

基礎解析学 2 - 変数と多変数の積分 - 演習問題

岩井雅崇 2023/01/10

1 期末試験の日時・内容

期末試験の情報は次のとおりです。

1. 期末試験の日時は 2023 年 2 月 7 日 (火) 2 限 (10:30-12:00) です。試験開始 5 分前には着席しておいてください。
2. 期末試験の場所は豊中総合学館 302 です。
3. 教科書・ノート等の持ち込みはできません。スマートフォン・携帯も使用できません。

期末試験の問題は以下のものを考えております。

- 重積分の計算問題 (2 次元)。「第 5 回授業の重積分 2 - 累次積分」「第 6 回授業の重積分 3 - 重積分の変数変換公式-」の内容。
- 重積分の計算問題 (3 次元)。「第 7 回授業の重積分 4 - 3 次元の積分と体積-」の内容。
- 広義積分。「第 8 回授業の広義積分 1 - 広義積分の定義とガウス積分-」の内容。

これらの内容が期末試験のメインとなります。これらの内容で 100 点程度を考えております。

またおまけの問題は「第 4 回授業の重積分 1 - 重積分の定義-」と「第 2 回授業の一変数の積分 1 - 微分積分学の基本定理-」を考えております。これは解けることを想定していない問題です。10 点くらいを考えております。

以下 110 点 (ぐらい) で出来に応じて何か修正をします。基本的な計算問題を解けていれば不可になることはありません。逆を返すと「この計算問題は間違えるはずがない」という問題に関してありえない解答をしていれば、不可になります。¹

この演習の問題及び授業の資料・板書内容は授業ページ (https://masataka123.github.io/2022_winter_int/) にもあります。右下の QR コードからを読み込んでも構いません。



¹ 正解なら 0 点で間違えれば -20 点という問題を出す人もいますが、今回はやめておきました。

2 演習問題

第1問. 重積分の計算問題 (2次元)

(1). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y, 0 \leq x - y, x + y \leq 2\}$ とする. 重積分 $\iint_D (x^2 - y^2) dx dy$ の値を求めよ.

(2). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ とする. 重積分 $\iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy$ の値を求めよ.

(3). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq x\}$ とする. 重積分 $\iint_D \sqrt{x} dx dy$ の値を求めよ.

(4). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$ とする. 重積分 $\iint_D x^2 dx dy$ の値を求めよ.

第2問. 重積分の計算問題 (3次元)

(1). a を正の実数とする. 円柱 $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq ax\}$ と球 $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ の共通部分 $V_1 \cap V_2$ の体積を求めよ.

(2). a を正の実数とする. 円柱 $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ と球 $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2\}$ の共通部分 $V_1 \cap V_2$ の体積を求めよ.

(3). $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とする. 重積分 $\iiint_V x dx dy dz$ の値を求めよ.

第3問. 広義積分

p を実数とし $f(x) = x^p \log x$ とする. 次の問いに答えよ.

(1). $p < -1$ ならば広義積分 $\int_1^\infty f(x) dx$ は収束することを示せ.

(2). $p \geq -1$ ならば広義積分 $\int_1^\infty f(x) dx$ は発散することを示せ.

3 演習問題の解答

第1問. 重積分の計算問題 (2次元)

(1). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y, 0 \leq x - y, x + y \leq 2\}$ とする. 重積分 $\iint_D (x^2 - y^2) dx dy$ の値を求めよ.

(解.) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2 - y\}$ より累次積分を使用して

$$\iint_D (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^1 \int_y^{2-y} (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - xy^2 \right]_y^{2-y} dy = \int_0^1 \left(\frac{4y^3}{3} - 4y + \frac{8}{3} \right) dy = 1.$$

(2). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ とする. 重積分 $\iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy$ の値を求めよ.

(解.) $E = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ とし,

$$\begin{aligned} \Phi: E &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

とすると, 多重積分の変数変換の公式から

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy &= \iint_E e^{-(r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2} |r| dr d\theta = \iint_E e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 e^{-r^2} r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - e^{-1}}{2} d\theta = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

(3). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq x\}$ とする. 重積分 $\iint_D \sqrt{x} dx dy$ の値を求めよ.

(解.) $E = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ とし,

$$\begin{aligned} \Phi: E &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

とすると, 多重積分の変数変換の公式から

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x} dx dy &= \iint_E (r \cos \theta)^{\frac{1}{2}} r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} r^{\frac{3}{2}} (\cos \theta)^{\frac{1}{2}} dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{5} r^{\frac{5}{2}} \right]_0^{\cos \theta} d\theta = \frac{2}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^3 d\theta = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

(4). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$ とする. 重積分 $\iint_D x^2 dx dy$ の値を求めよ.

