正則接ベクトル束が正値性を持つ部分束を含むときの代数多様体の構造について

岩井 雅崇　(大阪市立大学数学研究所, 京都大学数理解析研究所)

概　要

射影代数多様体 X の正則接ベクトル束 T_X が正値性を持つとき, X の構造は限定されることがわかっている. 一方で Peternell は「局所自由部分層 $\mathcal{F} \subset T_X$ が正値性を持つときも, X の構造は限られるであろう」と予想した. この講演では Peternell の問題について, 関連研究や講演者によって得られた結果を紹介する.

1. 代数的な正値性

複素代数幾何学の最も基本的な概念は直線束やベクトル束の豊富性である. 豊富性は代数的な正値性の基本的な概念であり, それは下の図のように強ネフ, ネフ, 巨大, 擬有効へ一般化される.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{豊富}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{強ネフ}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{ネフ}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\text{巨大}} \arrow[rr, Rightarrow] & & \boxed{\text{擬有効}}
\end{tikzcd}$$

これらの概念は代数多様体の分類や極小モデル理論で用いられる.

2. 正則接ベクトル束が正値性を持つ代数多様体について

n 次元射影代数多様体 X の正則接ベクトル束 T_X が正値性を持つとき, X の構造は限定されることがわかっている. 例えば, 森 [Mor79] から「T_X が豊富ならば, X は複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ と双正則である」ことが知られており, Campana-Peternell[CP91] と Demailly-Peternell-Schneider[DPS94] から「T_X がネフならば, X は Fano 多様体と Abel 多様体で構成される」ことが知られている. これらの結果は [LOY19], [FM19], [Iwa18], [HIM19] から T_X が強ネフ, 巨大, 擬有効のときでも拡張できることがわかっている.

3. 正則接ベクトル束が正値性を持つ部分束を含むときの代数多様体の構造について

一方で Peternell は次のような問題を提起した.

問題 1. [Pet01] 局所自由部分層 $\mathcal{F} \subset T_X$ が正値性を持つとき, X の構造を調べよ.

「局所自由部分層 $\mathcal{F} \subset T_X$ が正値性を持つ」という, いささか弱い条件でも X の構造が限定されるとはあまり思えないが, 意に反して次の研究が知られている.

定理 2. [AW01][Liu19] 局所自由部分層 $\mathcal{F} \subset T_X$ が豊富ならば, X は $\mathbb{CP}^n$ と双正則であり, $\mathcal{F}$ は $T_{\mathbb{CP}^n}$ または $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)^{\oplus r}$ と同型である.

定理 3. [LOY20] 局所自由部分層 $\mathcal{F} \subset T_X$ が強ネフならば, X は hyperbolic な射影代数多様体 Y 上の $\mathbb{CP}^d$ 束 $f : X \to Y$ である. また $\mathcal{F}$ は次のどちらかを満たす.

1. $\mathcal{F}$ は $T_{X/Y}$ と同型.
2. $\mathcal{F}$ は数値的射影的平坦 (numerically projectively flat) かつ f のファイバー $\mathbb{CP}^d$ 上で $\mathcal{F}|_{\mathbb{CP}^d} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^d}(1)^{\oplus r}$ となる.

4. 主定理

この研究ではPeternellの問題1に関して以下のように部分的な解決をした.

定理 4. [Iwa20] $\mathcal{F} \subset T_X$ をランク r の部分束とする. $\mathcal{F}$ が擬有効な葉層であるとき, ある滑らかな射 $f : X \to Y$ と Y 上の数値的平坦な部分束な葉層 $\mathcal{G} \subset T_Y$ があり, 次を満たす.

- f のファイバーは全て有理連結.
- $\mathcal{F} = f^{-1}\mathcal{G}$ ($\mathcal{F}$ は $\mathcal{G}$ の"葉層の意味で"pull-backとなる).
- ベクトル束の完全列 $0 \to T_{X/Y} \to \mathcal{F} \to f^*\mathcal{G} \to 0$ が存在する.

上の状況において, さらに以下が成り立つ.

