2024年度秋冬学期 大阪大学 理学部数学科
幾何学1演義 演習問題

岩井雅崇 (大阪大学)

2023年10月4日　ver 1.00

Contents

0　ガイダンス

2024年度秋冬学期 大阪大学 理学部数学科
幾何学1 演義
金曜4限 (15:10-16:40) 理学部 E310

岩井雅崇 (いわいまさたか)

基本的事項

- この授業は対面授業です. 金曜4限 (15:10-16:40) に理学部 E310にて演習の授業を行います.
- 基本的には講義の授業とセットで受講してください. 演義の授業のみ受講する場合は10月4日の授業後に申し出ること.
- 授業ホームページ (`https://masataka123.github.io/2024_winter_geometry1/`) にて授業の問題等をアップロードしていきます. QRコードは下にあります.

成績に関して

次の1と2を満たしているものに単位を与えます.

1. 幾何学1の講義の単位が可以上である.
2. 最終授業終了時までに0.1点以上の演習点 (後述) を獲得していること.

成績は演習点でつける予定ですが, 場合によっては講義の成績も参考にします.[1]

演習点に関して

演習点を稼ぐには次の方法があります.

1. レポートを提出する.
2. 配布した演習問題を解き, その解答を黒板を用いて発表する. その場合の演習点は「解いた問題の難易度」と「発表の仕方・解答の方法」などから定まります.

なお2の方が演習点は高めに設定しております.

1. レポートに関して

おそらく中間レポートと期末レポートを出します. レポート問題は演習問題の$^\bullet$がついてる問題 (後述) の内容から出す予定です.

[1]理由としては成績がばらけるかどうかが, 現時点では予測が不可能だからです.

2. 黒板を用いた発表に関して

発表のルールは次のとおりです.

- 問題の解答を黒板に書いて発表してください. 正答だった場合その問題はそれ以降解答できなくなります.
- 授業が始まる前にある程度演習問題をあらかじめ解き発表できる状態にしておいてください.
- 複数人が解答したい問題があるときは平和的な手段で解答者を決めます.(例えば問題解答数が少ない人を優先する, トランプで決めるなどです.)
- 発表方法があまりにも悪い場合 (教科書丸写しなど) は減点します.

演習問題に関する注意点

- 演習問題は適当に出しているので, 全部解く必要はないです. 解けない問題も多くあります.
- 演習問題の難易度は一定ではないです. 問題番号の上に $^\bullet$ や * などの記号が書いてありますがこれは次を意味します.
  1. $^\bullet$ がついてる問題は解けないといけない問題です.
  2. 何もついてない問題は普通の問題です. ちょっと考えれば解ける範疇に収まっている (はずです).
  3. * 問題や ** 問題は難しそうな問題です. ちょっと難しい問題から激ムズの問題まであります. 私や TA が解けない問題もあります. 基本的に解かせる気はなく自由気ままに出しております.

  難易度が高い問題を解いた場合や解答が素晴らしい場合は演習点を多くもらえます.

次のご協力をお願いいたします.

- 発表後, スマホ等で黒板にある解答を撮影しても構いません. (ただし黒板のみを撮影してください) 解答者も撮影のご協力お願いします.
- 板書は他人が読めるように, 文字の大きさ・綺麗さ・板書の量に配慮してください. 字は汚くてもいいので, 最低限読めるようにしてください.

まとめ

1. 単位が欲しい方はレポートを提出し, 講義で可以上を取ってください.
2. ちょっと欲張りな人は $^\bullet$ がついている問題や何もついてない問題を発表してください. なお $^\bullet$ がついている問題が全て解ければ, 講義の試験の単位は (おそらく) もらえると思います.
3. 意欲のある人は難しい問題など色々解いてください. そのほうが私は楽しいです.

休講予定・その他

- 休講予定: 2024 年 12 月 13 日.(大阪大学で開催する研究集会の世話人のため) [2]
- 問題のミスがあれば私に言ってください. ミスはかなりあると思います.
- 休講情報や演習問題の修正をするので, こまめにホームページを確認してください.
- オフィスアワーを月曜 16:00-17:00 に設けています. この時間に私の研究室に来ても構いません (ただし来る場合は前もって連絡してくれると助かります.)
- TA さんは演義の時間中に巡回しているので, 自由にご質問して構いません.

[2]他にあるとすれば 2024 年 11 月 15 日です. また授業回数が少ない場合は補講をするかもしれません.

1　多様体の復習

岩井雅崇 (いわいまさたか)

定義 1. 位相空間 M の開集合 U から $\mathbb{R}^m$ の開集合 V への同相写像 $\varphi : U \to V$ について (U, φ) を m 次元座標近傍といい, φ を U 上の局所座標系という.
$p \in U$ について, $\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_m)$ とかける. $x_1, \ldots, x_m$ を (U, φ) に関する p の局所座標という. ((U, φ) のことを $(U; x_1, \ldots, x_m)$ と書くこともある.)

定義 2. M をハウスドルフ空間とする. 次の条件が成り立つとき M は m 次元 C^∞ 級多様体と呼ばれる.

1. 座標近傍系 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ があって, $M = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となる.
2. $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ なる $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ は C^∞ 級写像である.

定義 3 (接ベクトル空間)**.** $(U; x_1, \ldots, x_m)$ を p の周りの座標系とする. このとき $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ を p の開近傍で定義された C^∞ 級関数 ξ について実数

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \xi \mapsto \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(p)$$

を対応させるものとする. m 個の $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p$ ではられる $\mathbb{R}$ ベクトル空間を T_pM と表し<u>M の接ベクトル空間</u>と呼ぶ.

補足 4. 多様体の基礎によると T_pM の元を表す方法は他にもある. 今回は簡単な定義に基づいた. つまり $v \in T_pM$ の元はある $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ を用いて

$$v = \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

と書くことができる.[3]

定義 5. M を m 次元 C^∞ 級多様体, N を n 次元 C^∞ 級多様体, $f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする. $p \in M$ をとり $q := f(p) \in N$ とする. $(V, y_1, \ldots, y_n)$ を q の周りの座標系, $(U; x_1, \ldots, x_m)$ を $f(U) \subset V$ となる p の周りの座標系とする. f を $(U; x_1, \ldots, x_m)$ と $(V, y_1, \ldots, y_n)$ によって局所座標表示したものを

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m)$$

[3]接ベクトル空間を「何かよくわからないもの $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ が $\mathbb{R}$ 上ではられるもの」と思うという荒技もある. これはベクトル束の立場から見るとそうなる. 接ベクトル空間の厳密な定義は意外と難しい.

としたとき, $(df)_p : T_p(M) \to T_q(N)$ を次のように定義する.

$$(df)_p : \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mapsto \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q$$

この $(df)_p : T_p(M) \to T_q(N)$ をp における f の微分という.

補足 **6.** 多様体の基礎によると, これ以外の定義もある. また定義 5 において $b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)$ とおき, $n \times m$ 行の行列 $(Jf)_p$ を

$$(Jf)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix} \text{とすれば,} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (Jf)_p \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{が成り立つ.}$$

$(Jf)_p$ をヤコビ行列と呼ぶ.[4]

定義 **7** (埋め込みとはめ込み)**.** $f : M \to N$ を多様体の間の C^∞ 級写像とする.

- f がはめ込みであるとは, 任意の点 $p \in M$ について微分写像 $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が単射であること.
- f が埋め込みであるとは, f がはめ込みであり, $f : M \to f(M)$ が同相であることとする. ここで $f(M)$ には N の相対位相を入れる. このとき $f(M)$ は N の部分多様体であることが知られている.

定理 **8.** [多様体の基礎 定理 15-1]
$f : M \to N$ を多様体の間の C^∞ 級写像とする. さらに $q \in N$ を正則値であると仮定する. $f^{-1}(q) \neq \varnothing$ ならば, $f^{-1}(q)$ は $\dim M - \dim N$ 次元の C^∞ 級部分多様体である.
ここで $q \in N$ が $f : M \to N$ の正則値であるとは, 任意の $p \in f^{-1}(q)$ について, 微分写像

$$(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$$

が全射であることとする.

