \mathcal{O}_2) がコンパクトならば、位相空間 (X, \mathcal{O}_1) もコンパクトである。
- (c) 位相空間 (X, \mathcal{O}_2) が連結ならば、位相空間 (X, \mathcal{O}_1) も連結である。

問 9.6 X を位相空間とする。次は同値であることを示せ。

- (i) X は連結である。
- (ii) 任意の実連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ と任意の $u, v \in X, t \in \mathbb{R}$ について、 $f(u) \leq t \leq f(v)$ ならば、ある $w \in X$ が存在して $f(w) = t$ となる。

問 9.7 \mathbb{R}^2 から \mathbb{R} への全単射は存在するが、 \mathbb{R}^2 から \mathbb{R} への同相写像は存在しないことを示せ。

問 9.8 位相空間 X と $x \in X$ について、 x を含む最大の連結集合を x を含む X の連結成分という。次の問いに答えよ。

- (a) $0 \in \mathbb{R}$ を含む \mathbb{R} の連結成分を求めよ。
- (b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ に \mathbb{R} の相対位相を入れる。 $0 \in \mathbb{Q}$ を含む \mathbb{Q} の連結成分を求めよ。
- (c) 連結成分は常に連結な X の閉集合であることを示せ。
- (d) 連結成分は常に X の開集合になるか。正しければ証明し、間違いならば反例を与えよ。

問 9.9 $A \subset \mathbb{R}^2$ を可算集合とする。 $\mathbb{R}^2 \setminus A$ は弧状連結であることを示せ。(特に連結な集合となる。)

¹例えば \mathbb{R}^n, S^n , 離散位相空間, 密着位相空間, $T^2, \mathbb{RP}^n, \mathbb{CP}^n$, グラスマン多様体などが挙げられる。

²開集合が多ければハウスドルフになりやすく、開集合が少なければコンパクト・連結になりやすいということである。

問 9.10 位相空間 X について, 任意の $x \in X$ とその任意の近傍 N について x の弧状連結な近傍 U があって $U \subset N$ となるとき X は局所弧状連結と呼ばれる. 次の問いに答えよ.

- (a) 局所弧状連結だが弧状連結でない空間の例をあげよ.
- (b) 連結かつ局所弧状連結ならば弧状連結であることを示せ. また \mathbb{R}^n の連結開集合は弧状連結になることを示せ.

問 9.11 * (topologist's comb) \mathbb{R}^2 の部分集合 X を

$$X := \{0\} \times (0, 1] \cup (0, 1] \times \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \times (0, 1] \right\}$$

とし, X に \mathbb{R}^2 の相対位相を入れる. 次の問いに答えよ.

- (a) X を図示せよ.
- (b) X は連結であることを示せ.
- (c) X は弧状連結ではないことを示せ. また局所連結ではないことを示せ.

問 9.12 * 問 1.2, 1.3, 1.9, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.14, 4.1, 4.11, 4.12 で出てきた位相空間のハウスドルフ性・コンパクト性・連結性を各々調べよ. なおこの問題は何回も答えて良いし複数人が分担して解答してもよい. なお答えた空間によって配点異なる.

演習の問題は授業ページ (https://masataka123.github.io/2022_winter_general_topology/) にもあります. 右下の QR コードからを読み込んでも構いません.

