Introduction

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合として次を定義する.

- $C^\infty(\Omega) := \{\varphi : \Omega \to \mathbb{C} \mid \varphi$ は C^∞ 級 $\}$
- $\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \mathrm{Supp}\ \varphi$ が compact$\}$

Distribution とは $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ で $\mathbb{C}$-線型かつ連続となるものである. ここで, 連続とは"$\mathcal{D}(\Omega)$ 上で $\varphi_i \to \varphi$ ならば $\Lambda(\varphi_\nu) \to \Lambda(\varphi)$ "となることを意味する.

そのためには, $\mathcal{D}(\Omega)$ に次を満たす位相を入れる必要がある:

> $\mathcal{D}(\Omega)$ で $\varphi_i \to \varphi$ であることは, あるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって, $\mathrm{Supp}\ \varphi_i \subset K$ であり, 任意の $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ について, 一様に $D^\alpha(\varphi_i - \varphi) \to 0$ となる.

(野口-落合の本[NO] では, これが既知として書かれていた. ただ収束からは位相がただ一つに定まらない.) この章では, $\mathcal{D}(\Omega)$ に収束が上を意味するような位相をいれる.

References

[Rud] W. Rudin. *Functional analysis.* 2nd edn. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York. (1991.)

[NO] J. Noguchi, T.Ochiai *Geometric Function Theory in Several Complex Variables* Translations of Mathematical Monographs Volume: 80; 1990; 282 pp

[Rud, Chapter 1, 6], [NO, Chapter 3] を主に参考にしている.

1 Topological vector spaces

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, $|\cdot|$ を絶対値とする.

defn-M-1.1

Definition 1.1. X を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間, τ を X の位相とする.
(X, τ) がtopological vector space(位相ベクトル空間)とは次を満たすこと.

1. (T_1 条件) 任意の $x \in X$ について, $\{x\} \subset X$ が closed.
2. 加法 $X \times X \to X,\ (x, y) \mapsto x + y$, スカラー倍 $\mathbb{K} \times X \to X,\ (\alpha, x) \mapsto \alpha x$ が (積位相に関して) 連続.

Remark 1.2. 位相ベクトル空間は Hausdorff.

Proof. $f : X \times X \to X,\ f(x,y) = x - y$ とおくと (2) より連続. (1) より $\{0\}$ は閉集合. よって $\Delta = f^{-1}(\{0\}) \subset X \times X$ も閉. よって Hausdorff. □

defn-M-1.2

Definition 1.3. X: $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間. 以下の用語を定義する.

1. 部分集合 $E \subset X$ がconvexとは, 任意の $t \in (0,1)$ について, $tE + (1-t)E \subset E$ となること. (もっと具体的に書くと, 任意の $x, y \in E, t \in (0,1)$ について, $tx + (1-t)y \in E$ となること.)
2. 部分集合 $E \subset X$ がbalancedとは, 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$ について, $\alpha E \subset E$ となること. このとき $0 \in 0 \cdot E \subset E$ である.
3. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. 部分集合 $E \subset X$ がboundedとは, 任意の 0 を含む開集合 $V \subset X$ について, ある $0 < t_0 \in \mathbb{R}$ があって, 任意の $t \geq t_0$ について, $E \subset tV$ となること.
4. $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を X の距離とする. d がinvariant metricであるとは, 任意の $x, y, z \in X$ について, $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ を満たすこと.

定義がややこしいが, convex や balanced な集合は $\mathbb{R}^n$ の open ball の代わりの役割を果たしていく.

Remark 1.4. Convex, bounded は translation invariant である. つまり, E が convex や bounded ならば, 任意の $a \in X$ について $a + E$ もそうなる.

Proof. 以下 $E \subset X$, $a \in X$ とする.

[Convex の場合] E convex とする. 1.3 から任意の $t \in (0,1)$ について, $tE + (1-t)E \subset E$ である. よって任意の $t \in (0,1)$ について

$$t(a+E) + (1-t)(a+E) = a + tE + (1-t)E \subset a + E$$

となりいえた.

[Bounded の場合] E bounded とする. 1.3 から $0 \in V \subset X$ open があって, 任意の $t \gg 0$ について[1], $E \subset tV$ である.

よって示すことは任意の $t \gg 0$ について $a + E \subset tV$ である. これは任意の $t \gg 0$ について $\frac{1}{t}a + \frac{1}{t}E \subset V$ を示せば良い. そこで次の合成写像を考える:

$$\begin{array}{rcccl} F : K \times X \times (K \times X) & \xrightarrow{f} & X \times X & \xrightarrow{T} & X \\ (a, x, b, y) & \longmapsto & (ax, by) & \longmapsto & (ax + by) \end{array}$$

すると次がわかる.

[1]"任意の $t \gg 0$ について"とは, "ある $0 < t_0 \in \mathbb{R}$ があって, 任意の $t \geq t_0$ について" を意味する.

1. $0 \in V$ は開集合なので, $(0,0) \in U \times U \subset X$ となる開集合 $U \subset X$ があって, $U \times U \subset T^{-1}(V)$ となる.(積位相の定義と T の連続性)
2. E bounded より, $t \gg 0$ について $\frac{1}{t}E \subset U$. よってある $\varepsilon > 0$ があって, $\varepsilon E \subset U$ となる.

以上を組み合わせると (ε は必要に応じて小さくして), $(0,\varepsilon) \times \{a\} \times (0,\varepsilon) \times E \subset F^{-1}(V)$ となる. これは $t \gg 0$ について

$$\frac{1}{t}a + \frac{1}{t}E \subset V$$

を意味する. □

defn-M-1.3

Definition 1.5. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. X のlocal basisとは, 原点 $0 \in X$ での local basis(開基) のこと, つまり 0 の開近傍からなる集合系 $\mathcal{B}$ で, 「任意の $0 \in U \subset X$ open について, ある $V \in \mathcal{B}$ があって, $0 \in V \subset U$」となる集合系のこと.

defn-M-1.4

Definition 1.6. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする.

1. X がlocally convexとは, X が 0 の convex な開近傍からなる local basis を持つこと.
2. X がlocally boundedとは, 0 が bounded な開近傍を持つこと.
3. X がlocally compactとは, ある 0 の開近傍 $0 \in V \subset X$ で, $\overline{V}$ が compact なものがあること. (通常の locally compact と同じ)
4. X がmetrizableとは, ある距離 $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ があって, d の位相が X の位相と同じであること.
5. X が F-spaceとは, ある完備な invariant 距離 $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ があって, d の位相が X の位相と同じであること.
6. X が Fréchet spaceとは, X が locally convex かつ F-space なること.
7. X が Heine-Borel Property を持つとは, 任意の closed bounded が compact なること. (”$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合はコンパクト”という Heine-Borel の定理から来ている.)

これは後々使っていく. prop-M-3.1 3.1 で「locally compact ⇒ 有限次元」や「locally bounded + Heine-Borel Property ⇒ 有限次元」を示す. なので, locally compact などは滅多に起こらないということである.

2 Separation properties

prop-M-2.1

Proposition 2.1. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. $K \subset X$ を *compact*, $C \subset X$ を *closed* とする. $K \cap C = \varnothing$ ならば, ある *open set* $V \subset X$ で $(K+V) \cap (C+V) = \varnothing$ となるものが存在する.

Proof. $\alpha : X \times X \times X \to X$ を $\alpha(x, y, z) := x + y - z$ とおく. $K \cap C = \varnothing$ より, $K \times \{0\} \times \{0\} \subset \alpha^{-1}(X \setminus C)$ である. α 連続で, $X \setminus C$open なので, $\alpha^{-1}(X \setminus C)$ も open. よって, K が compact なので, ある open$V \subset X$ で

$$K \times V \times V \subset \alpha^{-1}(X \setminus C)$$

となるものが存在する. よって $K + V - V \subset X \setminus C$ であり, $(K+V) \cap (C+V) = \varnothing$ となる. □

prop-M-2.2

Proposition 2.2. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする.

1. $C \subset X$ *convex* ならば, $\overline{C}, C^\circ$ も *convex.*
2. $B \subset X$ *balanced* ならば, $\overline{B}$ も *balanced.* さらに, $0 \in B^\circ$ であるならば, B° も *balanced*
3. $E \subset X$ *bounded* ならば, $\overline{E}, E^\circ$ も *bounded.*

Proof. (0). 証明において使う事柄をまとめておく

1. $a \in X$ について $f_a : X \to X$, $f_a(x) := a + x$ は同相写像. 連続は明らかで f_{-a} が逆写像になるから. 同様に $s \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ について, $f_s : X \to X$, $f_s(x) := s \cdot x$ も同相写像.
2. $T : X \times X \to X$, $t(x, y) := x + y$ とおくとき, T は開写像. なぜなら $U, V \subset X$open について $T(U \times V) = \cup_{x \in U}(x + V)$ であり, $x + V$ は上より開集合であるので.

(1). 示すことは, 任意の $t \in (0, 1)$ について, $tC^\circ + (1-t)C^\circ \subset C^\circ$ である ($\overline{C}$ も同じ). $t \in (0, 1)$ を固定する.

[C° について]. C は convex なので,

$$T(tC^\circ \times (1-t)C^\circ) = tC^\circ + (1-t)C^\circ \subset C$$

である. T は開写像より, $tC^\circ + (1-t)C^\circ$ は open なので, C° に含まれる.

[$\overline{C}$ について]. 次の写像を考える.

$$\begin{array}{rcccl} F : X \times X & \xrightarrow{f} & X \times X & \xrightarrow{T} & X \\ (x, y) & \longmapsto & (tx, (1-t)y) & \longmapsto & tx + (1-t)y \end{array}$$

この F は連続である．よって連続の閉包を用いた同値性[2]より $F(\overline{C \times C}) \subset \overline{F(C \times C)}$ となる．$\overline{C \times C} = \overline{C} \times \overline{C}$ なので, 展開すると

$$t\overline{C} + (1-t)\overline{C} = F(\overline{C \times C}) \subset \overline{F(C \times C)} = \overline{tC + (1-t)C} \subset \overline{C}.$$

(2)．$\alpha \in \mathbb{K},\ |\alpha| \le 1$ とする．$f_\alpha(x) := \alpha x$ とおくと, 連続の閉包を用いた同値性より

$$\alpha\overline{B} = f_\alpha(\overline{B}) \subset \overline{f_\alpha(B)} = \overline{\alpha B} \subset \overline{B}$$

よって balanced である．(最後の $\overline{\alpha B} \subset \overline{B}$ に B が balanced を用いた)

$0 \in B^\circ$ をさらに仮定すると, $0 \cdot B^\circ = 0 \in B^\circ$ であり, 任意の $\alpha \in \mathbb{K},\ |\alpha| \le 1$ についても, α 倍が同相写像であるので, $\alpha B^\circ = (\alpha B)^\circ \subset B^\circ$ となる．よって balanced.

