

10. 距離空間の完備化

岩井雅崇 2022/12/13

問題の上に・がついている問題は解けてほしい問題である．問題の上に＊がついている問題は面白いちょっと難しい問題である．以下断りがなければ \mathbb{R}^n にはユークリッド位相を入れたものを考える．また位相空間 X は2点以上の点を含むものとする．

問 10.1 ・ $C[0, 1] := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は実数値連続関数} \}$ とおく．以下この問題では，関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ と言えば $f_i \in C[0, 1]$ となる関数の列とする．次の問いに答えよ．

- (a) 「関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ が $f \in C[0, 1]$ に各点収束する」ことの定義を述べよ．
- (b) 「関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ が $f \in C[0, 1]$ に一様収束する」ことの定義を述べよ．
- (c) 関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ が $f \in C[0, 1]$ に一様収束するならば，各点収束することを示せ．
- (d) (c) の逆は一般には成り立たない．その関数列の例を一つあげよ．
- (e) $f, g \in C[0, 1]$ に関して $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} \{|f(x) - g(x)|\}$ とおく．問題 1.2 と同様にして $(C[0, 1], d_\infty)$ は距離空間になる． $(C[0, 1], d_\infty)$ は完備であることを示せ．

問 10.2 ・ 実数列 $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ で $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty$ となるものの集合を l^2 とする． $x, y \in l^2$ について $d_{l^2}(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty (x_n - y_n)^2}$ と定めると，問 1.3 から (l^2, d_{l^2}) は距離空間となる． l^2 はこの距離 d_{l^2} に関して完備であることを示せ．

問 10.3 ・ 次の問いに答えよ．

- (a) 距離空間上のコンパクト集合は有界閉集合であることを示せ．
- (b) (l^2, d_{l^2}) を問 10.2 の通りとし， $A := \{x \in l^2 \mid d_{l^2}(x, x) = 1\}$ とおく． A は (l^2, d_{l^2}) の有界閉集合であるがコンパクト集合ではないことを示せ．また (l^2, d_{l^2}) もコンパクトではないことを示せ．

問 10.4 (X, d) を距離空間とし， X の部分集合 A, B について $d(A, B) := \inf_{a \in A, b \in B} \{d(a, b)\}$ と定める．次の問いに答えよ．

- (a) ある距離空間と互いに交わらない閉集合 A, B で $d(A, B) = 0$ となるものの例をあげよ．
- (b) A をコンパクト集合， B を閉集合とすると， A と B が互いに交わらなければ $d(A, B) = 0$ であることを示せ．

問 10.5 ＊ $(C[0, 1], d_\infty)$ を問 10.1 の通りとする．次の問いに答えよ．

- (a) $A = \{f \in C[0, 1] \mid f([0, 1]) \subset [0, 1]\}$ とおくと， A は $(C[0, 1], d_\infty)$ のコンパクト集合ではないことを示せ．
- (b) $B = \{f \in A \mid \text{任意の } x, y \in [0, 1] \text{ について } |f(x) - f(y)| \leq |x - y|\}$ とおくと， B は $(C[0, 1], d_\infty)$ のコンパクト集合であることを示せ．

問 10.6 ＊ $C[0, 1]$ を問 10.1 の通りとし， $f, g \in C[0, 1]$ に関して

$$d_1(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

とおくと d_1 は $C[0, 1]$ の距離となる. d_1 の距離に関して関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ が $f \in C[0, 1]$ に収束するとき, $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ は f に L^1 収束すると呼ぶ. 次の問いに答えよ.

- (a) $(C[0, 1], d_1)$ は完備ではないことを示せ.
- (b) 関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ が $f \in C[0, 1]$ に一様収束するならば, L^1 収束すること示せ.
- (c) L^1 収束するが一様収束しない関数列の例を一つあげよ.
- (d) 各点収束するが L^1 収束しない関数列の例を一つあげよ.
- (e) 関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ であって, L^1 収束するが, 任意の $x \in [0, 1]$ について $\{f_i(x)\}_{i=1}^\infty$ が収束しない関数列の例を一つあげよ.

問 10.7 * $C[0, 1]$ を問 10.1 の通りとする. $x \in [0, 1]$ について $X_x = \mathbb{R}$ とおくことで, $C[0, 1] \subset \prod_{x \in [0, 1]} X_x$ とみなせる. そこで $\prod_{x \in [0, 1]} X_x$ の積位相の $C[0, 1]$ への相対位相を \mathcal{O}_p とおく. 次の問いに答えよ.

- (a) 関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ が $f \in C[0, 1]$ に各点収束することは, 位相空間 $(C[0, 1], \mathcal{O}_p)$ において $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ が $f \in C[0, 1]$ に収束することと同値であることを示せ. (後者の収束の定義に関しては問題 3.10 を参照せよ.)
- (b) \mathcal{O}_p は距離空間 $(C[0, 1], d_\infty)$ が作る位相 \mathcal{O}_∞ よりも真に小さい, つまり $\mathcal{O}_p \subsetneq \mathcal{O}_\infty$ であることを示せ.¹

問 10.8 * p を素数とする. 0 でない有理数 $r \in \mathbb{Q}$ について, $r = p^e \frac{n}{m}$ (m, n はともに p と互いに素な整数) と表せるとき, $v_p(r) := e$ と定義する. $r \in \mathbb{Q}$ について

$$|r|_p = \begin{cases} p^{-v_p(r)} & (r \neq 0) \\ 0 & (r = 0) \end{cases}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

- (a) 0 でない有理数 $r, s \in \mathbb{Q}$ について, $r + s \neq 0$ ならば $v_p(r + s) \geq \min(v_p(r), v_p(s))$ であることを示せ.
- (b) $x, y \in \mathbb{Q}$ について $d_p(x, y) := |x - y|_p$ とおく. d_p は \mathbb{Q} の距離になることを示せ. 以下 \mathbb{Q}_p を \mathbb{Q} の d_p による完備化とする. また完備化によって誘導される \mathbb{Q}_p 上の距離を d_p と同じ記号で書くことにする.
- (c) $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ を有理数の数列とする. (\mathbb{Q}_p, d_p) 上で $\sum_{n=0}^\infty a_n$ がある値に収束することは $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_p = 0$ であることと同値であることを示せ.
- (d) (\mathbb{Q}_p, d_p) 上で $\sum_{n=0}^\infty p^n = \frac{1}{1-p}$ であることを示せ.
- (e) $b_n \in \{0, 1\}$ かつ (\mathbb{Q}_2, d_2) 上で $\frac{2}{7} = \sum_{n=0}^\infty b_n 2^n$ となるような数列 $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ を決定せよ.

演習の問題は授業ページ (https://masataka123.github.io/2022_winter_general_topology/) にもあります. 右下の QR コードから読み込んでも構いません.



¹問 10.1 と合わせると位相が小さいほど収束しやすいことがわかる.