Bibliography

[Rud] W. Rudin. *Functional analysis.* 2nd edn. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York. (1991.)

[NO] J. Noguchi, T.Ochiai *Geometric Function Theory in Several Complex Variables* Translations of Mathematical Monographs Volume: 80; 1990; 282 pp

NO
[NO, Chapter 3] を参考にしている.

0.1 Current

0.1.1 current

M 2nd countable$m$ 次元 C^∞ 級多様体とする.

Recall $M \subset \mathbb{R}^m$ の時 $C^\infty(M)$ には次の位相を次で入れていた.

$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$ というコンパクト集合であって

$$K_i \subset K_{i+1}^\circ \quad \text{and} \quad M = \bigcup K_i^\circ$$

となるものを一つ固定し, $f \in C^\infty(M)$ について, $N \in \mathbb{Z}_+$ として

$$P_N(f) := \max\{|D^\alpha f(x)| \mid |\alpha| \leq N \& x \in K_N\}$$

$$V_N := \max\{f \in C^\infty(M) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$$

を 0 の open base とするような位相を入れていた.

$K \subset M$ コンパクトに対して

$$\mathcal{D}_K(M) := \{\phi \in C^\infty(M) \mid \mathrm{Supp}(\phi) \subset K\} \subset C^\infty(M)$$

に対して相対位相を入れて

$$\mathcal{D}(M) := \bigcup_{K \subset M | K \text{ cpt}} \mathcal{D}_K(M) \cong \varinjlim_{K} \mathcal{D}_K(M)$$

この colimit は locally convex vector space での colimit である.

lem-E-1

Lemma 0.1.1. *1.* $U, U' \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とする. $U \cong U'$ を微分同相とする時, $C^\infty(U) \cong C^\infty(U')$ である. ここでこの同型は位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型である

2. $M \subset \mathbb{R}^m$ 開集合とし, $M = \bigcup U_i$ を可算個の開被覆とする時

$$C^\infty(M) \hookrightarrow \prod C^\infty(U_i) \quad f \mapsto \{f|_{U_i}\}$$

とすると, $C^\infty(M)$ の位相はこの直積位相 $\prod C^\infty(U_i)$ によって引き起こされる位相となる. 特に

$$C^\infty(M) \cong \mathrm{Eq}(\prod C^\infty(U_i) \rightrightarrows \prod C^\infty(U_i \cap U_j))$$

という位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型を得る.

Proof. (1). 以下 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset U$ というコンパクト集合で $C^\infty(U)$ の位相を誘導するものを一つ固定する. $\Phi : U' \to U, (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (y, \ldots, y_m)$ を微分同相写像とする. すると $K_i' := \Phi(K_i)$ によって, $C^\infty(U')$ の位相を誘導する. V_N, V_N' を上の通りとする.

さてその引き戻し

$$\Phi^* : C^\infty(U) \to C^\infty(U') \quad f(y) \mapsto f \circ \Phi(x) = f(y(x))$$

が位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型を誘導することを示す.

$f \in C^\infty(U)$ について chain rule より, $|\alpha| \leq N'$ について

$$D_x^\alpha f \circ \Phi(x) := \sum_{|\beta| \leq N'} (D_y^\beta f)(y(x)) \cdot \Phi_{\alpha\beta}(x) \tag{0.1.1}$$

eq-lem-E-1

である.

Φ が 0 の近傍で連続であることを示せば良い. 任意の N' について, $K_{N'}$ コンパクトなので, $K_{N'}$ 上では $|\Phi_{\alpha\beta}(x)| \leq C_{N'}$ となる $C_{N'}$ が取れる. よって $N' \cdot \frac{1}{N} \cdots C_{N'} < \frac{1}{N'}$ となる N をとれば, $f \circ \Phi \in \Phi^*(V_N)$ について

$$|D_x^\alpha f \circ \Phi(x)| \underset{(0.1.1)}{\overset{\text{eq-lem-E-1}}{\leq}} \sum_{|\beta| \leq N} \underbrace{|(D_y^\beta f)(y(x))|}_{< \frac{1}{N}} \cdot |\Phi_{\alpha\beta}(x)| \leq N' \cdot \frac{1}{N} \cdot C_{N'} < \frac{1}{N}$$

よって「任意の $N' > 0$ について, ある $N > 0$ があって, $\Phi^*(V_N) \subset V'_{N'}$ である」ため Φ は 0 の近

傍で連続である.

(2) $M=\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ とする. 各 U_i で

$$K_{i1} \subset K_{i2} \subset \cdots \subset U_i$$

で $U_i = \bigcup_j K_{ij}^\circ$ となるコンパクト列をとる. そこで $K_N := \bigcup_{i=1}^{N} K_{i,N}$ とすると

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$$

であって, $K_i \subset K_{i+1}^\circ$ かつ $M = \bigcup K_i^\circ$ となる.

さて $\prod C^\infty(U_i)$ の 0 での local base は

$$\{V_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}} := V_{i_1,N_{i_1}} \times V_{i_2,N_{i_2}} \times \cdots \times V_{i_l,N_{i_l}} \times \prod_{i \neq i_k} C^\infty(U_i) \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_l, N_{i_k} \in \mathbb{Z}_+\}$$

となる形のものである. ここで

- $\boldsymbol{i} := (i_1, i_2, \ldots, i_l), \boldsymbol{N} := (N_{i_1}, N_{i_2}, \ldots, N_{i_l})$ と定める.
- $V_{i,N} := \{f \in C^\infty(U_i) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$ である (ここの定義での $P_N(f)$ には $K_{i,N}$ をつかう.)

一方で $V_N := \{f \in C^\infty(M) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$(ここの定義での $P_N(f)$ には K_{iN} をつかう.) であり, これは $C^\infty(M)$ の 0 での local base である. 以上より, 次の二つを示せば良い.

- 任意の $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{N}$ について, ある N があって, $V_N \subset V_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}} \cap C^\infty(M)$ が成り立つ.
- 任意の N について, ある $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{N}$ があって, $V_N \supset V_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}} \cap C^\infty(M)$ が成り立つ.

$$\begin{aligned} V_N &:= \left\{ f \in C^\infty(M) \mid x \in K_N := \bigcup_{i=1}^{N} K_{i,N}, |\alpha| \leq N, |D_\alpha f(x)| < \frac{1}{N} \right\} \\ &\underset{\text{def}}{=} \left(V_{1,N} \times V_{2,N} \times \cdots \times V_{N,N} \times \prod_{i>N} C^\infty(U_i) \right) \cap C^\infty(M) \\ &\underset{\text{def}}{=} V_{(1,2,\ldots,N),(N,\ldots,N)} \cap C^\infty(M) \end{aligned}$$

である. これより二つ目の主張が正しいことがいえる. 一つ目の主張は任意の $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{N}$ について,

$$V_{\max\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}\}} \subset V_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}} \cap C^\infty(M)$$

なので言える. $\square$

defn-E-2

Definition 0.1.2. M 2nd countable$m$ 次元 C^∞ 級多様体とする．$C^\infty(M)$ に位相を次のように入れる．
まず $M = \bigcup_{l=1}^{\infty} U_i$ で $U_i \subset \mathbb{R}^m$ となる countable open cover を一つ固定する．そして，

$$C^\infty(M) \hookrightarrow \prod_i C^\infty(U_i) \quad f \longmapsto (f|_{U_i})$$

による部分位相を $C^\infty(M)$ に入れる．つまり，

$$C^\infty(M) \cong \mathrm{Eq}(\prod C^\infty(U_i) \rightrightarrows \prod C^\infty(U_i \cap U_j))$$

となるように入れる．

Remark 0.1.3. defn-E-2 0.1.2 による位相の定義において，U_i の取り方によらない．

Proof. 別の U'_j をとると細分 $U_i \cap U'_j$ が取れる．よって次の図式が考えられる．

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(M) \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \prod C^\infty(U_i) \arrow[dr, hook] & \\
& \prod C^\infty(U'_j) \arrow[r, hook] & \prod C^\infty(U_i \cap U'_j)
\end{tikzcd}$$

そこで"相対位相の直積は相対位相になる"ので，lem-E-1 0.1.1 より言える． □

これにより

$$C^\infty : (U \underset{open}{\subset} M) \mapsto C^\infty(U)$$

は $\mathbb{C}$ ベクトル空間の sheaf となる．よって $K \subset M$ に対して

$$\mathcal{D}_K(M) := \{\phi \in C^\infty(M) \mid \mathrm{Supp}(\phi) \subset K\}$$

