期末試験 (基礎解析学 2)

2022 年度秋冬学期 大阪大学 全学共通教育科目 火曜 2 限 基礎解析学 II (理 (化))

岩井雅崇 (いわいまさたか) 2023/02/07

第 1 問. 重積分の計算問題 (2 次元)

(1). $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leqq x, x \leqq 1, 0 \leqq y\}$ とする. 重積分 $\iint_D x^2 y \, dxdy$ の値を求めよ.

(2). $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqq x\}$ とする. 重積分 $\iint_D \sqrt{x} \, dxdy$ の値を求めよ.

(3). $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqq x+y \leqq 2, 0 \leqq x-y \leqq 2\}$ とする. 重積分 $\iint_D (x-y)e^{x+y} \, dxdy$ の値を求めよ.

(4). $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqq x, 0 \leqq y, x+y \leqq 1\}$ とする. 重積分 $\iint_D \frac{1}{1+(x+y)^2} \, dxdy$ の値を求めよ.

第 2 問. 重積分の計算問題 (3 次元)

(1). a を正の実数とする. 円柱 $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leqq a^2\}$ と円柱 $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 \leqq a^2\}$ の共通部分 $V_1 \cap V_2$ の体積を求めよ.

(2). $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leqq x, 0 \leqq y, 0 \leqq z, x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\}$ とする. 重積分 $\iiint_V z \, dxdydz$ の値を求めよ.

第 3 問. 広義積分・ガウス積分

(1). 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ は収束することを示せ.

(2). a を正の実数とし, $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqq a^2\}$ とおく. 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2} dxdy \leqq \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \right)^2 \leqq \iint_{D_{2a}} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

(3). 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ の値を求めよ.

おまけの問題に続く.

おまけ問題. 積分の定義

(1). 関数 $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & (x \text{ が有理数で互いに素な } 0 \text{ 以上の整数 } p, q \text{ を用いて } x = \frac{p}{q} \text{ と表せれるとき.}) \\ 0 & (x \text{ が無理数のとき}) \end{cases}$$

とする. (ただし $g(0) = 0$ とする.) $g(x)$ は $[0,1]$ 上でリーマン積分可能か判定せよ.

(2). 次の定理はバナッハ・タルスキーの定理とよばれる.

定理 1 (Banach-Tarski 1924)**.** 3 次元空間内の半径 1 の球体を有限個に分割したのち、それらのパーツを平行移動したり回転させたりして組み合わせることにより半径 1 の球体を 2 個作ることが出来る.

バナッハ・タルスキーの定理を用いた $1 = 2$ の証明がある. これは次のとおりである.[1]

証明 ??. 3 次元空間内の半径 1 の球体 D とすると, バナッハ・タルスキーの定理から, D は互いに交わらない有限個の $\mathbb{R}^3$ の集合 $A_1, \ldots, A_N, B_1, \ldots, B_N$ に分割できて, $A_1, \ldots, A_N$ を並行移動したり回転させたりして組み合わせると D になり, $B_1, \ldots, B_N$ を並行移動したり回転させたりして組み合わせると D になる. よって空間図形 C の体積 $v(C)$ と表すことにすると,

$$\begin{aligned} v(D) &= v(A_1) + \cdots + v(A_N) + v(B_1) + \cdots + v(B_N) \quad (\text{互いに交わらないから.}) \\ &= v(D) + v(B_1) + \cdots + v(B_N) \quad (A_1, \ldots, A_N \text{ を並行移動・回転で組み合わせると } D \text{ になるから.}) \\ &= v(D) + v(D) \quad (B_1, \ldots, B_N \text{ を並行移動・回転で組み合わせると } D \text{ になるから.}) \end{aligned}$$

半径 1 の球体 D の体積 $v(D)$ は 0 ではないので, 上の式から $1 = 2$ を得る. □

もちろん上の証明には間違いがある. その間違いを指摘せよ.

[1] 「半径 1 の球体 1 個が 2 個になったから $1 = 2$」というのをより論理的に書いたものである.