11/30

Newer version

On asymptotic base loci of relative anti canonical divisors.

(Joint work with Sho Ejiri (Osaka Univ.)
and Shin-ichi Matsumura (Tohoku Univ.))

§1 Main result.
§2 B_+ の場合
§3 B_- の場合
§4 気になる問題など.

Notation

- X, Y: smooth projective varieties $/\mathbb{C}$
- $f: X \to Y$ surjective morphism
  with connected fiber.
  (algebraic fiber space)
- $-K_{X/Y} := -(K_X - f^*K_Y)$. $\left(K_X = \det \Omega_X\right)$
  relative anti-canonical divisor.

"$-K_{X/Y}$ は正値性をもつらしい"
(ample, nef, ...)

§1 Main Result.

Thm (Kollár–Miyaoka–Mori 92)
If $-K_{X/Y}$ is ample, then $\dim Y = 0$

(Habitation Thesis)
Thm (Cao 19, Cao–Höring 19.
Campana–Cao–Matsumura 19.
Patakfalvi–Zdanowicz 19.)
(appendix with Codogni)

If $-K_{X/Y}$ is nef, then f is locally trivial. (analytic fiber bundle)

($\forall y \in Y$, $\exists U \subset Y$ Euclid open near y.
s.t. $f^{-1}(U) \underset{\text{bihalo}}{\simeq} U \times F$ $F = f^{-1}(y)$ fiber)

Rem. 上の結果をbigやpsefのときに拡張したい。

Example $\pi : F_e \to \mathbb{P}^1$

$-K_{F_e/\mathbb{P}^1}$ is big if $e > 0$

(KMM type は 純粋には拡張できない)

Main Thm (Ejiri-I-Matsumura20)

① If $f(\mathbb{B}_+(-K_{X/Y})) \neq Y$, then $\dim Y = 0$

② If $f(\mathbb{B}_-(-K_{X/Y})) \neq Y$, then $\mathbb{B}_-(-K_{X/Y}) = \phi$
($-K_{X/Y}$ is nef).

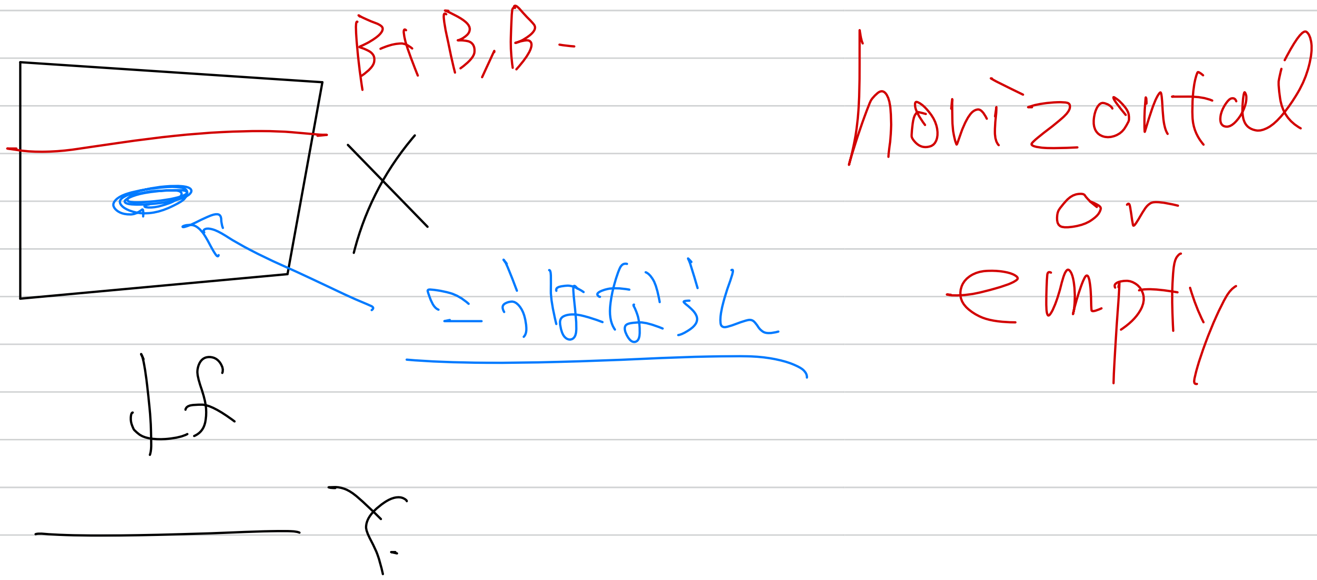
In particular, f is locally isotrivial.