として $C^\infty(M)$ の部分位相を入れる．

$$\mathcal{D}(M) := \bigcup_{K \subset M | K \text{ cpt}} \mathcal{D}_K(M) \cong \varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$$

この colimit は locally convex vector space での colimit である．

[指摘] この colim は存在する？ やっぱり Section 1 でやったような位相の入れ方にもう一回戻る？
$\varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$ については次回再考．

0.2 current 続き

以下[NO] の記法に合わせる. (M 2nd countable m 次元 C^∞ 級多様体, $k \in \mathbb{Z}_+$ とする.)[1]

- $C(M) := \{\, f : M \to \mathbb{C};\ \text{連続}\,\}$
- $\mathcal{E}(M) := \{\, f : M \to \mathbb{C};\ C^\infty\text{-関数}\,\}$ 普通は"$C^\infty(M)$"である.
- $C^k(M) := \{\, \varphi : k\text{-forms on } M \text{ with coeff} \in C\,\}$ つまり locally に

$$\varphi = \sum_J \varphi_J \, d\bar{z}^J \quad (d\bar{z}^J = d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_k})$$

  とかけるものとする. ここで $(U; z^1, \ldots, z^n)$ を局所座標とし, $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $\varphi_J \in C(U)$ とする. 特に $C^0(M) = C(M)$.
- $\mathcal{E}^k(M) := \{\, \varphi : k\text{-forms on } M \text{ with coeff} \in \mathcal{E}\,\}$ 普通は"$\mathcal{A}^k(M)$"である.
- $\mathcal{K}^k(M) := \left\{ \varphi \in C^k(M) \;\middle|\; \operatorname{supp}\varphi \text{ cpt} \right\}$ ここで $\mathrm{Supp}\varphi := \overline{\{x \in M,\ \varphi(x) \neq 0\}}$ である. $\varphi(x) \neq 0$ とはある J があって, $\varphi_J(x) \neq 0$ であることを意味する.
- $\mathcal{D}^k(M) := \left\{ \varphi \in \mathcal{E}^k(M) \;\middle|\; \operatorname{supp}\varphi \text{ cpt} \right\}$
- $A \subset M$ について以下のようにおく

$$\mathcal{K}^k_A(M) := \left\{ \varphi \in \mathcal{K}^k(M) \;\middle|\; \operatorname{supp}\varphi \subset A \right\} \quad \mathcal{D}^k_A(M) := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}^k(M) \;\middle|\; \operatorname{supp}\varphi \subset A \right\}$$

	連続	C^∞
関数	$C(M)$	$\mathcal{E}(M)$
k-form	$C^k(M)$	$\mathcal{E}^k(M)$
k-form with support compact	$\mathcal{K}^k(M)$	$\mathcal{D}^k(M)$
k-form with support $\subset A$	$\mathcal{K}^k_A(M)$	$\mathcal{D}^k_A(M)$

Recall

$U \subset \mathbb{R}^m$ open のとき、$C(U)$, $\mathcal{E}(U)$ には次のような 位相をいれていた.

コンパクト集合の列:$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset U$ で $K_j \subset K^\circ_{j+1}$ かつ $U = \bigcup_j K^\circ_j$ となるものを取り, $f \in \mathcal{E}(U)$ に対し

$$P_N(f) := \max\left\{ |D^\alpha f(x)| \;\middle|\; x \in K_N,\ |\alpha| \leq N,\ \omega \in K_N \right\}$$

$$V_N := \left\{ f \in \mathcal{E}(U) \;\middle|\; P_N(f) < \tfrac{1}{N} \right\}$$

を open base at 0(0 での開基) とする位相を入れていた.

[1]おそらく通常の記法とかなり違う記法であると思われる.

lem-E-1
0.1.1 により, これがコンパクト集合の列や座標近傍 $U \subset \mathbb{R}^m$ によらない

一般の多様体に関しては M に対しては、$M = \bigcup_j U_j$ という座標近傍の被覆を使って

$$\mathcal{E}(M) \subset \prod \mathcal{E}(U_j)$$

部分位相を入れた.

defn-E-3

Definition 0.2.1. $U \subset \mathbb{R}^m$ open に対し, $C^k(U)$, $\mathcal{E}^k(U)$ に対して位相を

$$\mathcal{E}^k(U) \simeq \prod_{J=(j_1<\cdots<j_k)} \mathcal{E}(U)\, d\bar{z}^J$$

による直積位相を入れる.

これは次のノルム

$$P_N(\varphi) := \max\Big\{ |D^\alpha \varphi_J(x)| \;\Big|\; x \in K_N,\ |\alpha| \leq N,\ \omega \in K_N \Big\}$$

について, $\mathcal{E}(U)$ と同じように位相を入れたものに一致する.

lem-E-4

Lemma 0.2.2. *1.* $U \subset \mathbb{R}^m$, $U' \subset \mathbb{R}^m$ *open* について, $\Phi : U' \to U$ が *diffeo* のとき

$$\Phi^* : \mathcal{E}^k(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^k(U')$$

が $\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間の同型を誘導する.

2. $U \subset \mathbb{R}^m$ *open*, $U = \bigcup_j U_j$: *countable open cover* について,

$$\mathcal{E}^k(U) \hookrightarrow \prod_j \mathcal{E}^k(U_j)$$

は部分位相空間となる.

Proof. (1) $\Phi : U'(x^1, \ldots, x^m) \to U(y^1, \ldots, y^m)$ diffeo として

$$\Phi^* : \mathcal{E}^k(U) := \prod_J \mathcal{E}(U) dy^J \;\longrightarrow\; \mathcal{E}^k(U') := \mathcal{E}(U') dx^J$$

は以下のような形になる.

$$\varphi = \sum_J \varphi_J\, dy^J \;\longmapsto\; \sum_I \Big(\sum_J \Phi^* \varphi_J \frac{\partial y^J}{\partial x^I} \Big)\, dx^I$$

となる．ここで

$$\frac{\partial y^J}{\partial x^I} = \det\Big(\frac{\partial y^{j_k}}{\partial x^{i_l}}\Big)$$

とする．よって lem-E-1 0.1.1 で $\varphi_J \mapsto \Phi^* \varphi_J$ が連続であることを言っており，和をとるのも連続なので，連続性が言える．

(2)：

$$\prod_I \mathcal{E}(U)dx^I \cong \mathcal{E}^k(U) \ \hookrightarrow \ \prod_i \mathcal{E}^k(U_i) \underset{(1)}{\cong} \prod_i \left(\prod_I \mathcal{E}(U)\, d\bar{z}^I\right) \cong \prod_I \Big(\prod_j \mathcal{E}(U_j)\, d\bar{z}^I\Big)$$

となる．lem-E-1 0.1.1 でから，$\mathcal{E}(U) \subset \prod_j \mathcal{E}(U_j)$ が部分位相になっているのでいえた． □

defn-E-5

Definition 0.2.3. M 2nd countable m 次元 C^∞ 級多様体について $C^k(M)$, $\mathcal{E}^k(M)$ に次のように位相を入れる:
$M = \bigcup U_j$ を座標近傍 U_j の countable covering とし，

$$\mathcal{E}^k(M) \hookrightarrow \prod_j \mathcal{E}^k(U_j)$$

による部分位相を入れる．
$A \subset M$ compact subset について，$\mathcal{D}^k_A(M) \subset \mathcal{E}^k(M)$ はclosed subspace である.(下の remark 参照) $\mathcal{D}^k_A(M)$ には $\mathcal{E}^k(M)$ の subtopology ををいれる
$\mathcal{K}^k(M), \mathcal{D}^k(M)$ には、

$$\mathcal{B} := \Big\{ W \subset \mathcal{D}^k(M)\ ;\ W = \text{non-empty convex balanced} \\ \text{s.t. } \forall A \subset M \text{ cpt},\ W \cap \mathcal{D}^k_A(M) \text{ is open in } \mathcal{D}^k_A(M) \Big\}$$

