

1 教科書一覧・セミナーの仕方・必要な知識

1.1 学部セミナー・修士セミナーで読む本

学部4年セミナーや修士セミナーで読むことを前提に書いています。セミナーで読む本は状況において異なります。概ね以下の3つのケースに分けました。

- (1) 修士に行く予定が”ない”人が学部4年セミナー読む本。
- (2) 修士に行く予定が”ある”人が学部4年セミナー読む本。
- (3) 修士セミナーで修士1年の人が読む本。

(1). 数学の修士に行かないのであれば、学部4年セミナーで読む本は何も気にする必要はないです。下の(2)のような本を読んでもいいし、(2)が難しければ難易度を下げた本を読んでも良いです。さっぱりわからない本で1年過ごすのは面白くないと思います。なので少し専門的な数学を学んで卒業していただければと思います。学部3年の内容に相当する本を読んでも良いし、私の専門外の教科書をセミナーで読んでも良いです。本の例に関して [1.7 節](#) を参照してください。

(2). 学部4年セミナーにおいて、修士に行く予定がある人には下の本をお勧めします。

- 代数幾何学を専門にするなら, Hartshorne.
理由はこの本を読めば「スキーム, 層, 層係数コホモロジー論」を理解できるから。
- 複素幾何学・多変数複素解析を専門にするなら, Wells, Huybrechts, または堀川.
理由はこの本を読めば「層・コホモロジー・ホッジ理論 (調和積分論)・小平消滅定理・小平埋め込み定理」を理解できるから。(ただし堀川だけは例外)
- 多変数複素解析にいくなら中野または Forstneric.
中野は半分くらいは複素幾何の内容で、もう半分は L^2 理論の内容。Forstneric では岡多様体を扱ってます。岡多様体は新たな多変数複素解析の分野として定着するのではと期待しています。

もちろんこの本以外の本でも良いが、上の教科書は”無難”です。(ただし Forstneric が無難かどうかは不明。) ここで”無難”とは、「修士で私と違う先生のところに行った場合でも、難なくやっていける」という意味です。

(3). 修士セミナーは専門的な内容を学ぶことになります。私がカバーできるのは次の三つ

です.

1. 代数幾何学や複素解析空間から派生した複素代数幾何学.
2. ケーラーアインシュタイン計量の存在など, (阪大では由緒正しい) 複素微分幾何学.
3. 多変数複素解析の領域理論や L^2 理論から派生した複素解析幾何学.

私の専門は1です. ただ現在は修士・博士が解けそうな問題が少ない分野です. 2や3は専門ではないので詳しいことは教えられません. が, 博士に行くなら指導教官を超える必要があるので, 2や3私のところで研究して, 私を翻弄してください.¹ 私としてもそちらの方が嬉しいです.

修士セミナーでは以下の本をお勧めします.

- 1の代数幾何, 3の複素解析に行くなら, Demailly の Anaytic method の本. この本は読むのに1年かかります. (ただし複素解析を望む場合, 少し難易度を下げても良い. Berndtsson の本など.) これを読んだ後は Hacon-Popa-Schnell の論文を読むことになります.
複素解析っぽい方面に進むなら, 早めに松村先生・稲山先生・渡邉先生にあって, 最近の研究などの情報を仕入れることになります. 代数幾何っぽい方面に進むなら, 高山先生・松村先生・岩井から情報を仕入れることになります.
- 2の微分幾何にいくなら, Szekelyhidi の本. この本を全部読んでもいいし, 後半を早めに切り上げてそのあとは論文を読んでも良いです.
この分野に進むなら, 早めに久本先生・橋本先生・井上先生などがいる日本の複素微分幾何勢の大きなグループに所属し, 勉強会などに参加して行って, その人たちに最近の研究などを聞くことになると思います.
- 1~3以外の多変数複素解析にいくなら, 岡多様体. Forstneric の教科書か関連論文を読むことになります. これは私はわからないので, 私が日下部先生から仕入れた論文を読んでもらうことになります.
この分野に進むなら早いうちに日下部先生やその研究室の学生に会うべきです.

もちろん上の本以外の分野の本を読むのは全然良いです. 例えばゴリゴリの代数幾何学・

¹私が博士の時, 高山先生から「指導教官と同じ分野を選んではいけない」と言われました. これは正しいと思います. 指導教官の真似事をして博士を出れると思わない方がいいです. 博士を出るにはなんでもいいから指導教官を超える必要があります. (まあ私はその言葉をガン無視して, 複素代数幾何学を専門にしましたが, ただ高山先生の方向性とはかなり違います.)

双有理幾何学の話聞くことはできます。が、私のところで勉強するより、他の先生(藤野先生・藤田先生・大川先生など)のところで読む方が絶対に良いと思います。

また面白い本と教科書は別です。Hartshorne は教科書としては良い本だが、面白いかと言えば微妙です。Grauert-Remmert は今読むとめっちゃくちゃ面白い本だが、教科書としてはおすすめしません。(理由は後述。) また「メイン」で読むと「サブ」で読むと言う表現をしているがこれは次のとおりです。

- 「メインで読む」とは、セミナーで読むことを想定している本。基本的に修士など研究するために必要な知識を網羅している本が該当します。
- 「サブで読む」とは、一人で読んだり同期の自主ゼミで読んだりする本。尖った内容や、研究に必要なだがメインほどではない内容を扱っている本が該当します。

おそらく1年で真剣に読める本は、メインの1本とサブの0~2本の計1~3本くらいです。なので真剣に読む本は無難な方が良いです。が、尖った内容は後に役に立つ可能性もあり、これは運です。

最後に伊原先生の本から次の言葉を引用します。

「自分は一ヶ月に一冊読んでいる」などという先輩や仲間に惑わされないように。本質的なところを感じとれない人の方が、すぐ数値的な評価をしたがる。数学者になる、ということは、より深い価値がわかる人をめざす、ということでもあると思います。

1.2 本の難易度

★マークに関しては難易度です。難易度は以下になっております。²

- ★ 難易度 Easy. 学部2~3年生向け。学部4年のセミナーで読む場合は、修士に行かない人のみを選択できます。
- ★★ 難易度 Normal. 学部4年生向け。修士に行く予定のある人はこの難易度以上の本を選ぶことになります。
- ★★★ 難易度 Hard. 修士1年生向け。おおよそ修士1年にこの難易度の本を読めれば、そのあと論文を読むことができます。

²難易度名に関しては東方 project やファイアーエムブレムシリーズを参照しました。

★★★★ 難易度 Lunatic 修士2年生以上. 岩井も読めない教科書・論文もあります.

コメントに関しては, 私が学生の時に読んだ記憶を思い出して書きました. 本の内容も改訂して変わっている可能性もあります. また記憶違いもありますし, 個人的な意見が多いです. ご了承ください.

なおリストを書くにあたって次の文献を参考にしました. (以下, 敬称略)

- 藤野修. 文献案内 <https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fujino/ag-ref.pdf>
- 桂利行, 太田快人 山本修身. 実用家向きの代数幾何学文献案内 (定評ある教科書・古典的書籍) https://www.jstage.jst.go.jp/article/bjsiam/14/3/14_KJ00003509979/_article/-char/ja/
- 松尾信一郎. 推薦図書
<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~shinichiroh/2018/01/20/recommended-texts.html>
- 本多宣博. 4年生・大学院生のセミナーで使用するテキスト・参考書
<https://www.honda.math.sci.titech.ac.jp>

次から本を紹介するが, その前にお得な情報. Springer Link <https://link.springer.com> と言って, 所属している大学によっては, Springer の本の pdf が無料で入手できます.(もちろん合法.) 阪大は Springer と契約としていたはずですが. ぜひ活用してほしいです.

1.3 必ず読むべき本

伊原 康隆. ”志学数学 -研究の諸段階 発表の工夫” 丸善出版

難易度: なし

コメント: どの分野に行くにしても必ず読むべき本です. 読んでいない人は今すぐ読むことをおすすめします. 河東先生も書評にて「今すぐこの本を買ってきて読みなさい」と言ってます. その通りです. 「いやお金がなくて...」という人は, 阪大の総合図書館に3冊あるので借りて読もう.

