幾何学基礎 2(位相空間論) 演義 演習問題

岩井雅崇 (大阪大学)

2023 年 10 月 13 日　ver 2.01

Contents

0　ガイダンス

2023 年度秋冬学期 大阪大学 理学部数学科
幾何学基礎 2(位相空間論) 演義
火曜 4 限 (15:10-16:40) 理学部 D303

岩井雅崇 (いわいまさたか)

基本的事項

- この授業は対面授業です. 火曜 4 限 (15:10-16:40) に理学部 D303にて演習の授業を行います.
- 基本的には講義の授業とセットで受講してください. 演義の授業のみ受講する場合は 10 月 3 日の授業後に申し出ること.
- 授業ホームページ (`https://masataka123.github.io/2023_winter_generaltopology/`) にて授業の問題等をアップロードしていきます. [1] QR コードは下にあります.

成績に関して

次の 1 と 2 を満たしているものに単位を与えます.

1. 位相空間論の講義の単位が可以上である.
2. 最終授業終了時までに 0.1 点以上の演習点 (後述) を獲得していること

成績は演習点でつける予定ですが, 場合によっては講義の成績も参考にします.[2]

演習点に関して

演習点を稼ぐには次の方法があります.

1. レポートを解く. レポートの出来により $0.1 \sim 0.5$ 点の演習点が与えられる.
2. 配布した演習問題を解き, その解答を黒板を用いて発表する. その場合の演習点は「解いた問題の難易度」と「発表の仕方・解答の方法」などから定まります.

なお 2 の方が演習点は高めに設定しております.

1. レポートに関して

基本的には期末試験の対策のための基本的な問題を出します. 問題は演習問題の• がついてる問題 (後述) の内容から出す予定です.

[1] URL は"2023"です. 去年のページに行かないようにしてください.
[2] 理由としては成績がばらけるかどうかが, 現時点では予測が不可能だからです.

2. 黒板を用いた発表に関して

発表のルールは次のとおりです.

- 問題の解答を黒板に書いて発表してください. 正答だった場合その問題はそれ以降解答できなくなります.
- 授業が始まる前にある程度演習問題をあらかじめ解き発表できる状態にしておいてください.
- 複数人が解答したい問題があるときは平和的な手段で解答者を決めます.(例えば問題解答数が少ない人を優先する, トランプで決めるなどです.)
- 発表方法があまりにも悪い場合 (教科書丸写しなど) は減点します.

演習問題に関する注意点

- 演習問題は適当に出しているので, 全部解く必要はないです. 解けない問題も多くあります.
- 演習問題の難易度は一定ではないです. 問題番号の上に $^\bullet$ や * などの記号が書いてありますがこれは次を意味します.
  1. $^\bullet$ がついてる問題は解けないといけない問題です. 演習点は $0.1 \sim 1.5$ 点です.
  2. 何もついてない問題は普通の問題です. ちょっと考えれば解ける範疇に収まっている (はずです). 演習点は $0.5 \sim 2.5$ 点です.
  3. * 問題や ** 問題は難しそうな問題です. ちょっと難しい問題から激ムズの問題まであります. 私や TA が解けない問題もあります. 基本的に解かせる気はなく自由気ままに出しております. 演習点は $1.5 \sim 7$ 点です.

次のご協力をお願いいたします.

- 発表後, スマホ等で黒板にある解答を撮影しても構いません. (ただし黒板のみを撮影してください) 解答者も撮影のご協力お願いします.
- 板書は他人が読めるように, 文字の大きさ・綺麗さ・板書の量に配慮してください. 字は汚くてもいいので, 最低限読めるようにしてください.

まとめ

1. 単位が欲しい方はレポートを提出し, 講義で可以上を取ってください.
2. ちょっと欲張りな人は $^\bullet$ がついている問題や何もついてない問題を発表してください. なお $^\bullet$ がついている問題が全て解ければ, 講義の試験の単位は (おそらく) もらえると思います.
3. 意欲のある人は難しい問題など色々解いてください. そのほうが私は楽しいです.

休講予定・その他

- 休講予定: 2023 年 12 月 05 日と 2023 年 12 月 12 日. 2024 年 1 月 16 日 (休講するかも)[3]
- 問題のミスがあれば私に言ってください. ミスはかなりあると思います.
- 休講情報や演習問題の修正をするので, こまめにホームページを確認してください.
- オフィスアワーを月曜 16:00-17:00 に設けています. この時間に私の研究室に来ても構いません (ただし来る場合は前もって連絡してくれると助かります.)
- TA さんは演義の時間中に巡回しているので, 自由にご質問して構いません.

[3] 2024 年 1 月 16 日に休講にする場合は 2024 年 2 月 6 日に補講をするかもしれません.

1　ユークリッド空間と距離空間の復習

岩井雅崇 (いわいまさたか)

以下断りがなければ, $\mathbb{R}^n$ には通常の距離 (ユークリッド距離) を入れたものを考える.

空でない集合 X と実数値関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ に関して, 次の条件を満たすとき (X, d) は距離空間であるという.

1. 任意の $x, y \in X$ について $d(x, y) \geqq 0$. $d(x, y) = 0$ であることと $x = y$ は同値.
2. 任意の $x, y \in X$ について $d(x, y) = d(y, x)$.
3. 任意の $x, y, z \in X$ について $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$. (三角不等式)

問 1.1 • 次の問いに答えよ.

(a) $(0, 1)$ が $\mathbb{R}$ の開集合であることを示せ.
(b) $[0, 1]$ が $\mathbb{R}$ の閉集合であることを示せ.
(c) 開集合でも閉集合でもない $\mathbb{R}$ の部分集合を一つ答えよ.

問 1.2 • $C[0, 1] := \{f |\ f$ は $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 $\}$ とし $f, g \in C[0, 1]$ について

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [0,1]} \{|f(x) - g(x)|\}$$

と定める. $(C[0, 1], d_\infty)$ が距離空間であることを示せ.

問 1.3 • $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

とおく. また $\mathbb{R}^n$ のユークリッド距離を d_E をする. 次の問いに答えよ.

(a) $(\mathbb{R}^n, d_1)$ は距離空間であることを示せ.
(b) $(\mathbb{R}^n, d_1)$ はマンハッタン距離と呼ばれる. マンハッタンはどこの地名か答えよ. [4]
(c) 恒等写像 $i : (\mathbb{R}^n, d_1) \to (\mathbb{R}^n, d_E)$, $i(x) = x$ は連続であることを示せ.

問 1.4 A を距離空間 X の部分集合とし, $f : X \to \mathbb{R}$ を $f(x) = d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$ で定める. f は連続であることを示せ.

問 1.5 * (X, d) を距離空間とする. X の部分集合 A が有界とは, ある正の数 M があって任意の $x, y \in A$ について $d(x, y) \leqq M$ であることとする. $\mathcal{B}(X)$ を X の有界閉集合のなす集合とする. 次の問いに答えよ.

(a) $A, B \in \mathcal{B}(X)$ について $\sup_{x \in A} d(x, B) < +\infty$ であることを示せ.
(b) $A, B \in \mathcal{B}(X)$ について

$$d_H(A, B) := \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(A, y)\}$$

[4] 余力があればその都市形状を図示せよ.

とする．任意の $x \in X$ について $d(x,A) \leqq d(x,B) + d_H(A,B)$ が成り立つことを示せ．

問 1.6 * 問 1.5 での $(\mathcal{B}(X), d_H)$ は距離空間になることを示せ．(ハウスドルフ距離と呼ばれる.)

問 1.7 * p を素数とする．0 でない有理数 $r \in \mathbb{Q}$ について, $r = p^e \frac{n}{m}$(m,n はともに p と互いに素な整数) と表せるとき, $v_p(r) := e$ と定義する．$r \in \mathbb{Q}$ について

$$|r|_p = \begin{cases} p^{-v_p(r)} & (r \neq 0) \\ 0 & (r = 0) \end{cases}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(a) 0 でない有理数 $r, s \in \mathbb{Q}$ について, $r + s \neq 0$ ならば $v_p(r+s) \geqq \min(v_p(r), v_p(s))$ であることを示せ．

(b) $x, y \in \mathbb{Q}$ について $d_p(x,y) := |x-y|_p$ とおくと d_p は $\mathbb{Q}$ の距離になることを示せ．

(c) $a, r \in \mathbb{Q}$ かつ $r > 0$ について, 開球 $B(a,r) = \{x \in \mathbb{Q} | d_p(x,a) < r\}$ で定める．$B(a,r)$ は閉集合であることを示せ．

(d) $a_n := \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}$ とおく．$d_2(-1, a_n)$ の値を求めよ．

問 1.8 *(ハミング符号) $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ を標数 2 の体とする．$x, y \in \mathbb{F}_2^n$ について

$$d(x,y) := (x_i \neq y_i \text{ となる } i \text{ の個数})$$

とおく．(ただし, $x = \{x_i\}_{i=1}^n$, $y = \{y_i\}_{i=1}^n$ とする.) 次の問いに答えよ．

(a) $(\mathbb{F}_2^n, d)$ は距離空間であることを示せ．

(b) $\mathbb{F}_2^n$ の相異なる元からなる数列 $a_1, \ldots, a_{2^n}$ で $a_1 = \{0\}_{i=1}^n$, $d(a_{2^n}, a_1) = 1$, 任意の $2 \leqq k \leqq 2^n$ について $d(a_{k-1}, a_k) = 1$ となるものが存在することを示せ．

以下 $f : \mathbb{F}_2^4 \to \mathbb{F}_2^7$ を次で定める．

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{F}_2^4 & \to & \mathbb{F}_2^7 \\ & (a,b,c,d) & \longmapsto & (a,b,c,d,a+b+d,a+c+d,b+c+d) \end{array}$$

(c) $x, y \in \mathbb{F}_2^4$ について, $x \neq y$ ならば $d(f(x), f(y)) \geqq 3$ であることを示せ．

(d) 任意の $z \in \mathbb{F}_2^7$ について, $d(f(x), z) \leqq 1$ となる $x \in \mathbb{F}_2^4$ がただ一つ存在することを示せ．

(e) I 教官は TA から $f(a,b,c,d)$ の値を聞きメモをした．ところがメモをする際に $\mathbb{F}_2^7$ の一つの成分を間違ってメモをしてしまった．I 教官のメモには $(1,0,0,1,0,1,0)$ とかかれている．(a,b,c,d) の値を求めよ．

2　開集合系と近傍系

岩井雅崇 (いわいまさたか)

以下断りがなければ, 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ といった場合, $\mathscr{U}$ は開集合系を意味するものとする. また $\mathcal{P}(X)$ は X のベキ集合とする.

