2024年度春夏学期
大阪大学 全学共通教育科目
線形代数学I 工（理63〜123）

岩井雅崇 (大阪大学)

March 29, 2024 ver 1.00

Contents

0　ガイダンス

2024 年度春夏学期
大阪大学 全学共通教育科目 線形代数学 I 工（理 63〜123）
水曜 3 限 (13:30-15:00) 共 C301

岩井雅崇 (いわいまさたか)

基本的事項

- この授業は対面授業です．水曜 3 限 (13:30-15:00) に共 C301にて授業を行います．
- 授業ホームページ (https://masataka123.github.io/2024_summer_linear_algebra/) にて「授業の資料・授業の板書」などをアップロードしていきます．QR コードは下にあります．

成績に関して

演習 (後述) と期末試験 (後述) で成績をつける予定です． 内訳は未定です．単位が欲しい方はこの二つに必ず出席するようにしてください．

なお通常時の授業 (演習や期末試験以外の授業) に出席点はございません．そのため授業への出席は任意となります．

1. 演習に関して

次の日時に演習の授業を行います．

- 日時: 2024 年 6 月 5 日と 2024 年 7 月 17 日 水曜 3 限 (13:30-15:00)
- 場所: 共 C301
- 演習内容: 配布したプリントの問題を解いて提出してください．なお協力して解いても構いません．

以上は予定であるため, 変更の可能性があります. もし変更する場合はホームページや CLE で連絡します．なお代理出席などの行為は不正行為とみなし, 加担した人全員の単位を不可にします．欠席する場合はあらかじめ masataka@math.sci.osaka-u.ac.jp にご連絡いただければ幸いです.[1]

[1] その場合は欠席理由をきちんとお伝えください．ただし正当な理由以外での欠席は認められません．(成績に関わるからです.) よくわからない場合はとりあえずメールしてください．

2. 期末試験に関して

現時点での期末試験の予定は次のとおりです.

- 日時: 2024 年 7 月 24 日 水曜 3 限 (13:30-15:00) (予定)
- 場所: 共 C301
- 持ち込みに関して: A4 用紙 4 枚 (裏表使用可) まで持ち込み可. 工夫を凝らして A4 用紙 4 枚に今までの内容をまとめてください.
- 試験内容：授業・演習でやった範囲

以上は予定であるため, 変更の可能性があります. もし変更する場合はホームページや CLE で連絡します.

まとめ

1. 単位が欲しい方は演習に必ず出席し, 期末試験で成績が取れるくらいの点を取ってください.
2. 単位を認定するくらいの成績が取れていない場合, 容赦無く不可を出します.
3. 講義への出席は自由です. 授業資料・授業の板書をホームページにアップロードするので, 自分の好きな方法で線形代数への理解を進めてください.[2]

その他

- 休講情報は授業ホームページ・KOAN でお知らせいたします.
- 休講情報や資料の修正などをするので, こまめにホームページを確認してください.
- 教科書は「三宅敏恒著 線形代数学　初歩からジョルダン標準形へ」(培風館) を用いる. なお後期の茶碗谷先生の授業でも同じ教科書を用いる (と聞いています.)
- オフィスアワーを月曜 16:00-17:00 に設けています. この時間に私の研究室に来ても構いません (ただし来る場合は前もって連絡してくれると助かります.)

[2] 理由としては「私は講義をするのが上手くない」のと「もっと効率的な理解の方法があると思う」からです. この授業内容を理解するのに $1.5 \times 14 = 21$ 時間も本当にかかるのかと思います. (というか今の私は 90 分じっと講義を受けるのが好きではないです. 14 週に分けて講義を聞くのも好きではないです.) そして世の中には私よりもわかりやすい授業する人もいるので, そちらで理解を進めても良いと思います. 学び方は自由であり, その方法を制限するのは好きではありません. (つまり出席を取るのも好きではないです).

