1-4. 多様体の復習・多様体の例・接ベクトル空間

岩井雅崇 2022/10/07

講義では多様体の復習・多様体の例・接ベクトル空間を 4 回かけて行う (と聞いている). ただ演習では問題作成の都合上, 1-4 回の内容をまとめた. なお今回の演習問題は難易度が高いため, 解けない場合は適宜教科書やインターネット, TA・教官に頼っても良い. (わからなければこちらからヒントを出していきます).

多様体の作り方は大きく分けて次に分けられる.

- 多様体 M, N について, その直積 $M \times N$ は多様体
- 多様体 M の開集合 U は多様体.
- 多様体間の写像 $f : M \to N$ と $y \in N$ について, $f^{-1}(y)$ は"だいたい"M の部分多様体. これは次の定理を用いる.

定理 1. [多様体の基礎 定理 15-1]
$f : M \to N$ を多様体の間の C^r 級写像とする. さらに $q \in N$ を正則値であると仮定する. $f^{-1}(q) \neq \varnothing$ ならば, $f^{-1}(q)$ は $\dim M - \dim N$ 次元の C^r 級部分多様体である.
ここで $q \in N$ が $f : M \to N$ の正則値であるとは, 任意の $p \in f^{-1}(q)$ について, 微分写像
$$(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$$
が全射であることとする.

- 多様体 M を同値関係 $\sim$ で割ってできる多様体 $M/\sim$. ただし常に $M/\sim$ が多様体になるとは限らない.[1] 参考までに次の事実が知られている.[リー群と表現論 第 6 章]「Lie 群 G が多様体 M に推移的かつ連続に作用しているとき, $G_x = \{g \in G | gx = x\} (x \in M)$ は閉部分群になり G/G_x は M と C^∞ 微分同相となる.」

講義ではやらないが演習でちょっと使う重要な事実なので次の内容もまとめておく.

定義と定理 2. [埋め込みとはめ込み] $f : M \to N$ を多様体の間の C^r 級写像とする.

- f がはめ込みであるとは, 任意の点 $p \in M$ について微分写像 $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が単射であること.
- f が埋め込みであるとは, f がはめ込みであり, $f : M \to f(M)$ が同相であることとする. ここで $f(M)$ には N の相対位相を入れる. このとき $f(M)$ は N の部分多様体であることが知られている.

[1] 私が学部生だったとき群 G が多様体 M に固定点自由かつ真性不連続に作用している場合の内容をやった. 調べてみると担当教官がその道のプロであることがわかった.

問 1.1 * Give an example of a topological space that is connected but not path-connected.

問 1.2 * Show that any connected manifold is path-connected.

問 1.3 次の問いに答えよ.

(a) 実数の集合 $\mathbb{R}$ について, 同値関係 $\sim_1$ を

$$x \sim_1 y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

とし $\mathbb{R}/\sim_1$ に商位相を入れる. このとき $\mathbb{R}/\sim_1$ は多様体になることを示せ.

(b) 実数の集合 $\mathbb{R}$ について, 同値関係 $\sim_2$ を

$$x \sim_2 y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

とし $\mathbb{R}/\sim_2$ に商位相を入れる. このとき $\mathbb{R}/\sim_2$ は多様体とならないことを示せ.

問 1.4 $S^m := \{(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) | \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 1\}$ とおく. S^m が m 次元の C^∞ 級多様体であることを 2 通りの方法で示したい. 次の問いに答えよ.

(a) $N = (0, 0, \ldots, 1), S = (0, 0, \ldots, -1)$ とし, $U_N = S_m \setminus N$, $U_S = S_m \setminus S$ とおく.

$$\begin{array}{cccc} \varphi_N : & U_N & \to & \mathbb{R}^m \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) & \longmapsto & (\frac{x_1}{1-x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{1-x_{m+1}}) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \varphi_S : & U_S & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & (\frac{x_1}{1+x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{1+x_{m+1}}) \end{array}$$

とおく. $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ が S^m の座標近傍系を与えることを示し, これにより S^m は m 次元の C^∞ 級多様体となることを示せ.

(b) $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ となる C^∞ 級写像で $f^{-1}(1) = S^m$ かつ $1 \in \mathbb{R}$ が f の正則値であるようなものを一つ求めよ. またこれを用いて S^m は m 次元の C^∞ 級多様体であることを示せ.

問 1.5 $i : S^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ を包含写像とする. 次の問いに答えよ.

(a) 任意の点 $a \in S^m$ について, 微分写像 $(di)_a : T_aS^m \to T_a\mathbb{R}^{m+1}$ は単射であることをしめせ.