(3)．E° が bounded は $E^\circ \subset E$ より明らか．$\overline{E}$ が bounded を示す．$0 \in V \subset X$ open を固定する．示すことは任意の $t \gg 0$ について $\overline{E} \subset tV$ である．

当たり前なこととして, $\{\overline{0}\} \cap (X \setminus V) = \varnothing$ である．$\{0\}$ compact, $X \setminus V$ closed より, prop-M-2.1 2.1 から, ある open $0 \in W \subset X$ で

$$\{0\} + W \cap ((X \setminus V) + W) = \varnothing$$

となる．これは, $0 \in W \subset \overline{W} \subset V$ を意味する．(もし $\overline{W} \cap (X \setminus V) \neq \varnothing$ なら, その元の W 近傍が W と交わりをもち, それは上に矛盾する)．E は bounded なので, 任意の $t \gg 0$ について $E \subset tW$ 以上より t 倍は同相なので,

$$\overline{E} \subset t\overline{W} = t\overline{W} \subset tV$$

よって $\overline{E}$ は bounded. □

prop-M-2.3

Proposition 2.3. *X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする．*

1. *$0 \in U \subset X$ open ならば, ある balanced open W で, $0 \in W \subset U$ となるものがある．*
2. *$0 \in U \subset X$ convex open ならば, ある convex balanced open W で, $0 \in W \subset U$ となるものがある．*

Proof. 以下 $\delta > 0$ に対して, $B_\delta(0) := \{\alpha \in \mathbb{K} \mid |\alpha| < \delta\}$ とおく．

(1)．$f : \mathbb{K} \times X \to X$ を $f(\alpha, x) := \alpha x$ とする．これは連続より, $f^{-1}(U)$ は $(0,0)$ を含む開集合である．よって, ある $\delta > 0$ と $0 \in V \subset X$ となる open があって, $B_\delta(0) \times V \subset f^{-1}(U)$ となる．

$W := f(B_\delta(0) \times V)$ とおく．$W \subset U$ は明らか．また $W = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V$ であり, X の開集合である．任意の $\beta \in \mathbb{K},\ |\beta| \le 1$ について, $\beta W \subset \bigcup_{|\alpha|<\delta} \beta\alpha V \subset W$ となる．($|\alpha\beta| < \delta$ のなので)．よって W は balanced である．

[2]位相空間の間の写像 $f : X \to Y$ が連続であることと, 任意の $A \subset X$ について $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ であることは同値である．

(2). $A := \bigcap_{|\alpha|=1,\ \alpha\in\mathbb{K}} \alpha U$ とする. ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$ なら S^1 のように回転させて合併をとる)

Claim 2.4. A は convex balanced である.

Claim の証明. Convex に関しては (元をとって考えれば) 明らか. balanced を示す. $\beta\in\mathbb{K}$, $|\beta|\le 1$ をとる. $\beta A\subset A$ を示せば良い. $0\in U$ より, $0\in A$ である. よって $0\cdot A\subset A$ である. これより $\beta\neq 0$ として良い. すると $|\alpha|=1$ ならば $\frac{\beta\alpha}{|\beta|}=1$ であるので,

$$\beta A=\bigcap_{|\alpha|=1}\beta\alpha U=\bigcap_{|\alpha|=1}\frac{\beta\alpha}{|\beta|}|\beta|U\subset\bigcap_{|\alpha|=1}\frac{\beta\alpha}{|\beta|}U\subset A$$

となる. ($|\beta|U\subset|\beta|U+(1-|\beta|)U\subset U$ に注意. $0\in U$ はここにも使う) よって balanced である. □

この A° が欲しい convex balanced open であることを示す (命題の主張の W). そのためには, prop-M-2.2 2.2 より, $0\in A^\circ$ であることを示せば良い.

$0\in U$ より, (1) からある balanced open $0\in V\subset U$ がある. V は balanced なので, $\alpha\in\mathbb{K}, |\alpha|=1$ について, $\alpha^{-1}V\subset V$ である ($|\alpha^{-1}|=1$ なので). よって, $V\subset\alpha V\subset\alpha U$ であるので, 共通部分をとって,

$$V\subset\bigcap_{|\alpha|=1}\alpha U=A$$

を得る. V open より, $0\in V\subset A^\circ$ となりいえた. □

cor-M-2.4

Corollary 2.5. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. このとき X は *balanced* な 0 の開近傍からなる *local basis* を持つ.
さらに X が *locally convex* (defn-M-1.4 *1.6* 参照) ならば, *convex balanced* な 0 の開近傍からなる *local basis* を持つ.

cor-M-2.5

Corollary 2.6. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. 任意のコンパクト集合 $K\subset X$ は *bounded* である.

Proof. $0\in V\subset X$ open をとる. 任意の $t\gg 0$ について $E\subset tV$ を示す. prop-M-2.3 2.3 から, ある balanced open で $0\in W\subset V$ となるものがある.

まず $X=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+}nW$ であることを示す. $X\subset\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+}nW$ のみを示せば良い. $f:\mathbb{K}\times X\to X$ を $f(\alpha,x):=\alpha x$ とおく. 任意の $y\in X$ について $f(0,y)=0\in W$ である. よって f は連続なので, $(0,y)\in f^{-1}(W)$ となる. これより, ある $\delta>0$ と 0 の開近傍 $U\subset X$ があって $(0,y)\in B_\delta(0)\times(y+U)\subset f^{-1}(W)$ となる. 特に $\frac{1}{n}<\delta$ なる n をとれば $\frac{1}{n}y\in W$ となる. よっていえた

今 $K \subset X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} nW$ で K コンパクトなので, ある n があって $K \subset nW$ となる. W は balanced なので任意の $t \geq n$ について $nW \subset tW$ である. よって任意の $t \geq n$ について

$$K \subset nW \subset tW \subset tV$$

となり K は bounded である. □

3 Types of topological vector space

prop-M-3.1

Proposition 3.1. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. X が *locally compact* (defn-M-1.4 *1.6* 参照) ならば, 有限次元.
特に X が *locally bounded* かつ *Heine-Borel property* を持つ (defn-M-1.4 *1.6* 参照) ならば, 有限次元.

Proof. (1). X を locally compact とする. 定義からある開集合 $0 \in V \subset X$ で $\overline{V}$ が compact なものが存在する. cor-M-2.5 2.6 から, $\overline{V}$ は bounded である. よって V も bounded である. よって, $\{2^{-n}V\}_{n\geq 1}$ が 0 の local basis になる. (任意の open $0 \in W$ について, V bounded なので $V \subset 2^{n_0}W$ となる n_0 が取れるから)

さて $0 \in V$ より, $\overline{V} \subset \bigcup_{x\in\overline{V}}(x + \frac{1}{2}V)$ である. $\overline{V}$ は compact より, ある $x_1, \ldots, x_m \in X$ があって,

eq-prop-M-3.1

$$V \subset (x_1 + \tfrac{1}{2}V) \cup \cdots \cup (x_m + \tfrac{1}{2}V) \tag{3.1}$$

となる. そこで次のようにおく.

- $Y := \sum_{i=1}^{m} \mathbb{K}x_i \subset X$
- $d := \dim_{\mathbb{K}} Y$
- $v_1, \ldots, v_d \in Y$ $\mathbb{K}$ 上の基底.

Claim 3.2.

$$\begin{array}{ccccccc} f : \mathbb{K}^d & \longrightarrow & (\mathbb{K} \times X)^d & \longrightarrow & X^d & \longrightarrow & X \\ (a_i)_{i=1}^d & \longmapsto & (a_i, v_i)_{i=1}^d & \longmapsto & (a_i \cdot v_i)_{i=1}^d & \longmapsto & \sum_{i=1}^d a_i \cdot v_i \end{array}$$

とおくと $f : \mathbb{K}^d \to X$ は連続写像. そして, $f : \mathbb{K}^d \to Y$ は同相写像で, $Y \subset X$ は X の閉集合

Claim の証明. スカラー倍や足し算が連続なので f は連続. また $f : \mathbb{K}^d \to Y$ は全単射である. これが同相になるのを見るために, f^{-1} を次のように構成する

$S := \{z \in \mathbb{K}^d \mid ||z|| = 1\}, B := \{z \in \mathbb{K}^d \mid ||z|| \leq 1\}$ とおく ($\mathbb{R}^d$ の球面と閉球である) $0 \in S$ で f 連続単射より．$0 \notin f(S) \subset X$ かつ $f(S)$compact である．(X は hausdorff より閉集合でもある)．よって 2.3 から，ある balanced open $W \subset X$ で $0 \in W$ かつ $W \subset X \setminus f(S)$ なものが存在する．

$f^{-1}W \subset B$ であることを示す．もし $z \in f^{-1}W \setminus B$ が存在したとする．定義から $||z|| > 1$ である．Wbalanced なので，$f^{-1}W$ も balanced，よって，

$$\frac{1}{||z||} f^{-1}(W) \subset f^{-1}(W)$$

である．これは $\frac{z}{||z||} \in f^{-1}(W)$ となるが，ノルムが 1 なので，$W \subset X \setminus f(S)$ に矛盾する．

特に任意の $r > 0$ について，$f^{-1}(rW) \subset rB$ である．よって任意の $r > 0$ について，$f^{-1}(rW \cap Y) \subset rB$ である．これは $f^{-1} : Y \to \mathbb{K}^d$ が $0 \in Y$ で連続であることを意味する．[3] 任意の点 $y \in Y$ については，以下の図を考える．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "+y"'] & \mathbb{K}^d \arrow[d, "+f^{-1}(y)"] \\ Y \arrow[r, "f^{-1}"] & \mathbb{K}^d \end{tikzcd}$$

この縦の矢印は同相である．よって，$f^{-1} : Y \to \mathbb{K}^d$ は点 y でも連続である．これより $f : \mathbb{K}^d \to Y$ は同相．

$Y \subset X$ が閉集合を示す．$y \in \overline{Y}$ をとる．$X = \bigcup_{t \in \mathbb{Z}_+} W$ (2.6 の証明参照) であるので，$t > 0$ があって $y \in tW$ となる．tWopen なので，$y \in \overline{Y \cap tW}$ である．$f^{-1}(tW) \subset tB$ で $f^{-1} : Y \to \mathbb{K}^d$ が同相なので，$\overline{Y \cap tW} \subset \overline{f(tB)}$ である．最後に $tB \subset \mathbb{K}^d$ コンパクトより，$f(tB)$ もそう，よって閉集合なので $\overline{f(tB)} = f(tB)$ である．以上をつなぎ合わせると

$$y \in \overline{Y \cap tW} \subset \overline{f(tB)} = f(tB) \subset Y$$

である．よって $y \in Y$ であり，$Y = \overline{Y}$ で閉集合である． □

証明に戻る．(3.1) より Y の定義から $V \subset Y + \frac{1}{2}V$ である．これより

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + \left(\frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}V\right) = Y + \frac{1}{4}V$$

となる．これを繰り返して，$V \subset \bigcup_{n \geq 1}(Y + \frac{1}{2^n}V)$ を得る．今 $\{2^{-n}V\}_{n \geq 1}$ が 0 の local basis になることと，Y が閉集合なので，

$$V \subset \bigcap_{n \geq 1}\left(Y + \frac{1}{2^n}V\right) \subset \overline{Y} = Y$$

となる．$X = \bigcup_{k \in N} kV$ なので，$X \subset Y$ となる．よって $Y \cong \mathbb{K}^d$ なので，X は有限次元

[3] 位相空間の写像 $f : X \to Y$ が点 $x \in X$ で連続とは，$f(x)$ の任意の近傍 V に対して，ある x の近傍 U が存在して，$f(U) \subset V$ となること．

(2). X locally bounded かつ Heine-Borel Property を満たすとする. locally bounded なので, ある $0 \in V \subset X$ で bounded open が存在する. prop-M-2.2 2.2 より $\overline{V}$ も bounded. Heine-Borel Property より, $\overline{V}$ はコンパクト. よって, X は locally compact なので有限次元. □

Remark 3.3. 上の証明の議論から「$\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間 Y が有限次元ならば, Y は $\mathbb{K}^d$ と同相である」ことがこの議論からわかる.

もっと強く「X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間, $Y \subset X$ を d 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間とするとき, ある $f : \mathbb{K}^d \to Y$ で同相かつ $\mathbb{K}$ 線形なものが存在する」ということもわかる.

prop-M-3.2

Proposition 3.4. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. X の *local base* が高々可算とする (特に第一可算である). このとき次の三つを満たす距離 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が存在する.

1. d は X の位相を誘導する.
2. d は *translation invariant,* つまり $d(x+z, y+z) = d(x, y)$.
3. 任意の $r > 0$ について, $\{x \in X \mid d(x, 0) < r\}$ は *balanced.*

さらに X が *locally convex* であると仮定する. このとき距離 d は, ”任意の $y \in X,$, $r > 0$ について $\{x \in X \mid d(x, y) < r\}$ が *convex*” となるようにとることができる.

Proof. 以下 X の local base が高々可算とする. 段階を追って示していく.