1 行列 [教科書, 1 章]

1.1 行列と数ベクトル [教科書, 1.1 節]

1.1.1 行列の定義

- $m \times n$ 個の数 (実数または複素数) a_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ を

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  のように並べたものを $\underline{m \text{ 行 } n \text{ 列の行列}}$ という．$\underline{m \times n \text{ 行列}}$, $\underline{m \times n \text{ 型の行列}}$, $\underline{(m, n) \text{ 行列}}$ ということもある．

- 上の行列を A としたとき, a_{ij} を行列 A の (i, j) 成分という．行列 A を $\underline{[a_{ij}]_{m \times n}}$ や $\underline{(a_{ij})}$ と略記することもある．

- $\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ を $\underline{A \text{ の行}}$ といい, 上から第 1 行, 第 2 行, $\cdots$, 第 m 行という．

- $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を $\underline{A \text{ の列}}$ といい, 上から第 1 列, 第 2 列, $\cdots$, 第 n 列という．

- $1 \times n$ 行列 $(a_{11} \cdots a_{1n})$ を<u>行ベクトル</u>と呼び, $m \times 1$ 行列 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ を<u>列ベクトル</u>と呼ぶ．数ベクトルといえば行ベクトルか列ベクトルをさす．(この授業や教科書での用語).

例 1. 行列 A を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

- A は 2 行 3 列の行列 (2×3 行列).
- (1,2) 成分は 2, (2,1) 成分は 3, (2,3) 成分は 4 である．
- 第 2 行は $\begin{pmatrix} 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$. 第 3 列は $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ である．

例 2. 行列 A を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

- A は 3 行 4 列の行列 (3×4 行列).
- (1,1) 成分は 13, (2,4) 成分は 5, (3,2) 成分は 8 である．

- 第 2 行は $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. 第 3 列は $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ である.

例 **3.** 行列 $A = (2)$ とすると, A は 1 行 1 列の行列 $(1 \times 1$ 行列$)$ である.

1.1.2 特別な行列

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のように全ての成分が 0 の行列を零(ぜろ)行列という.
- $n \times n$ 行列のことを n 次正方行列という.
- n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  について, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ を A の対角成分という**.**
- 対角成分以外 0 の行列を対角行列という. 例えば以下の行列は対角行列である:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- 対角成分が全て 1 な n 次対角行列を単位行列と言い, E_n とかく. 例えば以下の行列は単位行列である:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 行列 A の行と列を入れ替えた行列を転置行列と言い ${}^tA$ とかく.

例 **4.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ についてその転置行列は ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ であり, ${}^t({}^tA) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$ である.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ についてその転置行列は ${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ であり, ${}^t({}^tA) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A$ である.

命題 **5** (転置行列の性質)**.**

- A が $m \times n$ 行列なら ${}^tA$ は $n \times m$ 行列.

- $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ とし, ${}^tA = [b_{ij}]_{n\times m}$ とするとき, $b_{ij} = a_{ji}$.
- ${}^t({}^tA) = A$.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

をクロネッカーのデルタという.

例 **6.** $\delta_{11} = \delta_{22} = 1, \delta_{12} = \delta_{21} = 0$ である. n 次正方行列 E_n は $E_n = [\delta_{ij}]_{n\times n}$ と略記できる.

1.2 行列の演算 [教科書, 1.2 節]

1.2.1 行列の和と差

定義 **7** (行列の和と差)**.**

$m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ とする.

このとき行列の和 $A + B$ と差 $A - B$ を次で定める.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

例 **8.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする**.**

このとき $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ である.

例 **9.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ とする**.**

このとき $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ である.

例 **10.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ とする**.** このとき $A + B$ は型が違うため定義されない.

命題 11 (行列の和と差の性質)**.** A, B を行列とする.

- $A \pm B = B \pm A$.
- $A \pm O = A$ (ただし O は零行列).
- $(A+B)+C = A+(B+C)$.
- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

1.2.2 行列のスカラー倍

定義 12 (行列のスカラー倍)**.**
$m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ とし, c を数とする (c をスカラーとも呼ぶ).
A の c 倍 cA を次で定める.

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}.$$

例 13. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $c = 3$ とする．このとき $cA = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 24 \\ 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$ である.

例 14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $c = -1$ とする．このとき $cA = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ である.

命題 15 (行列のスカラー倍の性質)**.** A を行列, a, b を数とする.

- $0A = O$ (ただし O は零行列).
- $1A = A$.
- $(-1)A$ を $-A$ と書くことにすると, $A + (-A) = O$.
- $(ab)A = a(bA)$.

1.2.3 行列の積

定義 16 (行列の積)**.** $m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ と $n \times l$ 行列 $B = [b_{jk}]_{n \times l}$ とする．このとき A と B の積 AB は $m \times l$ 行列で, 次の式で定義される.

$$AB = [c_{ik}]_{m \times l}\text{としたとき, } c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

例 **17.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする.