③ If $f(\mathbb{B}(-K_{X/Y})) \neq Y$, then $\mathbb{B}(-K_{X/Y}) = \phi$
($-K_{X/Y}$ is semiample)

③' If $-K_{X/Y}$ is semiample,
$\exists\, \pi : Y' \to Y$ finite étale

$$\begin{tikzcd} F\times Y' \arrow[d, phantom, "\cong"] & \\ X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

s.t. $X \times_Y Y' \underset{\text{bihol.}}{\simeq} F \times Y'$ (F is fiber of f)



Rem ・③' is already proved by [Ambro05]

(Ambroの証明ではklt pairでもok!)

・Pairのときは? (X, Y smooth)

Δ effective $\mathbb{Q}$-divisor on X.

① は (X, Δ) lc-$\mathbb{Q}$ pairでもok.

($-K_{X/Y}$ のかわりに $-(K_{X/Y}+\Delta)$ を考える.

②, ③ は (X, Δ) klt-$\mathbb{Q}$ pairのときok

(lcはムリそう.)

・Singular varietyの場合.

① について [EIM20] X lc まで Y canonical まで

(general fiber上でlc)

[Chang20] Y canonical までいける!

② について ??? (§4でふれる)

§2. B_+の場合 (Main thm①)

(複素解析幾何の視点から)

$f: X \to Y$ surj morphism with connected fiber, between sm prj vars. $\dim Y \neq 0$.

$Y \supset V$ regular locus $\left(\begin{array}{c} V = \{ y \in Y \mid f^{-1}(y) \text{ is sm variety} \} \\ \text{Zariski open} \end{array} \right)$

ThmA. [EIM20]

E : $\mathbb{Q}$-Cartier divisor on Y.

Then
- $V \cap B_+(E) \subset f(B_+(f^*E - K_{X/Y}))$
- $V \cap B_-(E) \subset f(B_-(f^*E - K_{X/Y}))$

ThmA $\Rightarrow$ Main thm①.

(pf) $f(B_+(-K_{X/Y})) \neq Y$ & $\dim Y \neq 0$

$\Rightarrow V \cap B_+(\underbrace{0}_{\text{zero divisor}}) \subset f(B_+(-K_{X/Y})) \neq Y$

$\Rightarrow B_+(0) \neq Y \Rightarrow 0$ is big divisor on Y 矛盾.

(Rem. 実はMain thm①は singular Hermitian metric on direct image sheaf をつかってもできる (こっちの方がかんたん)
$\mathcal{O} = f_*(mK_{X/Y} - mK_{X/Y})$ から)

Cor

- [Kollar-Miyaoka-Mori 92, Fujino-Gongyo 12]
  f smooth & $-K_X$ ample $\Rightarrow$ $-K_Y$ ample.
- [Miyaoka 93, Fujino-Gongyo 14]
  f smooth & $-K_X$ nef $\Rightarrow$ $-K_Y$ nef
- [Deng 17]
  $-K_X$ big & $f(B_+(-K_{X/Y})) \neq Y$ $\Rightarrow$ $-K_X$ big
  $-K_X$ psef & $f(B_-(-K_{X/Y})) \neq Y$ $\Rightarrow$ $-K_X$ psef.

