8-12. 微分形式とストークスの定理

岩井雅崇 2022/12/02

1 ベクトル空間のテンソル積

定義 1. V を m 次元の $\mathbb{R}$ ベクトル空間とする.

- V の双対ベクトル空間 V^* を $V^* := \{\omega : V \to \mathbb{R} \,|\, \omega$ は線型写像 $\}$ とする.
- $\{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底とするとき, $1 \leq i \leq m$ なる i について $\omega_i \in V^*$ を

$$\begin{array}{rccc} \omega_i : & V & \to & \mathbb{R} \\ & a_1 e_1 + \cdots + a_m e_m & \mapsto & a_i \end{array}$$

  と定義する. $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ は V^* の基底で, $\{e_1, \ldots, e_m\}$ の双対基底と呼ばれる.
- V 上のk 次多重線型形式とは $\omega : V^k = V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ となる写像で $\omega(v_1, \ldots, v_k)$ が各 v_i について線型であることとする. V 上の k 次多重線型形式なす m^k 次元のベクトル空間を $\otimes^k V^*$ と表す.
- $\omega \in \otimes^k V^*$ がk 次対称形式であるとは, 任意の k 次の置換 σ と, 任意の $(v_1, \ldots, v_k) \in V^k$ について $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \omega(v_1, \ldots, v_k)$ となることとする.
- $\omega \in \otimes^k V^*$ がk 次交代形式であるとは, 任意の k 次の置換 σ と, 任意の $(v_1, \ldots, v_k) \in V^k$ について $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k)$ となることとする. V の k 次交代形式の ${}_mC_k$ 次元のベクトル空間を $\wedge^k V^*$ で表す.

例 2. $\eta_1, \ldots, \eta_k \in V^*$ について

$$\begin{array}{rccc} \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k : & V \times \cdots \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (v_1, \ldots, v_k) & \mapsto & \eta_1(v_1) \cdots \eta_k(v_k) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k : & V \times \cdots \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (v_1, \ldots, v_k) & \mapsto & \det((\eta_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq k}) \end{array}$$

と定義する. $\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k \in \otimes^k V^*$ であり$\eta_1, \ldots, \eta_k$ のテンソル積と呼ばれる.

$\{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底とし, $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ を $\{e_1, \ldots, e_m\}$ の双対基底とするとき, $\{\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_k}\}_{i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m}$ は $\otimes^k V^*$ の基底となる. また $\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m}$ は $\wedge^k V^*$ の基底となる. 定義から $\omega_2 \wedge \omega_1 = -\omega_1 \wedge \omega_2$ や $\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$ であることがわかる.

2 微分形式

定義 3.
- $p \in M$ について, 接ベクトル空間 T_pM の双対空間を余接ベクトル空間と呼び T_p^*M と表す.
- 任意の $p \in M$ について $\omega_p \in T_p^*M$ が一つずつ対応しているとき, その対応 $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$ をM 上の 1 次微分形式という.
- 座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について $(dx_i)_p$ を

$$\begin{array}{rccc} (dx_i)_p : & T_pM & \to & \mathbb{R} \\ & a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \cdots + a_m \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p & \mapsto & a_i \end{array}$$

とし, U 上の 1 次微分形式 $dx_i := \{(dx_i)_p\}_{p\in U}$ と定義する. これにより M 上の 1 次微分形式は座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について, ある U 上の関数 $f_i : U \to \mathbb{R}$ があって

$$\omega|_U = f_1 dx_1 + \cdots + f_m dx_m$$

とかける. 各座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について上の f_i が C^∞ 級となるとき, ω は C^∞ 級 1 次微分形式という.

例 **4.** $f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とすると, 微分写像 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ により, $df := \{df_p\}_{p\in M}$ は M 上の 1 次微分形式だと思える. 座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ を用いて 1 次微分形式 df は

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$と表せられる.

定義 5. $k = 1, \ldots, m = \dim M$ となる自然数とする.