A は 1×3 行列で B は 3×1 行列なので, 行列の積 AB が 1×1 行列として定義でき,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 14 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \end{pmatrix}.$$

例 **18.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

A は 2×2 行列で B は 2×1 行列なので, 行列の積 AB が 2×1 行列として定義でき,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5 + 2 \times 1 \\ 4 \times 5 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

例 **19.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

A は 2×2 行列で B は 2×2 行列なので, 行列の積 AB が 2×2 行列として定義でき,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 2 & 2 \times 2 + 3 \times 3 \\ 1 \times 5 + 4 \times 2 & 1 \times 2 + 4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}.$$

また B は 2×2 行列で A は 2×2 行列なので, 行列の積 BA が 2×2 行列として定義でき,

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}.$$

よって行列の積に関して $AB = BA$ とは限らない ($AB \neq BA$ となることがある).

例 **20.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ とする.

A は 2×3 行列で B は 1×4 行列であるので, 行列の積 AB は定義されない.

問題 **21.** 次の行列 A, B, C, D のうち, 積が定義される全ての組み合わせを求め, その積を計算せよ.(この問題は授業で取り扱い, 答えを板書に書きます.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

命題 **22** (行列の積の性質)**.** A, B, C を行列とする.

- $AO = O = OA$ (ただし O は零行列).
- $AE_n = E_nA = A$ (ただし E_n は単位行列).

- $(AB)C = A(BC)$.
- ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

- A を n 次正方行列とするとき $A^m = \underbrace{A\cdots A}_{m\text{ 個}}$ とする
- $A^m = O$ となる行列を冪零(べきぜろ)行列という.

命題 23 (行列の演算の性質)**.** A, B, C を行列とし, a, b を数とする.

- $a(AB) = (aA)B$.
- $a(A+B) = aA + aB$.
- $(a+b)A = aA + bA$.
- $A(B+C) = AB + AC$.
- $(A+B)C = AC + BC$.

問題 24. 次の行列の計算を行え.(この問題は授業で取り扱い, 答えを板書に書きます.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

1.3 行列の分割 [教科書, 1.3 節]

行列をいくつかの行列に分割して書くことがある. 例えば

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

と言うふうに書くことである. 特に行ベクトル, 列ベクトルでこの表記をすることが多い.

例 25. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix}$. ここで $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は次で定義する.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

例 **26.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix}$. ここで $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は次で定義する.

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4 行列と連立 1 次方程式 [教科書, 1.4 節]

1.4.1 係数行列・拡大係数行列

定義 27 (係数行列, 拡大係数行列)**.** m 個の式からなる n 変数連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \text{に対して}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{とおく.}$$

行列 A を連立 1 次方程式の係数行列といい,

$$[A : \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{を連立 1 次方程式の拡大係数行列という.}$$

これにより上の連立 1 次方程式は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とかける.

例 **28.** 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 7 \\ x & - & 4y & = & 9 \end{cases}$ について, 係数行列は $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ で, 拡大係数行列は $[A : \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ である.

例 **29.** 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 7 \\ x_1 & & & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 9x_3 & & & = & 0 \end{cases}$ について,

係数行列は $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ で, 拡大係数行列は $[A : \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

1.4.2　数ベクトルの 1 次結合

定義 30 (1 次結合)**.** 列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ について, 数 $c_1, \ldots, c_n$ を用いて

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$$

と表されるものを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の 1 次結合と呼ぶ.

例 31. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の 1 次結合で表すことを考える．このときある数 c_1, c_2 があって $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ とかける．これを書き直すと

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる．これを解くと $c_1 = \frac{3}{4}, c_2 = -\frac{1}{4}$ である．よって

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と 1 次結合で表される.

注意 32. m 個の式からなる n 変数連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

に対し $\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ とおけば上の連立 1 次方程式は $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$ となる.

2　連立 1 次方程式 [教科書, 2 章]

2.1　基本変形 [教科書, 2.1 節]

定義 33 (行列の基本変形)**.** 行列の次の 3 つの変形を基本変形という.

1. 1 つの行を何倍か ($\neq 0$ 倍) する.
2. 2 つの行を入れ替える.
3. 1 つの行に他の行の何倍かを加える.

拡大係数行列の基本変形を行うことで連立 1 次方程式が解ける.

