

# Bibliography

[Rud] W. Rudin. *Functional analysis*. 2nd edn. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York. (1991.)

[NO] J. Noguchi, T.Ochiai *Geometric Function Theory in Several Complex Variables* Translations of Mathematical Monographs Volume: 80; 1990; 282 pp

<sup>NO</sup> [NO, Chapter 3] を参考にしている。

## 0.1 Current

### 0.1.1 current

$M$  2nd countable 次元  $C^\infty$  級多様体とする。

Recall  $M \subset \mathbb{R}^m$  の時  $C^\infty(M)$  には次の位相を次で入れていた。

$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset M$  というコンパクト集合であって

$$K_i \subset K_{i+1}^\circ \quad \text{and} \quad M = \bigcup K_i^\circ$$

となるものを一つ固定し,  $f \in C^\infty(M)$  について,  $N \in \mathbb{Z}_+$  として

$$P_N(f) := \max\{|D^\alpha f(x)| \mid |\alpha| \leq N \& x \in K_N\}$$

$$V_N := \max\{f \in C^\infty(M) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$$

を 0 の open base とするような位相を入れていた。

$K \subset M$  コンパクトに対して

$$\mathcal{D}_K(M) := \{\phi \in C^\infty(M) \mid \text{Supp}(\phi) \subset K\} \subset C^\infty(M)$$

に対して相対位相を入れて

$$\mathcal{D}(M) := \bigcup_{K \subset M | K \text{ cpt}} \mathcal{D}_K(M) \cong \varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$$

この colimit は locally convex vector space での colimit である.

lem-E-1

**Lemma 0.1.1.** 1.  $U, U' \subset \mathbb{R}^m$  を開集合とする.  $U \cong U'$  を微分同相とする時,  $C^\infty(U) \cong C^\infty(U')$  である. ここでこの同型は位相  $\mathbb{C}$  ベクトル空間の同型である  
2.  $M \subset \mathbb{R}^m$  開集合とし,  $M = \bigcup U_i$  を可算個の開被覆とする時

$$C^\infty(M) \hookrightarrow \prod C^\infty(U_i) \quad f \mapsto \{f|_{U_i}\}$$

とすると,  $C^\infty(M)$  の位相はこの直積位相  $\prod C^\infty(U_i)$  によって引き起こされる位相となる. 特に

$$C^\infty(M) \cong \text{Eq}(\prod C^\infty(U_i) \rightrightarrows \prod C^\infty(U_i \cap U_j))$$

という位相  $\mathbb{C}$  ベクトル空間の同型を得る.

*Proof.* (1). 以下  $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset U$  というコンパクト集合で  $C^\infty(U)$  の位相を誘導するものを一つ固定する.  $\Phi : U' \rightarrow U, (x_1, \dots, x_m) \mapsto (y_1, \dots, y_m)$  を微分同相写像とする. すると  $K'_i := \Phi(K_i)$  によって,  $C^\infty(U')$  の位相を誘導する.  $V_N, V'_N$  を上の通りとする.

さてその引き戻し

$$\Phi^* : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U') \quad f(y) \mapsto f \circ \Phi(x) = f(y(x))$$

が位相  $\mathbb{C}$  ベクトル空間の同型を誘導することを示す.

$f \in C^\infty(U)$  について chain rule より,  $|\alpha| \leq N'$  について

$$D_x^\alpha f \circ \Phi(x) := \sum_{|\beta| \leq N'} (D_y^\beta f)(y(x)) \cdot \Phi_{\alpha\beta}(x) \tag{0.1.1}$$

である.

$\Phi$  が 0 の近傍で連続であることを示せば良い. 任意の  $N'$  について,  $K_{N'}$  コンパクトなので,  $K_{N'}$  上では  $|\Phi_{\alpha\beta}(x)| \leq C_{N'}$  となる  $C_{N'}$  が取れる. よって  $N' \cdot \frac{1}{N} \cdots C_{N'} < \frac{1}{N'}$  となる  $N$  をとれば,  $f \circ \Phi \in \Phi^*(V_N)$  について

$$|D_x^\alpha f \circ \Phi(x)| \stackrel{\substack{\text{eq-lem-E-1} \\ (0.1.1)}}{=} \underbrace{\sum_{|\beta| \leq N} |(D_y^\beta f)(y(x))|}_{< \frac{1}{N}} \cdot |\Phi_{\alpha\beta}(x)| \leq N' \cdot \frac{1}{N} \cdot C_{N'} < \frac{1}{N}$$

よって「任意の  $N' > 0$  について, ある  $N > 0$  があって,  $\Phi^*(V_N) \subset V'_{N'}$  である」ため  $\Phi$  は 0 の近

傍で連続である.

