$\boxed{7/1\text{まとめ}}$ 藤野問題

$\upsilon \in Ext^1(Q, S)$で $(\upsilon = \delta(id_Q))$

$0 \to S \to E \to Q \to 0$が作られているとする

$\overset{\text{dual}}{\rightsquigarrow}$ $0 \to Q^* \to E^* \to S^* \to 0$

$K \to \varepsilon_1$

$\varepsilon_2 \to \sigma$

K, σはQ^*, S^*の local sectn とする。

Q^*のはりあわせ条件。 (K^αはQ^*の local sectn.)

$$K^\alpha = l^{\alpha\beta} K^\beta.$$

S^*のはりあわせ条件

$$\sigma^\alpha = m^{\alpha\beta} \sigma^\beta \text{ とおく。}$$

[HIM]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^\alpha \\ \varepsilon_2^\alpha \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} l^{\alpha\beta} & 0 \\ g^{\alpha\beta} & m^{\alpha\beta} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^\beta \\ \varepsilon_2^\beta \end{pmatrix} \text{ とおける}$$

$\Phi^{\alpha\beta}$とおる

$$\rightsquigarrow \quad g^{\alpha\beta} \cdot K^\beta \otimes (\sigma^\alpha)^* \in H^1(Q^* \otimes S)$$

$\shortparallel$ υ となる。 $\shortparallel$ $Ext(Q, S)$

C^∞ splitting を入れたい

$$g^{\alpha\beta}\chi^{\beta}\otimes(g^{\alpha})^{*} = l^{\beta}\chi^{\beta}\otimes(g^{\beta})^{*} - l^{\alpha}\chi^{\alpha}\otimes(g^{\alpha})^{*}$$

となる C^∞ function がある

⇝ $g^{\alpha\beta} = l^{\beta} m^{\alpha\beta} - l^{\alpha} l^{\alpha\beta}$.

Q^* の metric のはりあわせ条件,

$$h_{Q^*}^{\alpha} = l^{\alpha\beta} h_{Q^*}^{\beta}\, \overline{l^{\alpha\beta}}$$

S^* の metric

⇝ $h_{S^*}^{\alpha} = m^{\alpha\beta} h_{S^*}^{\beta}\, \overline{m^{\alpha\beta}}$

⇝ $h_{\lambda}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda b^{\alpha} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_Q^{\alpha} & 0 \\ 0 & h_S^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \overline{-\lambda b^{\alpha}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

とおくと

$h_{\lambda}^{\alpha} = \Phi^{\alpha\beta} h_{\lambda}^{\beta}\, {}^{t}\overline{\Phi^{\alpha\beta}}$ をみたし

E^* の metric となる

($E \simeq E_{\lambda u}$ より $E^* \simeq E_{\lambda u}^{*}$)

$$h^\alpha_\lambda = \begin{pmatrix} h^\alpha_{Q^*} & -\overline{\lambda b^\alpha}\, h^\alpha_{Q^*} \\ -\lambda b^\alpha h^\alpha_{Q^*} & h_{S^*} \end{pmatrix}$$ である。

$h^\alpha_{Q^*} = e^{\varphi_1}$
$h^\alpha_{S^*} = e^{\varphi_2}$ とすると

$$h^\alpha_\lambda = \begin{pmatrix} e^{\varphi_1} & -\overline{\lambda b^\alpha}\, e^{\varphi_1} \\ -\lambda b^\alpha e^{\varphi_1} & e^{\varphi_2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{Q.}$ なぜこの方法でうまくいかない？？

えびりさんの例では $Q^* \simeq \mathcal{O}_X$, $S^* \simeq \mathcal{O}_X(-C)$

である

$\Rightarrow$ $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \log|z|^2$; $U_\alpha \simeq \mathbb{C}^2$ でかんがえる。

$$h^\alpha_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\lambda b^\alpha} \\ -\lambda b^\alpha & |z|^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{claim}}$ $\exists\, 0<\lambda<1$ s.t. $\forall c \in \mathbb{C}$, $(\bar{c}, 1)\, h^\alpha_\lambda \overline{\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}}$ は $\varepsilon\omega$ たしても psh にならない。

$\boxed{\text{pf}}$ $(c, 1)\, h^\alpha_\lambda \overline{\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}}$

$= |c|^2 + |z|^2 - \lambda b^\alpha \bar{c} - \bar{\lambda} \bar{b}^\alpha c$

dd^c すると $dz \wedge d\bar{z}$ $\boxed{- \lambda \bar{c}\, dd^c b^\alpha - \bar{\lambda} c\, dd^c \bar{b}^\alpha}$

よって λ を小さくしても $|c| >> 1$ とすれば ↑

ここの項が psh をじゃまする.

