学問の扉
(ゲームにまつわる数学)
第7回 素数大富豪

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

学問の扉
(ゲームにまつわる数学)
第7回 素数大富豪

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

前回の授業に関して

素数

2,3,5,7,11,13,17,19,23...

- 2以上の自然数で約数が1と自分自身であるものを素数という. (例: 2,3,5,7,....)
- 素数は無限個存在する. おそらくユークリッドが最初に証明したはず(紀元前3世紀)

(ギリシャ)

- 現在でも素数の研究は多く, 毎年まあまあ結構な人が素数などに関する分野(数論)に行く気がする. (ただ結構難しい...)
- 私は素数の研究をしたことがないので, そこまで素数好きじゃないです. (logや自然対数とかの方が好きです.)

log　e

ユークリッドによる素数が無限個の証明.

有限コであると仮定, $P=\{P_1,P_2,\ldots,P_N\}$ とおく.

(例 $120=2^3\times3\times5$

⇒ $Q=P_1\times\cdots\times P_N+1$ とおく.

⇒ $\boxed{Q=P_1^{n_1}\times\cdots\times P_N^{n_N}}$ と素因数分解できる

⇒ ところが Q は $P_1,\ldots,P_N$ でわって 1 あまる数 ⇒ 矛盾.

なは $P_1,\ldots$ わりきれるはず

素数大富豪

- 2014年当時大阪大学の院生(現:青山学院大学 理工学部 物理・数理学科助教)の関 真一朗さんによって考案.
- 簡単にゆうとトランプ使って大きい素数を作って手札を減らしていくゲーム
- 調べたら素数大富豪普及協会もあるらしい.

今回はこれをやって, あとは素数に関する話(いい話と悪い話)をしていきます.

ルール説明

めんどくさいのでWikipediaから転載します. (素数大富豪のWikipediaのページ見てください)

ルール [編集]

プレイ人数は2人以上。ジョーカー2枚を含むトランプ1組・54枚を使用する。プレイヤー以外に素数判定を行う素数判定員を置くことが望ましいが、人員が足りない場合はプレイヤーが素数判定員を兼任してもよい。

ゲームの流れ [編集]

1. カードはよくシャッフルしたうえで全プレイヤーに同枚数ずつ（原則は素数枚数ずつ）配り、残ったカードは山札として中央に積む。
2. ジャンケン等により親を決める。
3. 最初の親が手札から最初の数を出し、以降順番に次のプレイヤーがカードを出し重ねていく。最初の数はカードを何枚使用してもよい。
4. 次のプレイヤーは、手番が回ってきた時点で場にあるカードと「同じ枚数」かつ「より大きい数」しか出すことができない（例：場には2のカードが1枚出ている→1枚で3以上の大きさのカードしか出せない）。
5. 手番が回ってきた時には、山札からカードを引いて手札に加えることができる。引けるカードは1度の手番につき1枚までである。引かずに出す（またはパスをする）こともできる。
6. 出せるカードがない時、もしくは戦略上出したくない時にはパスが許される。パスの回数は制限されない。
7. 他のプレイヤー全員がパスし、再び場にあるカードを出したプレイヤーまで順番が回ってきたらそのプレイヤーは親になる。このとき、場にあるカードは流され（場から退けられ）、親は手札から好きな数を出せる。
8. 以上を繰り返し、一番早く手札が無くなった（上がった）プレイヤーが勝者となる。

ペナルティ [編集]

以下の場合には、プレイヤーはペナルティを受けなければならない。

- 素数ではない数を素数として場（素因数場を含む）に出した場合
- 合成数出しにおいて素因数の計算が誤っている場合

ペナルティとしては、ペナルティを受けるプレイヤーがその手番で場（素因数場を含む）に出したカードを全て手札に戻すとともに、戻したカードと同枚数を山札からも引くことが求められる。

なお、場に出ている数以下の数を出した場合やカードの枚数が同じでない場合は、そもそも場に出すことができないためペナルティの対象にはならない。

わざと素数ではない数を出してペナルティを受け手札を増やすという戦略もある。

ジョーカーの使用 [編集]

ジョーカーは、1枚出しでは最強のカードとなり、出すと同時に場を流すことができる。他のカードと組み合わせて2枚以上で使用する場合、または合成数出しにおける素因数として使用する場合は、0から13（K）までの好きなカードとして使用できる。

合成数出し・指数表記 [編集]

手札を組み合わせて合成数の素因数を作って出すことにより、場にその合成数を出すことができる。素因数は、素因数場に出す（例：8を場に出し、2のカード3枚を素因数場に出す→8＝2x2x2を出すことができる）。素因数場に出されたカードは、次のプレイヤーに手番がうつるとともに流される。

