

中間レポート解答例

担当教官: 岩井雅崇 (いわいまさたか)

第 1 問 (授業第 2-3 回の内容).

次の行列の計算を行え.

$$(1). \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \quad (2). \quad 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} - 2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

● 第 1 問解答例.

(1).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 8 \\ -14 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 7 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2).

$$\begin{aligned} & 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} - 2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 9 & -15 \end{pmatrix} - 2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 & -18 \\ -12 & 3 & -15 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 9 & -15 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 & 7 & -20 \\ -5 & -2 & -11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 9 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -14 & 40 \\ 10 & 4 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -17 & 52 \\ 10 & 13 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

第 2 問 (授業第 2-3 回の内容).

次の行列 A, B, C, D のうち, 積が定義される全ての組み合わせを求め, その積を計算せよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

● 第 2 問解答例.

1. A は 1×3 行列 B は 3×3 行列より行列の積 AB が定義できて AB は 1×3 行列で

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 6 & -27 \end{pmatrix}.$$

2. A は 1×3 行列 C は 2×3 行列より行列の積 AC は定義できない.

3. A は 1×3 行列 D は 3×1 行列より行列の積 AD が定義できて AD は 1×1 行列で

$$AD = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}.$$

4. B は 3×3 行列 A は 1×3 行列より行列の積 BA は定義できない.

5. B は 3×3 行列 C は 2×3 行列より行列の積 BC は定義できない.

6. B は 3×3 行列 D は 3×1 行列より行列の積 BD が定義できて BD は 3×1 行列で

$$BD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

7. C は 2×3 行列 A は 1×3 行列より行列の積 CA は定義できない.

8. C は 2×3 行列 B は 3×3 行列より行列の積 CB が定義できて CB は 2×3 行列で

$$CB = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 11 \\ 1 & -9 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. C は 2×3 行列 D は 3×1 行列より行列の積 CD が定義できて CD は 2×1 行列で

$$CD = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

10. D は 3×1 行列 A は 1×3 行列より行列の積 DA が定義できて DA は 3×3 行列で

$$DA = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 20 \\ -3 & 6 & -15 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

11. D は 3×1 行列 B は 3×3 行列より行列の積 DB は定義できない.

12. D は 3×1 行列 C は 2×3 行列より行列の積 DC は定義できない.

以上より積が定義できる組み合わせは AB, AD, BD, CB, CD, DA であり, 各々その積は以下の通りとなる.

$$AB = \begin{pmatrix} -21 & 6 & -27 \end{pmatrix}, AD = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}, BD = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix},$$

$$CB = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 11 \\ 1 & -9 & 2 \end{pmatrix}, CD = \begin{pmatrix} 26 \\ -13 \end{pmatrix}, DA = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 20 \\ -3 & 6 & -15 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

第3問 (授業第2-3回の内容).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおく. 次の問いに答えよ.}$$

- (1). A^2 と A^3 をそれぞれ求めよ.
- (2). $P^t P$ と ${}^t P P$ をそれぞれ求めよ.
- (3). ${}^t P A P$ を求めよ.
- (4). n を1以上の整数とする. $({}^t P A P)^n$ を n を用いて表せ.
- (5). n を1以上の整数とする. A^n を n を用いて表せ.

● 第3問解答例.

$$(1). A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$(2). {}^t P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ であるので,}$$

$$P^t P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$${}^t P P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(補足.) ${}^t P$ は P の逆行列である.

$$(3). {}^t P A P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(4). ({}^t P A P)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \text{ であることを数学的帰納法で示す. } n=1 \text{ の時は (3) より良い. } n-1$$

のとき等号が成立すると仮定すると, $({}^t P A P)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ となる.

よって $({}^tPAP)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ である.

(5). (2) より $({}^tPAP)^n = {}^tPA^nP$ となる (厳密に示すなら帰納法を使う). この等式に対し左から P をかけ右から tP をかけると (2) から

$$P({}^tPAP)^n {}^tP = P({}^tPA^nP){}^tP = (P{}^tP)A^n(P{}^tP) = A^n$$

となる. 以上より (4) から

$$A^n = P({}^tPAP)^n {}^tP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3^n & -1+3^n \\ -1+3^n & 1+3^n \end{pmatrix}.$$

第4問 (授業第4-6回の内容).

次の行列を簡約化し, その階数を求めよ.

$$(1). \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (2). \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad (3). \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

● 第4問解答例.

以下この解答において \rightarrow は行基本変形を表すものとする.

(1).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行目と } 2 \text{ 行目を入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行目で掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{2 \text{ 行目で掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行目 } \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

階数は2である.

(2).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行目で掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行目と } 4 \text{ 行目を入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{l}
2 \text{ 行目 } \xrightarrow{\times(-1)} \\
4 \text{ 行目に } 3 \text{ 行目を引く}
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
2 \text{ 行目で掃き出し} \\
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l}
3 \text{ 行目で掃き出し} \\
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

階数は 3 である.

(3).

$$\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
5 \text{ 行目に } 4 \text{ 行目を引く} \\
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\text{同様のことを } 2,3,4 \text{ 行目にする} \\
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l}
3,4,5 \text{ 行目に } 2 \text{ 行目を引く} \\
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
1 \text{ 行目で掃き出し} \\
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l}
2 \text{ 行目で掃き出し} \\
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

階数は 2 である.

