3 ワイエルシュトラスの二重級数定理・ベキ級数

岩井雅崇 2023/04/11

以下断りがなければ, Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (連結開集合) とし, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とする.

ワイエルシュトラスの二重級数定理に関する問題

問 3.1 滑らかな曲線 C 上の連続関数列 f_n が f に一様収束すれば, $\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)dz = \int_C f(z)dz$ であることを示せ.[1]

問 3.2 $\mathbb{D}$ 上の正則関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と正則関数 f であって, $\mathbb{D}$ の任意のコンパクト集合上で f_n は f に一様収束するが, $\mathbb{D}$ 上では f_n は f に一様収束しない例を一つ構成せよ.

問 3.3 * 次を満たす例を構成せよ.[2]

(a) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $(0,1)$ 上の C^∞ 級関数列で f は $(0,1)$ 上の C^∞ 級関数.
(b) $(0,1)$ の任意のコンパクト集合上で $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束する.
(c) $\{\frac{df_n}{dx}\}_{n=1}^{\infty}$ は $(0,1)$ のあるコンパクト集合上で $\frac{df}{dx}$ に一様収束しない.

ベキ級数に関する問題

問 3.4 $^\bullet$ 次の問いに答えよ.

(a) 正則関数は C^∞ 級関数であることを示せ.
(b) $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数 f で原点の周りでベキ級数展開できないものを一つ構成せよ.

問 3.5 $^\bullet f(z)$ を半径 $R > 0$ の円板 $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ 上の正則関数とする. 任意の $0 < r < R$ について, 収束半径 r 以上のベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で D_r 上で $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ となるものが存在することを示せ.

問 3.6 $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ とする. ある正の実数 A, B と自然数 k があって, 任意の $z \in \mathbb{C}$ について $|f(z)| \leq A|z|^k + B$ となるならば, $f(z)$ は高々 k 次の多項式であることを示せ.

問 3.7 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を半径 $R > 0$ の円板 $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ 上の正則関数とし, $0 < r < R$ とする. 次を示せ.

(a) $|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta$
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$

[1] 1 年次に習った定理を用いて良い. ただしどのように使ったか明記すること. また曲線 C の解釈は解答者に委ねる.
[2] そこまで厳密に構成しなくても良い.

一致の定理に関する問題

問 3.8 f を Ω 上の正則関数とする．次の問いにこたえよ．

(a) (零点の孤立) f を定数関数ではないとし, $a \in \Omega$ を f の零点とする．このとき a を含む半径 $r > 0$ の円板 D で, $\bar{D} \subset \Omega$ かつ f は $D \setminus \{a\}$ 上で零点を持たないようなものが存在することを示せ.[3]

(b) (一致の定理) ある空でない開集合 $U \subset \Omega$ があって U 上で $f \equiv 0$ ならば, Ω 上で $f \equiv 0$ であることを示せ.

問 3.9 • Ω 上の正則関数 f, g が $fg \equiv 0$ を満たすならば $f \equiv 0$ または $g \equiv 0$ であることを示せ．また f, g が単に C^∞ 級関数の場合は同様の主張は成り立つか?

演習の問題は授業ページ (`https://masataka123.github.io/2023_summer_complex/`) にもあります．右下の QR コードからを読み込んでも構いません．

[3]正則関数の零点は孤立しているということである．これは一変数特有の現象である．