8 原始関数の存在・単連結・リーマンの写像定理

岩井雅崇 2023/05/23

以下断りがなければ, Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (連結開集合) とし, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ とする.

単連結に関する問題

問 8.1 • 単連結の定義を述べよ. また単連結な領域と単連結でない領域例をそれぞれ 2 つ挙げよ.[1]

問 8.2 Ω_1, Ω_2 を 2 つの同相な領域とする. Ω_1 が単連結ならば Ω_2 も単連結であることをしめせ.

問 8.3 「任意の $a, b \in \Omega$ について a と b を結ぶ線分が Ω に含まれる」領域 Ω は単連結であることを示せ.

問 8.4 $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ となる $\mathbb{C}$ 内の単連結な領域の族とする. このとき $\cup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ は単連結であることを示せ. (ヒント: 各 Ω_n が開集合であることを用いる.)

問 8.5 Chat GPT に「リーマンの写像定理に関する問題を教えて」と打ち込んで出てきた問題 (a), 問題 (b) を解け. なお問題文として破綻している可能性もある.

(a) 領域 $G = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ を単位円板 $\mathbb{D}$ に正則に写像するような双正則写像 $f : G \to \mathbb{D}$ を求めよ。ただし、単位円板上には値をとらないとする。

(b) 領域 $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| < 1\}$ を上半平面 $\mathbb{H}$ に正則に写像するような双正則写像 $f : G \to \mathbb{H}$ を求めよ。ただし、上半平面上には値をとらないとする。

原始関数に関する問題

問 8.6 • 次の問いに答えよ.

(a) $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}$ 上の正則関数 $f(z)$ で $f'(z) = \frac{1}{z}$ となるものは存在することを示せ.

(b) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の正則関数 $f(z)$ で $f'(z) = \frac{1}{z}$ となるものは存在しないことを示せ.

問 8.7 • $f(z)$ を $\mathbb{D}$ 上の正則関数とする. f が零点を持たないとき, $f = h^7$ となる $\mathbb{D}$ 上の正則関数が存在することを示せ.

問 8.8 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の正則関数 $(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3})e^z$ が $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上で原始関数を持つような定数 a の値とそのときの原始関数を求めよ.

問 8.9 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の正則関数 f で $z^5 = f^7$ となるものは存在しないことを示せ.

問 8.10 $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ が $f(z+1) = f(z)$ を満たすとき, ある $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の正則関数 $g(w)$ で $f(z) = g(e^{2\pi i z})$ となるものが存在することを示せ.

問 8.11 * $\mathbb{D}$ 上の単射な正則関数 $f(z)$ で $f(0) = 0, f'(0) = 1$ を満たすもの全体の集合を $\mathcal{F}$ とする. 次の問いに答えよ.

(a) 任意の $a \in \mathbb{D}$ について, $g(z) = \frac{z}{(1-az)^2}$ は $\mathcal{F}$ の元であることを示せ. またある $G \in \mathcal{F}$ で $g(z^2) = (G(z))^2$ となるものが存在することを示せ.

(b) 任意の $f \in \mathcal{F}$ について $f(z^2) = (F(z))^2$ となる $F \in \mathcal{F}$ が存在することを示せ.

問 8.12 * (ケーベ 1/4 定理) 引き続き $\mathcal{F}$ を問 8.11 のとおりとする. ケーベ 1/4 定理 「正則関数 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ で $f(0) = 0, f'(0) = 1$ かつ f が単射ならば, $D_{1/4}(0) := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/4\} \subset f(\mathbb{D})$ である」を以下の手順で証明せよ.

[1] 問 8.3 を用いても良い. 正直言って今の段階では単連結領域は $\mathbb{D}$ ぐらいしか出ない...

(a) $h(z) = \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + \cdots$ が $0 < |z| < 1$ 上で正則かつ単射ならば $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 \leq 1$ を示せ．(ヒント: $h(D_r(0) \setminus \{0\})$ の補集合の面積を計算し $r \to 1$ とする)

(b) $f \in \mathcal{F}$ とする．$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ とおくと $|a_2| \leq 2$ であることをしめせ．また $|a_2| = 2$ であることは, $\theta \in \mathbb{R}$ があって $f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$ となることと同値であることを示せ.(ヒント: 問 8.11(b) のような $F(z)$ を取り, $\frac{1}{F}$ に (a) を用いる)

(c) $h(z) = \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + \cdots$ が $0 < |z| < 1$ 上で正則かつ単射で α, β を値として取らない[2]ならば $|\alpha - \beta| \leq 4$ であることを示せ．(ヒント: $\frac{1}{h(z)-\alpha}$ の 2 次の項をみる)

(d) f が α を値として取らないならば, $|\alpha| \geq \frac{1}{4}$ を示せ．またケーベ 1/4 定理を示せ．(ヒント: $\frac{1}{f}$ は 0 と $\frac{1}{\alpha}$ を値として取らない.)

(e) $G(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ とおくと $-\frac{1}{4} \notin G(\mathbb{D})$ であることを示せ．これよりケーベ 1/4 定理の"1/4"は最良である.

リーマンの写像定理・モンテルの定理・フルビッツの定理

問 8.13 • リーマンの写像定理の主張を述べよ.

問 8.14 • Ω 上の正則関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と正則関数 f とする．f は定数関数でないとし, f_n は f に Ω の任意のコンパクト集合上で一様収束すると仮定する．「任意の f_n が Ω 内に零点を持たないならば, f もまた Ω 内に零点を持たないこと」を以下の手順で示せ．.[3]

(a) $f(w) = 0$ となる $w \in \Omega$ が存在するとする．このとき, $w \in \Omega$ を含む円板 $D \subset \Omega$ で「$\bar{D} \subset \Omega$ かつ f は $\bar{D} \setminus \{w\}$ 上で零点を持たない」となるものが存在することを示せ．(ヒント: 零点の孤立 問 3.8)

(b) 上の w, D について, $L := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ とおく．L は 1 以上の整数であることを示せ. (ヒント: 偏角の原理 問 4.8)

(c) 上の w, D について, $L_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz$ とおく．$L_n \to L$ $(n \to +\infty)$ であることを示せ (ヒント: ワイエルシュトラスの 2 重級数定理と問 3.1)

(d) $f(w) = 0$ となる $w \in \Omega$ は存在しないことを示せ.

問 8.15 次の問いに答えよ.

(a) 同程度連続・一様有界・正規族の定義を述べよ.

(b) アスコリ・アルツェラの定理を調べ, その主張を述べよ.

(c) モンテルの定理とアスコリ・アルツェラの定理を比較せよ．特にモンテルの定理の仮定とアスコリ・アルツェラの定理の仮定の違いは何か?

問 8.16

$$\mathcal{F} := \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \middle| f \text{ は } |a_n| \leq n \text{ となる } \mathbb{D} \text{ 上の正則関数} \right\}$$

は正規族であることを示せ.

演習の問題は授業ページ (`https://masataka123.github.io/2023_summer_complex/`) にもあります．右下の QR コードからを読み込んでも構いません.

[2] $\alpha \notin h(\mathbb{D})$ ということ.

[3] 演習問題や講義で習った内容は証明なしで用いて良い．この問題は授業の内容の理解度を試せるので是非ともやってください.