問 1.1 • $S^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ とおく. S^n の座標近傍系を具体的に構成することにより, S^n は n 次元の C^∞ 級多様体となることを示せ. [5]

問 1.2 • $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ となる C^∞ 級写像で $f^{-1}(1) = S^n$ かつ $1 \in \mathbb{R}$ が f の正則値であるようなものを一つ求めよ. またこれを用いて S^n は n 次元の C^∞ 級多様体であることを示せ.

問 1.3 • $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について, 同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Leftrightarrow 0 \text{ でない実数 } \alpha \text{ が存在して } x = \alpha y$$

[4] これは座標系 $(U; x_1, \ldots, x_m), (V, y_1, \ldots, y_n)$ に依存する.

[5] $2n+2$ 個の座標近傍系で作る方法と, 2 個の座標近傍系で作る方法がある. 前者の方が簡単である. なお座標近傍系 $(U\varphi)$ に関して φ が同相であることは示さなくても良い.

と定義する．$\mathbb{RP}^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ と書き実射影空間と呼ぶ．以下 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ を $\mathbb{RP}^n$ の元とみなしたものを $(x_1 : \cdots : x_{n+1})$ と書き実同次座標と呼ぶ.

$U_i = \{(x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1}) | x_i \neq 0\}$ とおき,

$$\begin{array}{cccc} \varphi_i : & U_i & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1}) & \longmapsto & (\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}) \end{array}$$

と定める．$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ は座標近傍系となることを示し, $\mathbb{RP}^n$ は n 次元の C^∞ 級多様体であることを示せ．ただし $\mathbb{RP}^n$ がハウスドルフ空間および φ_i が同相写像であることは認めて良い.

問 1.4 • $M(n, \mathbb{R})$ を $n \times n$ 行列の全体の集合とする．$M(n, \mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視する．特に $M(n, \mathbb{R})$ が n^2 次元 C^∞ 級多様体となる．次の問いに答えよ.

(a) $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し, その次元を求めよ.

(b) $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) | \det A = 1\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し, その次元を求めよ.

問 1.5 • $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{R}$ を

$$f([x_1 : \cdots : x_{n+1}]) = \frac{x_1^2}{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2}$$

とおく．次の問いに答えよ.

(a) f が well-defined な C^∞ 級写像であることを示せ.

(b) $(df)_p$ が消える $p \in \mathbb{RP}^n$ の点を全て求めよ．(ヒント: 問 1.3 における座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ について, $f \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ のヤコビ行列を計算せよ．)

(c) f の最大値・最小値を求めよ

問 1.6

$$\begin{array}{cccc} f : & S^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y, z, w) & \longmapsto & xy - zw \end{array}$$

とおく．$f^{-1}(0)$ は S^3 の部分多様体であることをしめせ．(ヒント: 問 1.1 の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ を用いて, $f \circ \varphi_i^{-1}$ のヤコビ行列を計算する．)

問 1.7 (多様体の基礎 11 章) $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ について, 同値関係 $\sim$ を

$$z \sim w \Leftrightarrow 0 \text{ でない複素数 } \alpha \text{ が存在して } z = \alpha w$$

と定義する.$\mathbb{CP}^1 := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\sim$ と書き複素射影空間と呼ぶ．以下 (z, w) を $\mathbb{CP}^1$ の元とみなしたものを $(z : w)$ と書き複素同次座標と呼ぶ．次の問いに答えよ.

(a) $\mathbb{CP}^1$ が (実)2 次元の C^∞ 級多様体であることを示せ．ただし $\mathbb{CP}^1$ がハウスドルフ空間であることは認めて良い.

(b) $i : \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^1$ を $i(z) = (z : 1)$ とすることにより, $\mathbb{C}$ を $\mathbb{CP}^1$ の開部分多様体と見なす. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = z^2 + 1$ とおく．このときある $F : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ となる C^∞ 級写像で $F|_{\mathbb{C}} = f$ となるものがあることを示せ.

問 1.8 (多様体の基礎 15 章) k, n を $1 \leq k \leq n$ となる自然数とし $M_{k,n}$ を実数係数 $k \times n$ 行列全体とする.

$$V_{k,n} = \{A \in M_{k,n} | A({}^tA) = E\}$$

とする. 次の問いにこたえよ.

(a) $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^3$ を次で定める.

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^{2n} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) & \longmapsto & (\sum_{i=1}^n x_i^2, \sum_{i=1}^n y_i^2, \sum_{i=1}^n x_i y_i) \end{array}$$

$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ での f のヤコビ行列を求めよ

(b) $V_{2,n}$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の C^∞ 級部分多様体であることを示し, その次元を求めよ.

(c) $V_{3,n}$ は $\mathbb{R}^{3n}$ の C^∞ 級部分多様体であることを示し, その次元を求めよ.

問 1.9 ** $1 \leqq k < n$ となる自然数について, $A_{k,n}$ を $k \times n$ 実数行列でランクが k となる行列全体の集合とし, $\mathbb{R}^{kn}$ の部分集合とみなすことで $A_{k,n}$ に $\mathbb{R}^{kn}$ の相対位相を入れる. $A_{k,n}$ に同値関係 $\sim$ を

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{正則な } k \times k \text{ 実数行列 } G \text{ が存在して } A = GB$$

と定義する. $G_{k,n} := A_{k,n}/\sim$ と書き実グラスマン多様体と呼ぶ. $G_{n,k}$ は C^∞ 級多様体の構造を持つことを示し, その次元を求めよ. [6]

問 1.10 • M を m 次元コンパクト C^∞ 級多様体とする. C^∞ 級写像 $f : M \to \mathbb{R}^m$ ではめ込みとなるものは存在しないことを示せ. ($m = \dim M$ に注意すること).

問 1.11 • M と N が微分同相であるならば $\dim M = \dim N$ を示せ.

問 1.12 • $f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とする.

(a) $p \in M$ において $(df)_p \neq 0$ ならば, ある C^∞ 級写像 $c : (-1, 1) \to M$ で $c(0) = p$ かつ $(f \circ c)'(0) > 0$ となるものが存在することを示せ.

(b) M がコンパクトならば $(df)_p = 0$ となる $p \in M$ が存在することを示せ.

問 1.13 * 次の問いに答えよ

(a) $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とする. 任意の $p \in \mathbb{R}^m$ について f のヤコビ行列 $(Jf)_p$ が零行列であるならば, f は定値写像であることを示せ.

(b) M, N を連結な C^∞ 級多様体とし, $f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする. 任意の $p \in M$ について $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が零写像であるならば, f は M を N の一点へ写す定値写像であることを示せ.

問 1.14 * M, N をそれぞれ m 次元, n 次元の C^∞ 多様体とし C^∞ 写像 $f : M \to N$ とする. さらに $m \geq n$, M はコンパクト, N は連結であるとする. 任意の $p \in M$ について $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が全射であるとき f も全射であることを示せ.

[6]難しければ $n = 4, k = 2$ の場合を解答しても良い.

2　$\mathbb{R}^n$ 上の微分形式

岩井雅崇 (いわいまさたか)

定義 9. $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上の k 次微分形式とは,

$$f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

の有限和としてかけるものとする. $f : U \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級関数とする.

補足 10. 厳密には

- $p \in U$ について $(dx_i)_p$ は余接ベクトル空間 $T_p^* U$(接ベクトル空間 $T_p U$ の双対空間) の元
- dx_i は U 上の 1 次微分形式
- $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} f_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ は U 上の k 次微分形式

となる. 厳密な定義は授業や次回の演習にすることにして, 今回の演習では”厳密なことはあんまり考えず”微分形式の計算をできることを目標とする.