(2)  $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  とする. 各  $U_i$  で

$$K_{i1} \subset K_{i2} \subset \cdots \subset U_i$$

で  $U_i = \bigcup_j K_{ij}^\circ$  となるコンパクト列をとる. そこで  $K_N := \bigcup_{i=1}^N K_{i,N}$  とすると

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$$

であって,  $K_i \subset K_{i+1}^\circ$  かつ  $M = \bigcup K_i^\circ$  となる.

さて  $\prod C^\infty(U_i)$  の 0 での local base は

$$\{V_{\mathbf{i}, \mathbf{N}} := V_{i_1, N_{i_1}} \times V_{i_2, N_{i_2}} \times \cdots \times V_{i_l, N_{i_l}} \times \prod_{i \neq i_k} C^\infty(U_i) \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_l, N_{i_k} \in \mathbb{Z}_+\}$$

となる形のものである. ここで

- $\mathbf{i} := (i_1, i_2, \dots, i_l), \mathbf{N} := (N_{i_1}, N_{i_2}, \dots, N_{i_l})$  と定める.
- $V_{\mathbf{i}, \mathbf{N}} := \{f \in C^\infty(U_i) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$  である (この定義での  $P_N(f)$  には  $K_{i,N}$  をつかう.)

一方で  $V_N := \{f \in C^\infty(M) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$  (この定義での  $P_N(f)$  には  $K_{i,N}$  をつかう.) であり, これは  $C^\infty(M)$  の 0 での local base である. 以上より, 次の二つを示せば良い.

- 任意の  $\mathbf{i}, \mathbf{N}$  について, ある  $N$  があって,  $V_N \subset V_{\mathbf{i}, \mathbf{N}} \cap C^\infty(M)$  が成り立つ.
- 任意の  $N$  について, ある  $\mathbf{i}, \mathbf{N}$  があって,  $V_N \supset V_{\mathbf{i}, \mathbf{N}} \cap C^\infty(M)$  が成り立つ.

$$\begin{aligned} V_N &:= \left\{ f \in C^\infty(M) \mid x \in K_N := \bigcup_{i=1}^N K_{i,N}, |\alpha| \leq N, |D_\alpha f(x)| < \frac{1}{N} \right\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \left( V_{1,N} \times V_{2,N} \times \cdots \times V_{N,N} \times \prod_{i>N} C^\infty(U_i) \right) \cap C^\infty(M) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} V_{(1,2,\dots,N),(N,\dots,N)} \cap C^\infty(M) \end{aligned}$$

である. これより二つ目の主張が正しいことがいえる. 一つ目の主張は任意の  $\mathbf{i}, \mathbf{N}$  について,

$$V_{\max\{\mathbf{i}, \mathbf{N}\}} \subset V_{\mathbf{i}, \mathbf{N}} \cap C^\infty(M)$$

なので言える. □

defn-E-2

**Definition 0.1.2.**  $M$  2nd countable 次元  $C^\infty$  級多様体とする.  $C^\infty(M)$  に位相を次のように入れる.

まず  $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  で  $U_i \subset \mathbb{R}^m$  となる countable open cover を一つ固定する. そして,

$$C^\infty(M) \hookrightarrow \prod_i C^\infty(U_i) \quad f \mapsto (f|_{U_i})$$

による部分位相を  $C^\infty(M)$  に入る. つまり,

$$C^\infty(M) \cong \text{Eq}(\prod_i C^\infty(U_i) \rightrightarrows \prod_i C^\infty(U_i \cap U_j))$$

となるように入る.

*Remark 0.1.3.* [defn-E-2](#) による位相の定義において,  $U_i$  の取り方によらない.

*Proof.* 別の  $U'_j$  をとると細分  $U_i \cap U'_j$  が取れる. よって次の図式が考えられる.

$$\begin{array}{ccccc} C^\infty(M) & \xhookrightarrow{\quad} & \prod C^\infty(U_i) & \xhookrightarrow{\quad} & \\ \swarrow & & \searrow & & \downarrow \\ \prod C^\infty(U'_j) & \xhookrightarrow{\quad} & \prod C^\infty(U_i \cap U'_j) & \xhookrightarrow{\quad} & \end{array}$$

そこで”相対位相の直積は相対位相になる”ので, [0.1.1](#) より言える. □

これにより

$$C^\infty : (U \underset{\text{open}}{\subset} M) \mapsto C^\infty(U)$$

は  $\mathbb{C}$  ベクトル空間の sheaf となる. よって  $K \subset M$  に対して

$$\mathcal{D}_K(M) := \{\phi \in C^\infty(M) \mid \text{Supp}(\phi) \subset K\}$$

として  $C^\infty(M)$  の部分位相を入れる.

$$\mathcal{D}(M) := \bigcup_{K \subset M | K \text{ cpt}} \mathcal{D}_K(M) \cong \varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$$

この colimit は locally convex vector space での colimit である.

[指摘] この colim は存在する? やっぱり Section 1 でやったような位相の入れ方にもう一回戻る?  
 $\varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$  については次回再考.

