

5 楕円関数

岩井雅崇 2023/05/23

はじめに

複素解析統論に関して、楕円関数以降の内容はかなり難易度が高いと思います。¹ 個人的には第4回演習の内容をきっちり理解すること、そしてその後に第5回以降の内容を(努力できる範囲で)理解することをお勧めします。(かなり難しい問題も入っているので、全部解こうとは思わないでください。教科書や参考書なども参考にしながら解いてください。)

ペー関数に関する問題

以下断りがなければ、 Ω は \mathbb{C} の領域 (連結開集合) とし、 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とする。

$f(-z) = f(z)$ となる関数を偶関数といい、 $f(-z) = -f(z)$ となる関数を奇関数という。

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ を $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$ となる複素数とする。 $L := \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ とし、ワイエルシュトラスのペー関数 $\wp(z)$ を以下の通りとする。

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right)$$

問 5.1 • ワイエルシュトラスのペー関数の定義を書け。ただし発表時にノートなどを見てはいけな
い。またこの問題は一回以下の発表者のみ回答できる。(この問題は救済問題です。配点は非
常に低いです。)

問 5.2 • \mathbb{D} 上の正則関数 $f(z)$ が奇関数であるとき $z = 0$ でのテーラー展開を

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

とすると、 $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0$ であることを示せ。

問 5.3 • 任意の $z \in \mathbb{C}$ について $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ となるような \mathbb{C} 上の正則関数 $f(z)$ を全
て求めよ。

問 5.4 • ワイエルシュトラスのペー関数 $\wp(z)$ が $z = 0$ で 2 位の極を持つことと、偶関数であること
を示せ。²

問 5.5 (授業の内容) $r > 0$ を実数とする。 $|z| < r$, $|w| > 2r$ となる複素数 z, w について次を示せ。

$$\left| \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| < \frac{10r}{|w|^3}$$

問 5.6 (授業の内容) m, n を整数とし

$$K_{m,n} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid m - \frac{1}{2} \leq x \leq m + \frac{1}{2}, n - \frac{1}{2} \leq y \leq n + \frac{1}{2} \right\}$$

¹ 正直いうと私も復習するまでまあまあ忘れていました。主張だけは覚えていたもの(リーマンの写像定理)や主張すら忘れていたものなど多くあります。学部時代は私は複素解析統論の内容にあまり興味がなかったもので、なんとなくの理解しかありません...(授業中も適当にノート取って、アティマクの演習問題解いてました。)

² 授業の内容を自分なりに要約して答えること。授業の板書通りを丸写しした場合は不正解とする。

とおく. 次を示せ.

(a) $(m, n) \neq (0, 0)$ ならば

$$\frac{1}{(\sqrt{m^2 + n^2})^3} \leq \iint_{K_{m,n}} \frac{8}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} dx dy$$

(b)

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(\sqrt{m^2 + n^2})^3} < \infty$$

問 5.7 次の式を示せ.

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{m^2 + n^2} = +\infty$$

問 5.8 $\wp(z)$ の原点におけるローラン展開を $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$ とするとき, 次を示せ.

$$a_2 = 3 \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{w^4}, \quad a_4 = 5 \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{w^6}$$

また $g_2 = 60 \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{w^4}$, $g_3 = 140 \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{w^6}$ とおくとき, 授業でやったことを用いて次の式を示せ.

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

問 5.9 $\wp''(z) - 6\wp(z)^2$ は定数関数であることを示せ. またその定数は何か?

問 5.10 $\alpha \in \mathbb{C}$ について, 周期平行四辺形にある z で $\wp(z) = \alpha$ を満たすものの個数は (零点の重複度をこめて) 2 であることを示せ. (ヒント: $\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \alpha}$ を考える.)

問 5.11 * 次の問いに答えよ

(a) 周期平行四辺形にある z について, $\wp'(z)$ の極は L の点であり, $\wp'(z)$ の零点は $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ であることを示せ.

(b) $\wp(z) = \wp(z')$ であるならば, $z + z' \in L$ または $z - z' \in L$ を示せ.

