# 1　正則性

岩井雅崇 2023/04/11

以下断りがなければ, $\Omega$ は $\mathbb{C}$ の領域 (連結開集合) とする.

問 1.1 • 次の問いに答えよ.

(a) 「複素数 $a_n$ からなる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する」ことの定義を述べよ.
(b) 複素数 $a_n$ からなる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとする. このとき全単射 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ について, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ も絶対収束して極限値は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ であることを示せ.

問 1.2 • 次の問いに答えよ.

(a) 「$\Omega$ 上の関数列 $f_n$ が $\Omega$ 上の関数 $f$ に一様収束する」ことの定義を述べよ.
(b) $\Omega$ 上の関数列 $f_n$ と $\Omega$ 上の関数 $f$ であって, 任意の $z\in\Omega$ について $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z)$ であるが, $f_n$ が $f$ に一様収束しない例をあげよ.
(c) $\Omega$ 上の関数列 $f_n$ が $\Omega$ 上の関数 $f$ に一様収束すると仮定する. 任意の $n\in\mathbb{N}$ について $f_n$ が $\Omega$ 上で連続ならば, $f$ も連続であることを示せ.

問 1.3 •(コーシー・リーマン方程式)$f(z)$ を $\Omega$ 上の複素数値 $C^{\infty}$ 級関数とする. $z=x+iy\in\mathbb{C}$ とし $f(z)$ を $(x,y)$ の関数 $f(x,y)$ と考え, $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ とおく. ($u,v$ は実数値 $C^{\infty}$ 級関数とする.) 次は同値であることを示せ.

(a) $f(z)$ は $\Omega$ 上で正則である.
(b) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ かつ $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ が成り立つ.

問 1.4 • 次の関数は正則関数であるか判定せよ.

(a) $f(z)=\bar{z}$
(b) $f(z)=|z|^2$
(c) $f(z)=\frac{1}{z}$ (ただし定義域は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ とする.)

問 1.5 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ 上の正則関数とする. このとき $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ もまた $\mathbb{C}$ 上の正則関数であることを示せ.

問 1.6 $f(z)$ を $\Omega$ 上の正則関数とする. 任意の $z\in\Omega$ について $f'(z)=0$ となるならば $f$ は定数関数であることを示せ.

問 1.7 $z=x+iy\in\mathbb{C}$ として複素偏微分を次で定義する.

$$\frac{\partial}{\partial z}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$f(z)$ を領域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上の $C^{\infty}$ 級関数とするとき, 次は同値であることを示せ.

(a) $f(z)$ は $\Omega$ 上で正則である.
(b) $\Omega$ 上で $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\equiv 0$.

問 1.8 引き続き問 1.7 の通りの記号を用いる．次の問いに答えよ．

(a) $f(z)$ を $\Omega$ 上の正則関数とするとき，$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$ であることを示せ．

(b) $f(z)$ を $\Omega$ 上の $C^\infty$ 級関数とするとき，次を示せ．

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right) f(z)$$

演習の問題は授業ページ (`https://masataka123.github.io/2023_summer_complex/`) にもあります．右下の QR コードからを読み込んでも構いません．