(1). translation invariant な距離 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が存在すること. prop-M-2.3 2.3 より, balanced open からなる local base $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ で任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ について

$$V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$$

となるように取れる. そこで

$$D := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n 2^{-n} \mid c_n = 0, 1 \text{ で有限個を除いて } 0 \right\}$$

とおく. $D \subset [0, 1)$ かつ任意の $r \in D$ について $r = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) 2^{-n}$ となる表示は一意的である. そこで, $r \in D \cup [1, \infty)$ に関して,

$$A(r) := \begin{cases} X & (r \geq 1), \\ c_1(r)V_1 + c_2(r)V_2 + \cdots & (r \in D) \end{cases}$$

と定義する. (下の表示は無限和に見えるが, D の定義から有限和である). このとき $0 \in A(r)$ かつ任意の $r \geq 0$ について $A(r)$ は balanced open である.

そこで次の関数を定義する.

- $f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \inf\{r \in D \cup [1, \infty) \mid x \in A(r)\}$

- $d : X \times X \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x - y)$

d は translation invariant かつ symmetric である．(symmetric なのは，$A(r)$ が balanced なので，$x - y \in A(r)$ は $y - x \in A(r)$ を意味するから)

Claim 3.5. 任意の $r, s \in D \cup [1, \infty)$ について，$A(r) + A(s) \subset A(r + s)$ が成り立つ．

Claim の証明．$r + s \geq 1$ の場合は自明．よって，$r + s \in D$ として良い．$r, s, r + s$ を次のように表示する．

$$
\begin{aligned}
r &= \alpha_1 2^{-1} + \cdots + \alpha_{N-1} 2^{-(N-1)} + \alpha_N 2^{-N} + \cdots \\
s &= \beta_1 2^{-1} + \cdots + \beta_{N-1} 2^{-(N-1)} + \beta_N 2^{-N} + \cdots \\
r + s &= \gamma_1 2^{-1} + \cdots + \gamma_{N-1} 2^{-(N-1)} + \gamma_N 2^{-N} + \cdots
\end{aligned}
$$

Case 1: ある N があって，$\alpha_i + \beta_i = \gamma_i (i = 1, \ldots, N - 1)$ かつ，$\alpha_N + \beta_N \neq \gamma_N$ となる場合．このとき，$\alpha_N = \beta_N = 0$ かつ，$\gamma_N = 1$ にならざるを得ない．(これは要するに以下のように

$$
\begin{array}{cccccccc}
\alpha_N : & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
\beta_N : & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\
\gamma_N : & \underbrace{1}_{1} & \underbrace{1}_{2} & \cdots & \underbrace{1}_{N-1} & \underbrace{1}_{N} & \underbrace{0}_{N+1}
\end{array}
$$

と，$N - 1$ まで繰り上がりが起こっておらず，N の時に繰り上がりが起こるパターンである．) 今 $M \geq 2$ について

$$\alpha_{M-1} V_{M-1} + \alpha_M V_M \subset V_{M-1} + V_{M-1} \subset V_{M-2}$$

である．以下 M を十分に大きい整数とすると，$\alpha_{N+2} V_{N+2} + \cdots + \alpha_M V_M \subset V_{N+1}$ である．よって $\alpha_N = 0$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
A(r) &= \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_{N-1} V_{N-1} + \underbrace{\alpha_N V_N}_{0} + \alpha_{N+1} V_{N+1} + \underbrace{\alpha_{N+2} V_{N+2} + \cdots + \alpha_M V_M}_{\subset V_{N+1}} \\
&\subset \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_{N-1} V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1}
\end{aligned}
$$

同様に，$A(s) \subset \beta_1 V_1 + \cdots + \beta_{N-1} V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1}$ であるので，

$$
\begin{aligned}
A(r) + A(s) &\subset (\alpha_1 + \beta_1) V_1 + \cdots + (\alpha_{N-1} + \beta_{N-1}) V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1} + V_{N+1} + V_{N+1} \\
&\subset \gamma_1 V_1 + \cdots + \gamma_{N-1} V_{N-1} + \underbrace{\gamma_N}_{1} V_N \\
&\subset A(r + s)
\end{aligned}
$$

Case 2: そのような N がないとき，つまり任意の i で $\alpha_i + \beta_i = \gamma_i$ が成り立つ時は，自明に $A(r) + A(s) = A(r + s)$ である． □

この Claim より次の三つがわかる.

> (a) $r, t \in D \cup [1, \infty)$ について, $r \leq t$ ならば $A(r) \subset A(t)$.
> (b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
> (c) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.
>
> 特に d は X 上の transrate invariant metric となる.

上の *3* つのことの証明. (a).$t \geq 1$ の場合は明らか. $t < 1$ の場合は, $t - r \in D$ であるので (筆算を考える), 上の Claim から

$$A(r) \subset A(r) + A(t-r) \subset A(t)$$

(b). $x = 0$ ならば

$$f(0) = \inf\{r \in \mathbb{R}_{>0} \mid 0 \in A(r)\} = 0$$

である. 逆に $f(x) = 0$ ならば, 任意の $r \in D$ について, $x \in A(r)$ である, 特に任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ について, $x \in A\left(\frac{1}{2^n}\right) = V_n$ である. X は Hausdorff で $\{V_n\}_{n \geq 1}$ は 0 の local base なので, $x = 0$ である.

(c). $x \in A(r),\ y \in A(s)$ について, $x + y \in A(r) + A(s) \subset A(r+s)$ であるので, $f(x+y) \leq r + s$. よって r, s に関して inf をとれば言える.

また (b) は d の正定値性, (c) は d の三角不等式を表していて, d は symmetric transrate invariant であることはわかっているので, d はほしい距離となる. □

(2). d が X の topology を誘導することを示す. $\delta > 0$ について, $B_\delta(0) := \{x \in X \mid d(x, 0) < \delta\}$ と定義する. $d(x, 0) = f(x)$ であるので, f の定義から

$$B_\delta(0) = \bigcup_{r < \delta, r \in D \cup [1, \infty)} A(r)$$

である. この表示から $B_\delta(0)$ は X の balanced open set である. また $B_{2^{-n}}(0) \subset A(2^{-n}) = V_n$ である. これより $\{B_\delta(0)\}_{\delta > 0}$ は X の local base になり, d は X の位相を誘導する.

また" 任意の $r > 0$ について, $\{x \in X \mid d(x, 0) < r\}$ は balanced" はすでに示した. よって d が欲しい距離となる.

X が locally convex ならば, balanced convex となる V_n をとることができる. よって $A(r)$ も balanced convex になり, $B_\delta(0)$ もそうなる. convexity は translation invariant なので, 任意の $y \in Y$ について $B_\delta(y)$ も convex となる.

□

4 Bounded linear maps

defn-M-4.1

Definition 4.1. X, Y を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする．$\mathbb{K}$-linear map $\Lambda : X \to Y$ が boundedであるとは，任意の bounded set $E \subset X$ について，$\Lambda(E)$ も bounded であること．(つまり任意の open $0 \in V \subset Y$ について，ある $t_0 > 0$ があって，任意の $t \geq t_0$ について，$\Lambda(E) \subset tV$ となること.)

prop-M-4.2

Proposition 4.2. $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間の線型写像 $\Lambda : X \to Y$ について，次の条件を考える．

(a) Λ は連続

(b) Λ は *bounded*

(c) 任意の X の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ について，$x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば，$\{\Lambda x_n \mid n = 1, 2, \dots\} \subset Y$ は *bounded*

(d) 任意の X の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ について，$x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば，Y 上で $\Lambda(x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

この時 (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) は常に成り立つ．
さらに，X が *metrizable* ならば，(c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a) が成り立つ．つまり上の条件は同値である．特にprop-M-3.2 3.4から，X の *local base* が高々可算ならば，上の条件は同値である．

Proof. [(a) $\Rightarrow$ (b)] $E \subset X$ bounded とする．$0 \in V \subset Y$ open をとる．Λ は連続なので，$0 \in \Lambda^{-1}(V) \subset X$ open である．よって E bounded なので，$t \gg 0$ について $E \subset t\Lambda^{-1}(V)$ である．よって $t \gg 0$ について $\Lambda(E) \subset tV$ より，$\Lambda(E)$ は bounded となる．

[(b) $\Rightarrow$ (c)] X の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ で $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となるものを取る．$\{x_n \mid n = 1, 2, \dots\} \subset X$ が bounded であることを示せば良い．$0 \in V \subset X$open をとる．prop-M-2.3 2.3から，ある $0 \in U \subset V$ なる balanced open がある．$x_n \to 0$ よりある n_0 があって次が成り立つようにできる．

- $n > n_0$ ならば $x_n \in U$．これは $x_n \to 0$ の定義そのもの．
- ある $t_0 > 0$ があって，任意の $t \geq t_0$ について，$x_1, \dots, x_{n_0} \in tU$．これはcor-M-2.5 2.6 の証明から．(U が balanced はここに使う.)

U は balanced なので，(必要ならば $t_0 > 1$ となるように t_0 を取り替えて)，$t \geq t_0$ ならば $U \subset tU$ となる．よって $t \geq t_0$ ならば $\{x_n \mid n = 1, 2, \dots\} \subset tU$ より，bounded である．

[(c) $\Rightarrow$ (d)] X は metrizable とする． すると X は countable local base を持つので，prop-M-3.2 3.4 より，translate invariant metric $d : X \times X \to \mathbb{R}$ で X の位相を生成するものが存在する．

X の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ で $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となるものを取る．ここで k_n を

$$d(x_n, 0) \leq \frac{1}{k_n^2}$$

となる最大の自然数とおく．(ただし $x_n = 0$ なら $k_n := n$) $k_n \to 0$ である．d が translate invariant なので，

$$\begin{aligned} d(k_n x_n, 0) &\leq d(k_n x_n, (k_n - 1)x_n) + d((k_n - 1)x_n, 0) \\ &= d(x_n, 0) + d((k_n - 1)x_n, 0) \\ &\leq k_n d(x_n, 0) \leq \frac{1}{k_n} \to 0 \end{aligned}$$

よって X 上で $k_n x_n \to 0$ である．(c) の仮定を使って，$\{\Lambda(k_n x_n) \mid n = 1, 2, \dots\} \subset Y$ は bounded である．

さて今から $\Lambda(x_n) \to 0$ を示す．任意の $0 \in V \subset Y$open をとる．prop-M-2.3 2.3 より balanced を仮定して良い．$\{\Lambda(k_n x_n) \mid n = 1, 2, \dots\} \subset Y$ は bounded なので，ある $t > 0$ があって，

$$\{\Lambda(k_n x_n) \mid n = 1, 2, \dots\} \subset tV$$

となる．$k_n \to \infty$ より，ある n_0 があって，任意の $n \geq n_0$ について $\frac{t}{k_n} \geq 1$ となる．今 V は balanced なので，$\frac{t}{k_n} V \subset V$ となる．まとめると $n \geq n_0$ ならば，$\Lambda x_n \in V$ である．よって収束の定義から $\Lambda(x_n) \to 0$ である．

[(d) $\Rightarrow$ (a)] X metrizable とする．Λ が 0 で連続を示せば良い．背理法．Λ が 0 で連続でないとすると，ある開近傍 $0 \in V \subset Y$ があって，任意の近傍 $0 \in U \subset X$ について $\Lambda(U) \not\subset V$ である．よって X は距離空間なので，任意の $n \geq 1$ について，ある $x_n \in X$ があって，$d(x_n, 0) < \frac{1}{n}$ かつ $\Lambda x_n \notin V$ となるものがある．これは $x_n \to 0$ だが，Λx_n は 0 に収束しないので，(d) に矛盾する．□

5 Seminorms and local convexity

defn-M-5.1

Definition 5.1. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする．写像 $p : X \to \mathbb{R}$ が<u>seminorm</u>とは以下の 2 条件を満たすこと．

- 任意の $x, y \in X$ について，$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
- 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$ について，$p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Berkovich の文脈では，この seminorm は”faithful seminorm”と呼ばれるものらしい．

prop-M-5.2

Proposition 5.2. defn-M-5.1 *5.1* の記法において，次が成り立つ．ただし p は *seminorm* とする．

1. $p(0) = 0$.
2. $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.
3. $p(x) \geq 0$.
4. $\{x \in X \mid p(x) = 0\} \subset X$ は $\mathbb{K}$-線形部分空間
5. $A = \{x \in X \mid p(x) < 1\} \subset X$ は *convex balanced.*
6. $p(x) = \inf\{t > 0 \mid t^{-1}x \in A\}$ である．以下右の *inf* を $p_A(x)$ と表す．

