5 楕円関数

岩井雅崇 2023/05/23

はじめに

複素解析続論に関して, 楕円関数以降の内容はかなり難易度が高いと思います.[1] 個人的には第 4 回演習の内容をきっちり理解すること, そしてその後に第 5 回以降の内容を (努力できる範囲で) 理解することをお勧めします. (かなり難しい問題も入っているので, 全部解こうとは思わないでください. 教科書や参考書なども参考にしながら解いてください.)

ペー関数に関する問題

以下断りがなければ, Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (連結開集合) とし, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ とする.

$f(-z) = f(z)$ となる関数を偶関数といい, $f(-z) = -f(z)$ となる関数を奇関数という.

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ を $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$ となる複素数とする. $L := \{m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$ とし, ワイエルシュトラスのペー関数 $\wp(z)$ を以下の通りとする.

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right)$$

問 5.1 • ワイエルシュトラスのペー関数の定義を書け. ただし発表時にノートなどを見てはいけない. またこの問題は一回以下の発表者のみ回答できる. (この問題は救済問題です. 配点は非常に低いです.)

問 5.2 • $\mathbb{D}$ 上の正則関数 $f(z)$ が奇関数であるとき $z = 0$ でのテーラー展開を

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

とすると, $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0$ であることを示せ.

問 5.3 • 任意の $z \in \mathbb{C}$ について $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ となるような $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ を全て求めよ.

問 5.4 • ワイエルシュトラスのペー関数 $\wp(z)$ が $z = 0$ で 2 位の極を持つことと, 偶関数であることを示せ. [2]

問 5.5 (授業の内容) $r > 0$ を実数とする. $|z| < r$, $|w| > 2r$ となる複素数 z, w について次を示せ.

$$\left| \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| < \frac{10r}{|w|^3}$$

問 5.6 (授業の内容) m, n を整数とし

$$K_{m,n} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | m - \frac{1}{2} \leq x \leq m + \frac{1}{2}, n - \frac{1}{2} \leq y \leq n + \frac{1}{2} \right\}$$

[1] 正直いうと私も復習するまでまあまあ忘れていました. 主張だけは覚えていたもの (リーマンの写像定理) や主張すら忘れていたものなど多くあります. 学部時代は私は複素解析続論の内容にあまり興味がなかったので, なんとなくの理解しかないです...(授業中も適当にノート取って, アティマクの演習問題解いてました.)

[2] 授業の内容を自分なりに要約して答えること. 授業の板書通りを丸写しした場合は不正解とする.

とおく. 次を示せ.

(a) $(m,n) \neq (0,0)$ ならば

$$\frac{1}{(\sqrt{m^2+n^2})^3} \leq \iint_{K_{m,n}} \frac{8}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} dxdy$$

(b)

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(\sqrt{m^2+n^2})^3} < \infty$$

問 5.7 次の式を示せ.

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{m^2+n^2} = +\infty$$

問 5.8 $\wp(z)$ の原点におけるローラン展開を $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots$ とするとき, 次を示せ.

$$a_2 = 3\sum_{w\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{w^4}, \quad a_4 = 5\sum_{w\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{w^6}$$

また $g_2 = 60\sum_{w\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{w^4}$, $g_3 = 140\sum_{w\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{w^6}$ とおくとき, 授業でやったことを用いて次の式を示せ.

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

問 5.9 $\wp''(z) - 6\wp(z)^2$ は定数関数であることを示せ. またその定数は何か?

問 5.10 $\alpha \in \mathbb{C}$ について, 周期平行四辺形にある z で $\wp(z) = \alpha$ を満たすものの個数は (零点の重複度をこめて)2 であることを示せ. (ヒント: $\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\alpha}$ を考える.)

問 5.11 * 次の問いに答えよ

(a) 周期平行四辺形にある z について, $\wp'(z)$ の極は L の点であり, $\wp'(z)$ の零点は $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ であることを示せ.

(b) $\wp(z) = \wp(z')$ であるならば, $z \pm z' \in L$ であることを示せ.