ちなみに河東先生の”数学者の思案”(岩波書店) も面白いです. 私は Kindle 版で買いました. 河東先生のホームページも面白いです. 以下のページを読むことをおすすめします.

- セミナーの準備の仕方について <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/sem.htm>

- どうでもよい記事 <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/misc.htm>

「セミナーの準備の仕方について」については一回読むべき.(1.8節参照). 「どうでもよい記事」は時たま読みたくなります. 有益な情報も多いです. これが無料で公開されているのが不思議なくらいです.

1.4 代数幾何学の教科書

代数幾何学を勉強するなら, 学部4年セミナーを通して「スキーム, 層, 層係数コホモロジー論」を理解する必要があります. そのスキームを理解するのに可換環論を少しを知っておく必要があります. なので学部4年のセミナーが始まるまでにはある程度の可換環論 (Atiyah-Macdonald の内容) くらいは学んでおくことになります.

修士1年以降の代数幾何学の内容で私がカバーできるのは, 双有理幾何学ぐらいです. ただそれもちょうとしか理解してないので, あまりためにはなりません. なので私のところで代数幾何学を学ぶより, 藤野先生・藤田先生・大川先生のところで専門的なことを学んだ方が絶対いいと思います.

1.4.1 学部4年セミナー向け

Robin Hartshorne. "Algebraic Geometry" Graduate Texts in Mathematics (GTM, volume 52), Springer

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: この本をおすすめする理由はただ一つ, 「多くの論文でこの本を引用している」から. もちろんこれより読みやすい代数幾何学の教科書はあります. が, こだわりがなければこの本を読んだ方が良いでしょう.

1年で読むなら2~3章. 2章のスキームの評判は悪いが, これはどうしようもないです. 3章のコホモロジーが一番面白い. 1章の古典的代数幾何は事前に読むか, 後から読んでも事足ります. 4章の曲線論は読むとためになるので, 3章終わって時間余ったら読む感じで. 5章の曲面論はこの本じゃなくてもいいです. (が, 読んでもいいと思う.)

宮西 正宜. "代数幾何学" 裳華房

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: 1章の層の理論はかなり詳しく書かれているのが良いです (ちょっと読みづら

いけど). スキームの部分は普通. 最後の曲面論は宮西先生の分野によっている気がします. 気のせいですかね.

上野 健爾. "代数幾何" 岩波書店

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: 読んだことはないです. 目次を見る限り丁寧そうな本な気がします.

David Mumford. "Algebraic Geometry. I. Complex projective varieties" Springer.

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: 藤野先生や桂先生たちのおすすめ. 読んだことはないです. 藤野先生曰く, "この本には「スキーム論」も「複素多様体論」も「層係数コホモロジー論」も出てこないが、代数幾何学の神髄に早い段階で触れることの出来る良書である。"とのこと.

私は「代数幾何学やるなら学部4年でスキーム, 層, コホモロジーに慣れる必要がある」と思うので, 学部4年のセミナーで読むのはあまりおすすめしません. ちなみに2巻があるらしく, 2巻ではスキームをやっています.

D. マンフォード. "代数幾何学講義" シュプリンガー数学クラシックス

David Mumford. The Red Book of Varieties and Schemes

難易度: ★ ~ ★★

コメント: 通称"Red Book". 私は学部3年で自主ゼミで半分くらいまで読みました. 結構適当だが雰囲気味わうにはいい本だと思います. これも上と同じ理由で学部4年のセミナーで読むのはあまりおすすめしません.

Qing Liu. "Algebraic Geometry and Arithmetic Curves" Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: どちらかというと数論系の人が読んでいるイメージ.

Ulrich Görtz , Torsten Wedhorn. "Algebraic Geometry I: Schemes" Springer

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: 長い. 圏論好きな人はこの本で代数幾何学を学んでもいいかもしれないです. 最近2巻が出ました.

飯高 茂. "代数幾何学" 岩波講座 基礎数学. 岩波書店

Sigeru Iitaka. "Algebraic Geometry An Introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties" (GTM, volume 76) Springer

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: 飯高先生が岩波講座 基礎数学で書いたもの. 私は学部4年に高木俊輔先生のもとでこの本の英語版を読みました. 日本語版は難しすぎて読めないで, 英語版を読むのをおすすめします.

タイトル通り, 双有理幾何学につながるような内容が多いです. 前半は基礎的な内容であるが, 後半はかなりマニアックな内容 (Grothendieck's devissage theorem, 藤田 δ 種数, 飯高予想) が多いです. おそらくこの本で勉強するよりは, 勉強した後にこの本を流し見る方が良いと思います. なお2021年の研究の際にこの本にお世話になりました.

向井 茂. "モジュライ理論" 岩波書店

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: 気になるから読んでほしい.

1.4.2 修士セミナー向け

Janos Kollar, 森 重文. "双有理幾何学" 岩波書店

Janos Kollar, Shigefumi Mori. "Birational Geometry of Algebraic Varieties" Cambridge Tracts in Mathematics, Series Number 134. Cambridge University Press

難易度: ★★★★★ ~ ★★★★★★

コメント: 双有理幾何学をやるならこの本を修士1年に勉強することになります. なぜなら多くの論文で "We employ the standard notation and conventions in [Har77, KM98]." というふうに, Hartshorne と Kollar-Mori は引用されるからです. 私も書きました.

私のところに来て双有理幾何学を勉強する人はいない (と思う) ので, この本はサブで読むことになります. この分野は双有理幾何学・極小モデル理論 (MMP) からは逃れられない

ので, (適当でもいいので) 読むことをおすすめします. 私は適当にしか読んでないので, いまだにこの本を開くことになってます.

Yujiro Kawamata, Katsumi Matsuda, Kenji Matsuki. "Introduction to the Minimal Model Problem" Adv. Stud. Pure Math., 1987.

難易度: ★★★★★ ~ ★★★★★

オンライン入手可能: <https://projecteuclid.org/ebooks/advanced-studies-in-pure-mathematics/Algebraic-Geometry-Sendai-1985/chapter/Introduction-to-the-Minimal-Model-Problem/10.2969/aspm/01010283>

コメント: 個人的には Kollar-Mori よりこっちの方が好きです. 松木先生が書いたであろうプログラミングっぽい図が好きです. 通称 KMM. ちなみに代数幾何学・双有理幾何学で"KMM"と呼ばれる論文は少なくとも3つあります.

Robert Lazarsfeld. "Positivity in Algebraic Geometry I, II" Springer

難易度: ★★★★★ ~ ★★★★★

コメント: Demailly の Analytic method の本を代数的に理解するならこの本. この本は正標数の研究室, とりわけ高木俊輔先生の研究室の人が読んでいるイメージです. 乗数イデアル層を代数的に理解するためには, この本の第3部をサブで読むことになります. なお第2部のベクトル束の話は研究でお世話になりました.

高木俊輔先生の書評も見てください. (https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~stakagi/academic/review_Lazarsfeld.pdf)

Arnaud Beauville. "Complex Algebraic Surfaces" London Mathematical Society Student Texts, Series Number 34. Cambridge University Press

難易度: ★★★★★ ~ ★★★★★

コメント: 曲面論を手っ取り早く習うならこの本. この本を修士セミナーで読みたいのであれば, 私ではなく藤田先生のところで読むべきです. 私は修士1年の時に長岡大先生の修士セミナーに聴講して聞いたぐらいです.

Daniel Huybrechts, Manfred Lehn. "The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves" Cambridge University Press

難易度: ★★★★★ ~ ★★★★★

コメント: semistable sheaf などのモジュライを学びたいならこの本. この本を修士セミナーで読みたいのであれば, 私ではなく大川先生や高橋先生のところで読むべきです. ただ気になるから読んでほしい.

Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher D. Hacon, James McKernan. "Existence of minimal models for varieties of log general type" *Journal of American Mathematical Society*, 2010.

難易度: ★★★★★

コメント: 通称 BCHM. 数学の論文は通称ではヒットしないのが普通ですが, あまりにも有名すぎて"BCHM"で検索したらこの論文がトップに出てきます. 気になるから読んでほしい. 結果しか引用してないので.

