

Bibliography

[Rud] W. Rudin. *Functional analysis*. 2nd edn. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York. (1991.)

[NO] J. Noguchi, T.Ochiai *Geometric Function Theory in Several Complex Variables* Translations of Mathematical Monographs Volume: 80; 1990; 282 pp

^{NO}
[NO, Chapter 3] を参考にしている.

0.1 Current

0.1.1 current

M 2nd countable m 次元 C^∞ 級多様体とする.

Recall $M \subset \mathbb{R}^m$ の時 $C^\infty(M)$ には次の位相を次で入れていた.

$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$ というコンパクト集合であって

$$K_i \subset K_{i+1}^\circ \quad \text{and} \quad M = \bigcup K_i^\circ$$

となるものを一つ固定し, $f \in C^\infty(M)$ について, $N \in \mathbb{Z}_+$ として

$$P_N(f) := \max\{|D^\alpha f(x)| \mid |\alpha| \leq N \& x \in K_N\}$$

$$V_N := \max\{f \in C^\infty(M) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$$

を 0 の open base とするような位相を入れていた.

$K \subset M$ コンパクトに対して

$$\mathcal{D}_K(M) := \{\phi \in C^\infty(M) \mid \text{Supp}(\phi) \subset K\} \subset C^\infty(M)$$

に対して相対位相を入れて

$$\mathcal{D}(M) := \bigcup_{K \subset M | K \text{ cpt}} \mathcal{D}_K(M) \cong \varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$$

この colimit は locally convex vector space での colimit である.

lem-E-1

Lemma 0.1.1. 1. $U, U' \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とする. $U \cong U'$ を微分同相とする時, $C^\infty(U) \cong C^\infty(U')$ である. ここでこの同型は位相 \mathbb{C} ベクトル空間の同型である
2. $M \subset \mathbb{R}^m$ 開集合とし, $M = \bigcup U_i$ を可算個の開被覆とする時

$$C^\infty(M) \hookrightarrow \prod C^\infty(U_i) \quad f \mapsto \{f|_{U_i}\}$$

とすると, $C^\infty(M)$ の位相はこの直積位相 $\prod C^\infty(U_i)$ によって引き起こされる位相となる. 特に

$$C^\infty(M) \cong \text{Eq}(\prod C^\infty(U_i) \rightrightarrows \prod C^\infty(U_i \cap U_j))$$

という位相 \mathbb{C} ベクトル空間の同型を得る.

Proof. (1). 以下 $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset U$ というコンパクト集合で $C^\infty(U)$ の位相を誘導するものを一つ固定する. $\Phi: U' \rightarrow U, (x_1, \dots, x_m) \mapsto (y, \dots, y_m)$ を微分同相写像とする. すると $K'_i := \Phi(K_i)$ によって, $C^\infty(U')$ の位相を誘導する. V_N, V'_N を上の通りとする.

さてその引き戻し

$$\Phi^*: C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U') \quad f(y) \mapsto f \circ \Phi(x) = f(y(x))$$

が位相 \mathbb{C} ベクトル空間の同型を誘導することを示す.

$f \in C^\infty(U)$ について chain rule より, $|\alpha| \leq N'$ について

$$D_x^\alpha f \circ \Phi(x) := \sum_{|\beta| \leq N'} (D_y^\beta f)(y(x)) \cdot \Phi_{\alpha\beta}(x) \quad (0.1.1)$$

eq-lem-E-1

である.

Φ が 0 の近傍で連続であることを示せば良い. 任意の N' について, $K_{N'}$ コンパクトなので, $K_{N'}$ 上では $|\Phi_{\alpha\beta}(x)| \leq C_{N'}$ となる $C_{N'}$ が取れる. よって $N' \cdot \frac{1}{N} \cdots C_{N'} < \frac{1}{N'}$ となる N をとれば, $f \circ \Phi \in \Phi^*(V_N)$ について

$$|D_x^\alpha f \circ \Phi(x)| \stackrel{\text{eq-lem-E-1}}{\underset{(0.1.1)}{\leq \sum_{|\beta| \leq N} \underbrace{|(D_y^\beta f)(y(x))| \cdot |\Phi_{\alpha\beta}(x)|}_{< \frac{1}{N}}}}} \leq N' \cdot \frac{1}{N} \cdot C_{N'} < \frac{1}{N}$$

よって「任意の $N' > 0$ について, ある $N > 0$ があって, $\Phi^*(V_N) \subset V'_{N'}$ である」ため Φ は 0 の近

傍で連続である.