### 0.1.2 current 続き

以下<sup>NO</sup>[NO] の記法に合わせる. ( $M$  2nd countable  $m$  次元  $C^\infty$  級多様体,  $k \in \mathbb{Z}_+$  とする.)<sup>1</sup>

- $C(M) := \{ f : M \rightarrow \mathbb{C} ; \text{連続} \}$
- $\mathcal{E}(M) := \{ f : M \rightarrow \mathbb{C} ; C^\infty\text{-関数} \}$  普通は” $C^\infty(M)$ ”である.
- $C^k(M) := \{ \varphi : k\text{-forms on } M \text{ with coeff } \in C \}$  つまり locally に

$$\varphi = \sum_J \varphi_J d\bar{z}^J \quad (d\bar{z}^J = d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_k})$$

とかけるものとする. ここで  $(U; z^1, \dots, z^n)$  を局所座標とし,  $J = (j_1, \dots, j_k)$ ,  $\varphi_J \in C(U)$  とする. 特に  $C^0(M) = C(M)$ .

- $\mathcal{E}^k(M) := \{ \varphi : k\text{-forms on } M \text{ with coeff } \in \mathcal{E} \}$  普通は” $\mathcal{A}^k(M)$ ”である.
- $\mathcal{K}^k(M) := \left\{ \varphi \in C^k(M) \mid \text{supp } \varphi \text{ cpt} \right\}$  ここで  $\text{Supp } \varphi := \overline{\{x \in M, \varphi(x) \neq 0\}}$  である.  
 $\varphi(x) \neq 0$  とはある  $J$  があって,  $\varphi_J(x) \neq 0$  であることを意味する.
- $\mathcal{D}^k(M) := \left\{ \varphi \in \mathcal{E}^k(M) \mid \text{supp } \varphi \text{ cpt} \right\}$
- $A \subset M$  について以下のようにおく

$$\mathcal{K}_A^k(M) := \left\{ \varphi \in \mathcal{K}^k(M) \mid \text{supp } \varphi \subset A \right\} \quad \mathcal{D}_A^k(M) := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}^k(M) \mid \text{supp } \varphi \subset A \right\}$$

|                                    | 連続                   | $C^\infty$           |
|------------------------------------|----------------------|----------------------|
| 関数                                 | $C(M)$               | $\mathcal{E}(M)$     |
| $k$ -form                          | $C^k(M)$             | $\mathcal{E}^k(M)$   |
| $k$ -form with support compact     | $\mathcal{K}^k(M)$   | $\mathcal{D}^k(M)$   |
| $k$ -form with support $\subset A$ | $\mathcal{K}_A^k(M)$ | $\mathcal{D}_A^k(M)$ |

Recall

$U \subset \mathbb{R}^m$  open のとき、 $C(U)$ ,  $\mathcal{E}(U)$  には次のような 位相をいれていた.

コンパクト集合の列:  $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset U$  で  $K_j \subset K_{j+1}^\circ$  かつ  $U = \bigcup_j K_j^\circ$  となるものを取り、 $f \in \mathcal{E}(U)$  に対し

$$P_N(f) := \max \left\{ |D^\alpha f(x)| \mid x \in K_N, |\alpha| \leq N, \omega \in K_N \right\}$$

$$V_N := \left\{ f \in \mathcal{E}(U) \mid P_N(f) < \frac{1}{N} \right\}$$

を open base at 0(0 での開基) とする位相を入れていた.

---

<sup>1</sup>おそらく通常の記法とかなり違う記法であると思われる.

lem-E-1 **0.1.1**により、これがコンパクト集合の列や座標近傍  $U \subset \mathbb{R}^m$  によらない

一般の多様体に関しては  $M$  に対しては、 $M = \bigcup_j U_j$  という座標近傍の被覆を使って

$$\mathcal{E}(M) \subset \prod \mathcal{E}(U_j)$$

部分位相を入れた。

defn-E-3

**Definition 0.1.4.**  $U \subset \mathbb{R}^m$  open に対し、 $C^k(U)$ ,  $\mathcal{E}^k(U)$  に対して位相を

$$\mathcal{E}^k(U) \simeq \prod_{J=(j_1 < \dots < j_k)} \mathcal{E}(U) d\bar{z}^J$$

による直積位相を入れる。

これは次のノルム

$$P_N(\varphi) := \max \left\{ |D^\alpha \varphi_J(x)| \mid x \in K_N, |\alpha| \leq N, \omega \in K_N \right\}$$

について、 $\mathcal{E}(U)$  と同じように位相を入れたものに一致する。

lem-E-4

**Lemma 0.1.5.** 1.  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $U' \subset \mathbb{R}^m$  open について、 $\Phi : U' \rightarrow U$  が diffeo のとき

$$\Phi^* : \mathcal{E}^k(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^k(U')$$