1. $\mathcal{F}$ が豊富ならば, X は $\mathbb{CP}^n$ と双正則であり, $\mathcal{F}$ は $T_{\mathbb{CP}^n}$ と同型.
2. $\mathcal{F}$ がネフならば, f の全てのファイバーはFano多様体である.
3. $\mathcal{F}$ が巨大ならば, f の全てのファイバーは $\mathbb{CP}^r$ であり, $\mathcal{F}$ は $T_{X/Y}$ と同型.
4. $\mathcal{F}$ がネフかつ巨大ならば, X は $\mathbb{CP}^n$ と双正則であり, $\mathcal{F}$ は $T_{\mathbb{CP}^n}$ と同型.

ざっくりゆうと, 部分束な葉層 $\mathcal{F}$ が正値性を持つとき, X は「$\mathbb{CP}^r$ やFano多様体などの有理連結多様体」と「数値的平坦な部分束な葉層を持つ代数多様体」で構成される.「数値的平坦な部分束な葉層 $\mathcal{G} \subset T_Y$ を持つ代数多様体 Y」の最も簡単な例は, Abel多様体(トーラス) である. このとき $\mathcal{G}$ を線形葉層とすれば良い. また T_Y が数値的平坦である場合は, Y のある有限被覆がAbel多様体になることも知られている.

補足になるが,「数値的平坦な部分束な葉層を持つ代数多様体」は完全には分類されてない. しかし $\mathcal{G}$ のランクが次元に近い場合には[Tou08], [PT13], [Dru17b], [Dru18b]により分類されている.

参考文献

[AW01] M. Andreatta, J. A. Wiśniewski. *On manifolds whose tangent bundle contains an ample subbundle.* Invent. Math., **146** (1):209-217, (2001).

[CP91] F. Campana, T. Peternell, *Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective.* Math. Ann., **289** (1991), 169–187.

[DPS94] J.-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider, *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles.* J. Algebraic Geom., **3**, (1994), no.2, 295–345.

[Dru17b] S. Druel. *Some remarks on regular foliations with numerically trivial canonical class.* Épijournal Geom. Algébrique **1** (2017), Art. 4, 20 pp.

[Dru18b] S. Druel. *Codimension one foliations with numerically trivial canonical class on singular spaces.* Preprint, arXiv:1809.06905. to appear Duke Math.

[FM19] M. Fulger, T. Murayama. *Seshadri constants for vector bundles.* Preprint, arXiv:1903.00610v2

[HIM19] G. Hosono, M. Iwai, S. Matsumura. *On projective manifolds with pseudo-effective tangent bundle.* Preprint, arXiv:1908.06421

[Iwa18] M. Iwai, *Characterization of pseudo-effective vector bundles by singular hermitian metrics.* Preprint, arXiv:1804.02146v2.

[Iwa20] *Almost nef regular foliations and Fujita's decomposition of reflexive sheaves*, arXiv:2007.13954

[LOY19] D. Li, W. Ou, and X. Yang. *On projective varieties with strictly nef tangent bundles.* J. Math. Pures Appl. **9**(2019),128:140–151.

[Liu19] J. Liu. *Characterization of projective spaces and $\mathbb{P}^r$-bundles as ample divisors.* Nagoya Math. J., **233** 155-169, (2019).

[LOY20] J. Liu, W. Ou, X. Yang. *Projective manifolds whose tangent bundle contains a strictly nef subsheaf.* Preprint, arXiv:2004.08507

[Mor79] S. Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles.* Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 593–606.

[PT13] J. V. Pereira, F. Touzet. *Foliations with vanishing Chern classes.* Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **44** (2013), no. 4, 731–754.

[Pet01] T. Peternell. *Subsheaves in the tangent bundle: integrability, stability and positivity.* School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000), 285–334, ICTP Lect. Notes, 6, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001.

[Tou08] F. Touzet. *Feuilletages holomorphes de codimension un dont la classe canonique est triviale. (French) Holomorphic foliations of codimension one with trivial canonical class* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 41 (2008), no. 4, 655–668.