(2) $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ とする. 各 U_i で

$$K_{i1} \subset K_{i2} \subset \cdots \subset U_i$$

で $U_i = \bigcup_j K_{ij}^\circ$ となるコンパクト列をとる. そこで $K_N := \bigcup_{i=1}^N K_{i,N}$ とすると

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$$

であって, $K_i \subset K_{i+1}^\circ$ かつ $M = \bigcup K_i^\circ$ となる.

さて $\prod C^\infty(U_i)$ の 0 での local base は

$$\{V_{i,N} := V_{i_1,N_{i_1}} \times V_{i_2,N_{i_2}} \times \cdots \times V_{i_l,N_{i_l}} \times \prod_{i \neq i_k} C^\infty(U_i) \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_l, N_{i_k} \in \mathbb{Z}_+\}$$

となる形のものである. ここで

- $i := (i_1, i_2, \dots, i_l), N := (N_{i_1}, N_{i_2}, \dots, N_{i_l})$ と定める.
- $V_{i,N} := \{f \in C^\infty(U_i) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$ である (ここの定義での $P_N(f)$ には $K_{i,N}$ をつかう.)

一方 $V_N := \{f \in C^\infty(M) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$ (ここの定義での $P_N(f)$ には $K_{i,N}$ をつかう.) であり, これは $C^\infty(M)$ の 0 での local base である. 以上より, 次の二つを示せば良い.

- 任意の i, N について, ある N があって, $V_N \subset V_{i,N} \cap C^\infty(M)$ が成り立つ.
- 任意の N について, ある i, N があって, $V_N \supset V_{i,N} \cap C^\infty(M)$ が成り立つ.

$$\begin{aligned} V_N &:= \left\{ f \in C^\infty(M) \mid x \in K_N := \bigcup_{i=1}^N K_{i,N}, |\alpha| \leq N, |D_\alpha f(x)| < \frac{1}{N} \right\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \left(V_{1,N} \times V_{2,N} \times \cdots \times V_{N,N} \times \prod_{i>N} C^\infty(U_i) \right) \cap C^\infty(M) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} V_{(1,2,\dots,N),(N,\dots,N)} \cap C^\infty(M) \end{aligned}$$

である. これより二つ目の主張が正しいことがいえる. 一つ目の主張は任意の i, N について,

$$V_{\max\{i,N\}} \subset V_{i,N} \cap C^\infty(M)$$

なので言える. □

Definition 0.1.2. M 2nd countable m 次元 C^∞ 級多様体とする. $C^\infty(M)$ に位相を次のように入れる.

まず $M = \bigcup_{i=1}^\infty U_i$ で $U_i \subset \mathbb{R}^m$ となる countable open cover を一つ固定する. そして,

$$C^\infty(M) \hookrightarrow \prod_i C^\infty(U_i) \quad f \mapsto (f|_{U_i})$$

による部分位相を $C^\infty(M)$ に入れる. つまり,

$$C^\infty(M) \cong \text{Eq}(\prod_i C^\infty(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} C^\infty(U_i \cap U_j))$$

となるように入れる.

Remark 0.1.3. ^{defn-E-2}[0.1.2](#) による位相の定義において, U_i の取り方によらない.

Proof. 別の U'_j をとると細分 $U_i \cap U'_j$ が取れる. よって次の図式が考えられる.

$$\begin{array}{ccccc} C^\infty(M) & \hookrightarrow & \prod C^\infty(U_i) & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & \prod C^\infty(U'_j) & \hookrightarrow & \prod C^\infty(U_i \cap U'_j) \end{array}$$

そこで”相対位相の直積は相対位相になる”ので, ^{lem-E-1}[0.1.1](#) より言える. □

これにより

$$C^\infty : (U \underset{\text{open}}{\subset} M) \mapsto C^\infty(U)$$

は \mathbb{C} ベクトル空間の sheaf となる. よって $K \subset M$ に対して

$$\mathcal{D}_K(M) := \{\phi \in C^\infty(M) \mid \text{Supp}(\phi) \subset K\}$$

として $C^\infty(M)$ の部分位相を入れる.

$$\mathcal{D}(M) := \bigcup_{K \subset M \mid K \text{ cpt}} \mathcal{D}_K(M) \cong \varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$$

この colimit は locally convex vector space での colimit である.

[指摘] この colim は存在する? やっぱ Section 1 でやったような位相の入れ方にもう一回戻る?
 $\varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$ については次回再考.