- 任意の $p \in M$ について $\omega_p \in \wedge^k T_p^* M$ が一つずつ対応しているとき, その対応 $\omega = \{\omega_p\}_{p\in M}$ を M 上の k 次微分形式という.
- M 上の k 次微分形式 ω は座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について, ある U 上の関数 $f_{i_1 i_2 \cdots i_k} : U \to \mathbb{R} (1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m)$ があって

$$\omega|_U = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} f_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

とかける. 各座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について上の $f_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ が C^∞ 級となるとき, X はC^∞ 級 k 次微分形式であるという.

断りのない限り微分形式は全て C^∞ 級であるとする.

定義 6 (外積)**.** M 上の k 次微分形式 ω と l 次微分形式 η について, その外積 $\omega \wedge \eta$を

$$\omega \wedge \eta(X_1, \ldots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) \eta(X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(k+l)})$$ とする.

$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} f_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, $\eta = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_l \le m} g_{j_1 \cdots j_l} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$ と座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ 上でかけている場合,

$$\omega \wedge \eta = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_l \le m} f_{i_1 \cdots i_k} g_{j_1 \cdots j_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$$となる.

定義 7 (外微分)**.** M 上の k 次微分形式 ω について, 外微分 $d\omega$を

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_m)) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_m). \end{aligned}$$

とする. ここで $(X_1, \ldots, X_{k+1})$ はベクトル場とし, $(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_m)$ は $(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_m)$ を意味する. $\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} f_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ と座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ 上でかけている場合,

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} df_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \text{となる.} \end{aligned}$$

定義 8 (引き戻し)**.** $\varphi : M \to N$ を C^∞ 写像とする. N 上の l 次微分形式 η について, η の φ による<u>引き戻し $\varphi^*\eta$</u>を

$$(\varphi^*\eta)_p(X_p) := \eta_{\varphi(p)}((d\varphi)_p X_p) \quad (\forall p \in M, \forall X \in T_pM)$$

と定める. これは M 上の l 次微分形式となる. M の座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$, N の座標近傍 $(V, y_1, \ldots, y_n)$ に関して, $\eta = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_l \le m} g_{j_1 \cdots j_l} dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_l}$ とかけている場合,

$$\varphi^*\eta := \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_l \le m} (g_{j_1 \cdots j_l} \circ \varphi) \left(\sum_{i_1=1}^{m} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} dx_{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_l=1}^{m} \frac{\partial dy_{j_l}}{\partial x_{i_l}} dx_{i_l} \right) \text{となる.}$$

例 9. $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$, $\eta = g_1 dx_1 + g_2 dx_2$, $\varphi(z_1, z_2) = (\varphi_1(z_1, z_2), \varphi_2(z_1, z_2))$ とすると外積, 外微分, 引き戻しはそれぞれ次の通りとなる.

$$\omega \wedge \eta = (f_1 dx_1 + f_2 dx_2) \wedge (g_1 dx_1 + g_2 dx_2) = (f_1 g_2) dx_1 \wedge dx_2 + (f_2 g_1) dx_2 \wedge dx_1 = (f_1 g_2 - f_2 g_1) dx_1 \wedge dx_2.$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_2 = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2.$$

$$\varphi^*\omega = f_1(\varphi(z)) d\varphi_1 + f_2(\varphi(z)) d\varphi_2 = f_1(\varphi(z)) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2} dz_2 \right) + f_2(\varphi(z)) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} dz_2 \right).$$

命題 10. ω を k 次微分形式, η を l 次微分形式, ζ を s 次微分形式とする. 次が成り立つ.

- $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$, $\omega \wedge (\eta \wedge \zeta) = (\omega \wedge \eta) \wedge \zeta$.
- $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta)$.
- $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$.
- $d(d\omega) = 0$, $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$.

定義 11 (ド・ラームコホモロジー)**.** k 次微分形式の集合を $\Omega^k(M)$ とする.