(c) $e_1 = \wp(\frac{\omega_1}{2}), e_2 = \wp(\frac{\omega_2}{2}), e_3 = \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$ とすると, これらは互いに異なり, 次を満たすことを示せ.

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$$

楕円関数の問題

問 5.12 ω を楕円関数 $f(z)$ の一つの周期とする.[3]次を示せ.

(a) $f(z)$ が奇関数ならば $f(\frac{\omega}{2}) = 0$.

(b) $f(z)$ が偶関数で $f(\frac{\omega}{2}) = 0$ ならば, $z = \frac{\omega}{2}$ での f の零点の位数は 2 以上である.

[3]つまり任意の $z \in \mathbb{C}$ について $f(z+\omega) = f(z)$ となるもの

問 5.13 * $f(z)$ を ω_1, ω_2 を周期とする楕円関数とする. 次の問いに答えよ.

(a) 周期平行四辺形を H とする. $\alpha \in \mathbb{C}$ を $\alpha \notin f(\partial H)$ かつ $\alpha \notin f((f')^{-1}(0))$ となるものとする. $f(z)$ が偶関数ならば, $f(z) = \alpha$ は H 内に相異なる偶数個の解を持つことを示せ.

(b) $f(z)$ が偶関数ならば, ある有理式 $R(x)$ があって, $f(z) = R(\wp(z))$ となることを示せ. (ヒント: (a) のような α, β をとり, $\frac{f(z)-\beta}{f(z)-\alpha}$ を $\wp$ を用いて表せ.)

(c) $f(z)$ は偶関数と奇関数の和で常に表せることを示せ.

(d) ある有理式 R_1, R_2 があって, $f(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z)R_2(\wp(z))$ とかけることを示せ.

ここで複素係数多項式 $P(x), Q(x)$ を用いて表せる $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ を有理式という.

問 5.14 * $f(z)$ を ω_1, ω_2 を周期とする楕円関数とし, H を周期平行四辺形とする. ただし H の境界上に f の極や零点はないものとする. 次の問いに答えよ.

(a) $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial H} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz$ は L の元であることをしめせ.[4]

(b) f の H 内の零点を $a_1, \ldots, a_s$ とし H 内の極を $b_1, \ldots, b_t$ とする. m_i を f の a_i での零点の位数とし, n_j を b_j の極の位数とする. $\sum_{i=1}^{s} m_i - \sum_{j=1}^{t} n_j$ の値を求めよ.

(c) $\sum_{i=1}^{s} m_i a_i - \sum_{j=1}^{t} n_j b_j$ は L の元であることを示せ.

個人的に気になった問題

以下の問題は個人的に気になった話題である. そもそもなぜワイエルシュトラスのペー関数 $\wp(z)$ を勉強するのだろうか?[5]以下の問題群はワイエルシュトラスのペー関数 $\wp(z)$ を勉強する一つの理由を与えるものである. この問題群は余裕のある人がやってください. また未定義な用語がある (かもしれない) のでそこは各自調べてください.

以下 $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} | Im(\tau) > 0\}$ とする.

問 5.15 *$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ を $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$ かつ $\frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{H}$ となる複素数とする. (のちの ω_1', ω_2' も同様である.)

$$L := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$$

とする ($\mathbb{C}$ の格子と呼ばれる.) この問題は「複素 1 次元トーラス $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ と $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'$ がいつ双正則になるか?」について考える問題である.[6] 次の問いに答えよ.

(a) $\mathbb{C}$ の集合として $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'$ となるための必要十分条件は, ある整数係数 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が存在して $\det A = 1$ かつ $\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ である.

(b) $\tau := \frac{\omega_2}{\omega_1}$ とする. $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $F(z) = \frac{z}{\omega_1}$ とするとき, ある同相写像 $\tilde{F} : \mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \to \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ が存在して次の可換図式を満たすことを示せ.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_1"] \\
\mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \arrow[r, "\tilde{F}"] & \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau
\end{tikzcd}$$

[4]ただし第 8 回演習問題の内容を用いて良い

[5]この関数を考える意味がそもそもあるのかと思うかもしれない

[6]M と N が双正則とは, 正則な全単射 $f : M \to N$ が存在すること (このとき正則な逆写像 $g : N \to M$ も存在する.) ただし厳密に定義するには複素多様体の概念を用いる必要がある.

