相対的反標準因子の asymptotic base loci について

(江尻 祥氏 (大阪大学) と松村 慎一氏 (東北大学) との共同研究)

岩井雅崇

阪市大数学研

2020 年 9 月 22 日 日本数学会 秋季総合分科会 函数論分科会

X : n 次元射影複素代数多様体, L : X 上の因子 (直線束)

- L : 豊富 (ample) $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_{>0}, \exists s_0, \ldots, s_N \in H^0(X, mL)$ s.t.
$$\begin{array}{rccc} \Phi_{|mL|} : & X & \to & \mathbb{CP}^N \\ & x & \mapsto & (s_0(x) : \cdots : s_N(x)) \end{array}$$
が閉埋め込み.
- L : 半豊富 (semiample) $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_{>0}, \forall x \in X,$ $\exists s \in H^0(X, mL)$ s.t. $s(x) \neq 0$.
- L : ネフ (nef) $\Leftrightarrow \forall$ カーブ $C \subset X$, $L.C := \int_C c_1(L) \geq 0$.
- L : 巨大 (big) $\Leftrightarrow \dim H^0(X, mL) = O(m^n)\ \forall m \gg 0$.
- L : 擬有効 (pseudo-effective) $\Leftrightarrow \exists$ 豊富因子 A, $\forall m \in \mathbb{N}_{>0}$ s.t. $mL + A$ は巨大.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{豊富}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{半豊富}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{ネフ}} \arrow[d, Rightarrow] \\ \boxed{\text{巨大}} \arrow[rr, Rightarrow] & & \boxed{\text{擬有効}} \end{tikzcd}$$

例

- $L = \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^N}(1)$ は豊富.
- X : 楕円曲線, $L \in Pic^0(X)$. 豊富でない.
  L はネフ ($\deg_X(L) = 0$).
  L が半豊富 $\Leftrightarrow$ L が torsion point.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{豊富}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{半豊富}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{ネフ}} \arrow[d, Rightarrow] \\ \boxed{\text{巨大}} \arrow[rr, Rightarrow] & & \boxed{\text{擬有効}} \end{tikzcd}$$

- $e \in \mathbb{N}_{>0}$, $E := \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-e)$, $X = \mathbb{P}(E)$, $\pi : X \to \mathbb{CP}^1$.
  $L := -K_{X/\mathbb{CP}^1} := -(K_X - \pi^* K_{\mathbb{CP}^1})$.
  (L は直線束 $\det(\Omega^1_X)^* \otimes \pi^* \det(\Omega^1_{\mathbb{CP}^1})$ に対応する因子).

$$\dim H^0(X, mL) = \dim H^0(\mathbb{CP}^1, \mathrm{Sym}^{2m} E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(me))$$
$$= \sum_{i=-m}^{m} \dim H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_C(ie)) = \frac{(me+2)(m+1)}{2}$$

  よって L は巨大.
- 上の例は全て擬有効.

これらの正値性 (豊富, ネフ,...) は代数幾何学 (双有理幾何学) を研究する上では基本的な概念.

先行研究

$f : X \to Y$ 複素射影代数多様体間のファイバー連結な全射.
K_X 標準因子 ($\det \Omega^1_X$ に対応する因子).
$-K_{X/Y} := -(K_X - f^* K_Y)$ 相対的反標準因子.

Theorem (KMM 92)

$-K_{X/Y}$ が豊富ならば, $\dim Y = 0$.

Theorem (Cao19, CH19, CCM19)

$-K_{X/Y}$ がネフならば, f は解析的ファイバー束.

f : 解析的ファイバー束 $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y$, y を含む Euclid 開集合
$\exists U \subset Y$ s.t. $f^{-1}(U) \cong U \times f^{-1}(y)$.

$-K_{X/Y}$ は (豊富・ネフなどの) 正値性を持ちづらい.

研究目的

$$\begin{tikzcd}
\text{豊富} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{半豊富} \arrow[r, Rightarrow] & \text{ネフ} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{巨大} \arrow[rr, Rightarrow] & & \text{擬有効}
\end{tikzcd}$$

$-K_{X/Y}$ は巨大や擬有効になりづらいと予想.

研究目的

先行研究を巨大や擬有効に拡張したい.

しかし純粋な一般化はできない.

(前のスライドの例)
$e \in \mathbb{N}_{>0}$, $E := \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-e)$, $X = \mathbb{P}(E)$, $\pi : X \to \mathbb{CP}^1$.
$-K_{X/\mathbb{CP}^1}$ は巨大. しかし $\dim \mathbb{CP}^1 \neq 0$.

Asymptotic base loci

因子 L の正値性を測る他の指標として, 3 つの集合 $\mathbb{B}_+(L)$, $\mathbb{B}(L)$, $\mathbb{B}_-(L)$ がある.
以下, 豊富因子 A を一つとる.