$(X, \mathscr{U})$ が位相空間であることを示すには, 次の 3 条件を (機械的に) 示せば良い.

1. $X \in \mathscr{U}$ かつ $\varnothing \in \mathscr{U}$.
2. $O_1, \ldots, O_n \in \mathscr{U}$ ならば $O_1 \cap \cdots \cap O_n \in \mathscr{U}$.
3. $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathscr{U}$ の元からなる集合系 (無限個でもいい) とすると $\cup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathscr{U}$.

問 2.1 • $X = \{0, 1\}, \mathscr{U} = \{\varnothing, X, \{0\}\}$ とするとき $(X, \mathscr{U})$ は位相空間になることを示せ.

問 2.2 • 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ について, ある X 上の距離 d で d によって導かれる位相が $(X, \mathscr{U})$ に一致するとき, $(X, \mathscr{U})$ は<u>距離化可能</u>であるという. 離散位相空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_d)$ は距離化可能であることを示せ.

問 2.3 • 密着位相空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_t)$ は距離化可能ではないことを示せ.

問 2.4 • (ユークリッド位相) $\mathbb{R}$ に関して部分集合の族 $\mathscr{U}_{Euc} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ を次で定める.

$$\mathscr{U}_{Euc} = \{V \subset \mathbb{R} | \text{任意の } x \in V \text{ についてある } \epsilon > 0 \text{ があって } (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset V\} \cup \{\varnothing\}$$

$(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Euc})$ は位相空間になることを示せ.

問 2.5 • (補有限位相) $\mathbb{R}$ に関して部分集合の族 $\mathscr{U}_c \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ を次で定める.

$$\mathscr{U}_c = \{V \subset \mathbb{R} | \mathbb{R} \setminus V \text{ は有限集合 }\} \cup \{\varnothing\}$$

(a) $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_c)$ は位相空間になることを示せ.
(b) $\mathbb{R}$ のユークリッド位相を $\mathscr{U}_{Euc}$ とするとき $\mathscr{U}_c \subset \mathscr{U}_{Euc}$ を示せ.
(c) $\{0\}$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_c)$ で開集合になるか? また閉集合になるか?
(d) $(-1, 1)$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_c)$ で開集合になるか? また閉集合になるか?

問 2.6 $\mathbb{R}$ に関して部分集合の族 $\mathscr{U}_p \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ を次で定める.

$$\mathscr{U}_p = \{U \subset \mathbb{R} | 0 \in U\} \cup \{\varnothing\}$$

(a) $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_p)$ は位相空間になることを示せ.
(b) $\{0\}$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_p)$ で開集合になるか? また閉集合になるか?

問 2.7 (上半連続位相) $\mathbb{R}$ に関して部分集合の族 $\mathscr{U}_{usc} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ を次で定める.

$$\mathscr{U}_{usc} = \{(-\infty, t) | t \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$$

(a) $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{usc})$ は位相空間になることを示せ.

(b) $\{0\}$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{usc})$ で開集合になるか? また閉集合になるか?

問 2.8 $\mathbb{R}$ に関して部分集合の族 $\mathscr{U}_{sc} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ を次で定める.

$$\mathscr{U}_{sc} = \{U \cup A \subset \mathbb{R} | U \text{ はユークリッド位相に関する開集合, } A \text{ は } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ の部分集合 }\}$$

(a) $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{sc})$ は位相空間になることを示せ.

(b) $\{0\}$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{sc})$ で開集合になるか? また閉集合になるか?

(c) $\{\sqrt{2}\}$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{sc})$ で開集合になるか? また閉集合になるか?

問 2.9 (Sorgenfrey line) $\mathbb{R}$ に関して部分集合の族 $\mathscr{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ を $\mathscr{B} = \{[a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ とし, $\mathscr{U}_{Sor}$ を次で定める.

$$\mathscr{U}_{Sor} := \{U \subset \mathbb{R} | \text{ 任意の } x \in U \text{ についてある } B \in \mathscr{B} \text{ があって, } x \in B \text{ かつ } B \subset U \text{ となる }\} \cup \{\varnothing\}$$

(a) $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ は位相空間とはならないことを示せ.

(b) $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Sor})$ は位相空間になることを示せ.

(c) $\{0\}$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Sor})$ で開集合になるか? また閉集合になるか?

(d) $(0, 1)$ は $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Sor})$ で開集合になるか?また閉集合になるか?

問 2.10 * X の開集合系 $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2$ について $\mathscr{U}_1 \subset \mathscr{U}_2$ であるとき, $\mathscr{U}_1$ は $\mathscr{U}_2$ より弱い位相であるという. 例えば問 2.5 から $\mathscr{U}_c$ は $\mathscr{U}_{Euc}$ より弱い位相である. 問 2.2 から問 2.9 までの $\mathbb{R}$ の位相 8 個全てに関して, その強弱を判定せよ. なお強弱関係がつけられないものもある (かもしれない).[5]

問 2.11 * (ザリスキ位相) $\mathbb{Z}$ を整数の集合とする. 部分集合 $I \subset \mathbb{Z}$ が次の条件を満たすとき, イデアルと呼ばれる.

- $x \in I$, $y \in I$ ならば $x + y \in I$
- $x \in I$, $a \in \mathbb{Z}$ ならば $ax \in I$

さらに, $\mathbb{Z}$ ではないイデアル $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}$ が次を満たすとき素イデアルという.

- $xy \in \mathfrak{p}$ ならば $x \in \mathfrak{p}$ または $y \in \mathfrak{p}$

任意の $a \in I$ について $(a) := \{x \in \mathbb{Z} | \text{ ある } b \in \mathbb{Z} \text{ があって } x = ab\}$ と定める.

(a) 任意のイデアル I は, ある $a \in \mathbb{Z}$ があって $I = (a)$ とかけることを示せ.[6]

(b) 素イデアル $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}$ を全て求めよ.[7]

(c) $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ を $\mathbb{Z}$ の素イデアル全体の集合とする. また整数 n について

$$V_n := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) | n \in \mathfrak{p}\} \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$$

と定義し, $\mathfrak{A} := \{V_n | n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{P}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}))$ とおく. このとき $\mathfrak{A}$ は閉集合の公理を満たすことを示せ. この位相をザリスキ位相という.

[5] $\mathscr{U}_1 \not\subset \mathscr{U}_2$ かつ $\mathscr{U}_2 \not\subset \mathscr{U}_1$ となることもあるためである. なお解答に際し全て列挙するのは面倒であれば $\mathscr{U}_1 \subset \mathscr{U}_2 \subset \mathscr{U}_3$ というふうに記述を簡略化しても良い .

[6] ヒント: イデアル I の 0 でない元で絶対値が一番小さいものが a の候補となる. またどちらかの包含を示す際に, I の元を a で割った余りを考えよ.

[7] ヒント: 素イデアルは英語で prime ideal という. ただし prime 以外にも素イデアルになるものがある.

3　位相空間の部分空間

岩井雅崇 (いわいまさたか)

X を位相空間とし $A \subset X$ を部分集合とする.

1. A に含まれる最大の開集合を A の<u>内部</u>といい A° とかく.
2. A を含む最小の閉集合を A の<u>閉包</u>といい $\overline{A}$ とかく.

$A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ である.

問 3.1 • 次の問いに答えよ.

(a) $\mathbb{R}$ に離散位相を入れた場合の $\{0\}$ の閉包と $(-1, 1]$ の内部を求めよ.
(b) $\mathbb{R}$ に密着位相を入れた場合の $\{0\}$ の閉包と $(-1, 1]$ の内部を求めよ.
(c) $\mathbb{R}$ にユークリッド位相を入れた場合の $\{0\}$ の閉包と $(-1, 1]$ の内部を求めよ.

問 3.2 • $\mathbb{R}^2$ にユークリッド位相を入れたものを考える. $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x$ と y はともに有理数 $\}$ とする. E の閉包と内部を求めよ.

問 3.3 • $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_c)$ を問 2.5 の補有限位相とする. このとき空集合を除く任意の開集合が稠密であることを示せ.

問 3.4 • $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とし, A を X の部分集合とする.

(a) $(A^\circ)^c$ が閉集合であることを示せ. また $\overline{(A^c)} \subset (A^\circ)^c$ を示せ.
(b) W を $A^c \subset W$ となる X の閉集合とする. このとき $W^c \subset A^\circ$ を示せ. またこれを用いて $\overline{(A^c)} = (A^\circ)^c$ を示せ.
(c) $(A^c)^\circ = (\overline{A})^c$ を示せ.