証 $E = -K_Y$ として Thm A を適応する。

Rem. B はむずかしい!! (anal. ではむずい)

- [Fujino-Gongyo 12]
  $-K_X$ nef and big, & f smooth
  $\Rightarrow$ $-K_Y$ nef and big

  にかんしては Thm A からはでないが
  同じぎろんででる.

Thm A の証明 (Original idea は Deng 氏に基づく)

A_Y ample を正のようにとり、

$A_X - 2f^*A_Y$ ample となるように A_X ample をとる。

$\boxed{\text{示すこと}}$ $V \not\subset f(B_+(f^*E - kX_{X/Y})) \ni y \Rightarrow V \not\subset B_+(E) \ni y$

$V \not\subset f(B_+(f^*E - kX_{X/Y})) \ni y$ とする。

$V \not\subset B_+(E) = V \not\subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}_{>0}} \mathbb{B}(kE - A_Y)$ より

$\exists m \in \mathbb{N}_{>0}$ $V \not\subset \mathbb{B}(mE - A_Y) \ni y$ を示す。

つまり $H^0(Y, mE - A_Y) \ni {}^{\exists}s,\ s(y) \neq 0$ を示せばよい

$$\begin{array}{c} H^0(Y, mE - A_Y) \\ \| \\ H^0(X, f^*(mE - A_Y)) \end{array}$$

$$X \not\supset B_+(f^*E - kX_{X/Y}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}_{>0}} \mathbb{B}(f^*E - kX_{X/Y} - \tfrac{1}{m}A_X)$$

$$\underset{\text{ネーター性}}{=} \mathbb{B}(mf^*E - mkX_{X/Y} - A_X)$$

よって ${}^{\exists}$singular Hermitian metric h_S on $mf^*E - mkX_{X/Y} - A_X$

s.t. • $X - \mathbb{B}(mf^*E - mkX_{X/Y} - A_X)$ 上 h_S は smooth

• $\sqrt{-1}\,\Theta_{h_S} \geq 0$

よって.

$$f^*(mE-A_Y)$$

$$= mk_{X/Y} + \boxed{(mf^*E - mk_{X/Y} - A_X) + (A_X - 2f^*A_Y)} + f^*A_Y$$

$$L := (mf^*E - mk_{X/Y} - A_X) + (A_X - 2f^*A_Y)$$

$$h := h_S \cdot h_{am}.$$ (h_{am} is positive metric on $A_X - 2f^*A_Y$)

↑ [Cao19] の ①〜③ を満たす.

(Albanese)

Extension

$$H^0(X, f^*(mE-A_Y)) \twoheadrightarrow H^0(X_y, f^*(mE-A_Y))$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ H^0(Y, mE-A_Y) & & H^0(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = \mathbb{C}. \end{array}$$

$\longrightarrow \exists s \in H^0(Y, mE-A_Y)$, s.t. $s(y) \neq 0$ //

(B−, lc pair で十分
↑
A足して klt pair にする)

(いあわたら) Fujino-Gongyo 12.

$-K_X$ nef and big $\Rightarrow$ $-K_Y$ big をいう

$m, k \in \mathbb{N}_{>0}$ とおく

$f^*(-kmK_Y - A_Y)$

$= kmK_{X/Y} + (-kmK_X - A_X) + (A_X - 2f^*A_Y) + f^*A_Y$

$-K_X$ big より $\exists m, \exists E$ eff, $-mK_X - 2A_X \sim E$.

$\exists k, (X, \frac{1}{km}E)$ klt.

よって $-kmK_X - A_X$

$\sim \underbrace{(\overbrace{-(k-1)mK_X + A_X}^{\text{nef}})}_{\text{ample } h_{am}'} + \underbrace{(-mK_X - 2A_X)}_{\sim E}$.

