期末試験

2025 年度春夏学期 大阪大学 全学共通教育科目 線形代数学 1 工 (然 56-110)

岩井雅崇 (いわいまさたか) 2025/07/31

下の問題を解け. ただし解答に関しては答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記すこと.

第 1 問. 次の行列 A, B, C, D のうち, 積が定義される全ての組み合わせを求め, その積を計算せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

第 2 問. 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. $\begin{array}{cccc} f_A: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \end{array}$ とおき, A を f_A に対応する行列という.

「135 度反時計回りに回転し, x 軸に関しての鏡映 (反転) を行い, 45 度反時計回りに回転する変換」を $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とする. g に対応する 2×2 行列を求めよ.

第 3 問. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

第 4 問. 行基本変形と行列の簡約化を用いて, 次の連立 1 次方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -7 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 9 \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_4 = -1 \end{cases}$$

第 5 問. $\mathbb{R}^4$ において

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

とする. 次の問いに答えよ

(1). $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は線形独立か, それとも線形従属か? 理由とともに答えよ.
(2). $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は線形独立か, それとも線形従属か? 理由とともに答えよ.
(3). $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は線形独立か, それとも線形従属か? 理由とともに答えよ.

第 6 問に続く

第 6 問. 次の行列の行列式をそれぞれ求めよ.

$$(1).\ \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&2&2&2\\1&2&3&3&3\\1&2&3&4&4\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}\quad (2).\ \begin{pmatrix}1&0&4&3&0\\3&4&0&2&0\\0&1&0&0&2\\6&0&2&5&0\\0&0&1&0&3\end{pmatrix}$$

第 7 問. 4×6 行列 A, B を次で定める.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-2&1\\0&1&1&0&1&-2\\-1&0&1&1&1&3\\2&1&-1&0&-3&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-2&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

ここで B は A の簡約化 (行基本変形) によって得られる簡約行列である.

$\begin{array}{cccc}A: & \mathbb{R}^6 & \to & \mathbb{R}^4\\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & A\boldsymbol{x}\end{array}$ とする. この線形写像の像 $\mathrm{Image}A$ と核 $\mathrm{Ker}A$ の次元を求め, それらの線形部分空間としての基底を一組示せ.

第 8 問. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases}x_1 & & & - & x_3 & = & 0\\ 2x_1 & + & \lambda x_2 & - & x_3 & = & 0\\ (\lambda+1)x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 0\end{cases}$$

が $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外の解を持つような λ の値を全て求めよ.

第 9 問. 次の問題に答えよ. ただし解答に際し授業・教科書で証明を与えた定理に関しては自由に用いて良い. ただし E_n は n 次単位行列とする. また断りがなければ, 行列 A, B の成分は実数であるとする.

(1). n 次正方行列 A, B について, A と B が正則ならば, $B^{-1}A^2B^3A^{-1}$ もまた正則行列であることを示せ.

(2). A を $m\times n$ 行列とし, A で定義された線形写像 $\begin{array}{cccc}A: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m\\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & A\boldsymbol{x}\end{array}$ とする.
$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Ker}A$ ならば $5\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Ker}A$ であることを示せ.

(3). "実数" からなる n 次正方行列 A について, ${}^tAA = E_n$ ならば, $\det(A) = \pm 1$ であることを示せ. ここで ${}^tAA$ は ${}^tA$ と A の積のことである.

(4). "実数" からなる n 次正方行列 A について, A が正則ならば, A の余因子行列 $\tilde{A}$ の行列式 $\det\left(\tilde{A}\right)$ は $\det(A)^{n-1}$ であることを示せ.

(5). "有理数" からなる n 次正方行列 A について, A が正則ならば, 逆行列 A^{-1} のどの成分も有理数であることを示せ.

(6). "全ての成分が 0 と 1" からなる正方行列 C で $\det C = 5$ となるものを一つ構成せよ. ただし答えだけでなくその理由も書くこと. また行列 C のサイズ (行の数) は自由に決めて良い.

問題は以上である.