(c) $e_1 = \wp(\frac{\omega_1}{2}), e_2 = \wp(\frac{\omega_2}{2}), e_3 = \wp(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})$ とすると, これらは互いに異なり, 次を満たすことを示せ.

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$$

楕円関数の問題

問 5.12 ω を楕円関数 $f(z)$ の一つの周期とする.³次を示せ.

(a) $f(z)$ が奇関数ならば $f(\frac{\omega}{2}) = 0$.

(b) $f(z)$ が偶関数で $f(\frac{\omega}{2}) = 0$ ならば, $z = \frac{\omega}{2}$ での f の零点の位数は 2 以上である.

³つまり任意の $z \in \mathbb{C}$ について $f(z + \omega) = f(z)$ となるもの

問 5.13 * $f(z)$ を ω_1, ω_2 を周期とする楕円関数とする。次の問いに答えよ。

- (a) 周期平行四辺形を H とする。 $\alpha \in \mathbb{C}$ を $\alpha \notin f(\partial H)$ かつ $\alpha \notin f((f')^{-1}(0))$ となるものとする。 $f(z)$ が偶関数ならば、 $f(z) = \alpha$ は H 内に相異なる偶数個の解を持つことを示せ。
- (b) $f(z)$ が偶関数ならば、ある有理式 $R(x)$ があって、 $f(z) = R(\wp(z))$ となることを示せ。
(ヒント: (a) のような α, β をとり、 $\frac{f(z)-\beta}{f(z)-\alpha}$ を \wp を用いて表せ.)
- (c) $f(z)$ は偶関数と奇関数の和で常に表せることを示せ。
- (d) ある有理式 R_1, R_2 があって、 $f(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z)R_2(\wp(z))$ とかけることを示せ。

ここで複素係数多項式 $P(x), Q(x)$ を用いて表せる $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ を有理式という。

問 5.14 * $f(z)$ を ω_1, ω_2 を周期とする楕円関数とし、 H を周期平行四辺形とする。ただし H の境界上に f の極や零点はないものとする。次の問いに答えよ。

- (a) $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial H} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz$ は L の元であることをしめせ。⁴
- (b) f の H 内の零点を a_1, \dots, a_s とし H 内の極を b_1, \dots, b_t とする。 m_i を f の a_i での零点の位数とし、 n_j を b_j の極の位数とする。 $\sum_{i=1}^s m_i - \sum_{j=1}^t n_j$ の値を求めよ。
- (c) $\sum_{i=1}^s m_i a_i - \sum_{j=1}^t n_j b_j$ は L の元であることを示せ。

個人的に気になった問題

以下の問題は個人的に気になった話題である。そもそもなぜワイエルシュトラスのペー関数 $\wp(z)$ を勉強するのだろうか?⁵ 以下の問題群はワイエルシュトラスのペー関数 $\wp(z)$ を勉強する一つの理由を与えるものである。この問題群は余裕のある人がやってください。また未定義な用語がある(かもしれない)のでそこは各自調べてください。

以下 $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} | \text{Im}(\tau) > 0\}$ とする。

問 5.15 * $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ を $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$ かつ $\frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{H}$ となる複素数とする。(のちの ω'_1, ω'_2 も同様である.)

$$L := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$$

とする(\mathbb{C} の格子と呼ばれる.) この問題は「複素 1 次元トーラス $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ と $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega'_1 + \mathbb{Z}\omega'_2$ がいつ双正則になるか?」について考える問題である。⁶ 次の問いに答えよ。

- (a) \mathbb{C} の集合として $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \mathbb{Z}\omega'_1 + \mathbb{Z}\omega'_2$ となるための必要十分条件は、ある整数係数 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が存在して $\det A = 1$ かつ $\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ である。
- (b) $\tau := \frac{\omega_2}{\omega_1}$ とする。 $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $F(z) = \frac{z}{\omega_1}$ とするとき、ある同相写像 $\tilde{F}: \mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ が存在して次の可換図式を満たすことを示せ。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_1 \\ \mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \end{array}$$

⁴ただし第 8 回演習問題の内容を用いて良い

⁵この関数を考える意味がそもそもあるのかと思うかもしれない

⁶ M と N が双正則とは、正則な全単射 $f: M \rightarrow N$ が存在すること(このとき正則な逆写像 $g: N \rightarrow M$ も存在する。)ただし厳密に定義するには複素多様体の概念を用いる必要がある。

ただし, π, π_1 は商写像とする. (実はもっと強く双正則であることが言える.) よって以後 ω_1, ω_2 ではなく $\tau \in \mathbb{H}$ を考えれば良い.