以下 k 次微分形式は $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上のものを考えるとする.

定義 11 (微分形式の計算規則)**.**

- $0 dx_1 = 0$. k 次微分形式でも同様.
- $f dx_1 \pm g dx_1 = (f \pm g) dx_1$ k 次微分形式でも同様.
- $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. k 次微分形式においても dx_i と dx_j の順番を入れ替えると, -1 倍される.
- $dx_i \wedge dx_i = 0$. k 次微分形式 ω においても $dx_i \wedge dx_i$ というものがあれば $\omega = 0$ となる.

定義 12 (外積)**.** k 次微分形式 $f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ と l 次微分形式 $\eta = g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$ の外積を

$$(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \wedge (g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}) := fg \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$$

と定義する. 有限和の場合には双線形になるように定義する. つまり下が成り立つ.

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta \quad \omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$$

定義 13 (外微分)**.** k 次微分形式 $f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ について,

$$d\left(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\right) = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

と定義する. 有限和の場合には $\mathbb{R}$ 線形になるように定義する. 特に $k = 0$ のときについては以

下が成り立つ.

$$df = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

定義 14 (引き戻し)**.** $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ を

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & U & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \ldots, x_m) & \longmapsto & (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) \end{array}$$

となる C^∞ 写像とする. $\mathbb{R}^n$ の開集合 V 上の l 次微分形式 $\eta = g dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_l}$ について, η の φ による引き戻し $\varphi^*\eta$ を

$$\varphi^*\eta := (g \circ \varphi) d\varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{j_l} = (g \circ \varphi) \left(\sum_{i_1=1}^{m} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} dx_{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_l=1}^{m} \frac{\partial d y_{j_l}}{\partial x_{i_l}} dx_{i_l} \right)$$

とする. これは M 上の l 次微分形式となる. 有限和の場合には $\mathbb{R}$ 線形になるように定義する.

例 **15.** $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$, $\eta = g_1 dx_1 + g_2 dx_2$, $\varphi(z_1, z_2) = (\varphi_1(z_1, z_2), \varphi_2(z_1, z_2))$ とすると外積, 外微分, 引き戻しはそれぞれ次の通りとなる.

- $\omega \wedge \eta = (f_1 dx_1 + f_2 dx_2) \wedge (g_1 dx_1 + g_2 dx_2) = (f_1 g_2) dx_1 \wedge dx_2 + (f_2 g_1) dx_2 \wedge dx_1 = (f_1 g_2 - f_2 g_1) dx_1 \wedge dx_2$.
- $d\omega = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_2 = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2$.
- $\varphi^*\omega = f_1(\varphi(z)) d\varphi_1 + f_2(\varphi(z)) d\varphi_2 = f_1(\varphi(z)) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2} dz_2 \right) + f_2(\varphi(z)) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} dz_2 \right)$.

命題 16. ω を k 次微分形式, η を l 次微分形式, ζ を s 次微分形式とする. 次が成り立つ.

- $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$, $\omega \wedge (\eta \wedge \zeta) = (\omega \wedge \eta) \wedge \zeta$.
- $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta)$.
- $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$.
- $d(d\omega) = 0$, $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$.

以下の問題に答えよ．ただし関数の定義域などに関しては”うまく”取るものとする．[7]

問 2.1 • $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $g(x, y, z) = xyz$ について, df と dg を求めよ.

問 2.2 • $f(r, \theta) = e^{-r^2} \cos\theta$, $g(x, y, z) = \log\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr)$ について, df と dg を求めよ.

問 2.3 •$(xdx + ydy) \wedge (-xdx + ydy)$ と $(xdx + ydy) \wedge (-ydx + xdy)$ を計算せよ.

問 2.4 • $\omega = \sum_{i=1}^{m} f_i dx_i$, $\eta = \sum_{j=1}^{m} g_j dx_j$ について, $\omega \wedge \eta$ を計算せよ.

問 2.5 • $(xdx + ydy) \wedge (ydy + zdz) \wedge (xdx + zdz)$ を計算せよ.

問 2.6 • $\omega = dz - ydx$, $\eta = \cos zdx + \sin zdy$ について, $d\omega$ と $d\eta$ をそれぞれ求めよ.

問 2.7 • $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ について, $d\omega$ を求めよ.

問 2.8 • n 変数 C^∞ 級関数 f について $d(df) = 0$ を (計算によって) 示せ.

問 2.9 • $\varphi(x, y) = (x^m, y^n)$ とし, $\eta = \frac{1}{x} dx + dy$ とする．$\varphi^*\eta$ を求めよ.

問 2.10 • $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とし, $\eta = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ とする．$\varphi^*\eta$ を求めよ.

問 2.11 • $\varphi(x, y) = (x + y^2, 2y)$ とし, $\eta = dx \wedge dy$ とする．$\varphi^*\eta$ を求めよ.

問 2.12 • $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とし, $\eta = \frac{1}{x^2+y^2} dx \wedge dy$ とする．$\varphi^*\eta$ を求めよ.

問 2.13 $\varphi(\theta, \rho) = (\sin\theta\cos\rho, \sin\theta\sin\rho, \cos\theta)$ とし, $\eta = zdx \wedge dy + ydz \wedge dx + xdy \wedge dz$ とする．$\varphi^*\eta$ を求めよ.

問 2.14 $\varphi(r, \theta, \rho) = (r\sin\theta\cos\rho, r\sin\theta\sin\rho, r\cos\theta)$ とし, $\eta = dx \wedge dy \wedge dz$ とする．$\varphi^*\eta$ を求めよ.

問 2.15 $\mathbb{R}^{2n}$ 上の 2 次微分形式 $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}$ について ω^n を求めよ.

問 2.16 * $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ とし，$f(x, y, z)$ を X 上の C^∞ 級関数で $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ を用いて $f(x, y, z) = h(r)$ とかけているとする．X 上の 1 次微分形式 ω を

$$\omega = f(x, y, z)(xdx + ydy + zdz)$$

とする．次の問いに答えよ.

(a) $d\omega = 0$ を示せ．(このとき ω は閉形式であるという．)

(b) ある C^∞ 級関数 g があって $\omega = dg$ となることを示せ．(このとき ω は完全形式であるという.)

(c) $\Delta\varphi = 0$ となる C^∞ 級関数 φ によって $\omega = d\varphi$ となるとき，f を x, y, z を用いて表せ．ここで

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \text{である.}$$

[7]例えば $\frac{1}{x^2+y^2} dx$ については $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上で考えるものとする.

3　$\mathbb{R}^n$ 上の微分形式の応用問題 -線積分とド・ラーム コホモロジー-

岩井雅崇 (いわいまさたか)

一部の内容は授業の後半の内容も含む. そのため授業の後半でこれらの問題を解いても良い.

定義 17. U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし, $\gamma : [a,b] \to U$ を C^∞ 曲線とする. U 上の 1 次微分形式 $\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ について, ω の γ に沿った線積分を

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt} dt$$

と定義する. ここで $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ であるとする.

定理 18 (ポアンカレの補題 (Poincare の補題))**.** k を 1 以上の整数とする. $\mathbb{R}^n$ 上の k 次微分形式が $d\omega = 0$ ならば, ある $k-1$ 次微分形式 η があって, $\omega = d\eta$ とかける.

補足 19. U 上の微分形式 ω について, 「$\omega = d\eta$ ならば $d\omega = 0$」は常に正しい. しかし逆は成り立たない. またポアンカレの補題は U が星型[8]でも成り立つ.

一足早いがド・ラーム コホモロジーを定義する. (なお授業後半の内容のため, 現時点で理解する必要はない.)

定義 20 (ド・ラーム コホモロジー (de Rham コホモロジー))**.** U を $\mathbb{R}^n$ の開集合, k を 0 以上の整数, ω を k 次微分形式とする.

