5-6 ベクトル場と積分曲線

岩井雅崇 2022/11/18

1　おわび

前回の問題は「あまり教育的でない・難しすぎる」など少々良くなかった気がします．今回は教育的な問題などを集めました．[1] また演習でも糟谷先生のプリントの問題も解いて良いです．[2]

2　多様体に関する諸注意

前回の演習の授業で少々気になった点があったので，何点か補足する．

2.1　多様体の座標近傍の書き方．

多様体の基礎の座標近傍の定義や多様体の定義は次のとおりである．

定義 1. 位相空間 M の開集合 U から $\mathbb{R}^m$ の開集合 V への同相写像 $\varphi : U \to V$ について (U, φ) を m 次元座標近傍といい，φ を U 上の局所座標系という．
$p \in U$ について，$\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_m)$ とかける．$x_1, \ldots, x_m$ を (U, φ) に関する p の局所座標という.(U, φ) のことを $(U; x_1, \ldots, x_m)$ と書くことがある．

定義 2. M をハウスドルフ空間とする．次の条件が成り立つとき M は m 次元 C^∞ 級多様体と呼ばれる．

1. 座標近傍系 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ があって，$M = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となる．
2. $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ なる $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ は C^∞ 級写像である

「多様体の基礎」の定義のおける $x_1, \ldots, x_m$ は厳密に言えば $x_i : U \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ となる U 上の関数である．一方でこの本は後の方で「$(x_1, \ldots, x_m) \in \varphi(U)$ について...」と $x_1, \ldots, x_m$ が点を表しているように書いている．（これは初学者が大変困惑する同一視である．慣れたらこっちの方が楽ではあるが.)[3]

また局所座標系を明示する際には (U, φ) と $(U; x_1, \ldots, x_m)$ の二つがあるが私は後者を使うことをお勧めする．これは接ベクトル空間の定義 3 の (3) をよく使うからである.[4]

2.2　接ベクトル空間の定義と書き方について．

定義 3 (接ベクトル空間)**.** m 次元 C^∞ 級多様体 M と $p \in M$ について次の集合は一致する．

1. p における方向微分 v の集合 $D_p^\infty(M)$．ここで v が p における方向微分であるとは，p の開近傍で定義された C^∞ 級関数 ξ について実数 $v(\xi)$ を対応させる操作であって次

[1]演習の授業を担当していて気づいたのですが，学生のみなさんは「演習問題は全て解けるもの」を用意してると思われているようです．難しい問題や良くない問題も用意しているので，全部解こうとはしないほうが賢明です．

[2]演習でプリントの問題を発表して CLE で提出するのも良いです．

[3]気になって別の本「トゥー 多様体 (L. W. Tu *An introduction to Manifolds.*)」を見たが，その本では区別して書いていた．「トゥー 多様体」の英語版は学内から Springer Link を経由することで無料で入手可能である．

[4]「トゥー 多様体」では「局所座標系を $(U, \varphi) = (U; x_1, \ldots, x_m)$ とする」と言う書き方をしていた．要するに座標系の書き方は世界共通ではなさそうだ．気になる人は「トゥー 多様体」の書き方でも良い．

を満たすものとする.

(a) ξ,η が p の周りで一致すれば $v(\xi)=v(\eta)$.

(b) 実数 a,b について $v(a\xi+b\eta)=av(\xi)+bv(\eta)$.

(c) $v(\xi\eta)=v(\xi)\eta(p)+\xi(p)v(\eta)$.

2. 曲線 c に沿った方向微分 v_c 全体の集合. ここで c は M にはいる C^∞ 級曲線 $c:(-\epsilon,\epsilon)\to M$ で $c(0)=p$ を満たすものとし, v_c は p の開近傍で定義された C^∞ 級関数 ξ について実数

$$v_c:\xi\mapsto \left.\frac{d\xi(c(t))}{dt}\right|_{t=0}$$

を対応させるものとする.

