

2 コーシーの積分定理・リウヴィユの定理・留数計算

岩井雅崇 2023/04/11

以下断りがなければ, Ω は \mathbb{C} の領域 (連結開集合) とする. また $|z| = a$ となる円周の向きは反時計回りで入れるものとする.

コーシーの積分定理に関する問題

問 2.1 • $f(z)$ を $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の正則関数とする. $0 < r < 1$ とし, M を $|z| = r$ における $|f(z)|$ の最大値とすると, $|f'(0)| \leq \frac{M}{r}$ であることを示せ.

問 2.2 • $|\alpha| \neq 1$ となる複素数 α について, 線積分 $\int_{|z|=1} \frac{1}{z-\alpha} dz$ を計算せよ.

問 2.3 • 線積分 $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} dz$ を計算せよ.

問 2.4 線積分 $\int_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z^4+1} dz$ を計算せよ.

問 2.5 n を整数とする. 線積分 $\int_{|z|=2} \frac{z^n}{1-z} dz$ を計算せよ.

問 2.6 $P(z)$ を z に関する複素係数多項式とする. 線積分 $\int_{|z|=2} \overline{P(z)} dz$ を計算せよ.

リウヴィユの定理に関する問題

問 2.7 • (代数学の基本定理) リウヴィユの定理を用いて「定数でない複素係数多項式は複素数体上で解を持つ」ことを示せ.

問 2.8 • $f(z)$ を \mathbb{C} 上の正則関数とする. ある $M > 0$ があって \mathbb{C} 上で $|f(z)| \leq Me^{\operatorname{Re} z}$ となるならば $f(z) = ae^z$ となる $a \in \mathbb{C}$ が存在することを示せ.

問 2.9 \mathbb{C} 上の正則関数 f について, $\operatorname{Re}(f)$ が下に有界であるならば, 定数関数であることを示せ.

問 2.10 f を \mathbb{C} 上の定数でない正則関数とすると, $f(\mathbb{C})$ は \mathbb{C} 上稠密であることを示せ.

計算問題 (標準的な積分経路をするもの)

問 2.11 • 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$ は収束することを示し, その値を求めよ.

問 2.12 • 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ は収束することを示し, その値を求めよ.

問 2.13 $a \in \mathbb{R}$ について $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2+1} dx$ の値を求めよ. また $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$ の値を求めよ.

問 2.14 $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2+1)^2} dx$ の値を求めよ. ($\log z$ の扱いに注意せよ.)

問 2.15 $a \in \mathbb{R}$ について $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i ax} e^{-\pi x^2} dx$ の値を求めよ.

問 2.16 * $\frac{e^{iz}}{z}$ を考えることにより, $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ の値を求めよ.

計算問題 (積分経路が特殊なもの)

問 2.17 $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1} dx$ の値を求めよ. (ヒント: 120 度の扇形を考える.)

問 2.18 $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ の値を求めよ. (ヒント: 45 度の扇形を考える.)

問 2.19 $\log(1 - e^{2iz})$ と $\{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \pi, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ を考えることにより, $\int_0^\pi \log(\sin x) dx$ の値を求めよ.

演習の問題は授業ページ (https://masataka123.github.io/2023_summer_complex/) にもあります. 右下の QR コードからを読み込んでも構いません.