を 0 の local base となる位相を入れる．

Remark 0.2.4. lem-E-1 0.1.1 から $\mathcal{E}^k(M)$ の位相は座標近傍の $\{U_j\}$ の取り方に依らない．さらにこの位相は

$$\mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^k(U) \ \Big|\ \ U \subset M \text{ loc. coord.}$$

に関する weak top. である (weak topology に関しては lem-H-11 ??参照)

$\mathcal{D}^k_A(M) \subset \mathcal{E}^k(M)$ は closed subspace なのは $x \in U \subset M$ loc coord. に対し，代入写像

$$ev_x \mathcal{E}^k(M) \to \mathbb{C}^{\oplus J} \quad \varphi \longmapsto (\varphi(x))_J$$

が連続で，$\mathcal{D}^k_A(M) = \bigcap_{x \in M \setminus A} \mathrm{Ker}(e)v_x$ とかけるので closed subspace になる．

$\mathcal{K}^k(M), \mathcal{D}^k(M)$ の位相を詳しくいうと，defn-M-8.4 ??のように，集合族 τ を，"$\bigcup_{i\in I}(\varphi_i + W_i)$ とかけるもの"

の集まりとする. ただし $i \in I$ について, $\varphi_i \in \mathcal{D}^k(M), W_i \in \beta$ とする.

dom	local ($U \subset \mathbb{R}^n$)	global (M mfd.)
form	$C^k(U),\ \mathcal{E}^k(U)$	$C^k(M),\ \mathcal{E}^k(M)$
form support $\subset A$	$K^k_A(U),\ D^k_A(U)$	$K^k_A(M),\ D^k_A(M)$
form support compact	$K^k(U),\ D^k(U)$	$K^k(M),\ D^k(M)$

という対応がある.

prop-E-6

Proposition 0.2.5. *M 2nd countablem* 次元 C^∞ 級多様体について以下が成り立つ.

- $\mathcal{E}^k(M),\ D^k_A(M)$ *locally convex, complete metrizable* 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間 *Heine-Borel property.*
- $C^k(M),\ K^k_A(M)$ *locally convex, complete, metrizable* 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間.

Proof. $k = 0,\ M = \cup_{i=1}^{\infty} U_i \subset \mathbb{R}^m$ などに関してはすでに示している
Prop-M-7.3
??によって $\mathcal{E}^0(U) = C^\infty(U)$ について, コンパクト集合の列 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ であって, seminorm の　separating family

$$P_N(f) = \max\{\, |D^\alpha f(x)| \ ;\ x \in K_N,\ |\alpha| \le N\}$$

によって位相を入れると, metrizable 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間であることがわかる. (ここに open cover が countable がいる)

Prop-M-7.4
また??で complete と Heine-Borel property を示した. (ここに平均値の定理を使う. つまり微分可能性がいる.) よって $C(U)$ しても同じで, Heine-Borel property 以外 は 同様にできる。

$k > 0$, $\mathcal{E}^k(M),\ C^k(M)$ に関しては, seminorm を

$$P_N(\varphi) := \max\Big\{\, |D^\alpha \varphi_J(x)|\ \Big|\ x \in K_N,\ J = (j_1 < \cdots < j_k),\ |\alpha| \le N\Big\}$$

に変えれば同様に言える

lem-E-1
$\mathcal{E}^k(M),\ C^k(M)$ に関しては 前回 0.1.1 (2) で与えられたコンパクト集合の列をとる. 具体的に ($M = \bigcup U_j$ とし $K_{i1} \subset K_{i2} \subset \cdots \subset U_i$ となるコンパクト集合列について

$$K_N := \bigcup_{i=1}^{N} K_{i,N}$$

$$P_N(\varphi) := \max\Big\{\, |D^\beta \varphi_J(x)|\ \Big|\ x \in K_{iN} \subset U_i, J = (j_1 < \cdots < j_k),\ |\omega| \le N\Big\}$$

とすると $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$ であり, 同様の議論が回る.

$K_A^k(M),\ D_A^k(M)$ は それぞれ $C^k(M),\ \mathcal{E}^k(M)$ の閉部分空間なので, 諸性質は保たれる.

□

prop-E-7

Proposition 0.2.6. *(cf.* thm-M-8.7 ??*)*

(a) $V \subset D^k(M)$ *convex balanced* について, V が *open* であることは, 任意の *compact* $A \subset M$ について, $V \cap D_A^k(M) \subset D_A^k(M)$ であることと同値.

(b) $A \subset M$ *compact* としたとき, $D_A^k(M) \subset D^k(M)$ 部分位相空間.

(c) $E \subset D^k(M)$ *bounded* ならば, ある *compact* $A \subset M$ であって, $E \subset D_A^k(M)$ となる.

(d) $D^k(M)$ は *Heine-Borel property* を持つ.

(e) $D^k(M) \cong \mathrm{colim}_{A \subset M\ cpt} D_A^k(M)$. ここでこの同型は *locally convex* 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての同型である.

また上の主張は D_A を K_A に変えても成り立つ.

Proof. [(a)] thm-M-8.6 ?? が $D^k(M)$ でも言える (thm-M-8.7 ?? (a) の議論が回る)

[(b)] $D_A^k(M) \hookrightarrow D^k(M)$ は, (a) より連続である.

一方, $D^k(M) \hookrightarrow \mathcal{E}^k(M)$ も 連続である. なぜならば $\mathcal{E}^k(M)$ は locally convex より, convex balanced な open base at 0 となるものがある. それらをひとつ取っても convex balanced であり, 各 $D_A^k(M)$ に制限しても open なので, $D^k(M)$ の上で open となる.

[(c)] 対偶を示す. $E \subset D^k(M)$ は任意の compact $A \subset M$ について, $E \not\subset D_A^k(M)$ を満たすとする.[2] この時 E が bounded でないことを示す.

$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$ というコンパクト集合であって

$$K_i \subset K_{i+1}^\circ \quad \text{and} \quad M = \bigcup K_i^\circ$$

となるものをとる. E の仮定から, ある $\varphi_n \in E$ と $x_n \in K_n$ であって, $\varphi_n(x_n) \neq 0$ かつ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ は集積点を持たないものが取れる.

そこで $x_n \in U_n \subset M$ という局所座標をとって,

$$W := \{\psi \mid \max_J |\psi_J(x_n)| < \frac{1}{n} \max_J |\phi_{n,J}(c)| \text{ for any } n\}$$

とおく. ($\phi_n = \sum_J \phi_{n,J} dx^J$ と分解する.) W は convex balanced open in $\mathcal{D}^*(M)$ である. なぜならば, convex balanced は $|\cdot|$ の性質から. 任意の compact $A \subset M$ に対し, $U_n \subset A$ となる U_n は有限個である. そして $W \cap \mathcal{D}_A^k(M)$ は open in $\mathcal{D}_A^*(M)$ である. (開集合の有限この共通部分なので.)

[2] ある $\varphi \in E$ と $x \in A$ であって, $\varphi(x) \neq 0$ ということと同じ.

しかし任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ について, $\varphi_n \notin nW$ となるので, $E \not\subset nW$ であり, E は bounded ではない.

[(d)] bounded closed $E \subset \mathcal{D}^k(M)$ は compact であることを言う. (c) より, ある compact $A \subset M$ で, $E \subset \mathcal{D}^k_A(M)$. (b) より, $\mathcal{D}^k_A(M) \subset \mathcal{D}^k(M)$ は部分位相が入るので, $E \subset \mathcal{D}^k_A(M)$ の中では bounded かつ closed. よって prop-E-6 0.2.5 の $\mathcal{D}^k_A(M)$ の Heine-Borel Property より言える.

[(e)] $\mathcal{D}^k(M) \xrightarrow{f} V$ を locally convex 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の $\mathbb{C}$ 線型写像とする. すると次の同値変形ができる.

f が連続である
$\iff \forall U \subset V$: convex balanced open に対し, $f^{-1}(U)$ open
$\iff \forall U \subset V$: convex balanced open. compact $A \subset M$ に対し $f^{-1}(U) \cap \mathcal{D}^k_A(M)$ open in $\mathcal{D}^k_A(M)$
$\iff f|_{\mathcal{D}^k_A(M)} : \mathcal{D}^k_A(M) \to V$ 連続

map が $\mathbb{C}$-linear なことについても同様に言えるので,

$$\mathrm{Hom}\big(\mathcal{D}^k(M), V\big) \simeq \varprojlim_{A \subset M \text{ compact}} \mathrm{Hom}\big(\mathcal{D}^k_A(M), V\big).$$

□

defn-E-8

Definition 0.2.7. $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と書いた時, 次を意味する.