3. $(U;x_1,\dots,x_m)$ を p の周りの座標系とした場合の $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p,\dots,(\frac{\partial}{\partial x_m})_p$ ではられる $\mathbb{R}$ ベクトル空間 $T_p(M)$. ここで $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ とは p の開近傍で定義された C^∞ 級関数 ξ について実数

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p:\xi\mapsto\frac{\partial\xi}{\partial x_i}(p)$$

を対応させるものとする.

この $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間をM の接ベクトル空間と呼び T_pM とかく.

補足 4. C^∞ 級でない場合でも (3) $\subset$ (2) $\subset$ (1) は成り立つ. ただ (1) $\subset$ (3) が成り立つのは C^∞ 級の多様体のみである (多様体の基礎 p.86 注意を見よ).

また定義 3 の (3) においても定義 1 のような同一視がなされている. もっと正確に書けば, 座標系を $(U,\varphi)=(U;x_1,\dots,x_m)$ とし, $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m$ の標準座標を $r_1,\dots,r_m$ とするとき,

$$\frac{\partial\xi}{\partial x_i}(p):=\frac{\partial(\xi\circ\varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p)) \text{ となる.}$$

要するに接ベクトル空間 T_pM の元を表す方法は 3 つある. 人にもよるが私は定義 3 の (3) の書き方がわかりやすいと思う. つまり $v\in T_pM$ の元はある $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}$ を用いて

$$v=\sum_{i=1}^m a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \text{ と書くことができる.}$$ [5]

定義 5. M を m 次元 C^∞ 級多様体, N を n 次元 C^∞ 級多様体, $f:M\to N$ を C^∞ 級写像とする. $p\in M$ をとり $q:=f(p)\in N$ とする. 次の写像 $(df)_p:T_p(M)\to T_q(N)$ は一致する.

1. p における方向微分 v について

$$(df)_p(v):\eta\mapsto v(\eta\circ f)$$

と定義する. (η は q の開近傍で定義された C^∞ 級関数である). $(df)_p(v)$ は q における方向微分となり, $T_q(N)$ の元となる.

2. 曲線 c に沿った方向微分 v_c(ただし c は C^∞ 級写像 $c:(-\epsilon,\epsilon)\to M$ で $c(0)=p$ を満た

[5] 接ベクトル空間を「何かよくわからないもの $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ が $\mathbb{R}$ 上ではられるもの」と思うという荒技もある. これはベクトル束の立場から見るとそうなる. 恥ずかしながら接ベクトル空間の厳密な定義を最近まで忘れていた. (ベクトル場を構成した論文を出してたので油断していました.)

すもの) について,

$$(df)_p(v_c) := v_{f\circ c}$$

と定義する．$f\circ c(0)=q$ を満たすため $v_{f\circ c}$ は $T_q(N)$ の元である．

3. $(V, y_1,\dots,y_n)$ を q の周りの座標系, $(U;x_1,\dots,x_m)$ を $f(U)\subset V$ となる p の周りの座標系とする．f を $(U;x_1,\dots,x_m)$ と $(V,y_1,\dots,y_n)$ によって局所座標表示したものを

$$y_1=f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,y_n=f_n(x_1,\dots,x_m)$$

としたとき, $(df)_p : T_p(M)\to T_q(N)$ を次のように定義する．

$$(df)_p : \sum_{i=1}^m a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mapsto \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^m a_i\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q$$

この $(df)_p : T_p(M)\to T_q(N)$ をp における f の微分という．

補足 **6.** 定義 5 (3) において, $b_j=\sum_{i=1}^m a_i\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)$ とおき, $n\times m$ 行の行列 $(Jf)_p$ を

$$(Jf)_p=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p)\end{pmatrix}\ \text{とすれば,}\ \begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=(Jf)_p\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}\ \text{が成り立つ.}$$

$(Jf)_p$ をヤコビ行列と呼ぶ.[6] またここでも定義 1 のような同一視がなされている．正確に書けば次のとおりである: 座標系を $(U,\varphi)=(U;x_1,\dots,x_m)$ とする．$\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m$ の標準座標を $r_1,\dots,r_m$ とする．$(V,\psi)=(V,y_1,\dots,y_n)$ を q の座標系とする．$\psi(z)=(y_1(z),\dots,y_n(z))$ に注意すれば,