が  $\mathbb{C}$  上の位相ベクトル空間の同型を誘導する。

2.  $U \subset \mathbb{R}^m$  open,  $U = \bigcup_j U_j$  : countable open cover について、

$$\mathcal{E}^k(U) \hookrightarrow \prod_j \mathcal{E}^k(U_j)$$

は部分位相空間となる。

*Proof.* (1)  $\Phi : U'(x^1, \dots, x^m) \rightarrow U(y^1, \dots, y^m)$  diffeo として

$$\Phi^* : \mathcal{E}^k(U) := \prod_J \mathcal{E}(U) dy^J \longrightarrow \mathcal{E}^k(U') := \mathcal{E}(U') dx^I$$

は以下のような形になる。

$$\varphi = \sum_J \varphi_J dy^J \longmapsto \sum_I \left( \sum_J \Phi^* \varphi_J \frac{\partial y^J}{\partial x^I} \right) dx^I$$

となる. ここで

$$\frac{\partial y^J}{\partial x^I} = \det\left(\frac{\partial y^{j_k}}{\partial x^{i_l}}\right)$$

とする. よって [Lemma E-1](#) で  $\varphi_J \mapsto \Phi^*\varphi_J$  が連続であることを言っており, 和をとるのも連続なので, 連続性が言える.

(2) :

$$\prod_I \mathcal{E}(U) dx^I \cong \mathcal{E}^k(U) \hookrightarrow \prod_i \mathcal{E}^k(U_i) \stackrel{(1)}{\cong} \prod_i \left( \prod_I \mathcal{E}(U) dz^I \right) \cong \prod_I \left( \prod_j \mathcal{E}(U_j) dz^I \right)$$

となる. [Lemma E-1](#) でから,  $\mathcal{E}(U) \subset \prod_j \mathcal{E}(U_j)$  が部分位相になっているのでいえた.  $\square$

defn-E-5

**Definition 0.1.6.**  $M$  2nd countable  $m$  次元  $C^\infty$  級多様体について  $C^k(M)$ ,  $\mathcal{E}^k(M)$  に次のように位相を入れる:

$M = \bigcup U_j$  を座標近傍  $U_j$  の countable covering とし,

$$\mathcal{E}^k(M) \hookrightarrow \prod_j \mathcal{E}^k(U_j)$$

による部分位相を入れる.

$A \subset M$  compact subset について,  $\mathcal{D}_A^k(M) \subset \mathcal{E}^k(M)$  は closed subspace である.(下の remark 参照)  $\mathcal{D}_A^k(M)$  には  $\mathcal{E}^k(M)$  の subtopology ををいれる  
 $\mathcal{K}^k(M)$ ,  $\mathcal{D}^k(M)$  には、

$$\mathcal{B} := \left\{ W \subset \mathcal{D}^k(M) ; W = \text{non-empty convex balanced} \right. \\ \left. \text{s.t. } \forall A \subset M \text{ cpt, } W \cap \mathcal{D}_A^k(M) \text{ is open in } \mathcal{D}_A^k(M) \right\}$$

を 0 の local base となる位相を入れる.

*Remark 0.1.7.* [Lemma E-1](#) から  $\mathcal{E}^k(M)$  の位相は座標近傍の  $\{U_j\}$  の取り方に依らない. さらにこの位相は

$$\mathcal{E}^k(M) \rightarrow \mathcal{E}^k(U) \quad | \quad U \subset M \text{ loc. coord.}$$

に関する weak top. である (weak topology に関しては [??参照](#))

$\mathcal{D}_A^k(M) \subset \mathcal{E}^k(M)$  は closed subspace なのは  $x \in U \subset M$  loc coord. に対し, 代入写像

$$ev_x \mathcal{E}^k(M) \rightarrow \mathbb{C}^{\oplus J} \quad \varphi \longmapsto (\varphi(x))_J$$

が連続で,  $\mathcal{D}_A^k(M) = \bigcap_{x \in M \setminus A} \text{Ker}(e)v_x$  とかけるので closed subspace になる.

$\mathcal{K}^k(M)$ ,  $\mathcal{D}^k(M)$  の位相を詳しくいうと, [??](#)のようすに, 集合族  $\tau$  を, ” $\bigcup_{i \in I} (\varphi_i + W_i)$  とかけるもの”

の集まりとする。ただし  $i \in I$  について,  $\varphi_i \in \mathcal{D}^k(M)$ ,  $W_i \in \beta$  とする。

| dom                      | local ( $U \subset \mathbb{R}^n$ ) | global ( $M$ mfd.)            |
|--------------------------|------------------------------------|-------------------------------|
| form                     | $C^k(U)$ , $\mathcal{E}^k(U)$      | $C^k(M)$ , $\mathcal{E}^k(M)$ |
| form support $\subset A$ | $K_A^k(U)$ , $D_A^k(U)$            | $K_A^k(M)$ , $D_A^k(M)$       |
| form support compact     | $K^k(U)$ , $D^k(U)$                | $K^k(M)$ , $D^k(M)$           |