(b) $a \in S^m$ を S^m の点とする. $(di)_a$ が単射であることと $T_a\mathbb{R}^{m+1} \cong \mathbb{R}^{m+1}$ により $T_aS^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ とみなす. このとき

$$T_aS^m = \{v \in \mathbb{R}^{m+1} | < a, v >= 0\}$$

となることを示せ. ここで $< \bullet, \bullet >$ は $\mathbb{R}^{m+1}$ 上のユークリッド内積とする.

問 1.6 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=z(z+1)$ とする．次の問いに答えよ．

(a) $z=x+\sqrt{-1}y$ によって $\mathbb{C}$ に座標 (x,y) を入れ f を座標表示せよ．

(b) $z\in\mathbb{C}$ においてヤコビ行列を求めよ．

(c) $(df)_p:T_z\mathbb{C}\to T_z\mathbb{C}$ が同型でない z を全て求めよ．

問 1.7 (多様体の基礎 11 章) $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ について, 同値関係 $\sim$ を

$$z\sim w\Leftrightarrow 0 \text{ でない複素数 } \alpha \text{ が存在して } z=\alpha w$$

と定義する.$\mathbb{CP}^n:=(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\})/\sim$ と書き複素射影空間と呼ぶ．以下 $z=(z_1,z_2,\dots,z_{n+1})$ を $\mathbb{CP}^n$ の元とみなしたものを $(z_1:\cdots:z_{n+1})$ と書き複素同次座標と呼ぶ．次の問いに答えよ．

(a) $\mathbb{CP}^n$ がハウスドルフであることを示せ．

(b) $U_i=\{(z_1:z_2:\dots:z_{n+1})|z_i\neq 0\}$ とおき，

$$\begin{array}{cccc}\varphi_i: & U_i & \to & \mathbb{C}^n\\ & (z_1:z_2:\dots:z_{n+1}) & \longmapsto & (\frac{z_1}{z_i},\dots,\frac{z_{i-1}}{z_i},\frac{z_{i+1}}{z_i},\dots,\frac{z_n}{z_i})\end{array}$$

と定める．$\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ は座標近傍系となることを示し, $\mathbb{CP}^n$ は (実)$2n$ 次元の C^∞ 級多様体であることを示せ．

問 1.8 $\mathbb{CP}^1$ と S^2 は C^∞ 級微分同相であることをしめせ．

問 1.9 $i:\mathbb{C}\to\mathbb{CP}^1$ を $i(z)=(z:1)$ とすることにより, $\mathbb{C}$ を $\mathbb{CP}^1$ の開部分多様体と見なす．$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=z^2+1$ とおく．このときある $F:\mathbb{CP}^1\to\mathbb{CP}^1$ となる C^∞ 級写像で $F|_{\mathbb{C}}=f$ となるものがあることを示せ．

問 1.10 (多様体の基礎 11 章)

(a)

$$\begin{array}{cccc}\pi: & S^{2n+1} & \to & \mathbb{CP}^n\\ & (x_1,x_2,\dots,x_{2n+1},x_{2n+2}) & \longmapsto & (x_1+\sqrt{-1}x_2,x_3+\sqrt{-1}x_4,\dots,x_{2n+1}+\sqrt{-1}x_{2n+2})\end{array}$$

とおく． この写像が全射 C^∞ 級写像であることを示せ．

(b) $\mathbb{CP}^n$ はコンパクトであることを示せ．

(c) 任意の $z\in\mathbb{CP}^n$ について $f^{-1}(z)$ は S^1 と位相同相であることを示せ．

問 1.11 * n を 2 以上の整数とする．$H=\{(z_1:z_2:\dots:z_{n+1})\in\mathbb{CP}^n|z_1+\cdots+z_{n+1}=0\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し, その次元を求めよ．

問 1.12 ** n を 2 以上の整数とする．$Q=\{(z_1:z_2:\dots:z_{n+1})\in\mathbb{CP}^n|z_1^2+\cdots+z_{n+1}^2=0\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し, その次元を求めよ．

問 1.13 $M(n,\mathbb{R})$ を $n\times n$ 行列の全体の集合とする．$M(n,\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視する．特に $M(n,\mathbb{R})$ が n^2 次元 C^∞ 級多様体となる．次の問いに答えよ．

(a) $GL(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R})|\det A\neq 0\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し，その次元を求めよ．

(b) $SL(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R})|\det A=1\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し，その次元を求めよ．

問 1.14 (多様体の基礎 15 章) $O(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R})|{}^tAA=E\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し，その次元を求めよ．

問 1.15 $SO(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R})|\det A=1,{}^tAA=E\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し，その次元を求めよ．