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \xrightarrow{d} 0$$

をド・ラーム複体といい,

$$H^k_{DR}(M) := \frac{\ker(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M))}{\mathrm{Im}(d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M))}$$

を M のk 次のド・ラームコホモロジー群という.

補足 12. $d\omega = 0$ なる微分形式を閉形式といい, ある微分形式 η があって $\omega = d\eta$ とかける微分形式 ω を完全形式という. $d \circ d = 0$ なので完全形式ならば閉形式である. ド・ラームコホモロジー群は閉形式と完全形式のずれを記述している群である.

3 1 の分割と多様体上の積分

定理 13. $p \in M$ と p の開近傍 U について, ある p の開近傍 V と C^∞ 級関数 $\rho : M \to \mathbb{R}$ があって $\overline{V} \subset U$ かつつぎを満たす.

$$\begin{cases} \rho(q) = 1 & q \in \overline{V} \\ 0 \leqq \rho(q) < 1 & q \in U \setminus \overline{V} \\ \rho(q) = 0 & q \in M \setminus U \end{cases}$$

特に ρ の台 $\mathrm{Supp}(\rho) := \overline{\{q \in M | \rho(q) \neq 0\}}$ とするとき, $\mathrm{Supp}(\rho) \subset U$ となる.

定理 14 (1 の分割)**.** M が第二可算であると仮定する. 任意の M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ についてある可算個の C^∞ 級関数 $\rho_j : M \to \mathbb{R}(j \in \mathbb{N})$ があって次が成り立つ

1. $\{\mathrm{Supp}(\rho_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ は M の被覆であり, $p \in M$ についてある p の開近傍 U をとれば $U \cap \mathrm{Supp}(\rho_j) \neq \varnothing$ なる j は有限個になる.(局所有限な被覆という.)
2. 任意の $j \in \mathbb{N}$ についてある $\alpha_j \in A$ があって $\mathrm{Supp}(\rho_j) \subset U_{\alpha_j}$ となる. ($\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の細分という.)
3. $0 \leq \rho_j \leq 1$ かつ $\sum_{j \in \mathbb{N}} \rho_j \equiv 1$.

この $\{\rho_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ を$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に従属する 1 の分割という.

補足 15. 上は σ コンパクトで成り立つ定理である.(第二可算な多様体は σ コンパクトであるらしい.) ただ σ コンパクトは応用上で使うか怪しいし, 多様体に第二可算を仮定することが多いので, ここでは第二可算として主張を述べた.[1]要するに 1 の分割は取れると思って良い.

定義 16. $(U, \varphi) = (U, x_1, \ldots, x_m)$ を座標近傍とし, U 上の m 次微分形式を $\omega = f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ とする. $\varphi(U)$ が正方形領域 $V := [-a, a]^m$ に含まれるとき, ω の U 上の積分を

$$\int_U \omega := \int_{[-a,a]^m} f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$で定義する.

[1] 「トゥー 多様体」では多様体に第二可算を仮定している.

定義 17. • $(U, x_1, \dots, x_m)$, $(V, y_1, \dots, y_m)$ を $U \cap V \neq \phi$ となる M の座標近傍とする. $(U, x_1, \dots, x_m)$ と $(V, y_1, \dots, y_m)$ が同じ向きであるとは, $U \cap V$ 上で

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} := \det\left(\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i,j \leq m}\right) > 0 \text{ となることとする.}$$

• M が向きづけ可能であるとは, M の座標近傍系 $\{(U_\alpha, x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha)\}$ であって, 同じ向きになるものが存在することとする.

定理 18. M が向きづけ可能なコンパクト m 次元多様体とし, ω を m 次微分形式とする. このとき同じ向きになる M の座標近傍系 $U_1, \dots, U_N$ とそれに従属する 1 の分割 $\rho_1, \dots, \rho_N$ があって, ω の M 上の積分を

$$\int_M \omega := \sum_{j=1}^N \int_M \rho_j \omega$$

で定義する. この積分の値は実数値であり, 1 の分割や近傍系の取り方によらない.