という対応がある。

prop-E-6

**Proposition 0.1.8.**  $M$  2nd countable 次元  $C^\infty$  級多様体について以下が成り立つ。

- $\mathcal{E}^k(M)$ ,  $D_A^k(M)$  locally convex, complete metrizable 位相  $\mathbb{C}$  ベクトル空間 Heine-Borel property.
- $C^k(M)$ ,  $K_A^k(M)$  locally convex, complete, metrizable 位相  $\mathbb{C}$  ベクトル空間.

*Proof.*  $k = 0$ ,  $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \subset \mathbb{R}^m$  などに関してはすでに示している

Prop-M-7.3 によって  $\mathcal{E}^0(U) = C^\infty(U)$  について, コンパクト集合の列  $K_1 \subset K_2 \subset \dots$  であって, seminorm の separating family

$$P_N(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| ; x \in K_N, |\alpha| \leq N\}$$

によって位相を入れると, metrizable 位相  $\mathbb{C}$  ベクトル空間であることがわかる。(ここに open cover が countable がいる)

また Prop-M-7.4 で complete と Heine-Borel property を示した。(ここに平均値の定理を使う。つまり微分可能性がいる。) よって  $C(U)$  しても同じで, Heine-Borel property 以外は 同様にできる。

$k > 0$ ,  $\mathcal{E}^k(M)$ ,  $C^k(M)$  に関しては, seminorm を

$$P_N(\varphi) := \max\left\{ |D^\alpha \varphi_J(x)| \mid x \in K_N, J = (j_1 < \dots < j_k), |\alpha| \leq N \right\}$$

に変えれば同様に言える

$\mathcal{E}^k(M)$ ,  $C^k(M)$  に関しては 前回 Lem-E-1(2) で与えられたコンパクト集合の列をとる。具体的に ( $M = \bigcup U_j$  とし  $K_{i1} \subset K_{i2} \subset \dots \subset U_i$  となるコンパクト集合列について

$$K_N := \bigcup_{i=1}^N K_{i,N}$$

$$P_N(\varphi) := \max\left\{ |D^\beta \varphi_J(x)| \mid x \in K_{iN} \subset U_i, J = (j_1 < \dots < j_k), |\omega| \leq N \right\}$$

とすると  $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset M$  であり, 同様の議論が回る。

$K_A^k(M)$ ,  $D_A^k(M)$  は それぞれ  $C^k(M)$ ,  $\mathcal{E}^k(M)$  の閉部分空間なので, 諸性質は保たれる.

□

prop-E-7

**Proposition 0.1.9.** (cf. <sup>[thm-M-8.7]</sup> [??])

- (a)  $V \subset D^k(M)$  convex balanced について,  $V$  が open であることは, 任意の compact  $A \subset M$  について,  $V \cap D_A^k(M) \subset D_A^k(M)$  であることと同値.
- (b)  $A \subset M$  compact としたとき,  $D_A^k(M) \subset D^k(M)$  部分位相空間.
- (c)  $E \subset D^k(M)$  bounded ならば, ある compact  $A \subset M$  であって,  $E \subset D_A^k(M)$  となる.
- (d)  $D^k(M)$  は Heine-Borel property を持つ.
- (e)  $D^k(M) \cong \text{colim}_{A \subset M \text{ cpt}} D_A^k(M)$ . ここでこの同型は locally convex 位相  $\mathbb{C}$  ベクトル空間としての同型である.

また上の主張は  $D_A$  を  $K_A$  に変えても成り立つ.

*Proof.* [(a)] <sup>[thm-M-8.6]</sup> [??] が  $D^k(M)$  でも言える (<sup>[thm-M-8.7]</sup> (a) の議論が回る)

[(b)]  $D_A^k(M) \hookrightarrow D^k(M)$  は, (a) より連続である.

一方,  $D^k(M) \hookrightarrow \mathcal{E}^k(M)$  も 連続である. なぜならば  $\mathcal{E}^k(M)$  は locally convex より, convex balanced な open base at 0 となるものがある. それらをひとつ取っても convex balanced であり, 各  $D_A^k(M)$  に制限しても open なので,  $D^k(M)$  の上で open となる.

[(c)] 対偶を示す.  $E \subset D^k(M)$  は任意の compact  $A \subset M$  について,  $E \not\subset D_A^k(M)$  を満たすとする.<sup>2</sup> この時  $E$  が bounded でないことを示す.

$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset M$  というコンパクト集合であって

$$K_i \subset K_{i+1}^\circ \quad \text{and} \quad M = \bigcup K_i^\circ$$

となるものをとる.  $E$  の仮定から, ある  $\varphi_n \in E$  と  $x_n \in K_n$  であって,  $\varphi_n(x_n) \neq 0$  かつ  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$  は集積点を持たないものが取れる.