Proof. (1). $p(0) = p(0 \cdot 0) = |0|\, p(0) = 0$ より．

(2). $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$, $p(y) = p(y - x + x) \leq p(y - x) + p(x)$, $p(y - x) = |-1|p(x - y)$ である．これを組み合わせると言える．

(3). (2) より $p(x) = p(x - 0) \geq |p(x) - p(0)| \geq 0$ なので．

(4). (3) と defn-M-5.1 5.1 より．

(5). convex について．任意の $x, y \in A,\ t \in (0, 1)$ について，定義から

$$p(tx + (1 - t)y) \leq tp(x) + (1 - t)p(y) < 1$$

であるので．balanced については，任意の $x \in A,\ \alpha \in \mathbb{K},\ |\alpha| \leq 1$ について

$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) < 1$$

なので $\alpha x \in A$ となる．

(6). $x \in X,\ t > 0$ に対し

$$t^{-1}x \in A \ \Leftrightarrow\ p(t^{-1}x) < 1 \ \Leftrightarrow\ t^{-1}p(x) < 1 \ \Leftrightarrow\ p(x) < t$$

であるので，$\inf\{t > 0 \mid t^{-1}x \in A\} = p(x)$ が言える． □

defn-M-5.3

Definition 5.3. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする．$\mathcal{P}$ を X の seminorms の族とする．$\mathcal{P}$ がseparatingとは，任意の $x \in X \setminus \{0\}$ について，ある $p \in \mathcal{P}$ があって，$p(x) > 0$ となること．

thm-M-5.4

Theorem 5.4. X を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．$\mathcal{P}$ を X の *separating* な *seminorms* の族

とする. $p \in \mathcal{P},\ n \in \mathbb{Z}_+$ について, $V(p,n) := \{x \in X \mid p(x) < \frac{1}{n}\}$ とおき,

$$\mathcal{B} := \{V(p_1,n_1) \cap \cdots \cap V(p_r,n_r) \mid r \geq 0, p_i \in \mathcal{P},\ n_i \in \mathbb{Z}_+\}$$

とする. このとき X の位相 τ で次を満たすものがただ一つ存在する.

- (X,τ) は $\mathbb{K}$ 上の *locally convex* 位相ベクトル空間.
- $\mathcal{B}$ は (X,τ) の *local base.*

さらにその位相ベクトル空間 (X,τ) は次を満たす.

(a) 任意の $p \in \mathcal{P},\ p : X \to \mathbb{R}$ は連続.

(b) 任意の部分集合 $E \subset X$ について, ”E が *bounded* である”ことは, ”任意の $\in \mathcal{P}$ について, $p(E) \subset \mathbb{R}$ が *bounded* である”ことと同値.

よって separating な seminorm から, ただ一つの locally convex 位相ベクトル空間の構造が定まり, それは seminorm が作る open ball が local base となる. boundedness は p からわかる.

またもし $\mathcal{P}$ が可算ならば, $\mathcal{B}$ は可算. よって prop-M-3.2 3.4 より (X,τ) は metrizable である. 特に Fréchet space, つまり locally convex かつ complete invariant metric を持つ (F-space) 空間となる (defn-M-1.4 1.6 参照.)

Proof. τ を”$\mathcal{B}$ の元を並行移動したものの合併集合全体”とする. つまり

$$\tau := \left\{ \bigcup_{i \in \Lambda \in A} (B_i + a_i) \mid B_i \in \mathcal{B}, a_i \in X \right\}$$

とする. ただし $\Lambda = \emptyset$ の場合は $\bigcup_{i \in \Lambda \in A}(B_i + a_i) = \emptyset$ と定める. この τ が位相になることを示す.(これが示されれば唯一性も言える.)

(1). $\varnothing \in \tau$ は自明. $X \in \tau$ も $X = \bigcup_{x \in X}(V(p,1) + x)$ より.

(2). $U_\lambda \in \tau \ \Rightarrow\ \bigcup_\lambda U_\lambda \in \tau$ は τ の定義から.

(3). $U_1, U_2 \in \tau \ \Rightarrow\ U_1 \cap U_2 \in \tau$. これはかなりややこしいがので丁寧にやる.

$$U_1 = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (x_\alpha + B_\alpha) \quad U_2 = \bigcup_{\beta \in \Lambda'} (y_\beta + B'_\beta)$$

とする.$x_\alpha, y_\beta \in X$ かつ $B_\alpha, B'_\beta \in \mathcal{B}$ である. すると

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha \in \Lambda, \beta \in \Lambda'} \left[(x_\alpha + B_\alpha) \cap (y_\beta + B'_\beta)\right]$$

よって示すべきことは,$x, y \in X$ かつ $B, B' \in \mathcal{B}$ について $(x+B) \cap (y+B') \in \tau$ である. τ は平行

不変より, $y=0$ としてよい. さらに以下のように B, B' を定める

$$B := V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_r, n_r) \quad B' := V(p'_1, n'_1) \cap \cdots \cap V(p'_{r'}, n'_{r'})$$

$w \in (x+B) \cap B'$ とする. すると $m_i, m'_{i'} \in \mathbb{Z}_+$ を

$$\frac{1}{m_i} < \frac{1}{n_i} - p_i(w-x) \quad \frac{1}{m'_{i'}} < \frac{1}{n'_{i'}} - p_{i'}(w)$$

と定めると, $w + \bigcap_{i=1}^r V(p_i, m_i) \cap \bigcup_{i=1}^r V(p'_i, m'_i) \subset (x+B) \cap B'$ となることを示す. (なおこれが示されれば $(x+B) \cap (y+B') \in \tau$ は w に関して合併集合をとれば言える.)

$\xi \in w + \bigcap_{i=1}^r V(p_i, m_i) \cap \bigcup_{i=1}^r V(p'_i, m'_i)$ とする. 示すことは,

$$p_i(\xi - x) < \frac{1}{n_i} \quad p_i(\xi) < \frac{1}{n'_{i'}}$$

である. 1 つ目については, $w \in (x+B)$ と $\xi \in w + \bigcap_{i=1}^r V(p_i, m_i)$ より, seminorm の劣加法性を使って

$$p_i(\xi - x) = p_i(\xi - w + w - x) \leq p_i(\xi - w) + p_i(w - x) < \frac{1}{n_i}$$

である. 二つ目は $w \in B'$ と $\xi \in \bigcup_{i=1}^r V(p'_i, m'_i)$ を使って上と同様にしめせる. よっていえた.

これより次がわかる.

- 平行移動は (X, τ) で同相写像. これは $U \in \tau \Rightarrow U = \bigcup_i B_i + a_i$ の形に書けるので.
- 任意の $p \in \mathcal{P}$ について, $p : X \to \mathbb{R}$ は連続. これは prop-M-5.2 5.2 より $|p(x+y) - p(x)| \leq p(y)$ から,

$$p(x + V(p, n)) \subset (p(x) - \tfrac{1}{n},\ p(x) + \tfrac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$$

  であるので.
- 任意の $V \in \mathcal{B}$ について V は balanced convex な 0 の開近傍. これは seminorm の定義からわかる.

以下残りの事柄も示していく.

[$\mathcal{B}$ は (X, τ) での local base なること] $0 \in U \subset X$ open, つまり $U \in \tau$ とする. 定義からある $x \in X$ と $p_i \in \mathcal{P}$, $n_i \in \mathbb{Z}_+$ があって

$$0 \in x + V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_r, n_r) \subset U$$

である. 特に $p_i(x) < \frac{1}{n_i}$ なので, $\frac{1}{m_i} < \frac{1}{n_i} - p_i(-x)$ ととると, 位相の時の議論と同じくして

$$0 \in V(p_1, m_1) \cap \cdots \cap V(p_r, m_r) \subset x + V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_r, n_r) \subset U$$

となる．$V(p_1, m_1) \cap \cdots \cap V(p_r, m_r) \in \mathcal{B}$ なので, $\mathcal{B}$ は 0 の基本近傍系となり, つまり local base である．

[(X, τ) は T_1 空間なること] 平行移動は同相写像なので $\{0\}$ が closed を示せば良い．$\mathcal{P}$ は separating より, 任意の $x \in X \setminus \{0\}$ についてある $p_x \in \mathcal{P}$ があって $p_x(x) \neq 0$ である．よって, $\frac{1}{n_x} < p(x)$ となる自然数をとれば, 5.2 より

$$X \setminus \{0\} = \bigcup_{x \in X \setminus \{0\}} (x + V(p_x, n_x))$$

であることがわかる．よって $X \setminus \{0\}$ は open で, $\{0\}$ は closed.

[足し算は連続なること] $X \times X \to X,\ (x, y) \mapsto x + y$ とする．$(x, y) \in X \times X$ で連続であることを示せば良い．$\mathcal{B}$ は local base なので, 任意の $U := V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_r, n_r) \in \mathcal{B}$ について, ある $W \in \mathcal{B}$ があって,

$$(x + W) + (y + W) \subset x + y + U$$

となることを示せば良い．そうなる W として $V(p_1, 2n_1) \cap \cdots \cap V(p_r, 2n_r)$ を取れば良い．

[スカラー倍は連続なること] $\mathbb{K} \times X \to X,\ (a, x) \mapsto \alpha x$ $(a, x) \in \mathbb{K} \times X$ で連続であることを示せば良い．$\mathcal{B}$ は local base なので, 任意の $U := V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_r, n_r) \in \mathcal{B}$ について, ある $W \in \mathcal{B}$ と, $a \in \mathbb{K}$ の半径 δ の開球 D があって

$$D \cdot (x + W) \subset ax + U$$

となることを示せば良い．これは $W = V(p_1, m_1) \cap \cdots \cap V(p_r, m_r)$ とおき, $a + \alpha \in D, \xi \in W$ について．

$$a\xi + \alpha(x + \xi) = (a + \alpha)(x + \xi) - ax \in V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_r, n_r)$$

となるように δ, m_i が取れれば良い．これは $|a|\frac{1}{m_i} < \frac{1}{2n_i}$ となるように m_i を十分大きくとった後に $\delta(|x| + \frac{1}{m_i}) < \frac{1}{2n_i}$ となるように δ を十分小さくとれば良い．

以上の結論として次が言える．

1. (X, τ) は $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間.
2. $\mathcal{B}$ は (X, τ) の balanced convex set からなる local base.
3. 上の 1,2 を満たす位相 τ は唯一.
4. 任意の $p \in \mathcal{P}$ について, $p : X \to \mathbb{R}$ は連続.

最後に boundedness の特徴付けに関して．「$E \subset X$ が bounded である」ことは,「任意の $V \in \mathcal{B}$ について, $t \gg 1$ ならば $E \subset tV$ である」ことと同値．それは「任意の $p \in \mathcal{P}$ について, $n \gg 1$ ならば $E \subset tV(p, n)$ である」ことと同値．これは「任意の $p \in \mathcal{P}$ について, $p(E) \subset \mathbb{R}$ が bounded」と同値である．($E \subset tV(p, n)$ は $p(E) < \frac{t}{n}$ と同じ意味であることに注意) □

6 Cauchy Sequence and Completeness

defn-M-6.1

Definition 6.1. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする．$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ がCauchy 列とは，任意の open $0 \in V \subset X$ について，ある $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ があって，任意の $n \geq m \geq n_0$ について，$x_n - x_m \in V$ となること．
X がcompleteとは，任意の Cauchy 列が収束すること．

prop-M-2.3
2.3 より Cauchy 列の定義における V は balanced を仮定して良い．

Remark 6.2. X が metrizable で invariant metric $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を持つとする．

この時 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることは，通常のコーシー列の定義「任意の $\varepsilon > 0$ について，ある $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ があって，任意の $n \geq m \geq n_0$ について，$d(x_n, x_m) < \varepsilon$」と同値である．理由は invariant なら $d(x_n - x_m, 0) = d(x_n, x_m)$ であるので．

Remark 6.3. Cauchy 列 (のなす集合) は bounded.