例 34. 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$ を考える．これを拡大係数行列の基本変形と式変形で解いてみて, その対応を表すと下の通りとなる.[3]

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{①}+\text{③}\times(-2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow{\text{①}+\text{③}\times(-2)} \begin{cases} y + z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{②}+\text{③}\times 1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow{\text{②}+\text{③}\times 1} \begin{cases} y + z = 1 \\ 3y + z = -1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{③と①を入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow{\text{③と①を入れ替え}} \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 3y + z = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{②と③を入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow{\text{②と③を入れ替え}} \begin{cases} x + y - z = -2 \\ y + z = 1 \\ 3y + z = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{③}+\text{②}\times(-3)]{\text{①}+\text{②}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow[\text{③}+\text{②}\times(-3)]{\text{①}+\text{②}\times(-1)} \begin{cases} x - 2z = -3 \\ y + z = 1 \\ -2z = -4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{③}\times(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow{\text{③}\times(-\frac{1}{2})} \begin{cases} x - 2z = -3 \\ y + z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{②}+\text{③}\times(-1)]{\text{①}+\text{③}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow[\text{②}+\text{③}\times(-1)]{\text{①}+\text{③}\times 2} \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

以上より解は $x = 1, y = -1, z = 2$ である.

注意 35. 今回わかりやすさのため 基本変形に $\xrightarrow{\text{①}+\text{②}\times(-1)\text{ と }\text{③}+\text{②}\times(-3)}$ と説明を書いたが, 試験などではこのことを書かなくて良い. また基本変形をする際に $=$ を使う人がいるが, $\to$ を用いた方が良い.

[3]途中で現れる「① + ③ × (−2)」は「行列の 1 行目に 3 行目の (−2) 倍を加える」あるいは「1 行目の式に 3 行目の式の (−2) 倍を加える」を意味している (一応教科書に従った記法である).

問題 **36.** 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & -2 \end{cases}$ を解け.(この問題は授業で取り扱い, 答えを板書に書きます.)

2.2 簡約な行列 [教科書, 2.2 節]

定義 37 (主成分)**.** 行列において, それぞれの行の最初に現れる 0 でない成分を主成分という.

例 **38.**

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \color{red}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

の主成分は赤色のものである.

定義 39 (簡約行列 教科書版)**.** 行列 A が次の 4 つの条件を満たすとき, A を<u>簡約な行列</u>という.

1. 行ベクトルのうちに零ベクトル (全ての成分が 0 である行) があれば, それは零ベクトルでないものよりも下にある.
2. 零ベクトルでない行ベクトルの主成分は 1 である.
3. 第 i 行の主成分を a_{ij_i} とすると, $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ となる. すなわち各行の主成分は下の行ほど右にある.
4. 各行の主成分を含む列の他の成分は全て 0 である. すなわち第 i 行の主成分が a_{ij_i} であるならば, 第 j_i 列の a_{ij_i} 以外の成分は全て 0 である.

ちょっとわかりにくいので厳密さを落として要約すると次の通りである.

定義 40 (簡約行列の要約版)**.** 行列 A が次の 4 つの条件を満たすとき, A を<u>簡約行列</u>という.

1. 全ての成分が 0 である行は 0 以外の値を含む行より下側にある.
2. 主成分は全て 1.
3. 右側の列に行くほど, 主成分は下側にある.
4. 主成分を持つ列は, その主成分を除く全てが 0.

例 **41.** 以下の行列は全て簡約な行列である.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 **42.** 次に簡約ではない行列の例を理由とともに挙げる.

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 1 番目の条件が満たされていないので簡約ではない.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ は 2 番目の条件が満たされていないので簡約ではない.
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は 3 番目の条件が満たされていないので簡約ではない.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 4 番目の条件が満たされていないので簡約ではない.

定理 43 (簡約化)**.** 任意の行列 A は基本変形を繰り返して簡約行列 B を得ることができる. またそのような簡約行列 B は一意に定まる. このように基本変形を繰り返して簡約行列を得ることをA を簡約化するといい, 得られた簡約行列 B をA の簡約化という.

定義 44 (階数 (ランク))**.** A を行列とし, B を A の簡約化とする. $\mathrm{rank}(A)$ を B の零ベクトルでない行の個数としA の階数 (ランク)と呼ぶ.

命題 45. A を $m \times n$ 行列とする. このとき $\mathrm{rank}(A)$ は簡約化の仕方によらずに定まる数であり, $\mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$ である.

