Bibliography

[Rud] W. Rudin. *Functional analysis.* 2nd edn. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York. (1991.)

[NO] J. Noguchi, T.Ochiai *Geometric Function Theory in Several Complex Variables* Translations of Mathematical Monographs Volume: 80; 1990; 282 pp

NO
[NO, Chapter 3] を参考にしている.

0.1 Current

M 2nd countable$m$ 次元 C^∞ 級多様体とする.

Recall $M \subset \mathbb{R}^m$ の時 $C^\infty(M)$ には次の位相を次で入れていた.

$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$ というコンパクト集合であって

$$K_i \subset K_{i+1}^\circ \quad \text{and} \quad M = \bigcup K_i^\circ$$

となるものを一つ固定し, $f \in C^\infty(M)$ について, $N \in \mathbb{Z}_+$ として

$$P_N(f) := \max\{|D^\alpha f(x)| \mid |\alpha| \leq N \& x \in K_N\}$$

$$V_N := \max\{f \in C^\infty(M) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$$

を 0 の open base とするような位相を入れていた.

$K \subset M$ コンパクトに対して

$$\mathcal{D}_K(M) := \{\phi \in C^\infty(M) \mid \mathrm{Supp}(\phi) \subset K\} \subset C^\infty(M)$$

に対して相対位相を入れて

$$\mathcal{D}(M) := \bigcup_{K \subset M | K \text{ cpt}} \mathcal{D}_K(M) \cong \varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$$

この colimit は locally convex vector space での colimit である.

lem-E-1

Lemma 0.1.1. *1.* $U, U' \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とする. $U \cong U'$ を微分同相とする時, $C^\infty(U) \cong C^\infty(U')$ である. ここでこの同型は位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型である

2. $M \subset \mathbb{R}^m$ 開集合とし, $M = \bigcup U_i$ を可算個の開被覆とする時

$$C^\infty(M) \hookrightarrow \prod C^\infty(U_i) \quad f \mapsto \{f|_{U_i}\}$$

とすると, $C^\infty(M)$ の位相はこの直積位相 $\prod C^\infty(U_i)$ によって引き起こされる位相となる. 特に

$$C^\infty(M) \cong \mathrm{Eq}(\prod C^\infty(U_i) \rightrightarrows \prod C^\infty(U_i \cap U_j))$$

という位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型を得る.

Proof. (1). 以下 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset U$ というコンパクト集合で $C^\infty(U)$ の位相を誘導するものを一つ固定する. $\Phi : U' \to U, (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (y, \ldots, y_m)$ を微分同相写像とする. すると $K_i' := \Phi(K_i)$ によって, $C^\infty(U')$ の位相を誘導する. V_N, V_N' を上の通りとする.

さてその引き戻し

$$\Phi^* : C^\infty(U) \to C^\infty(U') \quad f(y) \mapsto f \circ \Phi(x) = f(y(x))$$

が位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型を誘導することを示す.

$f \in C^\infty(U)$ について chain rule より, $|\alpha| \le N'$ について

$$D_x^\alpha f \circ \Phi(x) := \sum_{|\beta| \le N'} (D_y^\beta f)(y(x)) \cdot \Phi_{\alpha\beta}(x) \tag{0.1.1}$$

eq-lem-E-1

である.

Φ が 0 の近傍で連続であることを示せば良い. 任意の N' について, $K_{N'}$ コンパクトなので, $K_{N'}$ 上では $|\Phi_{\alpha\beta}(x)| \le C_{N'}$ となる $C_{N'}$ が取れる. よって $N' \cdot \frac{1}{N} \cdots C_{N'} < \frac{1}{N'}$ となる N をとれば, $f \circ \Phi \in \Phi^*(V_N)$ について

$$|D_x^\alpha f \circ \Phi(x)| \overset{\texttt{eq-lem-E-1}}{\underset{(0.1.1)}{\le}} \sum_{|\beta| \le N} \underbrace{|(D_y^\beta f)(y(x))|}_{< \frac{1}{N}} \cdot |\Phi_{\alpha\beta}(x)| \le N' \cdot \frac{1}{N} \cdot C_{N'} < \frac{1}{N}$$

よって「任意の $N' > 0$ について, ある $N > 0$ があって, $\Phi^*(V_N) \subset V_{N'}'$ である」ため Φ は 0 の近傍で連続である.