ただし, π, π_1 は商写像とする. (実はもっと強く双正則であることが言える.) よって以後 ω_1, ω_2 ではなく $\tau \in \mathbb{H}$ を考えれば良い.

(c) $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$ とする. $G : \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_1 \to \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_2$ が双正則ならば,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\hat{G}"] \arrow[d, "\pi_1"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_2"] \\ \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_1 \arrow[r, "G"] & \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_2 \end{tikzcd}$$

となるような全単射正則写像 $\hat{G} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が存在することがわかっている. このことを用いて, $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_1$ と $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_2$ が双正則になるならば, ある整数係数 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が存在して $\det A = 1$ かつ $\tau_1 = \frac{a\tau_2 + b}{c\tau_2 + d}$ となることを示せ. [7]実は (b) と同じ議論で逆も言える.

(d)
$$M = \{\tau \in \mathbb{H} | -\frac{1}{2} \leq Re(\tau) < \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1, -\frac{1}{2} < Re(\tau) < 0 \text{ ならば } \tau > 1\}$$

とする. M を図示せよ. (M は複素 1 次元トーラスのすみかとも思える.) [8]

(e) 任意の $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$ について, $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_1$ と $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_2$ は同相であることを示せ. つまり同相であっても双正則でないことが起こる.[9]

問 5.16 * $\tau \in \mathbb{H}$ について

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m + n\tau)^4} \quad g_3(\tau) = 140 \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m + n\tau)^6}$$

とし, $e_1 = \wp(\frac{1}{2}), e_2 = \wp(\frac{\tau}{2}), e_3 = \wp(\frac{1+\tau}{2})$ とする. この問題は「複素 1 次元トーラスは代数多様体である」ことを見る問題である. (一部分講義で触れた内容を含む.)

$$M = \{(x : y : z) \in \mathbb{CP}^2 | y^2 z = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3\}$$

とおくとき, 次の問いに答えよ.

(a) 同相写像 $f : \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \to M$ を一つ構成せよ. [10][11]

(b) $\wp : \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ を考える. ある $\mathbb{C}$ の 3 点 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を除いて, $\wp^{-1}(w)$ の個数は 2 であることを示せ. またある 3 点 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めよ.[12]

---

[7]ただし第 6 回演習問題の内容を証明せずに用いても良い

[8]M の点は複素 1 次元トーラス全体を双正則で割った集合と思える. M は複素 1 次元トーラスのなるモジュライ空間とも呼ばれる.

[9]もっと強く実は C^∞ 級同型はいえる. つまり C^∞ 級では同じでも複素構造は違うものがあると言うことである. これを詳しく調べたのが小平邦彦と D.C. スペンサーであり, のちに小平・スペンサーの変形理論につながる. ちなみに小平邦彦は日本人初のフィールズ賞受賞者である.

[10]自然に構成していればこれは双正則になる. つまり $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ から $\mathbb{CP}^2$ への正則埋め込みを具体的に記述したことになる. 専門的な用語で言うと「$3P$ が very ample である」

[11]難しければ $f : (\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \setminus \{0\} \to M \setminus \{(0 : 1 : 0)\}$ なる同相写像でも良い.

[12]本当は $\wp : \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \to \mathbb{CP}^1$ にすれば $\mathbb{CP}^1$ の ∞ に対応する点も”例外”になり, 全 4 点が変な点となっていることがわかる. なぜ 4 点なのかは, リーマン・フルビッツの定理から出る. なおこの写像は $M \to \mathbb{CP}^1$ $(x : y : z) \mapsto (x : z)$ に”ほぼ”対応する.(ただし $(0 : 1 : 0)$ だけ $(1 : 0)$ に送るようにする.) この場合にも変な点 4 点を全て決定してみよ.

