

中間レポート解答例

担当教官: 岩井雅崇 (いわいまさたか)

第 1 問. (授業第 6 回の内容.)

次の (1) から (4) までの関数について, $x = 0$ の近くでの漸近展開を 3 次まで求めよ.

(1). $\sqrt{x+1}$ (2). $\tan^{-1}x$ (3). $\cosh x$ (4). $(1+x)\sin x$

ただし答えを導出する過程を記した上で, 答えは次のように書くこと.

(例題 1) e^x

(答え) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0)$

(例題 2) $\cos x$

(答え) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0)$

● 第 1 問解答例.

C^∞ 関数 $f(x)$ に関して

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \text{ である.}$$

(1). $f(x) = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ とおくと,

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{より} \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{より} \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{より} \quad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-\frac{5}{2}} \quad \text{より} \quad f'''(0) = \frac{3}{8}$$

$$\text{よって } \sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \text{ である.}$$

(2). $f(x) = \tan^{-1}x$ とおくと,

$$f(x) = \tan^{-1}x \quad \text{より} \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = (x^2+1)^{-1} \quad \text{より} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -2x(x^2+1)^{-2} \quad \text{より} \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 8x^2(x^2+1)^{-3} - 2(x^2+1)^{-2} \quad \text{より} \quad f'''(0) = -2$$

$$\text{よって } \tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \text{ である.}$$

(3). $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ とおくと,

$$\begin{aligned}f(x) &= \sinh x \quad \text{より} \quad f(0) = 1 \\f'(x) &= \cosh x \quad \text{より} \quad f'(0) = 0 \\f''(x) &= \sinh x \quad \text{より} \quad f''(0) = 1 \\f'''(x) &= \cosh x \quad \text{より} \quad f'''(0) = 0\end{aligned}$$

よって $\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0)$ である.

[別解].

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \\e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0)\end{aligned}$$

であるため,

$$\begin{aligned}\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \right) + \frac{1}{2} \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \\&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \text{ である.}\end{aligned}$$

(4). $f(x) = (1+x)\sin x$ とおくと,

$$\begin{aligned}f(x) &= (1+x)\sin x \quad \text{より} \quad f(0) = 0 \\f'(x) &= \sin x + (1+x)\cos x \quad \text{より} \quad f'(0) = 1 \\f''(x) &= 2\cos x - (1+x)\sin x \quad \text{より} \quad f''(0) = 2 \\f'''(x) &= -3\sin x - (1+x)\cos x \quad \text{より} \quad f'''(0) = -1\end{aligned}$$

よって $(1+x)\sin x = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0)$ である.

[別解].

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \text{ より, } x \sin x = x^2 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \text{ であるので,}$$

$$(1+x)\sin x = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \text{ である.}$$

第2問. (授業第5回の内容.)

(1). $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で次の不等式が成り立つことを示せ.

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

(2). $\sin 1$ を小数第 3 位まで求めよ.

● 第 2 問解答例.

(1). 有限テイラー展開の定理より, 任意の $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ について, ある $\theta \in (0, 1)$ があって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin(\theta x)}{6!}x^6$$

となる. $\theta x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ から, $-\frac{\sin(\theta x)}{6!}x^6 \leq 0$ であるので,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin(\theta x)}{6!}x^6 \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \text{ である.}$$

同様に任意の $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ について, ある $\theta \in (0, 1)$ があって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{\sin(\theta x)}{8!}x^8$$

となる. $\theta x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ から, $\frac{\sin(\theta x)}{8!}x^8 \geq 0$ であるので,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{\sin(\theta x)}{8!}x^8 \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \text{ である.}$$

[補足]. 普通に微分を 5 回 (または 7 回) やって増減表を書いて示すこともできます.

(2). $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ より, (1) の不等式に $x = 1$ を代入して,

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} \leq \sin 1 \leq 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \text{ である.}$$

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{4241}{5040} = 0.8414 \dots \geq 0.8414, 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = \frac{101}{120} = 0.84166 \dots \leq 0.84167 \text{ より,}$$

$0.8414 \leq \sin 1 \leq 0.84167$ であるので, $\sin 1$ の小数第 3 位までの値は 0.841 である.

第 3 問. (授業第 3 回の内容.)