- $d\omega = 0$ なる微分形式を閉形式という. k 次微分形式で閉形式であるものからなるベクトル空間を $Z^k(U)$ と書く.
- ある $k-1$ 次微分形式 η があって $\omega = d\eta$ とかけるとき, ω は完全形式と呼ばれる. k 次微分形式で完全形式であるものからなるベクトル空間を $B^k(U)$ と書く. このとき $B^k(U) \subset Z^k(U)$ である. つまり完全形式は閉形式である.
- $H^k_{DR}(U) := Z^k(U)/B^k(U)$ とし, U の k 次 de Rham コホモロジーという

ド・ラーム コホモロジーを使うとポアンカレの補題は以下のようにかける.

定理 21 (ポアンカレの補題)**.** 1 以上の整数 k について $H^k_{DR}(\mathbb{R}^n) = 0$.

同様に $\mathbb{R}^n$ の開集合 U が星型ならば, 1 以上の整数 k について $H^k_{DR}(U) = 0$ である.

[8] U が星型であるとは, ある点 $p \in U$ があって, 任意の点 x と任意の $t \in [0,1]$ について $(1-t)p + tx \in U$ が成り立つこと. 例えば開円板は星型だが, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ は星型ではない.

問 3.1 • $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ を $\gamma(t) = (t^2, t)$ とする．線積分 $\int_\gamma xdx - ydy$ を計算せよ．

問 3.2 • U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，f を U 上の C^∞ 級関数とする．$\gamma : [a,b] \to U$ なる C^∞ 曲線に関して，

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

であることを示せ．

問 3.3 • $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の 1 次微分形式

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

について次の問いに答えよ．

(a) $d\omega = 0$ を示せ．つまり ω は閉形式である．

(b) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ を $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ とする．線積分 $\int_\gamma \omega$ を計算せよ．

(c) $\omega = dg$ となる C^∞ 級関数は存在しないことを示せ．つまり ω は完全形式ではない．

問 3.4 $\mathbb{R}^3$ の関数 (スカラー場)$F(x,y,z)$ とベクトル場 $\mathbf{V}(x,y,z) = (V_1(x,y,z), V_2(x,y,z), V_3(x,y,z))$ について，

$$\mathrm{grad}(F) = \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \quad \mathrm{div}(\mathbf{V}) = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{V}) = \nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}, \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)$$

と定義する．次の問いに答えよ．[9]

(a) 下の図式が可換になるように Φ_1, Φ_2, Φ_3 をうまく定義せよ．

$$\begin{tikzcd}
\{\text{関数 (スカラー場)}\} \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, equal] & \{\text{ベクトル場}\} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "\Phi_1"] & \{\text{ベクトル場}\} \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\Phi_2"] & \{\text{関数 (スカラー場)}\} \arrow[d, "\Phi_3"] \\
\{\text{関数 (0 次微分形式)}\} \arrow[r, "d"] & \{\text{1 次微分形式}\} \arrow[r, "d"] & \{\text{2 次微分形式}\} \arrow[r, "d"] & \{\text{3 次微分形式}\}
\end{tikzcd}$$

(b) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(F)) = 0$ と $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\mathbf{V}) = 0$ をそれぞれ示せ．

(c) $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\mathbf{V}$ について，$\mathrm{rot}\mathbf{V} \equiv 0$ であることは $\mathbf{V} = \mathrm{grad}\phi$ なるスカラー場 (スカラー・ポテンシャル)ϕ が存在することと同値であることを示せ．[10]

[9] この問題は「$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル解析が微分形式によって再解釈される」ことを確かめる問題である．そのため数学的な記述は少々曖昧であるのでご了承いただきたい．

[10] ヒント: ポアンカレの補題．同様に $\mathrm{div}\mathbf{V} \equiv 0$ であることは $\mathbf{V} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ なるベクトル場 (ベクトル・ポテンシャル)$\mathbf{A}$ が存在することと同値であることがわかる．

問 3.5 [Tu. Problem 19.13] 次を英訳し問題に解答せよ.

In Maxwell's theory of electricity and magnetism, developed in the late nineteenth century, the electric field $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ and the magnetic field $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ in a vacuum $\mathbb{R}^3$ with no charge or current satisfy the following equations:

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \mathrm{div}\mathbf{E} = 0, \mathrm{div}\mathbf{B} = 0.$$

We define the 1-form E on $\mathbb{R}^3$ corresponding to the vector field $\mathbf{E}$ by $E = E_1dx + E_2dy + E_3dz$ and define the 2-form B on $\mathbb{R}^3$ corresponding to the vector field $\mathbf{B}$ by $B = B_1dy \wedge dz + B_2dz \wedge dx + B_3dx \wedge dy$.

Let $\mathbb{R}^4$ be space-time with coordinates (x, y, z, t). Then both E and B can be viewed as differential forms on $\mathbb{R}^4$. Define F to be the 2-form

$$F = E \wedge dt + B$$

on space-time. Decide which two of Maxwell's equations are equivalent to the equation $dF = 0$. Prove your answer. [11]

問 3.6 以下は $\mathbb{R}^2$ における Poincare の補題に関する問題である. 次の問いに答えよ.

(a) ω を $d\omega = 0$ となる $\mathbb{R}^2$ の 1 次微分形式とする. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ について $L_{(x,y)}$ を 0 が始点で (x, y) が終点となる線分とし,

$$g(x, y) = \int_{L_{(x,y)}} \omega \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

とおく. このとき $g(x, y)$ は $\omega = dg$ となる $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級関数であることを示せ.

(b) 上と同様にして $\mathbb{R}^2$ の 2 次微分形式 η についてある 1 次微分形式 ω があって $\eta = d\omega$ となることを示せ.

[11] この文章には続きがあった. "The other two are equivalent to $d * F = 0$ for a star-operator $*$ defined indifferential geometry." つまり後二つは $d * F = 0$ と同じである. ここで $*$ は Hodge-star operator である.

4　多様体上の微分形式

岩井雅崇 (いわいまさたか)

定義 22.
- $p \in M$ について, 接ベクトル空間 T_pM の双対空間を<u>余接ベクトル空間</u>と呼び T_p^*M と表す.
- 任意の $p \in M$ について $\omega_p \in T_p^*M$ が一つずつ対応しているとき, その対応 $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$ を<u>M 上の 1 次微分形式</u>という.
- 座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について $(dx_i)_p$ を

$$\begin{array}{rccc} (dx_i)_p : & T_pM & \to & \mathbb{R} \\ & a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \cdots + a_m\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p & \mapsto & a_i \end{array}$$

とし, U 上の 1 次微分形式 $dx_i := \{(dx_i)_p\}_{p \in U}$ と定義する. これにより M 上の 1 次微分形式は座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について, ある U 上の関数 $f_i : U \to \mathbb{R}$ があって

$$\omega|_U = f_1 dx_1 + \cdots + f_m dx_m$$

とかける.　各座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について上の f_i が C^∞ 級となるとき, ω は<u>C^∞ 級 1 次微分形式</u>という.

定義 23. k を 0 以上の整数とする. 任意の $p \in M$ について $\omega_p \in \wedge^k T_p^*M$ が一つずつ対応しているとき, その対応 $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$ を<u>M 上の k 次微分形式</u>という. M 上の k 次微分形式 ω は座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について, ある U 上の関数 $f_{i_1 i_2 \cdots i_k} : U \to \mathbb{R} (1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m)$ があって

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} f_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

とかける.　各座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について上の $f_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ が C^∞ 級となるとき, ω は<u>C^∞ 級 k 次微分形式</u>であるという.

外積・外微分・引き戻しも以下のように定義される.

定義 24 (外積)**.** M 上の k 次微分形式 ω と l 次微分形式 η について, その<u>外積 $\omega \wedge \eta$</u>を

$$\omega \wedge \eta(X_1, \ldots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) \eta(X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(k+l)})$$ とする.

