Condensed mathematics ワークショップ [Sch19, Section 2.A Appendix] の解説

岩井雅崇 (大阪大学)

2025 年 2 月 18 日, ver 1.00

Contents

0　はじめに

0.1　このノートの概要

このノートは2025年2月17日-21日開催の"Condensed mathematicsワークショップ" での [Sch19, Section 2.A Appendix] の岩井の原稿である.

　勉強用のメモ書きについては https://masataka123.github.io/blog3/pdf/2025_02_18_Condensed_Mathmatics_seminarnote.pdf にあります. (QRコードは下) こちらは勉強用に書いたもので100ページくらいあります. ところどころ雑なところや脱字など非常の多くあるが, 発表に追い込まれている状況で書いたものなのでご了承いただきたい.

0.2　参考にした文献

この勉強会はショルツのレクチャーノート"Lectures on Condensed Mathematics"[Sch19] を元に行われた. [SchClau] にYouTubeの講演やノートがある.

　当初はこれで勉強しようと思ったが, あまりにも難しい (+何を言っているのかわからない) ので以下の文献を大いに参考にした.

1. [Bar22] Michael Barz *Condensed Mathematics*
   https://www.dropbox.com/scl/fi/xm2bs6jgtv9oaqir2slbt/condensed-final.pdf?rlkey=r1x82m3a135rfeec86jrjj79k&e=1&dl=0
   学生の方が書いたとは思えないくらいきちんと書かれている.

2. [Stum] Bernard Le Stum *An introduction to condensed mathematics* https://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum/bernard.le-stum/Enseignement_files/CondensedBook.pdf

3. [Land] Marks Land *CONDENSED MATHEMATICS* https://www.markus-land.de/teaching/

上の3冊はかなり親切丁寧に書かれていて読みやすかった印象である. 特に [Stum] や [Bar22] は大いに参考にした. 他にも [Asg] や [Lep] などの修論・博論も参考にした.

　圏論の基礎に関しては次の文献を参考にした.

1. [マックレーン] S. マックレーン 圏論の基礎 丸善出版

2. [alg] alg-d 全ての概念はKan拡張である https://alg-d.com/math/kan_extension/
   Amazonで本が売っている.

個人的にはトポスを先に勉強しておけばよかったと後悔している.([Stum] や [Bar22] はトポスの一般論も網羅している印象である.)

基数などに関しては以下を参考にした.

1. [田中] 田中尚夫 公理的集合論　培風館
2. [Sha2] Shane Kelly *Fast track guide to cardinals for use with Lurie' s Higher Topos Theory* https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kelly/pdfs/cardinalsFastTrack.pdf

1　[Sch19, Proposition 2.9] の準備

1.1　基数

1.1.1　順序数・基数の定義

定義 1.
- 集合 A が推移的であるとは $x \in A$ かつ $y \in x$ ならば $y \in A$ を満たすこと
- 集合 A が全順序とは任意の $x, y \in A$ について $x \in y$ か $x = y$ か $y \in x$ が成り立つこと
- 集合 A が順序数とは A が推移的かつ全順序なること.

例 2. 以下は順序数である.

- $0 = \varnothing$
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\varnothing\}$
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

定理 3 (整列可能定理)**.** (選択公理を認めれば) 任意の集合は整列可能である. よって任意の集合は整列可能な順序構造をもち, それはある順序数と同型となる

集合 A, B について $A \sim B$ を A から B への全単射が存在することで定義する. $A \sim B$ を A と B は同等という.

定義 4 (濃度・基数)**.**
- 集合 A についてその濃度を, A と同等な順序数のうち最小のものとする. つまり順序数 α で $A \sim \alpha$ となるののの最小なものである
- 集合 A の濃度を $|A|$ として定義する. 定義から「$|A| \sim A$」かつ「任意の順序数 β で $\beta \sim A$ ならば $\beta \geq |A|$ である. 」
- 集合の濃度を基数という. つまり順序数 α が基数であるとは, $\alpha = |A|$ となる集合が存在することとする. 基数全体のクラスを Card と表す.

1.1.2　正則基数

定義 5 (定義 4.5.1)**.** 全順序集合 $(A,<)$ とする．$B \subset A$ が共終部分集合であるとは任意の $a \in A$ についてある $b \in B$ が存在して $a \leq b$ が成り立つこと．
順序数 (基数)α, β について β が α と共終とは $A \subset \alpha$ なる共終部分集合で順序同型 $(A, \in) \cong (\beta, \in)$ があること．

定義 6 (定義 4.5.2)**.**
- 順序数 α と共終な最小の順序数を共終数といい $cf(\alpha)$ と表す．$cf(\alpha)$ は基数となる．
- $cf(\alpha) = \alpha$ なる順序数を正則基数という．

定義から $cf(\alpha) \leq \alpha$ である．

注意 7. 定義から「任意の順序数 β について，$A \subset \alpha$ なる共終部分集合で $\beta \cong A$ ならば $cf(\alpha) \leq \beta$」である．

実はもっと強く「$A \subset \alpha$ なる共終部分集合ならば $cf(\alpha) \leq |A|$ である．」なぜならば $(A, \in)$ は整列集合であるので，$(\beta, \in) \cong (A, \in)$ となる順序数 $(\beta, \in)$ が存在する．よって $cf(\alpha) \leq \beta$ である．これより $cf(\alpha) \to A$ という単射が作れるので，$|cf(\alpha)| \leq |A|$ ．$cf(\alpha)$ は基数なので $cf(\alpha) = |cf(\alpha)| \leq |A|$

命題 8. α が正則ならば，$|I| < \alpha, |S_i| < \alpha$ について $S = \cup_{i \in I} S_i$ として $|S| < \alpha$

Proof. $\mu := \sup |S_i|$ とする．$\mu < \alpha$ である．(もし $\mu \geq \alpha$ ならば $I \to \alpha$ で共終となるような写像が作れてしまうから) よって

$$|S| = |\cup_{i \in I} S_i| \leq |I| \cdot \mu = \max |I|, \mu < \alpha$$

となり言えた． □

補題 9. [Sta, 000E 3.7 Cofinality] κ を無限基数とする

1. $\kappa < cf(\alpha)$ となる基数 α が存在する．
2. $\kappa < cf(\alpha)$ となる強極限基数が存在する．

Proof. (1). α を $|\alpha| > \kappa$ となる順序数の中で一番小さいものとする．α は極限数である．もしそうでなければ $\alpha = \beta + 1$ かつ $|\alpha| = |\beta|$ となって最小性に矛盾するため．

$cf(\alpha) \leq \kappa$ であるとする. この時 $S \subset \alpha$ で共終なもので $|S| \leq \kappa$ となるものが存在する．ここで $\beta \in S \subset \alpha$ について $\beta < \alpha$ より最小性から $|\beta| \leq \kappa$ よって S の共終性から

$$|\alpha| = |\cup_{\beta \in S} \beta| \leq |S||\beta| \leq \kappa\kappa = \kappa$$

となるが，これは α の取り方に矛盾する．

また α は基数となる．なぜなら $\alpha \geq |\alpha| = ||\alpha||$ であるので α の最小性より $\alpha = |\alpha|$ となる．

(2) $\kappa < cf(\beta)$ なる基数 β をとり $\alpha = \beth_\beta$ をとる. $cf(\beta) \leq cf(\alpha)$ を示せば良い. $J \subset \beth_\beta$ なる共終集合について, $f : J \to \beta$ を $j \in J$ について $f(j)$ を $j \in 2^\gamma$ となる最小の $\gamma < \beta$ と定義すれば, J は β の共終集合になる. よって $cf(\beta) \leq cf(\alpha)$ となる.

□

1.1.3 強極限基数

定義 10 (強極限基数). κ が非加算強極限基数 (uncountable strong limit cardinal) であるとは

1. κ uncountable
2. $\kappa \neq 0$ かつどの順序数 α についても $\kappa \neq \alpha^+$ (limit cardinal)
3. $\lambda < \kappa$ ならば $2^\lambda < \kappa$

順序数 α について

- $\beth_0 = \aleph_0$
- $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$
- $\beth_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} 2^{\beth_\beta}$ α が極限数の時

と定義する $\beth_\omega$ は強極限的である.

以下このノートでは κ 強極限基数といえば非加算であることを仮定する.

1.2 圏論

1.2.1 普遍射と極限

定義 11. $S : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 関手, $c \in Ob(\mathcal{C})$ とする. c から S への普遍射とは $r \in Ob(\mathcal{D})$ と $u : c \to Sr$ の組み $(r, u) \in Ob(\mathcal{D}) \times hom_{\mathcal{C}}(c, S_r)$ であって次の普遍性を満たすものである.
「任意の $d \in Ob(\mathcal{D})$ と　$f : c \to Sd$ について, ある唯一な写像 $f' : r \to d \in hom_{\mathcal{D}}(r, d)$ があって, $Sf' \circ u = f$」となる.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Sr \arrow[d, dashed, "Sf'"] & r \arrow[d, "f'"'] \\
c \arrow[r, "f"'] & Sd & d
\end{tikzcd}
$$

つまり $c \to Sd$ なる射は $Sf' \circ u$ の形に限り, この f' はただ一つに定まる.

例 12 (余極限). $\mathcal{C}, \mathcal{J}$ を圏とする. ($\mathcal{J}$ を添字圏とする.) $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ を対角関手とする　. つまり

- $c \in Ob(C)$ について $\Delta c : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を任意の object を c に射を id_c の送るものとする

- $f : c \to c'$ について $\Delta f : \Delta c \to \Delta c'$ となる自然変換を任意の $j \in Ob(\mathcal{J})$ について $(\Delta f)_j = f : \Delta c(j) = c \to \Delta c'(j) = c'$ とする.

$\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ 関手, $F \in Ob(\mathcal{C}^{\mathcal{J}})$ とする. F から Δ への普遍射とは $r \in Ob(\mathcal{C})$ と $u : F \to \Delta r$ の組みであって次の普遍性を満たすものである.

「任意の $d \in Ob(\mathcal{C})$ と $f : F \to \Delta d$ について, ある唯一な写像 $f' : r \to d \in hom_{\mathcal{C}}(r, d)$ があって, $\Delta f' \circ u = f$」となる.

一つずつ噛み砕いていく.

- $u : F \to \Delta r$ を与えることは J 内の $k : 1 \to 2$ について $u_i : F(i) \to r$ で $u_2 \circ F(k) = u_1 : F(1) \to r$ を与えることである.
- $f : F \to \Delta d$ を与えることは, J 内の $k : 1 \to 2$ について $f_i : F(i) \to r$ で $f_2 \circ F(k) = f_1 : F(1) \to d$ を与えることである.
- $\Delta f' \circ u = f$ となるとは, 二つはどちらも自然変換なので, $j \in Ob(j)$ について $f' \circ u_j = f_j$ ということである.

以上より, F から Δ への普遍射とは $r \in Ob(\mathcal{C})$ と $u : F \to \Delta r$ の組みで

1. (r, u_j) のくみで, J 内の $k : 1 \to 2$ について $u_i : F(i) \to r$ で $u_2 \circ F(k) = u_1 : F(1) \to r$ が成り立ち,
2. 任意の J 内の $k : 1 \to 2$ について $f_i : F(i) \to d$ で $f_2 \circ F(k) = f_1 : F(1) \to d$ が成り立つ (d, f_j) の組みについて,
3. ある $f' : r \to d$ が存在して, 任意の j について $f' \circ u_j = f_j$ となる.

よってこの $r \in Ob(\mathcal{C})$ と $u : F \to \Delta r$ の組み, 噛み砕くと, $(r, u_j : F(j) \to r)$ の組みを F の余極限という.

1.2.2 λ-フィルター余極限と λ-極限の交換

定義 13. [Sha1] κ を無限基数 (cardinal) とする.

- 圏 J が κ-small とは $Mor(J) = \{f : a \to b\}$ が集合であり濃度が κ 未満であること. この時 $Ob(J)$ も濃度 κ 未満となる.
- $F : J \to C$ が κ-small limit とは J が κ-small の場合の limit とする.
- 圏 J が κ-filtered とは, 任意の κ-small 圏 I からの関手 $F : I \to J$ について, cocone $c \in Ob(J)$ と $u : F \to \Delta c$ の組が存在することとする.[a]つまり次を満たす c, u が存在することとする.
    1. ある $c \in Ob(J)$ と $u_i : F(i) \to c$ のくみが存在して
    2. 任意の $f : i \to i'$ について $u_{i'} \circ F(f) = u_i : F(i) \to c$ となるもの
- $F : J \to C$ が κ-filtered limit とは J が κ-filtered category の場合の limit とする.

[a]cocone とは F から $\Delta : J \to J^I$ への普遍射から普遍性を除いたもの

例 **14.** $\omega = |\mathbb{N}|$ とする．J が ω-filtered であることは J がフィルター圏である．つまり，

1. $j, j' \in Ob(J)$ についてある $j \to k, j' \to k$ が存在する
2. $a, b : j \to k$ について，$u : k \to m$ が存在して $ua = ub : j \to k \to m$

と同値である．これは数学的帰納法からわかる．

ω-smal limit は濃度 ω 未満の図式からの limit と同値であり，これは有限極限と同値である．

定理 **15.** λ を正則基数とする．この時 λ-filtered colimit は λ-small limit と可換である．つまり I を λ-filtered, J を λ-small として $H : I \times J \to \mathbf{Set}$ を関手としたとき canonical map

$$\Phi : \mathrm{colim}_{i \in I} \lim_{j \in J} H(i,j) \to \lim_{j \in J} \mathrm{colim}_{i \in I} H(i,j)$$

は全単射である．

Proof. [0] canonical map の構成　それは次の図式からわかる．

$$\begin{tikzcd}
H(i,j) \arrow[d] & \lim_J H(i,j) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathrm{colim}_I \lim_J H(i,j) \arrow[d, dashed] \\
\mathrm{colim}_I F(p,j) & \lim_J \mathrm{colim}_I H(i,j) \arrow[l] \arrow[r, equal] & \lim_J \mathrm{colim}_I H(i,j)
\end{tikzcd}$$

この写像は次のように書き下せる．$a \in \mathrm{colim}_{i \in I} \lim_{j \in J} H(i,j)$ とすると，$a = [(a_i, i)]$ となる $i \in I$ が取れる．同値類の割り方は $(a_i, i) \sim (a_{i'}, i')$ は $u : i \to k, u' : i' \to k$ があって $H(u, id_j)a_i = H(u', id_j)a_{i'}$ である．$a_i \in \lim_{j \in J} H(i,j)$ なので，$a_i = (a_{ij})_{j \in J} \in \prod_{j \in J} H(i,j)$ で $u : j \to j'$ ならば $H(id_i, u)a_{ij} = a_{ij'}$ となるものである．すると各 $j \in J$ について

$$[((a_{ij})_{j \in J}, i)] \mapsto [(a_{ij}, i)]$$

という map は $\mathrm{colim}_{i \in I} \lim_{j \in J} H(i,j) \to \mathrm{colim}_{i \in I} H(i,j)$ の well-defined な map になっている．これによって

$$\Phi : [((a_{ij})_{j \in J}, i)] \mapsto ([(a_{ij}, i)])_{j \in J}$$

という map を得る．

[1]$\lim_{j \in J} \mathrm{colim}_{i \in I} H(i,j)$ の元を簡単に表す　$c \in \lim_{j \in J} \mathrm{colim}_{i \in I} H(i,j)$ の元は $c = (c_j)_{j \in J}$ かつ $c_j \in \mathrm{colim}_{i \in I} H(i,j)$ となるので，j に依存する $i_j \in I$ と $c_{i_j j} \in H(i_j, j)$ が存在して，$c = (c_j)_{j \in J} = ([c_{i_j j}, i_j])_{j \in J}$ とかける．

ここで J' を Object を J とし，Morphism を恒等射のみとするものとして

$$K : J' \to I \quad j \mapsto i_j$$

とおくと, J は λ-small で K は関手となるので cocone $i_{max} \in I$ が存在する. つまり $i_j \to i_{max}$ なので,

$$c = (c_j)_{j\in J} = ([c_{i_j j}, i_j])_{j\in J} = ([c_{i_{max} j}, i_{max}])_{j\in J}$$

とかける. つまり元 c にはある $i \in I$ があって $c = ([c_{ij}, i])_{j\in J}$ と書くことができる.

[2] 単射性について $\Phi(a) = \Phi(b)$ なる $a, b \in \mathrm{colim}_{i\in I} \lim_{j\in J} H(i,j)$ をとる. 示すことはある $i_0 \in I$ と $a = [a_{i_0}, i_0], b = [b_{i_0}, i_0]$ で $a_{i_0} = (a_{i_0,j})_{j\in J}$, $b_{i_0} = (b_{i_0,j})_{j\in J}$ と書いた時

$$a_{i_0,j} = b_{i_0,j}$$

が各 $j \in J$ で等しくなるものの存在である. [1] により共通の $i \in I$ をとって

$$\Phi(a) = ([(a_{ij}, i)])_{j\in J} = ([(b_{ij}, i)])_{j\in J} = \Phi(b)$$

であるとして良い. 各 $j \in J$ について

$$[(a_{ij}, i)] = [(b_{ij}, i)] \quad \text{in colim}_{i\in I} H(i,j)$$

である. よって, $u : i \to i_j$ があって,

$$F(u, id_j)a_{ij} = F(u, id_j)b_{ij}$$

である. [1] と同様にしてある $i_0 \in I$ があって $i_j \to i_0$ となる. つまり $j \in J$ によらない共通の i_0 が取れる.

よって任意の $j \in J$ について, $[a_{ij}, i] = [a_{i_0 j}, i_0]$ となる $a_{i_0 j}$ と $b_{i_0 j}$ があって

$$a_{i_0 j} = b_{i_0 j}$$

となるとして良い. $a_{i_0} = (a_{i_0,j})_{j\in J}$ とおけば [2] の主張を得る.

[3] 全射性 [1] より $c \in \lim_{j\in J} \mathrm{colim}_{i\in I} H(i,j)$ の元はある $i \in I$ があって，$c = ([c_{ij}, i])_{j\in J}$ と書くことができる. よって $c_i := (c_{ij})_{j\in J}$ とおけば $c_i \in \lim_J H(i.j)$ の元であり $[c_i, i] \in \mathrm{colim}_{i\in I} \lim_{j\in J} H(i,j)$ であるので $\Phi([c_i, i]) = c$ となる. □

1.2.3 コンマ圏

定義 16. $T : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$, $S : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 関手としてコンマ圏 $(T \downarrow S)$ を次のように定義する.

- Object $(e, d, f) \in Ob(\mathcal{E}) \times Ob(\mathcal{D}) \times Hom_{\mathcal{C}}(Te, Sd)$, つまり $f : Te \to Sd$ とする. s
- Morphism $(k, h) : (e, d, f) \to (e', d', f') \in Hom_{\mathcal{E}}(e, e') \times Hom_{\mathcal{D}}(d, d')$ を $k : e \to e', h : d \to d'$ で $f' \circ Tk = Sh \circ f$ となるもの

$$\begin{tikzcd} e \arrow[d, "k"'] & Te \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Tk"'] & Sd \arrow[d, "Sh"] & d \arrow[d, "h"'] \\ e' & Te' \arrow[r, "f'"'] & Sd' & d' \end{tikzcd}$$

例 **17.** $\mathcal{E} = \mathbf{1}$ とする. $b \in Ob(\mathcal{C})$ は $b : \mathbf{1} \to \mathcal{C}$ という関手とみれる. $S : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 関手としてコンマ圏 $(b \downarrow S)$ は次のようになる.

- Object $(1, d, f) \in Ob(\mathcal{E}) \times Ob(\mathcal{D}) \times Hom_{\mathcal{C}}(b, Sd)$, つまり $f : b \to Sd$ とする.
- Morphism $(1, h) : (1, d, f) \to (1, d', f') \in Hom_{\mathcal{E}}(e, e') \times Hom_{\mathcal{D}}(d, d')$ を $1 : 1 \to 1, h : d \to d'$ で $f' = f' \circ id_b = Sh \circ f$ となるもの

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "1"'] & b \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal, "id_b"'] & Sd \arrow[d, "Sh"] & d \arrow[d, "h"'] \\ 1 & b \arrow[r, "f'"'] & Sd' & d' \end{tikzcd}$$

紛らわしいので 1 を消すと

- Object $(d, f) \in \times Ob(\mathcal{D}) \times Hom_{\mathcal{C}}(b, Sd)$, つまり $f : b \to Sd$ とする.
- Morphism $h : (d, f) \to (d', f') \in Hom_{\mathcal{D}}(d, d')$ を $h : d \to d'$ で $f' = Sh \circ f$ となるもの

1.2.4 左 Kan 拡張

証明は Appendix の A.3.6 に右 Kan 拡張の場合だけ書いておいた.

定義 18 (左 Kan 拡張)**.** $K : M \to C$, $T : M \to A$ を関手とする. K に沿った T の左 Kan 拡張とは

- $L : C \to A$ 関手
- $\epsilon : T \to LK$ 自然変換

に二つくみ $(L, \epsilon : LK \to T)$ であって, 任意の $S : C \to A, \alpha : T \to SK$ について, $\alpha = \sigma K \circ \epsilon : T \to SK$ となる自然変換 $\sigma : L \to S$ が唯一存在すること.
このとき $L := Lan_K T$ とかく.

$\sigma \mapsto \epsilon \cdot \sigma K$ によって自然な全単射

$$Nat(L, S) = Nat(Lan_K T, S) \cong Nat(T, SK)$$

となる. よってこれをかっこよくいうと次の補題を得る.

補題 19. $K : M \to C$ を固定する．任意の $T \in A^M$ $(T : M \to A)$ について左 Kan 拡張 $(L, \epsilon) := (Lan_K T \in A^C, \epsilon_T : T \to LK)$ が存在すると仮定する.
この時 $\beta : A^M \to A^C$ を

- $\beta T := Lan_K T$
- $\beta(g : T \to T')$ について $\beta(g) : Lan_K T \to Lan_{K'} T$ を, $S = Lan_K T' : C \to A, \alpha = g \circ \epsilon_T : T \to SK = Lan_K T' K$ として, 唯一存在する自然変換 $\beta(g) := \sigma : Lan_K T \to Lan_K T'$ で $\alpha = g \circ \epsilon_T = \beta(g) K \cdot \epsilon_T$ となるもの.

で決めると,

$$F : A^C \to A^M \quad N : C \to A \mapsto N \circ K : M \to A$$

の左随伴, つまり

$$Nat(Lan_K T, N) = hom_{A^C}(Lan_K T, N) \cong hom_{A^M}(T, F(N)) = Nat(T, NK)$$

となり, $\epsilon : I \to Ran_K \circ F$ は unit である.

定理 20 (点列極限としての左 Kan 拡張)**.** $K : M \to C$, $T : M \to A$ を関手とする．任意の $c \in Ob(C)$ について

$$T \circ P : (K \downarrow c) \to M \to A$$

に関する余極限 $\mathrm{colim} T \circ P$ と $\mu : TP \to \Delta(\lim T \circ P)$ が存在すると仮定する.
このとき $L : C \to A$ を

- $c \in Ob(C)$ について, $Lc := \mathrm{colim}(T \circ P : (K \downarrow c) \to M \to A)$
- $g : c \to c'$ について $Lg : Lc \to Lc'$ となる射

とするとこれは関手になる
さらに $\epsilon : T \to RK$ について $\epsilon_m : Tm \to RKm$ を次で定めるとこれは自然変換になる:
$LKm = \mathrm{colim} T \circ P \in Ob(A)$ と $\mu : TP \to \Delta TPm$ は定義から, (LKm, μ_x) のくみ $(x : Km \to Km)$, $Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ $(x' : Km' \to Km)$ について

- $\mu_x : Tm \to RKm$, つまり A 内で $\mu_x : Tm \to RKm$
- $\mu_x \circ TPh = \mu_{x'} : TQ(m', x') = Tm' \to RKm$,

である．そこで $\epsilon_m := \mu_{id_{Km}} : Tm \to RKm$ と定義する.
そして (L, ϵ) は K に沿った T の左 Kan 拡張となる.