そこで  $x_n \in U_n \subset M$  という局所座標をとって,

$$W := \{\psi \mid \max_J |\psi_J(x_n)| < \frac{1}{n} \max_J |\phi_{n,J}(c)| \text{ for any } n\}$$

とおく. ( $\phi_n = \sum_J \phi_{n,J} dx^J$  と分解する.)  $W$  は convex balanced open in  $\mathcal{D}^*(M)$  である. なぜならば, convex balanced は  $|\cdot|$  の性質から. 任意の compact  $A \subset M$  に対し,  $U_n \subset A$  となる  $U_n$  は有限個である. そして  $W \cap D_A^k(M)$  は open in  $D_A^k(M)$  である. (開集合の有限この共通部分なので.)

---

<sup>2</sup>ある  $\varphi \in E$  と  $x \in A$  であって,  $\varphi(x) \neq 0$  ということと同じ.

しかし任意の  $n \in \mathbb{Z}_+$  について,  $\varphi_n \notin nW$  となるので,  $E \not\subset nW$  であり,  $E$  は bounded ではない.

[(d)] bounded closed  $E \subset \mathcal{D}^k(M)$  は compact であることを言う. (c) より, ある compact  $A \subset M$  で,  $E \subset \mathcal{D}_A^k(M)$ . (b) より,  $\mathcal{D}_A^k(M) \subset \mathcal{D}^k(M)$  は部分位相が入るので,  $E \subset \mathcal{D}_A^k(M)$  の中では boundedかつclosed. よって [0.1.8](#) の  $\mathcal{D}_A^k(M)$  の Heine-Borel Property より言える.

[(e)]  $\mathcal{D}^k(M) \xrightarrow{f} V$  を locally convex 位相  $\mathbb{C}$  ベクトル空間の  $\mathbb{C}$  線型写像とする. すると次の同値変形ができる.

$f$  が連続である

$$\iff \forall U \subset V : \text{convex balanced open} \text{ に対し, } f^{-1}(U) \text{ open}$$

$$\iff \forall U \subset V : \text{convex balanced open. compact } A \subset M \text{ に対し } f^{-1}(U) \cap \mathcal{D}_A^k(M) \text{ open in } \mathcal{D}_A^k(M)$$

$$\iff f|_{\mathcal{D}_A^k(M)} : \mathcal{D}_A^k(M) \rightarrow V \text{ 連続}$$

map が  $\mathbb{C}$ -linear なことについても同様に言えるので,

$$\text{Hom}(\mathcal{D}^k(M), V) \simeq \varprojlim_{A \subset M \text{ compact}} \text{Hom}(\mathcal{D}_A^k(M), V).$$

□

defn-E-8

**Definition 0.1.10.**  $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  と書いた時, 次を意味する.

- $U_\lambda = (U_\lambda; x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n)$ : local coordinate of  $M$
- $V_\lambda \subset U_\lambda$ : 相対コンパクトな開集合 (つまり  $\overline{V_\lambda} \subset U_\lambda$  コンパクト)
- $M = \bigcup_\lambda V_\lambda$  かつ,  $\{U_\lambda\}_\Lambda$  は locally finite open covering of  $M$ . (つまり, 任意の  $x \in M$  について, ある  $x$  の近傍  $V$  で,  $V \cap U_\lambda \neq \emptyset$  となる  $\lambda$  は有限個)

上のような  $V_\lambda$  の存在に関しては, 多様体が 2nd countable であることから. ( 2nd countable  $\Rightarrow$  para-compact) また定義から  $\Lambda$  は可算集合となる.

また局所有限性から任意の compact  $A \subset M$  に対して,  $A \cap U_\lambda \neq \emptyset$  なる  $\lambda$  は有限である.

*Proof.* もし無限になるなら, ある  $x_i \in A \cap U_{\lambda_i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) が取れる.  $A$  compact なので, ある  $x$  に収束する部分列  $\{x_{i_k}\}$  が取れる. すると  $x$  の任意の近傍  $V$  について,  $V \cap U_{\lambda_{i_k}} \neq \emptyset$  が言えて  $\{V_\lambda\}$  の仮定に矛盾する □

以下  $U_\lambda$  上の座標  $(x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n)$  と  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  について,

$$D_\lambda^\alpha := \left( \frac{\partial}{\partial x_\lambda^1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x_\lambda^n} \right)^{\alpha_n}$$

また  $\varphi \in \mathcal{E}^k(M)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  について,

$$\|\varphi\|_{\lambda}^{\ell} := \max \left\{ |D_{\lambda}^{\alpha} \varphi_{\lambda, J}(x)| \mid x \in \overline{V_{\lambda}}, J, |\alpha| \leq \ell \right\}.$$