第 5 問 (授業第 4-6 回の内容).

次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{array}{l}
(1). \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \\
(2). \begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 = 8 \end{cases}
\end{array}$$

$$(3). \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$$

● 第5問解答例.

以下この解答では簡約化の手順を省略して記入する.¹

(1). 拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ であるので, これを簡約化していく.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

よってこれより $\begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 & = 0 \\ x_3 & = 0 \end{cases}$ である. つまり, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ である.

(別解.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと, 行列式 $\det(A) \neq 0$ であるので A は正則行列である. よっ

て $Ax = 0$ の解は $x = A^{-1}0 = 0$ である.

(2). 拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ であるので, これを簡約化していく.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

よってこれより $\begin{cases} x_1 & & 2x_3 & & = 1 \\ x_2 & + & 3x_3 & & = 2 \\ x_4 & & & & = 3 \end{cases}$ である.

以上より解は $\begin{cases} x_1 = 1 - 2c_3 \\ x_2 = 2 - 3c_3 \\ x_3 = c_3 \\ x_4 = 3 \end{cases}$ (c_3 は任意定数) となる.

¹ 大学院の試験等で行列を簡約化する場合, ² 行目で掃き出し のようにどのように掃き出しをしたかを答案で書く必要はあまりないと思います. ただ採点者も人間なので書いてくれた方が非常に助かります (もしかするとケアレスミスの減点を抑えることができるかもしれません).

解の書き方として $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (s \in \mathbb{R})$ と書くこともある.

(3). 拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{pmatrix}$ であるので, これを簡約化していく.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

よってこれより $\begin{cases} x_1 & & & & & = 1 \\ & x_2 & - & 2x_3 & & = 0 \\ & & & x_4 & + & 3x_5 = 0 \end{cases}$ である.

以上より解は $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2c_3 \\ x_3 = c_3 \\ x_4 = -3c_5 \\ x_5 = c_5 \end{cases} (c_3, c_5 \text{ は任意定数})$ となる.

解の書き方として $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} (s, t \in \mathbb{R})$ と書くこともある.

第6問 (授業第4-6回の内容).

連立1次方程式

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 & = -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & - x_5 = 1 \\ 5x_1 & + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = a \end{cases}$$

の解が存在するような a の値を全て求めよ.

● 第6問解答例. 拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & 3 & 2 & a \end{pmatrix}$ であるので, これを簡約

化 (の一步手前まで) していく.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & 3 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & -2 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 & a+10 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}.$$

よって問題の連立一次方程式は
$$\begin{cases} x_1 & + x_3 & - 2x_5 & = & 2 \\ & x_2 + x_3 & + x_5 & = & -1 \\ & & x_4 + 4x_5 & = & -4 \\ & & & 0 & = & a+2 \end{cases} \quad \text{と同じであ}$$

るので, この連立一次方程式の解が存在するための必要十分条件は $a+2=0$ となる. 以上より解が存在するような a の値は $a=-2$ である.

中間レポートについて.

第1問から第6問を通して, 正答率 92%でした. 問題6以外は基本的な問題で揃えたのでほぼ全員できていました. 行列は今までの高校数学と違い最初はとっつきにくいものなのでもっと酷い解答が出ると思ったのですが, 意に反して非常に良くできていました. 素晴らしいと思います.

各問題を通しての感想は以下のとおりです.

第1問. 正答率 89%. 減点の主な理由は計算ミスです.

第2問. 正答率 93%. 第3回演習問題と同じなのでほぼできていました.

第3問. 正答率 97%. 対角化と呼ばれるものの一種です. 以外にも (5) を漸化式で解いている解答が多かったです. 解答例の方法だと漸化式を使わなくて良くなります (行列を考える利点とも言えます).

第4問. 正答率 95%. 第4-6回演習問題と同じなのでほぼできていました.

第5問. 正答率 95%. 「連立一次方程式を掃き出し法で解けるようになること」はこの授業で一番重要なことですので多めに出しました. よくできていました.

第6問. 正答率80%. こういう問題は大学院の入試でよく出てくるので出しました(第5問より第6問のように問題を出すことが多いと思います). もし3年後に大学院入試を受ける際にはこの資料を参考にしてください. また答案には拡大係数行列の掃き出しを終えた後に「なぜ $a = -2$ でないといけないのか」という理由を書いておいたほうが無難だと思います.

今回のレポート問題はプログラミングや計算機で解答可能です(むしろこの授業や大学院試験を除いて手計算で行列の計算をすることはないかもしれません). もしかしたらそちらの方が皆さんのためにもなるかもしれないので, プログラミングで解答した答案を授業ホームページに公開しておきます.

中間レポートおまけ問題 (授業第4-6回の内容).

全ての成分が0か1である n 次正方行列について次の操作を考える.

(操作): (i, j) 成分を自由に一つ選び, (i, j) 成分とその上下左右の全ての成分に対して, 0と1を入れ替える.

例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合, $(2, 2)$ 成分を選んで上の操作を行うと次のように変化する:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

上の A に対し, $(1, 2)$ 成分を選んで上の操作を行うと次のように変化する:²

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上の A に対し, $(3, 3)$ 成分を選んで上の操作を行うと次のように変化する:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

次の問いに答えよ.

² $(1, 2)$ 成分に対して, その上の成分は存在しないため, この場合は $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2)$ の成分について0と1を入れ替えることになる.