0.1.2 current 続き

以下^[NO]の記法に合わせる. (M 2nd countable m 次元 C^∞ 級多様体, $k \in \mathbb{Z}_+$ とする.)¹

- $C(M) := \{ f : M \rightarrow \mathbb{C}; \text{連続} \}$
- $\mathcal{E}(M) := \{ f : M \rightarrow \mathbb{C}; C^\infty\text{-関数} \}$ 普通は" $C^\infty(M)$ "である.
- $C^k(M) := \{ \varphi : k\text{-forms on } M \text{ with coeff} \in C \}$ つまり locally に

$$\varphi = \sum_J \varphi_J d\bar{z}^J \quad (d\bar{z}^J = d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_k})$$

とかけるものとする. ここで $(U; z^1, \dots, z^n)$ を局所座標とし, $J = (j_1, \dots, j_k)$, $\varphi_J \in C(U)$ とする. 特に $C^0(M) = C(M)$.

- $\mathcal{E}^k(M) := \{ \varphi : k\text{-forms on } M \text{ with coeff} \in \mathcal{E} \}$ 普通は" $\mathcal{A}^k(M)$ "である.
- $\mathcal{K}^k(M) := \left\{ \varphi \in C^k(M) \mid \text{supp } \varphi \text{ cpt} \right\}$ ここで $\text{Supp } \varphi := \overline{\{x \in M, \varphi(x) \neq 0\}}$ である. $\varphi(x) \neq 0$ とはある J があって, $\varphi_J(x) \neq 0$ であることを意味する.
- $\mathcal{D}^k(M) := \left\{ \varphi \in \mathcal{E}^k(M) \mid \text{supp } \varphi \text{ cpt} \right\}$
- $A \subset M$ について以下のようにおく

$$\mathcal{K}_A^k(M) := \left\{ \varphi \in \mathcal{K}^k(M) \mid \text{supp } \varphi \subset A \right\} \quad \mathcal{D}_A^k(M) := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}^k(M) \mid \text{supp } \varphi \subset A \right\}$$

| | 連続 | C^∞ |
|------------------------------------|----------------------|----------------------|
| 関数 | $C(M)$ | $\mathcal{E}(M)$ |
| k -form | $C^k(M)$ | $\mathcal{E}^k(M)$ |
| k -form with support compact | $\mathcal{K}^k(M)$ | $\mathcal{D}^k(M)$ |
| k -form with support $\subset A$ | $\mathcal{K}_A^k(M)$ | $\mathcal{D}_A^k(M)$ |

Recall

$U \subset \mathbb{R}^m$ open のとき、 $C(U)$, $\mathcal{E}(U)$ には次のような 位相をいれていた.

コンパクト集合の列: $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset U$ で $K_j \subset K_{j+1}^\circ$ かつ $U = \bigcup_j K_j^\circ$ となるものを取り, $f \in \mathcal{E}(U)$ に対し

$$P_N(f) := \max \left\{ |D^\alpha f(x)| \mid x \in K_N, |\alpha| \leq N, \omega \in K_N \right\}$$

$$V_N := \left\{ f \in \mathcal{E}(U) \mid P_N(f) < \frac{1}{N} \right\}$$

を open base at 0 (0 での開基) とする位相を入れていた.

¹おそらく通常の記法とかなり違う記法であると思われる.

lem-E-1

0.1.1 により, これがコンパクト集合の列や座標近傍 $U \subset \mathbb{R}^m$ によらない

一般の多様体に関しては M に対しては、 $M = \bigcup_j U_j$ という座標近傍の被覆を使って

$$\mathcal{E}(M) \subset \prod \mathcal{E}(U_j)$$

部分位相を入れた.

defn-E-3

Definition 0.1.4. $U \subset \mathbb{R}^m$ open に対し, $C^k(U)$, $\mathcal{E}^k(U)$ に対して位相を

$$\mathcal{E}^k(U) \simeq \prod_{J=(j_1 < \dots < j_k)} \mathcal{E}(U) d\bar{z}^J$$

による直積位相を入れる.

これは次のノルム

$$P_N(\varphi) := \max \left\{ |D^\alpha \varphi_J(x)| \mid x \in K_N, |\alpha| \leq N, \omega \in K_N \right\}$$

について, $\mathcal{E}(U)$ と同じように位相を入れたものに一致する.

lem-E-4

Lemma 0.1.5. 1. $U \subset \mathbb{R}^m$, $U' \subset \mathbb{R}^m$ open について, $\Phi : U' \rightarrow U$ が diffeo のとき

$$\Phi^* : \mathcal{E}^k(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^k(U')$$

が \mathbb{C} 上の位相ベクトル空間の同型を誘導する.