系 21. M が small, A が完備なら任意の $T : M \to A$ は任意の $K : M \to C$ に沿った左 Kan 拡張を持つ．さらに A^K は左随伴を持つ
特に Msmall ならば任意の $T : M \to \mathbf{Set}$ は任意の $K : M \to C$ に沿った左 Kan 拡張を持つ.

系 22. 102 のように $K : M \to C$, $T : M \to A$ を関手, 任意の $c \in Ob(C)$ について

$$T \circ P : (K \downarrow c) \to M \to A$$

に関する極限 $\mathrm{colim} T \circ P$ と $\mu : TP \to \Delta(\lim T \circ Q)$ が存在すると仮定する.
さらに $K : M \to C$ が fully faithfull の場合, K の T に沿った Kan 拡張 $L = Lan_K T$ についての普遍射 $\epsilon : T \to LK$ は自然同型を与える

系 23. M が C の full sub category つまり包含関手 $K : M \to C$ が fullyfaithfull とする. $T : M \to A$ 関手とする. $c \in C$ について

$$(K \downarrow c) \to M \to A$$

が A 内に極限を持つとき $L : C \to A$ があって $\epsilon : T \cong LK$ である.
特に恒等自然変換 $1 : RK \to T$ とすると $(L, 1)$ は T の K に沿った左 Kan 拡張となる.

定理 24. $K : M \to C$, $T : M \to A$, $G : A \to X$ とする. G が右随伴を持つ時, G は左 Kan 拡張を保存する.

$$G \circ Lan_K T = Lan_K GT$$

1.2.5 表現関手と余極限

系 25. $\mathcal{D}$ small $K : \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}$ 反変関手, つまり $K \in \mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}}$ とする. (K は前層) この時 K は $hom_{\mathcal{D}}(\cdot, d)$ の余極限でかける.

Proof. J をコンマ圏 $1 \downarrow K$ とする. つまり, $1 \in Ob(\mathbf{Set})$(1 は１点集合のこと) $1 : \mathbf{1} \to \mathbf{Set}$ という関手とみれる. $K : \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}$ 関手として

- Object $(d, x) \in Ob(\mathcal{D}^{op}) \times Hom_{\mathbf{Set}}(1, Sd)$, つまり $x : 1 \to Kd$ とする.
- Morphism $h : (d, x) \to (d', x') \in Hom_{\mathcal{D}^{op}}(d, d')$ を $h : d \to d' in \mathcal{D}^{op}$ で $x' = Kh \circ x$ となるもの

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "1"'] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & Kd \arrow[d, "Kh"] \\ 1 \arrow[r, "x'"'] & Kd' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} d \arrow[d, "h"'] \\ d' \end{tikzcd}$$

もう少し噛み砕くと

- Object $(d, x) \in Ob(\mathcal{D}^{op}) \times Kd$. $x \in Kd \in Ob(\mathbf{Set})$ である.
- Morphism $h : (d, x) \to (d', x') \in Hom_{\mathcal{D}^{op}}(d, d')$ を $h : d \to d' in \mathcal{D}^{op}$ で, $Kh : Kd \to Kd'$ は集合の写像になるので, $x' = Kh(x)$ である.

そこで関手 $M : \mathcal{J}^{op} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}}$ を

- Object $(d,x) \in Ob(\mathcal{D}^{op}) \times Kd$ について $M(d,x) = hom_{\mathcal{D}}(\cdot, d)$
- Morpshim $h : (d,x) \to (d',x') in \mathcal{J}^{op}$ について, $h : (d',x') \to (d,x) in \mathcal{J}$ より, $h : d' \to d in \mathcal{D}^{op}$ で $x = Kh(x')$ なるものがあり, $h : d \to d' in \mathcal{D}$ であるので, $Mh : M(d,x) = hom_{\mathcal{D}}(\cdot, d) \to M(d',x) = hom_{\mathcal{D}}(\cdot, d')$ て定義できる.

ここで J は small となる. これは $|Ob(\mathcal{D})| < cf(\kappa) \leq \kappa$ となる基数 κ をとると (この存在は 9 から), $\sup_{d \in Ob(\mathcal{D})} |Kd| < \kappa$ が言えるから.

示すことは $K \in Ob(\mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}})$ が $M \in Psh(\mathcal{D}^{op}, \mathbf{Set})^{\mathcal{J}^{op}}$ の余極限

$$K \cong \mathrm{colim}_{M:\mathcal{J}^{op} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}}} M(d,x) = \mathrm{colim}_{M:\mathcal{J}^{op} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}}} hom_{\mathcal{D}}(\cdot, d)$$

であることを示す. $K \in Ob(\mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}})$ と $u : M \to \Delta K$ の組みで普遍なものがあることを示せば良い ($\Delta K \in Psh(\mathcal{D}^{op}, \mathbf{Set})^{\mathcal{J}^{op}}$ に注意する)

つまり $(K, u_{(d,x)} : M(d,x) \to K)$ の組で

1. $(K, u_{(d,x)} : M(d,x) \to K)$ のくみで, J^{op} 内の $h : (d,x) \to (d',x')$ について $u_{(d,x)} = u_{(d',x')} \circ M(h) : M(d,x) \to K)$ が成り立ち,
2. J^{op} 内の $h : (d,x) \to (d',x')$ について $f_{d,x} : M(d,x) \to L$, $f_{d',x'} : M(d',x') \to L$ で $f_{d,x} = f_{d',x'} \circ M(h) : M(d,x) \to L$ が成り立つ $(L, f_{d,x})$ の組みについて,
3. ある $f' : K \to L$ が存在して, 任意の j について $f' \circ u_{d,x} = f_{d,x}$ となる.

であることを示せば良い.

$u_{(d,x)} \in Nat(M(x,d) = hom_{\mathcal{D}}(\cdot, d), K) \cong Kd$ より $u(d,x) = x$ とすれば良い. (つまり $u_{(d,x)}(c) : hom_{\mathcal{D}}(c,d) \to Kc$ を $f \mapsto (Kf)(x)$ とする) $h : (d,x) \to (d',x') in \mathcal{J}^{op}$ について, $h : d' \to d in \mathcal{D}^{op}$ で $x = Kh(x')$ となる. よって $u_{(d,x)} = u_{(d',x')} \circ M(h) : M(d,x) \to K$ であることは, 任意の $c \in \mathcal{D}$, $f \in M(d,x)(c) = hom_{\mathcal{D}}(c,d)$ について

$$u_{(d',x')} \circ M(h)(f) = u_{(d',x')}(h \circ f) = K(h \circ f)(x') = Kf \circ Kh(x') Kf(x) = u_{(d,x)}(f)$$

となり言える.

(2) については $(L, f_{d,x})$ の組みについて, 自然変換 $f : K \to L$ を与えることは $d' \in Ob(\mathcal{D})$ について $f_{d'} : Kd' \to Ld'$ で可換性を満たすようなものを作れば良い. $f_{d,x} \in Nat(M(d,x), L) = Nat(hom(\cdot, d), L) \cong Ld$ より, $f_{d,x}$ は Ld の元とみなせるこれは $a \in Kd'$ について $f_{d,a}$ を返せば良い. 自然性は米田の同型を追えば良い $\square$

1.3 レクチャーノート 1 章 2 章の内容で今回の発表で使うもの.

定義 26. [Sch19, Definition 2.4] コンパクトハウスドルフ空間 S が extremally discconeted であるとは, 任意のコンパクトハウスドルフ空間 S' からの全射 $p : S' \twoheadrightarrow S$ について, ある $\pi : S \to S'$ が存在して $p \circ \pi = id_S$ となる.

同値な定義として,「$S \to A$ と全射 $B \twoheadrightarrow A$ は常にリフト $S \to B$ を持つ」とも言える.

命題 27. [Sch19, Example 2.5] κ 強極限基数とする.
$|S_0| < \kappa$ となる離散集合について, βS_0 を S_0 の stone cech コンパクト化とするとき, βS_0 は extremally discconeted で $|\beta S_0| < \kappa$ となる.
特に任意のコンパクトハウスドルフ空間 S に関して, extremally discconeted βS_{dist} からの全射 $\beta S_{dist} \to S$ が存在する.

以下このノートでは βS_{dist} をS に離散位相を入れた Stone Cech コンパクト化とする.

命題 28. [Sch19, Example 2.5] κ 強極限基数とする.
$\mathbf{ED}_{<\kappa}$ を次からなる圏とする.

- Object: extremally discconeted set で $|S| < \kappa$ となるもの.
- Morphism: 連続写像 $S \to S'$

そして $Cov(\mathbf{ED}_{<\kappa})$ を有限個連続写像 $f_i : X_i \to Y$ で $\cup_{i=1}^{n} f_i(X_i) = Y$ となるものとする.
この時 $\mathbf{ED}_{<\kappa}$ の sheaf の圏は (profinite set の制限によって)κ-condenced set の圏と圏同値

特に κ-small condenced set $Cond_{<\kappa}$ の圏は

$$T : \mathbf{ED}_{<\kappa}^{op} \to \mathbf{Set}$$

なる関手で

1. $T(\phi) = 1pt$
2. $T(S_1 \sqcup S_2) \to T(S_1) \times T(S_2)$ が bijection

となるものとして特徴づけられる.(ED の性質により 2 つ目の条件はすぐに出る.)

以下このノートでは原則的に $\mathbf{Cond}_{<\kappa}$ の圏は$\mathbf{ED}_{<\kappa}^{op}$ から $\mathbf{Set}$ への関手で上の 1.2 の条件を満たすものとする. 理由としては ED の方が使いやすいからである.

命題 29. [Sch19, proposition 1.7] κ 強極限基数とする.

$$F : \mathbf{Cond}_{<\kappa} \to \mathbf{Top}_{<\kappa} \quad T \to T(*)_{top}$$

$$G : \mathbf{Top}_{<\kappa} \to \mathbf{Cond}_{<\kappa} \quad X \to \underline{X} := hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}}(\cdot, X)$$

とする. ここで $T(*)_{top}$ は底空間 $T(*)$ に位相を

$$\sqcup_{S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}} \sqcup_{f \in T(S)} S \to T(*)$$

が商写像になるように定義する.
この時 F は G の左随伴射で counit は $\epsilon : FG \to I$ は $\epsilon_X = id_X : FG(X) = \underline{X}(*)_{top} \cong$

$X^{\kappa-cg}\to X$ となる．特に

$$hom_{\mathbf{Top}_{<\kappa}}(T(*)_{top},X)\cong hom_{\mathbf{Cond}_{<\kappa}}(T,\underline{X})$$

となる．

2 [Sch19, Proposition 2.9] の解説

2.1 [Sch19, Proposition 2.9] の主張

命題 30. [Sch19, Proposition 2.9] $\kappa<\widetilde{\kappa}$ を強極限基数とする．この時

$$\mathcal{F}_{\widetilde{\kappa},\kappa}:\mathbf{Cond}_{<\kappa}\to\mathbf{Cond}_{<\widetilde{\kappa}}$$

となる自然な関手が存在する．これは次で与えられる．

- $T\in Ob(\mathbf{Cond}_{<\kappa})$ について，$T_{\widetilde{\kappa}}:=\mathcal{F}_{\widetilde{\kappa},\kappa}(T)\in\mathbf{Cond}_{<\widetilde{\kappa}}$ を，任意の $\widetilde{S}\in\mathbf{ED}_{<\widetilde{\kappa}}$ について

$$T_{\widetilde{\kappa}}:=\mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S}T(S)$$

として定義する．ここで $\widetilde{S}\to S$ は κ-small extremally disconnected set S への連続写像全てを回る．

- morphism $f:T\to T'$ について，$\widetilde{S}\to S$ について $T'(S)\to T(S)$ が存在するので，その colim として定義する．

すると $T_{\widetilde{\kappa}}$ は sheaf になり，$\mathcal{F}_{\widetilde{\kappa},\kappa}:\mathbf{Cond}_{<\kappa}\to\mathbf{Cond}_{<\widetilde{\kappa}}$ は次を満たす．

1. $\mathcal{F}_{\widetilde{\kappa},\kappa}$ は fully-faithfull である．
2. 関手 G を

$$G:\mathbf{Cond}_{<\widetilde{\kappa}}\to\mathbf{Cond}_{<\kappa}\quad\widetilde{T}\mapsto\widetilde{T}|_{\mathbf{ED}_{<\kappa}}$$

で定めると，$\mathcal{F}_{\widetilde{\kappa},\kappa}$ は G 左随伴射である．特に colim と可換である．

3. $\lambda:=cf(\kappa)$ とする時，任意の λ-small limit と交換する．

注意 31. ショルツのレクチャーノートでは，「$T\in\mathbf{Cond}_{<\kappa}$ について，$T_{\widetilde{\kappa}}:=\mathcal{F}_{\widetilde{\kappa},\kappa}(T)\in\mathbf{Cond}_{<\widetilde{\kappa}}$ を，任意の $\widetilde{S}\in\mathbf{Profin}_{<\widetilde{\kappa}}$ について

$$T_{\widetilde{\kappa}}:=\mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S}T(S)$$

の”sheafification”として定義する．ここで，$\widetilde{S}\to S$ は κ-small profinite set$S$ への連続写像全てを回る」として定義していた．ただこれだとすぐには λ-small limit との可換性は言えないと思う．というのも sheafification が λ-small limit との可換かはわからないからである．

ただ結論としては正しい．というのも

$$Sh(\mathbf{Profin}_{<\kappa}, \mathbf{Set}) \cong Sh(\mathbf{ED}_{<\kappa}, \mathbf{Set})$$

という圏同値があるからである．

注意 32 (Sch19. Remark 2.10)**.** λ-small 極限の主張以外は, **Set** ではなくても filtered colimit が常に存在する圏に値を持つ condensed object にも適応できる．

λ-small 極限に関しては **Set** への conservative forgetful functor 忘却関手をもち, limit と filtered colimit が可換になるものについては成り立つ．ここで $F: C \to D$ が conservative functor とは任意の morpshim f について $F(f)$ が isom ならば f が isom なことを言う．

2.2 [Sch19, Proposition 2.9] の主張 (=命題 30) の証明

Proof of Proposition 30. 非常に長いが一つずつ噛み砕いていく．

[1] $\mathcal{F}_{\tilde{\kappa},\kappa}: Cond_{<\kappa} \to Cond_{<\tilde{\kappa}}$ の存在

[1-1] 左 Kan 拡張の存在 $T \in \mathbf{Cond}_{<\kappa}$ とする．これは次を満たす関手である．

- $T \in \mathbf{Set}^{\mathbf{ED}_{\kappa}^{op}}$
- $T(\varnothing) = 1$ かつ $T(S_1 \sqcup S_2) \to T(S_1) \times (S_2)$ が bijection

そこで $K: \mathbf{ED}_{<\kappa}^{op} \to \mathbf{ED}_{<\tilde{\kappa}}^{op}$ を包含関手とする．K は fully faithfull である．

すると

- K が包含関手で fully faithfull.
- $\mathbf{ED}_{<\kappa}^{op}$ は small.
- **Set** は余完備.

であるので, 20 や 21 により T の K に沿った左 Kan 拡張 $Lan_K T \in \mathbf{Set}^{\mathbf{ED}_{<\tilde{\kappa}}^{op}}$ が存在する．そして $\widetilde{S} \in \mathbf{ED}_{\tilde{\kappa}}^{op}$ について

$$Lan_K T(\widetilde{S}) = \operatorname{colim}(T \circ P : (K \downarrow \widetilde{S}) \to \mathbf{ED}_{<\kappa} \to \mathbf{Set})$$

となる．すると 19 によって

- $Lan_K : \mathbf{Cond}_{<\kappa} \to \mathbf{Cond}_{<\tilde{\kappa}}$ を $T \mapsto Lan_K T$
- $K : \mathbf{Cond}_{<\tilde{\kappa}} \to \mathbf{Cond}_{<\kappa}$ を $T \mapsto T \circ K$

としたとき, Lan_K は K の左随伴, つまり

$$Nat(Lan_K F, N) = hom_{\mathbf{Cond}_{<\tilde{\kappa}}}(Lan_K F, N) \cong hom_{\mathbf{Cond}_{<\kappa}}(F, K(N)) = Nat(T, NK)$$

となり, 恒等自然変換 $1: I_{\mathbf{Cond}_{<\kappa}} \to Lan_K \circ K$ は unit である．

[1-2] $\mathcal{F}_{\tilde{\kappa},\kappa} = Lan_K$ であること

左 Kan 拡張 Lan_K をを書き下していく．$(K \downarrow \widetilde{S})$ の圏とは定義から次で与えられる.[1]

- Object (S_1, f_1) は $S_1 \in \mathbf{ED}_\kappa$ かつ $f_1 : KS_1 \to \widetilde{S}$ の組み．$f_1 : KS_1 \to \widetilde{S}$ は連続写像 $f_1 : \widetilde{S} \to S_1$ と同値である．
- Morpshim $h : (S_1, f_1) \to (S_2, f_2)$ を $h : S_1 \to S_2$ で $f_2 \circ Kh = f_1 : S_1 \to \widetilde{S}$ となるもの．よって連続写像の言葉で直すと，$\widetilde{S} \to S_2 \to S_1$ が可換になること．

図で表すと次の様になる.[2]

$$
\begin{tikzcd}
KS_1 \arrow[d, "h"'] & KS_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "Kh"'] & \widetilde{S} \arrow[d, equal] & \widetilde{S} \arrow[d, equal] \\
KS_2 & KS_2 \arrow[r, "f_2"'] & \widetilde{S} & \widetilde{S} \\
\mathbf{Ed}^{op}_\kappa & \mathbf{Ed}^{op}_{\widetilde{\kappa}} & & 1
\end{tikzcd}
$$

そして $T \circ P : (K \downarrow \widetilde{S}) \to \mathbf{ED}_\kappa \to \mathbf{Set}$ とは $(S_1, f_1) \mapsto T(K(S_1))$ であるので

$$
\begin{aligned}
Lan_K F(\widetilde{S}) &:= \operatorname{colim}(F \circ P : (K \downarrow \widetilde{S}) \to P \to \mathbf{Set}) \\
&= \operatorname{colim}_{f_1 : K(S_1) \to \widetilde{S}, S_1 \in \mathbf{ED}_\kappa} T(S_1) \\
&= \operatorname{colim}_{f_1 : \widetilde{S} \to S_1, S_1 \in \mathbf{ED}_\kappa} T(S_1)
\end{aligned}
$$

<u>[1-3] $Lan_K T$ が sheaf になること</u>　$T(\varnothing) = 1$ に関しては恒等関手を見れば

$$1_\varnothing = id_{T(\varnothing)} : T(\varnothing) \to Lan_K T \cdot K(\varnothing) = (\varnothing)$$

となるので一点集合である．

次に $\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2 \in Ob(\mathbf{ED}_{<\widetilde{\kappa}})$ について $Lan_K T(\widetilde{S}_1 \sqcup \widetilde{S}_2) \cong Lan_K T(\widetilde{S}_1) \times Lan_K T(\widetilde{S}_2)$ となることを示す．

まず $K \downarrow (\widetilde{S}_1 \sqcup \widetilde{S}_2)$ の部分圏 J を次で定める．

- Object $(S_1 \sqcup S_2, f_1 \sqcup f_2)$ を $S_1, S_2 \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ かつ連続写像 $f_1 : \widetilde{S_1} \to S_1$, $f_2 : \widetilde{S_2} \to S_2$ の組みとする．
- Morphism $h = g_1 \sqcup g_2 : (S_1 \sqcup S_2, f_1 \sqcup f_2) \to (S_1' \sqcup S_2', f_1' \sqcup f_2')$ とかけるものとする．ここで $g_i \circ f_i = f_i' : \widetilde{S}_i \to S_i' \to S_i$ とする．

これは確かに部分圏となっている．なぜならば $S_1, S_2 \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ ならば $S_1 \sqcup S_2 \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ であり，$f_1 : \widetilde{S_1} \to S_1$, $f_2 : \widetilde{S_2} \to S_2$ の組みがあれば

$$i_1 \circ f_1 : \widetilde{S_1} \to S_1 \sqcup S_2, \quad i_2 \circ f_2 : \widetilde{S_2} \to S_1 \sqcup S_2,$$

[1]ただし連続写像と $\mathbf{ED}^{op}_\kappa$ の矢印を区別するため，$\mathbf{ED}^{op}_\kappa$ での矢印を $\to$ で表す．またわかりやすさのため包含写像 K もあえて書く．

[2]なぜか矢印に色がつかなかった...

が定義できるので, 余積の定義から

$$f_1 \sqcup f_2 : \widetilde{S}_1 \sqcup \widetilde{S}_2 \to S_1 \sqcup S_2$$

が定義できるからである.

$\underline{J \text{ が } K \downarrow (\widetilde{S}_1 \sqcup \widetilde{S}_2) \text{ の共終部分圏になること}}$を示す. (共終については 89 参照.) これは共終の定義の 2 条件を満たすことを示せば良い.

(1). 任意の $(S, f) \in K \downarrow (\widetilde{S}_1 \sqcup \widetilde{S}_2)$ について, ある $(S_1 \sqcup S_2, f_1 \sqcup f_2)$ があって $\widetilde{S}_1 \sqcup \widetilde{S}_2 \leftarrow S_1 \sqcup S_2 \leftarrow S$ であること. これは連続写像に言い換えると, 任意の $f : \widetilde{S} \to S$ について, $g_i : \widetilde{S}_i \to S_i$, $h_i : S_i \to S$ があって次の図式を満たせば良い.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{S}_1 \sqcup \widetilde{S}_2 \arrow[r, "g_1 \sqcup g_2"] \arrow[rr, bend left, "f"] & S_1 \sqcup S_2 \arrow[r, two heads, "h_1 \sqcup h_2"] & S
\end{tikzcd}$$

$f(\widetilde{S_1}) \subset S$ を $\widetilde{S_1} \to \widetilde{S}_1 \sqcup \widetilde{S}_2 \xrightarrow{f} S$ の像とし, $S_1 := \beta(f(\widetilde{S_1})_{dist})$ とする.[3] すると $S_1 \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ である. また $S_1 \twoheadrightarrow f(\widetilde{S_1})$ は全射かつ $\widetilde{S}_1 \in \mathbf{ED}$ のため, $g_1 : \widetilde{S_1} \to S_1$ が存在する. 同様に $g_2 : \widetilde{S_2} \to S_2$ も存在する. また $h_i : S_i \to f(\widetilde{S}_i) \subset S$ とする. 直和の定義をちゃんと見ればこれが可換になっている.

