相対的反標準因子のasymptotic base lociについて

岩井 雅崇　(阪市大数学研)
江尻 祥　(大阪大学)
松村 慎一　(東北大学)

概　要

本講演では射影的代数多様体間のファイバー連結な全射 $f : X \to Y$ に関して相対的反標準因子 $-K_{X/Y}$ の振る舞いについて講演する.

1. 代数的な正値性と asymptotic base loci

複素代数幾何学の最も基本的な概念は因子の豊富性である. 豊富性は代数的な正値性の基本的な概念であり, それは下の図のように半豊富, ネフ, 巨大, 擬有効へ一般化される.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{豊富}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{半豊富}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{ネフ}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\text{巨大}} \arrow[rr, Rightarrow] & & \boxed{\text{擬有効}}
\end{tikzcd}$$

これらの概念は代数多様体の分類や極小モデル理論で用いられる. 標準因子 K_X にこれらの代数的な正値性を応用して, 代数多様体の分類を行う.

因子 L の代数的な正値性を測る他の指標として, asymptotic base loci と呼ばれる X の部分集合 $\mathbb{B}_+(L)$, $\mathbb{B}(L)$, $\mathbb{B}_-(L)$ がある. $\mathbb{B}_+(L)$, $\mathbb{B}(L)$, $\mathbb{B}_-(L)$ は, それぞれ L がどれだけ豊富, 半豊富, ネフに近いかどうか測る指標であり, 以下の関係がある.

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{L\text{が半豊富} \Leftrightarrow \mathbb{B}(L) = \phi} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\boxed{L\text{が豊富} \Leftrightarrow \mathbb{B}_+(L) = \phi} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \boxed{L\text{がネフ} \Leftrightarrow \mathbb{B}_-(L) = \phi} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{L\text{が巨大} \Leftrightarrow \mathbb{B}_+(L) \neq X} \arrow[rr, Rightarrow] & & \boxed{L\text{が擬有効} \Leftrightarrow \mathbb{B}_-(L) \neq X}
\end{tikzcd}$$

2. 主結果

複素代数多様体間のファイバー連結な全射写像 $f : X \to Y$ に対して, 相対的反標準因子 $-K_{X/Y} := -K_X + f^*K_Y$ を考える. $-K_{X/Y}$ は代数的な正値性をあまり持たないことが先行研究で知られている.

定理 1.

1. [KMM92] $-K_{X/Y}$ が豊富ならば Y は 0 次元.

2. [Eji19] $-K_{X/Y}$ がネフかつ巨大ならば Y は 0 次元.

$\dim Y \neq 0$ でも $-K_{X/Y}$ がネフになる例や $-K_{X/Y}$ が巨大になる例は存在する. ところが $-K_{X/Y}$ がネフの場合は f の幾何構造が非常に特殊であることが知られている.

定理 2. [CH19]
$-K_{X/Y}$ がネフならば, f は解析的ファイバー束. (つまり, 任意の 2 つのファイバーが互いに双正則)

本研究 [EIM20] では $-K_{X/Y}$ が巨大や擬有効である場合への拡張を行った. 特に, asymptotic base loci と呼ばれる 3 つの集合 $\mathbb{B}_+(-K_{X/Y})$, $\mathbb{B}(-K_{X/Y})$, $\mathbb{B}_-(-K_{X/Y})$ を用いて以下のように先行研究の拡張を行った.

定理 3. [EIM20]

1. $f(\mathbb{B}_+(-K_{X/Y})) \neq Y$ ならば, Y は 0 次元である.
2. $f(\mathbb{B}(-K_{X/Y})) \neq Y$ ならば, $-K_{X/Y}$ は半豊富である. また X, Y を有限被覆で持ち上げることで, $X \cong Y \times F$ となる. ここで F は f のファイバーとする.
3. $f(\mathbb{B}_-(-K_{X/Y})) \neq Y$ ならば, $-K_{X/Y}$ はネフである. 特に f は解析的ファイバー束である.

参考文献

[CH19] J. Cao, A. Höring, *A decomposition theorem for projective manifolds with nef anticanonical bundle*, J. Algebraic Geom. **28** (2019), 567–597.

[Eji19] S. Ejiri *Positivity of anti-canonical divisors and F-purity of fibers*, Algebra Number Theory, **13** (2019), 2057-2080.

[EIM20] S. Ejiri, M. Iwai, S. Matsumura. *On asymptotic base loci of relative anti-canonical divisors of algebraic fiber spaces*, Preprint, arXiv:2005.04566

[KMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori, *Rationally connected varieties*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 3, 429–448.