$\theta = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1). $\tan(2\theta)$ の値を求めよ.

(2). $\tan(4\theta)$ の値を求めよ.

(3). $\tan(4\theta - \frac{\pi}{4})$ の値を求めよ.

(4). 次の式を示せ.

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

● 第3問解答例.

解答の前に加法定理を思い出しておく.

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

(1).

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - (\tan \theta)^2} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

(2).

$$\tan(4\theta) = \frac{2 \tan 2\theta}{1 - (\tan 2\theta)^2} = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

(3).

$$\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\theta - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + (\tan 4\theta)(\tan \frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$$

(4). (3) から

$$\text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{239}\right) = 4\theta - \frac{\pi}{4} = 4 \text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}$$

であるので,

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{239}\right) \text{ となる.}$$

第4問. (授業第4回の内容.)

$f(x) = \frac{x^3-1}{2}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1). $f(x)$ は \mathbb{R} 上で単調増加であることを示せ.

(2). 方程式 $\sqrt[3]{2x+1} = \frac{x^3-1}{2}$ の実数解を全て求めよ.

● 第4問解答例.

(1). $f'(x) = \frac{3}{2}x^2$ である. $(-\infty, 0)$ 上で $f'(x) > 0$ であるので, $f(x)$ は $(-\infty, 0]$ 上で単調増加である. また $(0, +\infty)$ 上で $f'(x) > 0$ であるので, $f(x)$ は $[0, +\infty)$ 上で単調増加である. よって $f(x)$ は \mathbb{R} 上で単調増加である.

(2). 解答は2通りあります.

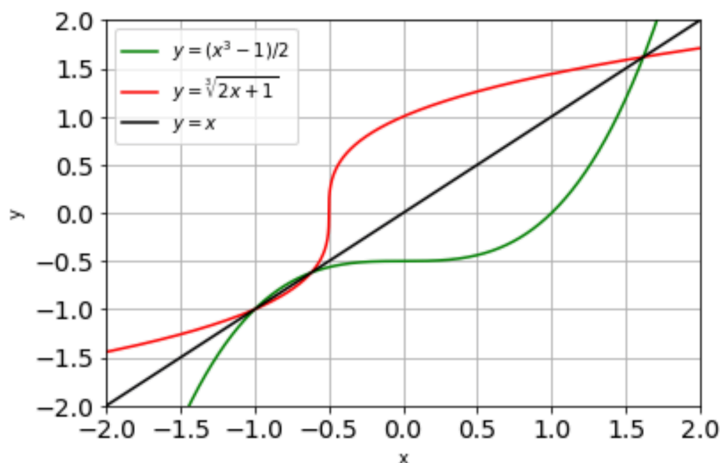
[解答1]. α を方程式 $\sqrt[3]{2x+1} = \frac{x^3-1}{2}$ の実数解とし, $\beta = f(\alpha)$ とする. $f(\alpha) = \frac{\alpha^3-1}{2} = \sqrt[3]{2\alpha+1}$ であるので

$$f(\beta) = \frac{\beta^3-1}{2} = \frac{2\alpha+1-1}{2} = \alpha$$

である. もし, $\alpha < \beta$ ならば, (1) より $f(x)$ は単調増加であるため, $f(\alpha) < f(\beta)$ となる. これは $\beta < \alpha$ となり矛盾である. 同様の議論により, $\alpha = \beta = \frac{\alpha^3-1}{2}$ を得る. 方程式 $\alpha = \frac{\alpha^3-1}{2}$ を解くと, $\alpha = -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ を得る. 簡単な計算からこれらが元の方程式 $\sqrt[3]{2x+1} = \frac{x^3-1}{2}$ の実数解であることがわかるので, 実数解は $-1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である.

[解答 2]. α を方程式 $\sqrt[3]{2x+1} = \frac{x^3-1}{2}$ の実数解とする. (1) から $f(x) = \frac{x^3-1}{2}$ の逆関数が存在し, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x+1}$ である. よって $f(\alpha) = f^{-1}(\alpha)$ となる α を求めれば良い. $y = f(x)$ のグラフと $y = f^{-1}(x)$ のグラフは $y = x$ を軸にして対称であるので¹ $\alpha = f(\alpha) = \frac{\alpha^3-1}{2}$ となる. これを解いて $\alpha = -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ を得る.