例 **46.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると, これは簡約な行列であり零ベクトルでない行の個数は 2 個である. よって $\mathrm{rank}(A) = 2$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とすると, これは簡約な行列であり零ベクトルでない行の個数は 3 個である. よって $\mathrm{rank}(B) = 3$.

例 **47.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を基本変形で簡約化すると次のとおりである.[4]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{①+②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

よってこの行列の階数 (ランク) は 2 である.

[4]第 4 回授業資料と同じで「② + ① × (−1)」は「行列の 2 行目に 1 行目の (-1) 倍を加える」を意味している.

例 **48.** $\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$ を基本変形で簡約化すると次のとおりである.

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{②+①\times(-2)}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-3&-2\\0&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{③+②\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-3&-2\\0&0&4&2\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{③\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-3&-2\\0&0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[②+③\times\frac{3}{2}]{①+③\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{③\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

よってこの行列の階数 (ランク) は 3 である.

問題 **49.** $\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-2\\0&1&1&0&1\\-1&0&1&1&1\\2&1&-1&0&-3\end{pmatrix}$ を簡約化し, その階数を求めよ.(この問題は授業で取り扱い, 答えを板書に書きます.)

2.3 連立 1 次方程式をとく [教科書, 2.3 節]

定理 50. 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}([A:\boldsymbol{b}])=\mathrm{rank}(A)$.

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解きかた (掃き出し法・ガウスの消去法).

手順 1. 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ から拡大係数行列 $[A:\boldsymbol{b}]$ を作る.

手順 2. 拡大係数行列 $[A:\boldsymbol{b}]$ を基本変形で簡約化する.

手順 3. その簡約化された行列のデータから連立方程式を書き下し, 一般解を求める.

例 **51.** 連立 1 次方程式 $\begin{cases}x_1&+&2x_2&=&2\\x_1&+&4x_2&=&4\end{cases}$ を解け.

(解). 連立方程式の拡大係数行列は $[A:\boldsymbol{b}]=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\end{pmatrix}$ である. これを簡約化すると $\begin{pmatrix}1&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ となる. よってこれより $\begin{cases}x_1&+&2x_2&=&2\\0x_1&+&0x_2&=&0\end{cases}$ である.

以上より解は $\begin{cases}x_1&=&2-2c_2\\x_2&=&c_2\end{cases}$ (c_2 は任意定数) となる.

解の書き方として $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$ と書くこともある.

例 **52.** 連立 1 次方程式 $\begin{cases}x_1&+&2x_2&=&2\\x_1&+&4x_2&=&5\end{cases}$ を解け.

(解). 連立方程式の拡大係数行列は $[A \ : \ \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ である. これを簡約化すると $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる. よってこれより $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 1 \end{cases}$ である. 以上より解は存在しない.

例 53. 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$ を解け.

(解). 拡大係数行列は $[A : \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ である. これを基本変形で簡約化すると $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる. これをもう一回式に書き下すと

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$ である.

以上より解は $\begin{cases} x_1 = 2 + 2c_2 - 3c_4 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = -1 + c_4 \\ x_4 = c_4 \\ x_5 = 1 \end{cases}$ $(c_2, c_4$ は任意定数) となる.

解の書き方として $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ と書くこともある.

問題 54. 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 + x_5 = -6 \end{cases}$ を解け.(この問題は授業で取り扱い, 答えを板書に書きます.)

補足 55. 実際に連立 1 次方程式をプログラミングで解くときも, 掃き出し法・ガウスの消去法によって解きます. 実際に c++で書いたソースコードを以下のホームページで見ることができます.[5]

- Gauss-Jordan の掃き出し法と、連立 1 次方程式の解き方
  `https://drken1215.hatenablog.com/entry/2019/03/20/202800`

[5]簡約化の証明をする際にもこのホームページを参考にさせていただきました.

2.4 正則行列 [教科書, 2.4 節]

2.4.1 逆行列

定義 56. A を n 次正方行列とする. ある行列 B があって

$$AB = BA = E_n$$

となるとき<u>B を A の逆行列</u>といい $B = A^{-1}$ とかく.
行列 A が逆行列 A^{-1} を持つとき, A は<u>正則行列</u>という (<u>A は正則である</u>ともいう).

例 57. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.
実際 $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である. 特に A は正則行列である.

例 58. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $ad - bc \neq 0$ ならば, A は逆行列を持ち

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{である.}$$

特に A は正則行列である.

例 59. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は逆行列を持たない. 特に A は正則行列ではない.

定理 60. A を n 次正方行列とするとき, 以下は同値.