(2). 任意の $(S, f) \in K \downarrow (\widetilde{S}_1 \sqcup \widetilde{S}_2)$ と $(S_1 \sqcup S_2, f_1 \sqcup f_2)$, $(T_1 \sqcup T_2, g_1 \sqcup g_2) \in Ob(J)$ で

$$g_S : (S, f) \to (S_1 \sqcup S_2, f_1 \sqcup f_2) \quad g_T : (S, f) \to (T_1 \sqcup T_2, g_1 \sqcup g_2)$$

であったとする. そこで $W_1 := \beta((S_1 \times T_1)_{dist})$ とする $W_1 \twoheadrightarrow S_1$ が全射なので $\widetilde{S_1} \to W_1$ を誘導し, 次の図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & S_1 \arrow[d, equal] \arrow[dr, two heads] & \\
\widetilde{S}_1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_1 \arrow[r, two heads] & S \\
 & W_1 \arrow[u] \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd}$$

これを $i = 2$ の場合も同様にして次の図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & S_1 \sqcup S_2 \arrow[d, equal] \arrow[dr, two heads] & \\
\widetilde{S}_1 \sqcup \widetilde{S_2} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_1 \sqcup S_2 \arrow[r, two heads] & S \\
 & W_1 \sqcup W_2 \arrow[u] \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd}$$

[3] $\beta(f(\widetilde{S_1})_{dist})$ については 27 参照

これを T 側にも同じことをすると, 次の図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & & S & & \\
S_1 \sqcup S_2 \arrow[rru] \arrow[r, equal] & S_1 \sqcup S_2 \arrow[ru] & W_1 \sqcup W_2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & T_1 \sqcup T_2 \arrow[lu] & T_1 \sqcup T_2 \arrow[llu] \arrow[l, equal]
\end{tikzcd}$$

これにより共終の定義 89(2) を満たしていることがわかる.

よって共終と余極限の性質 90 から J での余極限に取り替えることができる. つまり

$$\begin{aligned}
Lan_K T(\widetilde{S}_1 \sqcup \widetilde{S}_2) &= \mathrm{colim}(T \circ P : K \downarrow (\widetilde{S}_1 \sqcup \widetilde{S}_2) \to P \to \mathbf{Set}) \\
&\cong \mathrm{colim}(T \circ P : J \to P \to \mathbf{Set}) \\
&= \mathrm{colim}_{f_1:\widetilde{S_1} \to S_1, f_2:\widetilde{S_2} \to S_2} T(S_1 \sqcup S_2) \\
&\cong \mathrm{colim}_{f_1:\widetilde{S_1} \to S_1, f_2:\widetilde{S_2} \to S_2} T(S_1) \times T(S_2)
\end{aligned}$$

となる. あとは colim と直積が可換になることを示せば良い.

そこで $R := (K \downarrow \widetilde{S}_1) \times (K \downarrow \widetilde{S}_2)$, $\mathbf{2} = \{1, 2\}$ とし関手 $G : R \times \mathbf{2} \to \mathbf{Set}$ を

$$G(S_1, f_1, S_2, f_2, 1) := T(S_1) \quad G(S_1, f_1, S_2, f_2, 2) := T(S_2)$$

として定義する. $(K \downarrow \widetilde{S}_1)$ は [2-2] より λ-filtered となるので, R も λ-filtered. また $\mathbf{2}$ は λ-small である. よって λ は正則より 15 から極限と余極限を交換できて

$$\mathrm{colim}_R \lim_{\mathbf{2}} G(S_1, f_1, S_2, f_2, i) \cong \lim_{\mathbf{2}} \mathrm{colim}_R G(S_1, f_1, S_2, f_2, i)$$

である. $\lim_{\mathbf{2}} G(S_1, f_1, S_2, f_2, i) = F(S_1) \times F(S_2)$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
\mathrm{colim}_{f_1:\widetilde{S_1} \to S_1, f_2:\widetilde{S_2} \to S_2} T(S_1) \times T(S_2) &= \mathrm{colim}_R \lim_{\mathbf{2}} G(S_1, f_1, S_2, f_2, i) \\
&\cong \lim_{\mathbf{2}} \mathrm{colim}_R G(S_1, f_1, S_2, f_2, i) \\
&= \mathrm{colim}_R G(S_1, f_1, S_2, f_2, 1) \times \mathrm{colim}_R G(S_1, f_1, S_2, f_2, 2) \\
&= \mathrm{colim}_{f_1:\widetilde{S_1} \to S_1} T(S_1) \times \mathrm{colim}_{f_2:\widetilde{S_2} \to S_2} T(S_2) \\
&= Lan_K T(\widetilde{S}_1) \times Lan_K T(\widetilde{S}_2)
\end{aligned}$$

となる. よって sheaf になる.

[1-4] 関手になること　これは 19 と [1-1] よりすでに言えている.

[2] 各種の条件に関して

[2-1] fullyfaithfull と左随伴性について

[1-1] により, unit1 : $I \to Lan_K \circ K$ は同型である. よって unit が同型なので Lan_K は fully faithfull である.(95 参照.) 左随伴性もすでに言えている.

[2-2] $\lambda = cf(\kappa)$-small limit と交換すること. I を λ-small な圏とする. 示すことは

$$Lan_K(\lim_{i \in I} T_i) \cong \lim_{i \in I}(Lan_K T_i)$$

である．つまり $\widetilde{S} \in Ob(\mathbf{ED}^{op}_{<\widetilde{\kappa}})$ について

$$Lan_K(\lim_{i\in I} T_i)(\widetilde{S}) := \mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S}(\lim_{i\in I}(T_i(S)) \cong \lim_{i\in I}(\mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S}(T_i(S)) =: \lim_{i\in I}(Lan_K T_i)(\widetilde{S})$$

を示せば良い．よって任意の $\widetilde{S} \in Ob(\mathbf{ED}^{op}_{<\widetilde{\kappa}})$ について

$$G : I \times (K \downarrow \widetilde{S}) \to \mathbf{Set} \quad (i, (S, f)) \mapsto G(i, (S, f)) = T_i(S)$$

とおいたときに

$$\mathrm{colim}_{(S,f)\in K\downarrow\widetilde{S}}(\lim_{i\in I} G(i, (S, f)) \cong \lim_{i\in I}(\mathrm{colim}_{(S,f)\in K\downarrow\widetilde{S}}(G(i, (S, f))$$

であることを示せば良い．$\lambda = cf(\kappa)$ は正則基数なので $K \downarrow \widetilde{S}$ が λ-filtered であることを示せば定理 15 から極限と余極限を交換できて上が従う．

任意の λ-small な圏 J とその関手 $H : J \to K \downarrow \widetilde{S}$ について，cocone $(S, f) \in K \downarrow \widetilde{S}$ と $u : H \to \Delta(S, f)$ の組が存在することを示す．$j \in H$ について $H(j) = (S_j, f_j)$ とする．$S_j \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ かつ $f_j : S_j \to \widetilde{S}$ とする．そこで (S_j, f_j) の位相空間としての極限

$$S_0 := \lim_{j\in J} S_j$$

をとる．極限の定義から連続写像 $f_0 : \widetilde{S} \to S_0$ があるので $f_0 : S \to \widetilde{S}$ となる．[4]

まず $|S_0| < \kappa$ であることを示す．$\mu := \sup_{j\in J} |S_j|$ とおく．すると 8 より $\mu < \kappa$ である．よって S_0 の濃度は

$$\begin{aligned}
|S_0| = |\lim_{j\in J} S_j| &\leq |\prod_{i\in J} S_j| && (\lim \text{ の定義}) \\
&\leq \mu^{\lambda} && (|S_i| \leq \mu \text{ と } J \to \cup_j S_j) \\
&\leq (2^{\mu})^{\lambda} && (\mu < 2^{\mu}) \\
&\leq 2^{\mu\cdot\lambda} && (\text{積の法則}) \\
&< \kappa && (\mu\cdot\lambda < \kappa \text{ と } \kappa \text{ 強極限})
\end{aligned}$$

となる．(途中に $\mu \cdot \lambda = \max\{\mu, \lambda\} < \kappa$ を用いた．[5])

$S := \beta(S_{0dist})$ とする．$S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ であり全射 $g : S \twoheadrightarrow S_0$ が存在する．連続写像の図で書くと次の様になる．

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{S} \arrow[r, "f_0"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & S_0 := \lim_{j\in J} S_j \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"] & S_1 \\
& S := \beta(S_{0dist}) \arrow[u, twoheadrightarrow, "g"'] & S_2 \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{1}$$

そこで $f : \widetilde{S} \to S$ を $\widetilde{S}$ の ED 性から誘導される連続写像とする．さらに $u_j := f_j \circ g : S \to S_j$ とおく．この (S, f) と $u = \{u_j\}_{j\in J}$ が J とその関手 $H : J \to K \downarrow \widetilde{S}$ についての cocone$(S, f) \in K \downarrow \widetilde{S}$

[4] ただし S_0 は Extremally disconnected とは限らない．

[5] μ, λ がともに有限の時は $\mu \cdot \lambda < \kappa$ は明らか．

と $u : H \to \Delta(S, f)$ の組みである．それは以下の 2 条件が成り立つからである

(1.) $S \in ED_{<\kappa}$ であり $f : \widetilde{S} \to S$ であるので $f : S \to \widetilde{S}$ となり，$(S, f) \in Ob(K \downarrow \widetilde{S})$ となる．

(2.) $u : H \to \Delta(S, f)$ であることは，任意の $k : 1 \to 2$ について $u_2 \circ H(k) = u_1 : (S_1, f_1) \to (S, f)$ であることを示せば良い．連続写像の言葉で書くと (1) の図を参考にすれば

$$H(k) \circ u_2 = (S_2 \to S_1) \circ (f_2 \circ g) = f_1 \circ g = u_1$$

となるので，双対 (op) を考えれば言える． □

3 強極限基数によらない Condenced set の定義と性質．[Sch19, Definition 2.11] の解説

定義 33. [Sch19, Definition 2.11] condenced set の圏 **Cond** を”filtered colimit of $\mathbf{Cond}_{<\kappa}$ along filtered poset of all κ”とする．
つまり **Cond** の Object T とは次を満たすものである．

1. $T : \mathbf{ED}^{op} \to \mathbf{Set}$ なる関手
2. $T(\phi) = 1$ かつ $T(S_1 \sqcup S_2) \cong T(S_1) \times T(S_2)$
3. ある強極限基数 κ と $T_\kappa \in \mathbf{Cond}_{<\kappa}$ があって，$T = Lan_K T_\kappa$ とかける．ここで $K : {\mathbf{ED}_{<\kappa}}^{op} \to \mathbf{ED}^{op}$ を包含関手とする．

また morphism を $T \to T'$ となる自然変換で定める．

(3) の条件のおかげで集合論的な問題を解決することができる．[6]

注意 34. [Sch19, Remark 2.12, 2.13]

- **Cond** は laege category で generator の集合を持つとは限らない
- **Cond** は site 上の sheaf とも限らない

補題 35. [Sch19, Remark 2.13] **Cond** は任意の small limit と small colimit が存在する．
つまり J を小さい圏とし関手 $F : I \to \mathbf{Cond}$ とした時，ある強極限基数 κ で $F(i) = Lan_K T_i$ となる $T_i \in \mathbf{Cond}_{<\kappa}$ 存在する．そして次が成り立つ．

- $\lim_{i \in I} T_i$ は各点で計算できる．つまり $S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ について

$$(\lim_{i \in I} T_i)(S) = \lim_{i \in I} T_i(S)$$

[6] 松澤さんから「(3) の条件から (2) は従うのでは?」と指摘された．確かに左 Kan 拡張が自動的に sheaf になるので，(2) は不要な気もする．

である. $\lim_{i\in I} F_i$ は $Lan_K(\lim_{i\in I} T_i)$ で与えられ, $\kappa < \tilde{\kappa}$ かつ $\widetilde{S} \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ について

$$(\lim_{i\in I} F_i)(\widetilde{S}) = \lim_{i\in I} \mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S} T_i(S)$$

となる.

- $\mathbf{Cond}_{<\kappa}$ での余極限は Presheaf としての余極限 $T := \mathrm{colim}_{i\in I} T_i$ を sheafification として与えられる. それを $T^\sharp$ とすると $\mathbf{Cond}$ での余極限は $\mathrm{colim}_{i\in I} F_i := Lan_K T^\sharp$ で与えられる.

- I が filtered category ならば, sheaf としての余極限は各点で計算できる. つまり $S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ について

$$(\mathrm{colim}_{i\in I} T_i)(S) = \mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(S))$$

となる, また $\mathrm{colim}_{i\in I} F_i$ は $Lan_K(\mathrm{colim}_{i\in I} T_i)$ で与えられ, $\kappa < \tilde{\kappa}$ かつ $\widetilde{S} \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ について

$$(\mathrm{colim}_{i\in I} F_i)(\widetilde{S}) = \mathrm{colim}_{i\in I} \mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S} T_i(S)$$

となる.

ここで sheafification とその性質についておさらいしておく.

定理 36. [Sha2] *Csmall category with topology とする. $Psh(C) := \mathbf{Set}^C$ とし, $Sh(C)$ を $\mathbf{Set}$ に値を持つ sheaf とする.*
このとき自然な関手 sheafifictaion$\# : PSh(C) \to Sh(C)$ が存在する. さらに包含関手 $i : Sh(C) \to Psh(C)$ の左随伴射であり

$$hom_{Sh(C)}(F^{\#}, G) \cong hom_{Psh(C)}(F, i(G))$$

が成り立つ. また有限 limit と可換になる.

補題 37. [Sta, 00WK Lemma 10.15] *C を small category with topology とし, $\mathcal{F} \in \mathbf{Set}^C$ とする. また $\sharp : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^\sharp$ を sheafification とする.*
任意の $U \in Ob(C)$ と $s \in \mathcal{F}^\sharp(U)$ について covering$\{U_i \to U\}$ と $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が存在して

1. $s|_{U_i} = \sharp(U_i)(s_i)$
2. 任意の i, j についてある covering $U_{ijk} \to U_i \times_U U_j$ があって $s_i|_{U_{ijk}} = s_j|_{U_{ijk}}$ となる.

そして任意の covering$\{U_i \to U\}$ で (2) を満たすものについて (1) を満たす s は唯一である.

Proof of 35. <u>[0] 強極限基数 κ の存在</u> I を小さい圏とし関手 $F : J \to \mathbf{Cond}$ とする. $|Mor(I)| < cf(\kappa) \leq \kappa$ となる強極限基数 κ で $F(i) = Lan_K T_i$ となる $T_i \in \mathbf{Cond}_{<\kappa}$ となるものが存在する. これは $F(i) = Lan_K T_i \in \mathbf{Cond}_{<\kappa_i}$ となる一番小さい基数を κ_i とすると κ_i は集合なので集合 $\prod_{i\in I} \kappa_i$

が存在する．そこで 9 より $|\prod_{i\in I}\kappa_i| < cf(\kappa) \le \kappa$ となる κ をとれば $\kappa_i \to \prod_{i\in I}\kappa_i$ となる単射が存在するので $\kappa_i \le |\prod_{i\in I}\kappa_i| < \kappa$ である．

[1]lim に関して

[1-1] Presheaf としての極限 $\lim_{i\in I} T_i$ が Sheaf としての極限になること．

Presheaf としての極限は

$$(\lim_{i\in I} T_i)(X) := \lim_{i\in I}(T_i(X))$$

であることに注意する．これが sheaf の条件を満たすことを示せば良い．$X_1, X_2 \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ について, 極限と極限は交換することから[7]．

$$(\lim_{i\in I} T_i)(X_1 \sqcup X_2) := \lim_{i\in I}(T_i(X_1 \sqcup X_2)) \cong \lim_{i\in I}(T_i(X_1) \times T_i(X_2)) \cong \lim_{i\in I}(T_i(X_1)) \times \lim_{i\in I}(T_i(X_2))$$

[1-2]**Cond** での極限について $T = \lim_{i\in I} T_i \in \mathbf{Cond}_{<\kappa}$ として $\mathrm{colim}_{i\in I} F_i := Lan_K T$ と定義する．左 Kan 拡張と $cf(\kappa)$-small limit は 30 より可換なので,

$$Lan_K T = Lan_K(\lim_{i\in T}(T_i)) \cong \lim_{i\in I}(Lan_K(T_i)) = \lim_{i\in I} F(i)$$

となる．よって $Lan_K T$ は F の極限である．また

$$(\lim_{i\in I} F(i))(\widetilde{S}) \cong (Lan_K T)(\widetilde{S}) = \mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S} T(S) = \mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S} \lim_{i\in I} T_i(S) \cong \lim_{i\in I} \mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S} T_i(S)$$

となるので各点で計算できる.(極限の交換は 30 の証明より)

[2] 余極限について

[2-1]$\mathbf{Cond}_{<\kappa}$ での余極限 Presheaf としての余極限 $T := \mathrm{colim}_{i\in I} T_i$ とする．これは必ずしも sheaf になるとは限らないので, sheafification したものを $T^\sharp$ とおく．これが sheaf としての colim になることは, sheafification $\sharp : Psh(\mathbf{Set}) \to sh(\mathbf{Set})$ が左随伴射なので colim と可換であり

$$(\mathrm{colim}_{i\in I \text{ in Psh}} T_i)^\sharp \cong \mathrm{colim}_{i\in I \text{ in sh}} (T_i)^\sharp = \mathrm{colim}_{i\in I \text{ in sh}} T_i$$

となるからである．(”in Psh” は presheaf での余極限の意味)

[2-2]**Cond** での余極限 これは左 Kan 拡張が colim と可換であることから $\mathrm{colim}_{i\in I} F_i := Lan_K T^\sharp$ である．

[3]I が filtered のとき

このとき Presheaf としての余極限 $\mathrm{colim} T_i$ が sheaf になる．実際 $X_1, X_2 \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ について

$$\begin{aligned}(\mathrm{colim}_{i\in I} T_i)(X_1 \sqcup X_2) &:= \mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(X_1 \sqcup X_2)) \\ &\cong \mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(X_1) \times T_i(X_2)) \cong \mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(X_1)) \times \mathrm{colim}_{i\in I}(T_i(X_2))\end{aligned}$$

となる．最後の同型に関してはフィルター余極限と有限極限は交換することから．各点で計算できることも [1-2] と同じである． □

[7]ncatlab による lim を右随伴として見れるから．

定義 38. C を任意の filterd colimit を持つ圏として, $\mathbf{Cond}(C)$ も同様に定義する. つまり $\mathbf{Cond}(C)$ の Object T とは次を満たすものである.

- $T : \mathbf{ED}^{op} \to C$ なる関手
- $T(\phi) = 1$ かつ $T(S_1 \sqcup S_2) \cong T(S_1) \times T(S_2)$
- ある強極限基数 κ と $T_{<\kappa} \in \mathbf{Cond}(C)_{<\kappa}$ があって, $T = Lan_K T_\kappa$ とかける. ここで $K : \mathbf{ED}_{<\kappa}{}^{op} \to \mathbf{ED}^{op}$ を包含関手とする.

これは左 Kan 拡張が存在するためである.

補題 39. $\mathbf{Cond}(C)$ は locally small

Proof. $F \in \mathbf{Cond}(C)$ をとると, 強極限基数 κ と $T \in \mathbf{Cond}(C)_{<\kappa}$ があって, $F = Lan_K T$ となる. すると $\kappa < \lambda$ について

$$T = Lan_{K:\mathbf{ED}_{<\kappa}\to\mathbf{ED}} T = Lan_{K:\mathbf{ED}_{<\lambda}\to\mathbf{ED}}(Lan_{K:\mathbf{ED}_{<\kappa}\to\mathbf{ED}_{<\lambda}} T)$$

となる. これは $\widetilde{S} \in \mathbf{ED}$ を代入すればわかる.

上により任意の $F_1, F_2 \in \mathbf{Cond}(C)$ とすると, 強極限基数 κ と $T_i \in \mathbf{Cond}(C)_{<\kappa}$ があって, $F_i = Lan_K T_i$ とかけるとして良い. ここで $K : \mathbf{ED}_{<\kappa} \to \mathbf{ED}$ を包含関手とする. Lan_K は左随伴であり, 恒等自然変換 $1 : I \cong Lan_K \circ K$ が同型なので,

$$\begin{aligned} hom_{\mathbf{Cond}(C)}(F_1, F_2) &= hom_{\mathbf{Cond}(C)}(Lan_K T_1, Lan_K T_2) \\ &\cong hom_{\mathbf{Cond}(C)_{<\kappa}}(T_1, (Lan_K \circ K)T_2) \cong hom_{\mathbf{Cond}(C)_{<\kappa}}(T_1, T_2) \end{aligned}$$

となり, $hom_{\mathbf{Cond}(C)_{<\kappa}}(T_1, T_2)$ は集合なので, $hom_{\mathbf{Cond}(C)}(F_1, F_2)$ もそうなる. □

注意 40. hom 集合の同型 $hom_{\mathbf{Cond}(C)_{<\kappa}}(T_1, T_2) \cong hom_{\mathbf{Cond}(C)}(T_1, T_2)$ から κ を止めて議論して良いことがわかる. つまり左 Kan 拡張 Lan_K によって fully-faithfull な包含射 $\mathbf{Cond}(C)_{<\kappa} \subset \mathbf{Cond}(C)$ が存在する.

4 Condenced Set にならない $\underline{X} = hom_{\mathbf{ED}}(\cdot, X)$ の例. [Sch19, Warning 2.14] の解説.

33 と用いると Condenced set を **CHaus** 上の sheaf としても定義できる. つまり Condenced set とは次を満たす関手としても見ることができる.