Proof. 任意の open $0 \in V \subset X$ をとる．prop-M-2.3 2.3 より，$0 \in W \subset V$ となる balanced open$W$ をとる．ある $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ があって，任意の $n \geq m \geq n_0$ について，$x_n - x_m \in W$ となる．また $x_1, \ldots, x_{n_0} \in t_0 W$ となるような $t_0 \geq 1$ を取れる．$t \geq 2t_0$ とすると，$n > n_0$ ならば，W は balanced より

$$x_n = x_{n_0} + (x_n - x_{n_0}) \in t_0 W + W \subset (2t_0)W \subset tV.$$

また $n \leq n_0$ ならば $x_n \in t_0 W \subset tV$．よって．よって $t \geq 2t_0$ ならば $x_i \in tV$ である． □

7 The space $C^\infty(\Omega)$ and $\mathcal{D}_K$

defn-M-7.1

Definition 7.1. Ω を空でない $\mathbb{R}^n$ の開集合，$K \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とする．

- $C^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f$ は C^∞ 級 $\}$
- $\mathcal{D}_K = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \mathrm{Supp} f \subset K\}$

とおく．これらは $\mathbb{C}$-vector space である．

Distributions の定義に $\mathcal{D}_K$ が必要である．この節の目標は次である: (用語に関しては defn-M-1.4 1.6 参照.)

Goal. ある $C^\infty(\Omega)$ の位相で，次を満たす位相を入れる．

- $C^\infty(\Omega)$ は位相ベクトル空間になる．
- Fréchet space. つまり locally convex かつ complete invariant metric を持つ (F-space)
- Heine-Borel property を持つ．

- 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, $\mathcal{D}_K \subset C^\infty(\Omega)$ は closed.

以下 Ω を空でない $\mathbb{R}^n$ の開集合とする.

lem-M-7.2

Lemma 7.2. あるコンパクト集合の列 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \Omega$ があって次を満たすものが存在する.

1. $K_i \subset K_{i+1}^\circ$
2. $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty K_i^\circ$

Proof. $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ について, $B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-a|| < r\}$ と定める. $\overline{B(a,r)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-a|| \leq r\}$ である.

$$\mathcal{B} := \{\overline{B(a,r)} \mid a \in \mathbb{Q}^n \cap \Omega,\ r \in \mathbb{Q}_{>0},\ \overline{B(a,r)} \subset \Omega\}$$

とする. これは可算なので, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ と添字をふる.

$K_1 := B_1$ とする. 以下 $K_1, \dots, K_m$ が作れた時に, コンパクト集合 $K_{m+1} \subset \Omega$ で $K_m \subset K_{n+1}^\circ$ をみたすものを帰納的に構成する. $x \in K_m$ について $B(x, r_x) \subset \Omega$ となる $r_x > 0$ をとる. K_m コンパクトなので, $K_m \subset \bigcup_{j=1}^l B(x_j, r_{x_j})$ とできる. 今 $C := \bigcup_{j=1}^l \overline{B(x_j, r_{x_j})}$ とおくと, C コンパクトで

$$K_m \subset C^\circ \subset C \subset \Omega$$

となる. よって $K_{m+1} := C \cup B_{m+1}$ とおけば良い.

また上の $K_1, \dots, K_m, \dots$ の構成法から, $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty K_i^\circ$ となる. □

以下 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ について

$$D^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$$

と定める.

prop-M-7.3

Proposition 7.3. lem-M-7.2 7.2 のように $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ をとる. 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ について

$$p_N : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto p_N(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| \mid x \in K_N, |\alpha| \leq N\}$$

とおく. この時次が成り立つ.

1. $\mathcal{P} := \{p_N \mid N \geq 1\}$ は $C^\infty(\Omega)$ の *seminorm* からなる *separating family*. 特に thm-M-5.4 5.4 から $C^\infty(\Omega)$ は *locally convex* かつ *invariant metric* を持つ $\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間となる.

2. 任意の $x \in \Omega$ について，

$$ev_x : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C} \quad f \mapsto ev_x(f) = f(x).$$

は連続である．特に任意のコンパクト $K \subset \Omega$ について，$\mathcal{D}_K = \bigcap_{x \in \Omega \setminus K} \mathrm{Ker} ev_x \subset C^\infty(\Omega)$ であるので，$\mathcal{D}_K \subset C^\infty(\Omega)$ は (1) の位相で *closed* である．

3. $V_N := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid p_N(f) < \frac{1}{N}\}$ とおくと，$\{V_N \mid N \geq 1\}$ は $C^\infty(\Omega)$ の *local base* となる．

4. *(1)* の $C^\infty(\Omega)$ の位相は，$\{K_i\}_{i=1}^\infty$ の取り方によらない．

5. $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ を $C^\infty(\Omega)$ の点列とし，$f \in C^\infty(\Omega)$ とする．”(1) の位相で $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ が f に収束する”ことは，”任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について $D^\alpha f_i$ が $D^\alpha f$ に局所一様収束する”ことと同値である．

$D^\alpha f_i$ が $D^\alpha f$ に局所一様収束するとは，任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について $\sup_{x \in K}\{|D^\alpha f_i - D^\alpha f|\} \to 0$ となること．

Proof. (1)．p_N が seminorm となることは簡単にわかる．$\mathcal{P} := \{p_N \mid N \geq 1\}$separating になることを示す．$f \in C^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$ とする．定義から $x \in \Omega$ で $f(x) \neq 0$ となるものがある．よって lem-M-7.2 7.2 より，ある $N \geq 1$ で $x \in K_N$ となるものが存在する．p_N の定義から，$0 < |f(x)| \leq p_N(f)$ となる．よっていえた．

(2)．$x \in \Omega$, $f \in C^\infty(\Omega)$ とする．示すことは「任意の $\varepsilon > 0$ について，ある (1) での位相における開集合 $0 \in V \subset C^\infty(\Omega)$ が存在して，任意の $g \in V$ について $|ev_x(f+g) - ev_x(f)| < \varepsilon$ となる」である．($f + V$ は $f \in C^\infty(\Omega)$ の開近傍になる.)

$\varepsilon > 0$ とする．$V := \{g \in C^\infty(\Omega) \mid p_N(g) < \varepsilon\}$ とおく．thm-M-5.4 5.4 より $p_N : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ は (1) の位相で連続になるので，V は (1) での位相における開集合となる．任意の $g \in V$ について，

$$|ev_x(f+g) - ev_x(f)| = |g(x)| \leq p_N(g) < \varepsilon$$

となりいえた．

(3)．thm-M-5.4 5.4 から，$i \in \mathbb{Z}_+, n_i \in \mathbb{Z}_+$ について，$V(p_i, n_i) := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid p_i(f) < \frac{1}{n_i}\}$ と定め，

$$\mathcal{B} := \{V(p_{i_1}, n_{i_1}) \cap \cdots \cap V(p_{i_r}, n_{i_r})\}$$

とする．thm-M-5.4 5.4 から $\mathcal{B}$ は local base である．よって示すことは，「任意の $V := V(p_{i_1}, n_{i_1}) \cap \cdots \cap V(p_{i_r}, n_{i_r})$ について，ある $N \in \mathbb{Z}_+$ があって，$0 \in V_N \subset V$ となる」ことである．

$V := V(p_{i_1}, n_{i_1}) \cap \cdots \cap V(p_{i_r}, n_{i_r})$ とする．$i_1 \leq \cdots \leq i_r$ として良い．$m := \max\{n_{i_1}, \ldots, n_{i_r}\}$ とし $n := \max\{i_r, m\}$ とおく．$p_1 \leq p_2 \leq \cdots$ であることに注意すると

$$V_N = V(p_N, N) \subset V(p_{i_r}, m) \subset V$$

となる．よって $\{V_N\}_{N\geq 1}$ は local base となる．

(4). $\{K_i'\}$ を 7.2 を満たす別のコンパクト集合族とし, p_i' を K_i' に対応するものとする．「任意の $N\geq 1$ について, ある $N'\geq N$ が存在して, $V'_{N'}=V(p'_{N'},N')\subset V(p_N,N)=V_N$ である」ことを示す．これを示せば対称性より逆も成り立ち, 二つの位相が同じことが言える ((3) より $\{V_N\}_{N\geq 1}$ は local base となるので).

$N\geq 1$ とする．$K_N\subset\Omega=\bigcup_{i'\geq 1}K_{i'}'^{\circ}$ であるので, K_N のコンパクト性より, ある $N'\geq N$ で $K_N\subset K'_{N'}$ となるものがある．よって $p_N\leq p'_{N'}$ であるので, $V(p'_{N'},N')\subset V(p_N,N)$. よっていえた．

(5). 「$C^\infty(\Omega)$ の位相で $f_i\to f$」は「任意の $N\geq 1$ について, ある $i_0\geq 1$ があって, 任意の $i\geq i_0$ について, $f_i\in f+V_N$ である」ことと同値である．($\{V_N\}_{N\geq 1}$ は local base となるので) ここで

$$f_i\in f+V_N \Leftrightarrow\ p_N(f_i-f)<\frac{1}{N}\Leftrightarrow \text{任意の } |\alpha|\leq N \text{ について } K_N \text{ 上で } |D^\alpha f_i-D^\alpha f|<\tfrac{1}{N}$$

であることに注意する．

$C^\infty(\Omega)$ の位相で $f_i\to f$ とする．任意の $K\subset\Omega$ コンパクトについて, ある $l\geq 1$ があって, $K\subset K_l$ となる任意の $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ について $N\geq\max(|\alpha|,l)$ なるように N をとる．するとある $i_0\geq 1$ があって, 任意の $i\geq i_0$ について, $f_i\in f+V_N$ となる．よって $i\geq i_0$ ならば

$$\sup_{x\in K}\{|D^\alpha f_i-D^\alpha f|\}\leq\sup_{x\in K_N}\{|D^\alpha f_i-D^\alpha f|\}\leq p_N(f_i-f)<\frac{1}{N}$$

である．よって K 上で任意の $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ について $D^\alpha f_i$ が $D^\alpha f$ に一様収束する．

逆に「任意の $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ について $D^\alpha f_i$ が $D^\alpha f$ に局所一様収束」すると仮定する．特に K_N 上で一様収束する．$|\alpha|\leq N$ となる α は有限なので, $C^\infty(\Omega)$ の位相で $f_i\to f$ が言える．((5). の証明の初めに言った同値性に注意する.) □

Proposition 7.4. 7.3 での $C^\infty(\Omega)$ の位相によって, $C^\infty(\Omega)$ は位相ベクトル空間になり, *Fréchet(locally convex* かつ *complete invariant metric* を持つ) かつ *Heine-Borel property* を持つ．

Proof. 7.2 のように $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ をとり．7.3 のように

$$p_N:C^\infty(\Omega)\to\mathbb{R}\quad f\mapsto p_N(f):=\max\{|D^\alpha f(x)|\mid x\in K_N,|\alpha|\leq N\}$$

をとる．$V_N:=\{f\in C^\infty(\Omega)\mid p_N(f)<\frac{1}{N}\}$ とおくと, 7.3 から $\{V_N\}_{N\geq 1}$ は local base となる．5.4 から $C^\infty(\Omega)$ は locally convex かつ invariant metric を持つ $\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間となる．よって残りは完備性と Heine-Borel property である．

[完備性] $\{f_i\}^\alpha\subset C^\infty(\Omega)$ を Cauchy 列とする．定義から任意の $N\geq 1$ について, ある $i_0\geq 1$ があって, 任意の $i,j\geq i_0$ について $f_i-f_j\in V_N$ となる．ここで $f_i-f_j\in V_N$ とは,「任意の $|\alpha|\leq N$

となる α について, $\sup_{K_N} |D^\alpha f_i - D^\alpha f_j| < \frac{1}{N}$ となる」ことと同値である.

