基礎解析学 2 -一変数と多変数の積分- 演習問題

岩井雅崇 2023/01/10

1 期末試験の日時・内容

期末試験の情報は次のとおりです.

1. 期末試験の日時は 2023 年 2 月 7 日 (火)2 限 (10:30-12:00) です. 試験開始 5 分前には着席しておいてください.
2. 期末試験の場所は豊中総合学館 302 です.
3. 教科書・ノート等の持ち込みはできません. スマートフォン・携帯も使用できません.

期末試験の問題は以下のものを考えております.

- 重積分の計算問題 (2 次元). 「第 5 回授業の重積分 2 -累次積分」「第 6 回授業の重積分 3 -重積分の変数変換公式-」の内容.
- 重積分の計算問題 (3 次元). 「第 7 回授業の重積分 4 -3 次元の積分と体積-」の内容.
- 広義積分. 「第 8 回授業の広義積分 1-広義積分の定義とガウス積分-」の内容.

これらの内容が期末試験のメインとなります. これらの内容で 100 点程度を考えております.

またおまけの問題は「第 4 回授業の重積分 1 -重積分の定義-」と「第 2 回授業の一変数の積分 1 -微分積分学の基本定理-」を考えております. これは解けることを想定していない問題です. 10 点くらいを考えております.

以下 110 点 (ぐらい) で出来に応じて何か修正をします. 基本的な計算問題を解けていれば不可になることはありません . 逆を返すと「この計算問題は間違えるはずがない」という問題に関してありえない解答をしていれば, 不可になります. [1]

この演習の問題及び授業の資料・板書内容は授業ページ (https://masataka123.github.io/2022_winter_int/) にもあります. 右下の QR コードからを読み込んでも構いません.

[1]正解なら 0 点で間違えれば-20 点という問題を出す人もいますが, 今回はやめておきました.

2　演習問題

第 1 問. 重積分の計算問題 (2 次元)

(1). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq y,\ 0 \leqq x - y,\ x + y \leqq 2\}$ とする．重積分 $\iint_D (x^2 - y^2)dxdy$ の値を求めよ．

(2). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leqq 1\}$ とする．重積分 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$ の値を求めよ．

(3). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq x\}$ とする．重積分 $\iint_D \sqrt{x}dxdy$ の値を求めよ．

(4). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqq 1\}$ とする．重積分 $\iint_D x^2 dxdy$ の値を求めよ．

第 2 問. 重積分の計算問題 (3 次元)

(1). a を正の実数とする．円柱 $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqq ax\}$ と球 $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2\}$ の共通部分 $V_1 \cap V_2$ の体積を求めよ．

(2). a を正の実数とする．円柱 $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqq a^2\}$ と球 $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4a^2\}$ の共通部分 $V_1 \cap V_2$ の体積を求めよ．

(3). $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\}$ とする．重積分 $\iiint_V xdxdydz$ の値を求めよ．

第 3 問. 広義積分

p を実数とし $f(x) = x^p \log x$ とする．次の問いに答えよ．

(1). $p < -1$ ならば広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ は収束することを示せ．

(2). $p \geqq -1$ ならば広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ は発散することを示せ．

3　演習問題の解答

第 1 問. 重積分の計算問題 (2 次元)

(1). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq y,\ 0 \leqq x - y,\ x + y \leqq 2\}$ とする. 重積分 $\iint_D (x^2 - y^2)dxdy$ の値を求めよ.

(解.) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq y \leqq 1, y \leqq x \leqq 2 - y\}$ より累次積分を使用して

$$\iint_D (x^2 - y^2)dxdy = \int_0^1 \int_y^{2-y} (x^2 - y^2)dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - xy^2\right]_y^{2-y} dy = \int_0^1 \left(\frac{4y^3}{3} - 4y + \frac{8}{3}\right) dy = 1.$$

(2). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} \leqq 1\}$ とする. 重積分 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ の値を求めよ.
(解.) $E = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ とし,

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

とすると, 多重積分の変数変換の公式から

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy &= \iint_E e^{-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}|r|drd\theta = \iint_E e^{-r^2}rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 e^{-r^2}rdr\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - e^{-1}}{2} d\theta = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right). \end{aligned}$$

(3). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqq x\}$ とする. 重積分 $\iint_D \sqrt{x}dxdy$ の値を求めよ.
(解.) $E = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqq r \leqq \cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\}$ とし,

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

とすると, 多重積分の変数変換の公式から

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x}dxdy &= \iint_E (r\cos\theta)^{\frac{1}{2}} rdrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} r^{\frac{3}{2}} (\cos\theta)^{\frac{1}{2}} drd\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{5}r^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\cos\theta} d\theta = \frac{2}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^3 d\theta = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

(4). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqq 1\}$ とする. 重積分 $\iint_D x^2dxdy$ の値を求めよ.
(解.) $E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq u \leqq 1, 0 \leqq v \leqq 1 - u\}$ とし,

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u, v) & \longmapsto & (u^2, v^2) \end{array}$$

とすると, 多重積分の変数変換の公式から

$$\iint_D x^2 dxdy = \iint_E u^4(4uv)dudv = \int_0^1 \int_0^{1-u} 4u^5 v\, dvdu$$
$$= \int_0^1 4u^5 \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{1-u} du = 2\int_0^1 \left(u^5 - 2u^6 + u^7\right) du = \frac{1}{84}.$$

第 2 問. 重積分の計算問題 (3 次元)

(1). a を正の実数とする. 円柱 $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqq ax\}$ と球 $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqq a^2\}$ の共通部分 $V_1 \cap V_2$ の体積を求めよ.
(解.) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leqq ax\}$ とおくと

$$V_1 \cap V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, -\sqrt{a^2-x^2-y^2} \leqq z \leqq \sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$$