- $U_\lambda = (U_\lambda; x^1_\lambda, \ldots, x^n_\lambda)$: local coordinate of M
- $V_\lambda \subset U_\lambda$: 相対コンパクトな開集合（つまり $\overline{V_\lambda} \subset U_\lambda$ コンパクt）
- $M = \bigcup_\lambda V_\lambda$ かつ, $\{U_\lambda\}_\Lambda$ は locally finite open covering of M. （つまり, 任意の $x \in M$ について, ある x の近傍 V で, $U \cap U_\lambda \neq \emptyset$ となる λ は有限個)

上のような V_λ の存在に関しては, 多様体が 2nd countable であることから. (2nd countable $\Rightarrow$ para-compact) また定義から Λ は可算集合となる.

また局所有限性から任意の compact $A \subset M$ に対して, $A \cap U_\lambda \neq \varnothing$ なる λ は 有限である.

Proof. もし無限になるなら, ある $x_i \in A \cap U_{\lambda_i}$ （$i = 1, 2, \ldots$）が取れる. A compact なので, ある x に収束する部分列 $\{x_{i_k}\}$ が取れる. すると x の任意の近傍 V について, $V \cap U_{\lambda_{i_k}} \neq \varnothing$ が言えて $\{V_\lambda\}$ の仮定に矛盾する □

以下 U_λ 上の座標 $(x^1_\lambda, \ldots, x^n_\lambda)$ と $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ について,

$$D^\alpha_\lambda := \left(\frac{\partial}{\partial x^1_\lambda}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n_\lambda}\right)^{\alpha_n}$$

また $\varphi \in \mathcal{E}^k(M),\ \lambda \in \Lambda,\ \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について,

$$\|\varphi\|_\lambda^\ell := \max\left\{|D_\lambda^\alpha \varphi_{\lambda,J}(x)| \;\middle|\; x \in \overline{V_\lambda},\ J,\ |\alpha| \leq \ell\right\}.$$

最後に $\varphi \in \mathcal{D}^k(M),\ \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について,

$$\|\varphi\|^\ell := \max_\lambda \|\varphi\|_\lambda^\ell = \max\left\{|D_\lambda^\alpha \varphi_{\lambda,J}(x)| \;\middle|\; x \in \overline{V_\lambda},\ J,\ \lambda,\ |\alpha| \leq \ell\right\}.$$

とする．これらは seminorm である.

lem-E-9

Lemma 0.2.8. $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}$ を固定する．この時

$$\{\|\cdot\|_\lambda^\ell \mid \lambda \in \Lambda,\ \ell \geq 0\}$$

は *separating family of seminorm on* $\mathcal{E}^k(M)$ であり, 前に定めた位相 (0.2.3) と同じ位相を定める.

defn-E-5

Proof. Seminorm であることはすぐにわかる.

$$V(\lambda, \ell, \varepsilon) := \{\varphi \in \mathcal{E}^k(M) \mid \|\varphi\|_\lambda^\ell < \varepsilon\}$$

とする．示すことは

$$\{\bigcap_{\text{finite}} V(\lambda_i, \ell_i, \varepsilon_i) \mid \lambda_i \in \Lambda,\ \ell_i \geq 0,\ \varepsilon_i > 0\}$$

が local base at 0 であることを示せば良い.

$V(\lambda, \ell, \varepsilon)$ が open であることは, 制限写像 $\mathrm{res} : \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^k(U_\lambda)$ によって,

$$\{\varphi \in \mathcal{E}^k(U_\lambda) \mid \|\varphi\|_\lambda^\ell < \varepsilon\} \subset \prod_J \mathcal{E}^0(U_\lambda)$$

の pullback になるので良い.

任意の $0 \in V \subset \mathcal{E}^k(M)$ となる open について, ある $N \gg 0$ と compact subset $K_N := K_{N,1} \cup K_{N,2} \cup \cdots \cup K_{N,N}$ であって,

$$p_N(\varphi) := \max\{|D^\alpha \varphi_J(x)| \mid x \in K_N,\ J,\ |\alpha| \leq N\}.$$

としたとき, V は $\left\{\varphi \in \mathcal{E}^k(M) \;\middle|\; p_N(\varphi) < \frac{1}{N}\right\}$ を含む．よって $K_N \subset \bigcup_{\text{ifinite}} V_{\lambda_i}$ をとり, $\ell_i \leq N$ とし，$0 < \varepsilon_i \ll \frac{1}{N}$ をとると

$$\bigcap_i V(\lambda_i, \ell_i, \varepsilon_i) \subset \left\{\varphi \;\middle|\; p_N(\varphi) < \frac{1}{N}\right\} \subset V$$

となりいえた. □

cor-E-10

Corollary 0.2.9. *compact* $A \subset M$ について, $\{\|\cdot\|^{(\ell)} \mid \ell \geq 0\}$ は *separating family of seminorms on* $\mathcal{D}^k_A(M)$ であり, 同じ位相を定める.

$\mathcal{K}^k_A(M)$ についても, $\{\|\cdot\|^{(0)} \mid \ell \geq 0\}$ を考えれば同様の主張が得られる.

prop-E-11

Proposition 0.2.10. $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}$ を固定する.

1. $\{\varphi_i\}$ が $\mathcal{D}^k(M)$ で *Cauchy* 列であることは, ある *compact* 部分集合 $A \subset M$ で $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}^k_A(M)$ かつ
$$\lim_{i,j\to\infty} \|\varphi_i - \varphi_j\|^\ell = 0 \quad \forall \ell \geq 0$$
が成り立つことと同値.
2. $\varphi_i \to \varphi$ *in* $\mathcal{D}^k(M)$ は, ある *compact* 部分集合 $A \subset M$ で $\{\varphi_i\} \cup \{\varphi\} \subset \mathcal{D}^k_A(M)$ かつ
$$\lim_{i\to\infty} \|\varphi_i - \varphi\|^\ell = 0 \quad \forall \ell \geq 0.$$
が成り立つことと同値.
3. $\mathcal{D}^k(M)$ は *complete*.

$\mathcal{K}^k_A(M)$ についても, $\{\|\cdot\|^{(0)}\}$ を考えれば同様の主張が得られる.

Proof. [(1)] $\{\varphi_i\}$ Cauchy 列は bounded である. よって prop-E-7 0.2.6 より，ある compact $A \subset M$ であって, $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}^k_A(M)$ となる. これより

$$\begin{aligned} &\{\varphi_i\} \text{ Cauchy 列 in } \mathcal{D}^k(M) \\ &\iff \exists A \subset M \text{ compact s.t. } \{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}^k_A(M) \text{ かつ Cauchy 列 in } \mathcal{D}^k_A(M) \\ &\overset{\text{cor-E-10 } 0.2.9}{\iff} \exists A \subset M \text{ compact s.t. } \{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}^k_A(M) \text{ かつ } \lim_{i,j\to\infty} \|\varphi_i - \varphi_j\|^\ell = 0 \quad \forall \ell \geq 0. \end{aligned}$$

[(2)] $\{\varphi_i\} \cup \{\varphi\}$ は bounded より，(1) と同様.

[(3)] (1) と $\mathcal{D}^k_A(M)$ は complete より，任意の Cauchy 列は収束する. □

defn-E-12

Definition 0.2.11. 連続線型写像 $T : \mathcal{D}^k(M) \to \mathbb{C}$ のことを k-dimensional current on M という. 特に distribution は 0-dimensional current のことをさす.

$$\mathcal{D}'_k(M) := \{\, k\text{-current on } M \,\} = \mathrm{Hom}_{\text{top } \mathbb{C}\text{-vect sp}}\big(\mathcal{D}^k(M), \mathbb{C}\big)$$

$$\mathcal{K}'_k(M) := \mathrm{Hom}_{\text{top } \mathbb{C}\text{-vect sp}}\big(\mathcal{K}^k(M), \mathbb{C}\big).$$

prop-E-13

Proposition 0.2.12 (cf. ??, ??). *Y を locally convex 位相 $\mathbb{C}$-ベクトル空間, $T : \mathcal{D}^k(M) \to Y$ を $\mathbb{C}$ 線型写像とする. 次は同値である.*

(a) T は 連続

(b) T は *bounded,* つまり *bounded set* を *bounded set* にうつす.