よって任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について, $|\alpha| \leq N$ ならば, $\{D^\alpha f_i\}$ は K_N 上で一様 Cauchy 列となる. (つまり任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $i_0 \geq 1$ があって, 任意の $i, j \geq i_0$ について, $\sup_{K_N} |D^\alpha f_i - D^\alpha f_j| < \varepsilon$ である.) よって任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について, $\{D^\alpha f_i\}_{i=1}^\infty$ は任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ 上で一様 Cauchy 列となる.

$\alpha = 0$ とすれば, $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ は任意のコンパクト集合上で一様 Cauchy 列より, ある Ω 上の連続関数 f があって, 任意のコンパクト集合上で $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ は f に一様収束する. 次の Claim より, $f \in C^\infty(\Omega)$ となり, 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について $D^\alpha f_i$ が $D^\alpha f$ に局所一様収束する. よって7.3から $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ は f に収束する.

claim-prop-M-7.4

Claim 7.5. $(a, b) \subset \mathbb{R}$ を開区間とし, $f_i : (a, h) \to \mathbb{R}$ を C^1 級関数とする. f, g を連続関数として, (a, b) 上で一様収束 $f_i \to f$, $f_i' \to g$ すると仮定する. この時 f は微分可能かつ $g = f'$ となる.

Proof. $h > 0$ とすると

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\right| \\
&\leq \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} + \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x)\right| \\
&\leq \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}\right| + \left|f_n'(x+\theta h) - g(x)\right| \\
&\leq \frac{1}{h}|f(x+h) - f_n(x+h)| + \frac{1}{h}|f(x) - f_n(x)| + \left|f_n'(x+\theta h) - g(x+\theta h)\right| + |g(x+\theta h) - g(x)| \\
&\leq \frac{2}{h}\sup_{x\in(a,b)}|f(x) - f_n(x)| + \sup_{x\in(a,b)}|g(x) - f_n'(x)| + |g(x+\theta h) - g(x)|
\end{aligned} \tag{7.1}$$

eq-prop-M-7.4

となる. ここで $\theta \in [0, 1]$ は $\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = f_n'(x + \theta h)$ となるようにとる.(平均値の定理より存在する. θ は n, h に依存する)

よって任意の $\varepsilon > 0$ について, $h > 0$ を $\sup_{\theta\in(-1,1)} |g(x + \theta h) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ となるように取り, そして n を

$$\frac{2}{h}\sup_{x\in(a,b)}|f(x) - f_n(x)| + \sup_{x\in(a,b)}|g(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるように大きくとれば, (7.1) より, $\varepsilon > 0$ について, ある $h > 0$ があって, $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right| < \varepsilon$ となる. よっていえた. □

[Heine-Borel Property について] 示すことは任意の closed bounded set がコンパクトとなること. $E \subset C^\infty(\Omega)$ closed bounded とする. $C^\infty(\Omega)$ は metrizable より, E もそうである. よってコンパ

クトであることは点列コンパクトであることと同値である. (E の点列コンパクト性を示していく)

thm-M-5.4
5.4 から任意の $N \geq 1$ について, $p_N(E) \subset \mathbb{R}$ は bounded である. よってある $M_N > 0$ があって, 任意の $|\alpha| < N, f \in E$ について, K_N 上で $\sup_{K_N} |D^\alpha f| \leq M_N$ となる.

Claim 7.6. $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ とする. 任意の $|\alpha| < N$ となる自然数 N について

$$\mathcal{F} := \{D^\alpha f \mid f \in E\}$$

は K_N 上で次を満たす.

- 一様有界. つまりある $M > 0$ があって, 任意の $D^\alpha f \in \mathcal{F}$ について, $|D^\alpha f| \leq M$.
- 一様同程度連続. つまり任意の $\varepsilon > 0$ についてある $\delta > 0$ があって, 任意の $D^\alpha f \in \mathcal{F}$ について, $|x - x'| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Proof. 一様有界はもう示した. 一様同程度連続を示す. $f \in E, F := D^\alpha f$ とする. $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in K_N$ とする. 平均値の定理より. ある M_{n+1} があって, K_{N+1} 上で $|\frac{\partial F}{\partial x_1} F(x)| \leq M_{N+1}$ となる. よって

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq |F(x_1, \dots, x_n) - F(y_1, x_2, \dots, x_n)| + \cdots + |F(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) - F(y_1, \dots, y_n)| \\ &\leq M_{N+1} \left[|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \right]. \end{aligned} \tag{7.2}$$

がいえる. これは一様同程度連続を導く. □

$N \in \mathbb{Z}_+$ とする. $\{g_n\}_{n\geq 1} \subset \{f|_{K_N} \mid f \in E\}$ とする. このとき $\{g_n\}_{n\geq 1}$ の部分列 $\{g_{n_k}\}_{k\geq 1}$ で, 任意の $|\alpha| < N$ となる $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について, $D^\alpha g_{n_k}$ が一様収束する部分列を持つことを示す. (これは Ascoli の定理の議論をまねる)

$\{x_1, x_2, \dots,\} \subset K_N$ を K_N の可算で稠密な部分集合とする. $\{g_n\}_{n\geq 1}$ は 一様有界より, ある $M > 0$ があって $|g_i(x_j)| < M$ となる.

以下「ある部分列 $\{g_{n_k}\}_{k\geq 1}$ があって, 任意の $i \geq 1$ について $\{g_{n_k}(x_i)\}_{k\geq 1}$ は収束する」ことを示す. これは対角線論法. $i = 1$ の時は, ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理から $\{g_{11}(x_1), g_{12}(x_1), g_{13}(x_1), \dots\} \subset \mathbb{C}$ が収束するように g_{1k} が取れる. 次に $\{g_{1k}\}$ の部分列をうまく取ることで, $\{g_{21}(x_2), g_{22}(x_2), g_{23}(x_2), \dots\} \subset \mathbb{C}$ が収束するように g_{2k} が取れる. これを繰り返すと次のような点列が取れる.

$$\begin{matrix} g_{11}(x_1) & g_{12}(x_1) & g_{13}(x_1) & \cdots \\ g_{21}(x_2) & g_{22}(x_2) & g_{23}(x_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{matrix}$$

そこで $g_m := g_{mm}$ とおけば, これが欲しい点列になる.

さて上の $\{g_m\}_{m\geq 1}$ は K_N 上である g に一様収束することを示す. $g : K_N \to \mathbb{C}$ を以下のように構

成する．$x \in \Omega \setminus K_N$ ならば $g(x) = 0$ とする．$x \in K_N$ とする．$\{g_m(x)\} \subset \mathbb{C}$ は Cauchy 列であることを示す．$\varepsilon > 0$ とする．すると次のようにできる．

- $\{g_m\}_{\geq 1}$ は一様同程度連続なので，ある有限この開集合 $U_j \subset \Omega$ があって $K_N \subset \bigcup_{j=1}^{l} U_j$ かつ，任意の $m \geq 1$ かつ $x, y \in U_j$ について $|g_m(x) - g_m(y)| < \varepsilon$ となる．
- $x \in U_1$ として良い．すると上の x_j で $x_j \in U_1$ となるものが取れる．するとある M_0 があって，任意の $m, m \geq M_0$ について $|g_m(x_j) - g_{m'}(x_j)| < \varepsilon$ となる．

以上より任意の $m, m \geq M_0$ について

$$|g_m(x) - g_{m'}(x)| \leq |g_m(x) - g_m(x_j)| + |g_m(x_j) - g_{m'}(x_j)| + |g_{m'}(x_j) - g_{m'}(x)| \leq 3\varepsilon.$$

となる．よって $\{g_m(x)\} \subset \mathbb{C}$ は Cauchy 列である．これより $g(x) := \lim_{m\to\infty} g_m(x)$ として定義できる．

あとはこの議論を繰り返す．($\{D^1 g_m\}_{m\to\infty}$ の部分列をとる.) claim-prop-M-7.4 7.5 によって，部分列 $\{g_m(x)\}$ と Ω の C^N 級関数 g があって，$D^\alpha g_m \to D^\alpha g$ は一様収束する．[4]

以下 E が点列コンパクトであることを示す．$\{f_m\}_{m\geq 1} \subset E$ とする．任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ について，ある部分列 $\{f_{m_k}\}$ が K_N 上で C^N 級関数に一様収束するものがあるよって対角線論法を用いることで，ある部分列 $\{f_{m_k}\}$ があって，任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ について $\{D^\alpha f_{m_k}\}$ 局所一様収束するものが取れる．この f_{m_k} は Ω 上の C^∞ 級関数 f に局所一様収束する．よって点列コンパクトである．□

8 Space of test functions and distributions

引き続き Ω を空でない $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．

defn-M-8.1

Definition 8.1.

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\, \varphi : \Omega \to \mathbb{C} \mid \varphi C^\infty,\ \mathrm{supp}(\varphi)\ \text{コンパクト}\,\}$$

とする．$\mathcal{D}(\Omega)$ の元を<u>test function</u>という．

この節では以下を示す．

Goal.

- $\mathcal{D}(\Omega)$ が locally convex complete with Heine-Borel property を満たす位相ベクトル空間になるような位相 τ が存在すること．(この位相は距離化可能とは限らない．よって Frechet とは言えない)

[4] $D^\alpha g_m \to D^\alpha g$ の収束は，おそらく K_n° 上にした方が良い．微分をしているので境界を考えるのは面倒である．

- $C^\infty(\Omega)$ に prop-M-7.3 7.3 の位相を入れる．この時 $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow C^\infty(\Omega)$ は連続である．
- $K \subset \Omega$ コンパクトとし．$\mathcal{D}_K = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \mathrm{Supp} f \subset K\}$ とする．するとこれは $C^\infty(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)$ の部分集合である．この時 $\mathcal{D}_K$ に誘導される 2 つの部分位相は同じである．よって以下の図式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_K \arrow[r, hook, "\text{closed subspace}"] \arrow[dr, hook, "\text{closed subspace}"'] & \mathcal{D}(\Omega) \arrow[d, hook, "\text{conti}"] \\
 & C^\infty(\Omega)
\end{tikzcd}$$

そこで任意の $N \geq 0$ について

$$\|\cdot\|_N : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \varphi \mapsto \|\varphi\|_N = \max\left\{ |D^\alpha \varphi(x)| \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0},\ |\alpha| \leq N,\ x \in \Omega \right\}$$

とする．$\|\cdot\|_N$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathcal{D}(\Omega)$ のノルムであり，$\|\cdot\|_N \leq \|\cdot\|_{N+1}$ となる．

lem-M-8.2

Lemma 8.2. $K \subset \Omega$ をコンパクトとする．$\{\|\cdot\|_N\}_{N \geq 0}$ で誘導される $\mathcal{D}_K$ の位相は，prop-M-7.3 *7.3* での $\{p_N\}_{N \geq 1}$ による位相と同じである．

ここで $\{\|\cdot\|_N\}_{N\geq 0}$ で誘導される $\mathcal{D}_K$ の位相とは，$f \in \mathcal{D}_K$ として，$N \in \mathbb{Z}_+, \varepsilon > 0$ について，$\{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\varphi - f\|_N < \varepsilon\}$ が生成する位相である．

Proof. prop-M-7.3 7.3 のようにコンパクト集合の列 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \Omega$ で $\Omega = \bigcup_{i \geq 1} K_i$, $K_i \subset K_{i+1}^\circ$ で，

$$p_N(\varphi) = \max\left\{ |D^\alpha \varphi(x)| \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{Z}^n_+,\ |\alpha| \leq N,\ x \in K_N \right\}.$$

となるようにとる．$K \subset \Omega$ はコンパクトなので，ある N_0 があって $N \geq N_0$ ならば $K \subset K_N$ となる．

任意の $m \in \mathbb{Z}_+$ について，ある N があって，

$$\{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\varphi\|_N < \varepsilon\} \subset \{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid p_m(\varphi) < \varepsilon\}$$

であることを示す．$m \in \mathbb{Z}_+$ を固定する．すると $N \geq \max\{m, N_0\}$ なる N について，$\varphi \in \mathcal{D}_K$ ならば，$\mathrm{Supp}(\varphi) \subset K_N$ である．よって定義から $\|\varphi\|_N = p_N(\varphi)$ となる．以上より $N \geq \max\{m, N_0\}$ ならば，

$$\{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\varphi\|_N < \varepsilon\} = \{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid p_N(\varphi) < \varepsilon\} \subset \{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid p_m(\varphi) < \varepsilon\}.$$

上の証明で p_N と $\|\cdot\|_N$ の役割を入れ替えて議論することができる．よって 2 つの位相は同じである． □

rem-M-8.3

Remark 8.3. $\{\|\cdot\|_N\}_{N\geq 0}$ によって, $\mathcal{D}(\Omega)$ locally convex metrizable な $\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間の構造を持つ. がそれは完備ではない (そしてこれはほしい位相ではない).

