4 有理型関数・バーゼル問題

岩井雅崇 2023/04/11

以下断りがなければ, Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (連結開集合) とし, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ とする.

ローラン展開・極に関する問題

問 4.1 • 次の問いに答えよ.

(a) 「a が f の除去可能特異点である」, 「a が f の極である」, 「a が f の真性特異点である」ことの定義をそれぞれ述べよ.

(b) 「f が Ω の有理型関数である」, 「f が Ω の有理関数である」ことの定義をそれぞれ述べよ. また二つの定義の違いは何か?[1]

問 4.2 • 「$\frac{e^z}{z^3}$ の $z = 0$ での留数」と「$\frac{z^4+3}{z^4-1}$ の $z = i$ での留数」をそれぞれ求めよ.

問 4.3 • $e^{z+\frac{1}{z}}$ の $z = 0$ でのローラン展開を求めよ.

問 4.4 • (Chat GPT による問題) 以下の関数の留数や特異点を求めよ.[2]

(a) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$, (b) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3(z-\pi)^2}$

問 4.5 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ の円環領域 $\{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}$ におけるローラン展開を求めよ.

問 4.6 * $\frac{1}{(\sin z)^2}$ の $z = 0$ におけるローラン展開を z^4 の係数まで求めよ.

問 4.7 f を $\mathbb{C}$ 上の有理型関数で極は有限個であると仮定する. $\lim_{|z|\to\infty} = \alpha$ となる $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在するとき $f(z)$ は有理関数であることを示せ. また「極は有限個である」という仮定を外したとき, この主張は成り立つか?

問 4.8 (偏角の原理) f を円盤 D 上の正則関数とし, ∂D 上に f の零点はないものとする. f の D での零点の個数を N とする (ただし, m 位の零点は m この零点と重複して考える.) このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N$$

が成り立つことを示せ. また f が有理型関数の場合はどうなるか?

問 4.9 問 4.8 を用いて代数学の基本定理を示せ.

正則関数の拡張に関する問題

問 4.10 • $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1\}$ とし, f を $\mathbb{D}^*$ 上の正則関数とする. f が $\mathbb{D}^*$ 上で有界ならば, f は $\mathbb{D}$ 上の正則関数に拡張できることを示せ.

問 4.11 $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1\}$ とし, f を $\mathbb{D}^*$ 上の正則関数とする. $z \in \mathbb{D}^*$ によらない定数 $M > 0$ があって, $\mathbb{D}^*$ 上で $|f(z)| \leq M \log |z|$ を満たすとき, f は $\mathbb{D}$ 上の正則関数に拡張できることを示せ. [3]

[1] 有理型関数だが有理関数でないものの例をあげても良い.

[2] Chat GPT に「複素関数論続論演義の問題の案を教えて」と言ったらこの問題が返ってきた. その他いろいろと試してみると Chat GPT は私の演習問題を 5-7 割くらい解けるようである.

[3] もっと強く f が L^2 関数なら拡張できる.(演習でこれを示しても良い).

問 4.12 $(-1,1) \setminus \{0\}$ 上の有界な C^∞ 級関数で $(-1,1)$ に C^∞ 級拡張できないものを構成せよ.

問 4.13 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の正則関数 $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$ は $f(0)$ をうまく定めれば $\mathbb{C}$ 上の正則関数に拡張できることを示せ.

問 4.14 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ 上の正則関数とする. 任意の $z \in \mathbb{C}$ について $|f(z)| \leq |\sin z|$ が成り立つならば, ある $a \in \mathbb{C}$ が存在して $f(z) = a \sin z$ となることを示せ.

第 5 回授業に関する問題

問 4.15 (授業の内容)$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$ は領域 $\{z \in \mathbb{C} | |\mathrm{Im}(z)| > 1, 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ 上において一様収束することを示せ.

問 4.16 (授業の内容) 次の問いに答えよ.

(a) $\sin z = 0$ となる $z \in \mathbb{C}$ を全て求めよ.
(b) $\sin z = 2$ となる $z \in \mathbb{C}$ を全て求めよ.

問 4.17 (授業の内容)$|\mathrm{Im}(z)| \to \infty$ ならば $|\sin z| \to \infty$ となることを示せ.

問 4.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ をそれぞれ求めよ.

院試の問題

問 4.19 * $a > 0$ とし

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)}$$

と定める. 次の問いにこたえよ.

(a) $z = 0$ における $f(z)$ のローラン展開の主要部を求めよ.
(b) $r > 0$ とし $\mathbb{C}$ 上の積分路を $C_r : z = re^{i\theta} (0 \leq \theta \leq \pi)$ とおく. $I(r) := \int_{C_r} f(z)dz$ とおくとき, $\lim_{r\to 0} I(r)$ と $\lim_{r\to\infty} I(r)$ の値をそれぞれ求めよ.
(c) $0 < r < a < R$ なる実数に対し

$$D_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} | r < |z| < R, \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

とおく. $\int_{\partial D_{r,R}} f(z)dz$ の値を求めよ.
(d) 広義積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)} dx$ は収束することを示し, その値を求めよ.

問 4.20 * 大阪大学の数学科の院試の問題で複素解析に関係あるものを解け. ただし解答前に教官 (岩井) に問題を見せること.

演習の問題は授業ページ (`https://masataka123.github.io/2023_summer_complex/`) にもあります. 右下の QR コードからを読み込んでも構いません.