川又 雄二郎. "高次元代数多様体論" 岩波書店

Yujiro Kawamata. "Algebraic Varieties: Minimal Models and Finite Generation" Cambridge University Press

難易度: ★★★★★

コメント: 川又先生による BCHM の解説書. 買った方がいいものの読んでません. 読んでほしい. なお英語版は Chen Jiang 先生が翻訳したものです.

Osamu Fujino. "Foundations of the Minimal Model Program" *Mathematical Society of Japan Memoirs*. Mathematical Society of Japan

難易度: ★★★★★

コメント: 私たち幾何・解析の人は KLT(Kawamata log terminal) まで扱えません. KLT は L^2 可積分を意味するからです. しかし代数の人は LC(Log Canonical) まで扱えます. この本は LC, さらにもっと一般的な quasi log scheme について消滅定理などを示し, そして MMP の基本的な定理も示しています. なので消滅定理を代数的に理解するなら, この本を読むことになります. 研究で藤野先生の論文を引用する際にこの本にお世話になりました.

Osamu Fujino. "Iitaka Conjecture An Introduction" Springer

難易度: ★★★★★

コメント: 飯高予想での Viehweg 先生や藤野先生の結果などを網羅しています. Păun-Takayama, Hacon-Popa-Schnell など順像層の正值性の話を代数的に理解するならこの本

です. 一番初めの研究で大変お世話になりました. Viehweg のテクニックは本当によく出てきます.

藤野先生の 2022 年名古屋大学集中講義ノート <https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fujino/sonota.html> も参照.

Kenji Ueno. "Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces" Springer

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: 代数幾何の本でもあり, 多変数複素解析の本でもあります. おそらく MMP の枠組みができる前の分類理論の話です. (詳しくは藤野先生の 2022 年名古屋大学集中講義ノート <https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fujino/sonota.html> も参照.) 飯高予想の論文を読むと, この教科書への引用が本当に多いです. よく参考にするので紹介しました. 気になる人はサブで適当に読めばいいと思います.

Yoichi Miyaoka , Thomas Peternell. "Geometry of Higher Dimensional Algebraic Varieties" Springer

難易度: ★★★★★

コメント: 半分宣伝. この本は宮岡先生の研究のチャーン類の話が面白いのですが, 知ってる人が少ないです. いい本なのになあ. 第2チャーン類の研究でお世話になりました.

Christian Schnell. "A graduate course on the Generic vanishing theorem"

難易度: ★★★★★

オンライン入手可能: <https://www.math.stonybrook.edu/~cschnell/pdf/notes/generic-vanishing.pdf>

コメント: Schnell 先生によるレクチャーノート. 導来圏や Fourier-Mukai 変換を"具体的に"双有理幾何学に応用した内容を取り扱っています. 結構強力な道具なので, これ読んでほしいです.

1.5 複素幾何学の教科書

複素幾何学をカバーする範囲は広いので代数幾何学と違って, "必ず理解すべき内容"は分野によって異なります.

個人的には学部4年セミナーで「層・コホモロジー・ホッジ理論(調和積分論)・小平消滅定理・小平埋め込み定理」まで理解できれば十分だと思います。おそらく一つ教科書を決めてその内容を理解し、そこから理解すべき内容を増やしていく方法になると思います。

あと個人的な見解として、「代数幾何学を学んでから複素幾何学を学ぶ」ことは割と楽にできるが、「複素幾何学を学んでから代数幾何学を学ぶ」のは苦勞がいます。代数幾何学のスキーム論などの抽象的な理論はじっくり時間をかけて読まないで理解するのが難しいからです。³ なので「複素幾何学を学んでから代数幾何学を学ぶ」には実践的な方法で学ぶことになります。具体的には、代数幾何学・双有理幾何学の道具を使っていって学んでいくことになります。例えば代数幾何学の用語 (ample, psef など) を複素幾何学の用語 (positive, with semipositive curvature current) に翻訳するなどです。

なお複素幾何学を専門にするのであれば、(どんな形であれ) 代数幾何学・双有理幾何学からは逃れられないと思った方がいいです。論文読んでいきなり極小モデル理論が出てくることはよくあります。仕方ない。

1.5.1 学部4年セミナー向け

Raymond O. Wells. "Differential Analysis on Complex Manifolds" Springer

難易度：★★

コメント：私が学部生の時はこの本が複素幾何の鉄板の教科書でした。学ぶべきだと思う内容を網羅して良い本だと思います。

ただし4章の擬微分作用素の評判は本当に悪い。その部分はガン無視するか他の教科書で学ぶことになります。(他の教科書に関しては松尾信一郎先生のページを参照。) 前者を選んだ場合は代数っぽい複素幾何が好きと言うことになり、後者を選んだ場合は解析っぽい複素幾何が好きと言うことになります。私は前者でしたがどちらでも良いです。

Daniel Huybrechts. "Complex Geometry: An Introduction" Universitext, Springer

難易度：★★

コメント：読んだことはないです。がページをペラペラめくったら割といい本だと思います。意外だったのが層の理論を Appendix に回しているところ。複素幾何をやる上で層は

³なおスキーム論を知らなくても複素解析空間を学べば事足りるが、複素解析空間を学ぶのはスキーム論を学ぶより難しいです。議論がかなりややこしいから。

必須なので、その Appendix も含めて勉強すべき。

堀川 穎二. ”複素代数幾何学入門” 岩波書店

難易度：★★～★★★★

コメント：複素数体上の代数幾何学を複素解析的に扱った本。この本はかなりおすすめ。スキーム論ガン無視で複素代数幾何学をやるのであれば、この本で勉強してもいいかも。この本を読んで複素代数幾何学の道に進むのは可能です。

リーマン面の部分までは(因子の部分を除いて)従来の本と同じ。最後の楕円曲線の退化の部分を取り扱っているのは、日本語だとこの本くらいしかないと思います。最後まで読むことができれば、代数勢にも負けないくらいの代数幾何学の力がつくと思います。残念なのはホッジ理論(調和積分論)・小平消滅定理・埋め込み定理がない点。この部分だけは Wells や Huybrechts で補う必要があります。

小林 昭七. ”複素幾何” 岩波書店

難易度：★★～★★★★

コメント：日本語で複素幾何を学ぶならこれになるのでしょうか？ベクトル束の第2基本形式の部分は研究で本当にお世話になりました。もちろんこの本で勉強してもいいですが、せっかくセミナーで読むなら英語の本を読んだ方がいいと思います。

Christian Schnell. ”A graduate course on Complex manifolds”

難易度：★★～★★★★

オンライン入手可能: <https://www.math.stonybrook.edu/~cschnell/pdf/notes/complex-manifolds.pdf>

コメント：Schnell 先生によるレクチャーノート。ちらっと見ましたがこれもいい本です。学びたい内容が簡潔(136 ページ)にまとまっています。そして代数っぽい例が多いです。Schnell 先生の論文や本はわかりやすいものが多い印象です。個人的にはベクトル束のことが少ないかなとは思いますが、この本で勉強しても良いと思います。

Claire Voisin. ”Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I, II” Cambridge University Press

難易度：★★～★★★★

コメント：最初の方は従来と同じですが、途中から VHS(Variation of Hodge Structure) な

どの話になります。これを幾何学的な側面から学べる本はこれくらいだと思います。なのでその部分でもこの本は読む価値はあります。欠点は二冊に分かれていて長い点と議論がまあまあ適当な点。

小平 邦彦. "複素多様体論" 岩波書店

Kunihiko Kodaira "Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures" Springer

難易度：★★～★★★★

コメント：前半は従来の本と同じですが、後半は小平・スペンサーの変形理論の話です。英語版の方が変形理論の証明が丁寧でした。後半の内容は面白いが、この本で学ぶのが適切かがわかりません。幾何学的な視点でモジュライを研究したいなら、どう勉強すればいいかを井上先生に詳しく聞いた方がいいかも。

複素幾何の創始者でもある小平先生の本で学ぶと言うことは推奨されるべきですが、ホッジ理論(調和積分論)の部分の記法が独特で読みづらいです。丁寧ですが読むのに疲れます。また小平消滅定理・埋め込み定理がないのも残念です。なお小平先生自身が小平消滅定理のことを書いた本はないです(セミナーノートならあります)。最後の藤原先生の補足は解析系の人が読んでいるイメージ。

小木曾 啓示. "代数曲線論" 朝倉書店

難易度：★★

コメント：代数幾何的に代数曲線やリーマン面を学びたいならこの本はおすすめです。わかりやすくてかなり良い本です。読むべき。なお私はこの本は代数幾何ではなく複素幾何の本だと思います。コホモロジーに関する証明がかなり解析的です。修士に行かない人はこの本を学部4年セミナーで読んでも良いです。修士に行く予定があるなら、サブでいいので読むことを"強く"おすすめします。

Jean-Pierre Demailly. "Complex Analytic and Differential Geometry"

難易度：★★～★★★★★

オンライン入手可能: <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>

コメント：長い。セミナーで読むにはおすすめしません。理由は長いのと割とマニアックな内容が多いから。1章はいいとして、2書の analytic space, 3章の current の部分は半分

くらいの内容が専門家向けです。この辺りは難しすぎます。ところどころは読めますが、間に専門的な内容が挟まっている印象です。これは専門家が勉強・引用する際に使う本です。

Phillip Griffiths, Joseph Harris. "Principles of Algebraic Geometry" Wiley Classics Library.