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(y_j\circ f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p))\ \text{となる.}$$

3 ベクトル場の定義と性質

以下断りがなければ M を m 次元 C^∞ 級多様体とする．

定義 **7** (ベクトル場)**.**

1. $p\in M$ について $X_p\in T_pM$ が一つずつ対応しているとき, その対応 $X=\{X_p\}_{p\in M}$ を M 上のベクトル場という．
2. 座標近傍 $(U,x_1,\dots,x_m)$ について, U 上のベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ を

$$\frac{\partial}{\partial x_i} := \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}_{p\in U}\ \text{と定義する.}$$

3. M 上のベクトル場 X と座標近傍 $(U,x_1,\dots,x_m)$ について, ある U 上の関数 $\xi_i : U\to\mathbb{R}$ があって

$$X|_U=\{X_p\}_{p\in U}=\xi_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\xi_m\frac{\partial}{\partial x_m}$$

[6] これは座標系 $(U;x_1,\dots,x_m),(V,y_1,\dots,y_n)$ に依存する．

とかける．各座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について上の ξ_i が C^∞ 級となるとき，X は C^∞ ベクトル場であるという M 上の C^∞ 級ベクトル場の集合を $\mathscr{X}(M)$ で表す．

定義 8 (ベクトル場の演算)**.** X, Y を M 上の C^∞ ベクトル場，f を M 上の C^∞ 級関数とする．

1. $p \in M$ について $Xf(p) := X_p(f)$ と定義する (定義 3 の (1) を使った)．Xf を関数 f にベクトル場を作用させて得られる関数と呼ぶ．座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について $X|_U = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m}$ と書けている場合
$$Xf(p) = \xi_1(p)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + \xi_m(p)\frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \text{ となる．}$$
2. X, Y のかっこ積 (Lie bracket) を $[X, Y] := XY - YX$ と定める．$[X, Y]$ は C^∞ 級ベクトル場となる．座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について $X|_U = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y|_U = \sum_{i=1}^m \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と書けている場合
$$[X, Y]|_U = (XY - YX)|_U = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^m \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ となる．}$$
3. $F : M \to N$ を C^∞ 級微分同相写像とする．M 上の C^∞ 級ベクトル場 X について，N 上のベクトル場 F_*X を $(F_*X)_{f(p)} := (dF)_p(X_p)$ とする．

4 積分曲線・1 パラメーター変換群・リー微分

以下断りがなければ M を m 次元 C^∞ 級多様体とし，X を C^∞ 級ベクトル場とする．

定義 9 (積分曲線)**.** a を実数または $-\infty$，b を実数または $+\infty$ とし，開区間 (a, b) は 0 を含むとする．C^∞ 級曲線 $c : (a, b) \to M$ が X の積分曲線であるとは，任意の $\alpha \in (a, b)$ について
$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=\alpha} = X_{c(\alpha)}$$
が成り立つこととする (左辺に関しては定義 3 参照)．$c(0) = p$ を c の初期値という．

定理 10 (積分曲線の局所的な存在と一意性)**.**

1. 任意の $p \in M$ について，正の数 $\epsilon > 0$ と $c(0) = p$ となる積分曲線 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ が存在する．
2. 0 を含む開区間 $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ と積分曲線 $c_1 : (a_1, b_1) \to M$, $c_2 : (a_2, b_2) \to M$ について，$c_1(0) = c_2(0)$ ならば，c_1 と c_2 は $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ 上で一致する．

定義 11.

1. $p \in M$ を初期値とする積分曲線 $c_p : (a, b) \to M$ で定義域をこれ以上広げられないものを極大積分曲線という．

2. 任意の $p \in M$ を初期値とする極大積分曲線 $c_p : (a, b) \to M$ の定義域 (a, b) が $\mathbb{R}$ であるとき, X は完備なベクトル場であるという.

c_p を p を初期値とする極大積分曲線[7]とすると, $t \in \mathbb{R}$ について $c_p(t)$ は"ベクトル場 X に沿って時間 t だけ流した時の位置"を対応させているとみれる.