問 3.5 $\mathbb{R}$ にユークリッド位相を入れる. $A, A^\circ, \overline{A}, \overline{A^\circ}, (\overline{A})^\circ, \overline{(A^\circ)}^\circ, \overline{(\overline{A}^\circ)}$ が全て違うような部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ の例をあげよ. ここで $\overline{A^\circ}$ は A の内部の閉包, $(\overline{A})^\circ$ は A の閉包の内部, $\overline{(A^\circ)}^\circ$ は A の内部の閉包の内部, $\overline{(\overline{A}^\circ)}$ は A の閉包の内部の閉包である.

問 3.6 問 2.5 から問 2.9 までの $\mathbb{R}$ の位相 5 個全てに関して, $(-1, 1]$ の内部を各々求めよ.

問 3.7 * 問 2.11 のザリスキ位相に関して, $\{(2)\}$ の閉包を求めよ. また $\{(0)\}$ の閉包を求めよ.

問 3.8 (a) 「任意の点 $p \in \mathbb{R}$ について $\overline{\{p\}} = \mathbb{R}$」となる $\mathbb{R}$ の位相を全て求めよ.
(b) 「任意の開集合 $U, V \subset \mathbb{R}$ について $U \neq \mathbb{R}$ かつ $U \neq V$ ならば $U \cap V = \varnothing$」となる $\mathbb{R}$ の位相を全て求めよ.

問 3.9 X を空でない集合とし, $\mathscr{B} \subset \mathcal{P}(X)$ を次の条件を満たす集合族とする.

- $X = \cup_{B \in \mathscr{B}} B$
- $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ かつ $x \in B_1 \cap B_2$ ならば, ある $B \in \mathscr{B}$ があって $x \in B$ かつ $B \subset B_1 \cap B_2$ となる.

さらに $\mathscr{U}_{\mathscr{B}} \subset \mathcal{P}(X)$ を次で定める.

$$\mathscr{U}_{\mathscr{B}} = \{V \subset X | \text{ある } \mathscr{A} \subset \mathscr{B} \text{ があって } V = \cup_{A \in \mathscr{A}} A\}$$

次の問いに答えよ.

(a) $(X, \mathscr{U}_{\mathscr{B}})$ は位相空間であることを示せ.[8] この位相 $\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ を<u>$\mathscr{B}$ を開基とする X 上の位相</u>という.

(b) $\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ は $\mathscr{B}$ が生成する位相であることを示せ.

問 3.10 $\mathbb{R}$ について次の集合族 $\mathscr{B}_u$, $\mathscr{B}_l$ を考える

$$\mathscr{B}_u = \{(a, b] | a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \ , \ \mathscr{B}_l = \{[a, b) | a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

次の問いに答えよ.

(a) $\mathscr{B}_u$ を開基とする $\mathbb{R}$ 上の位相 $\mathscr{U}_u$ が存在することを示せ. また $\mathscr{B}_l$ を開基とする $\mathbb{R}$ 上の位相 $\mathscr{U}_l$ が存在することを示せ. (開基に関しては問 3.9 参照のこと)

(b) $\mathscr{U}_u$, $\mathscr{U}_l$ ともに, ユークリッド位相 $\mathscr{U}_{Euc}$ よりも”真に”強いことを示せ.

(c) $\mathscr{U}_u$ と $\mathscr{U}_l$ の両方より強い位相は離散位相に限ることを示せ.

問 3.11 * (Furstenberg 位相) 整数の集合 $\mathbb{Z}$ と $a, b \in \mathbb{Z}$ について $a\mathbb{Z} + b := \{ax + b | x \in \mathbb{Z}\}$ と定め

$$\mathscr{B} = \{a\mathbb{Z} + b | a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(a) $\mathscr{B}$ を開基とする位相 $\mathscr{U}_F$ が存在することを示せ. (開基に関しては問 3.9 参照のこと) この位相は Furstenberg 位相と呼ばれる.

以下 $(\mathbb{Z}, \mathscr{U}_F)$ という位相空間で開集合や閉集合を考える.

(b) 空でない有限集合は $(\mathbb{Z}, \mathscr{U}_F)$ 上で開集合ではないことを示せ.

(c) 任意の $a, b \in \mathbb{Z}$ かつ $a \neq 0$ について $a\mathbb{Z} + b$ は $(\mathbb{Z}, \mathscr{U}_F)$ 上で開集合かつ閉集合であることを示せ.

(d) 素数全体の集合を $\mathcal{P}$ とする. 次を示せ.

$$\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} p\mathbb{Z}$$

(e) $\mathcal{P}$ は無限集合であることを示せ. つまり素数は無限個存在する.

[8] $\varnothing \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ であることに注意せよ.

4　連続写像と相対位相

岩井雅崇 (いわいまさたか)

以下断りがなければ $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド位相を入れたものを考える.

X, Y を位相空間とする. 写像 $f : X \to Y$ が連続であることを示すには, 次を (機械的に) 示せば良い.

1. Y の任意の開集合 V_Y について, $f^{-1}(V_Y)$ が X の開集合になる.

$(X, \mathscr{U})$ を位相空間とし, $A \subset X$ を部分集合とする.

$$\mathscr{U}_A = \{V \cap A | V \in \mathscr{U}\}$$

とおくと $(A, \mathscr{U}_A)$ は位相空間となる. $\mathscr{U}_A$ を<u>相対位相</u>という.

問 4.1 • $(X, \mathscr{U}_X)$,$(Y, \mathscr{U}_Y)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を写像とする. 次を示せ.

(a) $\mathscr{U}_X$ が離散位相ならば f は連続である.
(b) $\mathscr{U}_Y$ が密着位相ならば f は連続である.

問 4.2 • 全単射な連続写像 $f : X \to Y$ で f^{-1} が連続ではないものを一つ構成せよ.

問 4.3 • $A = [0, 2) \subset \mathbb{R}$ とし, A に $\mathbb{R}$ の相対位相を入れる. $[0, 1)$ は $\mathbb{R}$ の開集合ではないが, A の開集合であることを示せ.

問 4.4 • X を位相空間とし, $A \subset X$ を部分集合とする. A に相対位相を入れるとき, 包含写像 $i : A \to X$ は連続であることを示せ.

問 4.5 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次で定める.

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leqq 0) \\ x + 2 & (x > 0) \end{cases}$$

$\mathscr{U}_{Euc}$ を $\mathbb{R}$ のユークリッド位相とし, $\mathscr{U}_c$ を問 2.5 の補有限位相とする. 次の問いに答えよ.

(a) f は $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Euc})$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Euc})$ への連続写像かどうか判定せよ.
(b) f は $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_c)$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_c)$ への連続写像かどうか判定せよ.

問 4.6 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数の集合 $C[0, 1]$ とその距離 d_∞ を問 1.2 の通りとする. そして $C[0, 1]$ に距離 d_∞ による位相を入れる. 次の問いに答えよ.

(a) $F : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ を $F(f) := \int_0^1 f(x)dx$ で定める. F は連続であることを示せ.
(b) $G : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ を $G(f) := \int_0^1 f(x)^2 dx$ で定める. G は連続であることを示せ.

問 4.7 $\mathbb{R}$ にユークリッド位相 $\mathscr{U}_{Euc}$ をいれる．次の問いに答えよ．

(a) $A = \mathbb{Q}$ とし，A に相対位相 $\mathscr{U}_A$ を入れる．$\{0\}$ は A の開集合かどうか判定せよ．

(b) $\{0\}$ は A の閉集合かどうか判定せよ．

(c) $\mathbb{R}$ の部分集合 B で，B は無限集合であり，$(B, \mathscr{U}_B)$ 上において $\{0\}$ が開集合かつ閉集合となる例を一つあげよ．ここで $\mathscr{U}_B$ は相対位相とする．

問 4.8 (相対位相の普遍性) X を位相空間とし部分集合 $A \subset X$ に相対位相を入れる．任意の位相空間 Z とその連続写像 $f : Z \to X$ について，$f(Z) \subset A$ ならば，ある連続写像 $\widetilde{f} : Z \to A$ で $i \circ \widetilde{f} = f$ となるものがただ一つ存在することを示せ．ただし i は包含写像 $i : A \to X$ とする．

普遍性 (Universality) とはざっくりいうと「・・・が成り立つとき，ある射がただ一つ存在して・・・となる」みたいな性質のこと．(詳しくは圏論の教科書参照.)

問 4.9 問 2.5 の補有限位相空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_c)$ からユークリッド位相空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Euc})$ への連続写像を全て求めよ．

問 4.10 * $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を写像とし，$\mathscr{U}_{Euc}$ をユークリッド位相，$\mathscr{U}_{usc}$ を問 2.7 の上半連続位相とする．次は同値であることを示せ．

(a) f は $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Euc})$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{usc})$ への連続写像である．

(b) 任意の $a \in \mathbb{R}$ について $\limsup_{x \to a} f(x) = f(a)$ である．

5　直積位相

岩井雅崇 (いわいまさたか)

以下断りがなければ, $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド位相を入れたものを考える. また集合系を表す際に用いられる Λ は空でないと仮定する. 位相空間 X, Y について, $X \times Y$ には直積位相を入れたものを考える. (つまり $X \times Y$ は直積空間である.)

$(X, \mathscr{U}_X)$, $(Y, \mathscr{U}_Y)$ を位相空間とし, $X \times Y$ に直積位相を入れる.

$$\mathscr{B} := \{V \times W | V \in \mathscr{U}_X, W \in \mathscr{U}_Y\}$$

と定める. $W \subset X \times Y$ が $X \times Y$ の開集合 W であることは, 「ある $\mathscr{B}_W \subset \mathscr{B}$ が存在して, $W = \cup_{B \in \mathscr{B}_W} B$ となること」と同値である.

