

相対的反標準因子の asymptotic base loci について

(江尻 祥氏 (大阪大学) と松村 慎一氏 (東北大学) との共同研究)

岩井雅崇

阪市大数学研

2020 年 9 月 22 日 日本数学会 秋季総合分科会 函数論分科会

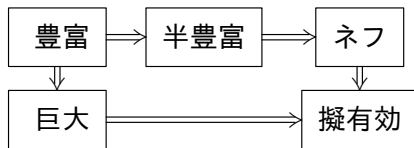
X : n 次元射影複素代数多様体, L : X 上の因子 (直線束)

- L : 豊富 (ample) $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_{>0}, \exists s_0, \dots, s_N \in H^0(X, mL)$
s.t.

$$\begin{aligned}\Phi_{|mL|} : X &\rightarrow \mathbb{CP}^N \\ x &\mapsto (s_0(x) : \dots : s_N(x))\end{aligned}$$

が閉埋め込み.

- L : 半豊富 (semiample) $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_{>0}, \forall x \in X,$
 $\exists s \in H^0(X, mL)$ s.t. $s(x) \neq 0$.
- L : ネフ (nef) $\Leftrightarrow \forall$ カーク $C \subset X, L.C := \int_C c_1(L) \geq 0$.
- L : 巨大 (big) $\Leftrightarrow \dim H^0(X, mL) = O(m^n) \forall m \gg 0$.
- L : 擬有効 (pseudo-effective) $\Leftrightarrow \exists$ 豊富因子 $A, \forall m \in \mathbb{N}_{>0}$
s.t. $mL + A$ は巨大.



- $L = \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^N}(1)$ は豊富.
- X : 楕円曲線, $L \in \text{Pic}^0(X)$. 豊富でない.
 L はネフ ($\deg_X(L) = 0$).
 L が半豊富 $\Leftrightarrow L$ が torsion point.



- $e \in \mathbb{N}_{>0}$, $E := \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-e)$, $X = \mathbb{P}(E)$, $\pi : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$.
 $L := -K_{X/\mathbb{CP}^1} := -(K_X - \pi^* K_{\mathbb{CP}^1})$.
 $(L \text{ は直線束 } \det(\Omega_X^1)^* \otimes \pi^* \det(\Omega_{\mathbb{CP}^1}^1) \text{ に対応する因子}).$

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, mL) &= \dim H^0(\mathbb{CP}^1, \text{Sym}^{2m} E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(me)) \\ &= \sum_{i=-m}^m \dim H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_C(ie)) = \frac{(me+2)(m+1)}{2} \end{aligned}$$

よって L は巨大.

- 上の例は全て擬有効.

これらの正值性 (豊富, ネフ, ...) は代数幾何学 (双有理幾何学) を研究する上では基本的な概念.

$f : X \rightarrow Y$ 複素射影代数多様体間のファイバー連結な全射.
 K_X 標準因子 ($\det \Omega_X^1$ に対応する因子).
 $-K_{X/Y} := -(K_X - f^*K_Y)$ 相対的反標準因子.

Theorem (KMM 92)

$-K_{X/Y}$ が豊富ならば, $\dim Y = 0$.

Theorem (Cao19, CH19, CCM19)

$-K_{X/Y}$ がネフならば, f は解析的ファイバー束.

f : 解析的ファイバー束 $\Leftrightarrow \forall y \in Y$, y を含む Euclid 開集合
 $\exists U \subset Y$ s.t. $f^{-1}(U) \cong U \times f^{-1}(y)$.

$-K_{X/Y}$ は (豊富・ネフなどの) 正值性を持ちづらい.

$-K_{X/Y}$ は巨大や擬有効になりづらいと予想.



研究目的

先行研究を巨大や擬有効に拡張したい.

しかし純粋な一般化はできない.

(前のスライドの例)

$e \in \mathbb{N}_{>0}$, $E := \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-e)$, $X = \mathbb{P}(E)$, $\pi : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$.

$-K_{X/\mathbb{CP}^1}$ は巨大. しかし $\dim \mathbb{CP}^1 \neq 0$.

因子 L の正值性を測る他の指標として, 3つの集合 $\mathbb{B}_+(L)$, $\mathbb{B}(L)$, $\mathbb{B}_-(L)$ がある.