- $T : \mathbf{CHaus}^{op} \to \mathbf{Set}$ なる関手
- sheaf 条件を満たす. つまり以下を満たす.
  1. $T(\varnothing) = 1$

2. $T(S_1 \sqcup S_2) \cong T(S_1) \times T(S_2)$
3. $S' \to S$ を全射として，下の写像が全単射になる．

$$T(S) \to \{x \in T(S') | p_1^* x = p_2^* x \in T(S' \times_S S')\} =: eq(T(S') \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} T(S' \times_S S'))$$

- ある強極限基数 κ と，$\mathbf{CHaus}_{<\kappa}$ 上の shaef $T_{<\kappa}$ があって，$T = (Lan_K T_\kappa)^\sharp$ とかける．ここで $K : \mathbf{ED}_{<\kappa}{}^{op} \to \mathbf{ED}^{op}$ を包含関手，$\sharp$ を sheafification とする．

これは $\mathbf{CHaus}_{<\kappa}$ 上に grothendieck 位相を入れたものの sheaf の圏と $\mathbf{Cond}_{<\kappa}$ が圏同値であることからわかる．このことを用いると次が言える．

命題 41. [Sch19, Warning 2.14] X を Sierpinski 空間，つまり $0, 1$ に位相 $\{\phi, \{0\}, \{0, 1\}\}$ を入れたものとする．
$hom_{\mathbf{CHaus}}(\cdot, X) : \mathbf{CHaus}^{op} \to \mathbf{Set}$ は condenced set にならない．

$hom_{\mathbf{CHaus}}(\cdot, X)$ は任意の強極限基数 κ について κ-condenced set にはなっている．ただ $hom_{\mathbf{CHaus}}(\cdot, X) = (Lan_K T)^\sharp$ となる κ や $T \in \mathbf{Cond}_{<\kappa}$ が存在しないということになる．(つまり 33 の 3 つ目の条件を満たさない) [8]

Proof. [0]Setup 背理法で証明する．もし condenced set になるならある強極限基数 κ があって任意の $|\widetilde{S}| > \kappa$ となる集合 $\widetilde{S}$ について，

$$hom_{\mathbf{CHaus}}(\widetilde{S}, X) \cong \left(Lan_K hom_{\mathbf{CHaus}_{<\kappa}}(\cdot, X)^\sharp\right)(\widetilde{S})$$

は同型となる．sheafification の性質 37 から任意の $f \in hom_{\mathbf{CHaus}}(\widetilde{S}, X)$ についてある covering $h : \widetilde{S_0} \to S$ があって $f|_{\widetilde{S_0}} \in Lan_K hom_{\mathbf{CHaus}_{<\kappa}}(\widetilde{S_0}, X)$ となる．つまり $f \circ h : \widetilde{S_0} \to X$ はある $S \in \mathbf{CHaus}_{<\kappa}$ を経由する．

そこで $\kappa < \nu$ となる強極限基数をとり次の様に定める．

- $\widetilde{S} := \prod_{i<\kappa+\nu} \{0, 1\} = \{0, 1\}^{\kappa+\nu}$ [9]で $\{0, 1\}$ には離散位相，$\widetilde{S}$ には積位相を入れる．
- $Z := \bigcap_{\kappa \le i < \kappa+\nu} p_i^{-1}(0) = \{0, 1\}^\kappa \times \{0\}^\nu$．ここで $i < \kappa + \nu$ について $p_i : \widetilde{S} \to \{0, 1\}$ を射影とする．直積の定義より $\widetilde{S}$ の閉集合である．
- $f : \widetilde{S} \to X$ を Z の特性関数とする．$\{1\} \subset X$ は X の閉集合なので，これは連続写像である．

[1] Z がたかだか κ 以下個の開集合の intersection で書けることを示す．

背理法の仮定より，全射 $h : \widetilde{S_0} \to S$, $S \in \mathbf{CHaus}_{<\kappa}$ があって，$f \circ h = \pi \circ f_S$ となる．ここで $\widetilde{S_0} \xrightarrow{\pi} S \xrightarrow{f_S} X$ である．

$$\begin{tikzcd} \widetilde{S_0} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "h"'] & S \arrow[d, "f_S"] \\ \widetilde{S} \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

[8] [Sch19, Warning 2.14] にはお気持ちしか書いていないので，勉強会で証明をうめた．Condensed set を $\mathbf{CHaus}$ の上で定義したのはこの命題で用いるためである．

[9] $\kappa + \nu = \nu$ だがあえてこう書いている．

すると

$$\widetilde{S_0} \setminus h^{-1}(Z) = \widetilde{S_0} \setminus \pi^{-1} f_S^{-1}(1) = \pi^{-1} f_S^{-1}(0) = \bigcup_{x \in f_S^{-1}(0)} \pi^{-1}(x)$$

よって $\widetilde{S} \setminus Z = \bigcup_{x \in f_S^{-1}(0)} h(\pi^{-1}(x))$ となるので

$$Z = \bigcap_{x \in f_S^{-1}(0)} h(\pi^{-1}(x))^c$$

である. $h : \widetilde{S_0} \to \widetilde{S}$ は閉写像であることを用いると, $h(\pi^{-1}(x))^c$ は開集合である. $|f_S^{-1}(0)| \leq |S| < \kappa$ より [1] の主張が言えた.

[2] 矛盾を導く [1] より任意の $\alpha < \kappa$ なる順序数について開集合 $U_\alpha \subset \widetilde{S}$ があって $Z = \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$ となる. $\{0\}^{\kappa+\nu} \in Z$ なので $\{0\}^{\kappa+\nu} \in U_\alpha$ である. よって積位相の定義より, 有限個の $j_1, \ldots, j_{N_\alpha}$ と部分集合 $F_{j_k} \subset \{0,1\}$ があって

$$\{0\}^{\kappa+\nu} \in \bigcap_{k=1}^{N_\alpha} p_{j_k}^{-1}(F_{j_k}) \subset U_\alpha$$

となる. α に関して共通部分を取ると

$$\bigcap_{\alpha<\kappa} \bigcap_{k=1}^{N_\alpha} p_{j_k}^{-1}(F_{j_k}) \subset \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha = Z = \{0,1\}^\kappa \times \{0\}^\nu \tag{2}$$

となる. そこで

$$\Lambda := \{ i < \kappa + \nu |\ i = j_k \text{ となる順序数 } \alpha \text{ と } 1 \leq k \leq N_\alpha \text{ が存在する} \}$$

とおく. (2) から $i \notin \lambda$ ならば $p_i(\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha) = \{0,1\}$ より $p_i(Z) = \{0,1\}$ である. よって $i < \kappa$ となる

以上より $\kappa \leq i < \kappa + \nu$ ならば $i \in \Lambda$ である. 特に $\nu \leq |\Lambda|$ となる. しかし

$$\nu \leq |\Lambda| \leq \kappa \cdot |\mathbb{N}| = \kappa$$

であるので矛盾. □

5 Cond と位相空間との対応. [Sch19, Proposition 2.15, Theorem 2.16] の解説.

5.1 $T(*)_{top}$ の定義

補題 42. [Sch19] $T \in \mathbf{Cond}$ について $T(*)_{top}$ という位相空間を次で定義する.

- 底空間を $T(*) \in \mathbf{Set}$ とする.

- 位相を $T = Lan_K T_{<\kappa}$ となる強極限基数 κ を一つとり,

$$\pi : \sqcup_{S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}} \sqcup_{f \in T(S)} S \to T(*)$$

として定義する.

このとき, この位相は κ の取り方によらない.

Proof. [1] 位相の定義について $S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ と $f \in T(S)$ について, $f \in T(S) \cong Nat(\underline{S}, T)$ であるので, $f(*) : \underline{S}(*) = S \to T(*)$ となる[10]

これを用いて $\pi : \sqcup_{S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}} \sqcup_{f \in T(S)} S \to T(*)$ が定める. この π は全射である. なぜなら $x \in T(*)$ について $x : * \to T$ を考えれば, $x(*) : * \to T(*)$ の像は $\{x\}$ である.

[2] 基数の取り方によらないこと. $\kappa < \lambda$ となる強極限基数をとる. $T = Lan_K T_{<\kappa} = Lan_K T_{<\lambda}$ となるので, $T_{<\lambda} = Lan_K T_{<\kappa}$ となる.

$$\pi_\kappa : \sqcup_{S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}} \sqcup_{f \in T_\kappa(S)} S \to T(*)$$

とおきこれによって入れた位相の開集合系を $\mathcal{O}_\kappa$ とする.λ も同様に定める. λ の方が大きいため $\mathcal{O}_\lambda \subset \mathcal{O}_\kappa$ がわかる. 逆側の包含を言えば良い.

$V \in \mathcal{O}_\kappa$ とする. 任意の $\widetilde{S} \in \mathbf{ED}_{<\lambda}$ と $f \in T_\lambda(\widetilde{S})$ をとる.

$$T_\lambda(\widetilde{S}) = Lan_K T_{<\kappa}(\widetilde{S}) = \operatorname{colim}_{\widetilde{S} \to S} T_{<\kappa}(S)$$

であるので, f は κ-small ED set$S$ を経由する $\widetilde{S} \to S \to T(*)$. $S \to T(*)$ の V の逆像は開集合なので, $f^{-1}(V)$ も開集合となる. □

注意 43. $T \to T(*)_{top}$ は functorial でもなければ, 任意の位相空間 X について $\underline{X}(*)_{top}$ は X と同相とも限らない. また condensed set について $hom_{\mathbf{Cond}}(T, \underline{X})$ と $hom_{\mathbf{Top}}(T(*)_{top}, X)$ の adjunction も成り立たない (というか adjunction というものをそもそも定義できない)

系 44. condensed set の射 $f : S \to T$ について $f(*) : S(*)_{top} \to T(*)_{top}$ は連続写像である.

Proof. 基数 κ で $S, T \in \mathbf{Cond}_{<\kappa}$ なるものを取る. $U \subset T(*)_{top}$ を開集合とする. $f(*)^{-1}V$ が $S(*)_{top}$ で開集合であることを示す. つまり任意の $X \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ と $h \in S(X)$ で $h(*) : X \to S$ について $h(*)^{-1}(f(*)^{-1}V)$ が X の開集合であることを示せば良い. これは $f \circ h \in T(X)$ となることから明らかである. □

[10] [Bar22] では $f : S \to T(*)$ を次で定めていた: $x \in S$ は $x : * \to S$ を定めるので, $T(x) : T(S) \to T(*)$ を定め, $f(x) := T(x)(f)$ として定める. これは米田の定理から任意の $S' \in \mathbf{ED}$ について $f_{S'} : hom(S', S) \to T \quad g \mapsto T(g)(f)$ を定めるため同値である.

5.2 用語 (qc, qs, T_1, WH) の解説

5.2.1 qc, qs, T_1

定義 45 (quasi-compact, quasi-separated, T_1)**.** T を condenced set とする.

- T が quasi-compact (qc) とは, 任意の小さな圏 I と関手 $S : I \to \mathbf{Cond}$ で $f_i : S_i \to T$ かつ $\sqcup f_i : \sqcup_{i \in I} S_i \twoheadrightarrow T$ が epi 射になるものについて, ある有限集合 $I' \subset I$ が存在して $\sqcup f_{i'} : \sqcup_{i' \in I'} S_{i'} \twoheadrightarrow T$ が epi 射になること.

- T が quasi-separated (qs) とは, 任意の qc condensed set S_1, S_2 で $S_1 \to T, S_2 \to T$ となるものについて, $S_1 \times_T S_2$ もまた qc となること.

- T が T_1 とは任意の一点からの射が quasi-compact となること. つまり任意の qc condensed set S_1 で $S_1 \to T$ と, 任意の射 $* \to T$ について, $S_1 \times_T *$ もまた qc となること

注意 46. Scholze の lecture ノート [Sch19] では T_1 のことを「任意の一点からの射が quasi-compact」と書いていた. ただ調べても射が quasi-compact の定義が出なかった. (SGA に書いてある?) おそらく stack などでの射の quasi-compact の定義が上のものと同値であるので, 今回は上の意味で T_1 を定義した.

5.2.2 コンパクト生成空間 (CG), 弱ハウスドルフ (WH), CGWH

定義 47. [Str, Definition 1.1 ,1.2] X を位相空間とし, $\mathfrak{B}$ を X の閉集合系とする.

1. $Y \subset X$ が k-closed とは任意のコンパクトハウスドルフ空間 K からの連続写像 $u : K \to X$ について $u^{-1}Y$ が閉集合となるもの.

2. X がコンパクト生成空間 (CG) とは $X = kX$ となる位相空間である. ここで k-closed 集合を $k\mathfrak{B}$ と表し, kX を $(X, k\mathfrak{B})$ という位相空間とする.

3. X が Weakly Hausdorff(WH) とは任意のコンパクトハウスドルフ空間 K からの連続写像 $u : K \to X$ について $u(K)$ が閉集合となるもの

例 48 (WH の例)**.** ハウスドルフならば Weak ハウスドルフ. (ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合より)

Weak ハウスドルフならば, T_1 空間. これは一点集合からの射を考えれば良い.

例 49 (CG の例)**.** 第一可算集合は CG.

例 50 (CGWH の例)**.** 距離空間, locally compact Hausdorff, CW complex などなど

注意 51. CG 空間の圏 **CG** や CGWH の圏 **CGWH** は complete, cocomplete, cartesian closed であることが知られている.

上の例・注意に関しては詳しい説明を AppendixA.2 にまとめておいた.

5.3 [Sch19, Proposition 2.15, Theorem 2.16] の主張

定理 52. [Sch19, Proposition 2.15, Theorem 2.16] X を位相空間, T を condenced set とする

1. X が T_1 空間ならば $\underline{X} := hom_{\mathbf{ED}}(\cdot, X)$ は condenced set になり T_1 である.
2. 逆に T が T_1 ならば $T(*)_{top}$ も T_1 空間になる.
3. $G : X \to \underline{X}$ によって **CHaus** から **qcqsCond** への圏同値を与える. つまり次が成り立つ.
   (a) X がコンパクトハウスドルフならば $\underline{X}$ は qcqs である.
   (b) $G : \mathbf{CHaus} \to \mathbf{qcqsCond}$ は fully faithfull である
   (c) T が qcqs ならば $T \cong \underline{Y}$ となるコンパクトハウスドルフ空間が存在する.
4. X をコンパクト生成空間 (CG) とする. このとき X が weak Hausdorff(WH) であることは $\underline{X}$ が quasi-separated と同値
5. T が quasi-separated ならば $T(*)_{top}$ はコンパクト生成 weak Hausdorff(CGWH) となる.

注意 53.

$$F : \mathbf{Cond} \to \mathbf{T1Top} \quad T \to T(*)_{top}$$

$$G : \mathbf{T1Top} \to \mathbf{Cond} \quad X \to \underline{X} := hom(\cdot, X)$$

とおくと, G は F の右随伴射になる. この時点では fully faithfull などもわからない.
しかしこれを制限した

$$F : \mathbf{qsCond} \to \mathbf{CGWHTop} \quad G : \mathbf{CGWHTop} \to \mathbf{qsCond}$$

についてその counit$\epsilon : FG \to I$ は同型射 $\epsilon_X : FG(X) = \underline{X}(*)_{top} \cong \underline{X}$ であるので, G は fully faithfull である. しかし essentially surjective と限らないので, 圏同値とは限らない

5.4 [Sch19, Proposition 2.15, Theorem 2.16](=定理 52) の証明で用いる事柄

定理 52 の証明において使う事柄をここで証明付きでまとめる.

5.4.1 Cond の monic 射, epi 射

補題 54. [Bar22, Theorem 4.11.2, 4.11.3, 4.11.4]

1. $f : T_1 \to T_2$ を κ-condenced set の射とする. f monic in $\mathbf{Cond}_{<\kappa}$ は任意の $S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ について $f(S) : T_1(S) \hookrightarrow T_2(S)$ が単射となることと同値.
2. $f : T_1 \to T_2$ を κ-condenced set の射とする. f epic in $\mathbf{Cond}_{<\kappa}$ は任意の $S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$

について $f(S) : T_1(S) \twoheadrightarrow T_2(S)$ が全射となることと同値

3. 上の 1, 2 は condenced set でも成り立つ.

4. 左 Kan 拡張 $Lan_K : \mathbf{Cond}_{<\kappa} \to \mathbf{Cond}$ について, $f : X \to Y$ が $f$epic in $\mathbf{Cond}_{<\kappa}$ ならば $Lan_K(f) : Lan_K X \to Lan_K Y$ も epic

5. 4 に関して $Lan_K : \mathbf{Cond}_{<\kappa} \to \mathbf{Cond}_{<\kappa'}$ でも成り立つ.

Proof. [1] の証明　f を monic(左簡約可能) とする. $S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ とし, $s, t \in T_1(S)$ で $f(S)(s) = f(S)(t)$ とする. $(f(S) : T_1(S) \to T_2(S)$ である) すると米田より $s, t : \underline{S} \to T_1$ とみなせ, $f \circ s = f \circ t$ であるので, f が monic より $s = t$ となる.

逆に任意の $S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ について $f(S) : T_1(S) \hookrightarrow T_2(S)$ が単射とする. $s, t : T \to T_1$ かつ,$f \circ s = f \circ t$ ならば, 任意の $S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ について $s(S) = t(S)$ である. よって $s = t$ である (Sheaf で等しいと Presheaf で等しいは同じ. これは Sheafification の随伴性より)

[2] の証明　f を epi とする. $S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ と $b \in T_2(S)$ について, $f(S)(c) = b$ なる c の存在を示す. sheaf の epi の定義からある有限個の $\{h_i : A_i \to S\}_{i=1}^n$ で $S = \cup f_i(A_i)$ となる被覆と $a_i \in T_1(A_i)$ があって,

$$T_2(h_i)(b) = f(A_i)(a_i)$$

となる. $A := A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$, $h : h_1 \sqcup \cdots \sqcup h_n$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in T_1(A)$, 開被覆を $\{h : A \to S\}$ とすると

$$T_2(h)(b) = f(A)(a)$$

となる. よって開被覆は初めから一つの場合に帰着できる.

すると $h : A \twoheadrightarrow S$ は全射かつ $S \in \mathbf{ED}$ から $g : S \to A$ で $h \circ g = id_S$ となる. よって $i = 1, 2$ で $T_i(g) \circ T_i(h) = id_{T_i(S)}$ である. よって以下の図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
T_1(S) \arrow[r, "f(S)"] \arrow[d, "T_1(h)"'] & T_2(S) \arrow[d, "T_2(h)"'] \\
T_1(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "T_1(g)"'] & T_2(A) \arrow[d, "T_2(g)"'] \\
T_1(S) \arrow[r, "f(S)"] & T_2(S)
\end{tikzcd}$$

これより

$$b = T_2(g)T_2(h)(b) = T_2(g)f(A)(a) = f(S)T_1(g)(a)$$

となり $c = T_1(g)(a)$ が欲しかったものである. 逆に関しては [1] と同様である.

[3] の証明　f monic ならば $f(S) : T_1(S) \to T_2(S)$ が単射は同じ証明が回る. 逆も $s, t : T \to T_1$ を考えると, κ を止めた $\mathbf{Cond}_{<\kappa}$ で考えられることと $\mathbf{Cond}_{<\kappa} \subset \mathbf{Cond}$ からわかる.

$f : T_1 \to T_2$ が epi とする. すると $T_i = Lan_K T_{i,\kappa}$ と $f_\kappa : T_{1,\kappa} \to T_{2,\kappa}$ で $f = Lan_K(f_\kappa)$ となるものがある. $Lan_K : \mathbf{Cond}_{<\kappa} \to \mathbf{Cond}$ は fully faithfull なので f_κ も epi となる. よって代入して

全射が言える．逆は presheaf の同型が Sheaf の同型になるので良い．

[4] の証明 $f_\kappa : T_{1,\kappa} \to T_{2,\kappa}$ で epi とすると $\widetilde{S} \in \mathbf{ED}_{<\widetilde{\kappa}}$ について

$$Lan_K(f_\kappa)(\widetilde{S}) : Lan_K T_{1,\kappa}(\widetilde{S}) = \mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S, |S|<\kappa} T_{1,\kappa}(S) \to Lan_K T_{2,\kappa}(\widetilde{S}) = \mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S, |S|<\kappa} T_{2,\kappa}(S)$$

である．今 $f_\kappa$epic より $T_{1,\kappa}(S) \to T_{2,\kappa}(S)$ は全射である．よって $Lan_K(f_\kappa)(\widetilde{S})$ 全射である．[3] から epi である．

[5] の証明 [4] に同じ． □

5.4.2 Cond の直積

35 の有限直積の場合だけよく使うのでここにまとめておく．

補題 55. [Bar22, Lemma 3.6.2] $f : S \to W,\ g : T \to W$ を condenced set の射とする．この時 $U \in \mathbf{Set}^{\mathbf{ED}^{op}}$ を

$$U(X) := S(X) \times_{W(X)} T(X)$$

とおくと 35 より U は condenced set となる．
このとき

$$U(*)_{top} \to S(*) \times_{W(*)} T(*)$$

となる連続な全単射が存在する．
さらに f, g が epi 射であるとき直積の図式

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & T \arrow[d, "g", two heads] \\ S \arrow[r, "f", two heads] & W \end{tikzcd}$$

について W は $p : U \to S, q : U \to T$ のコイコライザーになる．

Proof. 前半の主張に関して 35 により連続写像 $f(*) : S(*) \to W(*)$ $g(*) : T(*) \to W(*)$ についてその直積は

$$X = \{(s,t) \in S(*) \times T(*) | f(*)(s) = g(*)(t)\}$$

で与えられる．今 $p : U \to S, q : U \to T$ とすると，$p(*) : U(*) \to S(*), q(*) : U(*) \to T(*)$ なる連続写像で $f(*) \circ p(*) = g(*) \circ q(*)$ であるので

$$h : U(*)_{top} \to X$$

となる連続写像が与えられる．これは集合としては全単射である．

後半の主張に関して Presheaf としての $p : U \to S, q : U \to T$ のコイコライザーを $S \sqcup_W T$ とする．これが W と同型であることを示す．$S \sqcup_W T$ とは $X \in \mathbf{ED}$ について

$$(S \sqcup_W T)(X) = S(X) \sqcup T(X) / \sim$$

である．ここで同値関係 $\sim$ は $S(X) \times_{W(X)} T(X)$ で生成される同値関係である．もっと詳しく言うと

- $(x,1) \sim (y,2)$ は $x = p(X)(s,t) = s, y = q(X)(s,t) = t$ となる $(s,t) \in S(X) \times_{W(X)} T(X)$ が存在すること．つまり $g(X)(y) = f(X)(x)$ となること．
- $(x,1) \sim (x',1)$ は $f(X)(x) = g(X)(y) = f(X)(x')$ なる $y \in T(X)$ が存在すること．
- $(y,2) \sim (y',2)$ は $g(X)(y) = f(X)(x) = g(X)(y')$ なる $x \in S(X)$ が存在すること．

とする．これは f, g が epi 射なので well-defined である．今

$$\pi(X) : S(X) \sqcup T(X)/\sim \to W \quad \pi : (x,1) \mapsto f(x) \quad \pi(y,2) \mapsto g(y)$$

とすると $\pi(X)$ は well-defined で X について自然である．よって $\pi(X)$ が全単射であることを示せば良いがこれは同値関係のわりかたからすぐにわかる．

よって Presheaf として $W \cong S \sqcup_W T$ である．これの sheafification したものが sheaf としての余極限だったので sheaf としても $W \cong S \sqcup_W T$ である．□

補題 56. [Bar22, Lemma 3.6.2] Condenced set の epi 射は pullback で保たれる

Proof. 35 から Condenced set の直積は Presheaf としての直積である．よって 54 より $X \in \mathbf{ED}$ を代入して全射であることを見れば良くこれは明らかである．□

5.4.3 qc

定理 57. [Bar22, Proposition 4.11.11] condenced set T について 以下は同値.

1. T が qc
2. $X \in \mathbf{ED}$ があって $\underline{X} \to T$ なる epi 射が存在する
3. $X \in \mathbf{CHaus}$ があって $\underline{X} \to T$ なる epi 射が存在する

Proof. $\underline{(1) \Rightarrow (2) \text{ で } T \in \mathbf{Cond}_{<\kappa} \text{ の場合}}$ T は $hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}}(\cdot, X)$ の余極限でかける．(25 参照)．つまり

$$T \cong \mathrm{colim}_{(X,x) \in Ob(1 \downarrow T)} hom(\cdot, X)$$

であった．colimit は coproduct の coequalizar であったので $\sqcup_{i \in I} \underline{X_i} \twoheadrightarrow T$ となる小さな添字圏 I が存在する.(87 参照) よって T は qc であるので

$$\sqcup_{i=1}^n \underline{X_i} \twoheadrightarrow T$$

がいえる．よってあとは

$$\sqcup_{i=1}^n \underline{X_i} \cong \underline{\sqcup_{i=1}^n X_i}$$

が言えれば良い．これには 2 つの示し方がある．

[1] 米田を使う方法. これは任意の Condenced set$F$ について自然な同型

$$\begin{aligned} hom_{\mathbf{Cond}_{<\kappa}}(\underline{X_1 \sqcup X_2}, F) &\cong F(X_1 \sqcup X_2) \\ &\cong F(X_1) \times F(X_2) \\ &\cong hom_{\mathbf{Cond}_{<\kappa}}(\underline{X_1}, F) \times hom_{\mathbf{Cond}_{<\kappa}}(\underline{X_2}, F) \\ &\cong hom_{\mathbf{Cond}_{<\kappa}}(\underline{X_1} \sqcup \underline{X_2}, F) \end{aligned}$$

が存在するため米田の補題の系 (86 参照) から同型が言える.