難易度：★★～★★★★

コメント：長い。セミナーで読むにはおすすしめしません。長いから、800 ページを1年で読めると思わない方がいいです。これは辞典のように使うべき。

今野 宏. "微分幾何学" 東京大学出版会

難易度：★★～★★★★★

コメント：微分幾何学に基礎的なことがほぼ全て網羅されていると思います。ページ数が普通の本と変わらないのにこんなにも内容が多い本はこの本くらいだと思います。非常に良い本です。

ただセミナーで読むにはおすすしめしません。理由は「証明・議論が簡潔すぎて全く頭に入らない」から。議論・証明が本当に簡潔で無駄が全くないです。ただなぜか何回読んでも全く頭に残らないです。おそらく他の本で勉強したのちにこの本を読むのが良いと思います。護身用として持っておくと良いと思います。

1.5.2 修士セミナー向け

Jean-Pierre Demailly. "Analytic Methods in Algebraic Geometry" International Press of Boston Inc

難易度：★★★★～★★★★★

オンライン入手可能: https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/analmeth_book.pdf

コメント：私含め高山研(東京大学)の修士の学生は一年でこれを読むことになっています。改めて見れば「いい本とはいえないが、この分野を網羅していてまとまっている本はこれしかない」という感じです。読みやすくはないし、難しいです。ただこれを読めば、修士2年から論文を読むことができます。

なお高山先生の最適化コースは"1~6章→11~19章"。私もそれがいいと思います。大まか

に説明すると以下の通り.

- 1, 2 章は定義が続くので軽めに読めばいいと思います. ここはサッと終わらしたいです. 2 章のカレントの部分は深入りすると沼なので, 適度に切り上げましょう.
- 3, 4 章は複素幾何の復習. ここでこの分野のメインである特異エルミート計量が出てきます. ちなみに Demailly 先生は接続や曲率で独自の記号を使っているので注意.
- 5 章は L^2 -estimate の内容. わからなければ Demailly 先生の L^2 -estimate のレクチャーノートを参考にした方が良くかと. ここで重要な道具である乗数イデアル層が出てきます.
- 6 章が前半の一区切り. この部分は「代数幾何の用語が特異エルミート計量で定義される」という一番面白いところ.
- 11, 12 章はベクトル束の話. この辺りは多変数複素解析の L^2 理論を専門にするなら熟読すべき.
- 13 章は Ohsawa-Takegoshi 拡張定理. この分野のブレイクスルー. 読むべき.
- 14 章は Ohsawa-Takegoshi 拡張定理の応用で, Demailly 近似定理と Demailly-Kollar 01 の内容. Demailly 近似はよく使うので, 読むべき.
- 15 章は Demailly-Ein-Lazarsfeld 00 の内容. これは 19 章の布石.
- 16 章は Demailly-Peternell-Schneider 01 の内容. 消滅定理の専門になるなら読んでもいいかも.
- 17 章は Siu98, Siu03, Păun08 による Invariance of plurigenera. ベクトル束の特異エルミート計量の話に関わるので読むべき.
- 18 章は Demailly-Păun 04 の内容. 当時は「Nakai-Moishezon のケーラー版なだけか」と思っていたが, 今になってこの定理の良さに気付きました. ケーラーは部分多様体が全くないこともあるので, これが成り立つのはにわかには信じ難いです.
- 19 章は Boucksom-Demailly-Păun-Peternell 13 の内容. Boucksom 先生の博論の内容に関わります. これは結果が面白いです. 「 K_X が psef は X が nonuniruled と同値」であることは, 2025 年に Kahler でも成り立つことが Wenhao Ou 先生の結果によりわかりました.

もしかしたら 11~19 章は適度に省いてもいいかもです. 例えば代数的ことをしたいのなら「14 章の後半から 16 章」を省略し, 解析的なことをしたいのならば「18, 19 章」を飛ばしてもいいかもしれません. あと個人的には Demailly-Peternell-Schneider 94 がないのは残念です. あれこそ教科書に入れてもいいのになあ.

その他の章の感想は以下の通り.

- 7章の藤田予想, 10章の松坂の巨大定理の部分は面白いが証明がテクニカル. 一回読んでも「??」となるので, あとで読めばいいと思う.
- 8章の Holomorphic Morse に関しては適当に読んでいいと思います. もし真剣に読みたいのであれば, Ma-Marinescu の本を読めばいいかと. なお Demailly 先生は Holomorphic Morse が好きのようです.
- 9章の Green-Griffith-Lang は合っているかがわかりません.
- 20, 21章は読まなくていいです. ただ20章の辻先生の canonical metric 自体は Song-Tian で使われてたはずで応用はあり, 21章は何か光るものがありそうです.

Christopher Hacon, Mihnea Popa, Christian Schnell. "Algebraic fiber spaces over abelian varieties: around a recent theorem by Cao and Păun" Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.

難易度: ★★★ ~ ★★★★★

コメント: 私以降の高山研, とりわけ稲山先生や渡邊先生は Demailly の本の後にこれを読んでベクトル束の特異エルミート計量を勉強したと思います. 私もこの論文が一番わかりやすいと思います. 読むなら後半 Section D からの, Schnell 先生が書いたであろう特異エルミート計量の内容. 前半は GV-sheaf や Fourier-Mukai の話で私もわかりません. 読まなくて良いです.

Hacon-Popa-Schnell 18 は Cao-Păun 17 と Păun-Takayama 18 の解説という位置付けです. 実は Păun-Takayama 18 の論文の方が強いことを言っていますが, Păun-Takayama 18 は本当に読めないです. ちなみに Păun 先生のサーベイ (<https://arxiv.org/abs/1606.00174>) は読むのをすすめます.

Gabor Székelyhidi. "An Introduction to Extremal Kahler Metrics" Graduate Studies in Mathematics, 152. American Mathematical Society

難易度: ★★★ ~ ★★★★★

コメント: Aubin-Yau, Yau の定理を手取り早く学ぶならこの本になると思います. 後半は Extremal 計量や K-stability の話. 多分 test configuration の定義がちょっと古く, 洗練された今の形の定義と違うように見えます.(多分同じだと思いますが.) でもこういった定義や, 4章の Futaki 不変量の定義は一回味わってもいいかも.

私は適当に読んだだけです. なので後半の内容は必読かどうかちょっと不明です. K-stability 関連は急速に発展しているので, これは古い内容になるかもしれません. よっ

てセミナーで読むなら前半だけ読んで、後半は別の本を読んでもいいと思います。あと Szekelyhidi はどう読めばいいんですかね?(セキリヒディでいい?)

中島 啓. ”非線形問題と複素幾何学” 岩波書店

難易度: ★★★★★ ~ ★★★★★

コメント: いい本. 1999 年までの Kahler Einstein 計量の存在問題を扱った本で, Aubin-Yau, Yau の定理の内容から, Nadel の乗数イデアル層の話まで書いており, 当時の内容を存分に書きたいいい本です.

ですが, この分野はこの 20 年で急速発展したため, この本の内容はもはや古典になってしまいました. なのでサブで読んだ方が無難な気がします. Aubin-Yau, Yau の定理までならこの本を読んでもいいかもです.