$\{(X_\lambda, \mathscr{U}_{X_\lambda})\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とする.

$$\mathscr{B} := \left\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \middle|\ U_\lambda \in \mathscr{U}_{X_\lambda} \text{ かつ有限個の } \lambda \text{ を除いて } U_\lambda = X_\lambda \right\}$$

とし, $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の直積位相を $\mathscr{B}$ を開基とする位相とする. (問 3.9 参照) この位相は各 μ 成分への射影 $p_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\mu$ が連続となるような最弱の位相に他ならない.

問 5.1 • 次の問いに答えよ.

(a) 任意の空でない開集合 $A, B \subset \mathbb{R}$ について $A \times B$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ.
(b) 任意の空でない閉集合 $A, B \subset \mathbb{R}$ について $A \times B$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ.

問 5.2 • 次の問いに答えよ.

(a) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(x, y) = x$ は開写像であるが閉写像ではないことを示せ.
(b) $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $q(x, y) = (x, xy)$ は開写像ではないことを示せ.
(c) 連続全単射が開写像であれば同相写像であることを示せ.

問 5.3 X, Y を位相空間とし, $A \subset X$ や $B \subset Y$ をその部分集合とする. 次を示せ.

(a) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$
(b) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

問 5.4 (直積位相の普遍性) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間とする. 「任意の位相空間 T と連続写像の族 $g_\lambda : T \to X_\lambda$ について, ある直積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ への連続写像 $g : T \to \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ で任意の $\mu \in \Lambda$ について $g_\mu = p_\mu \circ g$ となるものがただ一つ存在する」ことを示せ. ここで $p_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\mu$ は μ 成分への射影とする.

問 5.5 $f : X \to \mathbb{R}$ を位相空間 X から $\mathbb{R}$ への写像とする．次は同値であることを示せ．

(a) f は連続である．

(b) $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} | f(x) > y\}$ と $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} | f(x) < y\}$ は共に $X \times \mathbb{R}$ の開集合である．

問 5.6 $f : X \to \mathbb{R}$ を位相空間 X から $\mathbb{R}$ への写像とする．次の主張が正しい場合は証明し，間違っている場合は反例をあげよ．

「$\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} | f(x) = y\}$ が $X \times \mathbb{R}$ の閉集合であるとき，f は連続である．」

問 5.7 $\mathbb{N}$ を自然数の集合とし，各 $i \in \mathbb{N}$ について，$X_i = \mathbb{R}$ とする．$\prod_{i\in\mathbb{N}}(0,1)$ は直積空間 $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ の開集合かどうか判定せよ．

問 5.8 *$\mathbb{N}$ を 0 以上の自然数の集合とする．各 $i \in \mathbb{N}$ について $X_i = \{0,1\}$ とし，X_i には離散位相を入れる．$f : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to \mathbb{R}$ を

$$f(\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$$

で定める．f は well-defined であり[9] 直積空間 $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ から $\mathbb{R}$ への連続写像になることを示せ．また $f(\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i)$ を求めよ．

問 5.9 * $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間とし，$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に直積位相を入れたものを考える．各 $\lambda \in \Lambda$ について部分集合 $A_\lambda \subset X_\lambda$ を考える．次の主張が正しい場合は証明し，間違っている場合は反例をあげよ．

(a) $\overline{(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{(A_\lambda)}$

(b) $(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^\circ = \prod_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda^\circ)$

[9] なぜ $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$ が収束するか示してください．

6　商位相

岩井雅崇 (いわいまさたか)

以下断りがなければ, $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド位相を入れたものを考える. また $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合であるn 次元球面S^n を $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ と定め, 位相は $\mathbb{R}^{n+1}$ の相対位相を入れる.

位相空間 $(X, \mathscr{U})$ とする. $\sim$ を X の同値関係とし, π を自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ とする.

$$\mathscr{U}_\sim = \{V \subset X/\sim | \pi^{-1}(V) \in \mathscr{U}\}$$

とおくと, $\mathscr{U}_\sim$ は $X/\sim$ の位相を定める. この位相を商位相と呼ぶ. この位相に関して, $\pi : X \to X/\sim$ は連続となる.

問 6.1 • 実数の集合 $\mathbb{R}$ について, 次の関係 $\sim$ を入れる.

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{「}x = y\text{」 または 「}x \text{ と } y \text{ ともに } [0,1] \text{ の元である」}$$

(a) $\sim$ は同値関係であることを示せ.
(b) $X := \mathbb{R}/\sim$ とし X に自然な射影 $\pi : \mathbb{R} \to X$ から定まる商位相を入れる. $\pi((-2, 2))$ は X の開集合であることを示せ.
(c) $\pi\left((-2, \frac{1}{2})\right)$ は X の開集合かどうか判定せよ.

問 6.2 • $\mathbb{R}^2$ に対し同値関係 $\sim$ を

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ かつ } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$$

で定め, 2 次元トーラス$T^2 := \mathbb{R}^2/\sim$ とする. $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ という商写像により T^2 に商位相を入れる. 次の問いに答えよ.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ を $f(s,t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ とする. このときある連続写像 $\widetilde{f} : T^2 \to S^1 \times S^1$ で $f = \widetilde{f} \circ \pi$ となるものがただ一つ存在することを示せ. [10]
(b) $\widetilde{f}$ は全単射であることを示せ.[11]

問 6.3 (商位相の普遍性) X を位相空間とし $\sim$ を X の同値関係とする. 「任意の位相空間 Y と連続写像 $f : X \to Y$ で

$$x \sim y \text{ ならば } f(x) = f(y) \text{ がなりたつ}$$

ものについて, ある連続写像 $\widetilde{f} : X/\sim \to Y$ で $\widetilde{f} \circ \pi = f$ となるものがただ一つ存在する」 ことを示せ.[12] ただし π を自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ とする.

[10] ヒント: 問 6.3 を用いよ.
[11] もっと強く $\widetilde{f}$ は同相写像である. (問 10.5 で示す.)
[12] 存在までは授業でやっているかもしれない. ここで重要なのは"ただ一つ"のところである.

問 6.4 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について, 同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Leftrightarrow 0 \text{ でない実数 } \alpha \text{ が存在して } x = \alpha y$$

と定義する. 商写像 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ によって位相を入れたものを実射影空間と呼び, $\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ と書く. 以下 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ を $\mathbb{RP}^n$ の元とみなしたものを $(x_1 : \cdots : x_{n+1})$ と書き実同次座標と呼ぶ. 次の問いに答えよ

(a) $i = 1, \ldots, n+1$ について $U_i = \{(x_1 : \cdots : x_{n+1}) \in \mathbb{RP}^n | x_i \neq 0\}$ とおく. $\mathbb{RP}^n = \cup_{i=1}^{n+1} U_i$ であることを示せ.

(b) $f_1 : \mathbb{R}^n \to U_1$ を $f_1(y_1, \ldots, y_n) = (1 : y_1 : \cdots : y_n)$ で定める. f_1 は連続であることを示せ. [13]

(c) $g_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ を $g_1(x_1 : \cdots : x_{n+1}) = (\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_1})$ で定める. g_1 は連続であることを示せ.

(d) $f_1,\ g_1$ ともに同相写像であることを示せ. また $i = 2, \ldots, n+1$ について同相写像 $f_i : \mathbb{R}^n \to U_i$ を一つ構成せよ. (ただし"同相"であることの証明は省略しても良い.)

問 6.5 次の問いに答えよ.

(a)

$$\begin{array}{cccc} \sigma : & S^n & \to & \mathbb{RP}^n \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1 : \cdots : x_{n+1}) \end{array}$$

は全射連続写像であることを示せ.

(b) 任意の $q \in \mathbb{RP}^n$ について $\sigma^{-1}(q)$ の個数を求めよ.

(c) $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ を $f(x, y, z) = (yz, zx, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ とする. このときある連続写像で $\widetilde{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ で $f = \widetilde{f} \circ \sigma$ となるものがただ一つ存在することを示せ.

問 6.6 * $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ について, 同値関係 $\sim$ を

$$z \sim w \Leftrightarrow 0 \text{ でない複素数 } \alpha \text{ が存在して } z = \alpha w$$

と定義する. 問 6.4 と同様に $\mathbb{CP}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ とかき, $\mathbb{CP}^n$ に商位相を入れたものを複素射影空間と呼ぶ. [14] また

$$\begin{array}{cccc} f : & S^3 & \to & \mathbb{CP}^1 \\ & (x, y, z, w) & \longmapsto & (x + \sqrt{-1}y : z + \sqrt{-1}w) \end{array}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(a) f は全射連続写像であることを示せ.

(b) 任意の $a \in \mathbb{CP}^1$ について $f^{-1}(a)$ は S^1 と同相であることを示せ. ただし $f^{-1}(a)$ には S^3 の相対位相を入れる.

---

[13] ヒント: 商写像を上手く使う. 次の問題も同様.

[14] 実射影空間と同様に $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$ を $\mathbb{CP}^n$ の元とみなしたものを $(z_1 : \cdots : z_{n+1})$ と書き複素同次座標と呼ぶ.

7　分離公理

岩井雅崇 (いわいまさたか)

分離公理は正規や正則など色々あるが, ハウスドルフが一番大事だと思われるので, 今回ハウスドルフの問題を集めた. 以下断りがなければ $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド位相を入れたものを考える.