(1). $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. B に上の操作を何回か行なって零行列にできることを示せ.

(2). B に上の操作を何回か行なって零行列にするために必要な最小の操作回数を求めよ.

(3). 与えられた n 次正方行列 B について, 上の操作を何回か行なって零行列にすることが可能か判定し, 可能ならば零行列にするために必要な最小の操作回数を求めるアルゴリズムを構築せよ.³

● 中間レポートおまけ問題解答例.

私自身が(何も考えずに)出したかった問題です. このようなゲームのような問題が実は線形代数や連立一次方程式と関連があるという点が面白いと思ったので今回のおまけ問題に出しました. ただ作った私も全部解答するまで1,2日ぐらいかかりました. かなり難しい問題だと思います. おまけの問題ということで許してください.

この問題や解答を作成するにあたり, 次の文献を参考しました.

- 安田健彦 著 ゲームで大学数学入門: スプラウトからオイラーゲッターまで

この本の4章「ライツアウト」を参考にいたしました. 大変面白い本ですので皆様も一度読んでみることをお勧めいたします.

(1) (2). 最小の操作回数は6で, その操作方法は次の4通りが考えられます.

- $(1, 3) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (4, 4)$
- $(1, 2) \rightarrow (1, 4) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (4, 4)$
- $(1, 1) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (2, 4) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (4, 2) \rightarrow (4, 4)$
- $(1, 1) \rightarrow (1, 4) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (4, 4)$

また(3)でも触れますが, 順番はどのようにやっても構いません(つまり $(1, 3) \rightarrow (2, 1)$ でも $(2, 1) \rightarrow (1, 3)$ でも一緒です).

これが最小の操作回数であることを言うには, おそらく全探索をするしか方法はないです(そのためにプログラミングや計算機の使用を許可しました).⁴ さて計算量ですが, おおむね $2^{16} \times 16 = 1048576 \approx 10^6$ ぐらいの計算をすればよく, 遅いと言われている Python を使っても処理時間に1秒もかからないです.

(3). 上と同じく全探索でやると, $n = 10$ 程度なので, おおむね $2^{100} \times 100 \approx 10^{32}$ ぐらいの計算量がかかります.⁵ よって何かうまい方法を考えないといけません.

そこでとりあえず 2×2 行列の場合を考えます. また具体例として $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を上の操作をして零行列にすることを考えます. $(1, 1)$ 成分に操作を行うと, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ と変化します.

³ n は 10 程度を想定しています. $n = 10$ でも処理時間が 2 秒以内に収まるアルゴリズムを構築してください.

⁴ この解答はあまり納得してないので全探索以外に論理的な解答があれば教えてほしいです.

⁵ スーパーコンピューター「富岳」でさえ 1 秒に 40 京 ($= 4 \times 10^{17}$) しか計算できません. よって「スーパーコンピューターを利用して (2) と同じく全探索する」という答えも間違いです.

これは「 B の $(1,1)$ 成分と $(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分に $+1$ して、その 2 で割ったあまりを見る」ということと同じです。実際

$$B + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pmod{2}$$

であることからわかります。

$$\text{少々行列の形だと見づらいのでこれを列ベクトルの形で見てみます。つまり } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{21} \\ B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、 $(1,1)$ 成分に操作を行うことは、「 \mathbf{b} に $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を足してその 2 で割ったあまりを見る」こ

とと同じです。実際

$$\mathbf{b} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{21} \\ B_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod{2}$$

となっていることからわかります。同様に次のことがわかります

- $(1,2)$ 成分に操作を行うことは、 \mathbf{b} に $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を足してその 2 で割ったあまりを見る。
- $(2,1)$ 成分に操作を行うことは、 \mathbf{b} に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を足してその 2 で割ったあまりを見る。
- $(2,2)$ 成分に操作を行うことは、 \mathbf{b} に $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を足してその 2 で割ったあまりを見る。

ということと同じです。さて x_1, x_2, x_3, x_4 を次のように定めます。

- x_1 は $(1,1)$ を操作した回数。
- x_2 は $(1,2)$ を操作した回数。
- x_3 は $(2,1)$ を操作した回数。

- x_4 は $(2, 2)$ を操作した回数.

すると \mathbf{b} は上の操作によって

$$\mathbf{b} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} + x_1 + x_2 + x_3 \\ B_{12} + x_1 + x_2 + x_4 \\ B_{21} + x_1 + x_3 + x_4 \\ B_{22} + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

に変化します. 最終的に零行列にしたいのですから,

$$\begin{pmatrix} B_{11} + x_1 + x_2 + x_3 \\ B_{12} + x_1 + x_2 + x_4 \\ B_{21} + x_1 + x_3 + x_4 \\ B_{22} + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod{2}$$

となるような x_1, x_2, x_3, x_4 を探せば良いことになります.

ここで任意の整数 c について $2c \equiv 0 \pmod{2}$ なので, 最小の操作回数を求める限りにおいて x_1, x_2, x_3, x_4 は 0 か 1 で良いことがわかります. また任意の整数 c について $-c \equiv c \pmod{2}$ であるので

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 + x_4 \\ x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{21} \\ B_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \pmod{2} \quad (1)$$

となる x_1, x_2, x_3, x_4 を探せば良いことになります. 以上より x_1, x_2, x_3, x_4 を求めるには, 連立方程

式 (1) を解けば良いことになります. 実際に $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の場合 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が連立方程式 (1) の

解となります. よってこの問題は線形代数の問題, とりわけ連立一次方程式の解答に帰着されます.