定義 25 (外微分)**.** M 上の k 次微分形式 ω について, <u>外微分 $d\omega$</u>を

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) = & \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_m)) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_m). \end{aligned}$$

とする. ここで $(X_1,\dots,X_{k+1})$ はベクトル場とし, $(X_1,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_m)$ は $(X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_m)$ を意味する.

定義 26 (引き戻し)**.** $\varphi : M \to N$ を C^∞ 写像とする. N 上の l 次微分形式 η について, η の φ による引き戻し $\varphi^*\eta$を

$$(\varphi^*\eta)_p(X_p) := \eta_{\varphi(p)}((d\varphi)_p X_p) \quad (\forall p \in M, \forall X \in T_pM)$$

と定める. これは M 上の l 次微分形式となる.

補足 27. 重要なこととして, これらは座標近傍 $(U,x_1,\dots,x_m)$ をとってしまえば $\mathbb{R}^m$ の開集合上で定義したものと同じになる! 上の定義は座標によらないというメリットがある一方でわかりずらいというデメリットもある.

問 4.1 • $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ を円周とする.

$$U = S^1 \setminus \{(1,0)\} \quad \varphi_U(\cos\theta_U, \sin\theta_U) = \theta_U \quad (0 < \theta_U < 2\pi)$$

$$V = S^1 \setminus \{(-1,0)\} \quad \varphi_V(\cos\theta_V, \sin\theta_V) = \theta_V \quad (-\pi < \theta_V < \pi)$$

として座標近傍 $(U,\varphi_U),(V,\varphi_V)$ を定める. U 上の 1 次微分形式 α_U と V 上の 1 次微分形式 α_V を

$$\alpha_U = d\theta_U, \quad \alpha_U = d\theta_V$$

とする.[12] このとき $U \cap V$ 上で $\alpha_U = \alpha_V$ であることを示せ. これにより S^1 上の微分形式 α を

$$\alpha_x = \begin{cases} (\alpha_U)_x & (x \in U) \\ (\alpha_V)_x & (x \in V) \end{cases}$$

として定めることができる.

問 4.2 • $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^2$ を包含写像とし, α を問 4.1 での S^1 上の 1 次微分形式であるとする. このとき以下が成り立つことを示せ.

$$\varphi^*\left(\frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}\right) = \alpha$$

問 4.3 •(多様体の基礎 20 章) リーマン球面 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \mathbb{C}$ を構成する 2 つの複素平面 $\mathbb{C}$ をそれぞれ $z = x+iy$, $\xi = \zeta + i\eta$ の対応で (ζ,η) 平面, (x,y) 平面と同一視する. 次の問いに答えよ.

(a) 座標変換 $z = \frac{1}{\xi}$ を (ζ,η) と (x,y) を用いて表せ.

(b) (x,y) 平面上の 2 次微分形式 $\omega = \frac{dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ とする. ω を (ζ,η) を用いて表せ. (ζ,η) を用いて表されたものを ω' とする.

(c) ω' は (ζ,η) 平面上の 2 次微分形式であることを示せ.

(d) ω は $\mathbb{CP}^1$ 上の 2 次微分形式 $\widetilde{\omega}$ に拡張できることを示せ.

[12]厳密には $d\theta_U$ は $\varphi(U)$ 上の微分形式と同一視している.

問 4.4 • $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とする．次の問いに答えよ．

(a) $i^*(dx \wedge dy \wedge dz)$ を求めよ．

(b) $B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}$ とし，$\varphi : B \to S^2$ を $\varphi(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$ とする．$(i \circ \varphi)^*(dx \wedge dy)$ の値が 0 になる B の点を全て求めよ．

(c) $i^*(dx \wedge dy)$ の値が 0 になる S^2 の点を全て求めよ．

問 4.5 • $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とする．$i^*(zdx \wedge dy + ydz \wedge dx + xdy \wedge dz)$ は S^2 のどの点でも 0 にならない 2 次微分形式であることを示せ．

問 4.6 • $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を球面とする．多様体の基礎の 6 章のように立体射影を次のように定義する: $U := S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ とし座標近傍 (U, s, t) を

$$s = \frac{x}{1-z}, \quad t = \frac{y}{1-z}$$

と定義する．$f : S^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z) = z$ とし，S^2 上の 1 次微分形式 $\omega = df$ とするとき，$\omega|_U$ を (s,t) を用いて表せ．

問 4.7 問 4.6 の (U, s, t) について，U 上の 1 次微分形式

$$\alpha = \frac{-tds + sdt}{(1+s^2+t^2)^2}$$

を考える．このとき S^2 上の 1 次微分形式 $\tilde{\alpha}$ で $\tilde{\alpha}|_U = \alpha$ となるものが存在することを示せ．

問 4.8 問 4.6 の (U, s, t) について，U 上の 1 次微分形式

$$\frac{-tds + sdt}{1+s^2+t^2}, \quad \frac{sds - tdt}{(1+s^2+t^2)^2}$$

がそれぞれの S^2 上の 1 次微分形式に拡張できるかどうか調べよ．

問 4.9 * (Tu Exercise 19.11) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とし，0 を f の正則値とする． このとき $M = f^{-1}(0)$ とすると M は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分多様体となる．f_x, f_y, f_z を f の x, y, z に関する偏微分とするとき，

$$\frac{dx \wedge dy}{f_z} = \frac{dy \wedge dz}{f_x} = \frac{dz \wedge dx}{f_y}$$

が成り立つことを示せ.[13] また M 上にどの点でも消えない 2 次微分形式が存在することを示せ．

問 4.10 (多様体の基礎 19 章) $f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．微分写像 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ により，$df := \{df_p\}_{p \in M}$ は M 上の微分形式だと思える．座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ を用いて，微分形式 df は次のように表せることを示せ．

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

問 4.11 (多様体の基礎 19 章) $f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．X をベクトル場とするとき，$(df)(X) = X(f)$ を示せ．

[13]ただし $\frac{dy \wedge dz}{f_x}$ は $f_x \neq 0$ なるところで考える．他も同様．

問 4.12 (多様体の基礎 20 章) ω を 1 次微分形式, X, Y を M 上のベクトル場とするとき

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])\ \text{を示せ.}$$

問 4.13 ω を $\mathbb{R}^n$ 上の 1 次微分形式とし, S_ω を $\mathbb{R}^n$ のベクトル場 X で $\omega(X) = 0$ となるものの集合とする. $d\omega \wedge \omega = 0$ ならば任意の $X, Y \in S_\omega$ について $[X,Y] \in S_\omega$ であることを示せ.

問 4.14 $TM = \cup_{p\in M} T_pM = \cup_{p\in M}\{(p,v) | v \in T_pM\}$ とし, $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda) = (U_\lambda, x_1^\lambda, \ldots, x_m^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M の座標近傍系とする. $\lambda \in \Lambda$ について次のように写像を定める.

$$\begin{array}{cccc} \pi: & TM & \to & M \\ & (p,v) & \mapsto & p \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \Phi_\lambda: & \pi^{-1}(U_\lambda) & \to & \varphi_\lambda(U_\lambda) \times \mathbb{R}^m \\ & (p, \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i^\lambda}\right)_p) & \to & (\varphi_\lambda(p), (a_1, \ldots, a_m)) \end{array}$$

次の問いに答えよ.

(a) Φ_λ は $\pi^{-1}(U_\lambda)$ と $\varphi_\lambda(U_\lambda) \times \mathbb{R}^m$ の一対一対応を与えることを示せ.

(b) TM には $\{(\pi^{-1}(U_\lambda), \Phi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が座標近傍系になるような $2m$ 次元の C^∞ 級多様体の構造が入ることを示せ.[14] (TM, π) を接ベクトル束という.

問 4.15 $T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M$ に $2m$ 次元の C^∞ 級多様体の構造が入ることを示せ. 同様にして 1 以上の自然数 k について $\wedge^k T_p^*M$ にも多様体の構造が入るが, その次元も求めよ. なお $T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M$ を余接ベクトル束という.

