

9 補足資料

岩井雅崇 2023/05/23

勉強の方法 (の一例)

複素解析統論は難しい内容が多いので、理解するのが難しいと思います。(楕円関数以後の内容は特に。) 何から始めていいかわからない人は以下の順番で勉強してもらえば幸いです。

1. 第 1-4 回の演習問題のうち・問題は何も見ずに解けるようにしておく。これができない人は前期の複素解析から復習するようにしてください。これはできないとまずいです。
2. 第 5-8 回の演習問題で (ノート・教科書・参考書を見ながら)・問題を解く。この問題がほぼ全てできていれば、(問題が解けるかはわからないが) 複素解析統論を半分くらい理解している方だと思います。第 5 回 (楕円関数) 以後の演習問題の・問題を解くのは、はじめのうちは苦労するかもしれません。
3. 第 1-4 回の演習問題のうち 6-8 割くらい解けるようになる。実際第 1-4 回の演習問題は大学院の院試も含むので、これを理解している人は前期の複素解析をきちんと理解していると言えます。
4. 第 5-8 回の演習問題をできるだけ頑張って解く。ただし私が適当に作ったものもあるので、全て解こうとは思わないでください。6 割くらい解けている人はかなり理解している人だと思います。¹

演習でできなかった内容

以下は演習に盛り込めなかった内容です。参考書の Ahlfors や Stein-Shakarchi に詳しい内容が載っております。²

1. $f' \neq 0$ なる 1:1 正則関数は等角写像 (角度を保つ写像) である
2. \mathbb{H} を長方形に移す全単射正則写像の形 (シュバルツ・クリストフェルの定理)
3. ゼータ関数の解析接続・自明な零点。整数論との関連話題。

複素解析の内容

演習問題を作っていて気づいたのですが、複素解析統論の内容はいろんな分野に広がりを持ちます。³ ここでは今後どういう内容があるかをざっくりばらんに言っていきます (結構適当なんで合っているかは怪しいところもあります。)

楕円関数・楕円曲線

1. 楕円曲線の有理点 (数論)
2. 楕円曲線のモジュライ (トポロジーならタイヒミュラー理論)
3. 複素構造と C^∞ 級構造の違い→小平・スペンサーの変形理論 (複素幾何学・代数幾何学)
4. 楕円曲線は \mathbb{CP}^2 の 3 次曲線→代数幾何学
5. j 不変量とモンスター群→頂点作用素代数 (表現論・作用素環論?)⁴

¹ 実際、第 5 回以後の内容は難しいと思います。私が学生だったとして 7-8 割解けるかは怪しいです。私が学生だったとしても第 1-4 回の演習問題はほぼ解けていたと思いますが...(本当か?)

² Ahlfors はいい本だけどかなり読みづらい! Stein-Shakarchi は演習問題を作る際に参考にしました。かなりいい本だと思います。

³ 教員の立場で演習問題を作っていてこのことを思い知らされました。学生のときはよくわからないような...

⁴ 確か同期 (Yuto Moriwaki at [RIKEN]) がこの分野をやっていて、物理とかも普通に関わるらしい。

シュワルツの補題

1. Yau のシュワルツの補題・双正則断面曲率 (微分幾何)
2. 小林双曲性・Brody 双曲性 (複素幾何)

劣調和函数

1. 多重劣調和函数・岡潔の理論 (多変数複素解析)
2. 特異エルミート計量 (複素代数幾何学)⁵

リーマンの写像定理

1. 領域・境界対応 CR 多様体
2. 等角写像→共形幾何学?

気になる方は...

次の本は数学の広い領域に渡り専門的な内容について書かれている本です. 自分の分野を決める際の参考にしてください.

- 東京大学出版会 「数学の現在 i 」「数学の現在 π 」「数学の現在 e 」

また次の本は非常に有益で若いうちから読んでおいた方が良いでしょう.

- 伊原 康隆 「志学数学 -研究の諸段階 発表の工夫-

良い本なのでいろんな人に勧めてください.⁶

演習の問題は授業ページ (https://masataka123.github.io/2023_summer_complex/) にもあります. 右下の QR コードからを読み込んでも構いません.



⁵—応私の専門分野です...

⁶東大の河東先生の書評も面白い. 「今すぐこの本を買ってきて読みなさい」と書いてある.