[2] 地道に示す方法. $S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ について,

$$hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}}(S, X_1) \sqcup hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}}(S, X_2) \to hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}}(S, X_1 \sqcup X_2)$$

が存在する. 単射性は明らか. 全射性は $f \in hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}}(S, X_1 \sqcup X_2)$ について $S_1 := \beta(f^{-1}(X_1)_{dist})$, $S_2 := \beta(f^{-1}(X_2)_{dist})$ とすると $\{S_i \to S\}_{i=1,2}$ が covering となり $f|_{S_1}$ は X_1 を経由する. $f|_{S_2}$ も X_2 を経由するので全射性が言える.

(1) ⇒ (2) で 一般の場合 $T = Lan_K T_{<\kappa}$ となる $T_{<\kappa}$ をとる. すると $\underline{X} \twoheadrightarrow T_{<\kappa}$ が存在する. 54(4) より左 Kan 拡張を取っても epi 性は保たれる. [11]

(2)⇒(1) かつ $T = \underline{X}$ の場合 epi 射 $f : \sqcup T_i \twoheadrightarrow \underline{X}$ とする. $\sqcup T_i$ の構成は presheaf としての余極限 $\sqcup_{Psh} T_i$ の sheafification$(\sqcup_{Psh} T_i)^\sharp$ であった. よって

$$f(X) : (\sqcup T_i)(X) = (\sqcup_{Psh} T_i)^\sharp(X) \to \underline{X}(X) = hom_{\mathbf{ED}}(X, X)$$

は全射である. つまり $id_X \in hom_{\mathbf{ED}}(X, X)$ についてある $s \in (\sqcup T_i)(X)$ があって, $f(X)(s)$ となる. よって 37 からある covering$\{h_k : X_k \to X\}_{k=1}^n$ と $s_k \in (\sqcup_{Psh} T_i)(X_k)$ があって

$$\sharp(X_k)(s_k) = s|_{X_k}$$

となる. $s_k \in (\sqcup_{Psh} T_i)(X_k) = \sqcup_{set} T_i(X_k)$ であるので, 集合の直和の定義から, ある i_k があって $s_k \in T_{i_k}(X_k)$ となる.

$$\begin{tikzcd} T_{i_k}(X) \arrow[r, "f_{i_k}(X)"] \arrow[d, "T_{i_k}(h_k)"'] & \underline{X}(X) \arrow[d, "h_k"] \\ T_{i_k}(X_k) \arrow[r, "f_{i_k}(X_k)"] & \underline{X}(X_k) \end{tikzcd}$$

という図式から $h_k = f_{i_k}(X_k)(s_k)$ であることがわかる.

そこで

$$\widetilde{f} := \sqcup f_i : \widetilde{T} := \sqcup_{k=1}^n T_{i_k} \to \underline{X}$$

を考える. $\widetilde{T}$ は Presheaf としての直和を sheafification したものである. これが sheaf の全射であることを示せば良い.

$S \in \mathbf{ED}$ をとり $g \in \underline{X}(S) = hom_{\mathbf{ED}}(S, X)$ を得る.[12] S_k を $\beta((X_k \times_X S)_{dist})$ とすると $S_k \to S$

[11] $Lan_K \underline{X} = \underline{X}$ は 52(1) より. ここには qc 性は使われていないので循環論法にはなっていない

[12] 必要ならば強極限基数を止めれば良い.

を得る．ある $c_k \in \widetilde{T}(S_k)$ で $\widetilde{f}(S_k)(c_k) = g|_{S_k}$ となるものが存在することを示す．

今図式としては下の様になっている．

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] & X \\ S_k \arrow[u, "b_k"] \arrow[r, "a_k"] & X_k \arrow[u, "h_k"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{X}(X_k) \arrow[r, "\circ a_k"] & \underline{X}(S_k) \\ T_{i_k}(X_k) \arrow[u, "f_{i_k}(X_k)"] \arrow[r, "T_{i_k}(a_k)"] & T_{i_k}(S_k) \arrow[u, "f_{i_k}(S_k)"'] \end{tikzcd}$$

よって $d_k = (T_{i_k}(a_k))(s_k) \in T_{i_k}(X_k)$ おくと

$$g|_{S_k} = g \circ b_k = h_k \circ a_k = (\circ a_k)(f_{i_k}(X_k))(s_k) = (f_{i_k}(S_k))(T_{i_k}(a_k))(s_k) = (f_{i_k}(S_k))(d_k)$$

である．$\sharp : T_k \to \sqcup_{Psh} T_k \to \widetilde{T}$[13]であるのでそこで $c_k := \sharp(S_k)(d_k)$ とおくと $g|_{S_k} = \widetilde{f}(S_k)(c_k)$ となる．

<u>(2)⇒(1) 一般の場合</u> $\{T_i \to T\}_{i \in I}$ かつ epi 射 $\sqcup T_i \twoheadrightarrow T$ とする．$X_i := T_i \times_T X_i$ おく．presheaf として

$$\begin{tikzcd} \sqcup_{Psh} X_i \arrow[r] \arrow[d] & \underline{X} \arrow[d] \\ \sqcup_{Psh} T_i \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

は直積となっている．これは各々 $E \in \mathbf{ED}$ を代入すればわかる．sheafification は有限 lim と交換するので，

$$\begin{tikzcd} \sqcup X_i = (\sqcup_{Psh} X_i)^\sharp \arrow[r] \arrow[d] & \underline{X} \arrow[d, two heads] \\ \sqcup T_i = (\sqcup_{Psh} T_i)^\sharp \arrow[r, two heads] & T \end{tikzcd}$$

も直積となる．$\sqcup T_i \twoheadrightarrow T$ は epi 射なので 56 より $\sqcup X_i \twoheadrightarrow \underline{X}$ も epi 射である．よって $\underline{X}$ は qc なので $\sqcup_{k=1}^{l} X_{i_k} \twoheadrightarrow \underline{X}$ が epi 射になる．よって $\sqcup_{k=1}^{l} T_i \twoheadrightarrow T$ も epi 射になる．これは各々 $E \in \mathbf{ED}$ を代入して集合の全射を見れば良いからである (56 参照.) □

定理 58. [Bar22, Proposition 4.12.3] X をコンパクトハウスドルフ, T を condenced set とする．T が qc で $f : T \hookrightarrow \underline{X}$ なる monic 射があるならば，$T \cong \underline{Z}$ となる閉集合 $Z \subset X$ が存在する．

Proof. T が qc なので $\pi : \underline{E} \twoheadrightarrow T$ なる **ED** がある．そこで $Z := f(*) \circ \pi(*)(E) \subset X$ とおく．Z は閉集合である．

すると $\widetilde{f} : T \to \underline{Z}$ が f から誘導される．$S \in \mathbf{ED}$, $h \in T(S)$ について $\pi(\widetilde{h}) = h$ を取って

$$\widetilde{f}(h) := f(S) \circ \pi(S)(\widetilde{h})$$

とする．これは f が monic なので $f(S)$ が単射となることから $\widetilde{h}$ の取り方によらない．また $\widetilde{f}$ が自

[13] $\sqcup_{Psh} T_k$ は Presheaf としての余積

然であり, sheaf の射になることもわかる. $i : \underline{Z} \to \underline{X}$ を包含写像とすると $i \circ \widetilde{f} = f$ であるこれより次の図式を得る

$$\underline{E} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} T \overset{\widetilde{f}}{\to} \underline{Z} \overset{i}{\hookrightarrow} \underline{X}$$

$\widetilde{f}$ が epi かつ monic を示せば良い.

<u>monic 性</u> $\widetilde{f}(S)(g_1) = \widetilde{f}(S)(g_2)$ ならば $i(S)$ をかまして $f(S)(g_1) = f(S)(g_2)$ を得る. $f(S)$ は単射なので $g_1 = g_2$ となる.

<u>epi 性</u> $S \in \mathbf{ED}$, $k \in \underline{Z}(S) = hom_{\mathbf{Top}}(S, Z)$ とする. $f(*) \circ \pi(*) : E \to Z$ 全射なので, $S \in \mathbf{ED}$ から $E \to S \overset{k}{\to} Z$ と分解する. よってこの $E \to S$ を $T(S)$ に送ったものが全射性を与える.

<u>$\underline{Z} = f(T)$ であること</u> これは [epi] の証明において, $S \in \mathbf{ED}$ について $\underline{Z}(S) = hom_{\mathbf{Top}}(S, Z) = f(S)(T)$ であることがわかる. □

5.4.4 qs

定理 59. [Bar22, Proposition 4.11.12] condenced set T について次は同値.

1. T が qs.
2. $X_1, X_2 \in \mathbf{ED}$ について $\underline{X_i} \to T$ ならば $\underline{X_1} \times_T \underline{X_2} \cong \underline{L}$ となる $L \subset X_1 \times X_2$ 閉集合が存在する.
3. $X_1, X_2 \in \mathbf{ED}$ について $\underline{X_i} \to T$ ならば $\underline{X_1} \times_T \underline{X_2}$ は qc.

Proof. (1) から (3) は明らか. (3) から (1) について $S_1 \to T, S_2 \to T$qc とすると 57 から $X_1, X_2 \in \mathbf{ED}$ と epi 射 $\underline{X_i} \twoheadrightarrow S_i$ が存在する. よって $\underline{X_1} \times_T \underline{X_2} \to S_1 \times_T S_2$ を得るが, 56 と 54(2) よりこれは epi 射になる. (各々 $S \in \mathbf{ED}$ を代入して全射であることを示せば良い. がこれは直積が明示的に作れているので明らか.) よって (2) の条件と 57 から $W \in \mathbf{ED}$ と epi 射 $\underline{W} \to S_1 \times_T S_2$ が作れて qc となる.

(2) から (3) は 57 より. (3) から (2) について包含写像 $i : \underline{X_1} \times_T \underline{X_2} \hookrightarrow \underline{X_1} \times \underline{X_2} = \underline{X_1 \times X_2}$ について, 58 を適応すれば良い. □

補題 60. condensed set の monic 射 $f : S \hookrightarrow T$ について, T が qs ならば S も qs.

Proof. $S_1 \to S, S_2 \to S$ について

$$S_1 \times_S S_2 \cong S_1 \times_T S_2$$

であることが 35 からわかるため, 欲しい結果が得られる. □

5.4.5 コンパクトハウスドルフ空間

補題 61. X コンパクトハウスドルフ空間 $\sim$ を同値関係とし $L = \{(x, y) | X \sim y\}$ とする. $L \subset X \times X$ が閉集合ならば $X/\sim$ はコンパクトハウスドルフである

Proof. $X/\sim$ がハウスドルフであることを示せば良い．$\tilde{x},\tilde{y} \in X/\sim$ で $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ とする．$\pi(x) = \tilde{x}, \pi(y) = \tilde{y}$ とすると $x \not\sim y$ である．よって $(x,y) \notin R$ より R は閉集合であるので, $x \in U_x$m $y \in U_y$ で $U_x \times U_y \subset X \times X \setminus R$ と取れる．これより $\pi(U_x)$ と $\pi(U_y)$ が $\tilde{x}$ と $\tilde{y}$ を分離する開集合を与える． □

補題 62. I small cofiltered category. [a] $F : I \to$ **Chaus** 関手に関して $\lim_I F(i)$ が空ならば, ある $i \in I$ があって $F(i)$ も空である

[a] cofiltered とは filtered category の opposite 版である．filtered category は cocone を持ち colim に対応, cofiltered category は cone を持ち lim に対応する．

Proof. 対偶を示す．任意の $i \in I$ について $x_i \in Fi$ とする, $i \in I$ について

$$L_i := \{(z_j) \in \prod_{j \in I} Fi | z_i = x_i, h : i \to k \text{ について } F(h)(z_i) = z_k\}$$

(自分より小さいもののみを制御する．) すると L_i は closed であり, 有限交差性を持つ．なぜなら $i_1, \ldots, i_k$ について cofiltered からある j があって $j \to i_1, j \to i_2, \ldots, j \to i_k$ となるものがあるので, $x_j \in L_{i_1} \cap \cdots \cap L_{i_k}$ となるからである．よってチコノフの定理より $\prod_{j \in I} Fi$ はコンパクトなので $\cap_{i \in I} L_I$ は空ではない．そしてその元は $\lim_I F(i)$ の元でもある． □

5.4.6 弱ハウスドルフ空間 (WH)

補題 63. [Str, Lemma 1.3] X を WH とする W compact Hausdorff$\phi : W \to X$ 連続のとき $\phi(W)$ はコンパクトハウスドルフ

Proof. $\phi(W)$ がハウスドルフを示せば良い．$x, y \in \phi(W)$ かつ $x \neq y$ とする．コンパクトハウスドルフ空間は T_4 なので

$$\phi^{-1}(x) \subset U \quad \phi^{-1}(y) \subset V \quad U \subset V = \varnothing$$

となる W の開集合 U, V が取れる．$\phi(U^c)$ は閉集合で $(\phi(W) \setminus \phi(U^c)) \cap (\phi(W) \setminus \phi(V^c)) = \varnothing$ であり

$$x \in (\phi(W) \setminus \phi(U^c)) \quad y \in (\phi(W) \setminus \phi(V^c))$$

であるので上の二つの開集合が x, y を分離する． □

補題 64. [Str, Lemma 3.3] $X : I \to$ **CGWH** 関手 I small filtered category さらに $f : i \to j$ について $Xf : X_i \to X_j$ は連続な単射で $Xf(X_i) \subset X_j$ は X_j で閉集合であるとする．この時 $\mathrm{colim}_{i \in I} X_i$ は CGWH

証明は非常に長くなるので AppendixA.2.3 にまとめておいた．

5.5 [Sch19, Proposition 2.15, Theorem 2.16](=定理 52) (1) と (2) の証明

Proof of Theorem 52 (1). X を T_1 空間とする．$|X| < cf(\kappa) \leq \kappa$ となる強極限基数を固定する.(これは 9 より存在する.) $\underline{X} = hom_{\mathbf{ED}}(\cdot, X)$ が Condenced set になることを示せば良い．つまり任意の $\kappa < \widetilde{\kappa}$ となる強極限基数と $\widetilde{S} \in \mathbf{ED}_{<\widetilde{\kappa}}$ について

$$\underline{X}(\widetilde{S}) = hom_{\mathbf{ED}}(\widetilde{S}, X) \cong \mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S, |S|<\kappa} hom_{\mathbf{ED}}(S, X)$$

を示せば良い.

集合の余極限の定義から

$$\mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S, S\in\mathbf{ED}_\kappa} hom(S, X) = \{(f_S, S) : f_S : S \to X, \pi_S : \widetilde{S} \to S, S \in \mathbf{ED}_\kappa\}/\sim$$

である．$\{(f_S, S) : f_S : S \to X, \pi_S : \widetilde{S} \to S, S \in \mathbf{ED}_\kappa\}$ は命題 30 により $cf(\kappa)$-filtered category になる．ここで $(f_{S_1}, S_1) \sim (f_{S_2}, S_2)$ とはある $f_S : S \to X, \pi_S : \widetilde{S} \to S, S \in \mathbf{ED}_\kappa$ があって, 次が可換になることとなる.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{S} \arrow[r, "\pi_S"] \arrow[rr, bend left, "\pi_{S_1}"] \arrow[dr, "\pi_{S_2}"'] & S \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "f_S"] & S_1 \arrow[d, "f_{S_1}"] \\
 & S_2 \arrow[r, "f_{S_2}"'] & X
\end{tikzcd}$$

自然な写像

$$\Phi : \mathrm{colim}_{\widetilde{S}\to S, |S|<\kappa} hom(S, X) \to hom(\widetilde{S}, X) \quad \Phi(f_S, S) := f_S \circ \pi_S \in hom(\widetilde{S}, X) \tag{3}$$

が存在し $\sim$ の取り方によらず well definied である．これが全単射であることを示す.

<u>[1] Φ は単射 (ここに T_1 は必要なし)</u>

$\Phi(f_{S_1}, S_1) = \Phi(f_{S_2}, S_2)$ とする．まず $S = S_1 = S_2$ として良いことを示す．これは $S = \beta((S_1 \times S_2)_{dist})$ とすると次の図式を得る

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{S} \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left, "\pi_{S_1}"] \arrow[drr, "\pi_{S_2}"'] & S = \beta((S_1 \times S_2)_{dist}) \arrow[r] \arrow[dr, "g_2"] & S_1 \times S_2 \arrow[r] \arrow[d] & S_1 \arrow[d, "f_{S_1}"] \\
 & & S_2 \arrow[r, "f_{S_2}"'] & X
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{S} \in \mathbf{ED}_{<\widetilde{\kappa}}$ であったので, $\widetilde{S} \to S$ を誘導する．$(S_2, f_2) \sim (S, g_2)$ であるので $S = S_1 = S_2$ として良い.

$f_i := f_{S_i}$ とかき $\Phi(f_1, S) = \Phi(f_2, S)$ とする．つまり $f_1 \circ \pi = f_2 \circ \pi : \widetilde{S} \to X$ とする.

$S' := \beta((Im\pi_{S'})_{dist})$ とおくと次の図式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{S} \arrow[r, "\pi_{S'}", "\pi_S"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, two heads] & S \arrow[r, bend left=10, two heads, "f_1"] \arrow[r, bend right=10, two heads, "f_2"'] & X \\
S' := \beta((Im\pi_S)_{dist}) \arrow[r, two heads] & (Im\pi_{S'}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

$\widetilde{S} \in \mathbf{ED}_{<\widetilde{\kappa}}$ であったので, $\pi_{S'} : \widetilde{S} \to S'$ を誘導する. そこで $h : S' \to S$ とすると $(f_1, S) \sim (f_1 \circ h, S')$ かつ $(f_2, S) \sim (f_2 \circ h, S')$ となる. あとは $f_1 \circ h = f_2 \circ h$ を示せば良いが, これは $Im\pi_S$ を経由するため明らかである.

[2] Φ は全射 (ここに T_1 が必要)

以下 $f : \widetilde{S} \to X$ とする. 段階を分けて証明する.

[2-1] $x, y \in X$ かつ $x \neq y$ ならば, ある $S_{x,y} \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ と $\widetilde{S} \to S_{x,y}$ が存在して

$$F_{x,y} : \widetilde{S} \times_{S_{x,y}} \widetilde{S} \longrightarrow \widetilde{S} \times_{S_{x,y}} \widetilde{S} \xrightarrow{f \times f} X \times X$$

について $(x, y) \notin ImF_{x,y}$ となることを示す.

まず $(f_S, S) \in \{(f_S, S) : f_S : S \to X, \pi_S : \widetilde{S} \to S, S \in \mathbf{ED}_\kappa\}$ について

$$\lim_{(f_S,S):f_S:S\to X,\pi_S:\widetilde{S}\to S,S\in\mathbf{ED}_\kappa} \widetilde{S} \times_S \widetilde{S} \cong \widetilde{S}$$

である. なぜならば

$$\widetilde{S} \times_S \widetilde{S} = \{(z, w) \in \widetilde{S} \times \widetilde{S} | \pi_S(z) = \pi_S(w)\} \subset \widetilde{S} \times \widetilde{S}$$

であるので,

$$\lim_{(f_S,S):f_S:S\to X,\pi_S:\widetilde{S}\to S,S\in\mathbf{ED}_\kappa} = \cup_{(f_S,S):f_S:S\to X,\pi_S:\widetilde{S}\to S,S\in\mathbf{ED}_\kappa} \widetilde{S} \times_S \widetilde{S} \subset \widetilde{S} \times \widetilde{S}$$

となる. そこで $\widetilde{S} \to \lim \widetilde{S} \times_S \widetilde{S}$ を $x \mapsto (x, x)$ として定義する. これは全単射である.

- 単射性は $\widetilde{S} \times \widetilde{S}$ の中の元なので明らか.
- 全射性に関しては, $(z, w) \in \lim_{(f_S,S):f_S:S\to X,\pi_S:\widetilde{S}\to S,S\in\mathbf{ED}_\kappa}$ ととる. もし $z \neq w$ ならば, $\widetilde{S}$ は profinite set なので $\widetilde{S} = \lim F_l$ と discrete set の極限としてかけることより, ある $\phi : \widetilde{S} \to F$ があって $\phi(z) \neq \phi(w)$ となる. よって $(z, w) \neq \widetilde{S} \times_F \widetilde{S}$ となり矛盾. よって $z = w$ とかける.

以上より $\widetilde{S} \cong \lim \widetilde{S} \times_S \widetilde{S}$ である.

さて,

$$F_S : \widetilde{S} \times_S \widetilde{S} \to \widetilde{S} \times \widetilde{S} \to X \times X \quad (z, w) \to (f(z), f(w))$$

とおく. X が T_1 なので(x, y) は closed. よって $F_S^{-1}(x, y)$ も $\widetilde{S} \times \widetilde{S}$ 内で closed なのでコンパクト

ハウスドルフである．$\lim_{\widetilde{S}\to S}\widetilde{S}\times_S\widetilde{S}\cong\widetilde{S}$ により

$$\lim_{\widetilde{S}\to S} F_S^{-1}(x,y)=\varnothing$$

である．よって補題 62 よりある S があって $F_S^{-1}(x,y)$ も空集合になる．

以上より $S_{x,y}:=S$ とおくと，$F_{S_{x,y}}^{-1}(x,y)$ が空のため，$(x,y)\notin Im(F_{S_{x,y}})$ である．

[2-2] ある $S_0\in\mathbf{ED}_{<\kappa}$ があって

$$\widetilde{S}\times_{S_0}\widetilde{S}\underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightarrow}}\widetilde{S}\xrightarrow{f}X$$

とするとき $f\circ p_1=f\circ p_2$ となることを示す．ここで p_i は第 i 射影となる．

S_0 を $\prod_{(x,y)\in X\times X, X\neq y}S_{x,y}$ に離散位相を入れた Stone Cech コンパクト化とする．すると $|S_0|<\kappa$ である．なぜならば $|X\times X|\leq|X|<cf(\kappa)$ であるので，$\mu:=\sup|S_{x,y}|<\kappa$ である．[14]よって命題 8 から

$$|\prod_{(x,y)\in X\times X, X\neq y}S_{x,y}|\leq\mu^{|X\times X|}\leq\mu^{|X|}\leq(2^{\mu})^{|X|}=2^{\mu|X|}=2^{\max\{\mu,|X|\}}<\kappa$$

である．よって $S_0\in\mathbf{ED}_{<\kappa}$ である．

$S\in\mathbf{ED}_{<\kappa}$ であるので $\pi_{S_0}:S\to S_0$ が誘導される．これが欲しいものであることを示す．それには「$\pi_S(z)=\pi_S(w)$ ならば $f(z)=f(w)$」を示せば良い．

もし $\pi_S(z)=\pi_S(w)$ かつ $f(z)\neq f(w)$ なる元があったとする．すると $x=f(z), y=f(w)$ とおけば以下の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{S}\times_{S_0}\widetilde{S} \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & X\times X \arrow[d, equal] \\
\widetilde{S}\times_{S_{x,y}}\widetilde{S} \arrow[r, "F_{x,y}"] & X\times X
\end{tikzcd}$$

これは [2-1] の $(x,y)\notin ImF_{x,y}$ であったことに矛盾する．

[2-3] 結論 状況としては，$f:\widetilde{S}\to X$ について，ある $S_0\in\mathbf{ED}_{<\kappa}$ があって

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{S} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{S_0}"'] & X \\
S_0 \arrow[ur, dashed, "f_{S_0}"] &
\end{tikzcd}$$

となる．[2-2] から $\pi_{S_0}(z)=\pi_{S_0}(w)$ ならば $f(z)=f(w)$ が言えている．よって商写像の性質から $f_{S_0}:S_0\to X$ を誘導する．よって $f=f_{S_0}\circ\pi_{S_0}=\Phi(f_{S_0},S_0)$ あり全射性が言えた．

[3] $\underline{X}$ が T_1 になること. qc condenced set$S\to\underline{X}$ と $*\to\underline{X}$ について $S\times_X *$ が qc であること示す．

[14] もし $\sup|S_{x,y}|\geq\kappa$ ならば，$X\times X\to\kappa$ を $(x,y)\mapsto|S_{x,y}|$ と定義すれば共終部分集合が取れてしまい正則性に矛盾

[3-1] $Y \in \mathbf{ED}$ で $S = \underline{Y}$ となる場合　適宜基数を取り替えて $Y \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ として良い. $x : * \to \underline{X} = hom_{\mathbf{ED}}(\cdot, X)$ とする. $hom_{\mathbf{Cond}}(*, \underline{X}) \cong \underline{X}(*) = X$ であることに注意すれば, これは $x \in X$ をとることに対応する.