位相空間 $(X, \mathscr{U})$ がハウスドルフ空間 (または T_2 空間)であるとは, 任意の相異なる 2 点 $a, b \in X$ について, ある $U, V \in \mathscr{U}$ があって $a \in U, b \in V, U \cap V = \varnothing$ となること.

問 7.1 • 距離空間はハウスドルフであることを示せ.

問 7.2 • 次の問いに答えよ.

(a) $f : X \to Y$ を単射な連続写像とする. Y がハウスドルフならば X もハウスドルフであることを示せ.

(b) 上を用いてハウスドルフ空間 X の部分集合 $A \subset X$ に相対位相を入れたものはハウスドルフであることを示せ. また n 次元球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ はハウスドルフであることを示せ.

(c) 問 6.2 の 2 次元トーラス T^2 はハウスドルフ空間であることを示せ.

問 7.3 • 全射な連続写像 $f : X \to Y$ で, X はハウスドルフだが Y がハウスドルフでない例を一つあげよ.

問 7.4 • 問 2.5 の補有限位相はハウスドルフではないことを示せ.

問 7.5 実数の集合 $\mathbb{R}$ について, 同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

とし $\mathbb{R}/\sim$ に商位相を入れる. $\mathbb{R}/\sim$ はハウスドルフ空間であるか判定せよ.

問 7.6 $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0$ または $y = 1\}$ とする. 同値関係 $\sim$ を

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \text{「}x_1 \neq 0 \text{ かつ } x_1 = x_2\text{」または「}y_1 = y_2 \text{ かつ } x_1 = x_2\text{」}$$

とし $X/\sim$ に商位相を入れる. $X/\sim$ はハウスドルフ空間であるか判定せよ.

問 7.7 X を位相空間とする. 次は同値であることを示せ.

(i) X はハウスドルフである.

(ii) 対角集合 $\{(x, x) \in X \times X\}$ は $X \times X$ の閉集合である.

(iii) 任意の位相空間 T と任意の連続写像 $f, g : T \to X$ に対し, $\mathrm{Ker}(f, g) = \{t \in T | f(t) = g(t)\}$ は T の閉集合である.

(iv) 任意の位相空間 T と任意の連続写像 $f : T \to X$ について $\{(t, x) \in T \times X | f(t) = x\}$ は $T \times X$ の閉集合である.

問 7.8 $f, g : X \to Y$ を位相空間の間の連続写像とし, A を X の稠密な部分集合とする. Y がハウスドルフかつ $f|_A = g|_A$ ならば, $f = g$ であることを示せ.

問 7.9 問 6.4 の実射影空間 $\mathbb{RP}^n$ はハウスドルフ空間であることを問 6.5 を用いて示せ.

問 7.10 $M(n+1,\mathbb{R})$ を $(n+1)\times(n+1)$ 実行列の集合とし, $M(n+1,\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ と同一視して位相を入れる. $f:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to M(n+1,\mathbb{R})$ を次で定める:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} & \to & M(n+1,\mathbb{R}) \\ & (x_1,\ldots,x_{n+1}) & \mapsto & \frac{1}{x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2}\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_{n+1} \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n+1}x_1 & x_{n+1}x_2 & \cdots & x_{n+1}^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

f は連続な単射写像 $\widetilde{f}:\mathbb{RP}^n\to M(n+1,\mathbb{R})$ を引き起こすことを示せ.[15] またこれを用いて $\mathbb{RP}^n$ はハウスドルフ空間であることを示せ.

問 7.11 X を位相空間とする. 「任意の異なる 2 点 $p,q\in X$ について, ある連続関数 $f:X\to\mathbb{R}$ で $f(p)=0, f(q)\neq 0$ となるものが存在する」と仮定する. このとき X はハウスドルフ空間であること示せ. またこれを用いて $\mathbb{RP}^n$ はハウスドルフ空間であることを示せ. [16]

問 7.12 * 問 6.6 の複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ はハウスドルフ空間であることを示せ.

問 7.13 ** $1\leqq k<n$ となる自然数について, $A_{k,n}$ を $k\times n$ 実数行列でランクが k となる行列全体の集合とし, $\mathbb{R}^{kn}$ の部分集合とみなすことで $A_{k,n}$ に $\mathbb{R}^{kn}$ の相対位相を入れる. $A_{k,n}$ に同値関係 $\sim$ を

$$A\sim B \Leftrightarrow \text{正則な } k\times k \text{ 実数行列 } G \text{ が存在して } A=GB$$

と定義する. $G_{k,n}:=A_{k,n}/\sim$ と書き実グラスマン多様体と呼ぶ. $G_{k,n}$ に商位相を入れるとき, $G_{k,n}$ はハウスドルフ空間であることを示せ.

[15]つまり商写像 $\pi:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{RP}^n$ とするとき, $\widetilde{f}\circ\pi=f$ となる連続な単射 $\widetilde{f}$ が存在することを示せ.
[16]ヒント: 直線への射影を用いる. この手法は後の問題でも使える.

8　分離公理の続き

岩井雅崇 (いわいまさたか)

正規・正則などの分離公理や可算公理に関してはさほど重要ではないと思う.[17] そこで変な例のみ入れることにした. 8 章の問題は優先度が低いので後回しにしても良い.

問 8.1 * (Sorgenfrey line 問 2.9 の重要性) 問 2.9 の位相空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Sor})$ を考える. 次の問いに答えよ.

(a) $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Sor})$ は T_4 空間であることを示せ.[18]

(b) $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Sor})$ は第 1 可算公理を満たし, 可分であることを示せ.

(c) $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Sor})$ は第 2 可算公理を満たさないことを示せ.[19] また $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Sor})$ は距離化可能ではないことを示せ.

つまり T_4 空間でも第 2 可算公理を満たさなければ, 距離化可能とは限らない. また $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Sor})$ は T_4 空間だが距離空間ではない例である.

問 8.2 * (Sorgenfrey plane) $\mathbb{R}^2$ において

$$\mathscr{B} = \{[a, b) \times [c, d) | a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$$

を開基とする位相 $\mathscr{U}$ を入れる. (問 3.9 参照) さらに $\mathbb{Q}$ を有理数の集合とし,

$$L := \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}, \quad K := \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Q}\}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(a) $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$ は T_3 空間であることを示せ.

(b) K と $L \setminus K$ はともに $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$ において閉集合であることを示せ.

(c) $K \subset U_1$, $L \setminus K \subset U_2$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ となる開集合 U_1, U_2 が存在したと仮定する. このとき, 次の (i)-(iv) すべてを満たす $\mathbb{R}$ の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することを示せ

  (i) $x_1 = 0$ かつ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である. つまり $x_1 < x_2 < \cdots$ を満たす.

  (ii) 任意の自然数 n について $0 < d_{n+1} < \min\left\{\frac{d_n}{2}, \frac{x_n + d_n - x_{n+1}}{2}\right\}$ を満たす.

  (iii) 任意の自然数 i について, $[x_{2i+1}, x_{2i+1} + d_{2i+1}) \times [-x_{2i+1}, -x_{2i+1} + d_{2i+1}) \subset U_1$.

  (iv) 任意の自然数 i について, $[x_{2i}, x_{2i} + d_{2i}) \times [-x_{2i}, -x_{2i} + d_{2i}) \subset U_2$.

(d) (c) を用いて $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ であることを示せ. 以上より K と $L \setminus K$ は互いに交わらない開集合で分離することはできず, T_4 空間ではない.

---

[17] 恥ずかしながら私は去年の位相空間演義を担当するまで「正規・正則・第 1 可算公理・第 2 可算公理」などを忘れていた. 理由としては私が研究で調べている複素多様体は距離が当然のように入り可分だからである. つまり「正規・正則・第 1 可算公理・第 2 可算公理・可分」などは気にする必要がなくなる. この辺りは教官の研究分野・研究内容によって異なる. なお授業には教官の研究分野が入るので, この演習問題に代数の問題が多いのは私が代数幾何学・複素幾何学をやっているからである.

[18] ヒント: A, B を $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Sor})$ の互いに交わらない閉集合とする. 任意の $a \in A, b \in B$ についてある $c, d \in \mathbb{R}$ で, $[a, c) \cap B = \varnothing$, $[b, d) \cap A = \varnothing$, $[a, c) \cap [b, d) = \varnothing$ となるものが存在することを示す.

[19] ヒント: $\mathscr{B}'$ を $(\mathbb{R}, \mathscr{U}_{Sor})$ の任意の開基とする. $x \in \mathbb{R}$ について $x \in U_x \subset [x, x+1)$ となる $U_x \in \mathscr{B}'$ が存在する. この $x \mapsto U_x$ は単射な対応であることを示せ.

