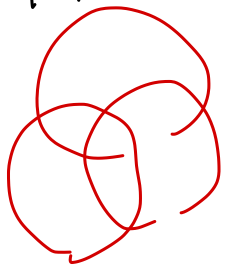
曲率が0以上の複素射影多様体の構造定理

Masataka Iwai
(Osaka Univ.)

考える対象　X　(複素)射影多様体

$$\left(X \underset{\text{cpx mfd}}{\subset} \mathbb{CP}^N \right)$$



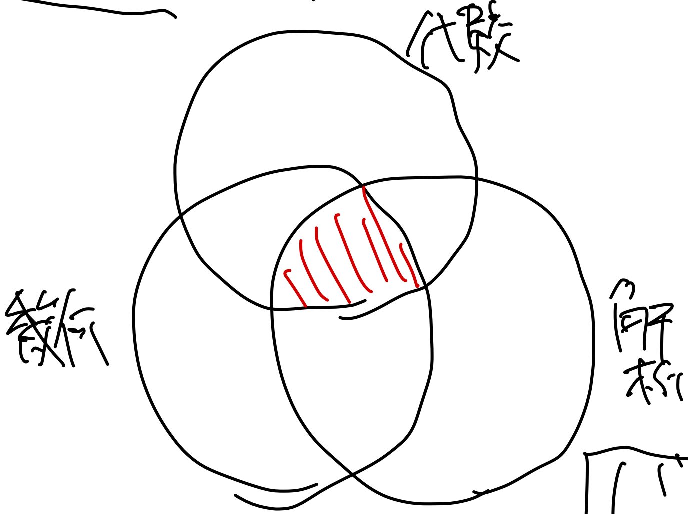
Chowの定理

$(x_0^2+\cdots+x_N^2)$

$\exists f_1, \ldots, f_\ell$ 同次多項式

$$X = \{ (z_0 : \cdots : z_N) \in \mathbb{CP}^N \mid f_1(z_0, \ldots, z_N) = \cdots = f_\ell(z_0, \ldots, z_N) = 0 \}$$

利点　あらゆる分野の手法を用いてしらべられる.



代数：代数幾何, 双有理幾何

幾何：微分幾何, 複素幾何

解析：多変数複素解析

じゃあ何をしらべる??

調べる内容　射影多様体の構造

予想(???)

射影多様体は(ほぼ双有理)(双有理同値を除いて)
次の3つに分解される

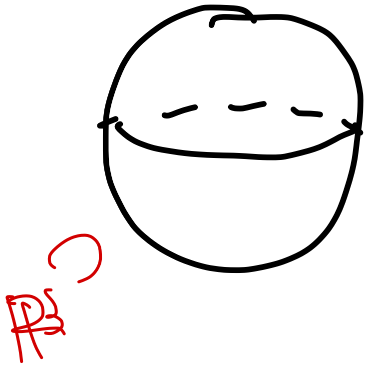
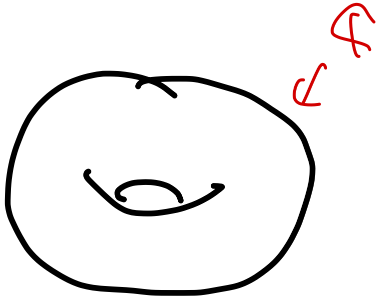
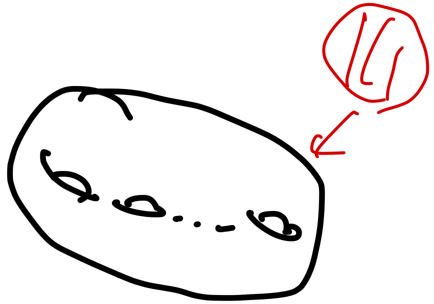
① Ric曲率が正の多様体 (Fano)
(−K_X ample)

② Ric曲率0の多様体 (weak) Calabi−Yau
($K_X \equiv 0$)

③ Ric曲率負の多様体
(K_X ample)

1 $X \sim Y \times Z$
双有理
Y, Z ①〜③
or
2 $X \longrightarrow Y$ ファイブレーション
ファイバー F
Fとかが①〜③