補足 19. $\rho_j \omega$ は定義 16 の仮定を満たすため上のように積分が定義できる. M がコンパクトでない場合でも 1 の分割が取れれば積分は定義できるが, 有限の値になるかはわからない.

4 ストークスの定理

以下の内容は「坪井俊 著 幾何学 3 微分形式」を参考にした.

定義 20. M を第二可算ハウスドルフ空間とする. 次の条件が成り立つとき M は m 次元境界つき (C^∞ 級) 多様体と呼ばれる.

1. M の開被覆 $M = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ と像への同相写像

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{H}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m | x_1 \geqq 0\} \text{ が存在する.}$$

2. $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ なる $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ は C^∞ 級写像である

$\partial M := \cup_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \subset$ を M の境界と呼ぶ.

補足 21. M の境界 ∂M は $m-1$ 次元多様体となる. また M が向きづけ可能であるとき, ∂M には座標近傍系 $\{(U_\lambda, x_2^\lambda, \dots, x_m^\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ によって向きが入る.

定理 22. M が向きづけ可能なコンパクト m 次元境界つき多様体とし, η を $m-1$ 次微分形式とするとき, 次が成り立つ.

$$\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta$$

ストークスの定理は境界がない多様体 (つまり普通の意味での”多様体”) について述べると次のとおりである. 「M が向きづけ可能なコンパクト m 次元多様体とし, η を $m-1$ 次微分形式とするとき, $\int_M d\eta = 0$ となる.」ストークスの定理は研究でも応用でも使われる定理である.

5 演習問題

問題の上に $^\bullet$ がついている問題は解けてほしい問題である．問題の上に * がついている問題は面白いかちょっと難しい問題である．

以下断りがなければ M, N は C^∞ 級多様体とし，$m = \dim M$ とする．$\mathbb{R}^n$ をユークリッド空間とし，$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を半径 1 の n 次元球面とする．

● 微分形式の問題

問 3.1 $^\bullet$ 講義で配られるプリントにある微分形式に関する計算問題を好きなだけ解答せよ．[2]

問 3.2 $^\bullet$ $\mathbb{R}^{2n}$ 上の 2 次微分形式 $\omega = \sum_{i=1}^n dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}$ について ω^n を求めよ．

問 3.3 $^\bullet$ $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とする．次の問いに答えよ．

(a) $i^*(dx \wedge dy \wedge dz)$ を求めよ．

(b) $i^*(dx \wedge dy)$ の値が 0 になる S^2 の点を全て求めよ．

問 3.4 (多様体の基礎 19 章) $f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．

(a) 微分写像 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ により，$df := \{df_p\}_{p\in M}$ は M 上の微分形式だと思える．座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ を用いて，微分形式 df は次のように表せることを示せ．

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m$$

(b) X をベクトル場とするとき，$(df)(X) = X(f)$ を示せ．

問 3.5 V を $\mathbb{R}$ 上の m 次元ベクトル空間とし，$\{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底とし，$\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ は V^* を $\{e_1, \ldots, e_m\}$ の双対基底とする．また k を 2 以上の自然数とする．次の問いに答えよ

(a) k 次多重線型形式のなす空間 $\otimes^k V^*$ の基底を一つ構成せよ．また $\otimes^k V^*$ の次元を求めよ．

(b) k 次対称形式のなす空間 $\mathrm{S}^k(V^*)$ の基底を一つ構成せよ．また $\mathrm{S}^k(V^*)$ の次元を求めよ．

(c) k 次交代形式のなす空間 $\wedge^k V^*$ の基底を一つ構成せよ．また $\wedge^k V^*$ の次元を求めよ．

問 3.6 k を 1 以上の自然数とする．$\wedge^k T^*M = \cup_{p\in M} \wedge^k T_p^*M$ に C^∞ 級多様体の構造が入ることを示せ．またその多様体の次元を求めよ．[3]