(e) L に $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$ の相対位相 $\mathscr{U}_L$ を入れたとき, $(L, \mathscr{U}_L)$ は離散位相空間であることを示せ．また $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$ は可分だが $(L, \mathscr{U}_L)$ は可分ではないことを示せ．

問 8.1 により T_4 空間の直積は必ずしも T_4 空間ではなく, 問 8.2 より $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$ は T_3 空間であるが T_4 空間ではない例である．また可分の部分空間が可分とは限らない例でもある．

以下は用語集である．$(X, \mathscr{U})$ を位相空間とする．$x \in X$ について $\mathfrak{N}(x)$ を x の近傍系とする.[20] $\mathfrak{B}(x) \subset \mathfrak{N}(x)$ がx の基本近傍系であるとは, 任意の $N \in \mathfrak{N}(x)$ についてある $U \in \mathfrak{B}(x)$ があって $U \subset N$ となることとする．

1. $(X, \mathscr{U})$ が第 1 可算公理を満たすとは, 任意の $x \in X$ が高々加算個の近傍からなる基本近傍系 $\mathfrak{B}(x)$ を持つこととする．
2. $(X, \mathscr{U})$ が第 2 可算公理を満たすとは, 高々加算個の開基を持つこととする．
3. $(X, \mathscr{U})$ が可分であるとは, 稠密な高々加算集合 A を持つこと．

1. X がT_0 空間であるとは, 任意の相異なる 2 点 $a, b \in X$ について,「ある $U \in \mathscr{U}$ があって $a \in U$ かつ $b \notin U$」または「ある $V \in \mathscr{U}$ があって $b \in V$ かつ $a \notin V$」となること．
2. X がT_1 空間であるとは, 任意の相異なる 2 点 $a, b \in X$ についてある $U \in \mathscr{U}$ があって $a \in U$ かつ $b \notin U$ となること．
3. X がT_2 空間またはハウスドルフ空間であるとは, 任意の相異なる 2 点 $a, b \in X$ について, ある $U, V \in \mathscr{U}$ があって $a \in U, b \in V, U \cap V = \varnothing$ となること．
4. X が正則空間であるとは, 任意の $a \in X$ と a を含まない閉集合 B について, ある $U, V \in \mathscr{U}$ があって $a \in U, B \subset V, U \cap V = \varnothing$ となること．
5. X がT_3 空間とは X が正則空間で T_1 空間なること．
6. X が正規空間とは, 互いに交わらない閉集合 A, B について, ある $U, V \in \mathscr{U}$ があって $A \subset U, B \subset V, U \cap V = \varnothing$ となること．
7. X がT_4 空間とは X が正規空間で T_1 空間なること．

ちなみに $T_{2\frac{1}{2}}$ 空間というものもある.[21]関係としては次がなりたつ．また逆は成り立たない．

$$
\begin{tikzcd}
\text{距離空間+可分} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{第 2 可算公理} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{距離空間} \arrow[r, Rightarrow] & \text{第 1 可算公理} & \text{可分}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{距離空間} \arrow[r, Rightarrow] & T_4 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & T_3 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & T_2\ (\text{ハウスドルフ}) \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \arrow[d, Rightarrow] \\
& \text{正規} & \text{正則} & & T_0
\end{tikzcd}
$$

[20] $N \subset X$ が x の近傍とは, $x \in N^\circ$ となること．x の近傍の集合を $\mathfrak{N}(x)$ と書き, x の近傍系と呼ぶ．

[21] 上のような用号・反例は本「counterexample in topology」にまとめられている．(なんと位相空間の反例ばっかり乗っている本である.) また最近では π-base`https://topology.jdabbs.com` というページに位相空間の例がのっている．私も演習問題の作成に参考にした．

9　連結

岩井雅崇 (いわいまさたか)

以下断りがなければ $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド位相を入れたものを考える.

X を位相空間とする.

1. X が連結であるとは, 任意の X の部分集合 U が開集合かつ閉集合ならば $U = X$ または $U = \varnothing$ となること.
2. X が弧状連結であるとは, 任意の $x, y \in X$ について, ある連続関数 $f : [0,1] \to X$ があって $x = f(0)$ かつ $y = f(1)$ となること.

弧状連結ならば連結である.

問 9.1 • 連続な全射写像 $f : X \to Y$ について X が連結ならば Y も連結であることを示せ. またこれを用いて $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]$ はどれも互いに同相ではないことを示せ.[22]

問 9.2 • X を位相空間とし $\sim$ を同値関係とする. π を自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ として, $X/\sim$ に商位相を入れる. X が連結ならば, $X/\sim$ も連結であることを示せ. これを用いて, 問 6.2 の 2 次元トーラス T^2 は連結であることを示せ.

問 9.3 • 問 2.5 の補有限位相は連結であることを示せ.

問 9.4 • 2 次元球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ は連結であることを示せ. [23]

問 9.5 X を連結な位相空間, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の開集合族, $f : X \to \mathbb{R}$ を実数値連続関数とする. 「任意の $\lambda \in \Lambda$ について $f|_{U_\lambda} : U_\lambda \to \mathbb{R}$ が定値写像であるならば, f は定値写像である」ことを示せ. また連結という仮定を外した場合この命題は成り立つか?

問 9.6 X を位相空間とし, $A \subset X$ を X の連結集合とする. 任意の $A \subset B \subset \overline{A}$ となる部分集合 B は X の連結集合であることを示せ.

問 9.7 $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への全単射は存在するが, $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への同相写像は存在しないことを示せ.

問 9.8 $A \subset \mathbb{R}^2$ を可算集合とする. $\mathbb{R}^2 \setminus A$ は弧状連結であることを示せ. (特に連結な集合となる.)

問 9.9 X を位相空間とする. 次は同値であることを示せ.

(i) X は連結である.

(ii) 任意の実連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と任意の $u, v \in X$, $t \in \mathbb{R}$ について, $f(u) \leqq t \leqq f(v)$ ならば, ある $w \in X$ が存在して $f(w) = t$ となる.

---

[22] ヒント: もし同相写像 $f : [0,1) \to (0,1)$ が存在したとして, $f((0,1)) \subsetneq (0,1)$ を考えよ.

[23] 色々やり方はあるが, 直感的なものは弧状連結を示すものだと思う. (任意の $p \in S^2$ は $(1,0,0)$ と曲線で結べそうなので.) 他には全射連続写像 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2$ を構成し, $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ が弧状連結になることを示す方法もある. その場合 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ が弧状連結なのは 2 点が直線か折れ線で結べることを示せば良い.

問 9.10 位相空間 X と $x \in X$ について, x を含む最大の連結集合をx を含む X の連結成分という. 次の問いに答えよ.

(a) $0 \in \mathbb{R}$ を含む $\mathbb{R}$ の連結成分を求めよ.

(b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ に $\mathbb{R}$ の相対位相を入れる. $0 \in \mathbb{Q}$ を含む $\mathbb{Q}$ の連結成分を求めよ.

(c) 連結成分は常に連結な X の閉集合であることを示せ.

(d) 連結成分は常に X の開集合になるか. 正しければ証明し, 間違いならば反例を与えよ.

問 9.11 位相空間 X について, 任意の $x \in X$ とその任意の近傍 N について x の弧状連結な近傍 U があって $U \subset N$ となるとき X は局所弧状連結と呼ばれる. 次の問いに答えよ.

(a) 局所弧状連結だが弧状連結でない空間の例をあげよ.

(b) 連結かつ局所弧状連結ならば弧状連結であることを示せ. また $\mathbb{R}^n$ の連結開集合は弧状連結になることを示せ.

問 9.12 * (topologist's comb) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 X を

$$X := \{0\} \times (0,1] \cup (0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \times (0,1] \right\}$$

とし, X に $\mathbb{R}^2$ の相対位相を入れる. 次の問いに答えよ.

(a) X を図示せよ.

(b) X は連結であることを示せ.

(c) X は弧状連結ではないことを示せ.

問 9.13 * $M(n,\mathbb{R})$ を $n \times n$ 行列の全体の集合とする. $M(n,\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視をし, ユークリッド位相を入れる. 次の問いに答えよ.

(a) $GL(n,\mathbb{R}) := \{A \in M(n,\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$ とし, $M(n,\mathbb{R})$ の相対位相を入れる. このとき $GL(n,\mathbb{R})$ は弧状連結ではないことを示せ.

(b) $GL(n,\mathbb{R})_+ := \{A \in M(n,\mathbb{R}) | \det A > 0\}$ とし, $M(n,\mathbb{R})$ の相対位相を入れる. このとき $GL(n,\mathbb{R})_+$ は弧状連結であること示せ.

問 9.14 * $SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) | \det A = 1, {}^t AA = E\}$ に $M(n,\mathbb{R})$ の相対位相を入れる. このとき, $SO(n,\mathbb{R})$ は弧状連結であることを示せ.

10　コンパクト

岩井雅崇 (いわいまさたか)

以下断りがなければ $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド位相を入れたものを考える.

$(X, \mathscr{U})$ を位相空間とし, $A \subset X$ を X の部分集合とする.

1. $\mathfrak{G}$ が A の開被覆とは, $\mathfrak{G}$ が開集合族であり $A \subset \cup_{V \in \mathfrak{G}} V$ となること.
2. 部分集合 $A \subset X$ がコンパクトであるとは, 任意の A の開被覆 $\mathfrak{G} \subset \mathscr{U}$ について, ある有限個の元 $V_1, \ldots, V_l \in \mathfrak{G}$ があって $A \subset \cup_{i=1}^{l} V_i$ となること.

問 10.1 •$f : X \to Y$ を連続な全射写像とする. X がコンパクトならば Y もコンパクトであることを示せ. またこれを用いて $\mathbb{R}$ と $[0, 1]$ は同相ではないことを示せ.

問 10.2 • X を位相空間とし $\sim$ を同値関係とする. π を自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ として, $X/\sim$ に商位相を入れる. X がコンパクトならば, $X/\sim$ もコンパクトであることを示せ. これを用いて, 問 6.2 の 2 次元トーラス T^2 はコンパクトであることを示せ.

問 10.3 • 問 2.5 の補有限位相はコンパクトであることを示せ.

問 10.4 • コンパクト位相空間 X の実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は最大値・最小値を持つことを示せ.

問 10.5 • 次の問いに答えよ.

(a) コンパクト位相空間の閉部分集合はコンパクトであることを示せ.
(b) ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であることを示せ.
(c) コンパクト空間 X からハウスドルフ空間 Y への連続全単射 $f : X \to Y$ は同相であることを示せ.
(d) (c) を用いて問 6.2 の $\widetilde{f} : T^2 \to S^1 \times S^1$ は同相写像であることを示せ.