Jian Song, Ben Weinkove. ”Lecture notes on the Kahler-Ricci flow”

難易度: ★★★★★ ~ ★★★★★

オンライン入手可能: <https://arxiv.org/abs/1212.3653>

コメント: Kahler Ricci Flow を勉強するならこの本になるのでしょうか?一回読んだことがあるが, ほぼほぼ内容を忘れてしまいました. 私が修士・博士の時は Kahler Ricci Flow が盛んでしたが, 最近はあんまりその話を聞きません. Tian が言っていた Kahler Ricci Flow を使った MMP は一体どうなったのでしょうか? 知っている人は教えてください.

**Shoshichi Kobayashi. ”Differential Geometry of Complex Vector Bundles”
Mathematical Society of Japan**

難易度: ★★ ~ ★★★★★

オンライン入手可能: <https://www.mathsoc.jp/publications/pubmsj/>

コメント: 最初の 1~3 章は学部 4 年生でも読めます. 問題は 4 章以後. 4~5 章は完全に Kobayashi Hittchin 対応の内容. この内容は私は研究してお世話になりました. 6 章以降はもう Moduli の話になって私は全くわかりませんでした. 4 章以後の内容は専門家向けだと思います. 本自体としては今でも引用するくらい良い本です.

辻 元. ”複素多様体論講義” SGC ライブラリ 94 サイエンス社

難易度: ★★★★★ ~ ★★★★★

コメント: ”多変数複素解析を用いた代数幾何学”の内容を網羅してます. 素晴らしい. タ

イトル通り”広範な基礎”を取り扱ってます. この本は教科書として読むより, サーベイとして読むべき.

Sebastien Boucksom, Philippe Eyssidieux, Vincent Guedj. ”An Introduction to the Kähler-Ricci Flow” Springer

難易度: ★★★★★ ~ ★★★★★

コメント: 読んだことはないです. 特異多様体の Bott-Chern 類の研究で 4 章を参照したぐらいです. 特異多様体で Kähler-Ricci Flow をやっているらしく, 「これは誰が読めるのかなあ?」と思いました. 滑らかな多様体の上でも Kähler-Ricci Flow は難しい.

1.6 多変数複素解析の教科書

私がカバーできる多変数複素解析は L^2 理論 (コホモロジーの消滅定理, Ohsawa-Takegoshi L^2 拡張定理, ベクトル束の特異エルミート計量など) ぐらいです. それもユーザーとして使っているだけです. この内容を専門にするなら, 計算ゴリ押し力が問われると思います.

L^2 理論に進むなら, 複素幾何, とりわけベクトル束や特異エルミート計量からは逃れられないと思います. なので L^2 理論を勉強・専門にしたい場合でも, 学部 4 年・修士セミナーにおいては Wells, Demailly などの複素幾何の本を読むことをおすすめします. (中野の本でも良いです.) Wells, Demailly を読んだ後でも多変数複素解析の専門家になることができます. 稲山先生や渡邊先生などがまさにそうです.

そのほかの多変数複素解析に関して次の通りです.

- 岡理論から派生した岡多様体を学びたい人は Forstnevic の本を読めばいいと思います.
これを読む場合, 修士に日下部先生のところに行くことも視野に入れた方がいいです. 修士に私のところで岡多様体を学びたい場合は, 私も岡多様体を学びながら指導することになります.
- \mathbb{C}^n の領域 (正則領域・正則凸・擬凸) を調べる多変数複素解析の勉強・研究は私はあまりお勧めしません. 今 (2025 年) でこの内容の論文をあまり見ないからです. (流行りではないと言ってもいいです.) もし勉強したい場合は上の岡多様体を軸に勉強した方がいいと思います.
- CR 多様体など解析をゴリゴリしたい人は Hörmander あたりを読めば良いと思います

ます. ただそのような人は私より松本先生のところで本を読んだ方が絶対に良いです. 私は解析は全くわかりません.

1.6.1 学部4年向け

中野 茂男. "多変数関数論 - 微分幾何学的アプローチ" 朝倉書店

難易度: ★★ ~ ★★★

コメント: 私が修士1年になる前に高山先生から「多変数複素解析の本を読んでこい」と言われて、慌てて読んだ本. この本は複素幾何と多変数複素解析の L^2 理論を一緒に学べるのでお勧めです. L^2 理論に進むならこの本を学部4年セミナーで読んでも良いです. ただ現在入手困難なのが悔やまれます. いい本なのになあ.

Franz Forstneric. "Stein Manifolds and Holomorphic Mappings The Homotopy Principle in Complex Analysis" Springer

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: 岡多様体の本. 個人的には多変数複素解析の新たな分野として位置付けられるのでは? と思います. 日本には日下部先生という岡多様体のトップクラスの研究者がいますし, この分野は今後来るのではと思います. 是非とも読んでほしい. 学部4年セミナーで読んでも修士セミナーで読んでも良いです. ただ「岡多様体は解析というよりは幾何に近い」イメージがあるので, 結局のところ複素幾何は必要だと思います.

日下部先生に聞いたところ, 「1~2章は複素幾何のことが(証明なしで)載っていて, 3~7章が読めれば良い」とのことです. なので標準的なコースとしては, 複素幾何をあらかじめ勉強した後に3~7章を読むのがいいかもしれません.

Lars Hörmander. "Introduction to Complex Analysis in Several Variables" North-Holland Mathematical Library

難易度: ★★ ~ ★★★

コメント: 多変数複素解析の古典的名著. どちらかというと平地研(東大)のようなCR多様体など解析ゴリゴリの人が学部4年に読んでいる印象です. 私は読んだことないです. 読んだ人は「ヘルマンダーが偉すぎて, 行間がひどい」と言っている気がします. この本を学部4年セミナーで読みたいのならば, 私ではなく松本先生のところで読むべき.

大沢 健夫. "多変数複素解析" 岩波書店

難易度：★★ ~ ★★★★★

コメント: ちょっと読んだ程度です. 日本語で L^2 理論を学ぶならこの本になるのですかね? L^2 理論を研究する予定なら, 複素幾何をメインで学んで, サブでこれを読んだ方がいいと思います. 増補版も出ていて, Guan-Zhou・Blocki の Ohsawa-Takegoshi の最良評価に関する事柄が増えたらいい. 大沢先生の本は随所にユーモアがあって読んでいて面白い.

落合 卓四郎, 野口 潤次郎. "幾何学的関数論" 岩波書店

難易度：★★ ~ ★★★★★

コメント: 3章のカレントの部分だけを読みました. カレントについて詳しく書いている本はこの本ぐらいなので, 3章だけでも読む価値があります. 目次を見る限りは双曲性と Nevanlinna 理論の話らしい. 私としては Nevanlinna 理論は気になるので読んでほしいです. ただこの本を学部4年セミナーで読みたいのならば, 私ではなく山ノ井先生のところで読むべき.

Kunihiko Kodaira. "Nevanlinna Theory" Springer

難易度：★★

コメント: 小平先生が Nevanlinna 理論を講義した時の内容 (セミナーノート) を大沢先生が英語に訳したもの. この本も気になっているので読んでほしい. 多様体と複素解析の知識があれば読めると思う.

野口 潤次郎. "多変数解析関数論 -学部生へおくる岡の接続定理-" 朝倉書店**野口 潤次郎. "岡理論新入門 -多変数関数論の基礎-" 裳華房**

難易度：★★ ~ ★★★★★

コメント: あまり読んでません. \mathbb{C}^n の領域, 特に正則領域・正則凸・擬凸などを調べる多変数複素解析を取り扱っている本だと思います. 手法が古典すぎるのでセミナーで読むのはお勧めしません. サブで読んだ方がいいと思います.

Hans Grauert, Reinhold Remmert. "シュタイン空間論" シュプリンガー数学クラシックス**Hans Grauert, Reinhold Remmert. "Theory of Stein Spaces" Springer**

難易度：★★ ~ ★★★★★

コメント: Stein 空間に関する本. 内容自体はかなり面白いし, 今見ると「normal も reduced も irreducible も仮定しない解析空間でここまでわかるのか」と驚くばかりです. 今私もちょくちょく読んでます. ただこれも手法が古典すぎるので, セミナーで読むことをおすすめしません.