問 3.7 * $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ とし，$f(x,y,z)$ を X 上の C^∞ 級関数で $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を用いて $f(x,y,z) = h(r)$ とかけているとする．X 上の 1 次微分形式 ω を

$$\omega = f(x,y,z)(xdx + ydy + zdz)$$

とする．次の問いに答えよ．

(a) $d\omega = 0$ を示せ．つまり ω は閉形式である．

(b) ある C^∞ 級関数 g があって $\omega = dg$ となることを示せ．つまり ω は完全形式である．

(c) $\Delta\varphi = 0$ となる C^∞ 級関数 φ によって $\omega = d\varphi$ となるとき，f を x, y, z を用いて表せ．ここで

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \text{である．}$$

[2] この問題は解答者が複数いても良い．なるべく糟谷先生のプリントの問題も解いてください．

[3] 難しければ $k = 1, m$ の場合のみ解答しても良い．T^*M は余接ベクトル束と呼ばれる．

問 3.8 • $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の 1 次微分形式

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

について次の問いに答えよ.

(a) 極座標 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を用いて ω を $dr, d\theta$ で表せ.

(b) $d\omega = 0$ を示せ. つまり ω は閉形式である.

(c) $C = S^1$ とし, 向きを反時計回りで入れる. $\int_C \omega$ を計算せよ.

(d) $\omega = dg$ となる C^∞ 級関数は存在しないことを示せ. つまり ω は完全形式ではない.

問 3.9 連結な多様体 M について 0 次ド・ラームコホモロジー群 $H^0_{DR}(M)$ を求めよ.

問 3.10 * 次の問いに答えよ.

(a) ω を $d\omega = 0$ となる $\mathbb{R}^2$ の 1 次微分形式とする. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ について $L_{(x,y)}$ を 0 が始点で (x, y) が終点となる線分とし, $g(x, y) = \int_{L_{(x,y)}} \omega$ とおく. このとき $g(x, y)$ は $\omega = dg$ となる $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級関数であることを示せ.

(b) $\mathbb{R}^2$ の 2 次微分形式 η についてある 1 次微分形式 ω があって $\eta = d\omega$ となることを示せ.

(c) $\mathbb{R}^2$ のド・ラームコホモロジー群 $H^k_{DR}(\mathbb{R}^2)(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよ. [4]

問 3.11 * S^1 のド・ラームコホモロジー群 $H^k_{DR}(S^1)(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよ.[5]

問 3.12 $\mathbb{R}^3$ の関数 (スカラー場)$F(x, y, z)$ とベクトル場 $\mathbf{V}(x, y, z) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$ について,

$$\mathrm{grad}(F) = \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \quad \mathrm{div}(\mathbf{V}) = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{V}) = \nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}, \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)$$

と定義する. 次の問いに答えよ.[6]

(a) 下の図式が可換になるように Φ_1, Φ_2, Φ_3 をうまく定義せよ.

$$\begin{tikzcd}
\{\text{関数 (スカラー場)}\} \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, equal] & \{\text{ベクトル場}\} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "\Phi_1"] & \{\text{ベクトル場}\} \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\Phi_2"] & \{\text{関数 (スカラー場)}\} \arrow[d, "\Phi_3"] \\
\{\text{関数 (0 次微分形式)}\} \arrow[r, "d"] & \{\text{1 次微分形式}\} \arrow[r, "d"] & \{\text{2 次微分形式}\} \arrow[r, "d"] & \{\text{3 次微分形式}\}
\end{tikzcd}$$

(b) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(F)) = 0$ と $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\mathbf{V}) = 0$ をそれぞれ示せ.

(c) $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\mathbf{V}$ について, $\mathrm{rot}\mathbf{V} \equiv 0$ であることは $\mathbf{V} = \mathrm{grad}\phi$ なるスカラー場 (スカラー・ポテンシャル)ϕ が存在することと同値であることを示せ.[7]

---

[4] 余裕があれば $H^k_{DR}(\mathbb{R}^n)$ はどうなるか考察せよ.