複素1次元の場合　コンパクトリーマン面 (1890's)

	$\mathbb{CP}^1$	トーラス	種数2以上のやつ
			
種数	$g=0$	$g=1$	$g \geq 2$
計量	$\exists g : Ric(g) > 0.$	$\mathbb{C} \to$ (トーラス) を用いて $\exists g.$ $Ric(g)=0$	open disk $\to X$ で Poincare 計量によって $\exists g.$ $Ric(g)<0$
K_Xの次数 ($=\det \Omega_X$)	$\deg K_X = -2$, $-K_X$ ample.	$\deg K_X = 0$, $K_X = 0$	$\deg K_X = 2g-2 > 0$, K_X ample
	Fano	Calabi-Yau	K_X ample ($Ric<0$)

複素2次元のとき(1910, 1960) (Castelnuovo, Enriques, Kodaira)

$$X \xrightarrow[\text{(双有理)}]{\text{ブローダウン等}} Y$$

$\boxed{\text{分解}}$

① Ric > 0 ($-K_X$ ample, Fano)

② Ric $= 0$ ($K_X \equiv 0$)

③ Ric < 0 (K_X ample)

複素3次元のとき(1980–1990) O.K.

(Mori, Miyaoka, Kawamata, Kollár, etc…)

$\boxed{\text{極小モデル理論 Minimal Model Program MMP}}$

4次元以上(2000–) 一応未解決(すごい定理はいっぱいある)

(Birkar, Cascini, Hacon, McKernan, Fujino, Gongyo, …)

私がやっていること

???

正則接ベクトル束 T_X の曲率が 0 上ならば

正則余接ベクトル束 Ω_X

あとで

X は次の3つに分解される??

① $\mathrm{Ric} > 0$ ($-K_X$ ample, Fano)

② $\mathrm{Ric} = 0$ ($K_X \equiv 0$, Calabi-Yau)

③ $\mathrm{Ric} < 0$ (K_X ample)

注意 "ヌヌ有理同値のちがいはゆるさない"

微分幾何 (複素幾何)

E ベクトル束, h Hermite 計量

(・$D_h = \partial_h + \bar\partial$
・D_h は h をたもつ $\rightsquigarrow R = D_h^2$; $(e_1, \dots, e_r)$ local holo frame, $(z_1, \dots, z_n)$ ざひょう
$R^i_{j\alpha\bar\beta} = -h^{i\bar k}\frac{\partial^2 h_{j\bar k}}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta} - h^{i\bar k} h^{l\bar m}\frac{\partial h_{j\bar m}}{\partial z^\alpha}\frac{\partial h_{l\bar k}}{\partial \bar z^\beta}$)

$\rightsquigarrow {}^\exists$Chern 曲率 $\mathrm{End}(E)$ 値 $(1,1)$ form

$$\Theta_h = \sum_{\substack{1\le i,k\le r\\ 1\le\alpha,\beta\le n}} R^k_{i\alpha\bar\beta}\, e^{*i} \otimes e_k \otimes (dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta)$$

$$\rightsquigarrow R^{(h)}_{i\bar j\alpha\bar\beta} := \sum_{1\le k\le r} h_{k\bar j} R^k_{i\alpha\bar\beta}$$

代数幾何

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$: tautological line bundle の双対

($E|_U \simeq U \times \mathbb{C}^r \rightsquigarrow \mathbb{P}(E)|_{\pi^{-1}(U)} \simeq U \times \mathbb{P}^{r-1}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)|_{\pi^{-1}(U)} = \{(x, u, w) \mid u \ni w\} \subset \pi^* E|_{\pi^{-1}(U)} = U \times \mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{C}^r$)

E : ベクトル束

$\rightsquigarrow \pi : \mathbb{P}(E) \to X$ 射影束

${}^\exists\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ 直線束 on $\mathbb{P}(E)$

定義 E の曲率が 0 以上 (0 より大)