以上の考察を n が一般の場合でも行えば良いことがわかります. まとめると次のようになります.

1. 行列の左上の成分から $1, 2, \dots, n^2$ と番号を割り当てる. 以下, 番号 i と 1 対 1 に対応する成分を (a_i, b_i) と呼ぶことにする.

2. A を $n^2 \times n^2$ 行列とする. A の (k, l) 成分を, 「 (a_k, b_k) を操作したときに (a_l, b_l) は +1 される

場合 $A_{kl} = 1$ 」とし, 「他の場合は $A_{kl} = 0$ 」とする. 例えば $n = 2$ の場合 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

となる.

3. $\mathbf{b} = {}^t(B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1n}, B_{21}, \dots, B_{nn})$ という $n^2 \times 1$ 行列とおく. $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_{n^2})$ と

して,

$$Ax \equiv b \pmod{2} \quad (2)$$

という連立一次方程式を考える.

4. 式 (2) の解がなければ与えられた行列 B をこの操作で零行列にできないことがわかる. もし解があれば, その解の中で $x_1 + \cdots + x_{n^2}$ が最小になる値が最小の操作回数を与える.

さてこのアルゴリズムの計算量をざっくりと計算すると

- 連立一次方程式 (2) を解くにあたり $O(n^6)$ の計算量がかかる.
- A のランクを r とすると連立一次方程式 (2) の解は 2^{n^2-r} 通りあるので, 最小の操作回数を計算するにあたりそれらを総当たりすることになり $O(2^{n^2-r})$ の計算量がかかる.

そのため大体 $O(\max(n^6, 2^{n^2-r}))$ の計算量がかかります.⁶ $n^2 - r$ の値は実際に計算すると $n = 10$ 程度であればかなり小さいので, この場合でも $n = 10$ 程度ならば Python でも高速に動きます. 実際にプログラミングしたのでその解答をホームページにアップロードしておきます.

[補足] $n = 4$ の場合 $r = 12$ であるので, $n = 4$ の場合は零行列にできない 4×4 行列が存在します. 一方で $n = 6$ の場合は $r = 36$ なので, この場合はどのような行列を持ってきても零行列にすることができます (しかも最小回数を達成する操作方法のやり方は一通りに限ります).⁷

⁶ここの計算量を $O(n^6)$ にできないでしょうか...?

⁷何か法則性などはないでしょうか...?

期末レポート解答例

担当教官: 岩井雅崇 (いわいまさたか)

解答を始める前に, 基本的な事実を復習しておきます. このレポートでは次の定理を何回も使うことになります. (第 7 回授業の内容です.)

定理 1. A を n 次正方行列とするとき, 以下は同値.

1. $\text{rank}(A) = n$.
2. A は正則行列, つまり A は逆行列を持つ.
3. $\det(A) \neq 0$.

次の形に言い換えても良いと思います.

定理 2. A を n 次正方行列とするとき, 以下は同値.

1. $\text{rank}(A) < n$.
2. A は逆行列を持たない.
3. $\det(A) = 0$.

以下この解答例で定理 1, 定理 2 といえば上の定理を指すものとします.

第 1 問 (授業第 7, 9-12 回の内容).

以下の (1)-(4) の各行列は正則行列かどうか判定せよ. また正則行列ならばその逆行列も求めよ.

$$(1). \begin{pmatrix} 1 & 2022 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2). \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3). \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad (4). \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

● 第 1 問解答例.

方針としては行列式を計算して定理 1 と定理 2 から正則行列かどうか判定し, 正則行列ならば逆行列を第 7 回授業の演習の通りに求めます.

$$(1). \begin{vmatrix} 1 & 2022 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2022 \times 0 = 1 \neq 0 \text{ より行列式が } 0 \text{ ではないので正則である. 正則行列}$$

を求める方法は第7回授業の演習のように求める. $\begin{pmatrix} 1 & 2022 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を基本変形で簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2022 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行目で掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2022 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので, 逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & -2022 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

[別解.] 第7回授業資料の例3で「2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $ad - bc \neq 0$ ならば, A は逆行列を持ち $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ である。」ということを示しているのです, その公式を用いても良い.

(2). サラスの公式より

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 0 \times 1 + 2 \times 2 \times 3 + 3 \times 2 \times 2 - 1 \times 2 \times 2 - 2 \times 2 \times 1 - 3 \times 0 \times 3 \\ = 12 + 12 - 4 - 4 = 16 \neq 0.$$

のため行列式が0ではないので正則である.

また $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を簡約化すると次の通りになる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行目で掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行目を } -\frac{1}{4} \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{2 \text{ 行目で掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行目を } \frac{1}{4} \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{3 \text{ 行目で掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

よって逆行列は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ である.

[別解.] 余因子行列を使った方法でも逆行列を求めることができます. (ただし掃き出し法を使った方が楽なので, この方法はあまり使われません.)

行列 A について, i 行と j 列を取り除いた行列を \tilde{A}_{ij} とし, 余因子行列 $\tilde{A} = (b_{ij})$ を $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$ で定めると, 第 12 回授業資料の定理 6 から $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$ となる.