(c) $\varphi_i \to 0$ *in* $\mathcal{D}^k(M)$ ならば, $T(\varphi_i) \to 0$ *in* Y.

(d) 任意の *compact* $A \subset M$ について, $T|_{\mathcal{D}^k_A(M)} : \mathcal{D}^k_A(M) \to Y$ は連続.

(e) ($Y = \mathbb{C}$ の場合のみ) 任意の *compact* $A \subset M$ について, ある $\ell \geq 0, C > 0$ があって,

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|^\ell \quad \textit{for } \forall \varphi \in \mathcal{D}^k_A(M).$$

$\mathcal{K}^k_A(M)$ についても, $\ell = 0$ のみを考えれば同様の主張が得られる.

Proof. $[(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)]$ $(a), (b), (c)$ の主張において,

$$\mathcal{D}^k(M) \mapsto \mathcal{D}^k_A(M) \quad T \mapsto T|_{\mathcal{D}^k_A(M)}$$

に取り替えた主張を $(a)_A, (b)_A (c)_A$ とする. 0.2.5 より $\mathcal{D}^k_A(M)$ は metrizable より ?? より,

$$(a)_A \iff (b)_A \iff (c)_A$$

となる. また 0.2.6 (e) から

$$(d) \text{ が成立} \iff \forall A \subset M \text{ compact}, (a)_A \text{が成立}$$

となる. よって (a) と (d) が同値になる. 同様にしてこれらは (b) や (c) と同値となる.

$[(e) \Rightarrow (d)]$ $Y = \mathbb{C}$ とする. compact $A \subset M$ をとる. 仮定より $\ell \geq 0, C > 0$ があって,

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|^\ell \quad \text{for } \forall \varphi \in \mathcal{D}^k_A(M).$$

$\forall \varepsilon > 0$ に対し,

$$V := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}^k_A(M) \;\middle|\; \|\varphi\|^\ell < \frac{\varepsilon}{C} \right\}$$

とおくと, これは 0 を含む open in $\mathcal{D}^k_A(M)$ であり,

$$\varphi \in V \Rightarrow \left| T|_{\mathcal{D}^k_A(M)}(\varphi) \right| < \varepsilon$$

である. よって $T|_{\mathcal{D}^k_A(M)}$ は連続である.

[$(d) \Rightarrow (e)$] $A \subset M$ compact とすると, 仮定より $T|_{\mathcal{D}^k_A(M)}$ は連続. よって cor-E-10 0.2.9 から, $\ell \geq 0, \varepsilon > 0$ があって,

$$T\big(\{\varphi \in \mathcal{D}^k_A(M) \mid \|\varphi\|^\ell < \varepsilon\}\big) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

よって任意の $\varphi \in \mathcal{D}^k_A(M)$，$\varphi \neq 0$ に対し，

$$\left| T\left(\frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|^\ell}\varphi\right)\right| < 1.$$

であるので整理して, $|T(\varphi)| < \frac{2}{\varepsilon}\|\varphi\|^\ell$ となる. よって $C = \frac{2}{\varepsilon}$ とおけば良い. □

Remark 0.2.13. k dimensional current $\mathcal{D}'_k(M)$ のことを $\dim M - k$ degree current ともいう.(かなりややこしい)

$Z \in H_k(M, \mathbb{Z})$ の元は積分することで, $\mathcal{D}'_k(M)$ の元となる. (これが"dimensional"の由来だと思われる) また $\dim M - k$ 次微分形式は外積をとって積分することで $\mathcal{D}'_k(M)$ の元となる.

0.3 カレントの order と order 0 カレントの特徴づけ

引き続き M を m 次元 2nd contable 実多様体とする.

示すことは

$$\mathcal{L}^{m-k}_{\text{loc}}(M) \hookrightarrow \mathcal{K}'_k(M) \cong D'_k(M)_{\text{ord}=0} \hookrightarrow D'_k(M)_{\text{ord}\leq l} \hookrightarrow D'_k(M).$$

そしてこれが M の位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の sheaf での完全列であることを示す.

defn-E-14

Definition 0.3.1. $D'_k(M)$ に位相を

$$\{ev_\varphi : D'_k(M) \to \mathbb{C} \mid \varphi \in D^k(M)\}$$

に関する weak topology を入れる. つまり

$$\{ev^{-1}_{\varphi_1}(B_1) \cap \cdots \cap ev^{-1}_{\varphi_l}(B_l) \mid \varphi_1, \ldots, \varphi_l \in D^k(M), 0 \in B_1, \ldots, B_l \subset \mathbb{C} \text{ open ball }\}$$

を local base とする位相を入れる.

Remark 0.3.2. これは各点収束な位相である. 次の同値変形からわかる.

$$\begin{aligned}
&T_i \to T \quad (i \to \infty)\\
&\iff \forall U = \mathrm{ev}^{-1}_{\varphi_1}(B_1) \cap \cdots \cap \mathrm{ev}^{-1}_{\varphi_\ell}(B_\ell), \exists N,\ \forall n \geq N,\ T_n - T \in U\\
&\iff \forall U = \mathrm{ev}^{-1}_{\varphi_1}(B_1) \cap \cdots \cap \mathrm{ev}^{-1}_{\varphi_\ell}(B_\ell), \exists N,\ \forall n \geq N, T_n(\varphi_j) - T(\varphi_j) \in B_j (\forall j = 1, \ldots, \ell)\\
&\iff \forall \varphi \in D^k(M),\ \forall \varepsilon > 0, \exists N,\ \forall n \geq N,\ |T_n(\varphi) - T(\varphi)| < \varepsilon\\
&\iff \forall \varphi \in D^k(M), T_i(\varphi) \to T(\varphi) \quad (i \to \infty)
\end{aligned}$$

さて　開集合 $U \subset M$ に対し, restriction map $D'_k(M) \to D'_k(U)$ を

$$T \mapsto \left(D^k(U) \hookrightarrow D^k(M) \xrightarrow{T} \mathbb{C}\right) =: T|_U$$

これは連続な $\mathbb{C}$-linear map となる.

lem-E-15

Lemma 0.3.3. *$U \subset M \quad \mapsto \quad D'_k(U)$ によって, M 上の位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の sheaf を定める.*

Proof. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ locally finite open cover of M, $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}1$ の分割とする.

[1.] $T \in D'_k(M)$, $T|_{U_\lambda} = 0\ \forall\lambda$ ならば, $T = 0$ を示す. これは $\varphi \in D^k(M)$ について,

$$T(\varphi) = T\Big(\sum_\lambda \psi_\lambda \cdot \varphi\Big) = \sum_\lambda T(\underbrace{\psi_\lambda\varphi}_{\in D^k(U_\lambda)}) = \sum_\lambda \underbrace{T|_{U_\lambda}}_{=0}(\psi_\lambda\varphi) = 0$$

[2.] $T_\lambda \in D'_k(U_\lambda)$ かつ

$$T_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu} = T_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu}$$

ならば, ある $T \in D'_k(M)$ があって $T|_{U_\lambda} = T_\lambda$ となること.

$T \in D'_k(M)$ を, $\varphi \in D^k(M)$ に対し

$$T(\varphi) := \sum_\lambda \underbrace{T_\lambda(\psi_\lambda \cdot \varphi)}_{\text{有限こを除いて } 0}$$

と定義する. すると, T は $\mathbb{C}$-linear である.

prop-E-11

また $\varphi_i \to 0\ (i \to \infty)$ のとき, 0.2.10 からある $A \subset M$ コンパクトがあって, $\mathrm{Supp}(\varphi_i) \subset A$ かつ,

$$T(\varphi_i) = \sum_\lambda T_\lambda(\psi_\lambda\varphi_i) \to 0 \qquad (i \to \infty)$$

となる. (この $i \to \infty$ は $\mathrm{Supp}(\varphi_i) \subset A$ なので, λ によらずに取れる.) よって T は連続.