最後に  $\varphi \in \mathcal{D}^k(M)$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  について,

$$\|\varphi\|^{\ell} := \max_{\lambda} \|\varphi\|_{\lambda}^{\ell} = \max \left\{ |D_{\lambda}^{\alpha} \varphi_{\lambda, J}(x)| \mid x \in \overline{V_{\lambda}}, J, \lambda, |\alpha| \leq \ell \right\}.$$

とする。これらは seminorm である。

lem-E-9

**Lemma 0.1.11.**  $\{V_{\lambda} \subset U_{\lambda}\}$  を固定する。この時

$$\{\|\cdot\|_{\lambda}^{\ell} \mid \lambda \in \Lambda, \ell \geq 0\}$$

は *separating family of seminorm on  $\mathcal{E}^k(M)$*  であり、前に定めた位相 (Defn-E-5) と同じ位相を定める。

*Proof.* Seminorm であることはすぐにわかる。

$$V(\lambda, \ell, \varepsilon) := \{\varphi \in \mathcal{E}^k(M) \mid \|\varphi\|_{\lambda}^{\ell} < \varepsilon\}$$

とする。示すことは

$$\left\{ \bigcap_{\text{finite}} V(\lambda_i, \ell_i, \varepsilon_i) \mid \lambda_i \in \Lambda, \ell_i \geq 0, \varepsilon_i > 0 \right\}$$

が local base at 0 であることを示せば良い。

$V(\lambda, \ell, \varepsilon)$  が open であることは、制限写像  $\text{res} : \mathcal{E}^k(M) \rightarrow \mathcal{E}^k(U_{\lambda})$  によって、

$$\{\varphi \in \mathcal{E}^k(U_{\lambda}) \mid \|\varphi\|_{\lambda}^{\ell} < \varepsilon\} \subset \prod_J \mathcal{E}^0(U_{\lambda})$$

の pullback になるので良い。

任意の  $0 \in V \subset \mathcal{E}^k(M)$  となる open について、ある  $N \gg 0$  と compact subset  $K_N := K_{N,1} \cup K_{N,2} \cup \dots \cup K_{N,N}$  であって、

$$p_N(\varphi) := \max \left\{ |D_{\lambda}^{\alpha} \varphi_{\lambda, J}(x)| \mid x \in K_N, J, |\alpha| \leq N \right\}.$$

としたとき、 $V$  は  $\{\varphi \in \mathcal{E}^k(M) \mid p_N(\varphi) < \frac{1}{N}\}$  を含む。よって  $K_N \subset \bigcup_{i \in \text{finite}} V_{\lambda_i}$  をとり、 $\ell_i \leq N$  とし、 $0 < \varepsilon_i \ll \frac{1}{N}$  をとると

$$\bigcap_i V(\lambda_i, \ell_i, \varepsilon_i) \subset \left\{ \varphi \mid p_N(\varphi) < \frac{1}{N} \right\} \subset V$$

となりえた. □

cor-E-10

**Corollary 0.1.12.** compact  $A \subset M$  について,  $\{\|\cdot\|^{(\ell)} \mid \ell \geq 0\}$  は separating family of seminorms on  $\mathcal{D}_A^k(M)$  であり, 同じ位相を定める.

$\mathcal{K}_A^k(M)$  についても,  $\{\|\cdot\|^{(0)} \mid \ell \geq 0\}$  を考えれば同様の主張が得られる.

prop-E-11

**Proposition 0.1.13.**  $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}$  を固定する.

1.  $\{\varphi_i\}$  が  $\mathcal{D}^k(M)$  で Cauchy 列であることは, ある compact 部分集合  $A \subset M$  で  $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_A^k(M)$  かつ

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|\varphi_i - \varphi_j\|^\ell = 0 \quad \forall \ell \geq 0$$

が成り立つことと同値.

2.  $\varphi_i \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}^k(M)$  は, ある compact 部分集合  $A \subset M$  で  $\{\varphi_i\} \cup \{\varphi\} \subset \mathcal{D}_A^k(M)$  かつ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\varphi_i - \varphi\|^\ell = 0 \quad \forall \ell \geq 0.$$

が成り立つことと同値.

3.  $\mathcal{D}^k(M)$  は complete.

$\mathcal{K}_A^k(M)$  についても,  $\{\|\cdot\|^{(0)}\}$  を考えれば同様の主張が得られる.