定理 12. X を完備な C^∞ 級ベクトル場とし, $p \in M$ を通る極大積分曲線を $c_p : \mathbb{R} \to M$ とする. $t \in \mathbb{R}$ について $\varphi_t : M \to M$ を

$$\begin{array}{rccc} \varphi_t : & M & \to & M \\ & p & \mapsto & c_p(t) \end{array}$$

とおく. このとき $\varphi_t : M \to M$ は C^∞ 級同相写像であり次が成り立つ.

1. $\varphi_0 = \mathrm{id}_M$.
2. $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ $(\forall t, s \in \mathbb{R})$.
3. $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$ $(\forall t \in \mathbb{R})$.
4. 次の写像 $F : \mathbb{R} \times M \to M$ は C^∞ 級写像である

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathbb{R} \times M & \to & M \\ & (t, p) & \mapsto & \varphi_t(p) \end{array}$$

逆に C^∞ 級同相写像の族 $\{\varphi_t : M \to M\}_{t \in \mathbb{R}}$ が上の 4 条件を満たすとき, 定義 3 の (2) を用いてベクトル場 $X = \{X_p\}_{p \in M}$ を

$$X_p := \left.\frac{d\varphi_t(p)}{dt}\right|_{t=0} \in T_pM$$

で定義すると, X が完備なベクトル場であり p を初期値とする極大積分曲線は $c(t) = \varphi_t(p)$ で与えられる.
このような C^∞ 級同相写像の族 $\{\varphi_t : M \to M\}_{t \in \mathbb{R}}$ を1 パラメーター変換群と呼ぶ.

要するに「完備なベクトル場」と「1 パラメーター変換群」は 1 対 1 に対応する. 完備なベクトル場 X に対応する 1 パラメーター変換群 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\{\mathrm{Exp}(tX)\}_{t \in \mathbb{R}}$ と表すこともある.

補足 13. C^∞ 級写像 $F : \mathbb{R} \times M \to M$ がフローとは $F(0, p) = p$ かつ $F(t, F(s, p)) = F(t + s, p)$ を満たすこととする. フローと 1 パラメーター変換群が一対一に対応する.

定理 14. X を完備な C^∞ 級ベクトル場とし, C^∞ 級同相写像の族 $\{\varphi_t : M \to M\}_{t \in \mathbb{R}}$ を 1 パラメーター変換群とする. C^∞ 級関数 f とベクトル場 Y についてリー微分 $\mathcal{L}_X(f), \mathcal{L}_X(Y)$ をそれぞれ以下で定める.

$$\mathcal{L}_X(f) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t^* f - f}{t} \quad \mathcal{L}_X(Y) = \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t}$$

このとき次が成り立つ.

1. $\mathcal{L}_X(f) = Xf$, $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$.
2. $[X, Y] = 0$ であることは任意の $t \in \mathbb{R}$ について $(\varphi_t)_* Y = Y$ となることと同値である.

[7]多様体の基礎では $c_p(t)$ を $c(t, p)$ と書いている.

3. $\{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を Y の 1 パラメーター変換群とする. $[X, Y] = 0$ であることは任意の $s, t \in \mathbb{R}$ について $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_t \circ \varphi_s$ を満たすことと同値である.

定理 15. C^∞ 級写像 $f : M \to \mathbb{R}$ が固有な沈め込みであれば, 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ について $f^{-1}(a)$ と $f^{-1}(b)$ は C^∞ 級微分同相である. ここで f が固有とは任意のコンパクト集合の f の逆像がコンパクトになることとし, f が沈め込みとは任意の $p \in M$ について $(df)_p$ が全射であることとする.

5 演習問題

以下断りがなければ M, N は C^∞ 級多様体とし, $m = \dim M$ とする.

• ベクトル場の問題

問 2.1 次の問いに答えよ.

(a) X を C^∞ 級ベクトル場とし f を M 上の C^∞ 関数とする. Xf と fX の厳密な定義とその違いを述べよ.