1. $\mathrm{rank}(A) = n$
2. A の簡約化は E_n である.
3. 任意の n 次列ベクトル $\boldsymbol{b}$ について, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ一つの解をもつ.
4. $A\boldsymbol{x} = 0$ の解は $\boldsymbol{x} = 0$ に限る.
5. A は正則行列.
6. A の行列式 $\det(A)$ は 0 ではない (行列式に関しては 3 章にて扱う).

2.4.2 掃き出し法を使った逆行列の求め方

定理 61. A を n 次正方行列とし, $n \times 2n$ 行列 $[A : E_n]$ の簡約化が $[E_n : B]$ となるとする. このとき A は正則行列で, B は A の逆行列である.

この定理により掃き出し法を用いて逆行列を得ることができる.

例 62. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(解). $[A:E_3]=\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\2&3&1&0&1&0\\1&2&2&0&0&1\end{pmatrix}$ を基本変形を用いて簡約化すると,
$\begin{pmatrix}1&0&0&-4&2&1\\0&1&0&3&-1&-1\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}$ となる. よって A の逆行列は $\begin{pmatrix}-4&2&1\\3&-1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$ である.

問題 63. $\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-1&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ. (この問題は授業で取り扱い, 答えを板書に書きます.)

3　行列式 [教科書, 3 章]

3.1　置換 [教科書, 3.1 節]

定義 64.

- $\{1,\dots,n\}$ から $\{1,\dots,n\}$ への 1 対 1 写像を<u>置換</u>と言い σ で表す. つまり置換 σ とは $k_1,\dots,k_n$ を 1 から n の並び替えとして, 1 を k_1 に, 2 を k_2 に, $\cdots$, n を k_n にと変化させる規則のことである.
- 上の置換 σ を
$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}$$
とかき, $\sigma(1)=k_1,\sigma(2)=k_2,\dots,\sigma(n)=k_n$ とする.

例 65. 置換 σ を $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$ とする. これは「1 を 3 に, 2 を 1 に, 3 を 4 に, 4 を 2 にと変化させる規則」である. $\sigma(1)=3,\sigma(2)=1,\sigma(3)=4,\sigma(4)=2$ である.

例 66. 置換 σ を $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ とする. これは「1 を 2 に, 2 を 1 に, 3 を 3 にと変化させる規則」である. $\sigma(1)=2,\sigma(2)=1,\sigma(3)=3$ である.

この置換は 3 に関しては何も変化させていないので $\sigma=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ ともかく.

定義 67. 置換 σ,τ について, その積 $\sigma\tau$ を $\sigma(\tau(i))$ で定める.

例 68. 置換 σ,τ を $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$ $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{array}{ccccc}\sigma(\tau(1))&=&\sigma(2)&=&3\\\sigma(\tau(2))&=&\sigma(3)&=&1\\\sigma(\tau(3))&=&\sigma(4)&=&2\\\sigma(\tau(4))&=&\sigma(1)&=&4\end{array}$$
であるので, $\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$ である.

定義 69.

- $\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を単位置換という.
- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ について, $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ をσ の逆置換と言い σ^{-1} で表す.

例 **70.** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ である.

定義 71. $\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_l \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_1 \end{pmatrix}$ となる置換 σ を巡回置換と言い $\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_l \end{pmatrix}$ と表す.
特に $\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix}$ となる巡回置換を互換と言い $\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ と表す.

定理 72. 任意の置換 σ は互換の積 $\tau_1 \cdots \tau_l$ で表わすことができ, l の偶奇は σ によってのみ定まる.

定義 73. 置換 σ が互換の積 $\tau_1 \cdots \tau_l$ で表せられているとする.

- $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^l$ とし, これをσ の符号と呼ぶ.
- $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ なる置換 σ を偶置換といい, $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ なる置換 σ を奇置換という.

例 **74.** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ を互換の積で表し, その符号を求めよ.

(解). $1 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 2 \xrightarrow{\sigma} 1$ と変化し, $3 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 3$ と変化するので,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

さらに $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix}$ であるので,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix}$$

となり, $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^5 = -1$ である.

命題 75. 置換 σ, τ について, $\mathrm{sgn}(\epsilon) = 1$, $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$, $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$ が成り立つ (ただし ϵ は単位置換とする).

定義 76. S_n を n 文字置換の集合とし, A_n を n 文字置換の集合とする.

