3. 多様体上の微分形式(1)

多様体(復習)

<u>定義</u>　n次元(C^∞級)<u>多様体</u>とは次のような組$(M, \mathcal{S})$のこと.

(i)　Mは Hausdorff空間.

(ii)　$\mathcal{S}$はM上の(C^∞級)極大アトラス.

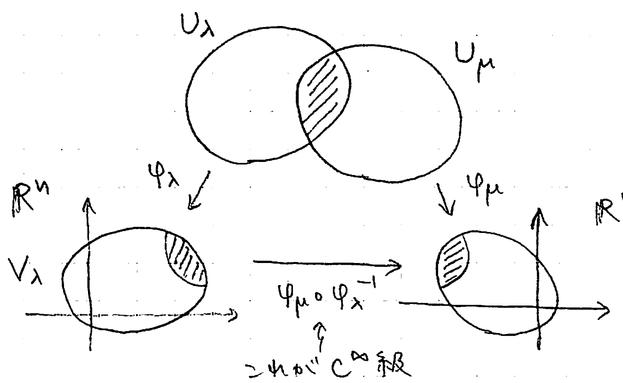
ただし(C^∞級)アトラスとは次のようなチャートのなす族$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$のこと.

(a)　各λについて

$$\varphi_\lambda : \underset{\underset{M}{\cap\,\text{open}}}{U_\lambda} \xrightarrow{\approx} \underset{\underset{\mathbb{R}^n}{\cap\,\text{open}}}{V_\lambda} \quad (\text{同相写像}).$$

(b)　$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = M.$

(c)　チャート間の座標変換がC^∞級.



アトラス$\mathcal{S}=\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$が<u>極大</u>

$\overset{\text{def}}{\iff}$　$\mathcal{S}$に新しいチャートを既存のものと整合的に追加することができない.

<u>記号</u>　$\varphi_\lambda = (x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n)$として

$(U_\lambda, \varphi_\lambda)$を$(U_\lambda; x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n)$とも書く.

※添字を上に書く習慣を採用する

接空間(復習)

各$p\in M$に対し　T_pM　n次元ベクトル空間

"無限小変位"の空間

おさえておくべきこと:

① pを含むチャート$(U; x^1, \dots, x^n)$をとれば$\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ $(i=1,\dots,n)$がT_pMの基底.

② あらゆる接ベクトルは曲線の速度ベクトルとして実現できる.

曲線$\gamma : I\to M$と$t_0\in I$に対し点$\gamma(t_0)$を含むチャート$(U; x^1,\dots,x^n)$で$\gamma(t) = (\gamma^1(t),\dots,\gamma^n(t))$と表されるとき

$$\dot\gamma(t_0) = \frac{d\gamma}{dt}\bigg|_{t=t_0} := \sum_{i=1}^n \frac{d\gamma^i}{dt}(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(t_0)}$$

③ 接ベクトルは関数に作用する.

$v\in T_pM$と$f : U\to\mathbb{R}$ (Uはpの開近傍)に対し, $\dot\gamma(t_0)=v$となる曲線γをとれば

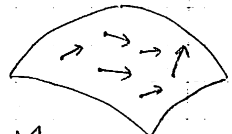
$$v(f) := \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t_0).$$

とくに

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f) = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$$

(φはチャート写像)

ベクトル場



$X=\{X_p\}_{p\in M}$,　$X_p\in T_pM$

という接ベクトルの族のこと.

$$X : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & TM \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ p & \longmapsto & X_p \end{array} \quad \left(:= \bigsqcup_{p\in M} T_pM\right)$$

という写像ととらえることも多い.

各チャート $(U; x^1, \dots, x^n)$ では

$$X|_U = \sum_{i=1}^{n} f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

U上の関数　　各点で $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$

と表せる（X の局所座標表示）.

X が C^∞ 級 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ すべてのチャートで各 f^i が C^∞ 級
（$X \in \mathfrak{X}(M)$）

任意の微分1形式 ω は各チャートでは

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^{n} f_i \, dx^i$$

と表せる（ω の局所座標表示）.

ω が C^∞ 級 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ すべてのチャートで各 f_i が C^∞ 級
（$\omega \in \Omega^1(M)$）

余接空間，微分1形式

各 $p \in M$ において接ベクトルを代入できる対象を考え，そのようなものの"場"を微分1形式とよぶ.

定義　$T_p^*M := (T_pM)^*$

$= \{ \alpha : T_pM \to \mathbb{R} \text{ 線型} \}$　余接空間
cotangent space

定義　M上の微分1形式とは

$$\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}, \quad \omega_p \in T_p^*M$$

という余接ベクトルの族のこと.

$$\begin{array}{cccc} \omega : & M & \longrightarrow & T^*M \left(:= \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M \right) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & p & \longmapsto & \omega_p \end{array}$$

という写像ととらえることも多い.

定義　Mのチャート $(U; x^1, \dots, x^n)$ と $p \in U$ に対し

$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$　T_pM の基底

$\updownarrow$ 双対基底

$(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p$　T_p^*M の基底

また　$dx^i = \{(dx^i)_p\}_{p \in M}$　と書く.

チャートのとりかえ．2つのチャート $(U; x^1, \dots, x^n)$, $(\tilde{U}; \tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ に対し $U \cap \tilde{U}$ 上では

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}$$

$$\therefore \; dx^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^j .$$

このことから次がわかる.

命題3.1　上記のように2つのチャートを考える.

(1)　ベクトル場 X について

$$X|_U = \sum f^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X|_{\tilde{U}} = \sum \tilde{f}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} f^j \quad (U \cap \tilde{U} \text{ 上で}).$$

(2)　微分1形式 ω について

$$\omega|_U = \sum f_i dx^i, \quad \omega|_{\tilde{U}} = \sum \tilde{f}_i d\tilde{x}^i$$

$$\Rightarrow \tilde{f}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} f_j \quad (U \cap \tilde{U} \text{ 上で}).$$

注　命題3.1より X や ω が C^∞ 級であることを確かめるには「$\mathcal{S}$ のある部分アトラス $\mathcal{S}'$ に属するすべてのチャートで各係数関数が C^∞ 級」だけで十分.