7 シュワルツの補題

岩井雅崇 2023/05/23

以下断りがなければ, Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (連結開集合) とし, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ とする.

[用語] $f : M \to M$ が正則な全単射のとき正則自己同型という. $f : M \to N$ が正則な全単射であるとき, 双正則写像という.

問 7.1 • $f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = \frac{i}{2}$ となる正則な全単射 (正則自己同型)$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を全て求めよ.

問 7.2 • $|\alpha| < 1$ となる $\alpha \in \mathbb{C}$ について $\Phi_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}$ とおく. 次の問いにこたえよ.

(a) $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha(z) = z$.
(b) $|z| = 1$ ならば $|\Phi_\alpha(z)| = 1$
(c) $|z| < 1$ ならば $|\Phi_\alpha(z)| < 1$

問 7.3 • $\Psi(z) = \frac{z-i}{z+i}$, $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) > 0\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(a) $z \in \mathbb{H}$ について $|\Psi(z)| \leq 1$ であることを示せ.
(b) $\Psi(z)$ は $\Psi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ となる正則な全単射であることを示せ. (ヒント: 逆写像 $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ は $\Phi(z) = \frac{iz+i}{-z+1}$ である (なぜか?))

問 7.4 • $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を正則関数とするとき, 次を示せ. (ヒント: 問 7.2 とシュワルツの補題.)

(a) 任意の $z \in \mathbb{D}$ について $\left| \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)} f(z)} \right| \leq |z|$
(b) $|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2$

問 7.5 $f(z)$ を $\mathbb{D}$ 上で正則な関数で $\mathrm{Re} f(z) > 0$ かつ $f(0) = 1$ となるものとするとき, 次を示せ.

(a) 任意の $z \in \mathbb{D}$ について $\left| \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1} \right| \leq |z|$
(b) $|f'(0)| \leq 2$

問 7.6 * 穴あき円板 $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1\}$ の正則自己同型を全て求めよ. (ヒント: そのようなものは原点周りで有界である.)

問 7.7 $f(z)$ は $\mathbb{D}$ 上で正則かつ $\bar{\mathbb{D}}$ 上で連続な関数とする. $f(0) = 0$ であり, $0 < |z| \leq 1$ について $f(z) \neq 0$, $|z| = 1$ について $|f(z)| = 1$ を満たすとする. このときある $|a| = 1$ となる $a \in \mathbb{C}$ と自然数 m があって $f(z) = az^m$ とかけることを示せ.

問 7.8 $f(\alpha) = \alpha$ となる α を f の不動点という. 次の問いに答えよ.

(a) 正則関数 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が 2 つの不動点を持つとき, $f(z) = z$ となることを示せ.
(b) 任意の正則関数 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ は不動点を持つか?(ヒント: $\mathbb{H}$ を考えよ.)

問 7.9 f を $\mathbb{D}$ 上の正則関数とする. ある $0 < a < 1$ があって $\mathbb{D}$ 上で $|f(z)| < a$ となるならば, 不動点が存在することを示せ.

問 7.10 D を原点を含む有界領域とし, $f : D \to D$ を $f(0) = 0$ となる正則写像とする. 次の問いにこたえよ.

(a) $f_k := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k\ 回}$ とするとき $f_k'(0) = (f'(0))^k$ であることを示せ.

(b) $|f'(0)| \leq 1$ であることを示せ. (ヒント: $|f_k|$ は有界である.)

問 7.11 * 次の問いに答えよ.

(a) $z, w \in \mathbb{D}$ と整数 $n \geq 2$ について $|z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + w^{n-1}| \leq n$ を示せ.

(b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を $\mathbb{D}$ 上の正則関数とする. $a_1 \neq 0$ かつ $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq |a_1|$ であるならば f は $\mathbb{D}$ 上で単射であることを示せ.

問 7.12 * $z, w \in \mathbb{D}$ について

$$\rho(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$$

とおく. [1]次の問いに答えよ.

(a) 任意の正則関数 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ について $\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w)$ を示せ.

(b) 任意の正則自己同型写像 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ について $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z, w)$ を示せ.

(c) 任意の正則関数 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ について,

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

であることを示せ (シュワルツ-ピックの補題と呼ばれる).

以下の問題は第 6 回演習問題の内容である.[2]

問 7.13 * $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする. u が劣調和関数であるとは任意の $a \in \mathbb{D}$ と $|a| + r < 1$ となる任意の $r > 0$ について,

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta$$

が成り立つこととする. 次の問いに答えよ.

(a) f を $\mathbb{D}$ 上の正則関数とするとき, $|f(z)|$ は劣調和関数であることを示せ.

(b) 劣調和関数 u が $\mathbb{D}$ の内部で最大値を持つならば, 定数関数であることを示せ. (つまり最大値原理は正則よりも弱い条件で成り立つ.)

演習の問題は授業ページ (`https://masataka123.github.io/2023_summer_complex/`) にもあります. 右下の QR コードからを読み込んでも構いません.

[1]擬-双曲的距離と呼ばれる

[2]第 6 回の問題に入り切らなかったが, どうしても出したかったので出しておく.