$\exists h = h_{am}' \cdot h_E$ s.t. $\mathcal{J}(h^{\frac{1}{km}}|_F) = \mathcal{O}_F$

F: general fib.

$\sqrt{-1}\Theta_h \geq 0$.

$\therefore \tilde{L} = (-kmK_X - A_X) + (A_X - 2f^*A_Y)$ とおけばよく.

$\tilde{h} = h \cdot h_{am}$.

Cao's extension から $H^0(Y, -kmK_Y - A_Y) \ni s$

$s(y) \neq 0$ ($y \in Y$ gen'l pont).

$\therefore$ $B_+(-K_Y) \neq Y$. $-K_Y$ big.

(11月16日 3a2) Cao's extension.

Atl a-ese

A = very ample on Y とし

① $K_Y - A$ ample

② Seshadri constant $\varepsilon(K_Y - A, y) > \dim Y + 1$ とする.

・$A_Y = 2A$ とすると

$$mK_{X/Y} + L + f^*A_Y$$

$$= K_X + \left[\frac{m-1}{m}(mK_{X/Y}+L) + \frac{1}{m}L + f^*(-K_Y+A) + f^*A\right]$$

$= \tilde{L}$ とおく.

$h_B^{\frac{m-1}{m}}$ $\quad h^{\frac{1}{m}}$ $\quad \exists h_{sm}$ $\quad f^*h_A$

(h_B: m-Bergman metric on $mK_{X/Y}+L$) $\quad$ smooth semipositive $\quad$ h_A positive on Y.

$\tilde{h} = h_B^{\frac{m-1}{m}} h^{\frac{1}{m}} \cdot h_{sm} \cdot f^*h_A$ とおく. $\sqrt{-1}\Theta_{\tilde{h}} \geq 0$.

この $(\tilde{L}, \tilde{h})$ について L^2 extension を使う.

$\boxed{方法1}$ (Cao'19, Deng'17)

Use Demailly's jet extension. 15.

$\boxed{方法2}$ (I. 20)

一回 X_y の近くで extension してから L^2 estimate する

(Use Cao-Demailly-Matsumura'17)

§3 B_- の場合 (Main thm ②)

めちゃくちゃややこしいので図をつかう

$f(B_-(-K_{X/Y})) \neq Y \Rightarrow \exists$ locally trivial

を示す

まずが $B_-(-K_{X/Y}) = \varphi$ をいう

§4 気になる問題など

① もっと代数的な証明はできないか?(§3)
(singular Hermitian metricを使わない証明)

・正標数のときどうなる?(Patakfalvi-Zdanowicz みたらできそう?)

・X, Yがsingularなときは?
(Yはcanonicalぐらいまで?
Xはkltまでかな?)

<u>関連話題</u> Thm [Wang 20].

X: klt variety, $-K_X$ nef.
If $\pi_1(X_{reg})$ is almost nilpotent,
then we have a structure theorem of X
(Cao, Cao-Höring type)

<u>Conj</u> $-K_X$ nef, X klt. var
$\Rightarrow \pi_1(X_{reg})$ is almost nilpotent?

(今がんばってやってます。
部分的解決できそう)

② cpt Kähler の場合は?

Main thm ① は いけそう
Main thm ②, ③ は?

<u>関連話題</u>

X cpt Kähler, $-K_X$ nef.
このときの structure theorem はまだない.
(Albanese map は locally trivial? [cf: Ca19]
(Cao's Habilitation thesis に なんかのしんがある
(Kernel foliation --??)

③ "$-K_X$ nef ⇒ $-K_Y$ nef" に対して.

Fujino Gongyo14 | f sm & $-K_X$ nef ⇒ $-K_Y$ nef. .

(Gongyo) f が <u>semistable</u> で いける?

(semistable in the sense of Abramovich–Karu)

· Use Takayama's technique ('16) でいける..

<u>Question</u> X klt, (lc) のときは ムリそうだが
反例ある?