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\exists h$ s.t. $\displaystyle\sum_{\substack{1\le i,j\le r\\ 1\le\alpha,\beta\le n}} R^{(h)}_{i\bar j\alpha\bar\beta}\, \xi^i \bar\xi^j \eta^\alpha \bar\eta^\beta \ge 0$ ($>$)
${}^\forall(\xi_1, \dots, \xi_r) \in \mathbb{C}^r \setminus \{0\}$, ${}^\forall(\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

定義 E が nef (E が ample)

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ nef ($\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ が ample)

(${}^\forall C \subset \mathbb{P}(E)$ curve, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \cdot C \ge 0$)

ほぼ対応する

Rem (より微分幾何のんむ体)

${}^\exists\nabla$ Levi-Civita Connection $\rightsquigarrow R^g(X, Y, Z, W) := \langle \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, W\rangle_g$ ($X, Y, Z, W \in T_x X$)

($\nabla_{\partial_j}\frac{\partial}{\partial z^k} = \Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial z^i}$, $\Gamma^i_{jk} = g^{i\bar l}\partial_j g_{k\bar l}$)

"T_X の曲率が 0 以上" $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\exists g$: Kähler 計量, $\boxed{R^g(\xi, \eta, \bar\xi, \bar\eta) \ge 0}$ ${}^\forall\xi, \eta \in T_x X$, ${}^\forall x \in X$

(Bisholomorphic Sectional Curvature が 0 以上) (R_g = curvature tensor of g)

"Ω_X の曲率が 0 以上" $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\exists g$: Kähler 計量 $R^g(\xi, \eta, \bar\xi, \bar\eta) \le 0$ ${}^\forall\xi, \eta \in T_x X$, ${}^\forall x \in X$

接ベクトル束 T_X の曲率が0以上の構造定理

微分幾何	代数幾何

微分幾何

Siu-Yau 80 (Frankel 予想の解決)

T_X の曲率が 0 より大 $\Longrightarrow$ $X \simeq \mathbb{CP}^n$

Howard-Smyth-Wu 81 (Mok 88)

T_X の曲率が 0 以上

$\Longrightarrow$ $\exists X' \longrightarrow X$ 有限ひらく (finite étale)

$\exists f: X' \longrightarrow T$ しずめこみ (submersion)

T: トーラス ($Ric \equiv 0$), f のファイバー $Ric > 0$ (Fano)

Campana-Demailly-Peternell 14

$-K_X = \det T_X$ の曲率が 0 以上

$\Longrightarrow$ $\exists X' \longrightarrow X$ 有限ひらく (finite étale)

$f: X' \longrightarrow T$ しずめこみ (Fanoっぽいやつ)

T: $Ric \equiv 0$ なもの, ファイバー有理連結

(Calabi-Yau)

代数幾何

Mori 79 (Hartshorne 予想の解決)

T_X ample $\Longrightarrow$ $X \simeq \mathbb{CP}^n$

双正則

Campana-Peternell 91, Demailly-Peternell-Schneider 94

T_X: nef

$\Longrightarrow$ $\exists X' \longrightarrow X$ 有限ひらく (finite étale)

$\exists f: X' \longrightarrow T$ しずめこみ (submersion)

T: トーラス ($Ric \equiv 0$) f のファイバー $Ric > 0$ (Fano

Cao 19, Cao-Höring 19, Campana-Cao-Matsumura 21

$-K_X = \det T_X$ nef

$\Longrightarrow$ $\exists X' \longrightarrow X$ 有限ひらく (finite étale)

$f: X' \longrightarrow T$ しずめこみ (submersion)

T: $Ric \equiv 0$ なもの. ファイバー有理連結

(Fano, ぽいやつ

特に Cao '19, Cao-Höring は"我々の分野"でのブレイクスルー

一応私がやった内容。

- Hosono-I-Matsumura 22

  T_X の"特異な"曲率 0以上の構造定理

- I. 22

  正則葉層 $\mathcal{F} \subset T_X$ の("特異な")曲率 0以上の構造定理

- I. 21

  log smooth 対 (X, Δ) について $T_X(-\log \Delta)$ の曲率 0以上の構造定理
  (でわかったことだけ)

- Ejiri-I.-Matsumura 20.

  relative anti canonical bundle $-K_{X/Y}$ の曲率 0以上の構造定理

雑談用　いろんな人がやってる(やっていた)内容.