2. $U \subset \mathbb{R}^m$ open, $U = \bigcup_j U_j$: countable open cover について,

$$\mathcal{E}^k(U) \hookrightarrow \prod_j \mathcal{E}^k(U_j)$$

は部分位相空間となる.

Proof. (1) $\Phi : U'(x^1, \dots, x^m) \rightarrow U(y^1, \dots, y^m)$ diffeo として

$$\Phi^* : \mathcal{E}^k(U) := \prod_J \mathcal{E}(U) dy^J \longrightarrow \mathcal{E}^k(U') := \mathcal{E}(U') dx^J$$

は以下のような形になる.

$$\varphi = \sum_J \varphi_J dy^J \longmapsto \sum_I \left(\sum_J \Phi^* \varphi_J \frac{\partial y^J}{\partial x^I} \right) dx^I$$

となる. ここで

$$\frac{\partial y^J}{\partial x^I} = \det \left(\frac{\partial y^{j_k}}{\partial x^{i_l}} \right)$$

とする. よって [0.1.1](#) で $\varphi_J \mapsto \Phi^* \varphi_J$ が連続であることを言っており, 和をとるのも連続なので, 連続性が言える.

(2) :

$$\prod_I \mathcal{E}(U) dx^I \cong \mathcal{E}^k(U) \hookrightarrow \prod_i \mathcal{E}^k(U_i) \stackrel{(1)}{\cong} \prod_i \left(\prod_I \mathcal{E}(U) d\bar{z}^I \right) \cong \prod_I \left(\prod_j \mathcal{E}(U_j) d\bar{z}^I \right)$$

となる. [0.1.1](#) から, $\mathcal{E}(U) \subset \prod_j \mathcal{E}(U_j)$ が部分位相になっているのでいえた. \square

defn-E-5

Definition 0.1.6. M 2nd countable m 次元 C^∞ 級多様体について $\mathcal{C}^k(M)$, $\mathcal{E}^k(M)$ に次のように位相を入れる:

$M = \bigcup U_j$ を座標近傍 U_j の countable covering とし,

$$\mathcal{E}^k(M) \hookrightarrow \prod_j \mathcal{E}^k(U_j)$$

による部分位相を入れる.

$A \subset M$ compact subset について, $\mathcal{D}_A^k(M) \subset \mathcal{E}^k(M)$ は closed subspace である. (下の remark 参照) $\mathcal{D}_A^k(M)$ には $\mathcal{E}^k(M)$ の subtopology ををいれる

$\mathcal{K}^k(M), \mathcal{D}^k(M)$ には,

$$\mathcal{B} := \left\{ W \subset \mathcal{D}^k(M) ; W = \text{non-empty convex balanced} \right. \\ \left. \text{s.t. } \forall A \subset M \text{ cpt, } W \cap \mathcal{D}_A^k(M) \text{ is open in } \mathcal{D}_A^k(M) \right\}$$

を 0 の local base となる位相を入れる.

Remark 0.1.7. [0.1.1](#) から $\mathcal{E}^k(M)$ の位相は座標近傍の $\{U_j\}$ の取り方に依らない. さらにこの位相は

$$\mathcal{E}^k(M) \rightarrow \mathcal{E}^k(U) \quad \Big| \quad U \subset M \text{ loc. coord.}$$

に関する weak top. である (weak topology に関しては [0.1.1](#) 参照)

$\mathcal{D}_A^k(M) \subset \mathcal{E}^k(M)$ は closed subspace なのは $x \in U \subset M$ loc coord. に対し, 代入写像

$$ev_x \mathcal{E}^k(M) \rightarrow \mathbb{C}^{\oplus J} \quad \varphi \mapsto (\varphi(x))_J$$

が連続で, $\mathcal{D}_A^k(M) = \bigcap_{x \in M \setminus A} \text{Ker}(e)v_x$ とかけるので closed subspace になる.

$\mathcal{K}^k(M), \mathcal{D}^k(M)$ の位相を詳しくいうと, [0.1.1](#) のように, 集合族 τ を, " $\bigcup_{i \in I} (\varphi_i + W_i)$ とかけるもの"

の集まりとする. ただし $i \in I$ について, $\varphi_i \in \mathcal{D}^k(M), W_i \in \beta$ とする.

| dom | local ($U \subset \mathbb{R}^n$) | global (M mfd.) |
|--------------------------|------------------------------------|----------------------------|
| form | $C^k(U), \mathcal{E}^k(U)$ | $C^k(M), \mathcal{E}^k(M)$ |
| form support $\subset A$ | $K_A^k(U), D_A^k(U)$ | $K_A^k(M), D_A^k(M)$ |
| form support compact | $K^k(U), D^k(U)$ | $K^k(M), D^k(M)$ |

という対応がある.

prop-E-6

Proposition 0.1.8. M 2nd countable 次元 C^∞ 級多様体について以下が成り立つ.

