6 最大値原理・開写像定理

岩井雅崇 2023/05/23

以下断りがなければ, Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (連結開集合) とし, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ とする.

問 6.1 • f を $|f| \leq 1$ となる $\mathbb{D}$ 上の正則関数とする. $f(\frac{1}{2}) = 1$ ならば f は定数関数であることを示せ.

問 6.2 • f を $\mathbb{D}$ 上の正則関数かつ $\bar{\mathbb{D}}$ 上で連続な関数とし, f は $\mathbb{D}$ 内で零点を持たないものとする. $|z| = 1$ 上で $|f(z)|$ が定数関数ならば, f は $\mathbb{D}$ 上で定数関数であることを示せ. (ヒント: $f, \frac{1}{f}$ に最大値原理を用いよ. もしくは最大値原理と最小値原理を用いても良い.)

問 6.3 • 次の問いに答えよ.

(a) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(x, y) = x$ は開写像であるが閉写像ではないことを示せ.
(b) 開写像定理の主張を述べよ.
(c) $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $q(x, y) = (x, xy)$ は開写像ではないことを示せ. (つまり「開写像定理」において正則性は必要である.)

問 6.4 • 次の問いに答えよ.

(a) C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で単射であるが, ある $a \in \mathbb{R}$ があって $f'(a) = 0$ となるものを一つ構成せよ.
(b) 「逆関数の正則性」の主張を述べよ.
(c) C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で全単射であるが f^{-1} が C^∞ 級でないものを一つ構成せよ. (つまり「逆関数の正則性」において正則性は必要である.)

問 6.5 f を Ω 上の定数でない正則関数とする. $a \in \Omega$ があって $f'(a) \neq 0$ であるならば, a を含む半径 $r > 0$ の円板 D で $f|D : D \to \mathbb{C}$ が単射になるものが存在することを示せ.

問 6.6 f を Ω 上の単射な正則関数とし, $\bar{D} \subset \Omega$ となる円板 D とする. 任意の $w \in f(D)$ について次を示せ.

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz$$

問 6.7 f を $\mathbb{D}$ 上の正則関数とする. 次の問いに答えよ.

(a) $\lim_{r \to 1} \left(\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(re^{i\theta})| \right) = 0$ ならば $f \equiv 0$ であることを示せ.
(b) $\lim_{r \to 1} \left(\sup_{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f(re^{i\theta})| \right) = 0$ ならば $f \equiv 0$ であることを示せ. (ヒント: f をうまく組み合わせて (a) を満たす関数を作れ.)

問 6.8 $w_1, \ldots, w_n$ を $\mathbb{C}$ 上の単位円周上 $S^1 (= \partial \mathbb{D})$ の点とする. 次の問いに答えよ.

(a) $\prod_{i=1}^n |z - w_i| \geq 1$ となる $z \in S^1$ が存在することを示せ.
(b) $\prod_{i=1}^n |z - w_i| = 1$ となる $z \in S^1$ が存在することを示せ.

問 6.9 次の問いに答えよ.

(a) (カゾラティ-ワイエルシュトラスの定理) f を $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ 上の正則関数とする. f が 0 で真性特異点を持つならば, $f(\mathbb{D}\setminus\{0\})$ は $\mathbb{C}$ において稠密であることを示せ. [1]

(b) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が単射な正則関数ならば, ある $a,b\in\mathbb{C}$ があって $f(z)=az+b$ であることを示せ. (ヒント: $f(1/z)$ を考えよ.)

問 6.10 $^*\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ について, 同値関係 $\sim$ を「$z\sim w \Leftrightarrow 0$ でない複素数 α が存在して $z=\alpha w$」と定義する. $\mathbb{CP}^1 := (\mathbb{C}^2\setminus\{0\})/\sim$ と書き複素射影空間と呼ぶ. 以下 $z=(z_1,z_2)$ を $\mathbb{CP}^1$ の元とみなしたものを $(z_1:z_2)$ と書き複素同次座標と呼ぶ. $U_1=\{(z_1:z_2)|z_1\neq 0\}, U_2=\{(z_1:z_2)|z_2\neq 0\}$ とおき,

$$\begin{array}{rcccc} \varphi_1: & \mathbb{C} & \to & U_1 \\ & z & \longmapsto & (1:z) \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} \varphi_2: & \mathbb{C} & \to & U_2 \\ & w & \longmapsto & (w:1) \end{array}$$

と定める. 次の問いに答えよ.

(a) φ_1,φ_2 は全単射であることをしめせ. また逆写像を各々構成せよ.[2]

(b) $f:\mathbb{CP}^1\to\mathbb{C}$ を連続写像とする. $f\circ\varphi_1$ と $f\circ\varphi_2$ が共に正則関数であるならば, f は定数関数であることを示せ.

問 6.11 *(開写像定理を用いた代数学の基本定理の証明) $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ とし, $n\geq 1, a_n\neq 0$ とする. 以下の問いに答えよ.

(a) $F:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ を $F(z,w)=(z^n+a_1z^{n-1}w+\cdots+a_{n-1}zw^{n-1}+a_nw^n, w^n)$ とすると, F は連続写像 $\tilde{F}:\mathbb{CP}^1\to\mathbb{CP}^1$ を誘導することを示せ.

(b) $f(\mathbb{C})$ は閉集合であることをしめせ.

(c) $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ を示せ. これより $f(\alpha)=0$ なる $\alpha\in\mathbb{C}$ は存在する.

問 6.12 (ルーシェの定理) f,g を Ω 上の正則関数, $D\subset\Omega$ を円板, $C=\partial D$ を円周とする. C 上で $|f(z)|>|g(z)|$ ならば, f と $f+g$ は D 内で (重複度込みで) 同じ個数の零点を持つことを示せ. (ヒント: $t\in[0,1]$ について $n_t := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'+tg'}{f+tg}dz$ とすると n_t が $[0,1]$ 上の整数値連続関数であることを示せ. 授業の開写像定理の証明も参考にせよ.)

問 6.13 $z^4-6z+3=0$ は $1<|z|<2$ 内に何個の解を持つか?

問 6.14 * $|z|\leq 3$ の近傍で定義された正則関数 $f(z)$ で $|z|=3$ 上では零点を持たないものとする. f が次の 3 条件を満たすとき, $f(z)$ の $|z|<3$ における零点を全て求めよ.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=2,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{z^2f'(z)}{f(z)}dz=-4$$

演習の問題は授業ページ (`https://masataka123.github.io/2023_summer_complex/`) にもあります. 右下の QR コードからを読み込んでも構いません.

[1] ヒント: もしそうでないなら, ある点 $w\in\mathbb{C}$ があって $g(z):=\frac{1}{f(z)-w}$ が $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ 上で有界となってしまう. これは f が 0 で真性特異点を持つことに反する (なぜか?)

[2] もっと強く同相であるが, 面倒なのでそこまで示さなくても良い.