今 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ として $\det(\tilde{A}_{ij})$ を求めていくと次の通りになる.

$$\bullet \det(\tilde{A}_{11}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \det(\tilde{A}_{12}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \det(\tilde{A}_{13}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

$$\bullet \det(\tilde{A}_{21}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \det(\tilde{A}_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8, \det(\tilde{A}_{23}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$\bullet \det(\tilde{A}_{31}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \det(\tilde{A}_{32}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \det(\tilde{A}_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

よって余因子行列 \tilde{A} は

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det(\tilde{A}_{11}) & (-1)^{2+1} \det(\tilde{A}_{21}) & (-1)^{3+1} \det(\tilde{A}_{31}) \\ (-1)^{1+2} \det(\tilde{A}_{12}) & (-1)^{2+2} \det(\tilde{A}_{22}) & (-1)^{3+2} \det(\tilde{A}_{32}) \\ (-1)^{1+3} \det(\tilde{A}_{13}) & (-1)^{2+3} \det(\tilde{A}_{23}) & (-1)^{3+3} \det(\tilde{A}_{33}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

以上より逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

(3). サラスの公式より

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 0 + 2 \times 3 \times 1 + 1 \times 2 \times 5 - 1 \times 3 \times 5 - 2 \times 2 \times 0 - 1 \times 1 \times 1 \\ = 6 + 10 - 15 - 1 = 0.$$

であるため, 行列式が 0 であることから定理 2 より正則行列ではない.

(4). 第 10 回授業のように行列式を簡単な形にして計算していくと,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

となる.(最後の $= 0$ については例えば第 12 回授業の余因子展開からわかる.) 以上より行列式が 0 であることから定理 2 より正則行列ではない.

[別解.] 中間レポートの第4問(3)からこの行列の階数は2であることがわかっている. よって定理2より正則行列ではない.

第2問 (授業第7, 9-12回の内容).

x を実数とし, 4×4 行列 A を次のように定める.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & x & 3 \\ x & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

行列 A が逆行列を持たないような x の値を全て求めよ.

● 第2問解答例.

定理2から $\det(A) = 0$ となる x の値を全て求めれば良い. 行列式の計算方法は第10回授業や第12回授業の余因子展開を用いると例えば次の通りとなる.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & x & 3 \\ x & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & x-1 & 2 \\ x & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & x-1 & 2 \\ 0 & x & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & x-1 & 2 \\ 0 & x & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & x-1 & 2 \\ x & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(x-1) - x(x-1) = (2-x)(x-1).$$

以上より $\det(A) = (2-x)(x-1) = 0$ となる x の値は $x = 1, 2$ となる.

第3問 (授業全体の内容).

y を実数とし, 3×3 行列 B を次のように定める.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & y & 3 \\ y & 3 & 13 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

次の問いに答えよ.

- (1). B の階数 $\text{rank}(B)$ は2以上であることを示せ.
- (2). B が正則行列になるための, y が満たすべき必要十分条件を求めよ.

● 第3問解答例.

(1). 行基本変形をしていく.

$$\begin{pmatrix} 1 & y & 3 \\ y & 3 & 13 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行目で掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & y & 3 \\ 0 & 3-y^2 & 13-3y \\ 0 & 6-3y & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行目と } 3 \text{ 行目を交換}} \begin{pmatrix} 1 & y & 3 \\ 0 & 6-3y & 0 \\ 0 & 3-y^2 & 13-3y \end{pmatrix}.$$

$y \neq 2$ の場合はさらに基本変形をすることができる.

$$\begin{pmatrix} 1 & y & 3 \\ 0 & 6-3y & 0 \\ 0 & 3-y^2 & 13-3y \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行目を } \frac{1}{6-3y} \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & y & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3-y^2 & 13-3y \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行目で掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13-3y \end{pmatrix}.$$

以上より, $y = \frac{13}{3}$ の場合は $\text{rank}(B) = 2$ であり, $y \neq \frac{13}{3}$ の場合は $\text{rank}(B) = 3$ となる.

$y = 2$ の場合は $6-3y = 0$ より次の通りとなる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行目と } 3 \text{ 行目を交換}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行目で掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるので, $\text{rank}(B) = 2$ である. 以上より $\text{rank}(B) \geq 2$ である.

[別解.] もし $\text{rank}(B) < 2$ であると仮定すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & y & 3 \\ 0 & 6-3y & 0 \\ 0 & 3-y^2 & 13-3y \end{pmatrix}$$

の階数は 1 以下となる. 第 1 行目から階数が 0 になることはなく, もしこの行列の階数が 1 ならば $6-3y = 3-y^2 = 13-3y = 0$ とならなければいけない. しかしこのような y は存在しないので矛盾. つまり $\text{rank}(B) \geq 2$ である.

(2). 定理 1 から B が正則行列であることは $\text{rank}(B) = 3$ であることと同値であるので, (1) から $y \neq 2$ かつ $y \neq \frac{13}{3}$ であることが必要十分条件となる.

[別解.] $\det(B) \neq 0$ となる y の条件を求めても良い.

$$\begin{vmatrix} 1 & y & 3 \\ y & 3 & 13 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y & 3 \\ 0 & 3-y^2 & 13-3y \\ 0 & 6-3y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-y^2 & 13-3y \\ 6-3y & 0 \end{vmatrix} = (3y-6)(13-3y).$$

であるので, $y \neq 2$ かつ $y \neq \frac{13}{3}$ であることが必要十分条件となる.

