期末試験 2025 年 7 月 31 日 (木) の講評

全体の講評

ものすごくよくできていました. なお試験を受けた人全員に可以上の成績がついております. 演習問題からの問題は第 1〜7 問です. 問題量が多いので計算ミスなどは甘めにつけ, 議論など深刻なミスはきつくつけました.

成績の平均点は 82 点です. 各問題の正答率は以下の通りです.

問.1 89.5%
問.2 70.5%
問.3 90.0%
問.4 79.4%
問.5 95.5%
問.6 81.4%
問.7 77.6%
問.8 57.3%
問.9 17.1%

各問題の講評

第 1 問. ほぼ全員できていました.

第 2 問. 「135 度反時計回りに回転する変換」に対応する行列を A とし「x 軸に関しての鏡映を行う変換」に対応する行列を B とするとき, 「135 度反時計回りに回転して, x 軸に関しての鏡映をする」変換に対応する行列は BA となります.

多分何人か間違うだろうと思っていました. 案の定 3 割くらいの人が間違えていました.

第 3 問. 今回問題量が多いので, 計算が簡単になるような行列を選んでそれを問題にしました. そのため多くの人ができていました.

第 4 問. これもよくできていました. ただ拡大係数行列を簡約化してその後に連立一次方程式に戻す作業ができていない人がいました.

第 5 問. ほぼ全ての人ができていました. 簡単すぎましたかね？

第 6 問. 行列式の計算方法を知っていれば楽にできるかと思いきや, 意外と (2) の計算を間違えている人が多かったです. 余因子展開のやり方は覚えておきましょう.

第 7 問. ” 線型写像の像と核の次元や基底” は普通ならば後期の内容です. なので「できる人はあんまりいないのでは？」と思ってましたが, 7 割もの人ができていたのでびっくりしました. おそらく「求め方は理解したけど, 像・核・次元・基底ってなんだ？」みたいな状況だと思います. 後期の庵原先生の授業でその点を理解していただければと思います.

第 8 問. レポートにない問題です. 成績をつけるために問題 8,9 の難易度を上げております. が, 正答率 5 割なので良くできている方だと思います.

行列を掃き出していくと $(-2\lambda^2-\lambda+1)x_3 = 0$ が出てきて, $(-2\lambda^2-\lambda+1) \neq 0$ だと $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ しかないので, $(-2\lambda^2-\lambda+1) = 0$ なる λ が答えとなります. 掃き出し法を実際にしたらわかるのですが, 途中で 2 行目と 3 行目を入れ替える必要があります. これに気づかないと間違った答えを導いてします.

他にもガチで連立方程式を解いている解答がありました. これくらいの方程式なら行列を使うまでもないので, この解答も正しいです.

第 9 問. (1) と (2) はレポート問題と似たような問題. (3)∼(6) が実力で解く問題です. (1)∼(3) はレポートをきちんとやっていれば解けるかな？ と思います. (4)∼(6) の正答率は非常に低いです. (4), (5) は 5 人くらい. (6) は正答者 1 人でした. (4) と (5) は余因子行列を理解していれば解けるかな？ と言う感じです. (6) は私が寝る前に「そういやこんな行列ってあるんかな？」と思ったことをそのまま出しました. パズルみたいな問題なのでできなくても構いません.

(1). $\det\left(B^{-1}A^2B^3A^{-1}\right) \neq 0$ が想定解答ですが, $C = AB^{-3}A^{-2}B$ が逆行列を与えるでも良いです. 何人かの解答で行列を入れ替えている人がいました, 行列では $AB \neq BA$ です.

(2). 核 $\mathrm{Ker}A$ の定義を知っていれば定義からすぐに示せます. ですが, こういう抽象的な問題は解けない傾向にあります.(私は計算よりこっちの方が簡単ですが.) 案の定, 正答者は少なかったです.

証明は「核 $\mathrm{Ker}A$ の定義から, $A\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$ であり,

$$A(5\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2) = 5A\boldsymbol{x}_1 - 2A\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$$

だから核 $\mathrm{Ker}A$ の定義より $5\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 \in KerA$」です. 定義からわかる論理をつないだだけなんですが, こう言う問題は難しいと思われる傾向があります.

(3). $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$ を知っていれば $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ からすぐにわかります.

(4). これも $A\widetilde{A} = (\det A)E_n$ を知っていれば解答に気づくと思います. 難しいのは $\det((\det A)E_n) = (\det A)^n$ の部分. これは行列を書けば自明なのですが, こういった形で書かれると一瞬迷うかも知れません.