- $\mathcal{E}^k(M), D_A^k(M)$ locally convex, complete metrizable 位相 \mathbb{C} ベクトル空間 Heine-Borel property.
- $C^k(M), K_A^k(M)$ locally convex, complete, metrizable 位相 \mathbb{C} ベクトル空間.

Proof. $k = 0, M = \cup_{i=1}^\infty U_i \subset \mathbb{R}^m$ などに関してはすでに示している

^{Prop-M-7.3} $??$ によって $\mathcal{E}^0(U) = C^\infty(U)$ について, コンパクト集合の列 $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ であって, seminorm の separating family

$$P_N(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| ; x \in K_N, |\alpha| \leq N\}$$

によって位相を入れると, metrizable 位相 \mathbb{C} ベクトル空間であることがわかる. (ここに open cover が countable がある)

また ^{Prop-M-7.4} $??$ で complete と Heine-Borel property を示した. (ここに平均値の定理を使う. つまり微分可能性がある.) よって $C(U)$ しても同じで, Heine-Borel property 以外 は 同様にできる.

$k > 0, \mathcal{E}^k(M), C^k(M)$ に関しては, seminorm を

$$P_N(\varphi) := \max\left\{|D^\alpha \varphi_J(x)| \mid x \in K_N, J = (j_1 < \dots < j_k), |\alpha| \leq N\right\}$$

に変えれば同様に言える

$\mathcal{E}^k(M), C^k(M)$ に関しては 前回 ^{lem-E-1} 0.1.1 (2) で与えられたコンパクト集合の列をとる. 具体的に $(M = \bigcup U_j$ とし $K_{i1} \subset K_{i2} \subset \dots \subset U_i$ となるコンパクト集合列について

$$K_N := \bigcup_{i=1}^N K_{i,N}$$

$$P_N(\varphi) := \max\left\{|D^\beta \varphi_J(x)| \mid x \in K_{iN} \subset U_i, J = (j_1 < \dots < j_k), |\omega| \leq N\right\}$$

とすると $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset M$ であり, 同様の議論が回る.

$K_A^k(M)$, $D_A^k(M)$ はそれぞれ $C^k(M)$, $\mathcal{E}^k(M)$ の閉部分空間なので, 諸性質は保たれる.

□

prop-E-7

Proposition 0.1.9. (cf. ^{thm-M-8.7}??)

- (a) $V \subset D^k(M)$ convex balanced について, V が open であることは, 任意の compact $A \subset M$ について, $V \cap D_A^k(M) \subset D_A^k(M)$ であることと同値.
- (b) $A \subset M$ compact としたとき, $D_A^k(M) \subset D^k(M)$ 部分位相空間.
- (c) $E \subset D^k(M)$ bounded ならば, ある compact $A \subset M$ であって, $E \subset D_A^k(M)$ となる.
- (d) $D^k(M)$ は Heine-Borel property を持つ.
- (e) $D^k(M) \cong \operatorname{colim}_{A \subset M} \operatorname{cpt} D_A^k(M)$. ここでこの同型は locally convex 位相 \mathbb{C} ベクトル空間としての同型である.

また上の主張は D_A を K_A に変えても成り立つ.

Proof. [(a)] ^{thm-M-8.6}?? が $D^k(M)$ でも言える (^{thm-M-8.7} (a) の議論が回る)

[(b)] $D_A^k(M) \hookrightarrow D^k(M)$ は, (a) より連続である.

一方, $D^k(M) \hookrightarrow \mathcal{E}^k(M)$ も連続である. なぜならば $\mathcal{E}^k(M)$ は locally convex より, convex balanced な open base at 0 となるものがある. それらをひとつ取っても convex balanced であり, 各 $D_A^k(M)$ に制限しても open なので, $D^k(M)$ の上で open となる.

[(c)] 対偶を示す. $E \subset D^k(M)$ は任意の compact $A \subset M$ について, $E \not\subset D_A^k(M)$ を満たすとする.² この時 E が bounded でないことを示す.

$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$ というコンパクト集合であって

$$K_i \subset K_{i+1}^\circ \quad \text{and} \quad M = \bigcup K_i^\circ$$

となるものをとる. E の仮定から, ある $\varphi_n \in E$ と $x_n \in K_n$ であって, $\varphi_n(x_n) \neq 0$ かつ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ は集積点を持たないものが取れる.