$Q = Y \times_X \{x\}$ とすると次の図式を得る.

$$\begin{tikzcd} Q = Y \times_X \{x\} \arrow[r] \arrow[d] & \{x\} \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

X は T_1 なので, $\{x\}$ は閉集合であり. $Q = Y \times_X \{x\} = f^{-1}(x) \subset Y$ は閉集合である. よって Q はコンパクトハウスドルフである. $G : X \mapsto \underline{X} = hom(\cdot, X)$ は $\mathbf{Top}_{<\kappa} \to \mathbf{Cond}_{<\kappa}$ への右随伴射であるので, 直積を交換する. よって $\underline{Q} = \underline{Y} \times_{\underline{X}} *$ であり, 57 から qc となる.

[3-2] S が一般の場合. S が qc ならば, 57 よりある $Y \in \mathbf{ED}$ からの epi 射 $\underline{Y} \twoheadrightarrow S$ が存在する. よって

$$\begin{tikzcd} \underline{Y} \times_{\underline{X}} * \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S \times_{\underline{X}} * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ \underline{Y} \arrow[r, two heads] & S \arrow[r] & \underline{X} \end{tikzcd}$$

という図式が存在する. 補題 56 から $\underline{Y} \times_{\underline{X}} * \to S \times_{\underline{X}} *$ は epi 射であるので, 57 により $S \times_{\underline{X}} *$ も qc となる. $\square$

Proof of Theorem 52 (2). T を T_1 condenced set とする. $T(*)_{top}$ が T_1 空間であることを示す. $x \in T(*)_{top}$ をとり $\{x\}$ が閉集合であることを示せば良い. $T(*)_{top}$ の位相の定義から, ある強極限基数 κ があって任意の $S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ と $f \in T(S) = hom_{\mathbf{Cond}_{<\kappa}}(\underline{S}, T)$ について $f(*)^{-1}(x)$ が S 上で閉であることを示せば良い .

Condenced set の圏に small limit は存在するので, $x : * \to T$ とみなし, $U = \underline{S} \times_T *$ とする.

$$\begin{tikzcd} U = \underline{S} \times_T * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d, "x"'] \\ \underline{S} \arrow[r, "f"] & T \end{tikzcd}$$

T は T_1 なので, U は qc である. 57 より $W \in \mathbf{ED}$ と epi 射 $\underline{W} \to U$ が存在する. よって 56 から

$$W = \underline{W}(*)_{top} \to U(*)_{top} \to S \times_{T(*)_{top}} * = f^{-1}(x)$$

となる連続な全射が存在する. W コンパクトより $f^{-1}(x)$ もコンパクト. S はコンパクトハウスドルフより $f^{-1}(x)$ は閉集合である. $\square$

5.6 [Sch19, Proposition 2.15, Theorem 2.16](=定理 52)(3) の証明

Proof of Theorem 52 (3). [1] (a) の証明 X をコンパクトハウスドルフとする．$\underline{X}$ は 57 から qc である．また $Y_i \in \mathbf{ED}$ について[15] $\underline{Y_i} \to \underline{X}$ とすると $G : X \mapsto \underline{X}$ は右随伴射なので limit を保つので

$$\underline{Y_1} \times_{\underline{X}} \underline{Y_2} \cong \underline{Y_1 \times_{X_1} Y_2}$$

であり $Y_1 \times_{X_1} Y_2$ はコンパクトハウスドルフより $\underline{Y_1} \times_{\underline{X}} \underline{Y_2}$ は qc である．よって 59 から qs である．

[2] (b) の証明示すことは $G : \mathbf{CHaus} \to \mathbf{qcqsCond}$, $X \to \underline{X}$ と $X, Y \in \mathbf{CHaus}$ について

$$hom_{\mathbf{CHaus}}(X, Y) \cong hom_{\mathbf{qcqsCond}}(\underline{X}, \underline{Y})$$

が全単射であることである．これは $X, Y \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ を止めれば

$$hom_{\mathbf{CHaus}}(X, Y) \cong hom_{\mathbf{CHaus}_{<\kappa}}(X, Y) \cong hom_{\mathbf{Cond}_{<\kappa}}(\underline{X}, \underline{Y}) \cong hom_{\mathbf{Cond}}(\underline{X}, \underline{Y})$$

よりわかる．[16]

[3] (c) の証明 G が essentially surjective を示す．

T は qc なので $X \in \mathbf{ED}$ で epi 射 $f : \underline{X} \to T$ がある．そして T は qs なので 59 により $\underline{X} \times_T \underline{X} \cong \underline{L}$ となる閉集合 $L \subset X \times X$ が存在する．

これより位相空間の同型

$$L \cong X(*) \times_{T(*)} X(*) = \{(x, y) \in X \times X | f(*)(x) = f(*)(y)\} \subset X \times X$$

が存在する．$X(*) \times_{T(*)} X(*)$ はコンパクトなので $X \times X$ の中で閉集合である．以下 $L = \{(x, y) \in X \times X | f(*)(x) = f(*)(y)\}$ とみなす．

X に同値関係を

$$x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in L$$

として入れる．L の上の表示から同値関係になる．L は閉集合なので 61 から $X/\sim$ はコンパクトハウスドルフである．

よって次の二つの図式を得る．

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, two heads, "\pi"] & X/\sim \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{L} \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & \underline{X} \arrow[d, two heads, "f"] \\ \underline{X} \arrow[r, two heads, "f"'] & T \end{tikzcd}$$

左の図式はコイコライザーである．右の図式は 56 から直積でもありコイコライザーでもある．よって $\underline{p_1}, \underline{p_2} : \underline{L} \to \underline{X}$ のコイコライザーが $\underline{X/\sim}$ であることを示せば良い．[17]

まず Presheaf として $\underline{p_1}, \underline{p_2} : \underline{L} \to \underline{X}$ のコイコライザー V が $\underline{X/\sim}$ であることを示す．これは

---

[15] 適宜基数 κ を止めて考える．以下同様．

[16] もしくはこんなことをしなくても，単射は $\underline{X} \to \underline{Y}$ の射に $*$ 入れれば明らか．全射は $Cond_{<\kappa} \subset Cond$ なので κ 制限してよく米田の定理からわかる．

[17] $X \mapsto \underline{X}$ は右随伴射なので colim を保つとは限らず，この様なまどろっこしい証明になる．

$S \in \mathbf{ED}$ について

$$V(S) = hom(S, \underline{X}) \sqcup hom(S, \underline{X})/\sim$$

$(h_1, 1) \sim (h_2, 2)$ は $h \in hom(S, L)$ で $h_i = p_i \circ h$ となるものが存在することと同値とする.[18] $h = (h_1, h_2)$ とかけるので任意の $s \in S$ について $f(*)(h_1(s)) = f(*)(h_2(s))$ となることと同値である.

$$V(S) \to hom(S, X/\sim) \quad (h_1, 1) \mapsto \pi \circ h_1 \quad (h_2, 2) \mapsto \pi \circ h_2$$

とすると, これは Well-defined である. 全射性は $S \in \mathbf{ED}$ より, 単射性は $\pi \circ h_1 = pi \circ h_2$ ならば $s \in S$ について $f(*)(h_1(s)) = f(*)(h_2(s))$ となるのでわかる.

以上より Presheaf として $\underline{p_1}, \underline{p_2} : \underline{L} \to \underline{X}$ のコイコライザーは $\underline{X/\sim}$ である. それを sheafification したものが $\underline{p_1}, \underline{p_2} : \underline{L} \to \underline{X}$ の sheaf としてのコイコライザーであったので, $\underline{X/\sim}$ がそれに当たる.

以上よりコイコライザーは唯一なので $T \cong \underline{X/\sim}$ を得る. (ちなみに canonical な写像は $\underline{f(*)} : \underline{X/\sim} \to T$ である.)

□

5.7 [Sch19, Proposition 2.15, Theorem 2.16](=定理 52)(4) と (5) の証明

Proof of Theorem 52 (4). X をコンパクト生成 weak Hausdorf(CGWH) とする. qs 性を示す. 59 から $Y_i \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ かつ $\underline{Y_i} \to \underline{X}$ となる $i = 1, 2$ について, $\underline{Y_1} \times_{\underline{X}} \underline{Y_2}$ が qc であることを示せば良い.

$G : X \mapsto \underline{X}$ は右随伴で極限と可換なので, 直積とも可換する. よって $\underline{Y_1 \times_X Y_2} \cong \underline{Y_1} \times_{\underline{X}} \underline{Y_2}$ である.

ここで $Y_1 \times_X Y_2$ がコンパクトハウスドルフであることを示す. $f_i : Y_i \to X$ を連続写像とする. $T := (f_1 \sqcup f_2)(Y_1 \sqcup Y_2)$ とすると 63 から T はコンパクトハウスドルフである. そして $T = Im(f_1) \cup Im(f_2)$ である. よって

$$Y_1 \times_X Y_2 = Y_1 \times_T Y_2$$

となるので, $Y_1 \times_X Y_2$ はコンパクトハウスドルフである

以上より 57 から $\underline{Y_1 \times_X Y_2}$ は qs になり, $\underline{X}$ は qs となる.

後半の主張「$\underline{X}$qs ならば XWH」については (5) から従う. ここで $\underline{X}$ が qs ならば X は T_1 なので $\underline{X}(*)_{top}$ は X と同相になる.[19]

□

Proof of Theorem 52 (5). [1] T を $\underline{X}$ の余極限でかく. T を qs condences set とする. ある強極限基数 κ をとって $T : \mathbf{ED}_{<\kappa}^{op} \to \mathbf{Set}$ として良いすると 25 から T は $\underline{X}$ の余極限でかける.

この構成方法を詳しく見る. $J = 1 \downarrow T$ とする. これは次で定められる圏である.

- object $(X, x) \in \mathbf{ED}_{<\kappa}^{op} \times T(X)$ ($x : 1 \to TX$ を $x \in T(X)$ と見る)
- Morphsism $h : (X, x) \to (X', x') \in hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}^{op}}(X, X')$ について, $h : X' \to X$ かつ $T(h)(x) = x'$ とする. (これは $T(h) : T(X) \to T(X')$ があるから well defined である.)

[18] $(h_1, 1) \sim (h_2, 1)$ は $(h_1, 1) \sim (h', 2) \sim (h_2, 1)$ なる h' が存在することとする. が今回は $(h_1, 1) \sim (h_1, 2)$ が言えている.

[19] つまり $\kappa - cg$ と cg の位相が同じになり基数 κ に依存しなくなる.

反変関手 $M : J^{op} \to \mathbf{Set}^{\mathbf{ED}^{op}_{<\kappa}}$ を

- object $(X, x) \mapsto hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}}(\cdot, X)$
- Morpshism $h : (X, x) \to (X', x')$in J^{op} について, $h : X' \to X$in $\mathbf{ED}^{op}_{<\kappa}$ より, $h : X \to X'$ なる連続写像があるので $h\circ : hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}}(\cdot, X) \to hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}}(\cdot, X')$

として定める.[20] すると T は M の余極限

$$T \cong \mathrm{colim}_{M:(1\downarrow T)^{op}\to\mathbf{Set}^{\mathbf{ED}^{op}_{<\kappa}}} M(X, x) = \mathrm{colim}_{M:(1\downarrow T)^{op}\to\mathbf{Set}^{op}_{<\kappa}} hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}}(\cdot, X)$$

である.

[2] T を $\underline{X} \subset T$ となるものの余極限でかく

米田から $x \in T(X) \cong Nat(\underline{X}, T)$ とみなせる. これは $S \in \mathbf{ED}_{<\kappa}$ について $hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}}(S, X) \to T(S)$ を $f \mapsto f(x)$ で定める自然変換である.

$T_{X,x} := Im(x) \subset T$ おく. T は qs なので, 60 から $T_{X,x}$ も qs. $x : \underline{X} \twoheadrightarrow T_{X,x}$ より qc である. よって 52 (3) から, $T_{X,x} \cong \underline{S_{X,x}}$ となるコンパクトハウスドルフ空間 $S_{X,x}$ が存在する. $(1 \downarrow T)^{op}$ 内の射について $h : (X, x) \to (X', x')$ 次の可換図式が成り立つ.

$$\begin{tikzcd}
\underline{S_{X,x}} & \cong & T_{X,x} = Im(x) & & \underline{X} = hom(\cdot, X) \arrow[ll, "x"'] \arrow[d, "h\circ"] & (X, x) \arrow[d, "h"] \\
 & & \cap & & & \\
\underline{S_{X',x'}} & \cong & T_{X',x'} = Im(') & & \underline{X'} = hom(\cdot, X') \arrow[ll, "x'"] & (X', x')
\end{tikzcd}$$

$$\mathbf{Cond}_{<\kappa} \qquad\qquad\qquad\qquad (1 \downarrow T)^{op}$$

ここで $h : T_{X,x} \subset T_{X',x'}$ という monic 射が存在するのは, 自然変換として $x = x \circ h$ が成り立つからである.

$f_{(X,x)\to(X',x')} : S_{X,x} \to S_{X',x'}$ という連続な単射を得る. そして $f_{(X,x)\to(X',x')}(S_{X,x})$ は閉集合である. また $h_1, h_2 : (X, x) \to (X', x')$ ならば $h_1 = h_2 : T_{X,x} \subset T_{X',x'}$ である.[21] 特に $h_1 = h_2 : S_{X,x} \to S_{X',x'}$ である.

$$T \cong \mathrm{colim}_{M:(1\downarrow T)^{op}\to\mathbf{Set}^{op}_{<\kappa}} hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}}(\cdot, X) \cong \mathrm{colim}_{M:(1\downarrow T)^{op}\to\mathbf{Set}^{op}_{<\kappa}} hom_{\mathbf{ED}_{<\kappa}} T_{X,x}$$

ある. よって $T_{X,x} = \underline{X} \subset T$ の余極限で T を表すことができた.

[3] $T(*)$ をコンパクトハウスドルフ空間の余極限で表す.

$F : T \mapsto T(*)_{top}$ は左随伴で colim と可換するので

$$T(*)_{top} \cong \mathrm{colim}_{S:(1\downarrow T)^{op}\to\mathbf{Top}} S_{X,x}$$

となる. ここでこの余極限は次の余極限である

[20] なぜ"in J^{op}"と書いているかというと方向がわからなくなるからである.
[21] 包含写像を当てているので

- $(1 \downarrow T)$ の object(X, x) について, $S(X, x) := S_{X,x}$
- $(1 \downarrow T)^{op}$ の morphism $h : (X, x) \to (X', x')$ について連続単射 $h : S_{X,x} = \underline{S_{X,x}}(*) \to S_{X',x'} = \underline{S_{X',x'}}(*)$ を対応させる.

$(1 \downarrow T)^{op}$ が filtered category になることを示す. $(1 \downarrow T)^{op}$ で $h : (X, x) \to (X', x')$ とは $h : X \to X'$ 連続写像と $T(h) : T(X') \to T(X)$ について $T(h)x' = x$ となる組であることに注意しつつフィルター圏の定義を確かめる.

- $(X_1, x_1), (X_2, x_2) \in Ob((1 \downarrow T)^{op})$ について,

$$(X_1 \sqcup X_2, (x_1, x_2)) \in \mathbf{ED}_{<\kappa} \times T(X_1 \sqcup X_2) \cong \mathbf{ED}_{<\kappa} \times T(X_1) \times T(X_2)$$

  とする. $f_i : X_i \to X_1 \sqcup X_2$ とすれば, これは連続写像で, $T(f_i) : T(X_1 \sqcup X_2) \to T(X_i)$ は射影であるので, $f_i : (X_i, x_i) \to (X_1 \sqcup X_2, (x_1, x_2))$ を得る.

- $f, g : (X_1, x_1) \to (X_2, x_2)$ ならば $f = g : S_{X_1,x_1} \to S_{X_2,x_2}$ である.

以上より $T(*)$ はコンパクトハウスドルフ空間の包含写像によるフィルター余極限でかけるので, 63 から $T(*)_{top} = \mathrm{colim}_{S:(1\downarrow T)^{op} \to \mathbf{Top}} S_{X,x}$ は weak Hausdorff となる.

□

A　発表で言及できなかった内容のまとめ

今回の発表で言及できなかった内容を下にまとめておく.

A.1　整列集合

定義 65. A を集合とする. 関係 $\leq$ が条件

1. (反射法則) $x \in A$, $x \leq x$
2. (反対称法則) $x, y \in A$, $x \leq x$ and $y \leq x \Rightarrow x = y$
3. (推移法則) $x, y, z \in A$, $x \leq y$ and $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

を満たすとき, $\leq$ を (反射型) 順序という. $x < y$ を $x \neq y$ かつ $x \leq y$ で定義する.
さらに $(A, <)$ が整列集合とは次を満たすこととする.

1. $(A, <)$ が全順序. つまり任意の $x, y \in A$ について $x < y$ か $y < x$ のどちらかが成立する.
2. $B \subset A$ なる部分"集合"について, 最小元が存在する.

A.2　位相空間 CGWH について

定義 66. [Str, Definition 1.1 ,1.2] X を位相空間とし, $\mathfrak{B}$ を X の閉集合系とする.

1. $Y \subset X$ が k-closed とは任意のコンパクトハウスドルフ空間 K からの連続写像 $u : K \to X$ について $u^{-1}Y$ が閉集合となるもの.
2. k-closed 集合を $k\mathfrak{B}$ と表す. $\mathfrak{B} \subset k\mathfrak{B}$ である
3. kX を $(X, k\mathfrak{B})$ という位相空間とする.
4. X がコンパクト生成空間 (CG) とは $X = kX$ となる位相空間である.
5. X が Weakly Hausdorff(WH) とは任意のコンパクトハウスドルフ空間 K からの連続写像 $u : K \to X$ について $u(K)$ が閉集合となるもの

A.2.1　CGWH の例

定義 67. [Str] X 位相空間, $Y \subset X$ 部分集合とする. Y が sequentially closed であるとは任意の $y_n \in Y$ かつ $y_n \to x$ となるならば $x \in Y$ となる.
X が sequential space とは sequentially closed 部分集合が閉集合となること.

注意 68. sequentially closed ならば T_1 である. これは $y_n = x$ という点列を考える

第一可算集合 (任意の点が可算開近傍系を持つ) ならば sequentially closed なぜならば, Z を sequentially closed 集合としたら, $x \in \overline{Z}$ について $y_n \to x$ となる Z の点列で収束するものが可算開近傍系から作れるからである.

特に距離空間は sequentially closed

命題 69. [Str, Prop 1.6] sequentially space は CG

Proof. $Y \subset X$ を k-closed 集合とする. Y が sequentially closed であることを示す. $y_n \in Y$ かつ $y_n \to x$ とおく. $x \in Y$ を示せば良い.

K を $\mathbb{N}$ の一点コンパクト化とする. つまり $V \subset K$ が開集合であるとは, $V \subset \mathbb{N}$ または「$\infty \in V$ かつ $K \setminus V$ は有限集合」である.

$u : K \to X$ を $u(n) = y_n, u(\infty) = x$ とおく. これは $y_n \to x$ より連続写像になる. よって Y は k 閉集合より, $u^{-1}Y$ は $\mathbb{N} \subset u^{-1}Y \subset K$ となる閉集合. よって K の開集合の定義から $u^{-1}Y = K$. $x \in Y$ となる. □

命題 70. [Str, Prop 1.7] locally compact Hausdorff ならば CGWH

Proof. Xlocally compact Hausdorff とする. CG を示せば良い $Y \subset X$ を k-closed 集合とする. $\overline{Y} = Y$ を示す.

$x \in \overline{Y}$ とする. X 局所コンパクトより $x \in U$ 開集合で $K := \overline{U}$ がコンパクトとなるものがある. よって $j : K \to X$ を考えると明らかに連続で, Y は k-closed 集合より $K \cap Y = j^{-1}Y$ は K での閉集合である.

$x \in V \cap K$ で V を X での開集合とする. すると $x \in V \cap U$ より $x \in \overline{Y}$ から $V \cap U \cap Y \neq \varnothing$ となる. よって $V \cap (K \cap Y) \neq \varnothing$ である.

これより任意の x を含む”K での開集合 $V \cap K$”について $(V \cap K) \cap (K \cap Y) \neq \varnothing$ である. これは閉包の定義から $K \cap Y$ の”K での閉包”に x が属する. 今 $K \cap Y = j^{-1}Y$ は K での閉集合であるので, $x \in K \cap Y$ となる. つまり $x \in Y$ である. □

A.2.2 CG の性質

補題 71. [Str, Cor1.10] XCG, Y 位相空間 $f : X \to Y$ 連続は $f : X \to kY$ が連続と同値
特に $Y \mapsto kY$ は忘却関手 $X \mapsto X$ の右随伴であり

$$hom_{\mathbf{Top}}(X, Y) = hom_{\mathbf{CG}}(X, kY)$$

である.

Proof. 閉集合系は $\mathfrak{B}_Y \subset k\mathfrak{B}_Y$ である. よって右から左は自明である.