(c) $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$ とする. $G: \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_1 \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_2$ が双正則ならば,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\hat{G}} & \mathbb{C} \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_1 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_2 \end{array}$$

となるような全単射正則写像 $\hat{G}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ が存在することがわかっている. このことを用いて, $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_1$ と $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_2$ が双正則になるならば, ある整数係数 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が存在して $\det A = 1$ かつ $\tau_1 = \frac{a\tau_2 + b}{c\tau_2 + d}$ となることを示せ.⁷ 実は (b) と同じ議論で逆も言える.

(d)

$$M = \{\tau \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\tau) < \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1, -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(\tau) < 0 \text{ ならば } \tau > 1\}$$

とする. M を図示せよ. (M は複素 1 次元トーラスのすみかとも思える.)⁸

(e) 任意の $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$ について, $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_1$ と $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_2$ は同相であることを示せ. つまり同相であっても双正則でないことが起こる.⁹

問 5.16 * $\tau \in \mathbb{H}$ について

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m + n\tau)^4} \quad g_3(\tau) = 140 \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m + n\tau)^6}$$

とし, $e_1 = \wp(\frac{1}{2}), e_2 = \wp(\frac{\tau}{2}), e_3 = \wp(\frac{1+\tau}{2})$ とする. この問題は「複素 1 次元トーラスは代数多様体である」ことを見る問題である. (一部分講義で触れた内容を含む.)

$$M = \{(x : y : z) \in \mathbb{CP}^2 \mid y^2 z = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3\}$$

とおくとき, 次の問いに答えよ.

(a) 同相写像 $f: \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \rightarrow M$ を一つ構成せよ.^{10,11}

(b) $\wp: \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ を考える. ある \mathbb{C} の 3 点 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を除いて, $\wp^{-1}(w)$ の個数は 2 であることを示せ. またある 3 点 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めよ.¹²

⁷ただし第 6 回演習問題の内容を証明せずに用いても良い

⁸ M の点は複素 1 次元トーラス全体を双正則で割った集合と思える. M は複素 1 次元トーラスのなるモジュライ空間とも呼ばれる.

⁹もっと強く実は C^∞ 級同型はいえる. つまり C^∞ 級では同じでも複素構造は違うものがあるということである. これを詳しく調べたのが小平邦彦と D.C. スペンサーであり, のちに小平・スペンサーの変形理論につながる. ちなみに小平邦彦は日本人初のフィールズ賞受賞者である.

¹⁰自然に構成していればこれは双正則になる. つまり $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ から \mathbb{CP}^2 への正則埋め込みを具体的に記述したことになる. 専門的な用語で言うと「 $3P$ が very ample である」

¹¹難しければ $f: (\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \setminus \{0\} \rightarrow M \setminus \{(0:1:0)\}$ なる同相写像でも良い.

¹²本当は $\wp: \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \rightarrow \mathbb{CP}^1$ にすれば \mathbb{CP}^1 の ∞ に対応する点も”例外”になり, 全 4 点が変な点となっていることがわかる. なぜ 4 点なのかは, リーマン・フルビッツの定理から出る. なおこの写像は $M \rightarrow \mathbb{CP}^1 (x:y:z) \mapsto (x:z)$ に”ほぼ”対応する.(ただし $(0:1:0)$ だけ $(1:0)$ に送るようにする.) この場合にも変な点 4 点を全て決定してみよ.