また $\varphi \in D^k(U_\lambda)$ に対し,

$$T(\varphi) = \sum_\mu T_\mu(\underbrace{\psi_\mu\varphi}_{\in D^k(U_\lambda\cap U_\mu)}) \underbrace{=}_{T_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu} = T_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu}} \sum_\mu T_\lambda(\psi_\mu\varphi) = T_\lambda\Big(\sum_\mu \psi_\mu\varphi\Big) = T_\lambda(\varphi)$$

よって $T|_{U_\lambda} = T_\lambda$ であり, D'_k は M 上の sheaf である. $\square$

defn-E-16

Definition 0.3.4. $T \in D'_k(M)$ が order $\leq \ell$ であるとは, 任意のコンパクト $A \subset M$ について, ある $\exists C > 0$ があって次を満たすこと.

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|^\ell \qquad \forall \varphi \in D^k_A(M).$$

また T が order ℓ であることを, T が order $\leq \ell$ かつ order $\leq \ell - 1$ ではないとして定める.

Remark 0.3.5. これは開集合の取り方によらない. これは二つの開被覆 $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}$, $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}$ をとり, それに対応する norm を $\|\varphi\|^\ell$, $\|\varphi\|'^\ell$ とすると, 任意のコンパクト $A \subset M$ について, ある $\exists D > 0$ があって

$$\|\varphi\|^\ell \leq D \cdot \|\varphi\|'^\ell \qquad \forall \varphi \in D^k_A(M).$$

となるので.

lem-E-17

Lemma 0.3.6. *1.* $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *locally finite open cover of* M とするとき,

$$T \in D'_k(M) \text{ は } order \leq \ell \iff T|_{U_\lambda} \text{ は } order \leq \ell \quad \forall \lambda.$$

2. $T_i \in D'_k(M)$ *order* $\leq \ell$, $T_i \to T$ $(i \to \infty)$ のとき T も *order* $\leq \ell$.

Remark 0.3.7. 上の主張lem-E-17 0.3.6 は間違っている. 元々NO [NO] の日本語版にあった主張であるが, 英語版だと無くなっていた. Banach-Steinhaus を $D^k_A(M)$ に使っているが, これが F-space でないことからくる.

反例は $T_n = n(\delta_{1/n} - \delta_0)$ とすると, これは $\mathbb{R}$ 上の distribution で order は 0 だが, 極限は $\delta'(0)$ という distribution に収束して, order はちょうど 1 となる.

Proof. (1) $\Rightarrow$ の証明は明らか. $\Leftarrow$ を示す. $\{\psi_\lambda\}$ を 1 の分割とする. 仮定より, $\forall A$: cpt. $\exists C_\lambda > 0$

$$|T(\psi_\lambda \cdot \varphi)| \leq C_\lambda \cdot \|\psi_\lambda \varphi\|^\ell \qquad \forall \varphi \in D^k_A(M). \tag{0.3.1}$$

eq-partition

そこで, $A \cap U_\lambda \neq \emptyset$ なる λ を $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ とおくと, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ 以外では $\psi_\lambda \varphi = 0$ である. よって

$$C := \sum_{i=1}^N C_{\lambda_i}$$

とおけば,

$$|T(\varphi)| \underset{A \text{ compact}}{=} \left| \sum_{i=1}^N T(\psi_{\lambda_i} \varphi) \right| \leq \sum_{i=1}^N |T(\psi_{\lambda_i} \varphi)| \underset{0.3.1}{\leq} \sum_{i=1}^N C_{\lambda_i} \cdot \|\psi_{\lambda_i} \varphi\|^\ell \leq C \cdot \|\varphi\|^\ell.$$

(2) 次の Banach–Steinhaus theorem(一様有界性定理) を使う.

Theorem 0.3.8. Rud *[Rud, Theorem 2.6]* X を F*-space*, つまり位相ベクトル空間で位相と *compatible* な *complete invariant metric* を持つものとし, Y を位相ベクトル空間とする. $\Gamma \subset \mathscr{H}om_{top\ vect\ sp}(X, Y)$ とする. $x \in X$ に対して,

$$\Gamma(x) := \{\Lambda(x) \mid \Lambda \in \Gamma\} \subset Y$$

が Y 上で *bounded* ならば, Γ は *equi-conti*, つまり任意の *0* の近傍 $0 \in W \subset Y$ について, ある近傍 $0 \in V \subset X$ があって,

$$\forall \Lambda \in \Gamma \Rightarrow \Lambda(V) \subset W$$

これを $X = (D_A^k(M), \|\cdot\|^\ell)$, $Y = \mathbb{C}$, $\Gamma = \{T_i\}_i$ に用いる. ここで, $\varphi \in D_A^k(M)$ ならば, 仮定より $T_i(\varphi) \to T(\varphi)\ (i \to \infty)$ なので, 特に

$$\{T_i(\varphi) \mid i \in \mathbb{Z}_+\} \subset \mathbb{C} \text{ bounded}$$

である. Banach–Steinhaus theorem(一様有界性定理) より, Γ は equi-conti である.
prop-E-13
0.2.12 (d) $\Rightarrow$ (e) の証明と同様に

$$W = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \qquad V = \{\varphi \in D_A^k(M) \mid \|\varphi\|^\ell < \varepsilon\}, \qquad C := \frac{2}{\varepsilon}$$

とすると

$$|T_i(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|^\ell \qquad \text{for } \forall i,\ \forall \varphi \in D_A^k(M).$$

よって, $\forall \varphi \in D_A^k(M)$ に対し,

$$|T(\varphi) - T_i(\varphi)| \leq \|\varphi\|^\ell \quad \text{for } i \gg 0.$$

ととると,

$$|T(\varphi)| \leq |T(\varphi) - T_i(\varphi)| + |T_i(\varphi)| \leq \|\varphi\|^\ell + C \cdot \|\varphi\|^\ell = (1 + C)\|\varphi\|^\ell.$$

よって T も order $\leq \ell$ である. □

lem-E-17
0.3.6 から $D'_{k,\mathrm{order} \leq \ell} \subset D'_k$ は closed 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間からなる subsheaf である.

さて $K'_k(M) \to D'_k(M)$ を

$$T \mapsto \left(D^k(M) \underset{\text{cont.}}{\hookrightarrow} K^k(M) \xrightarrow{T} \mathbb{C}\right)$$

として定める. これは連続 $\mathbb{C}$ 線型でまた order $= 0$ である.(cor-E-10 0.2.9 の周り参照) restriction map とも可換なので, sheaf としての写像 $K'_k \to D'_{k,\mathrm{order}=0}$ が定める.

lem-E-18

Lemma 0.3.9. $K'_k \to D'_{k,\mathrm{order}=0}$ 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の *sheaf* の同型を与える.

Proof. $M = U \subset \mathbb{R}^m$. と仮定して良い (ここに $D'_k(M) \subset \prod D'_k(U_\lambda)$ によって $D'_k(M)$ の位相は $\prod D'_k(U_\lambda$ の部分位相) となることを使う.

$T \in D'_{k,\mathrm{order}=0}(U)$ をとる. 示すことは次のとおり.

$$\begin{tikzcd}
D^k(U) \arrow[r, "T"] & \mathbb{C} \\
K^k(U) \arrow[u, hook] \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] &
\end{tikzcd}$$

$\varphi \in K^k(U)$ をとり, $\varphi = \sum_J \varphi_J \, dx^J$ と書く. すると各 J に対し, lem:Rud2.12 ??([Rud, Definition 6.31] あたり) から test function の Cauchy 列 $\{\varphi_{i,J}\} \subset D^0(U)$ であって,

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_{i,J} = \varphi_J \text{ in } K^0(U)$$

となるものが取れる. そこで,

$$\varphi_i := \sum_J \varphi_{i,J} \, dx^J \in D^k(U)$$

とおくと, これは $D^k(U)$ の Cauchy 列であって $\{T(\varphi_i)\}_i$ も また $\mathbb{C}$ 上の Cauchy 列となる.

そこで $\varphi \in K^k(U)$ について,

$$T(\varphi) := \lim_{i\to\infty} T(\varphi_i)$$

と定義する. これは $\{\varphi_i\}$ のとり方によらない. なぜならば, 二つの Cauchy 列 $\{\varphi_i\}, \{\varphi'_i\}$ について,

$$\varphi_{i,J} - \varphi'_{i,J} \to 0 \ (i \to \infty). \Rightarrow \varphi_i - \varphi'_i \to 0 \ (i \to \infty). \underset{T\text{ 連続}}{\Rightarrow} T(\varphi_i) - T(\varphi'_i) \to 0 \ (i \to \infty).$$

となるためである. よって $\mathbb{C}$-linear map$T : K^k(U) \to \mathbb{C}$ が定義される.