専門用語で S_n は対称群と言い, A_n は交代群と言う.

命題 77.

- S_n の個数は $n!$ 個である.
- 偶置換と奇置換の個数は同じである.
- A_n の個数は $\frac{n!}{2}$ 個である.
- $\sigma, \tau \in A_n$ ならば $\sigma\tau \in A_n$

3.2 行列式の定義と性質 1. [教科書, 3.2]

3.2.1 行列式の定義

定義 78. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ について

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$ を<u>A の行列式</u>と言う.

A の行列式は $\det(A)$, $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ともかく.

例 79. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とすると $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ である.

(証). $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ であるので, A の行列式は

$$\det(A) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

例 80. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式を求める.

$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ であるので, A の行列式は

$$\det(A) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_{12}a_{21}a_{33} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$+\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}a_{13}a_{22}a_{31}+\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}a_{12}a_{23}a_{31}+\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

以上より $\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$ である.

補足 81. 2 次正方行列や 3 次正方行列の行列式は視覚的に綺麗に表わすことができる (サラスの公式と呼ばれる).

3.2.2 行列式の計算方法

定理 82. A,B を n 次正方行列とする.

1. $$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

2. $$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n-1}&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n-1}&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\cdots&a_{3n-1}&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&&\ddots&a_{n-1n-1}&a_{n-1n}\\0&0&\cdots&\cdots&0&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. $$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{i1}+c_{i1}&\cdots&b_{in}+c_{in}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{i1}&\cdots&b_{in}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\c_{i1}&\cdots&c_{in}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

定理 83. A を n 次正方行列とする.

1. 1 つの行を c 倍すると行列式は c 倍される: $$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\ca_{i1}&\cdots&ca_{in}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=c\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{i1}&\cdots&a_{in}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

2. 2 つの行を入れ替えたら, 行列式は -1 倍される:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. 第 i 行の c 倍を第 j 行に加えても行列式は変わらない:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + ca_{i1} & \cdots & a_{jn} + ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

特に上の定理から基本変形を用いれば行列式を簡単に計算できる.

例 84. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式は次のように求められる.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 83.(3)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 82.(1)}}{=} 1 \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 83.(1)}}{=} 11 \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{例 79}}{=} 11 \{1 \times 1 - 15 \times 1\} = -154.$$

例 85. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の行列式は次のように求められる.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 83.(2)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 2 & -4 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 83.(3)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -47 \\ 0 & 0 & -1 & 19 \\ 0 & -1 & 4 & 21 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{定理 82.(1)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ -1 & 4 & 21 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 83.(3)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ 0 & 6 & -26 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 82.(1)}}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 19 \\ 6 & -26 \end{vmatrix}$$

$\overset{例 79}{=} (-1)\{(-1)\times(-26) - 6\times 19\} = 88.$

問題 86. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -6 & 15 \\ -2 & 5 & 14 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 15 & 10 & 10 & -5 \end{vmatrix}$ を計算せよ.(この問題は授業で取り扱い, 答えを板書に書きます.)

3.3 行列式の定義と性質 2. [教科書, 3.3]

一部の内容について, 教科書通りの証明をせず齋藤正彦著 線型代数学 (東京図書) の第 3 章を参考にした.

命題 87. $a_1, \dots, a_n$ を行ベクトルとし, n 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ とする.

1. τ を n 次の置換とすると

$$\det \begin{pmatrix} a_{\tau(1)} \\ \vdots \\ a_{\tau(n)} \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}(\tau) \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}(\tau) \det(A). \quad (交代性)$$

2. b_i, c_i を行ベクトルとし, α, β を数とすると,

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \alpha b_i + \beta c_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (多重線型性)$$

定理 88. 行ベクトル $x_1, \dots, x_n$ について, 数 $F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を対応させる関数 F を考える. この F が交代性と多重線型性を満たすとき,

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

ここで $f_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \overset{i}{\hat{1}} & \dots & 0 \end{pmatrix}$ という行ベクトルとする.
特に行列 A に対して数 $F(A)$ を対応させる関数が, 行に関して交代性と多重線型性を満たすとき $F(A) = F(E_n)\det(A)$ となる.

定理 89. A, B を n 次正方行列とする.

1. $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$.
2. $\det(AB) = (\det(A))(\det(B)) = \det(BA)$.

定理 90. A, B を n 次正方行列とする.

1. $\det(A) \neq 0$ であることと A が正則であることは同値.
2. $AB = E_n$ ならば, A は正則で B は A の逆行列である.