- Base locus

$$Bs(L) := \{x \in X : \forall s \in H^0(X, L), s(x) = 0\}.$$

- Stable base locus

$$\mathbb{B}(L) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}_{>0}} Bs(mL).$$

- Augmented base locus

$$\mathbb{B}_+(L) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}_{>0}} \mathbb{B}(mL - A).$$

- Restricted base locus

$$\mathbb{B}_-(L) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}_{>0}} \mathbb{B}(mL + A).$$

Asymptotic base loci

- $\mathbb{B}_+(L), \mathbb{B}(L), \mathbb{B}_-(L)$ はそれぞれ X の部分集合.
- $\mathbb{B}_+(L) \subset \mathbb{B}(L) \subset \mathbb{B}_-(L)$.
- 以下の関係がある.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\begin{array}{c} L\text{ が半豊富} \\ \Leftrightarrow \mathbb{B}(L) = \phi \end{array}} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\boxed{\begin{array}{c} L\text{ が豊富} \\ \Leftrightarrow \mathbb{B}_+(L) = \phi \end{array}} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \boxed{\begin{array}{c} L\text{ がネフ} \\ \Leftrightarrow \mathbb{B}_-(L) = \phi \end{array}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\begin{array}{c} L\text{ が巨大} \\ \Leftrightarrow \mathbb{B}_+(L) \neq X \end{array}} \arrow[rr, Rightarrow] & & \boxed{\begin{array}{c} L\text{ が擬有効} \\ \Leftrightarrow \mathbb{B}_-(L) \neq X \end{array}}
\end{tikzcd}
$$

Theorem (EIM 20)

$f : X \to Y$ 複素射影代数多様体間のファイバー連結な全射.

1. $f\big(\mathbb{B}_{+}(-K_{X/Y})\big) \neq Y$ ならば, $\dim Y = 0$.
2. $f\big(\mathbb{B}_{-}(-K_{X/Y})\big) \neq Y$ ならば, $\mathbb{B}_{-}(-K_{X/Y}) = \phi$.
   ($-K_{X/Y}$ はネフ). 特に f は解析的ファイバー束である.
3. (*c.f. Ambro 05*) $f\big(\mathbb{B}(-K_{X/Y})\big) \neq Y$ ならば, $\mathbb{B}(-K_{X/Y}) = \phi$.
   ($-K_{X/Y}$ は半豊富). さらに, F を f のファイバーとして, ある有限被覆 $Y' \to Y$ があり, $X \times_Y Y' \cong F \times Y'$.
   (有限被覆で持ち上げると直積の構造を持つ).

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\begin{array}{c} L\text{ が半豊富} \\ \Leftrightarrow \mathbb{B}(L) = \phi \end{array}} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\boxed{\begin{array}{c} L\text{ が豊富} \\ \Leftrightarrow \mathbb{B}_{+}(L) = \phi \end{array}} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \boxed{\begin{array}{c} L\text{ がネフ} \\ \Leftrightarrow \mathbb{B}_{-}(L) = \phi \end{array}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\begin{array}{c} L\text{ が巨大} \\ \Leftrightarrow \mathbb{B}_{+}(L) \neq X \end{array}} \arrow[rr, Rightarrow] & & \boxed{\begin{array}{c} L\text{ が擬有効} \\ \Leftrightarrow \mathbb{B}_{-}(L) \neq X \end{array}}
\end{tikzcd}
$$

先行研究と主定理の関係

[KMM92]
$-K_{X/Y}$ が豊富
$(\mathbb{B}_+(-K_{X/Y}) = \phi)$
$\Rightarrow \dim Y = 0$

$\downarrow$ 一般化

[EIM 20]
$f\left(\mathbb{B}_+(-K_{X/Y})\right) \neq Y$
$\Rightarrow \dim Y = 0$,
$-K_{X/Y} = -K_X$ は豊富

[Cao19, CH19, CCM19]
$-K_{X/Y}$ がネフ
$(\mathbb{B}_-(-K_{X/Y}) = \phi)$
$\Rightarrow f$ は解析的ファイバー束

$\downarrow$ 一般化

[EIM 20]
$f\left(\mathbb{B}_-(-K_{X/Y})\right) \neq Y$
$\Rightarrow -K_{X/Y}$ はネフ,
f は解析的ファイバー束

[EIM20]
$f\left(\mathbb{B}(-K_{X/Y})\right) \neq Y$
$\Rightarrow -K_{X/Y}$ が半豊富 $(\mathbb{B}(-K_{X/Y}) = \phi)$,
$\exists$ 有限被覆 $Y' \to Y$, $X \times_Y Y' \cong F \times Y'$