また、合成数出しを行う際に使用する素因数には、指数表記が許される。（例：8を場に出し、2のカードの右上に3のカードを載せた形で素因数場に出す→8＝2＾3として出すことができる） ただし、指数を0（ジョーカーによる）として1を出したり、1としてその数を出すことは許されない。

特別な数と効果 [編集]

グロタンディーク素数切り（57） [編集]

57という数がしばしば「グロタンディーク素数」と呼ばれることから、素数大富豪においては特別に57を単体で（素因数を同時に出すことなしに）出すことができる。57が出ると、即座に場が流れ、57を出した者が次の親になる。「グロタンカット」とも呼ばれる。

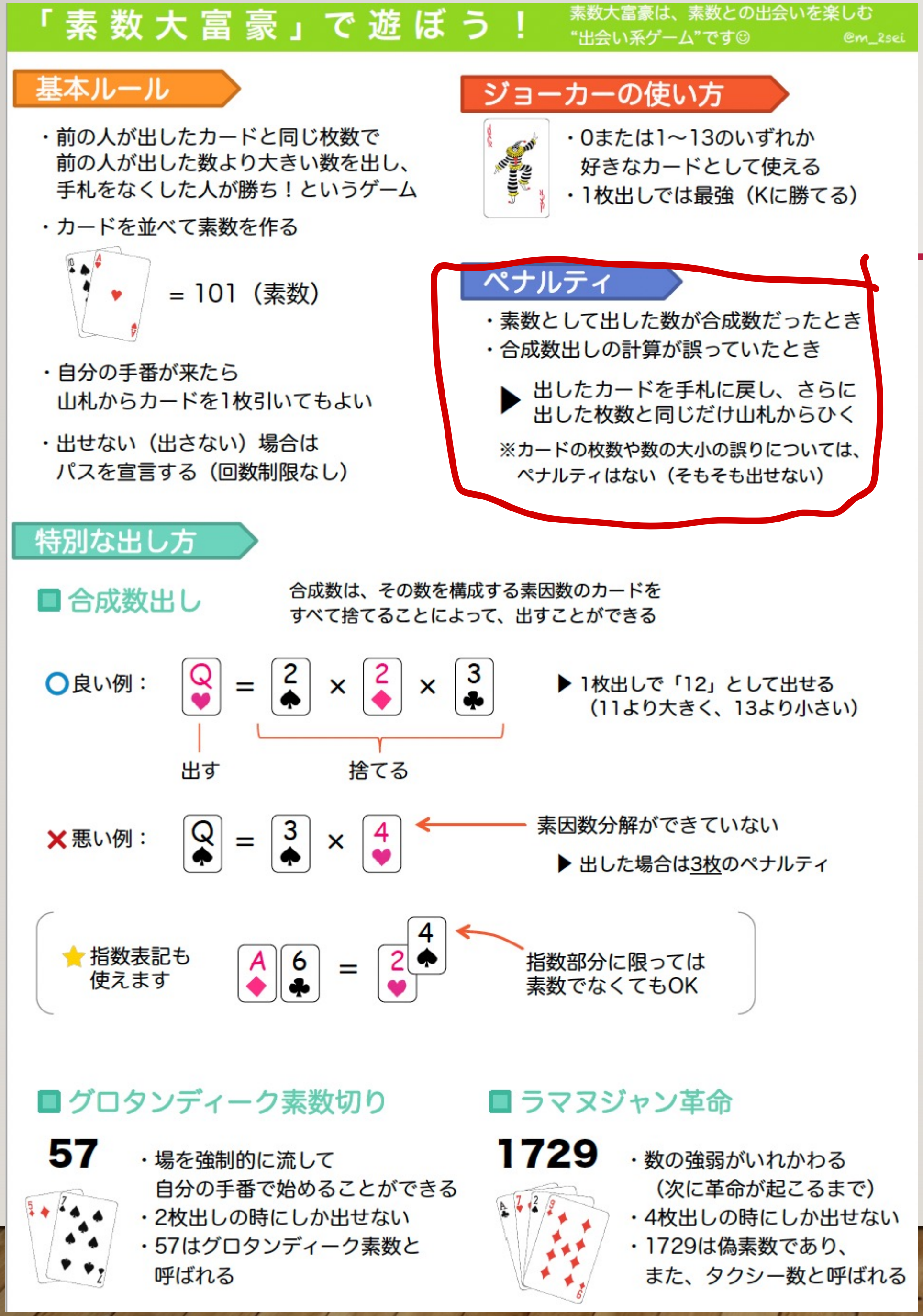
なお、57を合成数（57＝3x19）として出すこともできるが、この場合は特別な効果は持たない。

ラマヌジャン革命（1729） [編集]