[補足]. $y = \frac{x^3-1}{2}$ のグラフ, $y = \sqrt[3]{2x+1}$ のグラフ, $y = x$ のグラフを書くと以下の通りになります.



中間レポートおまけ問題. (授業第 1,2,5 回の内容.)

次の問いに答えよ.

(1). 地球上ではいかなる時間でも, ある赤道上の点 x とその対蹠点 y で, x と y の気温が同じような点の組 (x, y) が存在することを示せ. ただし地球は球体であると仮定して良い. ここで対蹠点とは地球の裏側の点のことである.

(2). $a < b$ なる任意の実数 a, b について, $a < q < b$ となる有理数 q が存在することを示せ.

● 中間レポートおまけ問題解答例.

(1). 大きな実数 $R > 0$ を取って, 地球の表面 $S = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R\}$ として良い.

$$\begin{array}{llll} F: S & \rightarrow & \mathbb{R} & \gamma: [0, 2\pi] \rightarrow S \\ p & \mapsto & \text{点 } p \text{ での気温} & \theta \mapsto (R \cos \theta, R \sin \theta, 0) \end{array}$$

とおくと, 点 $\gamma(\theta)$ は地球 S の赤道上の点であり, $0 \leq \theta \leq \pi$ について点 $\gamma(\theta + \pi)$ は点 $\gamma(\theta)$ の対蹠点である. そこで $[0, \pi]$ 上の関数 f を

$$\begin{array}{ll} f: [0, \pi] & \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto F(\gamma(\theta + \pi)) - F(\gamma(\theta)) \end{array}$$

¹理由は次の通りです: $y = x$ を軸にして点 (a, b) と対称な点は (b, a) です. 「 (a, b) が $y = f(x)$ のグラフ上の点であること」は, 「 (b, a) が $y = f^{-1}(x)$ のグラフ上の点であること」と同値であるので, この対称性が言えます.

とすると, $f(\theta)$ は連続であり²,

$$f(\pi) = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(\pi)) = F(\gamma(0)) - F(\gamma(\pi)) = -f(0) \text{ である.}$$

$f(0) = f(\pi)$ のとき, $f(0) = 0$ となる. よって, $x = \gamma(0), y = \gamma(\pi)$ とおけば, y は x の対蹠点であり, $F(x) = F(y)$ から x と y の気温は等しい.

$f(0) \neq f(\pi)$ のとき, $f(\pi) = -f(0)$ であるので, $f(0) < 0 < f(\pi)$ または $f(\pi) < 0 < f(0)$ が成り立つ. よって中間値の定理より, ある $c \in [0, \pi]$ があって $f(c) = 0$ となる. 以上より, $x = \gamma(c), y = \gamma(c + \pi)$ とおけば, y は x の対蹠点であり, $F(x) = F(y)$ から x と y の気温は等しい.

[補足]. その他面白い解答には部分点を与えました.

(2). $c = \frac{a+b}{2}$ とし, $\epsilon = \frac{b-a}{4}$ とおく. ある有理点列 $\{a_n\}$ があって $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c$ となる. ϵ - δ 論法から, ある自然数 N があって $N < n$ ならば $|c - a_n| < \epsilon$ となる. よって $q = a_{N+1}$ とおくと q は有理数であり

$$c - \epsilon < q < c + \epsilon$$

である. 簡単な計算から $a < c - \epsilon$ かつ $c + \epsilon < b$ であるので, $a < q < b$ である.

[補足]. アルキメデスの性質を用いた解答で, 証明に穴がない場合には, 正答としました.

中間レポートについて.

第1問から第4問を通して, 正答率 82%でした. とてもよくできていたと思います. 各問題を通しての感想は以下のとおりです.