問 4.16 M を $\dim M = 2m$ なる多様体とする. M 上の 2 次微分形式 ω で $d\omega = 0$ かつ ω^m が任意の $p \in M$ で 0 でないとき, (M, ω) をシンプレクティック多様体という. 以下 (M,ω) をシンプレクティック多様体とするとき, 次の問いに答えよ.[15]

(a) 任意の $p \in M$ と任意の $0 \neq u \in T_pM$ について, ある $v \in T_pM$ があって $\omega_p(u,v) \neq 0$ となることを示せ.

(b) $p \in M$ を固定する. $\xi \in T_pM$ について

$$\begin{array}{cccc} \omega_\xi: & T_pM & \to & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \omega_p(\xi, v) \end{array}$$

という 1 次微分形式 ω_ξ が定まる. そこで $\Phi: T_pM \to T_p^*M$ を $\Phi(\xi) = \omega_\xi$ で定めるとき, Φ は線形同型写像であることを示せ.

問 4.17 $2n$ 次元トーラス $T^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ にはシンプレクティック多様体の構造が入ることを示せ.

問 4.18 * 多様体 M の余接ベクトル束 T^*M にはシンプレクティック多様体の構造が入ることを示せ.

[14] ただし「TM の位相で任意の $\lambda \in \Lambda$ について $\pi^{-1}(U_\lambda)$ が開集合で Φ_λ が位相同型になるものがある」ことは認めて良い.

[15] なおこの問題には $d\omega = 0$ はほぼ使わない.

5　多様体の向き・微分形式の積分・ストークスの定理

岩井雅崇 (いわいまさたか)

定義 28 (多様体の向き付け)**.**

- $(U, x_1, \ldots, x_m)$ と $(V, y_1, \ldots, y_m)$ を $U \cap V \neq \phi$ となる M の座標近傍とする. $(U, x_1, \ldots, x_m)$ と $(V, y_1, \ldots, y_m)$ が<u>同じ向き</u>であるとは, $U \cap V$ 上で

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} := \det\left(\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i,j \leq m}\right) > 0 \text{ となることとする.}$$

- <u>M が向きづけ可能</u>であるとは, M の座標近傍系 $\{(U_\lambda, x_1^\lambda, \ldots, x_m^\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ であって, 同じ向きになるものが存在することとする.

定理 29 (1 の分割)**.** M が第二可算であると仮定する. 任意の M の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ についてある可算個の C^∞ 級関数 $\rho_j : M \to \mathbb{R} (j \in \mathbb{N})$ があって次が成り立つ

1. $\{\mathrm{Supp}(\rho_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ は M の被覆であり, $p \in M$ についてある p の開近傍 U をとれば $U \cap \mathrm{Supp}(\rho_j) \neq \varnothing$ なる j は有限個になる.(局所有限な被覆という.)
2. 任意の $j \in \mathbb{N}$ についてある $\lambda_j \in \Lambda$ があって $\mathrm{Supp}(\rho_j) \subset U_{\lambda_j}$ となる. ($\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の細分という.)
3. $0 \leq \rho_j \leq 1$ かつ $\sum_{j \in \mathbb{N}} \rho_j \equiv 1$.

この $\{\rho_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ を $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に従属する 1 の分割という.
ここで ρ_j の台を $\mathrm{Supp}(\rho) := \overline{\{q \in M | \rho(q) \neq 0\}}$ とする.

補足 30. 上は σ コンパクトで成り立つ定理である.(第二可算な多様体は σ コンパクトであるらしい.) ただ σ コンパクトは応用上で使うか怪しいし, 多様体に第二可算を仮定することが多いので, ここでは第二可算として主張を述べた.[16]要するに 1 の分割は取れると思って良い.

定義 31. $(U, \varphi) = (U, x_1, \ldots, x_m)$ を座標近傍とし, U 上の m 次微分形式を $\omega = f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ とする. $\varphi(U)$ が正方形領域 $V := [-a, a]^m$ に含まれるとき, ω の U 上の積分を

$$\int_U \omega := \int_{[-a,a]^m} f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \text{で定義する.}$$

定理 32. M が向きづけ可能なコンパクト m 次元多様体とし, ω を m 次微分形式とする. このとき同じ向きになる M の座標近傍系 $U_1, \ldots, U_N$ とそれに従属する 1 の分割 $\rho_1, \ldots, \rho_N$ があって, ω の M 上の積分を

$$\int_M \omega := \sum_{j=1}^N \int_M \rho_j \omega$$

[16] 「トゥー 多様体」では多様体に第二可算を仮定している.

で定義する．この積分の値は実数値であり, 1 の分割や近傍系の取り方によらない．

補足 33. $\rho_j\omega$ は定義 31 の仮定を満たすため上のように積分が定義できる．またこの積分の定義は理論上役に立つが計算上ではあまり役には立たない．

定義 34. M を第二可算ハウスドルフ空間とする．次の条件が成り立つとき M は m 次元境界つき (C^∞ 級) 多様体と呼ばれる．

1. M の開被覆 $M = \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ と像への同相写像

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{H}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m | x_1 \geqq 0\} \text{ が存在する．}$$

2. $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ なる $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ は C^∞ 級写像である

$\partial M := \cup_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \subset$ を M の境界と呼ぶ.

M の境界 ∂M は $m-1$ 次元多様体となる．また M が向きづけ可能であるとき, ∂M には座標近傍系 $\{(U_\lambda, x_2^\lambda, \ldots, x_m^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって向きが入る．

定理 35 (ストークスの定理 (Stokes の定理))**.** M を向きづけ可能なコンパクト m 次元境界つき多様体とし, η を $m-1$ 次微分形式とするとき, 次が成り立つ.

$$\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta$$

系 36. M を向きづけ可能なコンパクト m 次元多様体とし, η を $m-1$ 次微分形式とするとき, $\int_M d\eta = 0$ となる．

以下断りがなければ多様体 M には境界がないものとする．(つまり $\partial M = \varnothing$ を仮定する．)

問 5.1 • M を向きづけ可能なコンパクト m 次元多様体とし, N を $m-1$ 次元の M の閉部分多様体とする．ω を m 次微分形式とするとき $\int_M \omega = \int_{M\setminus N} \omega$ を示せ．(ヒント: M が $\mathbb{R}^m$ の開集合のときにはどうなるか?)

問 5.2 • 問 4.1 において定義した S^1 上の 1 次微分形式 α について, $\int_{S^1} \alpha$ の値を求めよ．

問 5.3 • 問 4.3 において定義した $\mathbb{CP}^1$ 上の 2 次微分形式 $\widetilde{\omega}$ について, $\int_{\mathbb{CP}^1} \widetilde{\omega}$ の値を求めよ．

問 5.4 •

$$\int_{S^2} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

を求めよ.

問 5.5 • $D = [a,b] \times [c,d]$ とし, $f(x,y), g(x,y)$ を D 上の C^∞ 級関数とする.[17]グリーンの定理

$$\int_{\partial D} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy$$

をストークスの定理を用いて示せ. ただし ∂D にどのような向きを入れたか明記すること.

問 5.6 • $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で定義された領域上で定義された関数 $f(x,y) = \frac{1}{2}\log\bigl(x^2+y^2\bigr)$ を考える. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の 1 次微分形式を $\omega := \frac{\partial f}{\partial x}dy - \frac{\partial f}{\partial y}dx$ とする. 次の問いに答えよ.

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上 $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ であることを示せ.

(b) C_1 を中心 $(3,0)$ で半径 2 の円周とし, 向きを反時計回りに入れる. $\int_{C_1} \omega$ を計算せよ.

(c) C_2 を中心 $(1,0)$ で半径 4 の円周とし, 向きを反時計回りに入れる. $\int_{C_2} \omega$ を計算せよ.