(解.) $E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u\}$ とし,

$$\begin{aligned} \Phi: E &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (u^2, v^2) \end{aligned}$$

とすると, 多重積分の変数変換の公式から

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 dx dy &= \iint_E u^4 (4uv) du dv = \int_0^1 \int_0^{1-u} 4u^5 v dv du \\ &= \int_0^1 4u^5 \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{1-u} du = 2 \int_0^1 (u^5 - 2u^6 + u^7) du = \frac{1}{84}.\end{aligned}$$

第2問. 重積分の計算問題 (3次元)

(1). a を正の実数とする. 円柱 $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq ax\}$ と球 $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ の共通部分 $V_1 \cap V_2$ の体積を求めよ.

(解.) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq ax\}$ とおくと

$$V_1 \cap V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}$$

である. よって $V_1 \cap V_2$ の体積は

$$\begin{aligned}\iiint_V dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dz \right) dx dy = \iint_D 2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} 2\sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta \quad (\text{第1問(3)に同じ.}) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{-2}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{a \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - |\sin \theta|^3 d\theta = \frac{4a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - (\sin \theta)^3 d\theta = \frac{4a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).\end{aligned}$$

(2). a を正の実数とする. 円柱 $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ と球 $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2\}$ の共通部分 $V_1 \cap V_2$ の体積を求めよ.

(解.) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ とおくと

$$V_1 \cap V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, -\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\}$$

である. よって $V_1 \cap V_2$ の体積は

$$\begin{aligned}\iiint_V dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{-\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} dz \right) dx dy = \iint_D 2\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a 2\sqrt{4a^2 - r^2} r dr d\theta \quad (\text{第1問(2)に同じ.}) \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-2}{3} (4a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} (8 - 3\sqrt{3}) a^3 d\theta = \frac{4\pi a^3}{3} (8 - 3\sqrt{3}).\end{aligned}$$

(3). $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とする. 重積分 $\iiint_V x dx dy dz$ の値を求めよ.
(解.) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおくと

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in D, -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

である. よって

$$\begin{aligned} \iiint_V x dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x dz \right) dx dy = \iint_D 2x \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r \cos \theta \sqrt{1-r^2} r dr d\theta \quad (\text{第1問(2)に同じ.}) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 2r^2 \sqrt{1-r^2} \cos \theta d\theta \right) dr = \int_0^1 \left[2r^2 \sqrt{1-r^2} \sin \theta \right]_0^{2\pi} dr = \int_0^1 0 dr = 0. \end{aligned}$$

第3問. 広義積分

p を実数とし $f(x) = x^p \log x$ とする.

(1). $p < -1$ ならば広義積分 $\int_1^\infty f(x) dx$ は収束することを示せ.

(解.) $p < -1$ よりある $\epsilon > 0$ があって $p + \epsilon < -1$ となる. よって

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{p+\epsilon}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p \log x}{x^{p+\epsilon}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\epsilon} = 0$$

であるので, $[1, +\infty)$ 上で $\frac{f(x)}{x^{p+\epsilon}}$ は有界である.² つまりある $C > 0$ があって, $[1, +\infty)$ 上で $|\frac{f(x)}{x^{p+\epsilon}}| < C$ となる. 以上より, $[1, +\infty)$ 上で $|f(x)| < C x^{p+\epsilon}$ かつ, 広義積分 $\int_1^\infty C x^{p+\epsilon} dx$ は $p + \epsilon < -1$ より収束するので, 広義積分 $\int_1^\infty f(x) dx$ も収束する.

(2). $p \geq -1$ ならば広義積分 $\int_1^\infty f(x) dx$ は発散することを示せ.

(解.) $3 \leq x$ ならば $1 \leq \log x$ であるので, $[3, +\infty)$ 上で $x^p \leq x^p \log x$ である. また広義積分 $\int_3^\infty x^p dx$ は $p \geq -1$ であるので $+\infty$ に発散する. よって広義積分 $\int_3^\infty f(x) dx$ も $+\infty$ に発散する. 以上より広義積分 $\int_1^\infty f(x) dx$ も $+\infty$ に発散する.

²ここを正確に述べると, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{p+\epsilon}} = 0$ より, ある $R > 0$ があって, $[R, +\infty)$ 上で $|\frac{f(x)}{x^{p+\epsilon}}| < 1$ となる. 一方 $[1, R]$ 上で $\frac{f(x)}{x^{p+\epsilon}}$ は最大値・最小値を持つので (閉区間上の連続関数は最大値を持つ), ある $M > 0$ があって, $[1, R]$ 上で $|\frac{f(x)}{x^{p+\epsilon}}| < M$ となる. よって, $[1, +\infty)$ 上で $|\frac{f(x)}{x^{p+\epsilon}}| < 1 + M$ となる. よって有界である.