1729は、数学者シュリニヴァーサ・ラマヌジャンの逸話からタクシー数と呼ばれる。また、絶対偽素数（カーマイケル数）でもある。1729＝7x13x19と表せる合成数であるが、これも57と同様に、素数大富豪においては特別に単体で出すことができる。1729が出されると数の大小が逆転し、次のプレイヤーからは場に出ている数より小さな数を出さなければならなくなる。この効果は、同じゲーム中で再度1729が素数として出されるか、ゲームが終了するまで続く。ただし、1枚出しでジョーカーが最強であることに限っては革命の前後で変化しない。

なお、1729を合成数（1729=7x13x19）として出すこともできるが、この場合は特別な効果は持たない。

調べたらもっといい説明書がありました.



「素数大富豪」で遊ぼう！

素数大富豪は、素数との出会いを楽しむ“出会い系ゲーム”です☺ @m_2sei

基本ルール

・前の人が出したカードと同じ枚数で
前の人が出した数より大きい数を出し、
手札をなくした人が勝ち！というゲーム

・カードを並べて素数を作る

= 101（素数）

・自分の手番が来たら
山札からカードを1枚引いてもよい

・出せない（出さない）場合は
パスを宣言する（回数制限なし）

ジョーカーの使い方

・0または1〜13のいずれか
好きなカードとして使える

・1枚出しでは最強（Kに勝てる）

ペナルティ

・素数として出した数が合成数だったとき

・合成数出しの計算が誤っていたとき

▶ 出したカードを手札に戻し、さらに
出した枚数と同じだけ山札からひく

※カードの枚数や数の大小の誤りについては、
ペナルティはない（そもそも出せない）

特別な出し方

■ 合成数出し

合成数は、その数を構成する素因数のカードを
すべて捨てることによって、出すことができる

○良い例：Q = 2 × 2 × 3

出す　捨てる

▶ 1枚出しで「12」として出せる
（11より大きく、13より小さい）

×悪い例：Q = 3 × 4 ← 素因数分解ができていない

▶ 出した場合は3枚のペナルティ

★ 指数表記も使えます

A 6 = 2 4

← 指数部分に限っては
素数でなくてもOK

■ グロタンディーク素数切り

57

・場を強制的に流して
自分の手番で始めることができる

・2枚出しの時にしか出せない

・57はグロタンディーク素数と
呼ばれる

■ ラマヌジャン革命

1729

・数の強弱がいれかわる
（次に革命が起こるまで）

・4枚出しの時にしか出せない

・1729は偽素数であり、
また、タクシー数と呼ばれる

ということでやってみましょう

- 一回テストプレイした方がいい場合はそうします.
- あとは当日の私がなんとか仕切ってくれます.

アレキサンダー・グロタンディーク ALEXANDER GROTHENDIECK (1928-2014)

- 代数幾何学・数論幾何学・関数解析の専門.
- 代数幾何学という分野を“スキーム”という概念ですべて書き直し, “数論幾何学”を作った.
- 数論幾何学はその後の「フェルマーの最終定理(300年もの未解決問題)」や「ABC予想」などの解決につながる.
- フィールズ賞(数学のノーベル賞)受賞.
- 2014年没. 当時学部3年の私は偉い先生が「今電話があってグロタンディークが亡くなったようです.」と話してたのを聞いた.

グロタンディーク素数 57

グロタンディークの逸話の一つ
(あるひと)「ある素数を考えてみたらどうですか?」
(グロタンディーク)「実際にある数ということですか？」
(あるひと)「そうです, 実際の素数です.」
(グロタンディーク)「よし、57を考えてみましょう.」

という逸話があり57はグロタンディーク素数と呼ばれることに.

$57 = 3 \times 19$

グロタンディーク素数の逸話

これ本当なのか気になって調べたら, ちゃんと本当でした.

- *A. Jackson Comme Appelé du Néant*-As If Summoned from the Void: The Life of Alexandre Grothendieck

その文章の続きには…

~~具体~~ → 抽象

マンフォードさん(フィールズ賞受賞者)

「彼(グロタンディーク)は具体的に考えていないのです. 彼は本当に例題に取り組まなかった. 例題を通してしか物事を理解せず、徐々に抽象度を高めていく。グロテンディークが例題を見ることは、少しも役に立たなかったと思う。彼は、可能な限り抽象的な方法で考えることによって、状況をコントロールすることができたのです。それはとても不思議なことです。それが彼の頭の働き方なのです」

ちなみに, 数学の研究では具体的な計算が本当に少ない…

具体的な数字は0,1,2ぐらい. 私の分野は特に抽象的な議論が多くて数字がマジで出ない.

右は去年出した私たちの論文の定理の証明. こんなんがずっと続く.