連続性を示す. コンパクト集合 $A \subset U$ について, $C_A > 1$ を

$$|T(\psi)| \le C_A \|\psi\|^0 \qquad \forall \psi \in D^k_A(U) \tag{0.3.2}$$

eq-K0

となるものとする. (これは $T \in D'_{k,\mathrm{order}=0}(U)$ なので取れる) すると $\varphi \in K^k_A(U)$ に対し, ある $A \subset A'$ なるコンパクト集合と, $\{\varphi_i\} \subset D^k_{A'}(U)$ で, $\varphi_i \to \varphi \ (i \to \infty)$ となる Cauchy 列が存在する.

T の定義と Cauchy 列から

$$T(\varphi) - T(\varphi_i) \to 0 \quad \|\varphi_i - \varphi\|^0 \to 0 \quad (i \to \infty)$$

なので $i \gg 0$ とすれば

$$|T(\varphi)| \underset{i\gg 0}{\leq} |T(\varphi)-T(\varphi_i)|+|T(\varphi_i)| \underset{\text{above}}{\leq} \|\varphi\|^0+|T(\varphi_i)| \underset{\text{eq-K0 } 0.3.2}{\leq} \|\varphi\|^0+C_{A'}\|\varphi_i\|^0 \underset{\|\varphi_i\|^0\leq 2\|\varphi\|^0}{\leq} (2C_{A'}+1)\cdot\|\varphi\|^0.$$

これより一意性もわかる. $\mathbb{C}$ 線型同型がいえた. □

Remark 0.3.10. K' はリースの表現定理から Radon 測度で与えられる.(NO [NO] 参照) 特に order0 の超関数は Radon 測度と同一視できる.

0.4 Current の例・演算

defn-E-19

Definition 0.4.1. $U \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とする.

$$L^1_{\mathrm{loc}}(U) := \{f : U \to \mathbb{C} : \text{Lebesgue measurable \& } \textit{locally integrable}\} / \underset{\text{a.e.}}{\sim}$$

とする. ここで"locally integrable"を任意のコンパクト集合 $A \subset U$ みついて $\int_A |f| d\mu < +\infty$ として定める.
同様に

$$L^k_{\mathrm{loc}}(U) := \left\{\omega = \sum_J \omega_J \, dz^J \ \ k\text{-form} \mid \omega_J \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)\right\}$$

として定める. これらは $\mathbb{C}$ ベクトル空間になる.

$$[\cdot] : L^{m-k}_{\mathrm{loc}}(U) \longrightarrow K'_k(U) \quad \omega \longmapsto [\omega] : \varphi \longmapsto \int_U \omega \wedge \varphi \qquad (\varphi \in K^k(U))$$

と定義する. これは $\mathbb{C}$ 線型単射である.

Proof. $f \in L_{\mathrm{loc}}(U)$ は $f = 0 \iff \int_U |f| \, d\mu = 0$ であることを思い出す. ここは後で示す □

defn-E-20

Definition 0.4.2. M: 向きづけ可能な多様体について

$$L^k_{\mathrm{loc}}(M) := \left\{\omega \underset{\text{locally}}{=} \sum_J \omega_J \, dz^J, \ \omega_J \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)\right\}$$

とする. $L_{\mathrm{loc}}(M, \Lambda^k T^* M)$ ともかく
また M 上の $\mathbb{C}$ ベクトル空間の sheaf を

$$L^k_{\mathrm{loc}} : (U \subset M) \longmapsto L^k_{\mathrm{loc}}(U)$$

として定義する.

$$[\cdot]: L^{m-k}_{\mathrm{loc}}(M) \longrightarrow K'_k(M) \quad \omega \longmapsto [\omega]: \varphi \longmapsto \int_M \omega \wedge \varphi \qquad (\varphi \in K^k(M))$$

とする. $[\omega] \in K'_k(M)$ になるのは次のとおり:

$\{V_\lambda \subset U\}_\lambda$ を V_λ の１の分割とする.

$K^k_A(M)$ について

$$C := \sum_{\lambda | V_\lambda \cap A \neq \varnothing} \sum_J \int_{V_\lambda \cap A} |\psi_\lambda \omega_J| \, d\mu$$

とおくと

$$|\int_M \omega \wedge \varphi| \underset{\text{定義}}{=} |\sum_\lambda \int_{V_\lambda \cap A} \psi_\lambda (\omega \wedge \varphi)| \leq C ||\psi_\lambda||^0$$

となる.

特に $[\cdot]: L^{m-k}_{\mathrm{loc}} \longrightarrow K'_k$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間の sheaf の射となる.

defn-E-20

Definition 0.4.3. M: m 次元向きづけ可能な多様体, $N \subset M$ 向きづけ可能 k 次元閉部分多様体とする.
すると,

$$[N]: K^k(M) \longrightarrow \mathbb{C} \quad [N](\varphi) := \int_N \varphi|_N$$

と定義するとこれは連続な $\mathbb{C}$ 線型写像になり $[N] \in K'_k(M)$ となる.

Proof. $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}_\lambda$ を $N \cap U_\lambda = \{x^{k+1} = \cdots = x^m = 0\}$ となるようにとる. すると N の座標近傍は $\{(N \cap U_\lambda, x^1, \ldots, x^k)\}_\lambda$ となる.

$\varphi \in K^k_A(M)$ を $\varphi = \sum_J \varphi_{\lambda J} \, dx^J$ on U_λ と表すと

$$\varphi|_N = \sum_{J_0 = (1,2,\ldots,k)} \varphi_{\lambda J_0} \, dx^{J_0},$$

とかける. $C := \sum_{\lambda | V_\lambda \cap A \neq \varnothing} \mu(N \cap A \cap \overline{V}_\lambda)$ とすれば

$$\left| \int_N \varphi|_N \right| \leq \sum_{\lambda:\, A \cap U_\lambda \neq \varnothing} \sum_{J_0 = (1,2,\ldots,k)} \left| \int_{N \cap U_\lambda} \psi_\lambda \varphi_{\lambda J_0} \, dx^{J_0} \right| \leq C \cdot \|\varphi\|^0$$

$\square$

defn-E-21

Definition 0.4.4. M: m 次元向きづけ可能な多様体, $\mathcal{D}^k(M) := \mathcal{D}_{m-k}(M)$ とおく. ($m-k$ を degree という.)
$T \in \mathcal{D}^p(M),\ \alpha \in \mathcal{E}^q(M)$ に対し，$T \wedge \alpha,\ \alpha \wedge T \in \mathcal{D}^{p+q}(M)$ を次のように定義する.

$$(T \wedge \alpha)(\varphi) := T(\alpha \wedge \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{m-p-q}(M).$$
$$\alpha \wedge T := (-1)^{pq} T \wedge \alpha.$$

上において $T \wedge \alpha$ が 連続であることを見ておく. (証明から T の order が l ならば $T \wedge \alpha$ の order も l となる.)

Proof. A コンパクトとすると, T の定義から

$$\exists C \geq 0, l \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } |T(\psi)| \leq C\|\psi\|^l \quad \forall \psi \in \mathcal{D}^{m-p}_A(M).$$

すると任意の $\varphi \in \mathcal{D}^{m-p-q}_A(M)$ に対し，

$$|(T \wedge \alpha)(\varphi)| = |T(\alpha \wedge \varphi)| \leq C\|\alpha \wedge \varphi\|^l$$

が成り立つ. よってあとは $\|\alpha \wedge \varphi\|^l \leq C'\|\varphi\|^l$ を見れば良い.

$$\alpha = \sum_I \alpha_{\lambda I}\, dx^I, \qquad \varphi = \sum_J \varphi_{\lambda J}\, dx^J \quad \text{on } U_\lambda$$

とすると，

$$\alpha \wedge \varphi = \sum_{\substack{I,J \\ I \cap J = \varnothing}} \alpha_{\lambda I}\, \varphi_{\lambda J}\, dx^I \wedge dx^J$$

となる. ここで定義から

$$\|\alpha \wedge \varphi\|^l = \max\left\{ \left| D^\beta(\alpha_{\lambda I}\, \varphi_{\lambda J})(a) \right| \;\middle|\; \lambda, I, J,\ |\beta| \leq l,\ a \in \overline{V_\lambda} \right\}$$