である. よって $V_1 \cap V_2$ の体積は

$$\iiint_V dxdydz = \iint_D \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\right) dxdy = \iint_D 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos\theta} 2\sqrt{a^2-r^2}\, rdrd\theta \quad (\text{第 1 問 (3) に同じ.})$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{-2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\cos\theta} d\theta$$
$$= \frac{2a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - |\sin\theta|^3 d\theta = \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - (\sin\theta)^3 d\theta = \frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

(2). a を正の実数とする. 円柱 $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqq a^2\}$ と球 $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 4a^2\}$ の共通部分 $V_1 \cap V_2$ の体積を求めよ.
(解.) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leqq a^2\}$ とおくと

$$V_1 \cap V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, -\sqrt{4a^2-x^2-y^2} \leqq z \leqq \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$$

である. よって $V_1 \cap V_2$ の体積は

$$\iiint_V dxdydz = \iint_D \left(\int_{-\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz\right) dxdy = \iint_D 2\sqrt{4a^2-x^2-y^2}dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{a} 2\sqrt{4a^2-r^2}\, rdrd\theta \quad (\text{第 1 問 (2) に同じ.})$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-2}{3}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(8-3\sqrt{3})a^3 d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}(8-3\sqrt{3}).$$

(3). $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2\leqq 1\}$ とする．重積分 $\iiint_V xdxdydz$ の値を求めよ．
(解.) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqq 1\}$ とおくと

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,(x,y)\in D,-\sqrt{1-x^2-y^2}\leqq z\leqq\sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\iiint_V xdxdydz&=\iint_D\left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}xdz\right)dxdy=\iint_D 2x\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\cos\theta\sqrt{1-r^2}\,rdrd\theta\quad\text{(第 1 問 (2) に同じ.)}\\&=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}2r^2\sqrt{1-r^2}\cos\theta d\theta\right)dr=\int_0^1\left[2r^2\sqrt{1-r^2}\sin\theta\right]_0^{2\pi}dr=\int_0^1 0dr=0.\end{aligned}$$

第 3 問. 広義積分

p を実数とし $f(x)=x^p\log x$ とする．

(1). $p<-1$ ならば広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ は収束することを示せ.
(解.) $p<-1$ よりある $\epsilon>0$ があって $p+\epsilon<-1$ となる．よって

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{p+\epsilon}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p\log x}{x^{p+\epsilon}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\epsilon}=0$$

であるので, $[1,+\infty)$ 上で $\frac{f(x)}{x^{p+\epsilon}}$ は有界である．つまりある $C>0$ があって, $[1,+\infty)$ 上で $|\frac{f(x)}{x^{p+\epsilon}}|<C$ となる．以上より, $[1,+\infty)$ 上で $|f(x)|<Cx^{p+\epsilon}$ かつ, 広義積分 $\int_1^\infty Cx^{p+\epsilon}dx$ は $p+\epsilon<-1$ より収束するので, 第 8 回授業の広義積分の収束判定法から広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ も収束する．

(2). $p\geqq -1$ ならば広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ は発散することを示せ．
(解.) $3\leqq x$ ならば $1\leqq\log x$ であるので, $[3,+\infty)$ 上で $x^p\leqq x^p\log x$ である．また広義積分 $\int_3^\infty x^pdx$ は $p\geqq -1$ であるので $+\infty$ に発散する．よって第 8 回授業の広義積分の収束判定法から広義積分 $\int_3^\infty f(x)dx$ も $+\infty$ に発散する．以上より広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ も $+\infty$ に発散する．

[補足 1.] 上の議論に関して使っている定理は次のものである．

定理 1. $[1,+\infty)$ 上の連続関数 $g(x)$ について, ある定数 $B>0$ があって $\lim_{x\to+\infty}g(x)=B$ ならば, ある定数 $C>0$ があって $g(x)<C$ となる．

(証.) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=B$ より, ある $R>0$ があって, $[R,+\infty)$ 上で $|g(x)|<B+1$ となる．一方 $[1,R]$ 上で $g(x)$ は最大値・最小値を持つので (閉区間上の連続関数は最大値を持つ), ある $M>0$ があって, $[1,R]$ 上で $|g(x)|<M$ となる．よって, $[1,+\infty)$ 上で $|g(x)|<1+M+B=C$ となる．
[補足 2.] 前バージョンで「どのようにして収束判定したのかわからない」というコメントがあった．使っている収束判定法は次のものである．

定理 2. $f(x)$ を $[a,b)$ 上の連続関数とする．$[a,b)$ 上の連続関数 $g(x)$ があって，$[a,b)$ 上で $|f(x)| \leqq g(x)$ かつ広義積分 $\int_a^b g(x)dx$ が収束すると仮定する．このとき広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ もまた収束する．

定理 3. $f(x)$ を $[a,b)$ 上の連続関数とする．$[a,b)$ 上の連続関数 $g(x)$ があって，$[a,b)$ 上で $0 \leqq g(x) \leqq f(x)$ かつ広義積分 $\int_a^b g(x)dx$ が発散すると仮定する．このとき広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ もまた発散する．

定理 4 (広義積分の判定法)**.** $f(x)$ を $[a,b)$ 上の連続関数とする．

1. $b = +\infty$ のとき，ある $\lambda > 1$ があって，$f(x)x^\lambda$ が $[a,+\infty)$ 上で有界ならば，広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ は収束する．
2. b が実数のとき ($b < +\infty$ のとき)，ある $\mu < 1$ があって，$f(x)(x-b)^\mu$ が $[a,b)$ 上で有界ならば，広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束する．

この解答では「定理 2 と定理 3」または「定理 4」を用いて収束判定をしていることがわかる．