長らく計算してないので, 計算能力は皆さんの方が高いと思います.

Theorem 1.2. *Let X be a compact Kähler manifold with the nef canonical bundle K_X. Then, the following conditions are equivalent:*

(1) *The second Chern class $c_2(X)$ vanishes in $H^{2,2}(X, \mathbb{R})$.*
(2) *Ω_X is nef, and $\nu(K_X)$ is 0 or 1.*

Proof of Theorem 1.2. Assume Condition (2). Then, from [DPS94, Corollary 2.6], we obtain

$$0 \leq c_2(X)\omega^{n-2} \leq c_1(X)^2\omega^{n-2} = 0$$

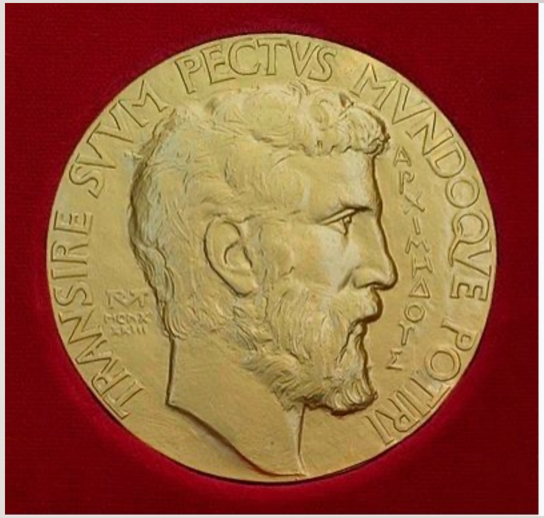
for any Kähler form ω. This implies that $c_2(X) = 0$ by Theorem 1.6 (1).

Conversely, we assume Condition (1). Since K_X is nef, the cotangent bundle Ω_X is $\{\omega\}^{n-1}$-generically nef for any Kähler from ω by [Eno93, Theorem 1.4] and [Cao13, Theorem 1.2]. Then, by Theorem 1.6 (1) and $c_2(X) = 0$, we can see that Ω_X is nef. It remains to show that $\nu(K_X) \leq 1$. If $\nu(K_X) > 1$, there exists a nef line bundle $L \subset \Omega_X$ such that $c_1(L) = c_1(K_X)$. This follows from [Cao13] in the Kähler case and [Ou17] in the projective case (see Theorems 5.7 and 5.3). Then, the Bogomolov-Sommese vanishing theorem implies $H^0(X, \Omega_X \otimes L^*) = 0$. This contradicts the fact that L is a subbundle of Ω_X. Hence, we conclude that $\nu(K_X) = 0$ or 1. $\square$

素数に関する最近の話題
フィールズ賞

- 数学のノーベル賞とも(ノーベル賞には数学がない)
- 受賞前に"国際数学者会議(ICM)"があり, そこで受賞者が決まる. (2022年のICMはYouTubeライブでやってた)
- 受賞制限がきつい. 「4年に一度, 顕著な業績を上げた, 40歳以下の数学者, 2~4名」に授与される.
- 日本人は今までに3人授与されている. 「小平邦彦, 広中平祐, 森重文」(全員代数幾何学という分野.)
- 数学の賞の中で一番大きい賞. ちなみに賞金は200万らしい. (ノーベル賞は1億円. 数学ブレイクスルー賞は3億円)

望月拓郎氏



2022年フィールズ賞受賞者
ジェームズ・メイナード（JAMES MAYNARD)

とにかく結果が面白い. 私は証明は全くわからんが…

① 7を桁にふくまない　素数はむげんにある

2, 3, 5, 11, 13, 19, 23, 29, ...　(2019年)

7をふくまない

② 双子素数予想にまつわるはなし

(p, q) が双子素数 $\Longleftrightarrow$ p と q が素数, $q-p=2$

$(p, p+2)$ がそす,

$\boxed{例}$ $(3, 5)$ $(11, 13)$ $(29, 31)$, …

$(17, 19)$

$\boxed{予想}$ 双子素数は無限にあるか?

$\boxed{2015}$ J. Maynard

$q-p \leq 600$ となる素数組 (p, q) は無限にある

参考文献(?)

- **素数大富豪普及協会** https://primeqk.themedia.jp
- *A. Jackson Comme Appelé du Néant*-As If Summoned from the Void: The Life of Alexandre Grothendieck
- Maynard, J. Primes with restricted digits. Invent. math. 217, 127–218 (2019). https://doi.org/10.1007/s00222-019-00865-6
- Maynard, J. **Small gaps between primes. Ann. of Math.** Pages 383-413 from Volume 181 (2015), Issue 1 https://doi.org/10.4007/annals.2015.181.1.7

6/7(水) 休講