# 4. 多様体上の微分形式 (2)

## ベクトル空間上の交代形式

しばらく線型代数の一般論を展開する。あとで $V = T_pM$ とする。

**定義** ベクトル空間 $V$ に対し

$$\otimes^k V^* := \{ V \text{上の } k \text{ 重線型形式} \}$$

$$= \{ \mu : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k\text{個}} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \mu \text{は各変数について線型} \}$$

**定義** $\mu \in \otimes^k V^*$ に対し

$\mu$ は<u>対称形式</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mu(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \mu(v_1, \ldots, v_k)$

$\mu$ は<u>交代形式</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\mu(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)\,\mu(v_1, \ldots, v_k)$$

ただし $v_1, \ldots, v_k \in V$, $\sigma \in S_k$ (対称群)。

$$S^k V^* := \{ \mu \in \otimes^k V^* \mid \mu \text{は対称形式} \}$$

$$\Lambda^k V^* := \{ \mu \in \otimes^k V^* \mid \mu \text{は交代形式} \}$$

これらは $\otimes^k V^*$ の部分ベクトル空間。

**注** $k=1$ のときは $\otimes^1 V^* = S^1 V^* = \Lambda^1 V^* = V^*$.

$k=0$ のときは $\otimes^0 V^* = S^0 V^* = \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$ と定める。

**定義** $\alpha^1, \ldots, \alpha^k \in V^*$ に対し

$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k \in \Lambda^k V^*$ を次で定義する：

$$(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(v_1, \ldots, v_k) = \det \underbrace{\boxed{(\alpha^i(v_j))}}_{k\times k\text{行列}}.$$

順番の入れかえについて次が成立する：$\sigma \in S_k$ に対し

$$\alpha^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \alpha^{\sigma(k)} = (\operatorname{sgn}\sigma)\, \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k.$$

とくに $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ のうちに同じものがあると $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k = 0$.

**命題 4.1** $\dim V = n\ (= \dim V^*)$ で $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ が $V^*$ の基底であるとき

$$\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_k} \quad (i_1 < \cdots < i_k)$$

の形の元全体が $\Lambda^k V^*$ の基底をなす。

(証明は略.)

**注** $k \geq n+1$ のときは $\Lambda^k V^* = 0$ である。

## 外積 (ウェッジ積)

**定義** $\mu \in \Lambda^k V^*$, $\mu' \in \Lambda^l V^*$ に対し

$\mu \wedge \mu' \in \Lambda^{k+l} V^*$ を次で定義する：

$$(\mu \wedge \mu')(v_1, \ldots, v_{k+l}) := \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma)\, \mu(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \times \mu'(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

**命題 4.2** $\wedge$ は結合法則をみたす。

さらに，$\mu \in \Lambda^k V^*$, $\mu' \in \Lambda^l V^*$, $\mu'' \in \Lambda^m V^*$ に対し

$\mu \wedge \mu' \wedge \mu''$ は次で与えられる：

$$(\mu \wedge \mu' \wedge \mu'')(v_1, \ldots, v_{k+l+m}) = \frac{1}{k!\,l!\,m!} \sum_{\sigma \in S_{k+l+m}} (\operatorname{sgn}\sigma)\, \mu(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \times \mu'(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})\, \mu''(v_{\sigma(k+l+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l+m)}).$$

**注** $\alpha^1, \ldots, \alpha^k \in V^*$ に対し前に定義した $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k$ は，いま定義した外積の特別な場合である。

## 多様体上の微分k形式

**定義** M上の微分k形式とは

$\omega = \{\omega_p\}_{p\in M}$, $\omega_p \in \Lambda^k T_p^* M$ という族のこと。

$$\omega: \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \Lambda^k T^*M \left( := \bigsqcup_{p\in M} \Lambda^k T_p^* M \right) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ p & \longmapsto & \omega_p \end{array}$$

という写像とみなすことも多い。

**定義** Mのチャート$(U; x^1, \dots, x^n)$において

$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \{(dx^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k})_p\}_{p\in M}$.

すると任意の微分k形式$\omega$はU上で

$$\omega|_U = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1\cdots i_k}\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

と表される（$\omega$の局所座標表示）。

**定義** $\omega$が$C^\infty$級 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意のチャートに関する局所座標表示で各$f_{i_1\cdots i_k}$が$C^\infty$級.

$\Omega^k(M) := \{ M\text{上の}C^\infty\text{級微分}k\text{形式} \}$.

**注** これはさらに「$\mathcal{S}$のある部分アトラス$\mathcal{S}'$に属する各チャートに関する局所座標表示で各$f_{i_1\cdots i_k}$が$C^\infty$級」とも同値.

それは次の変換則による。

**命題 4.3** 微分k形式$\omega$を2つのチャート$(U; x^1, \dots, x^n)$, $(\tilde{U}; \tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$において局所座標表示したとき、$U \cap \tilde{U}$において

$$\tilde{f}_{i_1\cdots i_k} = \sum_{j_1<\cdots<j_k} \boxed{\frac{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})}{\partial(\tilde{x}^{i_1}, \dots, \tilde{x}^{i_k})}} f_{j_1\cdots j_k}$$

↑座標変換のJacobi行列式

**例** $\mathbb{R}^2$において$\omega = dx\wedge dy$とおく。

また$\tilde{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\}$とおき

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}\ (\in(-\pi,\pi))$$

と定める. $(\tilde{U}; r, \theta)$も$\mathbb{R}^2$のチャートである。

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ なので

$$dx = \cos\theta\cdot dr - r\sin\theta\cdot d\theta,$$

$$dy = \sin\theta\cdot dr + r\cos\theta\cdot d\theta.$$

$$\therefore\ dx\wedge dy = \cos\theta\cdot r\cos\theta\ dr\wedge d\theta - r\sin\theta\cdot\sin\theta\ d\theta\wedge dr = r\ dr\wedge d\theta.$$

命題4.3によるとこれを$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$を計算することでも導ける。（しかし多くの場合，命題4.3を使うより上記のように直接計算してしまうほうが実用的だと思う。）

## ベクトル場を代入すること

$\omega\in\Omega^k(M)$, $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$に対し

$$p \mapsto \omega_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p)$$

で与えられる関数を$\omega(X_1, \dots, X_k)$と書く。