問 10.6 • X をコンパクト位相空間, Y を連結ハウスドルフ空間とする. 連続写像 $f : X \to Y$ が開写像であるならば, f は全射であることを示せ. [24]

問 10.7 X を集合とし, $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2$ を $\mathscr{U}_1 \subset \mathscr{U}_2$ となる開集合系とする. 次の主張を示せ.[25]

(a) 位相空間 $(X, \mathscr{U}_1)$ がハウスドルフならば, 位相空間 $(X, \mathscr{U}_2)$ もハウスドルフである.
(b) 位相空間 $(X, \mathscr{U}_2)$ がコンパクトならば, 位相空間 $(X, \mathscr{U}_1)$ もコンパクトである.
(c) 位相空間 $(X, \mathscr{U}_2)$ が連結ならば, 位相空間 $(X, \mathscr{U}_1)$ も連結である.

問 10.8 $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ を $f(x, y, z) = (yz, zx, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ とする. このときある連続写像で $\widetilde{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ で $f = \widetilde{f} \circ \sigma$ となるものが唯一存在することが問 6.5 によりわかっている. そこで $W := \widetilde{f}(\mathbb{RP}^2)$ とし, $\mathbb{R}^4$ の相対位相を入れる. $\widetilde{f}$ によって $\mathbb{RP}^2$ と W は同相になることを示せ. [26]

[24] ヒント: $f(X)$ を考えよ.
[25] 開集合が多ければハウスドルフになりやすく, 開集合が少なければコンパクト・連結になりやすいということである.
[26] ヒント: 問 10.5(c) を用いる. 同相であることを示すのに問 10.5(c) はかなり有用である.

問 10.9 $\mathbb{CP}^1$ を問 6.6 における複素射影空間とする. $\varphi : \mathbb{CP}^1 \to S^2$ を

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{CP}^1 & \to & S^2 \\ & (z:w) & \mapsto & \left(\frac{2\mathrm{Re}(z\bar{w})}{|z|^2+|w|^2}, \frac{2\mathrm{Im}(z\bar{w})}{|z|^2+|w|^2}, \frac{|z|^2-|w|^2}{|z|^2+|w|^2}\right) \end{array}$$

とするとき, φ は well-defined な同相写像であることを示せ.[27] ただし $\bar{z}$ は z の複素共役で $|z|^2 = z\bar{z}$ とする. また $z \in \mathbb{C}$ がある実数 $u, v \in \mathbb{R}$ を用いて $z = u + \sqrt{-1}v$ と表されているとき, $\mathrm{Re}(z) := u$, $\mathrm{Im}(z) := v$ と定義する.

問 10.10 (一点コンパクト化の普遍性) 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ の一点コンパクト化を $(X^*, \mathscr{U}^*)$ とする. さらに X をコンパクトではない局所コンパクトハウスドルフ空間であると仮定する. このとき任意のコンパクトハウスドルフ空間 K と連続写像 $i : X \to K$ で $i : X \to i(X)$ が同相かつ $i(X) \subset K$ が K の中で稠密となるものについて, ある連続写像 $\phi : K \to X^*$ がただ一つ存在して次の図式を満たすことを示せ.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & K \arrow[dl, "\phi"] \\ X^* & \end{tikzcd}$$

問 10.11 $\mathbb{C}$ の一点コンパクト化が S^2 と同相であることを示せ. またこれを用いて S^2 と $\mathbb{CP}^1$ は同相であることを示せ.

問 10.12 X を位相空間とし, 次の 3 条件を考える.

(i) X はコンパクトである.

(ii) 任意の位相空間 Y, 任意の $y \in Y$, $X \times \{y\}$ の任意の開近傍 $W \subset X \times Y$ について, ある y の開近傍 $V \subset Y$ があって, $X \times V \subset W$ となる.

(iii) 任意の位相空間 Y に対し第 2 射影 $p_2 : X \times Y \to Y$, $p_2(x, y) = y$ は閉写像である.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) を示せ. つまり「(i) が成り立つならば, (ii) が成り立つこと」および「(ii) が成り立てば (iii) が成り立つこと」を示せ.

問 10.13 ** 問 10.12 において, (iii) $\Rightarrow$ (i) を示せ. つまり「(iii) が成り立つならば (i) が成り立つこと」を示せ. よって 問 10.12 の 3 条件 (i), (ii), (iii) は同値である.

[27] $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}/\sim$ より, φ は代表元の取り方に依存しそうである. だがこの場合は代表元の取り方に依存しない. それを示せ. こういうのを well-defined(うまく定義されている?) という.

11　分離公理・連結・コンパクトの応用問題

岩井雅崇 (いわいまさたか)

問 11.1, 問 11.2 は去年やって面白かったので今年も出すことにした. 実は問 2.5 や問 2.11 に関係がある. [28] 問 11.3 も去年作った問題である. 私が研究でよく使う葉層に関する問題である. 問 11.4, 問 11.5 は複素解析の演習で出した問題の一部である. 問 11.6 は去年作った問題である. かなり面倒なのであんまり良くない問題である. 問 11.7 は面白いので入れてみた. この問題を作ったとき, 私は答えを知らなかった.

以下断りがなければ $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド位相を入れたものを考える.

問 11.1 * (Stone 1937) X をコンパクトハウスドルフ空間とし, $C(X) := \{f : X \to \mathbb{R}, f$ は連続 $\}$ とする. 写像 $T : C(X) \to \mathbb{R}$ があって,

$$T(f+g) = T(f)+T(g), T(fg) = T(f)T(g), T(\lambda f) = \lambda T(f), T(1) = 1 \quad (\forall f, g \in C(X), \forall \lambda \in \mathbb{R})$$

を満たすとする. [29] このとき $x_T \in X$ があって, 任意の $f \in C(X)$ について $T(f) = f(x_T)$ となるものがただ一つ存在することを示せ. [30] なお解答に際し次を用いて良い.

> $f, g \in C(X)$ ならば, $f + g, f - g, \alpha f, f/g \in C(X)$ である. ここで $\alpha \in \mathbb{R}$ であり, f/g は $g(x) = 0$ となる $x \in X$ が存在しないときに定義される.

問 11.2 * (Genfand-Kolomogolov 1939) X, Y をコンパクトハウスドルフ空間とし, $C(X), C(Y)$ を問 11.1 の通りとする. 写像 $T : C(X) \to C(Y)$ で

$$T(f+g) = T(f)+T(g), T(fg) = T(f)T(g), T(\lambda f) = \lambda T(f), T(1) = 1 \quad (\forall f, g \in C(X), \forall \lambda \in \mathbb{R})$$

となるものを考える. このとき連続写像 $\varphi : Y \to X$ であって

$$T(f)(y) = f(\varphi(y)) \quad (\forall f \in C(X), \forall y \in Y)$$

となるものがただ一つ存在することを示せ. [31] また T が全単射ならば φ は同相であることを示せ.

問 11.3 * 2 次元トーラス T^2 を問 6.2 のように定義する. 0 でない実数 α について, $f_\alpha : \mathbb{R} \to T^2$ を $f_\alpha(x) = (x, \alpha x)$ で定め, $f_\alpha(\mathbb{R}) \subset T^2$ に T^2 の相対位相を入れる. 次の問いに答えよ.

(a) α が有理数であるとき, $f_\alpha(\mathbb{R})$ は S^1 と同相であることを示せ.

---

[28] Grothendieck による代数幾何の基礎づけに関わる. (空間が先か環が先か) この問題を作った後に Grothendieck が初め研究してたのは関数解析・作用素環であること思い出した. 実は Atiyah-Macdonald にも似たような問題がある. おそらく Atiyah が作った問題だと思う.

[29] $T(1) = 1$ の左辺の"1"は $x \in X$ について $1 \in \mathbb{R}$ を返す定数関数である.

[30] ヒント: 背理法を用いる. もし任意の $x \in X$ についてある $f_x \in C(X)$ があって $T(f_x) \neq f(x)$ ならば f_x を使って X の開被覆が作れる. これから「任意の $x \in X$ について $g(x) \neq 0$」となる関数を作り $T(g)$ を考えよ. 唯一性はウリゾーンの補題を使う.

[31] ヒント: 問 11.1 を使って φ を構成する. 連続性は X の閉集合の逆像が Y の閉集合であることを示せば良い. ウリゾーンの補題が効いてくる.

(b) α が無理数であるとき, $f_\alpha : \mathbb{R} \to f_\alpha(\mathbb{R})$ は全単射な連続写像だが, 同相写像ではないことを示せ.

なお解答に際し次を用いて良い.

$\alpha \in \mathbb{R}$ が無理数ならば, 任意の $\epsilon > 0$ について $0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\epsilon}{q}$ となる有理数 $\frac{p}{q}$ が存在する.

問 11.4 $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ とする. 任意の $\tau \in \mathbb{H}$ について, $\mathbb{C}$ に関する同値関係 $\sim_\tau$ を

$$z \sim_\tau w \Leftrightarrow \text{ある } m, n \in \mathbb{Z} \text{ があって, } w - z = m + n\tau \text{ となる}$$

で定める. そして $T_\tau := \mathbb{C}/\sim_\tau$ とし商位相を入れる.[32] 任意の $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$ について, T_{τ_1} と T_{τ_2} は同相であることを示せ. [33]

問 11.5 *(開写像定理を用いた代数学の基本定理の証明) $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ とし, $n \geqq 1, a_n \neq 0$ とする. 以下の問いに答えよ.