$\Omega = \mathbb{R}$ とする. 自然数 $i \in \mathbb{Z}_+$ について, f を $\mathrm{Supp}(f) \subset (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $0 \leq f \leq 1$ となるような滑らかな関数をとる. (1 の分割に出てくる Bump 関数みたいなもの) そして,

$$\varphi_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} f(x-i)$$

とする. φ_n は関数として次を満たす.

- φ_n は C^∞ で $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset (0, n)$. 特に $\mathcal{D}(\Omega)$ の元である.
- 各 $1 \leq i \leq n$ について, $(i-1, i)$ 上では $0 \leq \varphi_n \leq \frac{1}{2^{i-1}}$.
- ある $M > 0$ があって, 任意の $n, \alpha \in \mathbb{Z}_+$ について $|D^\alpha \varphi_n| < M$.(φ_n の微分は f にしかよらない定数で抑えられる.)

$\{\varphi_n\}$ は $\{\|\cdot\|_N\}_{N\geq 0}$ の位相に関して Cauchy 列である. これを示す. まず, $\{\|\cdot\|_N\}_{N\geq 0}$ の 0 での local base は

$$V_{N,r} = \{ f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \|f\|_N < r \}$$

という形をしている. そこで, すると $m' \geq m \geq 1$ ならば,

$$\|\varphi'_m - \varphi_m\|_N = \left\| \sum_{i=m+1}^{m'} \frac{1}{2^{i-1}} f(x-i) \right\|_N \leq \frac{1}{2^m} M$$

となる. よって Cauchy 列である.

しかし極限は存在しない. 極限 φ が存在したら, $\varphi(i + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{i-1}}$ にならないといけず, Support はコンパクトにならない.

defn-M-8.4

Definition 8.4.

1. $K \subset \Omega$ コンパクトとする. $\mathcal{D}_K$ の位相 τ_K を $\{\|\cdot\|_N\}_{N\geq 0}$ で定められる位相とする. これは 8.2 により, 7.3 での位相と同じであり, 特に $\mathcal{D}_K$ は locally convex, complete, metrizable, with the Heine-Borel property である.
2. $\mathcal{D}(\Omega)$ の集合族 β を, "空でない convex, balanced set $W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ で, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について $W \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$ となるもの" の集まりとする.
3. $\mathcal{D}(\Omega)$ の集合族 τ を, "$\bigcup_{i\in I}(\varphi_i + W_i)$ とかけるもの" の集まりとする. ただし $i \in I$ について, $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega), W_i \in \beta$ とする.

Remark 8.5. $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ は位相ベクトル空間となる. (後で示す). $(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \tau)$ においては, 8.3 での点列 $\{\varphi_n\}$ は Cauchy 列にはならない.

Proof. $x_m := m + \frac{1}{2}$ とする, $c_m > 0$ について

$$V := \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid |\varphi(x_m)| < c_m \forall m \geq 1\}$$

とする．まず $V \in \beta$ であること示す．convex, balanced なのは明らか．任意の $K \subset \Omega$ コンパクトについて $K \cap \{x_m\}$ は有限集合より, $V \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$ となる．特に $V \in \tau$ で $(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \tau)$ における 0 の開近傍である．

$c_m := \frac{1}{2^m}$ とする．すると任意の $m' > m \geq 1$ について,

$$|\varphi_{m'}(x_{m'}) - \varphi_m(x_{m'})| = \frac{1}{2^{m'-1}} > \frac{1}{2^{m'}} = c_{m'}$$

となる．よって $\varphi_{m'} - \varphi_m \notin V$ となる．これより $(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \tau)$ においては, 8.3 での点列 $\{\varphi_n\}$ は Cauchy 列にはならない． □

Theorem 8.6. *β, τ を 8.4 における $\mathcal{D}(\Omega)$ の集合族とする．*

1. *τ は $\mathcal{D}(\Omega)$ の位相であり, β は τ の 0 での local base である．*
2. *$(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ は $\mathbb{C}$ 上の locally convex な位相ベクトル空間．*

Proof. (1)．まず τ は $\mathcal{D}(\Omega)$ の位相であることを示す．$\varnothing \in \tau$ は 8.4 において, $I = \varnothing$ とおけば良い．$\mathcal{D}(\Omega) \in \beta$ より, $\mathcal{D}(\Omega) \in \tau$ も明らか．また, τ は union "$\bigcup$" という操作で閉じている．よって示すことは,「$V_1, V_2 \in \tau$ ならば $V_1 \cap V_2 \in \tau$」のみとなる．

$V_1, V_2 \in \tau$ とする．$\varphi \in V_1 \cap V_2$ をとる．すると, $i = 1, 2$ について, ある $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ と $W_i \in \beta$ があって,

$$\varphi \in \varphi_i + W_i \subset V_i$$

となる．ある $\delta_i \in (0, 1)$ で

$$\delta_1 W_1 \cap \delta_2 W_2 \in \beta \quad \text{かつ} \quad \varphi + \delta_1 W_1 \cap \delta_2 W_2 \subset V_1 \cap V_2$$

となるものが存在することを示せば良い．コンパクト集合 $K \subset \Omega$ で $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}_K$ となるものを取る．すると $\varphi - \varphi_i \in W_i \cap \mathcal{D}_K$ である．$W_i \in \beta$ であるので, $W_i \cap \mathcal{D}_K$ は $\mathcal{D}_K$ で開集合である．$\mathcal{D}_K$ は $\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間であるので, ある $\delta_i \in (0, 1)$ があって, $\varphi - \varphi_i \in (1 - \delta_i) W_i \cap \mathcal{D}_K$ とできる．以上より, W_i は convex であるので,

$$\varphi + \delta_i W_i \subset \varphi_i + \delta_i W_i + \delta_i W_i \subset \varphi_i + W_i \subset V_i$$

となる, よって $\varphi + (\delta_1 W_1 \cap \delta_2 W_2) \subset V_1 \cap V_2$ となりいえた．($\delta_1 W_1 \cap \delta_2 W_2 \in \beta$ は簡単にわかる.)
また β が 0 の local base であることは, 上の議論において $\varphi = 0,\ V_1 = V_2$ として議論すればわかる．

(2)．8.4 から, $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ において平行移動は同相写像になる．

[$(\mathcal{D}(\Omega),\tau)$ は T_1 であること] $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ で $\varphi_1 \neq \varphi_2$ となるものを取る.

$$W := \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \|\varphi\|_0 < \|\varphi_1 - \varphi_2\|_0\}.$$

W は convex, balanced, $0 \in W$ で 任意のコンパクト $K \subset \Omega$ について, $W \cap \mathcal{D}_K$ は $\mathcal{D}_K$ で開集合になる. つまり $W \in \beta$ である. そして, $\varphi_1 \notin \varphi_2 + W$ かつ $\varphi_2 \in \varphi_2 + W$ であり, $\varphi_2 + W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ で open なので,

$$\mathcal{D}(\Omega) \setminus \{\varphi_1\} = \bigcup_{\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)\setminus\{\varphi_1\}} \varphi_2 + W$$

となり, $\{\varphi_1\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ は closed である.

[加法が連続なること.] $T : \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ を $(\varphi_1,\varphi_2) \mapsto \varphi_1 + \varphi_2$ とする. $\varphi_1 + \varphi_2$ の開近傍は $\beta \in W$ を使って, $\varphi_1 + \varphi_2 + W$ とかける. よって,

$$T\left(\varphi_1 + \frac{1}{2}W, \varphi_2 + \frac{1}{2}W\right) \subset \varphi_1 + \varphi_2 + W$$

であるので, T は (φ_1,φ_2) で連続となる.

[スカラー倍が連続なること.] $S : \mathbb{C} \times \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ を $(\alpha_0,\varphi_0) \mapsto \alpha\varphi$ とする. これが (α_0,φ_0) で連続であることを示す.

$K \subset \Omega$ を $\varphi_0 \in \mathcal{D}_K$ となるコンパクト集合とする. $W \in \beta$ とする. すると次が成り立つ.

- $W \cap \mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}_K$ は開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ があって, 任意の $|\alpha| < \varepsilon$ について, $\alpha\varphi_0 \in \frac{1}{3}W$ である.
- $\alpha_0 = 0$ または $\varphi \in \frac{1}{3|\alpha_0|}\}W$ の時は, W は balanced なので, $\alpha_0\varphi \in \frac{1}{3}W$ となる.
- $\varphi \in \frac{1}{3}W$ かつ $|\alpha| \leq 1$ ならば, $\alpha\varphi \in \frac{1}{3}W$ である.

よって, $|\alpha| < \min\{\varepsilon, 1\}$ かつ $\varphi \in \min\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3|\alpha_0|}\}W$ ならば

$$(\alpha_0 + \alpha)(\varphi_0 + \varphi) \in \alpha_0\varphi_0 + \frac{1}{3}W + \frac{1}{3}W + \frac{1}{3}W \subset \alpha_0\varphi_0 + W$$

となる. (W は convex balanced を使う) よってスカラー倍も連続.

以上より $(\mathcal{D}(\Omega),\tau)$ は $\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間. そして, β の元は convex であるため, $(\mathcal{D}(\Omega),\tau)$ は locally convex. □

thm-M-8.7

Theorem 8.7. ひき続き, β,τ を defn-M-8.4 8.4 における $\mathcal{D}(\Omega)$ の集合族とする. ($\mathcal{D}(\Omega)$ には位相 τ を入れる. thm-M-8.6 8.6 より, $(\mathcal{D}(\Omega),\tau)$ は $\mathbb{C}$ 上の *locally convex* な位相ベクトル空間で, β は 0 の *local base* である.
この時次が成り立つ.

1. $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$ を *convex balanced set* とする. V が開集合であることは, 任意の $K \subset \Omega$

について, $V \cap \mathcal{D}_K$ は $\mathcal{D}_K$ で開集合になること (つまり $V \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$) と同値.

2. $K \subset \Omega$ をコンパクト集合とする．この時, $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ によって誘導される部分位相は, defn-M-8.4 8.4 での τ_K と同じである.
3. $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ が *bounded* ならば, あるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ で $E \subset \mathcal{D}_K$ となるものが存在し, 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ について, $\|\cdot\|_N : E \to \mathbb{R}$ は *bounded.*
4. $\mathcal{D}(\Omega)$ は *Heine-Borel property* を持つ.
5. $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega)$ が *Cauchy* 列ならば，あるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって, $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{D}_K$ かつ, 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ について,
$$\lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_m - \varphi_n\|_N = 0.$$
となる. (最後の意味は $\|\cdot\|_N$ に関して *Cauchy* 列になるということ.)
6. $\varphi_n \to \varphi_0$ *in* $\mathcal{D}(\Omega)$ ならば, あるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって, $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{D}_K$ かつ任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について, 一様に $D^\alpha \varphi_n \to \varphi_0$ と収束する.
7. $\mathcal{D}(\Omega)$ はこの位相において完備である.

Proof. 次の claim を示す.

Claim 8.8. $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$ を開集合, $K \subset \Omega$ をコンパクト集合とする．この時 $V \cap \mathcal{D}_K$ は $\mathcal{D}_K$ 上で開集合である. (つまり $V \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$ ということ．) 特に $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ は連続

Proof. 任意の $\varphi \in V \cap \mathcal{D}_K$ について, ある 0 の local base $W \in \beta$ で $\varphi + W \subset V$ となるものが存在する．すると $\varphi + W \cap \mathcal{D}_K \subset V \cap \mathcal{D}_K$ であり, $W \cap \mathcal{D}_K$ は $\mathcal{D}_K$ で開集合である．よって, $V \cap \mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}_K$ は開集合である. □

(1). $\Rightarrow$ は claim から．$\Leftarrow$ について, $V = \varnothing$ の時は明らか．そうでない時は, $V \in \beta$ より OK.