$f : X \to Y$ 連続とする. $Z \subset Y$ が k-closed として, $f^{-1}Z \subset X$ が閉集合を示す. XCG なので $f^{-1}Z$ が k-closed を示せば良い. $u : K \to X$ をコンパクトハウスドルフ空間からの連続写像とする. $u^{-1}(f^{-1}Z)$ が閉集合を示せば良い. これは $f \circ u : K \to X \to Y$ は連続なので明らか. □

命題 72. [Str, Prop2.1] X CG かつ $\sim$ 同値関係ならば $X/\sim$ も CG

Proof. $\pi : X \to X/\sim$ を商写像とする．$Z \subset X/\sim$ を k-closed とする．Z が閉集合であることを示せば良い．

71 から $\pi : X \to k(X/\sim)$ も連続であるので，$\pi^{-1}Z$ は X の閉集合である．π は商写像なので，Z は閉集合である． □

命題 73. [Str, Prop2.2] $\{X_i\}_{i\in I}$ を CG の族とする．(ただし I は集合とする) この時 $\sqcup X_i$ も CG

Proof. $Z \subset \sqcup X_i$ を k-closed とする．Z が閉集合であることを示せば良い．これは $\eta_i : X_i \to \sqcup X_i$ を包含写像として，$Z_i := X_i \cap \eta_i^{-1}Z$ としたとき Z_i が X_i で閉集合であることを示せば良い．X_iCG なので Z_i が k-closed であることを示せば良い

これは $u : K \to X_i$ をコンパクトハウスドルフ空間からの連続写像とすれば $u^{-1}Z_i = (\eta_i \circ u)^{-1}Z$ であることから明らかである． □

定義 74. [Str, Def 2.3] X, YCG についてその直積 $k(X \times Y)$ を下で定める

- 集合としては $X \times Y$
- 位相としては $k(\mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y)$ とする．

同様に $k(\prod X_i)$ を積位相空間に k 化したもので定める．

命題 75. [Str, Prop2.4] $\{X_i\}_{i\in I}$ を CG の族とする．

1. $p_i : k(\prod X_i) \to X_i$ を射影とすると，これは連続
2. 任意の CG である Y について，$f : Y \to k(\prod X_i)$ が連続であることは，各 $p_i \circ f$ が連続と同値

よって $k(\prod X_i)$ は **CG** の圏の直積となる．

Proof. (1)．71 より $p_i : k(\prod X_i) \to X_i$ が連続は，$\prod X_i$ で連続であることと同じであるので．

(2) については右から左のみ非自明．$p_i \circ f$ が連続であるとすると，$f : Y \to \prod X_i$ は連続である．よって 71 より k 化した $k(\prod X_i)$ でも連続となる． □

最後に次の事実を証明なしで書いておく．

命題 76. [Str, Prop 2.20] $f : W \to X$, $g : Y \to Z$ を CG の商写像とする時 $f \times g : k(W \times Y) \to k(X \times Z)$ も商写像である

証明は連続写像の空間 $C(X, Y)$ を用いるのでかなり混みいる．詳しくは [Str] を参照してほしい．

A.2.3 64 の証明

命題 **77.** [Str, Prop2.14] X を CG とする． X が weak hausdorff であることは $\Delta_X := \{(x,x)|x \in X\} \subset X \times X$ が $k(X \times X)$ で閉集合であることと同値 (つまり Δ_X が普通の直積 $X \times X$ の k-closed であることと同値)

1. X を Weak Hausdorff とする．任意のコンパクトハウスドルフ空間からの連続写像 $u = v \times w : K \to k(X \times X)$ について $u^{-1}\Delta_X := \{a \in K|v(a) = w(a)\}$ が K の閉集合であることを示せば良い．

$a \notin u^{-1}\Delta_X$ とする．$a \in Z \subset K \setminus u^{-1}\Delta_X$ となる K の開集合の存在を示す $v(a) \neq w(a)$ である．X は T_1 なので

$$U := \{b \in K|v(b) \neq w(a)\} = v^{-1}(X \setminus \{w(a)\})$$

は K の開集合で a を含む．K はコンパクトハウスドルフ空間であるので $a \in V \subset \overline{V} \subset U$ となる開集合 V が存在する．$v : K \to X$ は連続でX は弱 Hausdorffなので, $v(\overline{V}) \subset X$ は閉集合である U の定め方から $w(a) \neq v(\overline{V})$ なので,

$$a \in w^{-1}(X \setminus v(\overline{V})) =: Z$$

であり, Z は開集合である．そして $Z \subset K \setminus u^{-1}\Delta_X$ でありいえた．

[2]$\Delta_X := \{(x,x)|x \in X\} \subset X \times X$ が $k(X \times X)$ で閉集合であるとする．任意のコンパクトハウスドルフ空間からの連続写像 $u : K \to X$ について $u(K)$ が閉集合であることを示せば良い．X は CGなので任意のコンパクトハウスドルフ空間からの連続写像 $v : L \to X$ について $v^{-1}u(K) \subset L$ が閉集合であることを示せば良い．

$$M := \{(a,b) \in K \times L|u(a) = v(b)\} = K \times_X L \subset K \times L$$

と定める．すると定義から $M = (u \times v)^{-1}\Delta_X$ であり, $u \times v : K \times L \to k(X \times X)$ は連続写像なので M は閉集合である．射影 $pr_L : K \times L \to L$ は閉写像であるので

$$v^{-1}u(K) = pr_L(M)$$

であるので言えた． □

系 **78.** [Str, Cor2.21] XCG, $\sim$ を X 上の同値関係とする．$X/\sim$ が WH であることは,

$$R := \{(x,y)|x \sim y\} \subset X \times X$$

としたとき R が k$(X \times X)$ 上の閉集合であることと同値．(つまり X の通常の積位相で k-closed であることと同値)

Proof. $X/\sim$ が WH であることは,

$$\Delta_{X/\sim} \subset (X/\sim) \times (X/\sim)$$

が $k((X/\sim)\times(X/\sim))$ の閉集合であることと同値．ここで $\pi : X\to X/\sim$ を商写像として

$$\pi\times\pi : k(X\times X)\to\subset k((X/\sim)\times(X/\sim))$$

とおくと 76 から商写像である．よって $\Delta_{X/\sim}$ が $k((X/\sim)\times(X/\sim))$ の閉集合であることは

$$R=(\pi\times\pi)^{-1}\Delta_{X/\sim}$$

が $k(X\times X)$ の閉集合であることと同値である． □

補題 79. X_i 位相空間とし $X=\sqcup X_i$ とするとき

$$kX=\sqcup kX_i$$

特に k-closed 集合の直和は k-closed.

Proof. $\pi_i : X_i\to X$ は連続なので $\pi_i : kX_i\to kX$ も連続である．示すことは $V\subset X$ について V が k-closed であることは各々 $\pi_i^{-1}V\subset X_i$ が k-closed であることと同値であることである．

$V\subset X$ が k-closed とする．すると，$\pi_i : kX_i\to kX$ も連続より，$\pi_i^{-1}V\subset X_i$k-closed である．

逆に $\pi^{-1}V\subset X_i$k-closed であるとする．$u : K\to X$ をコンパクトハウスドルフ空間からの連続写像とする．$u(K)\subset X=\cup i\pi_i(X_i)$ より $u(K)$ コンパクトなので，$u(K)\subset\cup_{i=1}^{n}\pi_i(X_i)$ である．よってこれより

$$u^{-1}(V)=\cup_{i=1}^{n}\{k\in K|u(k)\in\pi_i(\pi^{-1}V_i)\}$$

今 $\pi_i^{-1} : \pi_i(X_i)\to X_i$ を $(x_i,i)\mapsto x_i$ で定めると同相写像になる．よって

$$\{k\in K|u(k)\in\pi_i(\pi^{-1}V_i)\}=(\pi_i^{-1}\circ u)(k)\in\pi^{-1}V_i$$

$\pi_i^{-1}\circ u : K\to X_i$ は連続なので， $\{k\in K|u(k)\in\pi_i(\pi^{-1}V_i)\}$ は k-closed となり $u^{-1}(V)$ も closed となる， □

補題 80. [Str, Lemma 3.3](=補題 64)
$X : I\to$ **CGWH** 関手 I small filtered category さらに $f : i\to j$ について $Xf : X_i\to X_j$ は連続な単射で $Xf(X_i)\subset X_j$ は X_j で閉集合であるとする．
この時 $\mathrm{colim}_{i\in I}X_i$ は CGWH

Proof. 以下 X という位相空間について $k(X)$ を k-closed 閉集合を集めた位相空間とする．

$i,j\in I$ について $f_{ik} : i\to k, f_{jk}j\to k$ となる k を取り

$$R_{ij}:=X_i\times_{X_k}X_j:=\{(x_i,x_j)|f_{ik}(x_i)=f_{jk}(x_j)\}$$

と定める．これは R_{ij} は k の取り方によらない．(なぜならば$\underline{Xf : X_i\to X_j\text{ は単射だから}}$ $k\to k'$

となる射がある場合に同じことが示せる．また $R_{ii}=\Delta_{X_i}$ となる）また

$$R_{ij}=\{(x_i,x_j)|f_{ik}(x_i)=f_{jk}(x_j)\}=(f_{ik}\times f_j)^{-1}\Delta_{X_k}$$

であり X_k は CGWH なので 77 より $\Delta_{X_k}\subset X_k\times X_k$ は k-closed である． これより 71 から，$f_{ik}\times f_j:k(X_i\times X_j)\to k(X_k\times X_k)$ は連続なので R_{ij} は $X_i\times X_j$ の k-closed 集合である．

$Y:=\sqcup_{i\in I}X_i$ とおき $\eta_i:X_i\to Y$ を包含写像とする．すると有限極限とフィルター余極限の交換から $Y\times Y$ と $\sqcup_{i,j}(X_i\times X_j)$ は同相である．よって

$$R:=\sqcup_{i,j\in I}R_{ij}\subset\sqcup_{i,j}(X_i\times X_j)\cong Y\times Y$$

とすると R_{ij} は k-closed であるので 79 から R は k-closed である．

$x\sim y\Leftrightarrow(x,y)\in R$ で 2 項関係を入れる．すると $\sim$ は同値関係で

$$\mathrm{colim}_{i\in I}X_i\cong Y/\sim$$

となる．同値関係になることは $R_{ij}:=\{(x_i,x_j)|f_{ik}(x_i)=f_{jk}(x_j)\}$ であることを考えると

1. $x\sim x$ は $R_{ii}=X_i\times X_i$ であるので
2. $x\sim y$ ならば $R_{ij}\cong R_{ji}$ を $(x_i,x_j)\to(x_j,x_i)$ であるので $y\sim x$
3. $x\sim y,y\sim z$ かつ $(x,y)\in R_{ij},(y,z)\in R_{jk}$ について，$i,j,k\to l$ なる l をとると言える．

さらに $\mathrm{colim}_{i\in I}X_i$ の構成方法は Y に同値関係 $(x_i,i)\sim_c(x_j,j)$ を $i,j\to k$ を取り $f_{ik}(x_i)=f_{jk}(x_j)$ として入れるので，$Y/\sim$ と同相である．

72, 73 から $Y/\sim$ は CG である．WH に関しては $R\subset Y\times Y$ が k-closed なので 78 より言える．

□

A.2.4 h 化

以下 $\sim$ を X 上の同値関係とした時

$$R_\sim=\{(x,y)|x\sim y\}\subset X\times X$$

で定める

命題 81. [Str, Prop2.22] X を CG とする．

$$\mathcal{R}:=\{\sim|X\text{ 上の同値関係で }R_\sim\text{ が }X\times X\text{ 閉}\}$$

とおき $x\sim_{\min}y$ を $(x,y)\in\cap_{\sim\in\mathcal{R}}R_\sim$ で定める． このとき $\sim_{\min}$ は X の同値関係であり，$X/\sim_{\min}$ は CGWH となる．
さらに

$$h:\mathbf{CG}\to\mathbf{CGWH}$$

を $h(X) := X/\sim_{\min}$ で定めれば, これは包含関手の左随伴射であり

$$hom_{\mathbf{CGWH}}(h(X), Y) \cong hom_{\mathbf{CG}}(X, Y)$$

となる．つまり任意の CGWH 空間 Y への連続写像は $h(X)$ を経由する

Proof. $\sim \in \mathcal{R}$ について次の三つが成り立つ.

1. $(x, x) \in R_\sim$
2. $(x, y) \in R_\sim$ ならば $(y, x) \in R_\sim$
3. $(x, y) \in R_\sim$ かつ $(y, z) \in R_\sim$ ならば $(x, z) \in R_\sim$

以上より $\sim_{\min}$ を

$$x \sim_{\min} y \Leftrightarrow (x, y) \cap_{\sim \in \mathcal{R}} R_\sim$$

で入れればこれは明らかに同値関係になる．そして $R_{\sim_{\min}}$ は $X \times X$ の閉集合なので $h(X) = X/\sim_{\min}$ は WH である.

CGWH 空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ を考える.

$$R := \{(x, x') \in X \times X | f(x) = f(x')\} = (f \times f)^{-1}\Delta_Y$$

とおくとこれは X の同値関係を定める．よって $R_{\sim_{\min}} \subset R$ であることから $hX \to Y$ を誘導し唯一性もわかる. $\square$

A.2.5 圏 CG と CGWH の性質.

以下は [Fra] を参考にした.

CG は完備かつ余完備でカルテシアン閉である.

- lim については位相の lim をとった後に k-closed なものを付け加える
- colim はそのまま
- $Y^Z = C(Y, Z)$ で $C(Y, Z)$ には compact open topology の k 化を入れる

また **Top** $\to$ **CG** を $X \mapsto kX$ と言う k-closed な位相を付け足したものにする関手とするとこれは右随伴関手である.

CGWH は完備かつ余完備でカルテシアン閉である.

- lim については CG の lim とする.
- colim は CG の colim を取った後に h 化する. (閉な同値関係で一番小さいものでわる)
- $Y^Z = C(Y, Z)$ で $C(Y, Z)$ には compact open topology の k 化を入れる

また **CG** $\to$ **CGWH** を $X \mapsto hX$ と言う h 化 (閉な同値関係で一番小さいものでわる) に関手とするとこれは左随伴関手である.

なぜこれらがトポロジーで重要かというと次のクラスになっているからである.

定義 82. 圏 C が"convenirnt category of topological space" とは次の条件を満たす **Top** の部分圏とする.

1. CW-complex は C の Object
2. 完備かつ余完備
3. カルテシアン閉

上からすぐに次がわかる.

定理 83. **CG** や **CGWH** は convenirnt category of topological space.

A.3 圏論関係

A.3.1 米田の補題

定義 84. $\mathcal{D}$ が locally small とする. $K : \mathcal{D} \to$ **Set** が表現可能とはある $r \in Ob(\mathcal{D})$ があって $hom_{\mathcal{D}}(r, \cdot) \cong K$ が自然同型となること

補題 85 (米田の補題)**.** $\mathcal{D}$ が locally small とする. $K : \mathcal{D} \to$ **Set** 関手に関して

$$y : Nat(hom_{\mathcal{D}}(r, \cdot), K) \cong Kr, \quad \tau \mapsto \tau_r(id_r)$$

は全単射となる.

Proof. $\tau \in Nat(hom_{\mathcal{D}}(r, \cdot), K)$ について

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, "g"] & hom_{\mathcal{D}}(r,r) \arrow[r, "\tau_r"] \arrow[d, "g\circ"] & Kr \arrow[d, "Kg"'] \\ d & hom_{\mathcal{D}}(r,d) \arrow[r, "\tau_d"] & Kd \end{tikzcd}$$

が成り立っている.

(全射)$g \in Kr$ について $\tau_d : hom_{\mathcal{D}}(r, d) \to Kd$ を $f \mapsto K(f)(g)$ で定めれば自然同型である.

(単射)$\tau_r(id_r) = \tau'_r(id_r)$ ならば, $g \in hom_{\mathcal{D}}(r, d)$ について $\tau_d(g) = \tau'_d(g)$ は上の図式からわかる.
(τ_r の部分が等しいから!)

□

同様に $hom_{\mathcal{D}}(\cdot, r) : C^{op} \to \mathbf{Set}$ について次の米田が成り立つ

$$y : Nat(hom_{\mathcal{D}}(\cdot, r), K) \cong Kr, \quad \tau \mapsto \tau_r(id_r)$$

系 86. $\mathcal{D}$ が locally small とする．$r, r' \in Ob(\mathcal{D})$ について

$$\tau : hom_{\mathcal{D}}(r, \cdot) \cong hom_{\mathcal{D}}(r', \cdot)$$

となる自然同型があるならば, $r \cong r'$

Proof. $f = \tau_r(id_r) \in hom_{\mathcal{D}}(r', r)$ をとり, $g = \tau_{r'}^{-1}(id_{r'})$ とすると以下の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
id_r \in hom_{\mathcal{D}}(r, r) \arrow[r, "\tau_r"] & hom_{\mathcal{D}}(r', r) \ni f \\
g \in hom_{\mathcal{D}}(r, r') \arrow[r, "\tau_{r'}"] \arrow[u, "f\circ"] & hom_{\mathcal{D}}(r', r') \ni id_{r'} \arrow[u, "f\circ"]
\end{tikzcd}$$

よって一番左の図式により $f \circ g = id_r$ となる．

同じ議論を r' に行うと $f = (\tau_r^{-1})^{-1}(id_r)$ に注意すると

$$\begin{tikzcd}
id_{r'} \in hom_{\mathcal{D}}(r', r') \arrow[r, "\tau_{r'}^{-1}"] & hom_{\mathcal{D}}(r, r') \ni g \\
f \in hom_{\mathcal{D}}(r', r) \arrow[r, "\tau_r^{-1}"] \arrow[u, "g\circ"] & hom_{\mathcal{D}}(r, r) \ni id_r \arrow[u, "g\circ"]
\end{tikzcd}$$

を得て, よって一番左の図式により $g \circ f = id_r$ となる．よって $r \cong r'$ となる． □

A.3.2 極限

定理 87. 余積とコイコライザーを持つ圏は余極限を持つ．同様に積とイコライザーを持つ圏は極限を持つ．

Proof. $G : I \to C$ について colim は

$$f, g : \sqcup_{a \in Mor(I)} G(dom(a)) \to \sqcup_{i \in Ob(I)} Gi$$

$$f_{G(dom(a))} = id_{G(dom(a))} : G(dom(a)) \to G(dom(a)) \quad g_{G(dom(a))} = a : G(dom(a)) \to G(cod(a))$$

のコイコライザーとなるため．

同様に $G : I \to C$ について lim は

$$f, g : \prod_{i \in Ob(I)} Gi \to \prod_{a \in Mor(I)} G(cod(a)) \to$$

$$f_i = id_{Gi} : Gi \to Gi \quad g_i = (a)_{i = dom(a)} : Gi \to G(cod(a))$$

のイコライザーとなるため. □

A.3.3 フィルター圏・共終

定義 88. 圏 J がフィルターであるとは以下の二つの条件を満たす空でない圏とする

1. $j, j' \in Ob(J)$ についてある $j \to k, j' \to k$ が存在する
2. $a, b : j \to k$ について, $u : k \to m$ が存在して $ua = ub : j \to k \to m$

$F : J \to C$ がフィルター余極限とは J がフィルターなること.

定義 89 (共終)**.** $L : I \to J$ が共終とは $k \in Ob(J)$ について $k \downarrow L$ 空でなく連結であること. わかりやすくいうと以下の 2 条件を満たすこと.

1. 任意の $y \in Ob(J)$ についてある $x \in Ob(I)$ があって $y \to L(x)$.
2. 任意の $y \in Ob(J)$, $x, x' \in Ob(I)$ についてある

$$x = x_0 \leftarrow x_1 \to x_2 \cdots x_{2n-2} \leftarrow x_{2n-1} \to x_{2n} = x'$$

の列があって, 次の可換図式が成り立つこと

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ L(x_{2i-2}) & L(x_{2i-1}) \arrow[l] \arrow[r] & L(x_{2i}) \end{tikzcd}$$

定理 90. $L : I \to J$ が共終であり, 関手 $F : J \to X$ について $\mathrm{colim}_{i \in I} FL(i)$ が存在する時, $\mathrm{colim}_{j \in J} F(j)$ も存在し, canonical map

$$h : \mathrm{colim}_{i \in J} FL(i) \to \mathrm{colim}_{j \in J} F(j)$$

は同型になる.

1. $\mathrm{colim}_{j \in J} F(j)$ の存在 $x = \mathrm{colim}_{i \in I} FL(i)$ とする. すると $\mu : FL \to \Delta c$ なる自然変換で普遍なものが存在する.

$k \in J$ について $u : k \to Li$ なる i を選んで

$$\tau_k : Fk \overset{Fu}{\to} FLi \overset{\mu_i}{\to} x$$

とおく．これは i の取り方によらない．これは次の図から明らかである．

$$\begin{tikzcd}
& Fy \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
FL(x_{2i-2}) \arrow[dr, "u_{x_{2i-2}}"'] & FL(x_{2i-1}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "u_{x_{2i-1}}"] & FL(x_{2i}) \arrow[dl, "u_{x_{2i}}"] \\
& x &
\end{tikzcd}$$

これより $\tau : F \to \Delta x$ が cocone となる．こいつが普遍性を持つことを示せば良い．

つまり $\lambda : F \to \Delta y$ を別の cocone とするとき，ある $f : x \to y$ があって $\lambda = (\Delta f)\tau$ を示せば良い．

$\lambda L : FL \to \Delta y$ という自然変換を得るので $u : FL \to \Delta x$ の普遍性からある一意的な射 $f : x \to y$ があって $\lambda L = (\Delta f)\mu$ となる．よって $k \in J$ について $u : k \to Li$ を選べば

$$((\Delta f)\tau)_k = (\Delta f)_x \cdot \tau_k = (\Delta f)_x \cdot \mu_i \cdot Fu = \lambda_{Li} \cdot Fu = \lambda_k$$

となる．よって言えた． □

A.3.4 随伴

定義 91. A, X を locally small category とする．(F, G, φ) が X から A の随伴とは

- $F : X \to A$, $G : A \to X$ となる関手
- φ は $x \in Ob(X), a \in Ob(A)$ について

  $$\varphi_{x,a} : hom_A(Fx, a) \cong hom_X(x, Ga)$$

  が全単射になるものの族で x, a について自然である．

このとき $F \dashv G$ とかく．F は G の左随伴，G は F の右随伴という．

注意 92. hom 集合を使わずに定義す流のであれば，任意の $f : Fx \to a$ について右随伴射 $\varphi f : x \to Ga$ が唯一定まり，

$$\varphi(k \circ f) = Gk \circ \varphi f, \quad , \varphi(f \circ Fh) = \varphi f \circ h \tag{4}$$

が任意の $h : x' \to x$, $k : a \to a'$ に成り立つこれは次の図からわかる

$$\begin{tikzcd}
f \in hom_A(Fx, a) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "k"'] & hom_X(x, Ga) \arrow[d, "Gk"'] \\
hom_A(Fx, a) \arrow[r, "\varphi"] & hom_X(x, Ga)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \in hom_A(Fx, a') \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "Fh"] & hom_X(x, Ga') \arrow[d, "h"'] \\
hom_A(Fx', a) \arrow[r, "\varphi"] & hom_X(x', Ga)
\end{tikzcd}$$

左随伴射 φ^{-1} の言葉で書けば

$$\varphi(g \circ h) = \varphi^{-1 g \circ Fk}, \quad , \varphi^{-1}(Gk \circ g) = k \circ \varphi^{-1} g$$

$a = Fx$ の場合,

$$\varphi_{x,Fx} : hom_A(Fx, Fx) \cong hom(x, GFx)$$

であるので, $\eta_x := \varphi_{x,Fx}(id_{Fx}) : x \to GFx$ を得る. 自然変換 $\eta : I \to GF$ を与えるなぜなら 4 から $h : x \to x'$ について

$$G(Fh) \circ \varphi(id_{Fx'}) = \varphi(Fh \circ id_{Fx'}) = \varphi(id_{Fx'} \circ Fh) = \varphi(id_{Fx}) \circ h$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "h"] & GFx \arrow[d, "G(Fh)"] \\
x' \arrow[r, "\varphi"'] & GFx'
\end{tikzcd}$$

すると 4 から $f : Fx \to a$ について

$$\varphi(f) = \varphi(f \circ F(id_x)) = Gf \circ \varphi(id_x) = Gf \circ \eta_x$$

となる.

同様に $\varphi^{-1}_{Ga,a} : hom_X(Ga, Ga) \cong hom_A(FGa, a)$ $\epsilon_a = \varphi^{-1}_{Ga,a}(id_{Ga})$ とおくと同様のことが成り立つ.

まとめると次になる.

補題 93. A, X を locally small category とする. (F, G, φ) が X から A の随伴とする.

1. 上の η_x は x から G への普遍射, 自然変換 $\eta : I \to GF$ を与える. ここで $I, GF : X \to X$ である. また $\varphi(f) = Gf \circ \eta_x : x \to Ga$ である.

2. $\epsilon_a = \varphi^{-1}_{Ga,a}$ とおくと, F から a への普遍射, 自然変換 $\epsilon : FG \to I$ を与える. また $\varphi^{-1}(g) = \epsilon_a \circ Fg : Fx \to a$ である.($g : x \to Ga$ とする)

η を unit, ϵ を counit という.