そこで $x_n \in U_n \subset M$ という局所座標をとって,

$$W := \{\psi \mid \max_J |\psi_J(x_n)| < \frac{1}{n} \max_J |\phi_{n,J}(c)| \text{ for any } n\}$$

とおく. ($\phi_n = \sum_J \phi_{n,J} dx^J$ と分解する.) W は convex balanced open in $\mathcal{D}^*(M)$ である. なぜならば, convex balanced は $|\cdot|$ の性質から. 任意の compact $A \subset M$ に対し, $U_n \subset A$ となる U_n は有限個である. そして $W \cap D_A^k(M)$ は open in $\mathcal{D}_A^*(M)$ である. (開集合の有限この共通部分なので.)

²ある $\varphi \in E$ と $x \in A$ であって, $\varphi(x) \neq 0$ ということと同じ.

しかし任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ について, $\varphi_n \notin nW$ となるので, $E \notin nW$ であり, E は bounded ではない.

[(d)] bounded closed $E \subset \mathcal{D}^k(M)$ は compact であることを言う. (c) より, ある compact $A \subset M$ で, $E \subset \mathcal{D}_A^k(M)$. (b) より, $\mathcal{D}_A^k(M) \subset \mathcal{D}^k(M)$ は部分位相が入るので, $E \subset \mathcal{D}_A^k(M)$ の中では bounded かつ closed. よって [prop-E-6](#) の $\mathcal{D}_A^k(M)$ の Heine-Borel Property より言える.

[(e)] $\mathcal{D}^k(M) \xrightarrow{f} V$ を locally convex 位相 \mathbb{C} ベクトル空間の \mathbb{C} 線型写像とする. すると次の同値変形ができる.

f が連続である

$\iff \forall U \subset V : \text{convex balanced open に対し, } f^{-1}(U) \text{ open}$

$\iff \forall U \subset V : \text{convex balanced open. compact } A \subset M \text{ に対し } f^{-1}(U) \cap \mathcal{D}_A^k(M) \text{ open in } \mathcal{D}_A^k(M)$

$\iff f|_{\mathcal{D}_A^k(M)} : \mathcal{D}_A^k(M) \rightarrow V \text{ 連続}$

map が \mathbb{C} -linear なことについても同様に言えるので,

$$\text{Hom}(\mathcal{D}^k(M), V) \simeq \varprojlim_{A \subset M \text{ compact}} \text{Hom}(\mathcal{D}_A^k(M), V).$$

□

defn-E-8

Definition 0.1.10. $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と書いた時, 次を意味する.

- $U_\lambda = (U_\lambda; x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n)$: local coordinate of M
- $V_\lambda \subset U_\lambda$: 相対コンパクトな開集合 (つまり $\overline{V_\lambda} \subset U_\lambda$ コンパクト)
- $M = \bigcup_\lambda V_\lambda$ かつ, $\{U_\lambda\}_\Lambda$ は locally finite open covering of M . (つまり, 任意の $x \in M$ について, ある x の近傍 V で, $U \cap U_\lambda \neq \emptyset$ となる λ は有限個)

上のような V_λ の存在に関しては, 多様体が 2nd countable であることから. (2nd countable \Rightarrow para-compact) また定義から Λ は可算集合となる.

また局所有限性から任意の compact $A \subset M$ に対して, $A \cap U_\lambda \neq \emptyset$ なる λ は有限である.

Proof. もし無限になるなら, ある $x_i \in A \cap U_{\lambda_i}$ ($i = 1, 2, \dots$) が取れる. A compact なので, ある x に収束する部分列 $\{x_{i_k}\}$ が取れる. すると x の任意の近傍 V について, $V \cap U_{\lambda_{i_k}} \neq \emptyset$ が言えて $\{V_\lambda\}$ の仮定に矛盾する □

以下 U_λ 上の座標 $(x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n)$ と $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ について,

$$D_\lambda^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda^1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda^n} \right)^{\alpha_n}$$

また $\varphi \in \mathcal{E}^k(M)$, $\lambda \in \Lambda$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について,

$$\|\varphi\|_{\lambda}^{\ell} := \max \{ |D_{\lambda}^{\alpha} \varphi_{\lambda, J}(x)| \mid x \in \overline{V_{\lambda}}, J, |\alpha| \leq \ell \}.$$

最後に $\varphi \in \mathcal{D}^k(M)$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について,

$$\|\varphi\|^{\ell} := \max_{\lambda} \|\varphi\|_{\lambda}^{\ell} = \max \{ |D_{\lambda}^{\alpha} \varphi_{\lambda, J}(x)| \mid x \in \overline{V_{\lambda}}, J, \lambda, |\alpha| \leq \ell \}.$$

とする. これらは seminorm である.

lem-E-9

Lemma 0.1.11. $\{V_{\lambda} \subset U_{\lambda}\}$ を固定する. この時

$$\{\|\cdot\|_{\lambda}^{\ell} \mid \lambda \in \Lambda, \ell \geq 0\}$$

は *separating family of seminorm on $\mathcal{E}^k(M)$* であり, 前に定めた位相 ^{defn-E-5}(0.1.6) と同じ位相を定める.