第4問 (授業全体の内容).

以下の (1)-(8) の各主張について, 正しい場合には証明を与え, 誤っている場合には反例をあげよ.⁸ ただし授業・教科書で証明を与えた定理に関しては自由に用いて良い. またこの問題において, m, n を正の整数, E_m を m 次の単位行列, $O_{n,m}$ を $n \times m$ 型の零行列とする.

- (1). $m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B について, $AB = E_m$ ならば, $BA = E_n$ である.
- (2). n 次正方行列 A と $n \times m$ 行列 B について, A が正則行列かつ $AB = O_{n,m}$ ならば, $B = O_{n,m}$ である.
- (3). n 次正方行列 A, B について, $AB = O_{n,n}$ ならば, $B = O_{n,n}$ である.
- (4). n 次正方行列 A, B について, $AB = E_n$ ならば, $AB = BA$ である.
- (5). n 次正方行列 A, B について, AB が正則行列ならば, A も B も正則行列である.
- (6). n 次正方行列 A, B, C について, $\det(ABC) = \det(BAC)$ である.
- (7). 全ての成分が整数である n 次正則行列 A について, $\det(A) = \pm 1$ ならば, 逆行列 A^{-1} の全ての成分は整数である.
- (8). 全ての成分が整数である n 次正則行列 A について, 逆行列 A^{-1} の全ての成分が整数であるならば, $\det(A) = \pm 1$ である.

● 第4問解答例.

(1). 誤りである. $m = 1, n = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 = E_1$ であるが $BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E_2$ となるので, これは (1) の主張の反例となる.

(2). 正しい. A が正則なので逆行列 A^{-1} が存在する. よって $AB = O_{n,m}$ なので, 左から A^{-1} をかけると

$$B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}O_{n,m} = O_{n,m} \text{ となる.}$$

(3). 誤りである. $n = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{2,2}$$

だが, $B \neq O_{2,2}$ ではない. よってこれは (3) の主張の反例となる.

[別解.] $A = O_{2,2}, B = E_2$ とするとこれも反例になる.⁹ なおこの解答は想定外の解答だったので, この解答をしている答案に加点をいたしました.

(4). 正しい. 第10回授業資料系6から A は正則で B は A の逆行列であるので, 逆行列の定義から $AB = BA = E_n$ となる. 特に $AB = BA$ である.

[補足.] 第10回授業資料系6とは「 $AB = E_n$ ならば A は正則で B は A の逆行列」という主張である. これは次のように示される.

⁸ 反例とは「ある主張について, それが成立しない例」のことである. 例えば「任意の実数 x について, $x \geq 0$ ならば, $x+1=2$ である」という主張は誤りであり, その反例として $x=5$ が挙げられる. なぜなら $x=5 \geq 0$ ではあるが, $x+1=5+1=6 \neq 2$ であるためである. また $x=1$ はこの主張の反例にはならない.

⁹ 出題の際に A が零行列でないという条件を入れるべきでした...

$AB = E_n$ より,

$$\det(A) \det(B) = \det(AB) = \det(E_n) = 1$$

となる. よって A は正則で逆行列 A^{-1} をもつ.

$$B = (E_n)B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}$$

であるので, B は A の逆行列である.

(5). 正しい. AB が正則なので $\det(AB) \neq 0$ である. よって $\det(A) \det(B) = \det(AB) \neq 0$ であるので $\det(A) \neq 0$ かつ $\det(B) \neq 0$ である. よって定理 1 より A も B も正則である.

(6). 正しい. 第 10 回授業資料定理 5 から $\det(A) \det(B) = \det(AB)$ であるので

$$\det(ABC) = \det(A) \det(B) \det(C) = \det(B) \det(A) \det(C) = \det(BAC) \text{ となる.}$$

(7). 正しい. 行列 A について, i 行と j 列を取り除いた行列を \tilde{A}_{ij} とし, 余因子行列 $\tilde{A} = (b_{ij})$ を $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ji})$ で定めると, 第 12 回授業資料定理 6 から $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$ となる. 仮定から $\det(A) = \pm 1$ であるので \tilde{A} の全ての成分が整数であることを示せば良い.

A の全ての成分は整数であるので, \tilde{A}_{ij} の全ての成分は整数であり, 行列式の定義から $\det(\tilde{A}_{ji})$ も整数である. よって $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ji})$ であるので, \tilde{A} の全ての成分は整数である.

[補足.] A を全ての成分が整数である n 次正則行列とすると, $\det(A)$ も整数である. これは

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

であり, $\operatorname{sgn}(\sigma)$ が整数であることからわかる.

(8). 正しい. A^{-1} の全ての成分が整数であるので, $\det(A^{-1})$ も整数である.

$$\det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(E_n) = 1$$

であり, $\det(A)$ も $\det(A^{-1})$ も整数であるので, $\det(A) = \pm 1$ となる.

期末レポートについて.

第 1 問から第 4 問を通して, 正答率 69%でした. できる人とできていない人が極端に分かれるなんとも数学らしい得点分布になっていました. 第 1 問から第 3 問は大学院の試験 (通称”院試”) を少し修正して出しました. 期末レポート第 1,2,3 問と中間レポート第 5,6 問ができていればこの授業の理解は十分だと思います.

各問題を通しての感想は以下のとおりです.

