中間レポート 1

提出締め切り 2025 年 6 月 19 日 (木) 23 時 59 分 59 秒 (日本標準時刻)

提出方法

- 提出に関しては CLE を用いて提出すること. 締め切りは 2025 年 6 月 19 日 (木) 23 時 59 分 59 秒 (日本標準時刻) である.
- 次のレポート問題について解答すること. 解答に関しては答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記すこと.
- レポート問題の何問かを期末試験に出す予定です. 試験対策としてこのレポートを解いていただければと思います. (丸写しなどの行為は時間の無駄なのでしないでください.)

レポート問題

問題 1. 次の行列の計算を行え.

(1). $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(2). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 7 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(3). $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\left\{2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\right\}$

問題 2. 次の行列 A, B, C, D のうち, 積が定義される全ての組み合わせを求め, その積を計算せよ.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問題 3. 2×2 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

$$\begin{array}{cccc} f_A: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \end{array}$$

とおき, A を f_A に対応する行列という. 次の問いに答えよ.

(1). 「x 軸に関しての鏡映 (反転) を行い, 135 度反時計回りに回転する変換」に対応する 2×2 行列を求めよ.

(2). 「x 軸に関しての鏡映 (反転) を行い, 135 度反時計回りに回転し, さらに x 軸に関しての鏡映 (反転) を行う変換」を $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ とする. g は「α 度反時計回りに回転する変換」と同じである. α の値を求めよ. ただし $0 \leqq \alpha \leqq 360$ とする.

問題は裏に続く.

問題 4. $\mathbb{R}^4$ において

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ

(1). $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は線形独立であることを示せ.

(2). $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は線形従属であることを示せ.

(3). $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$ は線形独立か, それとも線形従属か? 理由とともに答えよ.

問題 5. 次の行列を簡約化し, その階数を求めよ.

(1). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ (2). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

問題 6. 次の連立 1 次方程式を簡約化を用いて解け.

(1). $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

(2). $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 + 8x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$

(3). $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 2x_6 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 + 3x_6 = 0 \end{cases}$

問題 7. 次の行列の逆行列をそれぞれ求めよ.

(1). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

問題 8. 次を示せ.

(1). n 次正方行列 A, B について, A と B が正則行列ならば, AB も正則行列であることを示せ.

(2). n 次正方行列 A, B について, AB が正則行列ならば, A も B も正則行列であることを示せ.