Gerd Fischer. "Complex Analytic Geometry" Springer

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: 解析空間の本. この本は研究で本当にお世話になります. 代数幾何の用語が複素解析の用語に翻訳されているから. こっちの方がスキーム論よりイメージしやすいと思います. きっちり書かれているし良い本です. ただこれもセミナーで読むことをおすすめしません. スキーム論を学んだ後に読めばいいから.

ただこの本を読めばスキーム論を理解しなくても複素解析空間を理解できます. つまり複素数体上で代数幾何学をするにはこの本で十分です. なのでこの本で複素代数幾何学を目指すのもいいかもしれません. ただしスキーム論と違って, 解析空間での証明はかなり混みいるので, その点は覚悟した方がいいです. 途中で「スキームの方が楽では」と言うかもしれません.

猪狩 惺. "実解析入門" 岩波書店

難易度: ★ ~ ★★

コメント: 「超関数がさっぱりわからん」人はこれを読んでほしい. 私は中野先生の本を読んだ際にこの本を並行して読んでました. サブで参考書のように読んでほしい.

1.6.2 修士向け

Hans Grauert, Thomas Peternell, Reinhold Remmert. "Several Complex Variables VII -Sheaf Theoretical Methods in Complex Analysis-" Springer

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: 素晴らしい. 古典的な多変数複素解析から L^2 理論まで 1990 年までの多変数複素解析を手っ取り早く学ぶならこの本になります. 今私も読んでいます. 教科書として読むより, サーベイとして読むべきです. 数ある章でも, Peternell 先生が書いた部分が本当に面白いです.

Takeo Ohsawa. " L^2 Approaches in Several Complex Variables Towards the Oka – Cartan Theory with Precise Bounds" Springer

難易度：★★★★ ~ ★★★★★

コメント: これを読めば 2015 年までの L^2 理論, とりわけ Guan-Zhou, Blocki の Ohsawa-Takegoshi の最良評価までの L^2 理論は網羅できると思います. これも教科書として読むより, サーベイとして読むべきです. 松村先生の書評 (https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku/72/3/72_0723310/_article/-char/ja/) も参照.

Sebastien Boucksom. "Singularities of plurisubharmonic functions and multiplier ideals"

難易度：★★★★ ~ ★★★★★

オンライン入手可能: <http://sebastien.boucksom.perso.math.cnrs.fr/notes/L2.pdf>

コメント: Boucksom 先生のレクチャーノート. これはサブでいいので是非とも読んでほしい! 最後の valuation の部分の話が本当に面白い.

Jean-Pierre Demailly. " L^2 estimates for the $\bar{\partial}$ -operator on complex manifolds"

難易度：★★★★ ~ ★★★★★

オンライン入手可能: https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/estimations_l2.pdf

コメント: Demailly 先生のレクチャーノート. これは Analytic method の前半 (1~6) を読む際に参考にすればいいと思います.

Bo Berndtsson. "An Introduction to things $\bar{\partial}$."

難易度：★★★★ ~ ★★★★★

オンライン入手可能: <https://www.math.chalmers.se/~bob/7nynot.pdf>

コメント: Berndtsson 先生のレクチャーノート. Demailly の Analytic method が辛ければこれを読んでもいいと思います. ただ結局 Demailly の本に戻ってくる気もしますが...

1.7 その他. 学部4年で卒業する人が選択できる本

以下の本は学部4年で卒業し、数学の修士にいく予定がない人のみが学部セミナー4年で読む際に選択できます。この本以外で読みたい本があれば遠慮なく言ってほしいです。

1.7.1 代数分野

Michael F. Atiyah, I. G. MacDonald. ”可換代数入門” 共立出版

Michael F. Atiyah, I. G. MacDonald. ”Introduction to commutative algebra”
CRC Press

難易度：★～★★

コメント：代数幾何に必要な可換環論を手っ取り早く学ぶならこの本。演習問題が面白い。演習問題を含めて読むのであれば1年は余裕でかかると思います。

平井 武. ”線形代数と群の表現 I, II” 朝倉書店

難易度：★～★★

コメント：チラッとみたが、群論の初歩から表現論までわかりやすく載っています。学部3年で代数わからなくなった人はこれで勉強してもいいと思います。コラム的な内容も面白かったです。

David A Cox, John Little, Donal O’Shea. ”グレブナー基底と代数多様体入門” 原書4版. 丸善出版

David A Cox, John Little, Donal O’Shea. ”Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra” Springer

難易度：★★～★★★★

コメント：NECのインターンに行った時に「岩井さんの専門は代数ですよね？グレブナー基底とかがってご存知ですか？」と聞かれました。全くわからないと答えました。グレブナー基底は気になるが結局勉強せずにここまで来たので、ここで勉強したいです。

Reinhard Diestel. ”グラフ理論” シュプリンガー・ジャパン

難易度：★★

コメント: グラフ理論の定理は面白いが毎回主張や証明忘れてしまいます.

Jean-Pierre Serre. "数論講義" 岩波書店

Jean-Pierre Serre. "A Course in Arithmetic" GTM, volume 7. Springer

難易度: ★★ ~ ★★★

コメント: 気になるから読んでほしいです. 私は数論は得意ではないので教えてほしいです. 修士に行く予定のある人は私のところではなく数論の先生のところで読んだ方が良いでしょう.

井ノ口 順一. "はじめて学ぶリー環 線型代数から始めよう" 現代数学社

佐武 一郎. "リー環の話" 日本評論社

James E. Humphreys. "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory" Springer

Jean-Pierre Serre. "Complex Semisimple Lie Algebras" Springer

難易度: ★★ ~ ★★★

コメント: リー代数は「いつか勉強しよう」と思って今に至ります. 読んでほしいです. 難易度順に並べています. 井ノ口の本は線形代数を学んでいけば読める(らしい?)です. 佐武と Humphreys は同じくらいの難易度だと思います. Humphreys は学部4年セミナーの鉄板です. Serre は簡潔に書かれていて 100 ページもないです.(詳しく見てないですが, こういう本は難しい傾向にあります.)

1.7.2 幾何分野

小林 昭七. "曲線と曲面の微分幾何" 裳華房

宮岡 礼子. "曲線と曲面の現代幾何学" 岩波書店

田崎 博之. "曲線・曲面の微分幾何" 共立出版

難易度: ★ ~ ★★

コメント: 初頭的な微分幾何を忘れたので, ここで思い出したいです. 上の三つならどれでも良いが, 小林の本しか持っていないし見たことないので, 小林の本の方が嬉しいです.

井ノ口順一. "はじめて学ぶリー群 線型代数から始めよう" 現代数学社

難易度：★～★★

コメント：これは読んだことないですが、線形代数を学んでいけば読める(らしい?)です。リー群の本でいい本があれば教えてください。

J. Matousek. "Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry" Springer

難易度：★～★★

コメント：ハムサンドイッチの定理をご存知でしょうか？ ハムサンドイッチの定理とは「(実3次元空間に)与えられたハムチーズサンドイッチに対し、そのハム, チーズ, パンの量がそれぞれ半分となるようなサンドイッチの切り方が必ず存在する」という定理です。それはBorsuk-Ulam(ボルスク ウラム)の定理から示せます。このようにBorsuk-Ulamの定理に焦点を当てて、その応用などを取り扱ったのがこの本です。

1~3章は学部3年くらいの内容です。特に3章のBorsuk-Ulamの定理の応用が面白いです。学部4年で卒業するのであれば、こういった”身近な内容の背景には実は抽象的な数学が潜んでいる”みたいな数学を学んで卒業するのも良いかと思います。

J. W. Milnor. "Topology from the differentiable viewpoint" Princeton University Press

J. W. Milnor. "微分トポロジー講義" 丸善出版

難易度：★★

コメント：地球上には必ず風が吹いていない場所があるのはご存知でしょうか？ このことはPoincare-Hopf(ポアンカレ・ホップ)の定理から従います。この本ではこのような微分幾何的な物(ベクトル場)とトポロジー的な物(オイラー数)との関係を扱っています。多様体の知識がないとこの本は読めないで、多様体の本を前期で読んで、後期でこの本を読んでもいいです。

河澄 響矢. "トポロジーの基礎 上・下" 東京大学出版会

難易度：★～★★★★

コメント：おそらく河澄先生が東大で学部3年(後期)向けにやっていたホモロジーの講義の内容を本にしたものです。目次を見る限り、上巻は学部3年の内容、下巻が学部4年の内容だと思います。本としての評価は良いです(松尾信一郎先生のページも参照。)トポロジーの新たな教科書になると思う。ちなみに私はその講義を受けていた。(1.9節参照。)

個人的には是非とも読んで教えてほしいです. 理由はいよいよ研究でトポロジーを避けられない段階にきたから. 「カップ積・切除定理・Borel-Moore homology」が研究で出てきたし, Condensed math の勉強会でもトポロジー関連 (CW 複体・Simplicial Set) の用語が出てきました.