以下, 豊富因子 A を一つとる.

- Base locus

$$Bs(L) := \{x \in X : \forall s \in H^0(X, L), s(x) = 0\}.$$

- Stable base locus

$$\mathbb{B}(L) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}_{>0}} Bs(mL).$$

- Augmented base locus

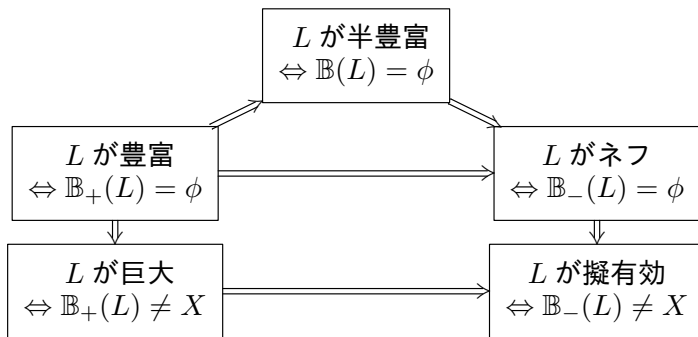
$$\mathbb{B}_+(L) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}_{>0}} \mathbb{B}(mL - A).$$

- Restricted base locus

$$\mathbb{B}_-(L) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}_{>0}} \mathbb{B}(mL + A).$$

Asymptotic base loci

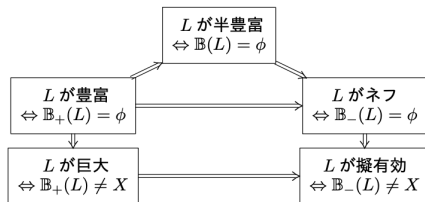
- $\mathbb{B}_+(L), \mathbb{B}(L), \mathbb{B}_-(L)$ はそれぞれ X の部分集合.
- $\mathbb{B}_+(L) \subset \mathbb{B}(L) \subset \mathbb{B}_-(L)$.
- 以下の関係がある.



Theorem (EIM 20)

$f: X \rightarrow Y$ 複素射影代数多様体間のファイバー連結な全射.

- ① $f(\mathbb{B}_+(-K_{X/Y})) \neq Y$ ならば, $\dim Y = 0$.
- ② $f(\mathbb{B}_-(-K_{X/Y})) \neq Y$ ならば, $\mathbb{B}_-(-K_{X/Y}) = \emptyset$.
($-K_{X/Y}$ はネフ). 特に f は解析的ファイバー束である.
- ③ (c.f. Ambro 05) $f(\mathbb{B}(-K_{X/Y})) \neq Y$ ならば, $\mathbb{B}(-K_{X/Y}) = \emptyset$.
($-K_{X/Y}$ は半豊富). さらに, F を f のファイバーとして, ある有限被覆 $Y' \rightarrow Y$ があり, $X \times_Y Y' \cong F \times Y'$.
(有限被覆で持ち上げると直積の構造を持つ).



先行研究と主定理の関係

[KMM92]

$-K_{X/Y}$ が豊富

$$(\mathbb{B}_+(-K_{X/Y}) = \phi)$$

$$\Rightarrow \dim Y = 0$$

一般化

[EIM 20]

$$f(\mathbb{B}_+(-K_{X/Y})) \neq Y$$

$$\Rightarrow \dim Y = 0,$$

$-K_{X/Y} = -K_X$ は豊富

[Cao19, CH19, CCM19]

$-K_{X/Y}$ がネフ

$$(\mathbb{B}_-(-K_{X/Y}) = \phi)$$

$\Rightarrow f$ は解析的ファイバー束

一般化

[EIM 20]

$$f(\mathbb{B}_-(-K_{X/Y})) \neq Y$$

$$\Rightarrow -K_{X/Y} \text{ はネフ,}$$

f は解析的ファイバー束

[EIM20]

$$f(\mathbb{B}(-K_{X/Y})) \neq Y$$

$$\Rightarrow -K_{X/Y} \text{ が半豊富 } (\mathbb{B}(-K_{X/Y}) = \phi),$$

\exists 有限被覆 $Y' \rightarrow Y$, $X \times_Y Y' \cong F \times Y'$