以下随伴 (F, G, η, ϵ) と言ったら

- $F : X \to A$, $G : A \to X$ となる関手
- $\eta : I \to GF$ を unit, $\epsilon : FG \to I$ を counit とする.

系 94. (F, G, φ) を X から A の随伴であるとする. $T : J \to A$ が極限 $\tau : \Delta(\lim T) \to T$ を持つならば, GT は極限 $G\tau : \Delta(G \lim T) \to GT$ と持つ.
つまり右随伴射 G について, $\lim(GT) \cong G(\lim T)$ である. (right adjoint perverse limit)

同様に左随伴射 F について $\mathrm{colim} FT \cong F(\mathrm{colim} T)$ である.

Proof. 任意の $x \in X$ について

$$hom_X(x, \lim(GT)) \cong hom_X(x, G(\lim T))$$

を示せば良い. これは以下から言える.

$$hom_X(x, G(\lim T)) \cong hom_A(Gx, T) \cong \lim hom_A(Gx, T)) \cong \lim hom_X(x, GT)$$

□

定理 95. 随伴 $(F, G, \eta, \epsilon) : X \to A$ について以下が成り立つ

1. $G : A \to X$ が忠実 (faithfull) は任意の $a \in A$ について ϵ_a がエピと同値
2. $G : A \to X$ が充満 (full) は任意の $a \in A$ について ϵ_a が分裂モニックと同値
3. $G : A \to X$ が充満忠実 (fully faithfull) は任意の $a \in A$ について $\epsilon_a : FGa \cong a$ が同型と同値

Proof.

$$\varphi^{-1} \circ G_{a,\cdot} : hom_A(a, \cdot) \to hom_X(Ga, G\cdot) \to hom_A(FGa, \cdot)$$

を考える. これは $\epsilon_a : FGa \to a$ として ϵ_a^* と同じである. φ^{-1} が全単射より下の補題から「ϵ_a^* エピ $\Leftrightarrow \epsilon_a^* = \varphi^{-1} \circ G_{a,\cdot}$ モニック $\Leftrightarrow G_{a,\cdot}$ モニック $\Leftrightarrow G : A \to X$ が忠実 (faithfull)」となる. □

補題 96. $f : b \to a$ について, $f^* : hom_A(a, \cdot) \to hom_A(b, \cdot)$ を自然変換とする. この時以下が成り立つ

1. f^* モニック は f エピと同値
2. f^* エピは f が分裂モニックと同値

これは定義から直ちに従う. (言い換えているに過ぎない)

A.3.5 圏同値

定義 97 (圏同値)**.** 関手 $S : A \to C$ が圏同値であるとはある関手 $T : C \to A$ と $ST \cong I_C : C \to C$ かつ $TS \cong I : A \to A$ なる自然同型が存在すること.
この時 T は S の左随伴でもあり右随伴でもある.

定義 98 (随伴圏同値)**.** 随伴 $(F, G, \eta, \epsilon) : X \to A$ について, $\eta : I \to GF$, $\epsilon : GF \to I$ が共に自然同型である時, $(F, G, \eta, \epsilon) : X \to A$ は随伴圏同値と呼ぶ.

定理 99. 関手 $S : A \to C$ について次は同値

1. $S : A \to C$ は圏同値
2. $(S, T, \eta, \epsilon) : A \to C$ が随伴圏同値となるような T, η, ϵ が存在する
3. S fully faithfull かつ $c \in Ob(C)$ についてある $a \in A$ があって $c \cong Sa$.

Proof. (2) $\Rightarrow$ (1) 自明

(1) $\Rightarrow$ (3) $a, a' \in Ob(A)$ について

$$hom_A(a, a') \cong hom_A(a, TSa') \overset{\varphi}{\cong} hom_C(Sa, Sa')$$

によって全単射を得る．よって fully faithfull. 任意の $c \in Ob(C)$ について, $c \cong S(Tc)$ より $a = Tc$ とおけば良い.

(3) $\Rightarrow$ (2) $T : C \to A$ を構成する $c \in Ob(C)$ について $a \in A$ があって $\nu_c : c \cong Sa$ となるので, $Tc = a$ とする． $f : c \to c'$ について, S は fully faithfull なので

$$hom_A(a, a') \to hom_C(Sa, Sa') \cong hom_C(c, c')$$

が全単射であり, $\nu_{c'}^{-1} \circ S(g) \circ \nu_c = f$ となる g が一意に存在する. $T(f) = g$ とおく.

よって S が T の右随伴であることと, $\eta : I \to ST$ と $\epsilon : TS \to I$ なる自然同型が存在することとを示せば良い. □

A.3.6 Kan 拡張

定義 100. $K : M \to C$, $T : M \to A$ を関手とする． K に沿った T の右 Kan 拡張とは

- $R : C \to A$ 関手
- $\epsilon : RK \to T$ 自然変換

に二つくみ $(R, \epsilon : RK \to T)$ であって, 任意の $S : C \to A, \alpha : SK \to T$ について, $\alpha = \epsilon \cdot \sigma K : SK \to T$ となる自然変換 $\sigma : S \to R$ が唯一存在すること.
このとき $R := Ran_K T$ とかく.

$\sigma \mapsto \epsilon \cdot \sigma K$ によって自然な全単射

$$Nat(S, R) = Nat(S, Ran_K T) \cong Nat(SK, T)$$

となる. よってこれをかっこよくいうと次の補題を得る.

補題 101. $K : M \to C$ を固定する．任意の $T \in A^M$ $(T : M \to A)$ について右 Kan 拡張 $(R, \epsilon) := (Ran_K T \in A^C, \epsilon_T : RK \to T)$ が存在すると仮定する.

この時 $\beta : A^M \to A^C$ を

- $\beta T := Ran_K T$
- $\beta(g : T \to T')$ について $\beta(g) : Ran_K T \to Ran_{K'} T$ を, $S = Rank_T K : C \to A, \alpha = g \circ \epsilon_T : SK \to T$ として, 唯一存在する自然変換 $\beta(g) := \sigma : Ran_K T \to Ran_K T'$ で $\alpha = g \circ \epsilon_T = \epsilon_T \cdots \beta(g) K$ となるもの.

で決めると,

$$F : A^C \to A^M \quad N : C \to A \mapsto N \circ K : M \to A$$

の右随伴, つまり

$$hom_{A^M}(F(N), T) = Nat(NK, T) \cong hom_{A^C}(N, Ran_K T) = Nat(N, Ran_K T)$$

となり, $\epsilon : I \to Ran_K \circ F$ は unit である.

定理 102 (点列極限としての右 Kan 拡張)**.** $K : M \to C$, $T : M \to A$ を関手とする. 任意の $c \in Ob(C)$ について

$$T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A$$

に関する極限 $\lim T \circ Q$ と $\mu : \Delta(\lim T \circ Q) \to TQ$ が存在すると仮定する.
このとき $R : C \to A$ を

- $c \in Ob(C)$ について, $Rc := \lim(T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A)$
- $g : c \to c'$ について $Rg : Rc \to Rc'$ となる射

とするとこれは関手になる
さらに $\epsilon : RK \to T$ について $\epsilon_m : RKm \to Tm$ を次で定めるとこれは自然変換になる:
$RKm = \lim T \circ Q \in Ob(A)$ と $\mu : \Delta RKm \to TQ$ は定義から, (RKm, μ_x) のくみ $(x : Km \to Km)$, $Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ について

- $\mu_x : RKm \to Tm$, つまり A 内で $\mu_x : RKm \to Tm$
- $TQh \circ \mu_{x'} = \mu_{(m,x)} : RKm \to TQ(m, x) = Tm$,

である. そこで $\epsilon_m := \mu_{id_{Km}} : RKm \to Tm$ と定義する.
そして (R, ϵ) は K に沿った T の右 Kan 拡張となる.

Proof. [0.] $Ob(c \downarrow K)$ と $Q : (c \downarrow K) \to M$ の定義について.

- $(m, x) : Ob(c \downarrow K)$ は $m \in Ob(M)$ かつ $x : c \to Km$
- Morphism $h : (m, x) \to (m', x') \in Hom_M(m, m')$ を $h : m \to m'$ で $x' = Kh \circ x$ となるもの

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "1"'] & c \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal, "id_c"'] & Km \arrow[d, "Kh"] & m \arrow[d, "h"'] \\ 1 & c \arrow[r, "x'"'] & Km' & m' \end{tikzcd}$$

ここで $Q : (c \downarrow K) \to M$ を以下で定める

- $(m, x) \in Ob(c \downarrow K)$ について $Q(m.x) = m$
- $h : (m, x) \to (m', x') \in Hom_M(m, m')$ について $Q(h) = h$

[1.] R が関手になること．$c \in On(C)$ について，その極限 $a_c = \lim T \circ Q \in Ob(A)$ と $\mu : \Delta(\lim T \circ Q) \to TQ$ とは

1. $(a_c, \mu_{(m,x)})$ のくみ $(x : c \to Km)$, $Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ について
   - $\mu_{(m,x)} : a_c \to Tm$, つまり A 内で $\mu_{(m,x)} : a_c \to Tm$
   - $TQh \circ \mu_{(m',x')} = \mu_{(m,x)} : a_c \to TQ(m, x)$,
2. $(a', \nu_{(m,x)})$ の組 $(x : c \to Km)$ で $h' : (m, x) \to (m', x')$ について
   - $\nu_{(m,x)} : a' \to Tm$, つまり A 内で $\nu_{(m,x)} : a' \to Tm$
   - $TQh' \circ \nu_{(m',x')} = Th' \circ \nu_{(m',x')} = \nu_{(m,x)} : a' \to TQ(m, x)$

   となるものについて，ある $f : a \to a_c$ がただ一つ存在して，$Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ について $\mu_{(m,x)} \circ f = \nu_{(m,x)} : a \to TQ(m, x) = Tm$ となる．

ここで，$x : c \to Km$ なので，m の情報も持っているので $\mu_x := \mu_x$ と書くことにする．すると $c \in On(C)$ について，その極限 $a_c = \lim T \circ Q \in Ob(A)$ と $\mu : \Delta(\lim T \circ Q) \to TQ$ とは

1. $(a_c, \mu_{(x)})$ のくみ $(x : c \to Km)$, $Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ について
   - $\mu_x : a_c \to Tm$, つまり A 内で $\mu_x : a_c \to Tm$
   - $TQh \circ \mu_x = \mu_x : a_c \to TQm$,
2. (a', ν_x) の組 $(x : c \to Km)$ で $h' : (m, x) \to (m', x')$ について
   - $\nu_x : a' \to Tm$, つまり A 内で $\mu_x : a' \to Tm$
   - $TQh' \circ \mu_{x'} = Th' \circ \mu_x : a' \to TQm$

   となるものについて，ある $f : a \to a_c$ がただ一つ存在して，$Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ について $\mu_x \circ f = \nu_x : a \to Tm$ となる．

よって $g : c \to c'$ について，その極限 $a'_c = \lim T \circ Q \in Ob(A)$ と $\mu' : \Delta(\lim T \circ Q) \to TQ$ を考える．この時 $x : c' \to Km$ なる組について $\mu'_{m,x} : a'_c \to Tm$ で $\mu_{m,x} : a'_c \to T_m$ がある．

そこで $(x \circ g, m)$ について ($x \circ g : c \to Mm$ で) $\mu_{x \circ g} : a'_c \to Tm$ で $\mu'_x : a'_c \to T_m$ であるので，普遍性から $Rg : a_c \to a'_c$ なる関手が存在する．そして以下が成り立つ．$x : c' \to Km$ とする．

$$\begin{tikzcd} Rc = \lim TQ \arrow[r, "\mu_{(x \circ g)}"] \arrow[d, "Rg"'] & Tm \arrow[d, equal] \\ Rc = \lim TQ' \arrow[r, "\mu'_x"'] & Tm \end{tikzcd}$$

[2.] 自然変換 $\epsilon : RK \to T$ の定義．$m \in M$ について $\epsilon_m : RKm \to Tm$ で任意の $h : m \to m'$ について以下の図式が成り立つことをいう．

$$\begin{tikzcd} RKm = \lim TQ_{Km} \arrow[r, "\epsilon_m"] \arrow[d, "RKh"'] & Tm \arrow[d, "Th"'] \\ RKm' = \lim TQ'_{Km'} \arrow[r, "\epsilon'_m"'] & T'm \end{tikzcd}$$

を示せば良い．ここで $RKm = \lim T \circ Q \in Ob(A)$ と $\mu : \Delta RKm \to TQ$ とは (RKm, μ_x) のくみ $(x : Km \to Km)$, $Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ について

- $\mu_x : RKm \to Tm$, つまり A 内で $\mu_x : RKm \to Tm$
- $TQh \circ \mu_{x'} = \mu_{(m,x)} : RKm \to TQ(m, x) = Tm$,

である．よって，$\epsilon_m := \mu_{id_{Km}} : RKm \to Tm$ とおけば良い．

この時 $h : m \to m'$ について $g = Rh : Km \to Km$ と置いて [1] の事実を用いると

$$\begin{tikzcd} RKm = \lim TQ \arrow[r, "\mu_{id_m : Km \to Km}"] \arrow[d, "Rg"'] \arrow[dr, "\mu_{Kh : Km \to Km'}"] & Tm \arrow[d, "Th"] \\ RKm' = \lim TQ' \arrow[r, "\mu_{id_{m'} : Km' \to Km'}"'] & Tm' \end{tikzcd}$$

となる．よって自然変換も言える．

[3] 右 Kan 拡張であること．

$S : C \to A$ と $\alpha : SK \to T$ が存在したとする．示すことは自然変化 $\sigma : S \to R$ の唯一存在と $\alpha = \epsilon \cdot \sigma K : SK \to T$ である．

[3-1], $\sigma : S \to R$ の存在．これは $c \in Ob(C)$ と $\sigma_c : Sc \to Rc$ を作れば良い $f : c \to Km$ に対する図式を考える．

$$\begin{tikzcd} Rc = \lim(T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A) \arrow[r, "\mu_{f : c \to Km}"'] & Tm \arrow[r, "Th"] & Tm' \\ Sc \arrow[r, "Sf"'] \arrow[ur] & SKm \arrow[u, "\alpha_m"'] \arrow[r, "SKm"'] & SKm' \arrow[u, "\alpha'_m"'] \end{tikzcd}$$

これにより極限の定義から $\sigma_c : Sc \to Rc$ が唯一存在する．なぜならば，$(c \downarrow K)$ の写像 $h : (f, m) \to (f', m')$ について ($f : c \to Km, f' : c \to Km', h : m \to m', Kh \circ f = f'$) について上の可換図式がまわるからである．

[3-2] σ が自然になること．これは $g : c \to c'$ について $\sigma'_c \circ Sg = Rg \circ \sigma_c$ を示せば良い．$f' : c' \to Km$ について

$$\begin{tikzcd}
Rc \arrow[r, "Rg"'] \arrow[rr, bend left, "\mu_{f'\circ g:c\to Km}"] & Rc' \arrow[r, "\mu'_{f':c'\to Km}"] & Tm \\
Sc \arrow[u, "\sigma_c"'] \arrow[r, "Sg"'] \arrow[rr, bend right, "S(f'\circ g)"'] & Sc' \arrow[u, "\sigma_{c'}"'] \arrow[r, "Sf'"'] & SKm \arrow[u, "\alpha'_m"']
\end{tikzcd}$$

Rc' の普遍性に帰着させる．

$$\mu_{f'\circ g:c\to Km} \circ \sigma_c = \alpha'_m \circ S(f' \circ g) = \mu'_{f':c'\to Km} \circ (\sigma_{c'} \circ Sg) : Sc \to Tm$$

である．$f' : c' \to Km$ についての極限を取れば $h : Sc \to Rc'$ で任意の f' について $\mu'_{f':c'\to Km} \circ h = \alpha'_m \circ S(f' \circ g) : Sc \to Tm$ このような h はただ一つである．よって

$$\mu'_{f':c'\to Km} \circ (\sigma_{c'} \circ Sg) = \mu'_{f':c'\to Km} \circ h = \alpha'_m \circ S(f' \circ g) = \mu_{f'\circ g:c\to Km} \circ \sigma_c = \mu'_{f':c'\to Km} \circ (Rg \circ \sigma_c)$$

より普遍性の唯一性から $h = \sigma_{c'} \circ Sg = Rg \circ \sigma_c$ である．

[3-3] $\alpha = \epsilon \cdot \sigma K : SK \to T$ について．示すことは, $m \in Ob(M)$ について

$$\alpha_m = \epsilon_m \cdot \sigma_{Km} : SKm \to Tm$$

である．$c = Km,\ f = id_{Km} : c = Km \to Km$ として [3.1] のような図式を考えると,

$$\begin{tikzcd}
Rc = \lim(T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A) \arrow[r, "\mu_{id_{Km}:Km\to Km}=\sigma_{Km}"'] & Tm \\
SKm \arrow[u, "\sigma_c=\sigma_{Km}"'] \arrow[r, equal, "Sf=Sid_{Km}"'] & SKm \arrow[u, "\alpha_m"']
\end{tikzcd}$$

より言える．

[4]$\sigma : S \to R$ の唯一性．

[2] において $f : c \to Km,\ c' = Km,\ f' = id_{Km}$ とすると以下の図式を得る

$$\begin{tikzcd}
Rc \arrow[r, "Rf"'] \arrow[rr, bend left, "\mu_{f:c\to Km}"] & RKm \arrow[r, "\mu'_{id_{Km}:Km\to Km}=\epsilon_m"'] & Tm \\
Sc \arrow[u, "\sigma_c"'] \arrow[r, "Sf"'] \arrow[rr, bend right, "Sf"'] & SKm \arrow[u, "\sigma_{Km}"'] \arrow[r, equal, "SKm"'] & SKm \arrow[u, "\alpha_m"']
\end{tikzcd}$$

上の図式は全て可換で $\sigma_c : S_c \to Rc$ が唯一であることがわかる．(Rc が極限で $\mu_{f:c\to Km} \circ h_c =$

$\mu_{f:c\to Km}\circ h'_c$ なら $h_c = h'_c$ となる/) $\square$

系 103. M が small, A が完備なら任意の $T : M \to A$ は任意の $K : M \to C$ に沿った右 Kan 拡張を持つ．さらに A^K は右随伴を持つ
特に Msmall ならば任意の $T : M \to \mathbf{Set}$ は任意の $K : M \to C$ に沿った右 Kan 拡張を持つ．

Proof. 任意の $c \in Ob(C)$ について

$$T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A$$

に関する極限 $\lim T \circ Q$ と $\mu : \Delta(\lim T \circ Q) \to TQ$ が存在することを示せば良い．これは M を経由しているので存在する．

$\square$

系 104. 102 のように $K : M \to C$, $T : M \to A$ を関手, 任意の $c \in Ob(C)$ について

$$T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A$$

に関する極限 $\lim T \circ Q$ と $\mu : \Delta(\lim T \circ Q) \to TQ$ が存在すると仮定する．
さらに $K : M \to C$ が fully faithfull の場合, K の T に沿った Kan 拡張 $R = Ran_K T$ についての普遍射 $\epsilon : RK \to T$ は自然同型を与える

Proof. $m \in Ob(M)$ について $\sigma_m : RKm \to Tm$ が A 上で自然な可逆を持つことを言えば良い．$Ob(Km \downarrow K)$ は K が fullyfaithfull であるので次のようにかける．

- $(m', Kh) : Ob(c \downarrow K)$ は $m \in Ob(M)$ かつ $Kh : Km \to Km'(Km \to Km'$ は fullyfaithfull よりこの形でかける)
- Morphism $H : (m_1, Kh_1) \to (m_2, Kh_2) \in Hom_M(m_1, m_2)$ を $H : m_1 \to m_2$ で $h_2 = H \circ h_1$ となるもの．

そこで $Kh : Km' \to$

$$T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A : (m', Kh) \to Tm'$$

である．任意の $h : m \to m'$ について,

$$Th : Tm \to Tm'$$

が定めるので, $\alpha_m : Tm \to \lim TQ$ が唯一存在する． 一方で $\sigma_m : id_m : m \to m$ について $\lim TQ \to Tm$ が定まる．$\sigma_m \circ \alpha_m = id_m$ は唯一性のところから明らか．逆については, 唯一性からでる． $\square$

系 105. M が C の full sub category つまり包含関手 $K : M \to C$ が fullyfaithfull とする．

$T: M \to A$ 関手とする. $c \in C$ について

$$(c \downarrow K) \to M \to A$$

が A 内に極限を持つとき $R: C \to A$ があって $\epsilon: RK \cong T$ である.
特に恒等自然変換 $1: RK \to T$ とすると $(R, 1)$ は T の K に沿った右 Kan 拡張となる.

定理 106. $K: M \to C$, $T: M \to A$, $G: A \to X$ とする. G が左随伴を持つ時, G は右 Kan 拡張を保存する.

$$G \circ Ran_K T = Ran_K GT$$

Proof.

$$hom_A(Fx, a) \cong hom_X(x, Ga)$$

により $H \in X^C, L \in A^C$ について

$$Nat(FH, L) \cong (HGL)$$

がいえる. よって任意の $H \in X^C$ について自然な全単射

$$Nat(H, G \circ Ran_K T) \cong Nat(FH, Ran_K T) \cong Nat(FHK, T) \cong Nat(HK, GT) \cong Nat(H, Ran_K GT)$$

が成り立つので, 同型が言える. □

References

[alg] alg-d 全ての概念は Kan 拡張である https://alg-d.com/math/kan_extension/

[Asg] Dagur Asgeirsson *The Foundations of Condensed Mathematics* https://dagur.sites.ku.dk/files/2022/01/condensed-foundations.pdf

[Bar22] Michael Barz *Condensed Mathematics* https://www.dropbox.com/scl/fi/xm2bs6jgtv9oaqir2slbt/condensed-final.pdf?rlkey=r1x82m3a135rfeec86jrjj79k&e=1&dl=0

[Fra] Martin Frankland *Math 527 - Homotopy Theory Additional notes* https://uregina.ca/~franklam/Math527/Math527_0204.pdf

[Land] Marks Land *CONDENSED MATHEMATICS* https://www.markus-land.de/teaching/

[Lep] Florian Leptien *Master thesis Condensed Mathematics*

[Sta] Stacks Project *Site and sheaves* https://stacks.math.columbia.edu/download/sites.pdf

[Stum] Bernard Le Stum *An introduction to condensed mathematics* https://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum/bernard.le-stum/Enseignement_files/CondensedBook.pdf

[Str] N. P. Strickland *THE CATEGORY OF CGWH SPACES* https://ncatlab.org/nlab/files/StricklandCGHWSpaces.pdf

[Sch19] Peter Scholze *Lectures on Condensed Mathematics* https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf

[SchClau] Peter Scholze, Dustin Clausen *Masterclass in Condensed Mathematics* https://www.math.ku.dk/english/calendar/events/condensed-mathematics/

[Sha1] Shane Kelly *Notes on the [HTT] proof of sheafification* https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kelly/Course2023-24DAG/Sheafification.pdf

[Sha2] Shane Kelly *Fast track guide to cardinals for use with Lurie' s Higher Topos Theory* https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kelly/pdfs/cardinalsFastTrack.pdf

[Iwa22] 岩井雅崇　集合と位相まとめノート https://x.gd/aDQt1

[田中] 田中尚夫 公理的集合論　培風館

[マックレーン] S. マックレーン 圏論の基礎 丸善出版