(b) $\mathbb{R}^2$ 上でのベクトル場のかっこ積 $[-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}]$ を計算せよ.

問 2.2 $a, b \in \mathbb{R}$ と $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ について, 次が成り立つことを示せ.[8]

(a) (双線型性) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$.

(b) (交代性) $[Y, X] = -[X, Y]$.

(c) (ヤコビ恒等式) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

問 2.3 * Let $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ be the standard coordinates on $\mathbb{R}^{2n}$. The unit sphere S^{2n-1} in $\mathbb{R}^{2n}$ is defined by the equation $\sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 = 1$. Show that

$$X = \sum_{i=1}^n -y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

is a no where-vanishing C^∞ vector field on S^{2n-1}.

問 2.4 $TM = \cup_{p\in M} T_pM = \cup_{p\in M}\{(p, v) | v \in T_pM\}$ とし, $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda) = (U_\lambda, x_1^\lambda, \ldots, x_m^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M の座標近傍系とする. $\lambda \in \Lambda$ について次のように写像を定める.

$$\begin{array}{cccc} \pi: & TM & \to & M \\ & (p,v) & \mapsto & p \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \Phi_\lambda: & \pi^{-1}(U_\lambda) & \to & \varphi_\lambda(U_\lambda) \times \mathbb{R}^m \\ & (p, \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i^\lambda}\right)_p) & \to & (\varphi(p), (a_1, \ldots, a_m)) \end{array}$$

次の問いに答えよ.

(a) Φ_λ は $\pi^{-1}(U_\lambda)$ と $\varphi_\lambda(U_\lambda) \times \mathbb{R}^m$ の一対一対応を与えることを示せ.

(b) TM の位相で任意の $\lambda \in \Lambda$ について $\pi^{-1}(U_\lambda)$ が開集合で Φ_λ が位相同型になるようなものが存在することを示せ.

(c) TM には $\{(\pi^{-1}(U_\lambda), \Phi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が座標近傍系になるような $2m$ 次元の C^∞ 級多様体の構造が入ることを示せ. (TM, π) を M の接ベクトル束という. [9]

問 2.5 * 引き続き接ベクトル束 TM に関する次の問いに答えよ.

(a) $\pi : TM \to M$ は全射 C^∞ 級写像であることを示せ.

(b) 「C^∞ ベクトル場 X」は「C^∞ 級写像 $\chi : M \to TM$ で $\pi \circ \chi = id_M$ となるもの」と 1 対 1 に対応することを示せ.

[8] $(\mathscr{X}(M), [,])$ がリー代数の構造をもつ

[9] ベクトル束に関しては, 例えば「今野 微分幾何学」を参照のこと. 実はヤコビ行列を用いても接ベクトル束を構成することができる.

(c) M 上の C^∞ ベクトル場 $X_1, \dots, X_m$ で，任意の $p \in M$ について $(X_1)_p, \dots, (X_m)_p$ が T_pM の基底となるものが存在すると仮定する．このとき TM と $M \times \mathbb{R}^m$ は微分同相であることを示せ．

問 2.6 TS^1 は $S^1 \times \mathbb{R}$ と微分同相であることを示せ．ただしこの問題の解答期限は問 2.3 と問 2.5 が解かれるまでとする．[10]

問 2.7 * TS^n は $\{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 = 1\}$ と微分同相であることを示せ．[11]

問 2.8 * $i : \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^1$ を $i(z) = (z : 1)$ とすることにより，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{CP}^1$ の開部分多様体と見なす．$\mathbb{C}$ 上のベクトル場 $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ と定める (ただし $z = x + \sqrt{-1}y$ として (x, y) を $\mathbb{C}$ の座標を考えている)．このとき X は $\mathbb{CP}^1$ 上の C^∞ 級ベクトル場 $\tilde{X}$ に拡張されることを示せ．また $\tilde{X}_p = 0$ となる $p \in \mathbb{CP}^1$ を全て求めよ．

問 2.9 Let $F : M \to N$ be a C^∞ diffeomorphism of manifolds.

(a) Prove that if g is a C^∞ function and X is a C^∞ vector field on M, then $F_*(gX) = (g \circ F^{-1})F_*X$.