*Proof.* [(1)]  $\{\varphi_i\}$  Cauchy 列は bounded である. よって [prop-E-7](#) より, ある compact  $A \subset M$  であつて,  $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_A^k(M)$  となる. これより

$$\begin{aligned} & \{\varphi_i\} \text{ Cauchy 列 in } \mathcal{D}^k(M) \\ \iff & \exists A \subset M \text{ compact s.t. } \{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_A^k(M) \text{ かつ Cauchy 列 in } \mathcal{D}_A^k(M) \\ & \xrightarrow[\text{0.1.12}]{\text{cor-E-10}} \subset M \text{ compact s.t. } \{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_A^k(M) \text{ かつ } \lim_{i,j \rightarrow \infty} \|\varphi_i - \varphi_j\|^\ell = 0 \quad \forall \ell \geq 0. \end{aligned}$$

[(2)]  $\{\varphi_i\} \cup \{\varphi\}$  は bounded より, (1) と同様.

[(3)] (1) と  $\mathcal{D}_A^k(M)$  は complete より, 任意の Cauchy 列は収束する. □

defn-E-12

**Definition 0.1.14.** 連続線型写像  $T : \mathcal{D}^k(M) \rightarrow \mathbb{C}$  のことを  $k$ -dimensional current on  $M$  という. 特に distribution は 0-dimensional current のことをさす.

$$\mathcal{D}'_k(M) := \{k\text{-current on } M\} = \text{Hom}_{\text{top } \mathbb{C}\text{-vect sp}}(\mathcal{D}^k(M), \mathbb{C})$$

$$\mathcal{K}'_k(M) := \text{Hom}_{\text{top } \mathbb{C}\text{-vect sp}}(\mathcal{K}^k(M), \mathbb{C}).$$

**Proposition 0.1.15** (cf. [prop-M-8.11](#)).  $Y$  を locally convex 位相  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間,  $T : \mathcal{D}^k(M) \rightarrow Y$  を  $\mathbb{C}$  線型写像とする. 次は同値である.

- (a)  $T$  は 連続
- (b)  $T$  は bounded, つまり bounded set を bounded set にうつす.
- (c)  $\varphi_i \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}^k(M)$  ならば,  $T(\varphi_i) \rightarrow 0$  in  $Y$ .
- (d) 任意の compact  $A \subset M$  について,  $T|_{\mathcal{D}_A^k(M)} : \mathcal{D}_A^k(M) \rightarrow Y$  は連続.
- (e) ( $Y = \mathbb{C}$  の場合のみ) 任意の compact  $A \subset M$  について, ある  $\ell \geq 0, C > 0$  があって,

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|^\ell \quad \text{for } \forall \varphi \in \mathcal{D}_A^k(M).$$

$\mathcal{K}_A^k(M)$  についても,  $\ell = 0$  のみを考えれば同様の主張が得られる.

*Proof.*  $[(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)]$  (a), (b), (c) の主張において,

$$\mathcal{D}^k(M) \mapsto \mathcal{D}_A^k(M) \quad T \mapsto T|_{\mathcal{D}_A^k(M)}$$

に取り替えた主張を  $(a)_A, (b)_A, (c)_A$  とする. [0.1.8](#) より  $\mathcal{D}_A^k(M)$  は metrizable より [??.](#) より [prop-M-4.2](#),

$$(a)_A \iff (b)_A \iff (c)_A$$

となる. また [0.1.9](#) (e) から

$$(d) \text{ が成立} \iff \forall A \subset M \text{ compact}, (a)_A \text{ が成立}$$

となる. よって (a) と (d) が同値になる. 同様にしてこれらは (b) や (c) と同値となる.

$[(e) \Rightarrow (d)]$   $Y = \mathbb{C}$  とする. compact  $A \subset M$  をとる. 仮定より  $\ell \geq 0, C > 0$  があって,

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|^\ell \quad \text{for } \forall \varphi \in \mathcal{D}_A^k(M).$$

$\forall \varepsilon > 0$  に対し,

$$V := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}_A^k(M) \mid \|\varphi\|^\ell < \frac{\varepsilon}{C} \right\}$$

とおくと, これは 0 を含む open in  $\mathcal{D}_A^k(M)$  であり,

$$\varphi \in V \Rightarrow |T|_{\mathcal{D}_A^k(M)}(\varphi) < \varepsilon$$

である. よって  $T|_{\mathcal{D}_A^k(M)}$  は連続である.

$[(d) \Rightarrow (e)]$   $A \subset M$  compact とすると, 仮定より  $T|_{\mathcal{D}_A^k(M)}$  は連続. よって<sup>cor-E-10</sup> [0.1.12](#) から,  $\ell \geq 0, \varepsilon > 0$  があって,

$$T(\{\varphi \in \mathcal{D}_A^k(M) \mid \|\varphi\|^\ell < \varepsilon\}) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

よって任意の  $\varphi \in \mathcal{D}_A^k(M)$ ,  $\varphi \neq 0$  に対し,

$$\left| T\left(\frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|^\ell}\varphi\right) \right| < 1.$$

であるので整理して,  $|T(\varphi)| < \frac{2}{\varepsilon} \|\varphi\|^\ell$  となる. よって  $C = \frac{2}{\varepsilon}$  とおけば良い.  $\square$