11　微分形式の積分 (1)

$\mathbb{R}^n$ において，$(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ を唯一のチャートとするアトラス $\mathbb{S}$ が定める向き $[\mathbb{S}]$ を，$\mathbb{R}^n$ の**標準的な向き**といった.

55.　σ を $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換として

$$\varphi_\sigma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi_\sigma(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (x^{\sigma(1)}, x^{\sigma(2)}, \ldots, x^{\sigma(n)})$$

と定める．$(\mathbb{R}^n, \varphi_\sigma)$ を唯一のチャートとするアトラス $\mathbb{S}_\sigma$ が定める向きが標準的な向きと一致するのは，σ がどのような置換のときか.

56.　S^2 において，$U_+ = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$，$U_- = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ とし，U_+ では

$$u = \frac{x}{1+z}, \qquad v = \frac{y}{1+z},$$

U_- では

$$\tilde{u} = \frac{y}{1-z}, \qquad \tilde{v} = \frac{x}{1-z}$$

と定めることによりチャート $(U_+; u, v)$，$(U_-; \tilde{u}, \tilde{v})$ を定義する．この 2 個のチャートからなるアトラスが S^2 に向きを定めていることを示せ（S^2 の**標準的な向き**を定めるアトラスの一例）.

57.　M，N をそれぞれ m 次元，n 次元の向きづけられた σ コンパクト多様体とする.

(1)　M，N の各々について，与えられた向きを定めているアトラスを一つずつとり $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$，$\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ とし，写像 $\varphi_\alpha \times \psi_\beta \colon U_\alpha \times V_\beta \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\beta(V_\beta)$ を

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q))$$

によって定義する．$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ は積多様体 $M \times N$ に向きを定めるアトラスになっていることを示せ.

(2)　$\pi_1 \colon M \times N \to M$，$\pi_2 \colon M \times N \to N$ を各成分への射影とし，また $\omega \in \Omega_c^m(M)$，$\eta \in \Omega_c^n(N)$ とする．そのとき $\pi_1^*\omega \wedge \pi_2^*\eta$ もコンパクト台をもつこと，また (1) の $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ によって定められる $M \times N$ の向きに関して

$$\int_{M\times N} \pi_1^*\omega \wedge \pi_2^*\eta = \left(\int_M \omega\right)\left(\int_N \eta\right)$$

であることを示せ.

講義で与えた微分形式の積分の定義はあくまで理論的なもので，実際の計算にはむかない．次の問題では下記の事実を用いてよい*.

M を向きづけられた σ コンパクトな n 次元多様体とし，$\omega \in \Omega_c^n(M)$ とする．M の向きに同調する（つまり，M の向きを定めるアトラスにつけ加えても「向きを定める」という性質を崩さない）有限個のチャート (U_1, φ_1)，……，(U_k, φ_k) および M の零集合 E があって，これらがさらに次の条件をみたすとする．ただし $V_i = \varphi_i(U_i)$ と書く．

(i) 各 U_i の M における閉包 $\overline{U_i}$ はコンパクトで，$\partial U_i \subset E$.
(ii) 各 V_i は $\mathbb{R}^n$ の体積確定な（すなわち ∂V_i が零集合であるような）有界開集合で，微分同相写像 $\varphi_i^{-1} \colon V_i \to U_i$ は $\overline{V}_i$ の開近傍で定義された M への C^∞ 級写像に拡張できる．
(iii) 相異なる i，j に対し $U_i \cap U_j = \emptyset$.
(iv) $\operatorname{supp} \omega \subset \overline{U}_1 \cup \cdots \cup \overline{U}_k$.

そのとき $\displaystyle\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{V_i} (\varphi_i^{-1})^*(\omega|_{U_i})$ である．

58. $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ において

$$\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$$

とおき，ω の S^2 への引き戻しを η とする（これを S^2 の**面積形式**という）．$\displaystyle\int_{S^2} \eta$ を求めよ．ただし S^2 には標準的な向き（問題 56）が与えられているとすること．

最後に射影空間の向きづけ可能性を検討する．講義では議論する時間がないが，σ コンパクト多様体 M が向きづけ可能であることは nowhere vanishing な微分 n 形式の存在と同値である（ただし $n = \dim M$）†．問題 60 はそのことを念頭においた上での問いである．

59. $\mathbb{RP}^2$ が向きづけ不可能であることを証明せよ．［ヒント：松本幸夫『多様体の基礎』（東京大学出版会）301 ページの説明を厳密に述べなおせばよい．］

60. $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ において $\omega = x\,dy \wedge dz \wedge dw - y\,dx \wedge dz \wedge dw + z\,dx \wedge dy \wedge dw - w\,dx \wedge dy \wedge dz$ とおき，ω の S^3 への引き戻しを η とする．また $\pi \colon S^3 \to \mathbb{RP}^3$ を自然な射影とする．

(1) 写像 $\sigma \colon S^3 \to S^3$ を $\sigma(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$ で定める．$\sigma^*\eta = \eta$ を示せ．

(2) $\eta = \pi^*\alpha$ をみたす $\mathbb{RP}^3$ 上の微分 3 形式 α が存在することを示せ‡.

問題 60 の η は問題 34 の η と定数倍を除いて同じであり，したがって nowhere vanishing である．π が局所微分同相写像であることから α も nowhere vanishing．ゆえに $\mathbb{RP}^3$ は向きづけ可能．

---

*J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer の Proposition 14.7. なお E が多様体 M の**零集合**であることの定義については，松本幸夫『多様体の基礎』（東京大学出版会）の定義 15.VII をみてもよい．

†松本幸夫『多様体の基礎』（東京大学出版会）演習問題 20.6.

‡この状況を指して「η は $\mathbb{RP}^3$ 上の微分 3 形式へと descend する」という言い方をよくする．