(a) $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を $F(z, w) = (z^n + a_1 z^{n-1}w + \cdots + a_{n-1}zw^{n-1} + a_n w^n, w^n)$ とすると, F は連続写像 $\widetilde{F} : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ を誘導することを示せ. [34]

(b) $f(\mathbb{C})$ は閉集合であることを示せ.

(c) $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ を示せ. これより $f(\alpha) = 0$ なる $\alpha \in \mathbb{C}$ は存在する.

なお解答に際し次の定理 (開写像定理) を用いて良い.

定理: f を領域 (連結開集合)$\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の定数でない正則関数とするとき, f は開写像である.

問 11.6 ** 3 次特殊直交群 $SO(3, \mathbb{R})$ を 3×3 実数行列 G で ${}^tGG = E_3$ かつ $\det(G) = 1$ なる行列全体の集合とする. $\mathbb{R}^9$ の部分集合とみなすことで $SO(3, \mathbb{R})$ に $\mathbb{R}^9$ の相対位相を入れる. $SO(3, \mathbb{R})$ は $\mathbb{RP}^3$ と同相であることを示せ.[35]

問 11.7 * 次の空間のハウスドルフ性・連結性・コンパクト性を各々調べよ. なおこの問題は何回も答えて良いし複数人が分担して解答してもよい. また選んだ空間によって配点が異なる. [36]

難易度 Easy 問 1.2, 問 2.6, 問 2.7, 問 2.8, 問 2.9, 問 2.11, $\mathbb{RP}^n$ と $\mathbb{CP}^n$(問 6.4 と問 6.6), 問 8.2, $GL(n, \mathbb{R})$ と $GL(n, \mathbb{R})_{>0}$(問 9.13), $SO(n, \mathbb{R})$ (問 9.14), $\mathbb{Q}_p$(問 12.8).

難易度 Normal 問 3.11, グラスマン多様体 (問 7.13), $\mathbb{Z}_p$ (問 12.9).

---

[32] $T_{\sqrt{-1}}$ は問 6.2 での 2 次元トーラスと同じことに注意する.

[33] もっと強く実は C^∞ 級同型はいえる. しかし複素構造が異なる場合がある. これを詳しく調べたのが小平邦彦と D.C. スペンサーであり, のちに小平・スペンサーの変形理論につながる. ちなみに小平邦彦は日本人初のフィールズ賞受賞者である.

[34] つまり商写像 $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^1$ とするとき, $\widetilde{F} \circ \pi = \pi \circ F$ となる連続写像 $\widetilde{F}$ が存在することを示せ.

[35] ヒント: 四元数体のノルム 1 の集合が S^3 となる. ノルム 1 の四元数の元から $SO(3, \mathbb{R})$ の元を作れば良い (実はこれはゲーム開発にも用いられている. 物理だとスピノルと関係あるらしい.)

[36] ただし問 6.4 のように演習問題でハウスドルフなどを示している場合はその事実を使って良いものとする. もしその問題が解かれていない場合はその問題を先に解くこと. (正直言ってそこまでルールを厳格に考えてないので, 解答時に教官が決める.) この難易度は全ての問題が解かれていると仮定した場合の難易度である. 配点は 0.5 点以上である. つまり * がついている問題だが選んだ空間によっては 0.5 点しかもらえない場合もある.

12　距離空間の完備化

岩井雅崇 (いわいまさたか)

(X, d) を距離空間とする.

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x \in X$ に<u>収束する</u>とは, 任意の $\epsilon > 0$ についてある正の整数 N があって, $N < n$ ならば $d(x_n, x) < \epsilon$ となること.
2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が<u>コーシー列</u>であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ についてある正の整数 N があって, $N < m, n$ ならば $d(x_m, x_n) < \epsilon$ となること.
3. (X, d) が<u>完備</u>であるとは任意のコーシー列が常に X の点に収束すること.

問 12.1 • $C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ は実数値連続関数 $\}$ とおく. 以下この問題では, 関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ と言えば $f_i \in C[0,1]$ となる関数の列とする. 次の問いに答えよ.

(a) 「関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が $f \in C[0,1]$ に各点収束する」ことの定義を述べよ.
(b) 「関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が $f \in C[0,1]$ に一様収束する」ことの定義を述べよ.
(c) 関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が $f \in C[0,1]$ に一様収束するならば, 各点収束することを示せ.
(d) (c) の逆は一般には成り立たない. その関数列の例を一つあげよ.

問 12.2 • $f, g \in C[0,1]$ に関して $d_{\infty}(f,g) = \sup_{x \in [0,1]}\{|f(x) - g(x)|\}$ とおく. 問 1.2 により $(C[0,1], d_{\infty})$ は距離空間になる. 次の問いに答えよ.

(a) $[0,1]$ 上の連続関数の列 f_i が $[0,1]$ 上の関数 f に一様収束するならば, f は $[0,1]$ 上で連続であることを示せ.
(b) $(C[0,1], d_{\infty})$ は完備であることを示せ.

問 12.3 • (X, d) を距離空間とし, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ を X の点列とする. 次の問いに答えよ.

(a) $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ がコーシー列であり, ある部分列 $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ が $\alpha \in X$ に収束するならば, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ は α に収束することを示せ. ただし $0 < k_1 < k_2 < \cdots$ であると仮定して良い.
(b) 一般には 「ある部分列 $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ が $\alpha \in X$ に収束しても, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ は α に収束する」とは限らない. そのような例を一つあげよ.

問 12.4 (X, d) を距離空間とし, X の部分集合 A, B について $d(A, B) := \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$ と定める. 次の問いに答えよ.

(a) A をコンパクト集合, B を閉集合とするとき, A と B が互いに交わらなければ $d(A, B) \neq 0$ であることを示せ.
(b) d_E を $\mathbb{R}^2$ のユークリッド距離とする. 互いに交わらない $\mathbb{R}^2$ の閉集合 A, B で $d_E(A, B) = 0$ となるものの例をあげよ.

問 12.5 実数列 $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ となるものの集合を l^2 とする. $x, y \in l^2$ について

$$d_{l^2}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}$$

と定める．d_{l^2} が well-defined であることを示し[37], (l^2, d_{l^2}) は完備な距離空間となることを示せ．

問 12.6 次の問いに答えよ．

(a) 距離空間上のコンパクト集合は有界閉集合であることを示せ．

(b) (l^2, d_{l^2}) を 問 12.5 の通りとし, $A := \{x \in l^2 \,|\, d_{l^2}(x, 0) = 1\}$ とおく．A は (l^2, d_{l^2}) の有界閉集合であるがコンパクト集合ではないことを示せ．また (l^2, d_{l^2}) もコンパクトではないことを示せ．

問 12.7 ** $(C[0,1], d_\infty)$ を問 12.2 の通りとする．次の問いに答えよ．

(a) $A = \{f \in C[0,1] \,|\, f([0,1]) \subset [0,1]\}$ とおくと, A は $(C[0,1], d_\infty)$ のコンパクト集合ではないこと示せ．

(b) $B = \{f \in A \,|\,$ 任意の $x, y \in [0,1]$ について $|f(x) - f(y)| \leqq |x - y|\}$ とおくと, B は $(C[0,1], d_\infty)$ のコンパクト集合であることを示せ．

問 12.8 * p を素数とし, 問 1.7 のように $\mathbb{Q}$ の距離 d_p をとる．$\mathbb{Q}_p$ を $\mathbb{Q}$ の d_p による完備化とする．また完備化によって誘導される $\mathbb{Q}_p$ 上の距離を d_p と同じ記号で書くことにする．次の問いに答えよ．

(a) $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ を有理数の数列とする． $(\mathbb{Q}_p, d_p)$ 上で $\sum_{n=0}^\infty a_n$ がある値に収束することは $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = 0$ であることと同値であることを示せ．

(b) $(\mathbb{Q}_p, d_p)$ 上で $\sum_{n=0}^\infty p^n = \frac{1}{1-p}$ であることを示せ．

(c) $b_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ かつ $(\mathbb{Q}_5, d_5)$ 上で $\frac{20}{24} = \sum_{n=0}^\infty b_n 5^n$ となるような数列 $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ を決定せよ．

問 12.9 ** p を素数とする．2 以上の自然数 n について $\pi_n : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}$ を標準的な射影とする．

$$\mathbb{Z}_p := \left\{ \{a_n\}_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^\infty \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \,\middle|\, 2 \text{ 以上の自然数 } i \text{ について} \pi_i(a_i) = a_{i-1} \right\} \subset \prod_{n=1}^\infty \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

とし, $\mathbb{Z}_p$ に直積空間 $\prod_{n=1}^\infty \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の相対位相を入れる．(ただし $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ には離散位相を入れる.) 次の問いに答えよ．

(a) $x \in \mathbb{Z}$ について, $r(x, n)$ を x を p^n で割ったあまりとする．

$$\begin{array}{cccc} I: & \mathbb{Z} & \to & \prod_{n=1}^\infty \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & \{r(x,n)\}_{n=1}^\infty \end{array}$$

とするとき, I は単射かつ $I(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}_p$ であることを示せ．また $I(\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}_p$ で稠密であることを示せ．

(b) $\mathbb{Z}_p$ は $\{x \in \mathbb{Q}_p | d_p(x, 0) \leqq 1\}$ と同相であることを示せ．ただし後者の集合には距離空間 $(\mathbb{Q}_p, d_p)$ の相対位相を入れる．

[37] $\sum_{i=1}^\infty (x_i - y_i)^2$ がなぜ収束するのかを示してください．