ライプニッツ則から

$$D^\beta(\alpha_{\lambda I}\, \varphi_{\lambda J}) := \sum_{0 \leq \delta \leq \beta} C_{\beta\delta}\, (D^\delta \alpha_{\lambda I})\, (D^{\beta-\delta} \varphi_{\lambda J})$$

となる $C_{\beta\delta}$ があるので,

$$C' := \#\{(I, J, \beta) \mid I \cap J = \varnothing,\ |\beta| \leq l\} \cdot \max\left\{ |C_{\beta\delta}\, D^\delta \alpha_{\lambda I}(a)| \;\middle|\; 0 \leq \delta \leq \beta,\ |\beta| \leq l,\ a \in V_\lambda \right\}$$

とおくと，

$$\|\alpha \wedge \varphi\|^l \leq C'\|\varphi\|^l.$$

となるので言える. □

定義0.4.4は通常の外積の拡張になっている． また $\omega \in L^p_{\mathrm{loc}}(M)$, $\alpha \in \mathcal{E}^q(M)$ について

$$[\omega] \wedge \alpha = [\omega \wedge \alpha] \quad \in K'^{p+q}(M)$$

となる. これは $\varphi \in K^{n-p-q}(M)$ について

$$([\omega] \wedge \alpha)(\varphi) \underset{0.4.4}{=} [\omega](\alpha \wedge \varphi) \underset{0.4.3}{=} \int_M \omega \wedge (\alpha \wedge \varphi) \underset{0.4.3}{=} [\omega \wedge \alpha](\varphi)$$

defn-E-22

Definition 0.4.5. 外微分 $d : \mathcal{D}^p(M) \longrightarrow \mathcal{D}^{p+1}(M)$ を次のように定義する.

$$(dT)(\varphi) := (-1)^{p-1} T(d\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}^{m-p-1}(M).$$

これは $\|d\varphi\|^l \leq C\|\varphi\|^{l+1}$ なので order$\leq l$ のカレントを order$\leq l+1$ のカレントに移す. $dT = 0$ のとき T を closed current という。

$\omega \in \mathcal{E}^p(M)$ とする. $d[\omega] = [d\omega]$ である.

Proof. $\varphi \in \mathcal{D}^{m-p-1}(M)$ とすると

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^p \omega \wedge d\varphi$$

である. よって,

$$(d[\omega])(\varphi) \underset{0.4.5}{=} (-1)^{p-1}[\omega](d\varphi) \quad \underset{0.4.3}{=} (-1)^{p-1} \int_M \omega \wedge d\varphi \underset{\text{Stokes}}{=} \int_M d\omega \wedge \varphi \quad = [d\omega](\varphi).$$

□

$N \subset M$ 向きづけ可能 k 次元閉部分多様体とすると $[N]$ は closed current となる.

Proof. $\varphi \in \mathcal{D}^{m-k-1}(M)$ について

$$(d[N])(\varphi) \underset{0.4.5}{=} (-1)^{m-k-1}[N](d\varphi) \underset{0.4.3}{=} (-1)^{m-k-1} \int_N d\varphi|_N \underset{\text{Stokes}}{=} 0$$

□

$d : \mathcal{D}^p \to \mathcal{D}^{p+1}$ は sheaf としての線型写像となる

Proof. $U \subset M$ を開集合とする. d は restriction map と可換で $\mathbb{C}$ 線型である. よって d によって $\mathcal{D}'^p(U) \to \mathcal{D}'^{p+1}(U)$ が連続を示せば良い $\varphi \in \mathcal{D}^{m-p-1}(M)$ として，$ev_\varphi : \mathcal{D}'^p(U) \to \mathbb{C}$ を代入写像

とし, $B_\varepsilon \subset \mathbb{C}$ を ε 近傍として

$$d^{-1}\big(ev_\varphi^{-1}(B_\varepsilon)\big) = \{\, T \in \mathcal{D}'^p(M) \mid |e_\varphi(dT)| < \varepsilon \,\} = ev_{d\varphi}^{-1}(B_\varepsilon).$$

となるのでいえた. □

$$d(T \wedge \alpha) = dT \wedge \alpha + (-1)^p T \wedge d\alpha.$$

が成り立つ.

Proof. $\varphi \in \mathcal{D}^{m-p-q-1}(M)$ として,

$$d(T \wedge \alpha)(\varphi) \underset{0.4.5}{\overset{\text{defn-(E-22)}}{=}} (-1)^{p+q-1}(T \wedge \alpha)(d\varphi) \underset{0.4.4}{\overset{\text{defn-(E-21)}}{=}} (-1)^{p+q-1}T(\alpha \wedge d\varphi)$$

$$\begin{aligned}(dT \wedge \alpha)(\varphi) &\underset{0.4.4}{\overset{\text{defn-(E-21)}}{=}} dT(\alpha \wedge \varphi) \\ &\underset{0.4.5}{\overset{\text{defn-(E-22)}}{=}} (-1)^{p-1}T\big(d(\alpha \wedge \varphi)\big) \\ &\underset{\text{form の外微分}}{=} \qquad \underset{\text{form の外微分}}{=} (-1)^{p-1}T(d\alpha \wedge \varphi) + (-1)^{p+q-1}T(\alpha \wedge d\varphi).\end{aligned}$$

よって

$$d(T \wedge \alpha)(\varphi) - (dT \wedge \alpha)(\varphi) = (-1)^p T(d\alpha \wedge \varphi) \underset{0.4.4}{\overset{\text{defn-(E-21)}}{=}} (-1)^p(T \wedge d\alpha)\varphi)$$

□

defn-E-23

Definition 0.4.6. $U \subset \mathbb{R}^m$ 開集合, p 次カレント $T \in \mathcal{D}'^p(U)$ とする.
$J = (1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq m)$ について 0 次カレント (超関数)$T_J \in \mathcal{D}'^0(U)$ を

$$T_J : \mathcal{D}^m(U) \to \mathbb{C}, \quad f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \longmapsto \operatorname{sgn}(J, J^c)\,T(f\,dx^{J^c})$$

として定める. ここで J^c は $(1, \ldots, n)$ から J を取り除いたものとし. $\operatorname{sgn}(J, J^c)$ は置換 $(1, \ldots, n) \to (J, J^c)$ の符号とする

$T = \sum_J T_J \wedge dx^J$ となる. つまりカレントは超関数係数の form となる. 以後 $T_J\,dx^J := T_J \wedge dx^J$ と書く.

Proof. $\sum_J T_J dx^J$ の方を展開していく. $\varphi = \sum_K \varphi_K dx^K \in D_{m-p}(U)$ について

$$\begin{aligned}\left(\sum_J T_J\, dx^J\right)(\varphi) &= \sum_J T_J(dx^J \wedge \varphi)\\ &= \sum_J T_J\big(\varphi_{J^c}\, dx^J \wedge dx^{J^c}\big)\\ &\underset{dx^J\wedge dx^{J^c}=\mathrm{sgn}(J,J^c)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m}{=} \sum_J \mathrm{sgn}(J,J^c)\, T_J\big(\varphi_{J^c} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m\big)\\ &\underset{T_J\text{ の定義}}{=} \sum_J \mathrm{sgn}(J,J^c)^2\, T(\varphi_{J^c}\, dx^{J^c})\\ &= T(\varphi).\end{aligned}$$

□

$dT = \sum_J \sum_{i=1}^m \frac{\partial T}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^J$ である.

Proof.

$$dT \underset{\text{上の式}}{=} d\left(\sum_J T_J\, dx^J\right) = \sum_J dT_J \wedge dx^J.$$

であるので, 以上より

$$dT_J = \sum_{i=1}^m \frac{\partial T_J}{\partial x^i}\, dx^i$$

を示せば良い. つまり, $p=0$ の場合 (T が 0 次カレント) であるとして良い.
今 $\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi_i\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m$ とすると,

$$d\varphi = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

したがって,

$$dT(\varphi) = -T(d\varphi) = -T\left(\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m\right).$$

一方，

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial x^i} \, dx^i \right) (\varphi) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial x^i} (dx^i \wedge \varphi) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial x^i} \Big((-1)^{i-1} \, \varphi_i \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} - T \left((-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^i} \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \right) .
\end{aligned}
$$

□