(b) Prove that if X and Y are C^∞ vector fields on M, then $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$.

• 積分曲線の問題

問 2.10 (a) Find the maximal integral curve of $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ starting at $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Find the maximal integral curve of $Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ starting at $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

問 2.11 $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場を $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ とする．次の問いに答えよ．

(a) X は完備であることを示せ．

(b) $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を 1 パラメーター変換群とする．$\varphi_t : M \to M$ を求めよ．

(c) $X_p = \left.\frac{d\varphi_t(p)}{dt}\right|_{t=0}$ を確かめよ．

問 2.12 *$\mathbb{R}^2$ に対し同値関係 $\sim$ を

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ かつ } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$$

で定め，2 次元トーラス $T^2 := \mathbb{R}^2/\sim$ とする．$\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ という商写像により T^2 に位相を入れる．[12] 次の問いに答えよ．

(a) $Y = \frac{\partial}{\partial x}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級ベクトル場とする．このとき T^2 上の C^∞ 級ベクトル場 X で，任意の $p \in \mathbb{R}^2$ について $(d\pi)_p(Y) = X_{\pi(p)}$ となるものが存在することを示せ．

(b) X が生成する 1 パラメーター変換群 $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を求めよ．

(c) $T(T^2)$ は $T^2 \times \mathbb{R}$ と微分同相であることを示せ．

問 2.13 コンパクト C^∞ 級多様体 M 上の任意の C^∞ 級ベクトル場は完備であることを示せ．

問 2.14 定理 14 の (1)-(3) をそれぞれ示せ．

[10]問 2.3 と問 2.5(c) から TS^1 と $S^1 \times \mathbb{R}$ は微分同相であることがいえる．もし別解があれば発表してもよい．

[11]ヒント．前回演習の問 1.5 を用いる．

[12]$T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ともかく．この問題では T^2 が C^∞ 級多様体であることを認めて良い．また T^2 は $S^1 \times S^1$ と微分同相である．

問 2.15 * M をコンパクト C^∞ 級多様体とし X を C^∞ 級ベクトル場とする. M 上の C^∞ 級関数 $f, g : M \to \mathbb{R}$ が $Xf = g, Xg = f$ を満たすとする. 次の問いに答えよ.

(a) X の任意の積分曲線 $c : \mathbb{R} \to M$ について $(f \circ c)''(t) = (f \circ c)(t)$ であることを示せ.

(b) f, g は恒等的に 0 であることを示せ.

● 教育的な問題

第 1-4 回の演習で出した問題以外でとても教育的な問題を追加で出しておく.

問 2.16 M を m 次元コンパクト C^∞ 級多様体とする. C^∞ 級写像 $f : M \to \mathbb{R}^m$ ではめ込みとなるものは存在しないことを示せ. ($m = \dim M$ に注意すること).

問 2.17 M と N が微分同相であるならば $\dim M = \dim N$ を示せ.

問 2.18 $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{R}$ を

$$f([x_1 : \cdots : x_{n+1}]) = \frac{x_1^2}{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(a) f が well-defined な C^∞ 級写像であることを示せ.

(b) $(df)_p$ が消える $p \in \mathbb{RP}^n$ の点を全て求めよ.

(c) f の最大値・最小値を求めよ

問 2.19 (糟谷先生の第 3 回のプリントの問題) $f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とする.

(a) $p \in M$ において $(df)_p \neq 0$ ならば, ある C^∞ 級写像 $c : (-1, 1) \to M$ で $c(0) = p$ かつ $(f \circ c)'(0) > 0$ となるものが存在することを示せ.

(b) M がコンパクトならば $(df)_p = 0$ となる $p \in M$ が存在することを示せ.