[5] 頑張れば今の状況でも求められる.(トゥー 多様体 24 章を見よ.) 他にもド・ラームの定理「滑らかな多様体 M について $H^k_{DR}(M) \cong \mathrm{Hom}(H_k(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ が成り立つ」を認めればホモロジー群から求められる.

[6] この問題は「$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル解析が微分形式によって再解釈される」ことを確かめる問題である. そのため数学的な記述は少々曖昧であるのでご了承いただきたい.

[7] ヒント: $k > 0$ について $H^k_{DR}(\mathbb{R}^3) = 0$ であることを用いる. 同様に $\mathrm{div}\mathbf{V} \equiv 0$ であることは $\mathbf{V} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ なるベクトル場 (ベクトル・ポテンシャル)$\mathbf{A}$ が存在することと同値であることがわかる.

問 3.13 [Tu. Problem 19.13] 次を英訳し問題に解答せよ.

In Maxwell's theory of electricity and magnetism, developed in the late nineteenth century, the electric field $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ and the magnetic field $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ in a vacuum $\mathbb{R}^3$ with no charge or current satisfy the following equations:

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \mathrm{div}\mathbf{E} = 0, \mathrm{div}\mathbf{B} = 0.$$

We define the 1-form E on $\mathbb{R}^3$ corresponding to the vector field $\mathbf{E}$ by $E = E_1dx + E_2dy + E_3dz$ and define the 2-form B on $\mathbb{R}^3$ corresponding to the vector field $\mathbf{B}$ by $B = B_1dy \wedge dz + B_2dz \wedge dx + B_3dx \wedge dy$.

Let $\mathbb{R}^4$ be space-time with coordinates (x, y, z, t). Then both E and B can be viewed as differential forms on $\mathbb{R}^4$. Define F to be the 2-form

$$F = E \wedge dt + B$$

on space-time. Decide which two of Maxwell's equations are equivalent to the equation $dF = 0$. Prove your answer. [8]

●1 の分割・多様体上の積分・ストークスの定理

問 3.14 Let A and B two disjoint closed sets in a manifold M. Find C^∞ function f on M such that f is identically 1 on A and identically 0 on B.

問 3.15 M を向きづけ可能なコンパクト m 次元多様体とし, N を $m-1$ 次元の M の閉部分多様体とする. ω を m 次微分形式とするとき $\int_M \omega = \int_{M\setminus N} \omega$を示せ.

問 3.16 •(多様体の基礎 20 章) リーマン球面 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \mathbb{C}$ を構成する 2 つの複素平面 $\mathbb{C}$ をそれぞれ $z = x + iy$, $\xi = \zeta + i\eta$ の対応で (ζ, η) 平面, (x, y) 平面と同一視する. 次の問いに答えよ.

(a) 座標変換 $z = \frac{1}{\xi}$ を (ζ, η) と (x, y) を用いて表せ.

(b) (x, y) 平面上の 2 次微分形式 $\omega = \frac{dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ は $\mathbb{CP}^1$ 上の 2 次微分形式 $\widetilde{\omega}$ に拡張できることを示せ. [9]

(c) $\int_{\mathbb{CP}^1} \widetilde{\omega}$ の値を求めよ.

問 3.17 2 次元トーラス $T^2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\}$ について

$$\int_{T^2} yzw\, dx \wedge dz$$

を求めよ. ただし T^2 にどのような向きを入れたのかを明記すること.

問 3.18 •

$$\int_{S^2} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

を求めよ. ただし S^2 にどのような向きを入れたのかを明記すること.

[8] この文章には続きがあった. "The other two are equivalent to $d{*}F = 0$ for a star-operator $*$ defined indifferential geometry." つまり後二つは $d * F = 0$ と同じである. ここで $*$ は Hodge-star operator である.

