1. 距離空間の復習

岩井雅崇 2022/10/04

問 1.1 正の自然数 n について $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合 S^n を

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

と定める. S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ の有界閉集合であることを示せ.

問 1.2 閉区間 [a,b] とし,

$$B[a,b] := \{f \mid f \text{ は } [a,b] \text{ 上の実数値有界関数 }\}$$

とし $f, g \in B[a,b]$ について

$$d(f,g) := \sup_{x \in [a,b]} \{|f(x) - g(x)|\}$$

と定める. $(B[a,b], d)$ が距離空間であることを示せ.

問 1.3 実数列 $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ となるものの集合を l^2 とする. $x, y \in l^2$ について

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$$

と定める. d が well-defined であることを示し[1], (l^2, d) は距離空間となることを示せ. (この空間は Hilbert 空間と呼ばれる.)

問 1.4 距離空間 (X, d) とその部分集合 $A \subset X$ において次を示せ.

(a) A の内部 A^i は A に含まれる最大の開集合である.

(b) A の閉包 $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である.

ここで A^i は A の内点の集合とし, $\overline{A}$ は A の触点の集合とする. また A が開集合であるとは $A = A^i$ となることとし A が閉集合であるとは $A = \overline{A}$ となることとする.(教科書 4 章の定義通りとする.)

問 1.5 d, d' を X 上の距離関数とする.

(a) ある正の数 $C > 0$ があって任意の $x, y \in X$ について $d(x,y) \leqq Cd'(x,y)$ ならば, 恒等写像 $id : (X, d') \to (X, d)$ は連続であることを示せ.

(b) (X, d) における開集合全体の集合を $\mathscr{O}_d$ とし, (X', d') における開集合全体の集合を $\mathscr{O}_{d'}$ とする. ある正の数 $C > 0$ があって, $C^{-1}d'(x,y) \leqq d(x,y) \leqq Cd'(x,y)$ ならば, $\mathscr{O}_d = \mathscr{O}_{d'}$ であることを示せ.

[1] $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2$ がなぜ収束するのかを示してください.

問 1.6 A を距離空間 X の部分集合とするとし, $f : X \to \mathbb{R}$ を $f(x) = d(x, A)$ で定める. f は連続であることを示せ.

問 1.7 任意の空でない集合 X について, ある距離関数 d があって (X, d) は距離空間になることをしめせ.

問 1.8 * (X, d) を距離空間とする. X の部分集合 A が有界であるとは, ある正の数 M があって任意の $x, y \in A$ について $d(x, y) \leqq M$ であることとする. $\mathcal{B}(X)$ を X の有界閉集合全体の集合とする. 次の問いに答えよ.

(a) $A, B \in \mathcal{B}(X)$ について $\sup_{x \in A} d(x, B) < +\infty$ であることを示せ.[2]

(b) $A, B \in \mathcal{B}(X)$ について

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(A, y)\}$$

とする. 任意の $x \in X$ について

$$d(x, A) \leqq d(x, B) + d_H(A, B)$$

が成り立つことを示せ.

問 1.9 * 問 1.8 での $(\mathcal{B}(X), d_H)$ は距離空間になることを示せ. (これはハウスドルフ距離と呼ばれる.)

[2] $d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y)$ である.