1　正則性

岩井雅崇 2023/04/11

以下断りがなければ, Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (連結開集合) とする.

問 1.1 • 次の問いに答えよ.

(a) 「複素数 a_n からなる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する」ことの定義を述べよ.
(b) 複素数 a_n からなる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとする. このとき全単射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ について, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ も絶対収束して極限値は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ であることを示せ.

問 1.2 • 次の問いに答えよ.

(a) 「Ω 上の関数列 f_n が Ω 上の関数 f に一様収束する」ことの定義を述べよ.
(b) Ω 上の関数列 f_n と Ω 上の関数 f であって, 任意の $z \in \Omega$ について $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ であるが, f_n が f に一様収束しない例をあげよ.
(c) Ω 上の関数列 f_n が Ω 上の関数 f に一様収束すると仮定する. 任意の自然数 n について f_n が Ω 上で連続ならば, f も Ω 上で連続であることを示せ.

問 1.3 •(コーシー・リーマン方程式)$f(z)$ を Ω 上の複素数値 C^∞ 級関数とする. $z = x + iy \in \mathbb{C}$ とし $f(z)$ を (x, y) の関数 $f(x, y)$ と考え, $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおく. (u, v は実数値 C^∞ 級関数とする.) 次は同値であることを示せ.

(a) $f(z)$ は Ω 上で正則である.
(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ かつ $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ が成り立つ.

問 1.4 • 次の関数は正則関数であるか判定せよ.

(a) $f(z) = \bar{z}$
(b) $f(z) = |z|^2$
(c) $f(z) = \frac{1}{z}$ (ただし定義域は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする.)

問 1.5 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ 上の正則関数とする. このとき $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ もまた $\mathbb{C}$ 上の正則関数であることを示せ.

問 1.6 $f(z)$ を Ω 上の正則関数とする. 任意の $z \in \Omega$ について $f'(z) = 0$ となるならば f は定数関数であることを示せ.

問 1.7 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ として複素偏微分を次で定義する.

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$f(z)$ を Ω 上の C^∞ 級関数とするとき, 次は同値であることを示せ.

(a) $f(z)$ は Ω 上で正則である.
(b) Ω 上で $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$.

問 1.8 引き続き問 1.7 の通りの記号を用いる. 次の問いに答えよ.

(a) $f(z)$ を Ω 上の正則関数とするとき, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$ であることを示せ.

(b) $f(z)$ を Ω 上の C^∞ 級関数とするとき, 次を示せ.

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right) f(z)$$

演習の問題は授業ページ (`https://masataka123.github.io/2023_summer_complex/`) にもあります. 右下の QR コードからを読み込んでも構いません.