問 5.7 2 次元トーラス $T^2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 | x^2+y^2 = z^2+w^2 = 1\}$ について

$$\int_{T^2} yzw\, dx \wedge dz$$

を求めよ.

問 5.8 $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ 上の 2 次微分形式

$$\omega = \frac{zdx \wedge dy + ydz \wedge dx + xdy \wedge dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

とする. X を $\mathbb{R}^3$ 内の有界な境界つき 3 次元多様体で $(0,0,0) \notin \partial X$ であるものとする. この X について

$$\Omega = \int_{\partial X} \omega$$

と定める. このとき $(0,0,0) \in X$ ならば $\Omega = 4\pi$ であり, $(0,0,0) \notin X$ ならば $\Omega = 0$ であることを示せ.

[17]厳密にいうと D を含む開集合 U があって, U 上で $f(x,y), g(x,y)$ は C^∞ 級である

問 5.9 (多様体の基礎 20 章) M を多様体とする．次の問いに答えよ．

(a) M が向きづけ可能であるとし，M の座標近傍系 $\{(U_\lambda, x_1^\lambda, \dots, x_m^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を同じ向きになるものとする．$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に従属する 1 の分割を $\{\rho_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ とするとき

$$\omega = \sum_{j\in\mathbb{N}} \rho_j dx_1^\lambda \wedge \cdots \wedge x_m^\lambda$$

はどの点でも 0 にならない m 次微分形式であることを示せ．

(b) 逆にどの点でも 0 にならない m 次微分形式 ω が存在するならば，M が向きづけ可能であることを示せ．[18]

(c) S^2 は向きづけ可能であることを示せ．(ヒント: S^2 上にどの点でも 0 にならない 2 次微分形式を構成する．そのような 2 次微分形式は度々出ている．)

問 5.10 S^n は向きづけ可能であることを示せ．ただしこの問題は問 5.12 が解答される前に答えること．

問 5.11 $\mathbb{CP}^2$ は向きづけ可能であることを示せ．[19]

問 5.12 *$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ となる C^∞ 級写像で $0 \in \mathbb{R}$ が f の正則値であるとする．このとき $f^{-1}(0)$ は向き付け可能な n 次元の C^∞ 級多様体であることを示せ．

問 5.13 * $\mathbb{RP}^n$ は n が奇数なら向きづけ可能であることを示せ．(ヒント: $p : S^n \to S^n$ を $p(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$ とする．S^n 上のある n 次微分形式と p を用いて，$\mathbb{RP}^n$ 上の微分形式でどの点でも 0 にならないものを作る.)

問 5.14 * 多様体 M についてその接ベクトル束 TM は常に向きづけ可能であることを示せ．

問 5.15 * $(-1,1) \times \mathbb{R}$ に同値関係 $\sim$ を

$$(x, y) \sim (z, w) \Leftrightarrow \text{ある整数 } m \text{ があって } z = (-1)^m x, w = y + m.$$

と定義する．$X := ((-1,1) \times \mathbb{R})/\sim$ とし<u>メビウスの帯</u>という．商写像 $\pi : (-1,1) \times \mathbb{R} \to X$ によって X に位相を入れる．次の問いに答えよ．

(a) $U_1 := \pi((-1,1) \times (0,1))$, $U_2 := \pi((-1,1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ とおく．各 $i = 1, 2$ について $\mathbb{R}^2$ の開集合 V_i への同相写像 $\varphi_i : U_i \to V_i$ で，$\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ が X の座標近傍系になるような φ_1, φ_2 を一つ構成せよ．またメビウスの帯は C^∞ 級多様体になることを示せ．

(b) メビウスの帯 X は向きづけ不可能であることを示せ．

問 5.16 ** $\mathbb{RP}^n$ は n が偶数なら向きづけ不可能であることを示せ．[20]

[18] 以上より M が向きづけ可能であるための必要十分条件は，どの点でも 0 にならない m 次微分形式 ω が存在することである．そして向きづけ可能とは $\wedge^m T^*M$ が自明になることと同値である．

[19] 実はより一般に $\mathbb{CP}^n$ などの複素多様体は向きづけ可能である．

[20] 一応問 5.9 を使えば現時点でも求められる．他にもホモロジーを使って求めることもできる.(6 章のド・ラームの定理と問 6.18 を参照のこと.)

6 ド・ラーム コホモロジー群

岩井雅崇 (いわいまさたか)

定義 37 (ド・ラーム コホモロジー (de Rham コホモロジー))**.** M を多様体とし k を 0 以上の整数とし, ω を k 次微分形式とする.

- $d\omega = 0$ なる微分形式を閉形式という. k 次微分形式で閉形式であるものからなるベクトル空間を $Z^k(M)$ と書く.
- ある $k-1$ 次微分形式 η があって $\omega = d\eta$ とかけるとき, ω は完全形式と呼ばれる. k 次微分形式で完全形式であるものからなるベクトル空間を $B^k(M)$ と書く. このとき $B^k(M) \subset Z^k(M)$ である. つまり完全形式は閉形式である.
- $H^k_{DR}(M) := Z^k(M)/B^k(M)$ とし, U の k 次ド・ラーム コホモロジーという

補足 38. $d \circ d = 0$ なので完全形式ならば閉形式である. ド・ラーム コホモロジー群は閉形式と完全形式のずれを記述している群である.

定義 39 (完全系列)**.** A, B, C をベクトル空間とし

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

となるベクトル束の準同型の系列 (sequence) を考える. この系列が完全 (exact) であるとは $\mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f$ となることとする. このとき

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

とかき短完全列 (short exact sequence) と呼ばれる.
また系列

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$$

が完全 (exact) であるとは, $\mathrm{Ker} f_i = \mathrm{Im} f_{i-1}$ が $i = 1, \dots, n-1$ で成り立つこととする.

定理 40 (マイヤー・ヴィートリス系列 (Mayer-Vietoris sequence))**.** M を多様体とし U, V を M の開被覆とする . このとき

$$\cdots \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V) \longrightarrow H^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

は完全である.

注意 41. トポロジーでならうホモロジーのマイヤー・ヴィートリス系列とは向きが逆になっていることに注意!

定義 42 (ホモトピック, ホモトピー同値)**.** M, N を多様体とする.

- C^∞ 級写像 $f, g : M \to N$ がホモトピック (homotopic) であるとはある C^∞ 写像 $F : M \times \mathbb{R} \to N$ があって $F(x, 0) = f$ かつ $F(x, 1) = g$ を満たすこと. このとき $f \sim g$ と

かく.

- C^∞ 級写像 $f: M \to N$ がホモトピー同値 (homotopy equivalence) であるとは, ある C^∞ 級写像 $g: N \to M$ があって $g \circ f \sim id_M$ かつ $f \circ g \sim id_N$ となること. このとき M は N とホモトピー同値であるという.
- M が可縮 (contractible) であるとは, M が 1 点とホモトピー同値であることとする.

定理 43 (Tu Theorem 27.10)**.** M, N を多様体とする. C^∞ 級写像 $f, g: M \to N$ がホモトピックならば, k 次ド・ラーム コホモロジーの間の写像 f^* と g^* は同じ写像である.

系 44 (Tu Corollary 27.11)**.** M, N を多様体とする. C^∞ 級写像 $f: M \to N$ がホモトピー同値ならば,

$$f^*: H^k_{DR}(M) \to H^k_{DR}(N)$$

は同型写像である.

系 45 (Tu Corollary 27.13 ポアンカレの補題 (Poincare lemma))**.** M が可縮ならば, 1 以上の整数 k について $H^k_{DR}(M) = 0$. 特に 1 以上の整数 k について $H^k_{DR}(\mathbb{R}^m) = 0$.

他に「トゥー 多様体」にはないが有用な定理を述べておく. 以下の内容は「坪井俊 著 幾何学 3 微分形式」を参考にした. 下の定理よりホモロジー群を求めればド・ラーム コホモロジーは求められてしまう.