(5). 余因子行列に気付けば, A^{-1} が有理数からなる行列の行列式の四則演算で構成されることすぐにわかります. なぜならば $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$ で $\det A$ は有理数で $\widetilde{A}$ の各成分は A の行列のある行とある列をくり抜いたものの行列式なので有理数であることがわかるからです.

それに気付けなくとも第 3 問でやったような逆行列を出す方法に気づければ, A^{-1} が有理数からなることがわかります. 授業で「$[A : E_n]$ を簡約化して $[E_n : B]$ となる行列 B は A^{-1} である」ということをやりました. この簡約化での行基本変形において常に有理数しか使わないので, A^{-1} の成分も有理数と言うことになります.

(6). 1 人正答者がいました. 採点している際は, 「8×8 行列?こんなん絶対適当に書いただろう」と思って計算機に入れたらきちんと正解でびっくりしました． よく考えてみると構成法は私の方法と本質的に同じでした. お見事だと思います.

$\boxed{1}$

$A\ 3\times1 \quad B\ 1\times3 \longrightarrow AB\ 3\times3$ 行列

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 6 \\ -5 & 15 & 10 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$A\ 3\times1 \quad C\ 2\times1 \longrightarrow \times$

$A\ 3\times1 \quad D\ 3\times2 \longrightarrow \times$

$B\ 1\times3 \quad A\ 3\times1 \longrightarrow BA\ 1\times1$ 行列

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+15+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \end{pmatrix}$$

$B\ 1\times3 \quad C\ 2\times1 \longrightarrow \times$

$B\ 1\times3 \quad D\ 3\times2 \longrightarrow BD\ 1\times2$ 行列

$$BD = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$C\ 2\times1 \quad A\ 3\times1 \longrightarrow \times$

$C\ 2\times1 \quad B\ 1\times3 \longrightarrow CB\ 2\times3$ 行列

$$CB = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$C\ 2\times1 \quad D\ 3\times2 \longrightarrow \times$

$D\ 3\times\underline{2}\quad A\ \underline{3}\times 1 \longrightarrow \times$

$D\ 3\times\underline{2}\quad B\ \underline{1}\times 3 \longrightarrow \times$

$D\ 3\times\underline{2}\quad C\ \underline{2}\times 1 \longrightarrow DC$ (3×1行列)

$$DC = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1-4 答え

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 6 \\ -5 & 15 & 10 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

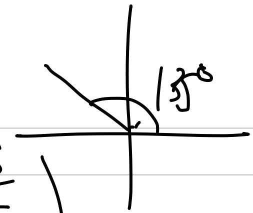
$$BA = (16)$$

$$BD = \begin{pmatrix} 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

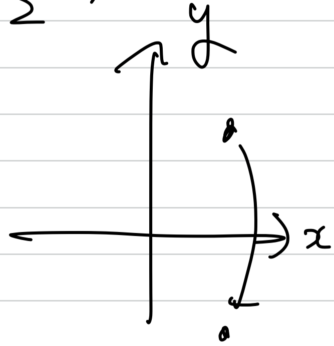
$$DC = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2 ・135度反時計回転



$$A = \begin{pmatrix} \cos 135^\circ & -\sin 135^\circ \\ \sin 135^\circ & \cos 135^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

・x軸に関しての鏡映



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

・45度反時計回転

$$C = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

よって g に対応するのは

$$CBA = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(補足 この変換は
$y=-x$ の鏡映と同じ.)

$\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を簡約化すると

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ [illegible] $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$

手順1 拡大係数行列は

$$[A \vdots \vec{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ -1 & 6 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

手順2 これを簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ -1 & 6 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 8 & 8 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$-3\ -6\ -12\ 18\ 21$
$1\ 2\ 4\ -6\ -7$
$-1\ -2\ -4\ 6\ 7$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$-2\ -2\ 10\ 12$
$-4\ -4\ 20\ 24$
$-2\ -2\ 10\ 12$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$-4 \quad -4$

$5 \quad 5$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

手順3　$C\vec{x} = \vec{d}$ を解く

つまり
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$
を解く

答
$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2s \\ x_2 = -1 - s \\ x_3 = s \\ x_4 = 1 \end{cases}$$
(s 任意)

5

(1) 線形独立である

証) $c_1\vec{a_1}+c_2\vec{a_2}+c_3\vec{a_3}=\vec{0}$ とする

つまり $\begin{pmatrix}0\\c_1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_2\\c_2\\c_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\c_3\\0\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ とする