(2) $M = \bigcup_{i=1}^\infty U_i$ とする. 各 U_i で

$$K_{i1} \subset K_{i2} \subset \cdots \subset U_i$$

で $U_i = \bigcup_j K_{ij}^\circ$ となるコンパクト列をとる．そこで $K_N := \bigcup_{i=1}^N K_{i,N}$ とすると

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$$

であって, $K_i \subset K_{i+1}^\circ$ かつ $M = \bigcup K_i^\circ$ となる.
さて $\prod C^\infty(U_i)$ の 0 での local base は

$$\{V_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}} := V_{i_1,N_{i_1}} \times V_{i_2,N_{i_2}} \times \cdots \times V_{i_l,N_{i_l}} \times \prod_{i \neq i_k} C^\infty(U_i) \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_l, N_{i_k} \in \mathbb{Z}_+\}$$

となる形のものである．ここで

- $\boldsymbol{i} := (i_1, i_2, \ldots, i_l), \boldsymbol{N} := (N_{i_1}, N_{i_2}, \ldots, N_{i_l})$ と定める.
- $V_{i,N} := \{f \in C^\infty(U_i) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$ である (ここの定義での $P_N(f)$ には $K_{i,N}$ をつかう.)

一方で $V_N := \{f \in C^\infty(M) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$(ここの定義での $P_N(f)$ には K_{iN} をつかう.) であり, これは $C^\infty(M)$ の 0 での local base である．以上より, 次の二つを示せば良い.

- 任意の $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{N}$ について, ある N があって, $V_N \subset V_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}} \cap C^\infty(M)$ が成り立つ.
- 任意の N について, ある $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{N}$ があって, $V_N \supset V_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}} \cap C^\infty(M)$ が成り立つ.

$$\begin{aligned}
V_N &:= \left\{ f \in C^\infty(M) \mid x \in K_N := \bigcup_{i=1}^N K_{i,N}, |\alpha| \leq N, |D_\alpha f(x)| < \frac{1}{N} \right\} \\
&\underset{\text{def}}{=} \left(V_{1,N} \times V_{2,N} \times \cdots \times V_{N,N} \times \prod_{i>N} C^\infty(U_i) \right) \cap C^\infty(M) \\
&\underset{\text{def}}{=} V_{(1,2,\ldots,N),(N,\ldots,N)} \cap C^\infty(M)
\end{aligned}$$

である．これより二つ目の主張が正しいことがいえる．一つ目の主張は任意の $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{N}$ について,

$$V_{\max\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}\}} \subset V_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}} \cap C^\infty(M)$$

なので言える. □

defn-E-2

Definition 0.1.2. M 2nd countable$m$ 次元 C^∞ 級多様体とする．$C^\infty(M)$ に位相を次のように入れる.

まず $M = \bigcup_{l=1}^{\infty} U_i$ で $U_i \subset \mathbb{R}^m$ となる countable open cover を一つ固定する．そして，

$$C^\infty(M) \hookrightarrow \prod_i C^\infty(U_i) \quad f \longmapsto (f|_{U_i})$$

による部分位相を $C^\infty(M)$ に入れる．つまり，

$$C^\infty(M) \cong \mathrm{Eq}(\prod C^\infty(U_i) \rightrightarrows \prod C^\infty(U_i \cap U_j))$$

となるように入れる．

Remark 0.1.3. defn-E-2 0.1.2 による位相の定義において，U_i の取り方によらない．

Proof. 別の U'_j をとると細分 $U_i \cap U'_j$ が取れる．よって次の図式が考えられる．

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(M) \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \prod C^\infty(U_i) \arrow[dr, hook] & \\
& \prod C^\infty(U'_j) \arrow[r, hook] & \prod C^\infty(U_i \cap U'_j)
\end{tikzcd}$$

そこで”相対位相の直積は相対位相になる”ので，lem-E-1 0.1.1 より言える． □

これにより

$$C^\infty : (U \underset{open}{\subset} M) \mapsto C^\infty(U)$$

は $\mathbb{C}$ ベクトル空間の sheaf となる．よって $K \subset M$ に対して

$$\mathcal{D}_K(M) := \{\phi \in C^\infty(M) \mid \mathrm{Supp}(\phi) \subset K\}$$

として $C^\infty(M)$ の部分位相を入れる．

$$\mathcal{D}(M) := \bigcup_{K \subset M | K \text{ cpt}} \mathcal{D}_K(M) \cong \varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$$

この colimit は locally convex vector space での colimit である．

[指摘] この colim は存在する？ やっぱり Section 1 でやったような位相の入れ方にもう一回戻る?
$\varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$ については次回再考．