定理 46 (坪井 定理 3.3.7 ド・ラーム の定理)**.** M を多様体とき

$$H^k_{DR}(M) \to \mathrm{Hom}(H_k(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$$

はベクトル空間の同型写像である. ここで $H_k(M, \mathbb{Z})$ は M のホモロジー群である.

以下断りがなければ M には境界がないものとする. (つまり $\partial M = \varnothing$ を仮定する.)

問 6.1 • 連結な多様体 M について 0 次ド・ラーム コホモロジー群 $H^0_{DR}(M)$ を求めよ.

問 6.2 • $H^1_{DR}(S^1) \neq 0$ であることを示せ. ただしこの問題は問 6.6 が解答される前に答えること.

問 6.3 • $\dim H^1_{DR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0)\}) \geqq 2$ であることを示せ. ただしこの問題は問 6.10 が解答される前に答えること.

問 6.4 • $\mathbb{R}$ ベクトル空間の完全列

$$0 \to A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} A_4 \to 0$$

を考える. 次の問いに答えよ.

(a) $\dim A_1 = 2, \dim A_2 = 5, \dim A_4 = 0$ のとき $\dim A_3$ を求めよ.

(b) $\dim A_1 = 2, \dim A_2 = 5, \dim A_3 = 4$ のとき $\dim A_4$ を求めよ.

問 6.5 • $\mathbb{R}$ ベクトル空間の系列
$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_2} \mathbb{R} \xrightarrow{f_3} A_4 \xrightarrow{f_4} A_5 \to 0$$
が完全であるとき, f_4 は同型であることを示せ.

問 6.6 • 次の問いに答えよ.

(a) $U = S^1 \setminus \{(1,0)\}$, $V = S^1 \setminus \{(-1,0)\}$ とする. $H^k_{DR}(U)$ と $H^k_{DR}(V)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ をそれぞれ求めよ.

(b) $U \cap V$ は $\mathbb{R} \setminus 0$ と微分同相であることを示し, $H^k_{DR}(U \cap V)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ を求めよ.

(c) S^1 のド・ラーム コホモロジー群 $H^k_{DR}(S^1)(k = 0,1,2,\ldots)$ を求めよ.

問 6.7 • S^n のド・ラーム コホモロジー群 $H^k_{DR}(S^n)(k = 0,1,2,\ldots)$ を求めよ.

問 6.8 • $\mathbb{R}^m$ 上の開集合 U が星型であるならば可縮であることを示せ. ここで U が星型であるとはある点 $p \in U$ があって, 任意の点 x と任意の $t \in [0,1]$ について $(1-t)p + tx \in U$ が成り立つこととする.

問 6.9 • $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ のド・ラーム コホモロジー群 $H^k_{DR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})(k = 0,1,2,\ldots)$ を求めよ. (ヒント: $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to S^1$ で $\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ を考え, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ と S^1 がホモトピー同値であることを示す.)

問 6.10 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0)\}$ のド・ラーム コホモロジー群 $H^k_{DR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0)\})(k = 0,1,2,\ldots)$ を求めよ.

問 6.11 $Z = \{x = y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ とする. $\mathbb{R}^3 \setminus Z$ のド・ラーム コホモロジー群 $H^k_{DR}(\mathbb{R}^3 \setminus Z)(k = 0,1,2,\ldots)$ を求めよ.

問 6.12 2 次元トーラス $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ のド・ラーム コホモロジー群 $H^k_{DR}(T^2)(k = 0,1,2,\ldots)$ を求めよ.

問 6.13 $\mathbb{RP}^2$ のド・ラーム コホモロジー群 $H^k_{DR}(\mathbb{RP}^2)(k = 0,1,2,\ldots)$ を次の方法で求めよ.

(a) $\pi : S^2 \to \mathbb{RP}^2$ を自然な射影とする. $\pi(\{z = 0\} \cap S^2)$ は $\mathbb{RP}^1$ とみなせることを示せ. 以降 $\pi(\{z = 0\} \cap S^2)$ を $\mathbb{RP}^1$ とかく.

(b) $U = \mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{RP}^1$ と $V = \mathbb{RP}^2 \setminus \pi((0,0,1))$ のド・ラーム コホモロジー群を求めよ.

(c) $U \cap V$ は S^1 とホモトピー同値であることをしめせ.

(d) $H^k_{DR}(\mathbb{RP}^n)(k = 0,1,2,\ldots)$ を求めよ. (ヒント: $H^1(U) \oplus H^1(V) \to H^1(U \cap V)$ は同型になる.)

問 6.14 ** $\mathbb{RP}^n$ のド・ラーム コホモロジー群 $H^k_{DR}(\mathbb{RP}^n)(k = 0,1,2,\ldots)$ を求めよ. [21]

問 6.15 * $\mathbb{CP}^n$ のド・ラーム コホモロジー群 $H^k_{DR}(\mathbb{CP}^n)(k = 0,1,2,\ldots)$ を求めよ. (ヒント: $H = \{z_1 = 0\}$ を考え問 6.13 と同じことをする.)

問 6.16 * 次の問いに答えよ.

(a) (M, ω) をコンパクトシンプレクティック多様体とするとき, $1 \leq k \leq n$ なる自然数について $H^{2k}_{DR}(M) \neq 0$ であることを示せ.

(b) S^n がシンプレクティック多様体になるような n の値を決定せよ.

[21] おそらくホモロジーを求めてド・ラームの定理を使う方が楽かもしれない.

問 6.17 * 次の問いに答えよ.

(a) 有限ベクトル空間の完全系列

$$0 \to A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \to 0$$

について $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim A_i = 0$ であることを示せ.(ヒント: まず $n = 2$ のときを考える.)

(b) 多様体 M についてオイラー標数を

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i \dim H^i_{DR}(M)$$

として定める. M の開被覆 U, V について, $M, U, V, U \cap V$ が全て有限次元 k 次ド・ラームコホモロジーを持つならば, $\chi(M) - (\chi(U) + \chi(V)) + \chi(U \cap V) = 0$ であることを示せ.

(c) $\chi(S^n)$ を求めよ. [22]

問 6.18 * n を 1 以上の整数とし, $\mathbb{C}$ 係数の多項式 $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ で $a_n \neq 0$ なるものを考える. $F_0, F_1 : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ を次のように定める.

$$F_0(z:1) = (z^n : 1), \quad F_0(1:0) = (1:0), \quad F_1(z:1) = (p(z):1), \quad F_1(1:0) = (1:0).$$

以下の問いに答えよ.

(a) F_0, F_1 は C^∞ 級写像であることを示せ.

(b) F_0 と F_1 はホモトピックであることを示せ.

(c) 下の定理から $I : H^2_{DR}(\mathbb{CP}^1) \simeq \mathbb{R}$ である. この対応は $I(\omega) = \int_{\mathbb{CP}^1} \omega$ であることもわかっている. このとき

$$F_0^* : H^2_{DR}(\mathbb{CP}^1) \to H^2_{DR}(\mathbb{CP}^1)$$

を求めよ. つまり $F_0^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とみなしたとき, これは何倍の写像になっているか?

(d) $p(z) = 0$ となる点が $z \in \mathbb{C}$ に存在しなければ, F_1 は $(1:0)$ に移す定値写像とホモトピックであることを示せ.

(e) 代数学の基本定理「$\mathbb{C}$ 係数 n 次多項式 $p(z)$ は $\mathbb{C}$ 内に解を持つ」を示せ.

この問題に限り次の定理を認めて良い.

定理 47 (坪井 定理 3.4.11)**.** M を境界を持たない m 次元コンパクト連結多様体とする. $H^m_{DR}(M)$ が $\mathbb{R}$ であることは M が向きづけ可能であることと同値である. また $H^m_{DR}(M)$ が 0 であることは M が向きづけ不可能であることと同値である.

[22] 余力があればオイラーの多面体定理との関係を調べよ.