すると $\begin{pmatrix}c_2\\c_1+c_2+c_3\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ である

$c_2=c_3=0$ がわかり $c_1+c_2+c_3=0$ より

$c_1=0$ となる

以上より「$c_1\vec{a_1}+c_2\vec{a_2}+c_3\vec{a_3}=\vec{0}$

ならば $c_1=c_2=c_3=0$」より

線形独立である

(2) 線形従属である

証 $c_1 = 1$ $c_2 = -1$ $c_4 = 1$ とおくと

$$c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + c_4\vec{a_4}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

となるため。

(3) 線形従属である

証 $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 0, c_4 = 1$ とすると

$$c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + c_3\vec{a_3} + c_4\vec{a_4} = \vec{0}$$

である。

$\boxed{6}$ (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

//

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

余因子

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

サラス

$$= 3(4 + 60 - 48 - 18)$$

$\cancel{4}6$

$$+ 8(18 - 5)$$

$$= 3 \times (-2) + 8 \times 13$$

$$= -6 + 104$$

$$= 98 \quad //$$

$\boxed{17}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \vec{a_1} & \vec{a_2} & \vec{a_3} & \vec{a_4} & \vec{a_5} & \vec{a_6} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \mathbb{R}^{\boxed{6}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\boxed{4}} \quad (n = 6,\ m = 4)$$

$$\to B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & & 4 & & 6 \end{array} \end{array} \qquad \text{rank } 4.$$

以下手順通りする

① $\dim \mathrm{Image}\, A = \mathrm{rank}\, A = 4$

② 基底は $\vec{a_1}, \vec{a_2}\ \vec{a_4}\ \vec{a_6}$

つまり $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$。

③ $\dim \mathrm{Ker} = n - \mathrm{rank}\, A = 6 - 4 = 2$

④ $A\vec{x} = \vec{0}$ (つまり $B\vec{x} = 0$) をもとめると

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

つまり $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ -s-t \\ s \\ t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$

$= s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

よって $\mathrm{Ker}A$ の基底は

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ //

⑧ とき方は 2通りある

解1 簡約化をつかう方法

手順1 係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \\ \lambda+1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

手順2 これを簡約化すると

$-2 \quad 0 \quad 2$

$-(\lambda+1) \quad 0 \quad \lambda+1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \\ \lambda+1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2\lambda+1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$-\lambda - 2\lambda^2 \cancel{+\lambda}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2\lambda+1 \\ 0 & 0 & -2\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix}$$

C

(これ以上はわからないのでここでである)

<u>例題3</u>　$C\vec{x}=\vec{0}$ をとく

つまり $\begin{cases} x_1 \quad -x_3 = 0 & \text{—①} \\ x_2 + (2\lambda+1)x_3 = 0 & \text{—②} \\ (-2\lambda^2-\lambda+1)x_3 = 0 & \text{—③} \end{cases}$

$-2\lambda^2-\lambda+1 \neq 0$ ならば $x_3=0$ で

②，①より $x_1=x_2=0$ となる 不適.

$-2\lambda^2-\lambda+1=0$ のときをしらべる

$-2\lambda^2-\lambda+1 = -(2\lambda-1)(\lambda+1)=0$ より

$\lambda=\frac{1}{2}$ のときと $\lambda=-1$ のときにわかれる

$\boxed{1}$ $\lambda=\frac{1}{2}$ のとき

解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}$ で

$x_1=x_2=x_3=0$ 以外の解あり

② $\lambda = -1$ のとき

解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$ で $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外の解あり

答 $\lambda = \frac{1}{2}$ または $\lambda = -1$

$\boxed{\text{解答2}}$ 行列式を使う方法

$\boxed{\text{補題}}$ A: n次正方行列とする

$A\vec{x}=\vec{0}$ の解が $\vec{x}=\vec{0}$ のみ

$\iff \det A \neq 0$

証 $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ 正則

$\Rightarrow A^{-1}$ が存在より

$A\vec{x}=\vec{0}$ ならば $\vec{x}=(A^{-1}A)\vec{x}=A^{-1}(A\vec{x})=\vec{0}$

となる

一方 $\det A = 0$ ならば $\operatorname{rank} A < n$ となる

よって B を A の簡約化とすると

$$B = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} \sim & 0 & \sim \\ & \vdots & \\ 0 \cdots & 0 & 0 \cdots \end{pmatrix} \\ \quad\; i \end{array}$$