- 第1問. 正答率 82%. 意外と計算ミスが多かったです. 特に (1) の計算ミスが非常に多かったです. レポートを提出する前にはきちんと計算チェックをするようにしてください. また計算の過程を書いてない答案も見られました. きちんと計算の過程を書いてください. (減点の対象となる場合があります.)
- 第2問. 正答率 71%. おそらくベキ級数を使った適当な答案が出るだろうと思って出した問題です. しかしそういった答案は少ししかありませんでした. 補足でも述べた通り (1) は微分を 5 回やっても示せます.
- 第3問. 正答率 98%. ほぼ全員できてました. 非常に素晴らしいです. (4) の公式はマチンの公式と呼ばれます. 実は円周率 π の近似値はマチンの公式に似た公式と $\tan^{-1}x$ のテイラー展開を用いて求められています.
- 第4問. 正答率 70%. 元々の問題は (2) だけでしたが, 流石にそれでは難しすぎると思い, (1) を加えました. 意外にも正答率が予想より高くてびっくりしました. 大変優秀だと思います.

²ここにある種の連続性を仮定している.

期末レポート解答例

担当教官: 岩井雅崇 (いわいまさたか)

第 1 問. (授業第 9,10 回の内容.)

次の (1) から (4) までの不定積分を求めよ.

$$(1). \int x e^{x^2} dx \quad (2). \int \frac{x^3-1}{x^2+1} dx \quad (3). \int \frac{2}{x(x-1)(x-2)} dx \quad (4). \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$$

ただし答えを導出する過程を記した上で, 答えは次のように書くこと.

$$(\text{例題}) \int \sin x dx$$

$$(\text{答え}) \int \sin x dx = -\cos x$$

● 第 1 問解答例.

以下, 積分定数は省略する.

$$(1). \left(\frac{e^{x^2}}{2}\right)' = x e^{x^2} \text{ であるので,}$$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} \text{ である.}$$

(2).

$$\frac{x^3-1}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x-1}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \text{ であるので,}$$

$$\int \frac{x^3-1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \log|x^2+1| - \tan^{-1}x \text{ である.}$$

(3).

$$\frac{2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} \text{ であるので,}$$

$$\int \frac{2}{x(x-1)(x-2)} dx = \log \left| \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \right| \text{ である.}$$

(4). $t = \sqrt{x+1}$ とおくと, $t^2 = x+1$ より, $2t dt = dx$ であるので,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{1}{(t^2-1)t} 2t dt = \int \frac{2}{(t^2-1)} dt \\ &= \int \frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)} dt = \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} dt \\ &= \log|t-1| - \log|t+1| = \log \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| \text{ である.} \end{aligned}$$

第2問. (授業第9,10回の内容.)

(1). a を正の実数とし, $f(x)$ を $[-a, a]$ 上の連続関数とする. 任意の $x \in [-a, a]$ について $f(-x) = -f(x)$ であると仮定する. このとき $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ であることを示せ.

(2). 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-2}^2 \left(x^3 \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{4-x^2} dx$$

● 第2問解答例.

(1). $t = -x$ において置換積分をすると, $dt = -dx$ より

$$\int_{-a}^a f(x)dx = - \int_a^{-a} f(-t)dt = \int_{-a}^a f(-t)dt = - \int_{-a}^a f(t)dt = - \int_{-a}^a f(x)dx.$$

以上より $2 \int_{-a}^a f(x)dx = 0$ となるので, $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ となる.

(2). $g(x) = x^3 \cos \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2}$ とおくと, $g(x)$ は $[-2, 2]$ 上の連続関数で, 任意の $x \in [-2, 2]$ について

$$g(-x) = (-x)^3 \cos \frac{(-x)}{2} \sqrt{4-(-x)^2} = -x^3 \cos \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} = -g(x)$$

である. よって (1) より,

$$\int_{-2}^2 \left(x^3 \cos \frac{x}{2} \right) \sqrt{4-x^2} dx = 0 \quad \text{である.}$$

一方 $\int_{-2}^2 \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2} dx$ について, $x = 2 \cos t$ と置換積分すれば, $dx = 2(-\sin t)dt$ であるので,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2} dx &= \int_{\pi}^0 \frac{1}{2} \sqrt{4-4(\cos t)^2} 2(-\sin t) dt \\ &= \int_0^{\pi} 2(\sin t)^2 dt = \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt \\ &= \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

以上より $\int_{-2}^2 \left(x^3 \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{4-x^2} dx = \pi$ である.