枘田 幹也. "代数的トポロジー" 朝倉書店

難易度: ★ ~ ★★★★★

コメント: 学部3年の代数トポロジーの内容 (+ α) をまとめた本. 上の Borsuk-Ulam の定理, Poincare-Hopf の定理, Brower の不動点定理なども載っています. かなり簡潔にまとまっています. 代数っぽく展開しているので私としてはこの方が好きです. ですが, 幾何が好き人には抽象的すぎて読みづらいかもしれません.

Colin C. Adams. "結び目の数学—結び目理論への初等的入門" 丸善出版

Colin C. Adams. "The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots" American Mathematical Society

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: 全然専門ではないです. ちょっと見て「うわー図が綺麗だなー」と思った. 修士に行く予定のある人は私のところではなく鎌田先生のところで読むべき.

加須栄 篤. "リーマン幾何学" 培風館

難易度: ★★ ~ ★★★★★

コメント: リーマン幾何学も「いつか勉強しよう」と思って今に至ります. なので読んでほしいです. なお修士に行く予定のある人は私のところではなく太田慎一先生のところで読むべき.

1.7.3 その他

Martin Aigner, Günter M. Ziegler. "天書の証明" 丸善出版

Martin Aigner, Günter M. Ziegler. "Proofs from THE BOOK" Springer

難易度: ★ ~ ★★★★★

コメント: エルデシュの綺麗な証明などを集めた本. 読むと頭が偉くなった気がします. 2年までの内容 + α を知っていれば読めると思います.

池 祐一, E.G. エスカラ, 大林 一平, 鍛冶静雄. "位相的データ解析から構造発見へ パーシステントホモロジーを中心に" サイエンス社

難易度: ★ ~ ★★★

コメント: トポロジカルデータアナリシス (TDA) が気になっています. どの本にしようか悩みましたが, 「数学の研究者である池先生の書いた本なら, 数学的に間違いはないだろう」と思うのでこの本を推薦します. 数学的な定義はなんとなくわかったが, 「どうやってアルゴリズムを作るのだろうか?」という部分が気になります. 読んでほしいです.

なお池先生が 2025 年に阪大に集中講義してくれました. 池先生のホームページに集中講義のノートがあります. (<https://sites.google.com/view/yuichi-ike/teaching>) これを参考にしてもいいと思います.

S. マックレーン "圏論の基礎" 丸善出版

T. レンスター "ベーシック圏論" 丸善出版

難易度: ★ ~ ★★★

コメント: 圏論は知らないうちに仮定されていることが多いです. 情報系に進む予定のある人は学部 4 年セミナーで読んでも良いです. そしてその後に Haskell にハマってください (私の同期が喜ぶので). 数学科に進む予定で, 基礎論分野やトポス理論など高度に抽象的な数学をしたい場合は学部 4 年セミナーで読んでも良いです. ただ日本だとこの分野は情報系に含まれることも多いので, 修士に行く場合は情報系や海外に行くことも視野に入れた方がいいです.

教科書に関して, マックレーンの方が詳しく, レンスターの方はちょっと簡単めです. セミナーで読むならどちらでも良いです. ちなみにレンスターの方を購入すれば東京科学大学の土岡先生が喜びます.

J.A. ブーフマン "暗号理論入門" 丸善出版

難易度: ★ ~ ★★★

コメント: 「暗号について知りたい!」と思ってはや 10 年. いまだに勉強してません. 気になります.

C.M. ビショップ. "パターン認識と機械学習 上・下" 丸善出版

難易度: ★ ~ ★★★

コメント: 機械学習を習得したい人が読んでいる気がします. でもこの本が出てもう 20 年

たってるのになぜいまだに読まれているのだろう？ 気になるので読んでほしいです。

舟木 直久. ”確率論” 朝倉書店

難易度：★★

コメント：この本を一気に読んだことがあります。めちゃくちゃ面白かったです。今になって内容を全て忘れてしまいました。なのでもう一度思い出したいです。

R. デュレット. ”確率過程の基礎” 丸善出版

難易度：★★ ~ ★★★

コメント：これも確率論が気になるから読んでほしい。

1.8 セミナーの仕方について

1.8.1 河東先生のセミナーの準備の仕方について

まずは河東先生の有名なページ「セミナーの準備の仕方について <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/sem.htm>」を読んでほしいです。

読んだ上で私はこう言いたいです。

これは無理だ。難しすぎる！

河東先生の言っていることは全て正しいです。が、これを実行するのは本当に難しいです。

まず初めの段落に関しては実行できると思います。むしろこれは実行してほしいです。大体の教科書は行間・ギャップがあるので、準備の段階でそれを埋める必要があります。特に河東先生の発言

「完全に正しいと断言できる」ということと「自分にはわかっていない」ということの違いが自分ではっきりとつけられるようにならなくては何も始まりません。

は本当にその通りだと思います。

次の段落「さてそうして、…」からは本当に難しい。この読み方を常習化できれば研究者になれると思います。なぜなら研究では「今現在知られている結果の仮定を弱めていく」からです。続いて3段落目「さらにそれができるようになったとしましょう…」は私には

全てはできません。「証明のポイントはどこか」は良くしますが、「証明を正しく再現」はできません。私がやったら「まあこれからこんな感じでできます」と雰囲気しか伝えられません。

最後の段落「これでもまだ準備は終わりではありません。セミナーの時間配分も考える必要があります。」は私含め全研究者へのアドバイスです。特に河東先生の

日本では、教員でもそういうこと(セミナーの時間配分)のできない人が少なからずいますが、プロとして恥ずかしいことです。そういうのをまねしてはいけません。

に関しては、「本当に申し訳ない」としか言えません。なお、セミナーの時間配分ができていない研究者などいくらでもあります。講演で時間配分ができていない人はよくいますし、スライド連打する人もよくいます。「これ聞かせる気があるんか」と思うこともしばしばです。(これは私へ向けての特ダブーメランかも?)

なのでできる人はこの方法でやっても良いが、努力目標だと思います。私も学生の時に一回この方法を試したことがあります。結局丸暗記する行為になってしまい、このアドバイス通りのことができませんでした。河東先生も初めに言っている通り、

セミナーの準備のしかたは個人ごとに自分にあったやり方でやれば良いので、別に特定のやり方を押し付けるつもりはありませんが、一つの例としてやり方を説明します。

とあるので、自分に適したやり方を見つけてやってほしいです。なお河東先生自身も「セミナーの準備のしかたについて」について <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/sem2.htm>”と言う文章を書いています。これも面白いのでぜひ読んでほしいです。

1.8.2 セミナーの仕方について

要するに、セミナーは

学生が教官に向けて授業をする。

と思ったら良いです。教官は学生のように質問するので、それに答えられるように準備しないとイケないです(これも私へ向けての特ダブーメランです。) 最近の教官は教科書の

内容をまとめて授業をするので、皆さんも教科書の内容をまとめてセミナーをしてほしいです。

またメモは見ても見なくてもいいです。私は授業でも講演でもメモを見ています。英語での講演の時は、話すべき英語もメモに書いています。理由は黒板の前に立つと話すべき内容が頭から飛んでしまうからです。メモを見て話す内容を思い出しています。

1.9 本を読むために必要な学部3年までの前提知識

1.9.1 学部4年で卒業する人

まず学部4年のセミナーにおいて、以下の内容は必ず理解しないといけません。

- 微積分
- 線形代数
- 集合と位相

とりあえず上の単位は取ってほしいです。(まあどれも必修なので、取らないといけない。)

なお上の内容を全部理解している必要はないです。私も「これなんだったっけ?」となることはよくあります。が、定義とか定理を見直して、「あ、これは昔やったことあるぞ。こうやればいける。」と思いつけるくらいにはなしてほしいです。特に集合と位相は必須です。これができないと教科書は読めないと思っていいです。

学部で卒業する予定の人はこれで十分です。よってこの後の内容は修士に行く予定のある人向けです。

1.9.2 修士に代数幾何学を目指す人

必要だと思うのは以下の内容。

- 多様体. 代数”多様体”を扱うから。
- 群・環・体. 下の「環と加群, ガロア理論」を学ぶために必要。
- 環と加群. スキームで使うから。
- ガロア理論. 代数的に被覆を考えるなら必要。

授業を取っておくためには以下の内容.