3.4 余因子行列とクラメルの公式 [教科書, 3.4 節]

3.4.1 余因子行列

定義 91. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の i 行と j 列を取り除いた $n-1$ 次正方行列を $\tilde{A}_{ij}$ とかく (この授業だけの記法). つまり

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{とする.}$$

例 92. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のとき, $\tilde{A}_{11} = (a_{22})$, $\tilde{A}_{12} = (a_{21})$, $\tilde{A}_{21} = (a_{12})$, $\tilde{A}_{22} = (a_{11})$.

例 93. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ のとき, $\tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\tilde{A}_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

定義 94. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ について, $\tilde{A} = (b_{ij})$ を $\underline{b_{ij} = (-1)^{i+j}\det\left(\tilde{A}_{ji}\right)}$ で定める.
$\underline{\tilde{A}\text{ を }A\text{ の余因子行列}}$という.

例 95. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のときの余因子行列 $\tilde{A}$ を求める. $\tilde{A}_{11} = (a_{22})$, $\tilde{A}_{12} = (a_{21})$, $\tilde{A}_{21} = (a_{12})$, $\tilde{A}_{22} = (a_{11})$ より次が成り立つ.

- $\tilde{A}$ の $(1,1)$ 成分は $(-1)^{1+1}\det\left(\tilde{A}_{11}\right) = a_{22}$.
- $\tilde{A}$ の $(1,2)$ 成分は $(-1)^{1+2}\det\left(\tilde{A}_{21}\right) = -a_{12}$.
- $\tilde{A}$ の $(2,1)$ 成分は $(-1)^{2+1}\det\left(\tilde{A}_{12}\right) = -a_{21}$.
- $\tilde{A}$ の $(2,2)$ 成分は $(-1)^{2+2}\det\left(\tilde{A}_{22}\right) = a_{11}$.

以上より余因子行列 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ となる.

定理 96. A を n 次正方行列とする.

1. 任意の $1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq n$ なる i, j について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+j}a_{1j}\det\left(\tilde{A}_{1j}\right) + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}\det\left(\tilde{A}_{nj}\right) \\ &= (-1)^{i+1}a_{i1}\det\left(\tilde{A}_{i1}\right) + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}\det\left(\tilde{A}_{in}\right).\end{aligned}$$

   これを余因子展開という.

2. $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)E_n$. 特に $\det(A) \neq 0$ ならば $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$.

例 97. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(A)$ を余因子展開で求める.

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+1}a_{11}\det\left(\tilde{A}_{11}\right) + (-1)^{2+1}a_{21}\det\left(\tilde{A}_{21}\right) + (-1)^{3+1}a_{31}\det\left(\tilde{A}_{31}\right) + (-1)^{4+1}a_{41}\det\left(\tilde{A}_{41}\right) \\ &= 2\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 3\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \times 7\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (2 \times 3 - 5 \times 7) \times (9 \times 1 - 4 \times (-2)) = -493.\end{aligned}$$

例 98. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, $\det A = ad - bc \neq 0$ ならば A は正則であり, 例 95 から

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

問題 99. 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$ を計算せよ. (この問題は授業で取り扱い, 答えを板書に書きます.)

3.4.2 クラメルの公式

定理 100. A を正則な n 次正方行列とし, 列ベクトル $a_1, \ldots, a_n$ を用いて $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ と表されているとする. このとき連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は次のようになる.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \boldsymbol{b} & \cdots & a_n \end{pmatrix}}{\det A}.$$

例 101. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする. 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると,

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & a_2 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{7}, \ x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{7} \text{となる.}$$

3.5 特殊な形の行列式 [教科書, 3.5 節]

定理 102.

1. (ヴァンデルモンドの行列式)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i).$$

2. (ヴァンデルモンドの行列式の応用) $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ を実数とし, $b_1, \ldots, b_n$ は相異なると仮定する. このとき実数係数の n 次式 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ があって, 任意の $i = 1, \ldots, n$ について $f(b_i) = c_i$ となる.

$\prod_{1 \leqq i < j \leqq n}$ は積の記号で, $\prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i)$ は「$1 \leqq i < j \leqq n$ を満たす (i, j) について $(x_j - x_i)$ を全てかけた数」を表している.

定理 103.

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

References

[教科書] 三宅敏恒, ”線形代数学　初歩からジョルダン標準形へ”, 培風館.