第 1 問. 正答率 78%. 正則行列かどうか判定する方法は概ね 2 つあります. 一つは「行列式」を用いた方法です. もう一つは掃き出し法を用いて行列の階数を求める方法です. 解答としてはどちらでも構いません. 逆行列を求める方法は「掃き出し法」と「余因子行列」の 2 つありますが, 「掃き出し法」の方が楽だと思います.

他にも次の定理を用いて正則行列かどうか判定しさらに逆行列も求められる方法があります.

A を n 次正方行列とする. $n \times 2n$ 行列 $[A : E_n]$ の簡約化が $[E_n : B]$ の形にならない場合, A は逆行列を持たない.

なぜなら A の簡約化が E_n にならないので $\text{rank}(A) < n$ から定理 2 より言えます. ただこちらは $n \times 2n$ 行列を掃き出すことになるので, 少々面倒な気がします.

第 2 問. 正答率 78%. これも「行列式」と「掃き出し法」の 2 つの方法があります. 掃き出し法の場合は行列の階数を求めることになります. どちらも同じくらい計算します.

第 3 問. 正答率 76%. (2) で行列式を用いて答えを出し, その後 $y = 2, y = \frac{13}{3}$ の場合での行列の階数を計算して (1) を示す方法もあります.

第 4 問. 正答率 61%. 意外とできていました. 特に (7), (8) ができていたのが驚きです.

今回もプログラミングで解答した答案を授業ホームページに公開しておきます.

またレポートを採点していて気になったことを 3 点ご連絡いたします. 今後の参考にしてください.

(1). 行基本変形 (掃き出し法) を”=”で結んでできる解答, つまり基本変形を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2022 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2022 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

としている解答がまあまあ見られました. これはやめた方がいいです. なぜなら上の二つの行列は等しいものではないからです. (採点者によっては減点の対象になると思います.)

矢印” \rightarrow ”を使って

$$\begin{pmatrix} 1 & 2022 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2022 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のように書いておいた方が無難です.

(2). 読めないレポートがまあまあ多かったです. ここで”読めない”とは「論理展開がわからない」, 「字が汚い」, 「何を計算したのかわからない」などを意味します.

例えば第 3 問 (1) で

$$\begin{pmatrix} 1 & y & 3 \\ y & 3 & 13 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & y & 3 \\ 0 & 3-y^2 & 13-3y \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ より.}$$

と解答されても得点を与えることができません.¹⁰ (この例だとそもそも何をしたのかわからないし階数 2 以上であることの”理由”が抜けている.)

今回は大目に見ましたが, 他人が読んで理解できるレポートを作るように心がけた方がいいと思います. (採点者によっては採点してもらえないこともあります.)

(3). レポートのコピペ (コピーアンドペースト) が疑われる答案が何個もありました. なぜ疑われるかというと「答案として同じになることがあり得ない」からです.

例えば第 4 問 (3) で

¹⁰(2) や (3) の解答例はあくまで”例”であり, 今回のレポートでこのような解答をした人はいません. (まあ近い解答はありましたが...)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2781 & -4891 \\ -2781 & 4891 \end{pmatrix} \text{ が反例である.}$$

という答案が 3 人連続で来た場合、流石にコピーペを疑います。なぜなら $\begin{pmatrix} 2781 & -4891 \\ -2781 & 4891 \end{pmatrix}$ という行列なんて普通 3 人も思いつかないからです。

レポートのコピーペは不正行為の一種で、最悪の場合には全単位が没収される行為なので、控えてください。(前に教官内でレポートのコピーペの話題になって、「コピーペがわかった時点で問答無用でその人たちの単位を不可にする」といった人もいたので、やめた方が無難です。)

期末レポートおまけ問題 (授業第 14 回の内容).

m を正の整数とし、 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_m), \mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ について $q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を次のように定める。

$$q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_0 y_0 - (x_1 y_1 + \dots + x_m y_m)$$

次の問いに答えよ。

- (1). $q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ならば、 $q(\mathbf{x}, \mathbf{x})q(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq q(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2$ であることを示せ。
- (2). $q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ かつ $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = q(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$ ならば、 $\mathbf{y} = 0$ となることを示せ。
- (3). $q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = q(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$ ならば、ある実数 λ, μ があって、 $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} = 0$ とできることを示せ。
- (4). $\mathbf{x} \neq 0$ かつ $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ ならば、 $q(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq 0$ であることを示せ。

● 期末レポートおまけ問題解答例.

この問題は私が最近出した論文

● M. Iwai, S. Matsumura. *Abundance theorem for minimal compact Kähler manifolds with vanishing second Chern class*. Preprint, arXiv:2205.10613

の Lemma 6.1 そのままです。「arXiv:2205.10613」と google で検索しこの論文の証明をそのまま写せば答えになります。ちょっと写してみると次の通りです。

Proof. Set $F(t) := q(\mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y}) = q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2tq(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + t^2q(\mathbf{y}, \mathbf{y})$.

(1). We may assume that $q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ and $q(\mathbf{y}, \mathbf{y}) > 0$. From $y_0 \neq 0$, we have $F(0) > 0$ and $F(-\frac{x_0}{y_0}) \leq 0$. Thus, $q(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \geq q(\mathbf{x}, \mathbf{x})q(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ since $F(t) = 0$ has a real solution.