第3問. (授業第9,10,11回の内容.)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx$$

とおく. 以下の問いに答えよ. ただしこの広義積分が収束することは仮定してよい. (したがって置換積分法や部分積分法などは自由に使って良い.)

(1). $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x) dx$ を示せ.

(2). $2I = -\frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x) dx$ を示せ.

(3). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x) dx$ を I を用いて表せ.

(4). I の値を求めよ.

● 第3問解答例.

(1). $t = \frac{\pi}{2} - x$ と置換積分すれば, $dx = -dt$ であるので,

$$I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \log\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x) dx.$$

(2). (1) を用いると,

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x) dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x) dx. \end{aligned}$$

(3). $t = 2x$ と置換積分すれば, $x = \frac{t}{2}$ より $dx = \frac{1}{2} dt$ であるので,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \log(\sin t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t) dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin t) dt. \end{aligned}$$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin t) dt$ に関しては, $t = s + \frac{\pi}{2}$ と置換積分すれば,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\sin\left(s + \frac{\pi}{2}\right)\right) ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos s) ds = I$$

以上より,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x) dx = \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin t) dt = \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} I = I \text{ である.}$$

[補足.] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x) dx = \frac{\pi}{2} \log 2 + 2I$ も正解としました.

(4). (2) と (3) により,

$$2I = -\frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x) dx = -\frac{\pi}{2} \log 2 + I$$

であるので, $I = -\frac{\pi}{2} \log 2$ である.

第 4 問. (授業第 11 回の内容.)

p を実数とする. 広義積分

$$\int_1^\infty (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \, dx$$

が収束するような p の範囲を求めよ.

● 第 4 問解答例.

求める範囲が $p < -1$ であることを示す.

(1). $p < -1$ のとき, 広義積分 $\int_1^\infty (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \, dx$ が収束することを示す.

$p + \epsilon < -1$ となるように $\epsilon > 0$ を取ると,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x}{x^{p+\epsilon}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + 2\sqrt{x})^{2p}}{x^p} \frac{\log x}{x^\epsilon} = 0.$$

よって, ある $C > 0$ があって, $C \leq x$ ならば $(1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \leq x^{p+\epsilon}$ となる. $p + \epsilon < -1$ であるので, 広義積分 $\int_C^\infty x^{p+\epsilon} dx$ は収束する. これより第 11 回授業でやった定理から, 広義積分 $\int_C^\infty (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \, dx$ も収束する. $\int_1^C (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \, dx$ は定積分で有限の値を取るのだから, 広義積分 $\int_1^\infty (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \, dx$ は収束する.

(2). $-1 \leq p \leq 0$ のとき, $\int_1^\infty (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \, dx$ が $+\infty$ に発散することを示す.

$1 \leq x$ ならば, $1 + 2\sqrt{x} \leq \sqrt{x} + 2\sqrt{x} \leq 3\sqrt{x}$ より,

$$(1 + 2\sqrt{x})^{2p} \geq 3^{2p} x^p$$

である. 一方 $3 \leq x$ ならば $\log x \geq 1$ であるので, $3 \leq x$ ならば

$$(1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \geq 3^{2p} x^p$$

である. $-1 \leq p$ により広義積分 $\int_3^\infty 3^{2p} x^p dx$ は $+\infty$ に発散するので, 第 11 回授業でやった定理より, 広義積分 $\int_3^\infty (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \, dx$ も $+\infty$ に発散する. $\int_1^3 (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \, dx$ は定積分で有限の値を取るのだから, 広義積分 $\int_1^\infty (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \, dx$ は $+\infty$ に発散する.

(3). $0 < p$ のとき, $\int_1^\infty (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \, dx$ が $+\infty$ に発散することを示す.

$1 \leq x$ ならば, $1 + 2\sqrt{x} \geq 2\sqrt{x}$ より,

$$(1 + 2\sqrt{x})^{2p} \geq 2^{2p} x^p$$

である. 一方 $3 \leq x$ ならば $\log x \geq 1$ であるので, $3 \leq x$ ならば

$$(1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \geq 2^{2p} x^p$$

である. $-1 \leq p$ により広義積分 $\int_3^\infty 2^{2p} x^p dx$ は $+\infty$ に発散するので, 第 11 回授業でやった定理より, 広義積分 $\int_3^\infty (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x dx$ も $+\infty$ に発散する. $\int_1^3 (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x dx$ は定積分で有限の値を取る所以, 広義積分 $\int_1^\infty (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x dx$ は $+\infty$ に発散する.