(c) $\lambda = \frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}$ とおく. 問 5.17 の j 不変量は, ある実数 $c \in \mathbb{R}$ があって

$$j(\tau) = c\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$

となることを示せ. またそのような定数 $c \in \mathbb{R}$ を求めよ. [13] ただし $g_2^3 - 27g_3^2 = 16\prod_{1\leq i<j\leq 3}(e_i-e_j)^2 \neq 0$ は証明なしに用いて良い.

問 5.17 * 引き続き問 5.16 の記号を用いる. j 不変量を

$$j(\tau) := 1728\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$$

と定義する. この問題は「j 不変量と複素 1 次元トーラスの関係を見る」問題である.[14] 次の問いに答えよ

(a) A を整数係数 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $\det A = 1$ となるものとするとき, 以下を示せ.

$$g_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^4 g_2(\tau), g_3\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^6 g_3(\tau),$$

また $j(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = j(\tau)$ をしめせ.

(b) $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$ について, $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau_1$ と $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau_2$ が双正則ならば, $j(\tau_1) = j(\tau_2)$ であることを示せ.

(c) $j(\tau_1) = j(\tau_2)$ であるならば, ある $t \in \mathbb{C}$ があって, $g_2(\tau_2) = t^4 g_2(\tau_1), g_3(\tau_2) = t^6 g_3(\tau_1)$ となることを示せ.

(d) 問 5.16(a) を用いて, $j(\tau_1) = j(\tau_2)$ であるならば, $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau_1$ と $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau_2$ が双正則であることを示せ.

問 5.18 * この問題は「フェルマーの最終定理などの教科書で一度は聞いたことがある, 3 次曲線上の点同士の謎の足し算」に関する問題である. $a, b, a+b, a-b$ がどれも L に入らない相異なる複素数 a, b を考え,

$$f_{a,b}(z) := \begin{vmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(a) & \wp'(a) & 1 \\ \wp(b) & \wp'(b) & 1 \end{vmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(a) $f_{a,b}(z)$ の極と位数を求めよ.

[13] $y^2z = 4(x-e_1z)(x-e_2z)(x-e_3z)$ なので, j 不変量は標数 p の楕円曲線でも定義ができる. 詳しくは Hartshorne Chapter 4 参照のこと.

[14] j 関数は $q = exp(2\pi i\tau)$ として $j(z)$ を展開すると

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \cdots$$

となる. 一方モンスター群と呼ばれる”単純群 (自明でない正規部分群を持たない群) で例外かつ一番大きい位数を持つもの (位数 $2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^9\cdot 7^6\cdot 11^2\cdot 13^3\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71$)” の既約表現の次元は $1, 196883, \cdots$ である. なんと $196884 = 196883 + 1$ が成り立つのである. これは偶然だと思われるかもしれないが, 実は高い次数でも似たようなことが成り立つのである.(ムーンシャイン予想と呼ばれる) 1992 年に R. ボーチャーズはムーンシャイン予想を解決し, その業績でフィールズ賞を取った.

(b) $f_{a,b}(-a-b) = 0$ を示せ. (ヒント: 問 5.14)

(c) $\mathbb{C}^2$ 上の 3 点 $(\wp(a), \wp'(a))$, $(\wp(b), \wp'(b))$, $(\wp(-a-b), \wp'(-a-b))$ は一直線上にあることを示せ. ここで 3 点が一直線上にあるとは, ある複素数 C, D があって $y = Cx + D$ を 3 点とも満たすこととする. [15]

(d) 3 次曲線 $y^2 = 4x^3 + Ax + B$ と直線 $y = Cx + D$ が相異なる 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ で交わるとする. このとき x_3 を x_1, y_1, x_2, y_2 を用いて表せ.

(e) 次の式 (加法定理) を示せ.

$$\wp(a+b) = -\wp(a) - \wp(b) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(a) - \wp'(b)}{\wp(a) - \wp(b)}\right)^2$$

演習の問題は授業ページ (`https://masataka123.github.io/2023_summer_complex/`) にもあります. 右下の QR コードからを読み込んでも構いません.

[15] C, D は複素数で良い. (複素) 一直線と呼んだ方が正確?