Proof. Seminorm であることはすぐにわかる.

$$V(\lambda, \ell, \varepsilon) := \{\varphi \in \mathcal{E}^k(M) \mid \|\varphi\|_{\lambda}^{\ell} < \varepsilon\}$$

とする. 示すことは

$$\left\{ \bigcap_{\text{finite}} V(\lambda_i, \ell_i, \varepsilon_i) \mid \lambda_i \in \Lambda, \ell_i \geq 0, \varepsilon_i > 0 \right\}$$

が local base at 0 であることを示せば良い.

$V(\lambda, \ell, \varepsilon)$ が open であることは, 制限写像 $\text{res} : \mathcal{E}^k(M) \rightarrow \mathcal{E}^k(U_{\lambda})$ によって,

$$\{\varphi \in \mathcal{E}^k(U_{\lambda}) \mid \|\varphi\|_{\lambda}^{\ell} < \varepsilon\} \subset \prod_J \mathcal{E}^0(U_{\lambda})$$

の pullback になるので良い.

任意の $0 \in V \subset \mathcal{E}^k(M)$ となる open について, ある $N \gg 0$ と compact subset $K_N := K_{N,1} \cup K_{N,2} \cup \cdots \cup K_{N,N}$ であって,

$$p_N(\varphi) := \max \{ |D^{\alpha} \varphi_J(x)| \mid x \in K_N, J, |\alpha| \leq N \}.$$

としたとき, V は $\{\varphi \in \mathcal{E}^k(M) \mid p_N(\varphi) < \frac{1}{N}\}$ を含む. よって $K_N \subset \bigcup_{i \text{ finite}} V_{\lambda_i}$ をとり, $\ell_i \leq N$ とし, $0 < \varepsilon_i \ll \frac{1}{N}$ をとると

$$\bigcap_i V(\lambda_i, \ell_i, \varepsilon_i) \subset \left\{ \varphi \mid p_N(\varphi) < \frac{1}{N} \right\} \subset V$$

となりいえた. □

cor-E-10

Corollary 0.1.12. *compact* $A \subset M$ について, $\{\|\cdot\|^{(\ell)} \mid \ell \geq 0\}$ は *separating family of seminorms* on $\mathcal{D}_A^k(M)$ であり, 同じ位相を定める.

$\mathcal{K}_A^k(M)$ についても, $\{\|\cdot\|^{(0)} \mid \ell \geq 0\}$ を考えれば同様の主張が得られる.

prop-E-11

Proposition 0.1.13. $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}$ を固定する.

1. $\{\varphi_i\}$ が $\mathcal{D}^k(M)$ で *Cauchy* 列であることは, ある *compact* 部分集合 $A \subset M$ で $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_A^k(M)$ かつ

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|\varphi_i - \varphi_j\|^\ell = 0 \quad \forall \ell \geq 0$$

が成り立つことと同値.

2. $\varphi_i \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}^k(M)$ は, ある *compact* 部分集合 $A \subset M$ で $\{\varphi_i\} \cup \{\varphi\} \subset \mathcal{D}_A^k(M)$ かつ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\varphi_i - \varphi\|^\ell = 0 \quad \forall \ell \geq 0.$$

が成り立つことと同値.

3. $\mathcal{D}^k(M)$ は *complete*.

$\mathcal{K}_A^k(M)$ についても, $\{\|\cdot\|^{(0)}\}$ を考えれば同様の主張が得られる.

Proof. [(1)] $\{\varphi_i\}$ *Cauchy* 列は bounded である. よって ^{prop-E-7}0.1.9 より, ある *compact* $A \subset M$ であつて, $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_A^k(M)$ となる. これより

$\{\varphi_i\}$ *Cauchy* 列 in $\mathcal{D}^k(M)$

$\iff \exists A \subset M$ *compact* s.t. $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_A^k(M)$ かつ *Cauchy* 列 in $\mathcal{D}_A^k(M)$

^{cor-E-10}0.1.12 $\iff \exists A \subset M$ *compact* s.t. $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_A^k(M)$ かつ $\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|\varphi_i - \varphi_j\|^\ell = 0 \quad \forall \ell \geq 0.$

[(2)] $\{\varphi_i\} \cup \{\varphi\}$ は bounded より, (1) と同様.