よってこの方法でうまくいかない

Q^* $\left(\begin{array}{ll} \varphi_1 = \log|z|^2 & S_y \\ S^+ \ \varphi_2 = 0 & S_u \end{array} \right)$

$\boxed{\text{逆ならどう?}}$

$\begin{pmatrix} |z|^2 & -\overline{\lambda b^\alpha}|z|^2 \\ -\overline{\lambda b^\alpha}|z|^2 & 1 \end{pmatrix}$ のばあい

$(c, 1)$ のながさは

$|c|^2|z|^2 + 1 - \overline{\lambda b^\alpha} c |z|^2 - \lambda b^\alpha \bar{c} |z|^2,$

dd^c すると $\underline{|c|^2 dz \wedge d\bar{z}} + 1 - c(\sim\sim)$

$\exists c_0$. $c_0 \le c$ ならば psh になる

よって $c_0 \ge c$ については ここを小さくすれば psh になる

$\to$ psh になる.

$\boxed{\text{わからん点}}$

じゃあ φ_1, φ_2 が strictly psh

$(dd^c \varphi_i \geq \varepsilon \omega)$ のばあいは

なぜうまくいかない??

$\boxed{\text{不確定}}$

smoothのときにうまくいくのは

$$h^\alpha_x \text{ の曲率} \xrightarrow[\alpha \to 0]{} S^t \oplus Q^t \text{ の曲率}$$

で

ここが negative だから

大事なのは"連続性"らしい.

SHwでは これはのぞめない..

$\boxed{\text{例}}$ [Raufi] [HPS18, Ex 18.4)

$$h^t = \begin{pmatrix} 1+|z|^2 & z \\ \bar{z} & |z|^2 \end{pmatrix}.$$

$$|(1,0)|_{h_0} = 1$$

$$|(1,0)|_{h_z} = |z|^2$$

今回の知見

① h が semi negative ($|S|^2_h$ psh より) を確かめる方法が ムズい!!（しがある??）

(E^*, h^*)　h^* semi negative

$\Rightarrow (z, [w_1 : \cdots : w_n]) \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^*)}(-1)$,

$$\varphi(z, [w]) = \log\left(\sum h^*_{i\bar{j}} w_i \overline{w_j}\right)$$

φ is psh.

$\Rightarrow e^{-\varphi}$ is sHm ≥ 0 on $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^*)}(1)$

$\mathrm{Sym}^m E \otimes \det E^* = \pi_*(K_{\mathbb{P}(E)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(m+r))$ より

$dd^c \varphi \geq \varepsilon \pi^* \omega_X$ ならば

$\mathrm{Sym}^m E \otimes \det E^*$ には $\exists h_m$ で $\Theta_{h_m} \geq m \varepsilon \omega_X$ 的 が入る。

（ただし φ の singularity が大きくないときは）

とくに E big となる。

Q ・φ が psh かどうかたしかめるすべはある?
(ただこれも log とってるしムズい)
・h が seminegative かしらべるすべはある??
(2×2 でもよいからつかいたい)

(2) そもそも Griffith positive のはあいの
主張がない

しらべたけど
$$\begin{cases} 0 \to E \to F \to G \to 0 \\ E, G >_{\text{Grif}} 0 \end{cases} \Rightarrow F >_{\text{Grif}} 0$$
はなかった

DPS94 の nef のところしかない
(これあってるか微妙かもしれん)

(3) 悲しいことにどんだけがんばっても
代数に及ばない
~> (why?) (1) ample, nef, big, psef のほうが
条件がよわいから、仮定がよわい
(2) semipositive の ext が semipositive は
ムリ ⇒ positive ~~hetic~~ しかのこらない
(big のほうは E には入らないんじゃないかな…)

6/20 藤野問題

- ベクトル束の完全れつ (Umemura) を見てDPSと特異計量から藤野先生の質問は出る?
- Bigならいえそうな気もするが、そっからweakly positiveは出るんすか？
- ニコラスくんの結果拡張・EIMの例の簡単な証明 JLZq6 7/7まで「nef psefのextension (ニコラスくんの結果拡張・EIMの例の簡単な証明 JLZq6) のうち江尻さんの結果に関わるやつを書く」ーkx nefの時は？→ 号もできなかったうーん
- 「なぜUmemuraの方法でできなかったかを見る」→nefの場合は分かった。ampleの場合はわからん