9 Mayer–Vietoris 完全列 (2)

Mayer–Vietoris 完全列を用いて de Rham コホモロジーを計算する問題を並べる．ここでは「$H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ を求めよ」とは「$H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ のベクトル空間としての同型類を決定せよ」の意味（もっと有り体にいえば「$H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ の次元を決定せよ」の意味）であり，微分形式を用いて具体的に記述せよということではない．

46. 実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ を考える．球面 S^2 からの自然な射影を $\pi\colon S^2 \to \mathbb{RP}^2$ で表す．
S^2 の赤道 $S^2 \cap \{z=0\}$ の π による像を $\mathbb{RP}^1$ と書く．$\mathbb{RP}^1$ は $\mathbb{RP}^2$ の部分多様体で，もちろん S^1 と微分同相である．さらに，$(0,0,1) \in S^2$ の π による像を p_0 と書く．
   (1) $U = \mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{RP}^1$，$V = \mathbb{RP}^2 \setminus \{p_0\}$ とおく．以下の 3 つのことを確かめよ．
      (a) U は C^∞ **可縮**である．すなわち一点（のみからなる部分多様体）を C^∞ 変位レトラクトとしてもつ．
      (b) V は $\mathbb{RP}^1$ を C^∞ 変位レトラクトとしてもつ．［ヒント：問題 42.］
      (c) $U \cap V$ は S^1 と微分同相な部分多様体を C^∞ 変位レトラクトとしてもつ．
   (2) $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{RP}^2)$ を $k=0$，1，2 について求めよ．

47. $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ の de Rham コホモロジー $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ を $k=0$，1，2 について求めよ．ただし $p_i = (i, 0)$ とする．

実は，問題 47 で n 点が一直線上に並んでいなくても結論は同じである．なぜだろうか．なおアイソトピー拡張定理によれば一般の n 点に対する M と一直線上に並んだ n 点に対する M は微分同相だが*，その事実に頼らなくてもわかるはずだ．

類似の問題として，絹田村子『数字であそぼ。』5 巻（フラワーコミックスアルファ，小学館）135 ページに「$\mathbb{R}^3$ からどの 2 本も互いに交わらない n 本の直線を除いた空間の de Rham コホモロジーを求めよ」というものがでてくる．これも考えてみよう．

48. $\mathbb{R}^3$ の平面 $z=0$ 上にある原点を中心とする単位円周を C とし，$M = \mathbb{R}^3 \setminus C$ とおく．
   (1) M が，$\mathbb{R}^3$ から 1 本の直線とその上にない 1 点を除いて得られる $\mathbb{R}^3$ の開集合 N に微分同相であることを示せ．［ヒント：立体射影を 2 回用いる．］
   (2) $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ を $k=0$，1，2，3 について求めよ．

49. $M = S^1 \times S^2$ とおく．$H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ を $k=0$，1，2，3 について求めよ．

問題 49 は，Künneth の公式を使えば結論はすぐにえられるが，Mayer–Vietoris 完全列だけでもなんとかなると思う．$M = S^1 \times S^2$ の開被覆 $\{U, V\}$ を何通りも考えてみよ．

---

*田村一郎『微分位相幾何学』（岩波書店）もしくは M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer をみよ．

T^n の de Rham コホモロジーの計算を，$\mathbb{R}^n$ 上の周期的な微分形式に関する計算に帰着して行うこともできる．ここでは $n=2$ に対する H^1_{dR} の場合を考えてみたい．

$\pi\colon \mathbb{R}^2 \to T^2 = S^1 \times S^1$ を

$$(s,t) \longmapsto ((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$$

で定義する．また，$(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ に対し $\mathbb{R}^2$ 上の平行移動 $(x,y) \longmapsto (x+m, y+n)$ を $\tau_{(m,n)}$ であらわす．

任意の $f \in C^\infty(T^2)$ に対し，$\mathbb{R}^2$ への引き戻し $F = \pi^* f = f \circ \pi$ は $\tau_{(m,n)}$ に関して不変である．すなわち

$$F(x+m, y+n) = F(x,y). \tag{$*$}$$

逆に，$(*)$ のとき F はある $f \in C^\infty(T^2)$ に対する $f \circ \pi$ に一致する（確認は各自にまかせる）．以上で

$$C^\infty(T^2) \to \{F \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \mid F \text{ は } (*) \text{ をみたす}\}, \qquad f \longmapsto f \circ \pi$$

という一対一対応がえられる．

また任意の $\omega \in \Omega^1(T^2)$ に対し，$\mathbb{R}^2$ への引き戻し $\tilde{\omega} = \pi^*\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ を $\varphi\, dx + \psi\, dy$ とあらわすと，$\tau_{(m,n)}^* \tilde{\omega} = (\tau_{(m,n)}^* \circ \pi^*)\omega = (\pi \circ \tau_{(m,n)})^*\omega = \pi^*\omega = \tilde{\omega}$ より φ，ψ は

$$\varphi(x+m, y+n) = \varphi(x,y), \qquad \psi(x+m, y+n) = \psi(x,y) \tag{$**$}$$

をみたす．逆に，$(**)$ のとき $\varphi\, dx + \psi\, dy$ がある $\omega \in \Omega^1(T^2)$ に対する $\pi^*\omega$ に一致することもいえる．そうして

$$\Omega^1(T^2) \to \{\varphi\, dx + \psi\, dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2) \mid \varphi,\ \psi \text{ は } (**) \text{ をみたす}\}, \qquad \omega \longmapsto \pi^*\omega$$

という一対一対応がえられる．

50. (1) $\omega \in \Omega^1(T^2)$ が閉形式なら $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$ も閉形式である．その理由を説明せよ．また，このとき $\tilde{\omega} = \varphi\, dx + \psi\, dy$ とおけば $\mathbb{R}^2$ 全体で $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ であることを示せ．

(2) $\omega \in \Omega^1(T^2)$ を閉形式とし，$\tilde{\omega} = \varphi\, dx + \psi\, dy$ とおく．

$$p_\omega = \int_0^1 \varphi(s,y)\, ds, \qquad q_\omega = \int_0^1 \psi(x,t)\, dt$$

がそれぞれ y，x に依存しない定数であることを示せ．

(3) $\omega \in \Omega^1(T^2)$ が閉形式ならば $\tilde{\omega}$ も閉形式だが，$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^2) = 0$ より $\tilde{\omega}$ は完全形式で，$dF = \tilde{\omega}$ をみたす $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ が存在する．そのような F を任意に一つとると，

$$\begin{aligned} F(x,y) &= F(0,0) + \int_0^x \varphi(s,0)\, ds + \int_0^y \psi(x,t)\, dt \\ &= F(0,0) + \int_0^y \psi(0,t)\, dt + \int_0^x \varphi(s,y)\, ds \end{aligned}$$

であることを示せ．

(4) 上記の F が $(*)$ をみたすためには，$p_\omega = q_\omega = 0$ が必要十分であることを示せ．

(5) 閉微分 1 形式の空間 $\operatorname{Ker} d^{(1)} \subset \Omega^1(T^2)$ について写像 $\operatorname{Ker} d^{(1)} \to \mathbb{R}^2$，$\omega \longmapsto (p_\omega, q_\omega)$ を考えることにより，$H^1_{\mathrm{dR}}(T^2) \cong \mathbb{R}^2$ を示せ．