(c) $\lambda = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}$ とおく. 問 5.17 の j 不変量は, ある実数 $c \in \mathbb{R}$ があって

$$j(\tau) = c \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}$$

となることを示せ. またそのような定数 $c \in \mathbb{R}$ を求めよ.¹³ ただし $g_2^3 - 27g_3^2 = 16 \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (e_i - e_j)^2 \neq 0$ は証明なしに用いて良い.

問 5.17 * 引き続き問 5.16 の記号を用いる. j 不変量を

$$j(\tau) := 1728 \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

と定義する. この問題は「 j 不変量と複素 1 次元トーラスの関係を見る」問題である.¹⁴ 次の問いに答えよ

(a) A を整数係数 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $\det A = 1$ となるものとするとき, 以下を示せ.

$$g_2 \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) = (c\tau + d)^4 g_2(\tau), g_3 \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) = (c\tau + d)^6 g_3(\tau),$$

また $j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = j(\tau)$ をしめせ.

(b) $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$ について, $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_1$ と $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_2$ が双正則ならば, $j(\tau_1) = j(\tau_2)$ であることを示せ.

(c) $j(\tau_1) = j(\tau_2)$ であるならば, ある $t \in \mathbb{C}$ があって, $g_2(\tau_2) = t^4 g_2(\tau_1), g_3(\tau_2) = t^6 g_3(\tau_1)$ となることを示せ.

(d) 問 5.16(a) を用いて, $j(\tau_1) = j(\tau_2)$ であるならば, $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_1$ と $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_2$ が双正則であることを示せ.

問 5.18 * この問題は「フェルマーの最終定理などの教科書で一度は聞いたことがある, 3 次曲線上の点同士の謎の足し算」に関する問題である. $a, b, a+b, a-b$ がどれも L に入らない相異なる複素数 a, b を考え,

$$f_{a,b}(z) := \begin{vmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(a) & \wp'(a) & 1 \\ \wp(b) & \wp'(b) & 1 \end{vmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(a) $f_{a,b}(z)$ の極と位数を求めよ.

¹³ $y^2 z = 4(x - e_1 z)(x - e_2 z)(x - e_3 z)$ なので, j 不変量は標数 p の楕円曲線でも定義ができる. 詳しくは Hartshorne Chapter 4 参照のこと.

¹⁴ j 関数は $q = \exp(2\pi i \tau)$ として $j(z)$ を展開すると

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \cdots$$

となる. 一方モンスター群と呼ばれる”単純群 (自明でない正規部分群を持たない群) で例外かつ一番大きい位数を持つもの (位数 $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$)” の既約表現の次元は $1, 196883, \cdots$ である. なんと $196884 = 196883 + 1$ が成り立つのである. これは偶然だと思われるかもしれないが, 実は高い次数でも似たようなことが成り立つのである. (ムーンシャイン予想と呼ばれる) 1992 年に R. ボーチャーズはムーンシャイン予想を解決し, その業績でフィールズ賞を取った.

- (b) $f_{a,b}(-a-b) = 0$ を示せ. (ヒント: 問 5.14)
- (c) \mathbb{C}^2 上の 3 点 $(\wp(a), \wp'(a)), (\wp(b), \wp'(b)), (\wp(-a-b), \wp'(-a-b))$ は一直線上にあることを示せ. ここで 3 点が一直線上にあるとは, ある複素数 C, D があって $y = Cx + D$ を 3 点とも満たすこととする.¹⁵
- (d) 3 次曲線 $y^2 = 4x^3 + Ax + B$ と直線 $y = Cx + D$ が相異なる 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ で交わるとする. このとき x_3 を x_1, y_1, x_2, y_2 を用いて表せ.
- (e) 次の式 (加法定理) を示せ.

$$\wp(a+b) = -\wp(a) - \wp(b) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(a) - \wp'(b)}{\wp(a) - \wp(b)} \right)^2$$

演習の問題は授業ページ (https://masataka123.github.io/2023_summer_complex/) にもあります. 右下の QR コードからを読み込んでも構いません.



¹⁵ C, D は複素数で良い. (複素) 一直線と呼んだ方が正確?