- ホモロジー・基本群.
ホモロジー代数を勉強することになり, その具体例として学べるから.
- 微分形式・ドラーム コホモロジー.
上に同じ. あとケーラー微分で微分形式っぽいことをやるので.
- 複素関数論続論.
ペー関数の内容が数論, 代数幾何に関わるので. 小木曾先生の代数曲線論を並行して読むと面白みが増す. ただ上の二つよりは優先度は低いと思います.

これにプラスして学部4年に入るまでに”可換環論 (Atiyah-Macdonald の内容)” くらいは学んでおくことになります.

1.9.3 修士に複素幾何学・多変数複素解析を目指す人

必要だと思うのは以下の内容.

- 多様体. 複素”多様体”を扱うから.
- 微分形式・ドラーム コホモロジー.
この複素版がドルボー コホモロジーであるから.
- 複素関数論続論.
複素幾何の初めの方は多変数複素関数論の話で, 1変数の内容よく使うから.

取っておくためには以下の内容.

- ホモロジー・基本群.
取った方がいいと思うが, マストではないです. 岡多様体をやるなら必要かも.
- 代数形の科目 (群・環・体, 環と加群, ガロア理論).
代数っぽい複素幾何をやるなら. ガロア理論はホモロジー・基本群を学ぶなら不要かも. 幾何学的に被覆を考えればいいから.
- 解析形の科目 (フーリエ変換, 偏微分方程式).
幾何解析するなら偏微分方程式を解くことになるので必要かも. なお多変数複素解析の L^2 理論は偏微分方程式っぽい感じで方程式を解かないのでどちらでも良いです.

- ルベーク積分.

多変数複素解析の L^2 理論を学ぶなら、ルベークの優収束定理をよく使うので、幾何解析をする場合にも必要かも。

1.9.4 岩井の場合 (昔話)

2 年次までの科目 (微積分・線形代数・集合と位相・複素解析) は阪大と同じです。3 年次以降の内容で私が受けたのは以下の科目です。

- 多様体. (3 年次春夏必修)
- 群・環・体. (3 年次春夏必修)
- ルベーク積分. (3 年次春夏必修)
- 複素関数論続論. (3 年次春夏必修)
- ホモロジー・基本群. (3 年次秋冬選択)
- 微分形式・ドラム コホモロジー. (3 年次秋冬選択)
- 環と加群. (3 年次秋冬選択)
- ガロア理論. (3 年次秋冬選択)

Atiyah-Macdonald の可換代数入門は演習問題も含めて読んでいました。結局演習問題は解き終わりませんでした...

学部 4 年のセミナーでは代数幾何学の本 (飯高先生の本) を読みました。小平先生を崇拝していたので、複素幾何はサブで勉強してました。Wells 先生か小林先生の本をちょくちょく読んだ気がします。なおホッジ・ドラム・小平分解の解析的な証明は興味がなかったので飛ばしました (小林先生の本でも飛ばしてたと思います)。

院試が終わってから、なんやかんやがあって、高山先生のところに行くことにしました。高山先生から「修士までに多変数複素解析の本を読んでこい」と言われ、慌てて中野先生の本を読みました。その際に超関数・カレントがわからなかったので、猪狩先生の本を読みました。解析は独学になります。

1.9.5 思い出話

以下は受けた授業の思い出話。

複素関数論続論

全く聞いてなかったです。当時は解析に興味がなかったから。授業は劣調和函数から始まりましたが、当時は「こんな関数考えて何になるんだ」と思っていました。なので授業の板書をノートに書くだけで、手元ではその日にあった自主ゼミの勉強をしていました。なおこの授業の担当は高山先生でした。

そんな奴が修士で高山研に行き、多重劣調和函数を使いまくることになるとは思わなかったです。みんなも授業はきちんと聞きましょう。

群・環・体

志甫先生の担当でした。演習問題が全部で160問。試験はそこから8問。「160問もある演習問題なんか誰が全部解くんや」と思ってたが、同期の森脇湧登先生が全部解いてました。そのノートを共有してくれたので、それを見ながら勉強しました。

ホモロジー・基本群

河澄先生の担当でした。この授業の内容をまとめた本が「トポロジーの基礎」だと思っています。最初は特異ホモロジー⁴を定義して、その後基本群やホモトピー、セールファイブレーションをやってたはずですが、そこまでは追えました。この辺りは完全系列が計算できればよく、代数の話なので。

ただ途中からはCW複体、特性類、分類空間の話をしていたはずですが、難しすぎてさっぱりわかりませんでした。この辺りの内容は本当に覚えてません。ためになったことといえば「分類空間は本地垂迹説のようなもので...」と言っていたことです。本地垂迹説とは「仏こそが神の真の姿”本地”であり、日本の神々は人々を救済するために仮に神という姿で日本で現れた”垂迹”である」という神仏習合が行われた平安時代に流行った説です。これは神社検定3級の試験に出てきました。分類空間の話はわかりませんでした。のちの神社検定3級の問題には答えることができました。

演義もぶっ飛んでました。「他大学の聴講生が発表する」こともあれば、「河澄先生が発表する」こともありました。また演義の問題に激ムズ問題もありました。例えばHirzebruch曲面のホモロジーを計算する問題です。河澄先生が「小平スペンサーの変形理論を使えば簡単に解けますが、その際は変形理論を説明してください」と言っていました。当時はわからなかったが、後になってその意味がわかりました。

⁴東大はなぜか「特異ホモロジー」でホモロジーを定義します。東大以外はホモロジーにおいては、「単体的ホモロジー」を教えるはずですが、(阪大もそう)。私はトポロジーの専門ではないので、「特異ホモロジーの方が代数的に定義できるし、計算するだけなら完全系列追えばいいだけやから楽やん」と思うが、どうもそれは少数派らしい。単体的ホモロジーの方がわかりやすいのですかね？。

環と加群

川又先生の担当でした。神の授業でした。初めの2, 3回くらいの授業で、シラバスの内容の8割が終わりました。そのあとは圏論の話になり、森田同値の話をしていたはずですが、この辺りから全くわからなくなりました。10回目くらいでシラバスに戻ってきて、シラバスの内容の最後の2割をやりました。そのあとは休講でした。

あまりにわからなかったので先輩に「川又先生の授業がわかりません」と言って内容を言いました。するとその先輩から「難易度が下がったね。昔はもっと難しかったよ」という返答が返ってきました。聞けば、ガロア理論で無限次元ガロア理論や Kawamata covering をしていたらしいです。2年の複素解析でリーマン・ロッホをやったという話も聞きました。

演義も大変で、演習問題には当時 TA だった中村先生と Chen Jiang 先生の作った問題がありました。中村先生の作った問題は、非常に難しくて解けない。一方 Chen Jiang 先生の作った問題は、教育的でいい問題ばかりだが、英語で解答しないとイケない。「え、我々詰んでないか?」と思いました。

当時は大変だったが、すぎてしまえばいい思い出です。Kawamata log terminal で有名な川又先生の授業を受けられたのは貴重な経験だったと思います。宮岡先生の授業も受けたかったなあと思います。

その他 (後日談)

このような演義を受けていたので、「なるほど、数学科の演義は私も解けないような激ムズ問題をいれればいいのか」と思い、阪大着任1年目の位相の演義において、激ムズ問題を入れまくりました。多くの学生からは不評でした。(ごくごく一部の生徒からのみ好評でしたが。) 2年目からは反省して簡単な問題を入れることにしました。