問 2.20 m, k を正の自然数とする. C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ とその正則値 c を考える. $M = f^{-1}(c)$ は $\mathbb{R}^{m+k}$ の部分多様体となり, 任意の $p \in M$ について $T_pM = \mathrm{Ker}(df)_p$ となることを示せ. またこれを用いて問題 1.5 を示せ.(つまり $a \in S^m$ について $T_aS^m = \{v \in \mathbb{R}^{m+1} | < a, v >= 0\}$ となることを示せ. ここで $< \bullet, \bullet >$ は $\mathbb{R}^{m+1}$ 上のユークリッド内積とし, $T_a\mathbb{R}^{m+1}$ と $\mathbb{R}^{m+1}$ を同一視する.)

● 発展課題

以下の問題は私が少々気になった事柄である. 余裕のある人向けの問題となっております. [13]

問 2.21 * $C^\infty(M)$ を M 上の C^∞ 級関数全体のなす集合とする. 次の問いに答えよ.[14]

(a) C^∞ 級ベクトル場 X について $D_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ を $D_X(f) := Xf$ で定める. D_X が線形かつライプニッツ則を満たすことを示せ.

(b) 写像 $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ が線形でありライプニッツ則を満たすとき, ある C^∞ 級ベクトル場 X があって $D = D_X$ となることを示せ.

(c) C^∞ 級ベクトル場 X, Y について $X = Y$ であることは $D_X = D_Y$ であることと同値であることを示せ. [15]

[13] 教育的な問題からそうでない問題まで揃えております.

[14] 必要であれば多様体の基礎 命題 13.11 を用いて良い.

[15] 多様体の基礎 命題 16.5 の証明を見ていると, この本ではこの事実を認めている気がする.

ここで「線形」と「ライプニッツ則」については次のように定義する.

- D が線形であるとは $a, b \in \mathbb{R}, f, g \in C^\infty(M)$ について $D(af+bg) = aD(f) + bD(g)$ であることとする.
- D がライプニッツ則を満たすとは $f, g \in C^\infty(M)$ について $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ であることとする.

問 2.22 $f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする. $C^\infty(M)$ を M 上の C^∞ 級関数全体の集合として,

$$\begin{array}{cccc} f^*: & C^\infty(N) & \to & C^\infty(M) \\ & \xi & \mapsto & \xi \circ f \end{array}$$

と定める. $X \in \mathscr{X}(M), Y \in \mathscr{X}(N)$ について X と Y が f-関係にあるとは $D_X \circ f^* = f^* \circ D_Y$ であることとする. 次の問いに答えよ.

(a) X と Y が f-関係にあることは, 任意の $p \in M$ について $(df)_p(X_p) = Y_{f(p)}$ であることと同値であることを示せ.

(b) f が微分同相写像のとき, 任意の $X \in \mathscr{X}(M)$ について, X と f-関係にあるベクトル場 Y がただ一つ存在することを示せ.

(c) X_1 と Y_1 が f-関係にあり, X_2 と Y_2 が f-関係にあるとき, $[X_1, X_2]$ と $[Y_1, Y_2]$ も f-関係にあることをしめせ.

問 2.23 $M = N = \mathbb{R}$ とし, $f : M \to N$ を $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ とする. M は $\mathbb{R}$ への通常の C^∞ 級多様体の構造を入れる. また N には $f^{-1} : N \to M = \mathbb{R}$ によって C^∞ 級多様体の構造を入れる (つまり $\{(N, f^{-1})\}$ が N の座標近傍系となる). 次の問いに答えよ.

(a) $\varphi : M \to N$ を恒等写像とする. φ は全単射な C^∞ 級写像であることを示せ

(b) φ^{-1} は C^∞ 級写像ではないことを示せ. つまり φ は C^∞ 級微分同相ではない.

(c) $X = \frac{\partial}{\partial x}$ について φ-関係にある N 上の C^∞ 級ベクトル場は存在しないこと示せ.

問 2.24 ** TS^3 は $S^3 \times \mathbb{R}^3$ と微分同相であることを示せ. [16]

問 2.25 *** TS^n が $S^n \times \mathbb{R}^n$ と微分同相となるような自然数 n を決定せよ. [17]

[16] ヒント: 四元数体のノルム 1 の全体集合が S^3 になる.

[17] n が偶数ではないことは Poincare-Hopf の定理からわかる. n が奇数のときどのように議論するか私はわからない.