(2). If $y_0 \neq 0$, then $0 \geq F(-\frac{x_0}{y_0}) = F(0) > 0$, which is impossible. Thus, $y_0 = 0$. From $q(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$, we have $\mathbf{y} = 0$.

(3). We may assume that $\mathbf{y} \neq 0$. From $F(-\frac{x_0}{y_0}) = 0$, we have $\mathbf{x} - \frac{x_0}{y_0}\mathbf{y} = 0$.

(4). The proof follows from $q(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = q(\mathbf{y} - \frac{y_0}{x_0}\mathbf{x}, \mathbf{y} - \frac{y_0}{x_0}\mathbf{x}) \leq 0$. □

ですが論文の都合上議論をかなり省略しました。(専門家からすると簡単な議論のため、本来は証明すらも削除する予定でした。) よってこの解答を書いても減点しております。特に丸写し解答は 0 点にしております。¹¹

¹¹今回は丸写し解答は誰もしていませんでした。

線形代数の実用的な応用は中間レポートのおまけ問題でやったので、今回の期末レポートのおまけ問題では専門的な研究への線形代数の応用例としてこの問題を出しました。¹² 証明は第 14 回授業の Cauchy-Schwartz の不等式の証明とほぼ同じです。

[解答例.] 以下の証明でよく使う事実を 2 点確認しておく。

(a). $q(x, x) > 0$ ならば $x_0 > 0$ である。これは $q(x, x) = x_0^2 - \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq x_0^2$ からわかる。

(b). 実数 t について $q(x + ty, x + ty) = q(x, x) + 2tq(x, y) + t^2q(y, y)$ が成り立つ。これは次のように示す。

$$\begin{aligned} q(x + ty, x + ty) &= (x_0 + ty_0)^2 - \sum_{i=1}^m (x_i + ty_i)^2 \\ &= (x_0^2 + 2tx_0y_0 + t^2y_0^2) - \sum_{i=1}^m (x_i^2 + 2tx_iy_i + t^2y_i^2) \\ &= (x_0^2 - \sum_{i=1}^m x_i^2) + 2t(x_0y_0 - \sum_{i=1}^m x_iy_i) + t^2(y_0^2 - \sum_{i=1}^m y_i^2) \\ &= q(x, x) + 2tq(x, y) + t^2q(y, y) \end{aligned}$$

(1). $q(y, y) \leq 0$ の場合. $q(x, y)^2 \geq 0$ かつ $q(x, x) \geq 0$ から, $q(x, x)q(y, y) \leq q(x, y)^2$ である。

$q(y, y) > 0$ の場合. 実数 t について $F(t) = q(x + ty, x + ty)$ とおく。 $F(0) = q(x, x) \geq 0$ である。また (a) から $y_0 \neq 0$ であるので、

$$F\left(\frac{x_0}{y_0}\right) = q\left(x - \frac{x_0}{y_0}y, x - \frac{x_0}{y_0}y\right) = -\sum_{i=1}^m \left(x_i - \frac{x_0}{y_0}y_i\right)^2 \leq 0$$

となる。また (b) から $F(t)$ は t に関する 2 次関数であり, $F(0) \geq 0$ かつ $F\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \leq 0$ なので, $F(t) = 0$ は実数解を持つ。つまり判別式は 0 以上であるので (b) から

$$(2q(x, y))^2 - 4q(x, x)q(y, y) \geq 0$$

を得る。よって $q(x, x)q(y, y) \leq q(x, y)^2$ である。

(2). $y \neq 0$ と仮定して矛盾を示す。 $q(y, y) = 0$ より (a) から $y_0 \neq 0$ である。よって (b) より

$$F\left(\frac{x_0}{y_0}\right) = q(x, x) + 2\left(\frac{x_0}{y_0}\right)q(x, y) + \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2q(y, y) = q(x, x) > 0$$

である。これは $F\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \leq 0$ に矛盾する。

(3). $y = 0$ の場合. $\lambda = 0, \mu = 1$ とおけば良い。

$y \neq 0$ の場合. $q(y, y) = 0$ より (a) から $y_0 \neq 0$ である。また (b) から任意の実数 t について $F(t) = 0$ なので、特に $F\left(\frac{x_0}{y_0}\right) = 0$ 。よって

$$0 = F\left(\frac{x_0}{y_0}\right) = q\left(x - \frac{x_0}{y_0}y, x - \frac{x_0}{y_0}y\right) = -\sum_{i=1}^m \left(x_i - \frac{x_0}{y_0}y_i\right)^2$$

¹² 今回の私の論文で線形代数使ったのはここだけですが... 証明のメインでは難しい手法を使いまくりました。

より任意の $i = 1, \dots, m$ について $x_i - \frac{x_0}{y_0}y_i = 0$ となる. よって $\lambda = 1, \mu = -\frac{x_0}{y_0}$ とおけば $\lambda x + \mu y = 0$ とできる.

[別解.] $\lambda = \mu = 0$ とおけばよい.¹³ なおこの解答は想定外の解答だったので, この解答をしているものには加点をいたしました.

(4). $q(x, x) = 0$ より (a) から $x_0 \neq 0$ である. よって (b) から

$$q(y, y) = q\left(y - \frac{y_0}{x_0}x, y - \frac{y_0}{x_0}x\right) \leq 0 \text{ となる.}$$

¹³ $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ という条件を入れるのを忘れていました.