(1) から (3) によって広義積分 $\int_1^\infty (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x dx$ が収束するような p の範囲は $p < -1$ である.

[別解.]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x}{x^p \log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \right)^{2p} = 2^{2p}$$

であるので, ある $C > 0$ があって, $C \leq x$ ならば

$$\frac{2^{2p}}{2} x^p \log x \leq (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x \leq \frac{3 \cdot 2^{2p}}{2} x^p \log x$$

である.³ 第 11 回授業演習問題から, $p < -1$ ならば広義積分 $\int_C^\infty x^p \log x dx$ は収束し, $p \geq -1$ ならば広義積分 $\int_C^\infty x^p \log x dx$ は $+\infty$ に発散する. よって第 11 回授業でやった定理より, $p < -1$ ならば広義積分 $\int_C^\infty (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x dx$ は収束し, $p \geq -1$ ならば広義積分 $\int_C^\infty (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x dx$ は $+\infty$ に発散する. よって求める範囲は $p < -1$ である. ($\int_1^C (1 + 2\sqrt{x})^{2p} \log x dx$ は定積分で有限の値を取るため.)

期末レポートおまけ問題. (授業第 11 回の内容.)

次の問いに答えよ.

(1). 広義積分

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)} dx$$

は収束するか発散するか. 理由とともに答えよ.

(2). 広義積分

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2} dx$$

は収束するか発散するか. 理由とともに答えよ.

● 期末レポートおまけ問題解答例.

(1).

$$(\log(-\log x))' = \frac{1}{-\log x} \cdot \frac{-1}{x} = \frac{1}{x \log x} \text{ であるので,}$$

³ グラフを書いて見ればわかると思います.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\log(-\log x) \right]_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} = \log\left(-\log \frac{1}{2}\right) - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \log(-\log \epsilon).$$

$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \log(-\log \epsilon) = +\infty$ であるため、広義積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)} dx$ は $+\infty$ に発散する。
(2).

$$\left(\frac{-1}{\log x} \right)' = \frac{-1}{(\log x)^2} \frac{-1}{x} = \frac{1}{x(\log x)^2} \text{ であるので,}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\frac{-1}{\log x} \right]_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\log \frac{1}{2}} - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{-1}{\log \epsilon}.$$

$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{-1}{\log \epsilon} = 0$ であるため、広義積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2} dx$ は収束する。

期末レポートについて.

第1問から第4問を通して、正答率 81%でした。とてもよくできていたと思います。各問題を通しての感想は以下のとおりです。

第1問. 正答率 94%. 非常によくできていました。大学入試で不定積分をかなり練習したと思うので、解きやすかったのではないのでしょうか。

第2問. 正答率 82%. これも高校でやったかもしれません。元ネタの問題はノーヒントで (2) の値を求める問題だったのですが、ちょっと難しいかなと思って (1) の誘導をつけました。

第3問. 正答率 96%. 有名問題です。元ネタの問題ではノーヒントで $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx$ の値を求める問題だったのですが、あまりに難しいので誘導をつけました。複素解析でも求められる非常に面白い積分です。

第4問. 正答率 36%. 中間レポートの正答率が良かったので、この問題で調整しました。かなりの難問だと思います。こういう問題の解き方のコツとして、解答を書く前におおよその正解を掴むことです。(議論を構築するのは正解を把握してからです。)

私が答えを書く前にやった考察は以下の通りです。「 $(1+2\sqrt{x})^{2p} \log x$ は $[1, \infty)$ で連続だから、広義積分が収束するか発散するかは x が大きいところの話である。 $(1+2\sqrt{x})^{2p} \log x$ は x が大きいときはだいたい $x^p \log x$ だ。⁴ そして $x^p \log x$ は $p < -1$ のとき収束するから、だいたい答えは $p < -1$ だろう。」この考察を元に解答を作成しております。

⁴つまり $(1+2\sqrt{x})^{2p} \log x = O(x^p \log x) (x \rightarrow \infty)$ ということです。