(2). Claim より, $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ は連続である．よってあとは $E \in \tau_K$ について, ある $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$open であって, $E = V \cap \mathcal{D}_K$ となるものが存在することを示せば良い.

$E \in \tau_K$, $\varphi \in E$ とする．τ_K の位相は lem-M-8.2 8.2 によって, $\{\|\cdot\|_N\}_{N\geq 0}$ が誘導する位相と同じであるので, ある $N \in \mathbb{Z}_+$, $\delta > 0$ があって,
$$W_\phi := \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \|\psi\|_N < \delta\}$$
とおくと, $\phi + W_\phi \cap \mathcal{D}_K \subset E$ となる．そして, $W_\phi \in \beta$ であるので, $\phi + W_\phi \subset \mathcal{D}(\Omega)$ で open である．また
$$(\phi + W_\phi) \cap \mathcal{D}_K = \phi + (W_\phi \cap \mathcal{D}_K) \subset E$$

である．今 $V := \bigcup_{\phi \in E}(\phi + W_\phi)$ とおくと $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$open であり, $V \cap \mathcal{D}_K = E$ となる．よっていえた．

(3). $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ bounded とする．まず $E \subset \mathcal{D}_K$ となるコンパクト集合の存在を示す．背理法．「任意の $K \subset \Omega$ コンパクト集合について, $E \not\subset \mathcal{D}_K$ とする．すると任意の $m \in \mathbb{Z}_+$ について, ある $\varphi_m \in E$ と $x_m \in \Omega$ があって,

- $\varphi_m(x_m) \neq 0$ かつ
- $\{x_m\}$ は Ω 上で集積点を持たない

ものを構成できる．これは次のように帰納的に構成する: 7.2 のようなコンパクト集合の列 $\Omega = \bigcup_{i \geq 1} K_i$ をとる． $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, x_1, \ldots, x_m$ が構成されたとする． $x_1, \ldots, x_m \in K_i$ なる i をとる． $E \not\subset \mathcal{D}_{K_i}$ より, ある $\varphi_{m+1} \in E$ で $\mathrm{supp}(\varphi_m) \not\subset K_i$ となるものがある．そこである $x_{m+1} \in \Omega \setminus K_i$ で $\varphi_{m+1}(x_{m+1}) \neq 0$ となるものが取れる．これを繰り返せば構成できる．

さて $W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ を

$$W := \left\{ \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \mid |\psi(x_m)| < \frac{|\varphi_m(x_m)|}{m} (\forall m \geq 1) \right\}$$

とおく．W は convex balanced かつ $0 \in W$ である．そして, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に関して, $K \cap \{x_m\}_{m \geq 1}$ は有限集合となるので, $W \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$ となる．以上より, $W \in \beta$ となる．一方で φ_m の取り方から $\varphi_m \notin W$ である．つまり任意の $m \in \mathbb{Z}_+$ について, $E \not\subset mW$ である．これは E が bounded に矛盾する．

後半の主張に関しては, コンパクト集合 $K \subset \Omega$ で $E \subset \mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ となるものを取る．E は $\mathcal{D}_K$ でも bounded である．よって, 5.4 より $\|\cdot\|_N : E \to \mathbb{R}$ は bounded となる．

(4). $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ を bounded closed とする．(3) より, あるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって, $E \subset \mathcal{D}_K$ となる．(2) より, E は $\mathcal{D}_K$ の上で bounded closed である．7.4 から E は $\mathcal{D}_K$ 上でコンパクトである．よって $\mathcal{D}(\Omega)$ でもコンパクトである．

(5). $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega)$ Cauchy 列とすると, $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ は bounded set である．よって (3) からあるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって, $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_K$ となる．(2) から $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ は部分位相が入っているので, $\{\varphi_i\}$ は $\mathcal{D}_K$ 上でも Cauchy 列である．つまり任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ について $\lim_{n,m \to \infty} \|\varphi_m - \varphi_n\|_N = 0$ となる．

(6). $\mathcal{D}(\Omega)$ 上で $\varphi_i \to 0$ とする．(この場合に示せば良い.) $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ は Cauchy 列になるので, (5) からあるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって, $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_K$ となる．よって $\mathcal{D}_K$ 上でも $\varphi_i \to 0$ となるので, $N \in \mathbb{Z}_+$ について $\|\varphi_i\|_N \to 0$ である．これは任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について, 一様に $D^\alpha \varphi_i \to 0$ と収束する．

(7). $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ を Cauchy 列とする．(5) からあるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって, $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_K$ となる．7.4 によって, $\mathcal{D}_K$ は完備である．(完備な距離空間の閉集合なので.) よってある $\varphi \in \mathcal{D}_K$ があって, $\mathcal{D}_K$ 上で $\varphi_i \to \varphi$ となる．これは $\mathcal{D}(\Omega)$ 上でも $\varphi_i \to \varphi$ となる．よって φ こそがほしい収束先である． $\square$

以下 $\mathcal{D}(\Omega)$ には常に 8.4 における位相 τ を入れる．8.7 より $\mathcal{D}(\Omega)$ は locally convex complete で Heine-Borel Property を持つ位相ベクトル空間である．

Remark 8.9. $x \in \Omega$ について $\mathrm{ev}_x : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ を $\mathrm{ev}_x(\varphi) := \varphi(x)$ として定めると，これは連続である．なぜならば $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ と $\varepsilon > 0$ について

$$W := \{f \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \|f\|_0 < \varepsilon\}$$

とおくと，これは開集合であり，$\mathrm{ev}_x(\varphi + W) \subset B(\varphi(x), \varepsilon)$ となる．つまり ev_x は $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ で連続であり，φ は任意なので，ev_x は連続である．

また $\mathcal{D}_K = \bigcap_{x \in \Omega \setminus K} \mathrm{ev}_x^{-1}(0)$ とかけるので，特に $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ は closed である．

defn-M-8.8

Definition 8.10. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を空でない開集合とする．Ω 上の超関数 (distribution)とは，連続な $\mathbb{C}$ 線型写像 $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ のことである．その集まりを $\mathcal{D}'(\Omega)$ と表す．

prop-M-8.9

Proposition 8.11. *Y を $\mathbb{C}$ 上の locally convex な位相ベクトル空間とし，$\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ を $\mathbb{C}$-線型写像とする．以下は同値である．*

(*a*) Λ は連続.

(*b*) Λ は有界

(*c*) $\mathcal{D}(\Omega)$ 上で $\varphi_i \to 0$ となる点列に対し，Y 上で $\Lambda\varphi_i \to 0$ となる.

(*d*) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について，$\Lambda|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to Y$ は連続.

よって特に $\mathbb{C}$ 線型写像 $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ に対して，Λ が超関数であることは，Λ が有界であることと同値であり，そして任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について，$\Lambda|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to Y$ は連続であることと同値である．

Proof. [(a) $\Rightarrow$ (b)] 4.2 より．

[(b) $\Rightarrow$ (c)] $\{\varphi_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ を $\mathcal{D}(\Omega)$ 上で $\varphi_i \to 0$ となる点列とする．8.7 よりあるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって，$\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_K$ となる．今

$$\Lambda|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \overset{\text{bounded}}{\hookrightarrow} \mathcal{D}(\Omega) \xrightarrow{\Lambda} Y$$

という写像もまた bounded になる．$\mathcal{D}_K$ は 7.3 から metrizable であるので，4.2 から $\Lambda|_{\mathcal{D}_K}$ は連続である．よって，$\Lambda(\varphi_i) = \Lambda|_{\mathcal{D}_K}(\varphi_i) \to 0$ となる．

[(c) $\Rightarrow$ (d)] $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_K$ を $\varphi_i \to 0$ となる点列とする．(c) の仮定から，$\Lambda|_{\mathcal{D}_K}(\varphi_i) = \Lambda\varphi_i \to 0$ である．これは 4.2 から $\Lambda|_{\mathcal{D}_K}$ は連続であることを意味する．

[(d) $\Rightarrow$ (a)] 示すべきことは，任意の convex balanced open set$0 \in U \subset Y$ について，$\Lambda^{-1}(U) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ が open となることである．まず $\Lambda^{-1}(U)$ は convex balanced で $0 \in \Lambda^{-1}(U)$ となる．そして任意

のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, (d) の仮定から $\Lambda^{-1}(U) \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$ となる．よって8.7より $\Lambda^{-1}(U)$ は $\mathcal{D}(\Omega)$ 上で open となる． $\square$

cor-M-8.10

Corollary 8.12. *$\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について, $D^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ を $D^\alpha(\varphi) := D^\alpha \varphi$ とすると, これは連続である.*

Proof. $K \subset \Omega$ をコンパクト集合とすると, 以下の可換図式が成り立つ.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(\Omega) \arrow[r, "D^\alpha"] & \mathcal{D}(\Omega) \\ \mathcal{D}_K \arrow[u, hook] \arrow[r, "D^\alpha"] & \mathcal{D}_K \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

よって $D^\alpha : \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}_K$ が連続であることを示せば良い．任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K, N \in \mathbb{Z}_+$ について,

$$\|\varphi\|_N \leq |\varphi|_{N+|\alpha|}$$

である. $\mathcal{D}_K$ の位相は8.2より $\{\|\cdot\|_N\}_{N \geq 0}$ で定まっていたのでいえた. $\square$

prop-M-8.11

Proposition 8.13. $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 線型写像とする．以下は同値である．

(a) $\Lambda \in D'(\Omega)$, つまり Λ は超関数である.

(b) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, ある $N \geq 0$ とある $C > 0$ があって, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について,

$$|\Lambda \varphi| \leq C \|\varphi\|_N$$

が成り立つ.

Proof. [(b) $\Rightarrow$ (a)] $K \Subset \Omega$ をコンパクト集合とする．8.11から示すことは, $\Lambda|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \hookrightarrow D(\Omega) \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{C}$ が連続となることである．平行移動して $\Lambda|_{\mathcal{D}_K}$ が 0 で連続であることを示せば良い．仮定 (b) にあるような $N \geq 0, C > 0$ を固定する．任意の $\varepsilon > 0$ について,

$$V = \{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\varphi\|_N < \frac{\varepsilon}{C}\}$$

とする． $0 \in V \subset \mathcal{D}_K$open であり, 任意の $\varphi \in V$ について $|\Lambda|_{D_K}(\varphi)| < \varepsilon$ である．よって $\Lambda|_{D_K}$ は連続である.

[(a) $\Rightarrow$ (b)] $K \subset \Omega$ をコンパクト集合とする．すると $\Lambda|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to \mathbb{C}$ もまた連続である．よってある $N \geq 0$ とある $\varepsilon > 0$ があって,

$$\Lambda\left(\{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\varphi\|_N < \varepsilon\}\right) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

となる．これは任意の 0 でない $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について，$|\Lambda(\frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|_N}\varphi)| < 1$ となる．よって任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について，

$$|\Lambda(\varphi)| < \frac{2}{\varepsilon}\|\varphi\|_N$$

となる．$C = \frac{2}{\varepsilon}$ とおけばいえた． □

defn-M-8.12

Definition 8.14. $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ とする．Λ が<u>finite order</u>を持つとは，”ある $N \geq 0$ があって，任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について，ある $C > 0$ があって，任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について，

$$|\Lambda\varphi| \leq C\|\varphi\|_N$$

が成り立つ” こと．これが成り立つ最小の自然数 N を Λ の order という．

Example 8.15 (Dirac の超関数)**.** $x \in \Omega$ について，$\delta_x = \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ を $\delta_x(\varphi) := \varphi(x)$ とする．δ は distribution である．なぜならば任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ について，

$$|\delta_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_0$$

が成り立つので，prop-M-8.11 8.13 からわかる．さらに δ_x は finite order を持つ，order は 0 である．