問 1.16 $SO(2,\mathbb{R})$ が S^1 と C^∞ 級微分同相であることを示せ．

問 1.17 * 次の問いに答えよ

(a) $GL(n,\mathbb{R})$ は弧状連結ではないことを示せ．

(b) $GL(n,\mathbb{R})_+=\{A\in M(n,\mathbb{R})|\det A>0\}$ は弧状連結であること示せ．

問 1.18 * $SO(n,\mathbb{R})$ は弧状連結であることを示せ．

問 1.19 (多様体の基礎 15 章) k,m を $1\geq k\geq m$ となる自然数とし $M_{k,m}$ を実数係数 $k\times m$ 行列全体とする．

$$V_{k,m}=\{A\in M_{k,m}|A({}^tA)=E\}$$

とする．次の問いにこたえよ．

(a) $f:\mathbb{R}^{2m}\to\mathbb{R}^3$ を次で定める．

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^{2m} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m) & \longmapsto & (\sum_{i=1}^m x_i^2,\sum_{i=1}^m y_i^2,\sum_{i=1}^m x_iy_i) \end{array}$$

$(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^m$ での f のヤコビ行列を求めよ

(b) $V_{2,m}$ は $\mathbb{R}^{2m}$ の C^∞ 級部分多様体であることを示し，その次元を求めよ．

(c) $V_{3,m}$ は $\mathbb{R}^{3m}$ の C^∞ 級部分多様体であることを示し，その次元を求めよ．

問 1.20 *

$$\begin{array}{cccc} f: & S^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z,w) & \longmapsto & xy-zw \end{array}$$

とおく．$f^{-1}(0)$ は S^3 の部分多様体であることをしめせ．

問 1.21 *

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | 2x^2 + 2 = 2z^2 + w^2, 3x^2 + y^2 = z^2 + w^2\}$$

とおく． 次の問いに答えよ．

(a) M は $\mathbb{R}^4$ の部分多様体であることを示し, その次元を求めよ

(b) $F : M \to \mathbb{R}^2$ を $F(x, y, z, w) = (x^2, y^2)$ とする．$p = (X, Y) \in \mathbb{R}^2$ について $F^{-1}(p)$ の元の個数を求めよ．

(c) M はコンパクトかどうか判定せよ

問 1.22 * M, N を連結な C^∞ 級多様体とし, $f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする．任意の $p \in M$ について $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が零写像であるならば, f は M を N の一点へ写す定値写像であることを示せ．

問 1.23 * M, N をそれぞれ m 次元, n 次元の C^∞ 多様体とし C^∞ 写像 $f : M \to N$ とする．さらに N は連結コンパクトで $m \geq n$ であると仮定する．任意の $x \in M$ について $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が全射であるとき f も全射であることを示せ．

問 1.24 * $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について, 同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Leftrightarrow 0 \text{ でない実数 } \alpha \text{ が存在して } x = \alpha y$$

と定義する.$\mathbb{RP}^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ と書き実射影空間と呼ぶ． $\mathbb{RP}^n$ は n 次元 C^∞ 級多様体となることが知られている． 以下 $x = (x_1, z_2, \ldots, x_{n+1})$ を $\mathbb{RP}^n$ の元とみなしたものを $(x_1 : \cdots : x_{n+1})$ と書き実同次座標と呼ぶ．次の問いに答えよ．

(a)

$$\begin{array}{cccc} \pi : & S^n & \to & \mathbb{RP}^n \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1 : \cdots : x_{n+1}) \end{array}$$

は全射 C^∞ 級写像であることをしめせ．

(b) 任意の $q \in \mathbb{RP}^n$ について $f^{-1}(q)$ の個数を求めよ．

(c) $f : S^2 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ とする．f と π を使って自然に $\tilde{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^3$ が定義できることを示せ．

(d) $\tilde{f}$ ははめ込みではないことをしめせ．

問 1.25 ** 上の記法において $g : S^2 \to \mathbb{R}^4$ を $g(x, y, z) = (yz, zx, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ とする．g と π を使って自然に $\tilde{g} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ が定義でき, $\tilde{g}$ は埋め込みであることを示せ．

問 1.26 ** 複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ について, その k 次元ベクトル部分空間全体の集合を $G_{n,k}$ とおく．$G_{n,k}$ は自然に C^∞ 級多様体の構造を持つことを示し, その次元を求めよ.(複素グラスマン多様体と呼ばれる)．

問 1.27 ** $G_{4,2}$ は $\{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5) \in \mathbb{CP}^5 | z_0 z_5 - z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0\}$ と C^∞ 級同相であることを示せ．(プリュッカー埋め込みと呼ばれる)．

問 1.28 * 授業や演習などこれまで出てきた多様体の例以外で面白い多様体の例をあげよ．ただし以下の点に注意すること．

(a) この問題は教官と TA が「面白い」と思わない場合, 正答とならない. (例えば $\mathbb{R}^4$ の開集合やトーラス・メビウスの帯・クラインの壺などはよく見るので正答とはならない.)

(b) この問題は複数人が解答して良い.

(c) この問題の解答権は 2022 年 10 月中とする．11 月以後はこの問題に答えることはできない.