青色は2022年にでたやつ

- $\bigwedge^k T_X$ nef　Watanabe 21, 22. C. Gachet. 22 etc..
- T_X Strictly nef　D. Li - W. Ou - X. Yang 19., J. Liu - W. Ou - X. Yang 20.
- $-K_X$ Strictly nef　J. Liu - W. Ou - J. Wang - X. Yang - G. Zhong 21. H. Liu 22. etc..
- T_X (特異)曲率0の計量.　Hosono - I. - Matsumura 22. N. Müller 22, Matsumura 22.
- Foliation ($\mathcal{F} \subset T_X$) nef.　I. 22. W. Ou 22.
- $-K_X$ nef + X: KLT　J. Wang 20, Matsumura - J. Wang 21,
- $T_X(-\log \Delta)$ nef + (X, Δ) LC　I. 21, S. Druel 21, Lazić - Matsumura - Tsakanikas - Xie, Peternell 22.
- $-K_{X/Y}$ nef.　Campana - Cao - Matsumura 19, Ejiri - Gongyo 19, Ejiri - I. - Matsumura 20, C. K. Chang 22

Rem KLTができたのは「Beauville-Bogomolov "分解" のKLT版ができた」というブレイクスルーのおかげ

(Druel 19, Greb - Guenancia - Kebekus 19, Höring - Peternell 19 etc...)

結論　T_X の曲率から X 上の構造定理は

"ほぼ" わかった

微分幾何

余接ベクトル束Ω_Xの曲率が0以上の構造定理

代数幾何

Wu-Zheng 02

Ω_X の曲率が0以上

$\Rightarrow$ $\exists X' \to X$ 有限ひふく

$\exists f: X' \to Y$ しずめこみ

Y: $Ric < 0$ な多様体 fiber f: トーラス ($Ric \equiv 0$)

未解決

Ω_X nef

$\Rightarrow$ $\exists X' \to X$ 有限ひふく

$\exists f: X' \to Y$ しずめこみ

Y: $Ric < 0$ な多様体, fiber f: トーラス $Ric \equiv 0$

(IM22 $c_1(\Omega_X)^2 = 0$ ならok)

アバンダンス予想(弱い版)

$K_X = \det \Omega_X$ の曲率が0以上

$\Rightarrow$ K_X: semiample

($\exists \Phi = \Phi_{|mK_X|}: X \to \mathbb{CP}^N$ semiample fibration, Fiber $Ric \equiv 0$)

アバンダンス予想

$K_X = \det \Omega_X$ nef

$\Rightarrow$ K_X: semiample

($\exists \Phi = \Phi_{|mK_X|}: X \to \mathbb{CP}^N$ semiample fibration, Fiber $Ric \equiv 0$)

(IM22 $c_2(\Omega_X) = 0$ ならok

全然わかってない

アバンダンス予想がむずかしすぎて、

全然わかってない状態（アバンダンスがとけたらおわる (Hồng 13)）

アバンダンス予想がわかっているケース

4次元は未解決

- $\dim X = 1, 2$.（分類?）
- $\dim X = 3$（Miyaoka 87, 88, Kawamata 92）
- $c_1(\Omega_X^1) = 0$（Kawamata 85 etc...）
- $c_1(\Omega_X^1)^n \neq 0$（Asymptotic-Riemann-Roch + Kawamata's base point free thm）
- その他 帰納法的な仮定の下なりたつ（Fujino-Gongyo, Gongyo-Matsumura 19 etc..., Lazic-Peternell 18）
  （$n-1$ 次元以下の〜〜が成りたつなら....）

結構いいケースがわかった

Thm（I.-Matsumura 22）

① K_X nef + $c_2(\Omega_X^1) = 0 \Rightarrow$ アバンダンスは成りたつ

② Ω_X nef + $c_1(\Omega_X)^2 = 0 \Rightarrow$ 構造定理が成りたつ