と

ある第 i 列と第 n 行が 0 ベクトルとな

よって $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_i$ とすれば $B\vec{x} = \vec{0}$ となる

よって $A\vec{x} = \vec{0}$ でないとだ

以上より $\det A = 0$ なる λ をみつければより

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda & -1 \\ \lambda+1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 2 + 1 + \lambda^2 + \lambda$$

$$= 2\lambda^2 + \lambda - 1$$

$$= (2\lambda - 1)(\lambda + 1)$$ より

$\lambda = \frac{1}{2}, -1$ となる。

$\boxed{9}$

(1) AとBが正則

$\Rightarrow$ $\det A \neq 0$ かつ $\det B \neq 0$

また $\det(AA^{-1}) = \det E_n = 1$

$\quad = (\det A)(\det A^{-1})$ より

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ である}$$

以上より $\det(B^{-1}A^2B^3A^{-1})$

$$= \frac{1}{\det B} \cdot (\det A)^2 (\det B)^3 \frac{1}{\det A}$$

$$= (\det A) \times (\det B)^2$$

これは0ではないので正則。

使った定理

- $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$
- $\det A \neq 0 \iff$ Aは正則

(2) $\mathrm{Ker}A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$ であり

$x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}A$ とすると

$$A(5\vec{x_1} - 2\vec{x_2})$$

$$= 5A\vec{x_1} - 2A\vec{x_2}$$

$$= 5 \cdot \vec{0} - 2 \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

$$\therefore \quad 5\vec{x_1} - 2\vec{x_2} \in \mathrm{Ker}A$$

(3) $\det {}^tA = \det A$ より

$$\det({}^tA \cdot A) = \det E_n = 1$$

$$\parallel$$

$$(\det {}^tA)(\det A)$$

$$\Rightarrow \quad (\det A)^2 = 1$$

$\det A$は実数より $\det A = \pm 1.$

(4) $\tilde{A}$ を A の余因子行列とおくと

$$\tilde{A} \cdot A = (\det A) E_n$$ である.

ここで $\lambda = \det A$ とおくと

$$\det(\lambda E_n) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$$

上式より $(\det \tilde{A}) \cdot (\det A) = \lambda^n$

$$\Rightarrow (\det \tilde{A}) \cdot \lambda = \lambda^n$$

$$\therefore (\det \tilde{A}) = \lambda^{n-1} = (\det A)^{n-1}$$

($\lambda \neq 0$)
(A正則)

(5) 解き方は2つある

解答1 余因子行列を使う方法

$\tilde{A}A = (\det A)E_n$ で $\det A \neq 0$ より

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} \text{ である}$$

$\det A$ は A の成分が有理数より有理数

$\tilde{A}$ の (i,j) 成分は

$$(-1)^{i+j} \det A_{ji} \text{ で}$$

A_{ji} は A の第 j 行と第 i 列をくりぬいた行列なので

その行列式も有理数

$\therefore$ A^{-1} の各成分は有理数

解答2 A^{-1}の求め方をつかう

A^{-1}は$(A \,\vdots\, E_n)$の簡約化
$(E_n \,\vdots\, B)$としたときのBである

この簡約化の各ステップにおいては
すべて有理数をもちいておこなわれるので
Bの全ての成分も有理数である

補

（解答2においては厳密でなくても
ある程度うつにかいてても正答としている）

(6) 113113 構成はあると思う

② 岩井の解答

まず

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_{6 \times 6}$$

(空白は0)

の行列式は5である

よって

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_{6 \times 6}$$

の行列式も5である

(3〜6行目を1行目にたしただけ)

よって
$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & & & \\ \hline & 1 & 1 & & & \\ & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & & 1 & \\ & 1 & & & & 1 \end{array}\right)$$
の行列式も5である

(3〜6列を2列目にたしただけ)

<u>これがほしいものである</u> //

②ChatGPTの解答

修正して、行列式が 5 になる 0-1 行列を構成し直します。

少々お時間ください。構成して検算まで行います。

分析が完了しました

4×4 のすべての 0-1 行列を調べたところ、**行列式が 5 となるものは存在しません**でした。
したがって、行列のサイズを **5×5 以上**に拡大する必要があります。

次に、**5×5 の 0-1 行列**の中から、行列式が 5 になるものを探してみます。
計算量が非常に多くなるため、ランダムサンプリングを行って探索します。
見つかり次第お知らせします。

行列式がちょうど **5** になる、すべての成分が 0 または 1 の 5×5 行列の例が見つかりました：

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列の行列式は

$$\det C = 5$$

です（計算確認済み）。