[(3)] (1) と $\mathcal{D}_A^k(M)$ は *complete* より, 任意の *Cauchy* 列は収束する. □

defn-E-12

Definition 0.1.14. 連続線型写像 $T : \mathcal{D}^k(M) \rightarrow \mathbb{C}$ のことを k -dimensional current on M という. 特に *distribution* は 0-dimensional current のことをさす.

$$\mathcal{D}'_k(M) := \{k\text{-current on } M\} = \text{Hom}_{\text{top } \mathbb{C}\text{-vect sp}}(\mathcal{D}^k(M), \mathbb{C})$$

$$\mathcal{K}'_k(M) := \text{Hom}_{\text{top } \mathbb{C}\text{-vect sp}}(\mathcal{K}^k(M), \mathbb{C}).$$

Proposition 0.1.15 (cf. ~~prop-M-8-11~~ ~~prop-M-8-11~~). Y を *locally convex* 位相 \mathbb{C} -ベクトル空間, $T : \mathcal{D}^k(M) \rightarrow Y$ を \mathbb{C} 線型写像とする. 次は同値である.

- (a) T は 連続
- (b) T は *bounded*, つまり *bounded set* を *bounded set* にうつす.
- (c) $\varphi_i \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}^k(M)$ ならば, $T(\varphi_i) \rightarrow 0$ in Y .
- (d) 任意の *compact* $A \subset M$ について, $T|_{\mathcal{D}^k_A(M)} : \mathcal{D}^k_A(M) \rightarrow Y$ は連続.
- (e) ($Y = \mathbb{C}$ の場合のみ) 任意の *compact* $A \subset M$ について, ある $\ell \geq 0, C > 0$ があって,

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|^\ell \quad \text{for } \forall \varphi \in \mathcal{D}^k_A(M).$$

$\mathcal{K}^k_A(M)$ についても, $\ell = 0$ のみを考えれば同様の主張が得られる.

Proof. $[(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)]$ (a), (b), (c) の主張において,

$$\mathcal{D}^k(M) \mapsto \mathcal{D}^k_A(M) \quad T \mapsto T|_{\mathcal{D}^k_A(M)}$$

に取り替えた主張を $(a)_A, (b)_A, (c)_A$ とする. ~~prop-E-6~~ ~~0.1.8~~ より $\mathcal{D}^k_A(M)$ は metrizable より ~~prop-M-4.2~~ ~~??~~ より,

$$(a)_A \iff (b)_A \iff (c)_A$$

となる. また ~~prop-E-7~~ ~~0.1.9~~ (e) から

$$(d) \text{ が成立} \iff \forall A \subset M \text{ compact, } (a)_A \text{ が成立}$$

となる. よって (a) と (d) が同値になる. 同様にしてこれらは (b) や (c) と同値となる.

$[(e) \Rightarrow (d)]$ $Y = \mathbb{C}$ とする. *compact* $A \subset M$ をとる. 仮定より $\ell \geq 0, C > 0$ があって,

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|^\ell \quad \text{for } \forall \varphi \in \mathcal{D}^k_A(M).$$

$\forall \varepsilon > 0$ に対し,

$$V := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}^k_A(M) \mid \|\varphi\|^\ell < \frac{\varepsilon}{C} \right\}$$

とおくと, これは 0 を含む open in $\mathcal{D}^k_A(M)$ であり,

$$\varphi \in V \Rightarrow |T|_{\mathcal{D}^k_A(M)}(\varphi)| < \varepsilon$$

である. よって $T|_{\mathcal{D}^k_A(M)}$ は連続である.

[(d) \Rightarrow (e)] $A \subset M$ compact とすると, 仮定より $T|_{\mathcal{D}_A^k(M)}$ は連続. よって^{|cor-E-10}[0.1.12](#)から, $\ell \geq 0, \varepsilon > 0$ があって,

$$T(\{\varphi \in \mathcal{D}_A^k(M) \mid \|\varphi\|^\ell < \varepsilon\}) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

よって任意の $\varphi \in \mathcal{D}_A^k(M)$, $\varphi \neq 0$ に対し,

$$\left| T\left(\frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|^\ell} \varphi\right) \right| < 1.$$

であるので整理して, $|T(\varphi)| < \frac{2}{\varepsilon} \|\varphi\|^\ell$ となる. よって $C = \frac{2}{\varepsilon}$ とおけば良い. □