[9] ヒント: (ζ, η) 平面上の C^∞ 級 2 次微分形式 α で, (ζ, η) 平面と (x, y) 平面の共通部分で ω と一致するものを一つ見つけよ. そうすると α と ω の貼り合わせで $\widetilde{\omega}$ が構成できる.

問 3.19 • $D=[a,b]\times[c,d]$ とし, $f(x,y), g(x,y)$ を D 上の C^∞ 級関数とする.[10]グリーンの定理

$$\int_{\partial D} f(x,y)dx+g(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$$

を示せ. ただし ∂D にどのような向きを入れたか明記すること.

問 3.20 • $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上で定義された領域上で定義された関数 $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ を考える. $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上の 1 次微分形式を $\omega:=\frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx$ とする. 次の問いに答えよ.

(a) $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上 $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ であることを示せ.
(b) C_1 を中心 $(3,0)$ で半径 2 の円周とし, 向きを反時計回りに入れる. $\int_{C_1}\omega$ を計算せよ.
(c) C_2 を中心 $(1,0)$ で半径 4 の円周とし, 向きを反時計回りに入れる. $\int_{C_2}\omega$ を計算せよ.

• 向きづけの問題

問 3.21 *(多様体の基礎 20 章) 多様体 M が向きづけ可能であるための必要十分条件は, どの点でも 0 にならない m 次微分形式 ω が存在することであることを示せ.(つまり向きづけ可能とは $\wedge^m T^*M$ が自明になることと同値である.)

問 3.22 * 多様体 M についてその接ベクトル束 TM は常に向きづけ可能であることを示せ.

問 3.23 * $\mathbb{CP}^n$ は向きづけ可能であることを示せ.

問 3.24 * $(-1,1)\times\mathbb{R}$ に同値関係 $\sim$ を

$$(x,y)\sim(z,w)\Leftrightarrow \text{ある整数 } m \text{ があって } z=(-1)^m x, w=y+m.$$

と定義する. $X:=((-1,1)\times\mathbb{R})/\sim$ とし<u>メビウスの帯</u>という. 商写像 $\pi:(-1,1)\times\mathbb{R}\to X$ によって X に位相を入れる. 次の問いに答えよ.

(a) $U_1:=\pi((-1,1)\times(0,1))$, $U_2:=\pi((-1,1)\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ とおく. 各 $i=1,2$ について $\mathbb{R}^2$ の開集合 V_i への同相写像 $\varphi_i:U_i\to V_i$ で, $\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$ が X の座標近傍系になるような φ_1,φ_2 を一つ構成せよ. またメビウスの帯は C^∞ 級多様体になることを示せ.
(b) メビウスの帯 X は向きづけ不可能であることを示せ.

問 3.25 ** $\mathbb{RP}^n$ は n が奇数なら向きづけ可能であるが, n が偶数なら向きづけ不可能であることを示せ. [11]

• 発展課題[12]

問 3.26 * X をベクトル場とし, ω を k 次微分形式とする.

$$(L_X\omega)(X_1,\ldots,X_k):=X(\omega(X_1,\ldots,X_k))-\sum_{i=1}^k\omega(X_1,\ldots,[X,X_i],\ldots,X_k)$$

と定義する. <u>$L_X\omega$ を ω の X による Lie 微分</u>という. 次の問いに答えよ. [13]

[10] D° 上で C^∞ 級で D 上で連続と言った方がいい?
[11] 一応問 3.21 を使えば現時点でも求められる. 他にも「m 次元コンパクト連結多様体 M について, その n 次ホモロジー群 $H_n(X,\mathbb{Z})$ が $\mathbb{Z}$ ならば向きづけ可能であり, 0 ならば向きづけ不可能である」という定理を使えば, ホモロジー群からも求められる.
[12] 教育的な問題からそうでない問題まで揃えており, 余裕のある人向けの問題となっております.
[13] 難しければ $k=1$ など低い次数の微分形式対して示して良い.

(a) $L_X\omega$ は k 次微分形式であることを示せ.
(b) $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を X の 1 パラメーター変換群とするとき, $L_X\omega = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*\omega-\omega}{t}$ を示せ.
(c) $L_XL_Y - L_YL_X = L_{[X,Y]}$ を示せ.
(d) $L_X(\omega\wedge\eta) = L_X(\omega)\wedge\eta+\omega\wedge L_X(\eta)$ と $dL_X = L_Xd$ をそれぞれ示せ.

問 3.27 * X をベクトル場とし, ω を k 次微分形式とする.

$$(i_X\omega)(X_1,\ldots,X_{k-1}) := \omega(X,X_1,\ldots,X_{k-1})$$

と定義する. $i_X\omega$ を ω と X の内部積という. 次の問いに答えよ

(a) $i_X\omega$ は $k-1$ 次微分形式であることを示せ.
(b) ω を k 次微分形式とするとき, $i_X(\omega\wedge\eta) = i_X(\omega)\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge i_X(\eta)$ を示せ.
(c) $i_{[X,Y]} = L_Xi_Y - i_YL_X$ を示せ.
(d) Cartan の公式 $L_X = i_Xd + di_X$ を示せ.

問 3.28 * ω を $\mathbb{R}^n$ 上の 1 次微分形式とし, S_ω を $\mathbb{R}^n$ のベクトル場 X で $i_X\omega = 0$ となるものの集合とする. $d\omega\wedge\omega = 0$ ならば任意の $X, Y\in S_\omega$ について $[X,Y]\in S_\omega$ であることを示せ.

問 3.29 * M を向きづけ可能なコンパクト多様体とし g を M 上のリーマン計量とする.

(a) $\{(U_\lambda, x_1^\lambda,\ldots,x_m^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに同じ向きになる座標近傍系とする. $g_{ij}^\lambda = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i^\lambda},\frac{\partial}{\partial x_j^\lambda}\right)$ とし,

$$\omega_\lambda := \sqrt{\left|\det\left(g_{ij}^\lambda\right)\right|}dx_1^\lambda\wedge\cdots\wedge dx_m^\lambda$$

とおく. M 上の m 次微分形式 ω_g で $\omega_g|_{U_\lambda} = \omega_\lambda$ となるものが存在することを示せ. この ω_g はリーマン計量の体積要素と呼ばれる.

以下, $\mathbb{R}^n$ に標準的なリーマン計量 g, つまり $g_{ij} = \delta_{ij}$ となる計量 g を入れる. [14]

(b) S^1 に $\mathbb{R}^2$ から誘導されるリーマン計量 g_{S^1} を入れる. $\int_{S^1}\omega_{g_{S^1}}$ を求めよ.
(c) S^2 に $\mathbb{R}^3$ から誘導されるリーマン計量 g_{S^2} を入れる. $\int_{S^2}\omega_{g_{S^2}}$ を求めよ.

問 3.30 ** (学部一年の積分の授業で習ったと思われる) 曲線の長さや曲面の表面積を求める公式を上のリーマン計量の体積要素を用いて導出せよ. [15]

問 3.31 ** ベクトル解析におけるガウスの発散定理を調べ, それが (多様体の) ストークスの定理から導かれることを示せ.[16]

演習の問題は授業ページ (`https://masataka123.github.io/2022_winter_generaltopology/`) にもあります. 右の QR コードからを読み込んでも構いません.

[14] δ_{ij} はクロネッカーのデルタである.

[15] 学部 1 年で線分の長さや表面積の公式習ったと思うが, その公式の証明はされていなかったと思う. 実は表面積や線分の長さの公式はリーマン計量の体積要素からわかるものであり, とどのつまり学部 3 年にしてようやく表面積や曲線の長さが定義できたのである.

[16] 面積分をうまく定義する必要がある. 本当はもっと演習問題ぽく出したかったがどうもリーマン計量が出てくるためうまく問題が作れなかった...