

# 曲線の曲率

$$I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

は直角座標表示

$$\frac{dr}{dt} = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \text{ とすれば}$$

$$\therefore \frac{d^2 r}{dt^2} = \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) & \theta'(t) \\ \cos \theta(t) & \theta''(t) \end{pmatrix} = \theta'(t) \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

$$\theta'(s) = (1/\kappa(s))^{\frac{1}{2}} \text{ は曲率 } \kappa(s) := \theta(s)$$

$$\kappa := \frac{\langle r' \times r'', e_3 \rangle}{|r'|^3} = \frac{\langle r' \times r'', e_3 \rangle}{\left(\frac{|r'|}{|r'|=1}\right)}$$

曲面の曲率

$$X: D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(U^1, U^2) \mapsto (x^1(u), x^2(u), x^3(u))$$

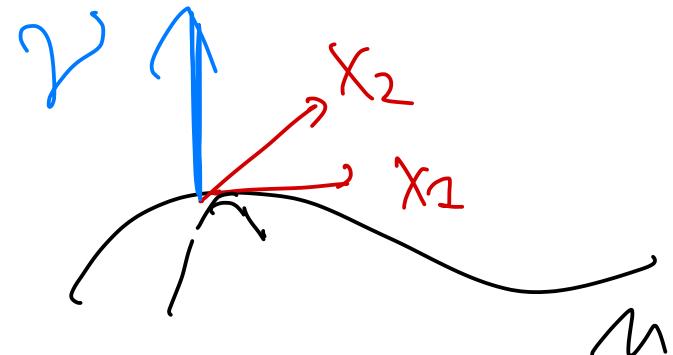
$$X_i := \left( \frac{\partial x^1}{\partial u^i}, \frac{\partial x^2}{\partial u^i}, \frac{\partial x^3}{\partial u^i} \right)$$

とある

Def 第1基本形式

$$g \in C^\infty(\mathrm{Sym} T_p M), g = \underbrace{(X_i \circ X_j)}_{\mathbb{R}^3 \text{ の 内 秩}} dx^i \otimes dx^j$$

$$g = \begin{pmatrix} X_1 \circ X_1 & X_1 \circ X_2 \\ X_2 \circ X_1 & X_2 \circ X_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} X_1, X_2 \in T_p M \times \mathbb{R}^3 \\ \text{R}^3 \text{ の 内 秩} \end{matrix}$$



また

$$\gamma := \frac{X_1 \times X_2}{|X_1 \times X_2|} \quad \text{とある 単位 法線ベクトル}$$

Def 第2基本形 //  $\tilde{h}$  と  $h(X_i, X_j)$  が  $= W^i W^j h_{ij}$  となる  $\langle X_i, \nu \rangle$  を持つ.

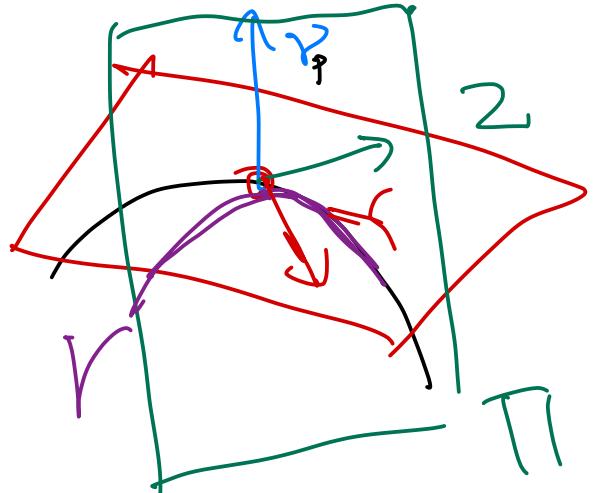
Prop  $\langle \nu, \nu_i \rangle = 0$ . ( $\because \langle \nu, \nu \rangle = 1$ ) (2)

$$h_{ij} = \langle X_i, \nu_j \rangle = -\langle X_j, \nu_i \rangle = -\langle X_i, \nu_i \rangle \quad (\because \langle X_i, \nu \rangle = 0)$$

Thm  $M$  が  $\mathbb{H}_n$  の平面に近く (または)  $\Leftrightarrow h = 0$

PF  $M$  が  $\mathbb{H}_n$  の平面に近く (または)  $\Leftrightarrow \nu$  const  $\Leftrightarrow \nu_i = 0$ .

$$h = 0 \quad \Leftrightarrow \langle X_j, \nu_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \nu_i$$
 は  $X_1, X_2, P$  と直交



$T_p M \ni z$  を固定し,  $(\alpha) = 1$ ,  
 .  $v$  と  $z$  とくらべ平面を  $\Pi$  と呼ぶ  
 .  $r \in \Pi \times M$  の交差が  $\gamma$  なる曲線を呼ぶ  
 .  $r = v \times 2 + z$ .

$$\gamma = p + t z + f(t) p, \quad t \in \mathbb{C}.$$

$$r = X(u^1(t), u^2(t)) \quad \text{すなはち} \quad \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = r^1, r^2, r^3 \in H^{\infty}$$

$$\textcircled{1} \quad r(0) = p + f(0)p = p \quad \text{すなはち} \quad f(0) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad r'(0) = z + f'(t)p = -\frac{du^1}{dt}x_1 + \frac{du^2}{dt}x_2$$

$$\text{すなはち} \quad z = \frac{du^i}{dt}|_{t=0} x_i, \quad f'(0) = 0.$$

$$\textcircled{3} \quad r''(0) = f''(t)p = \frac{d^2u^1}{dt^2}x_1 + \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} x_2.$$

$$w \quad f'(0) = (f'(0)\nu_p, \nu_p)$$

$$(x_i, \nu_p) = 0 \} \equiv \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} (x_{ij}, \nu_p)$$

$$= \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} h_{ij} = h(2, 2).$$

2次の曲率

$$K = \langle R_{Xr}r', e_3 \rangle = \langle 2Xf'(0)\nu_p, r' \rangle = f'(0) = h(2, 2)$$

まづ3次

$\boxed{[lin]}$

$$Z \in T_p M \times (2, 2) \text{ が } 2\text{-次} \text{ 曲面 } M \text{ の } \nu_p$$

曲率の曲率は  $h(2, 2) = W^i W^j h_{ij} \in \mathbb{R}$ .

$$(Z = W^i X_i)$$

Weingarten map  $W: T_p M \rightarrow T_p^* M$

$$w \mapsto \begin{pmatrix} w \\ g^{2j} h_{kj} X_j \end{pmatrix}$$

Def

$w$  の固有値を主曲率

$\lambda$  の平均曲率  $H$

$\lambda$  の積曲率  $K$

$$g_{ij} = f g_{ij} \Rightarrow H = \text{tr} h / 2 \quad \text{実際 } H = \frac{1}{2} h_{ij} g^{ij}$$

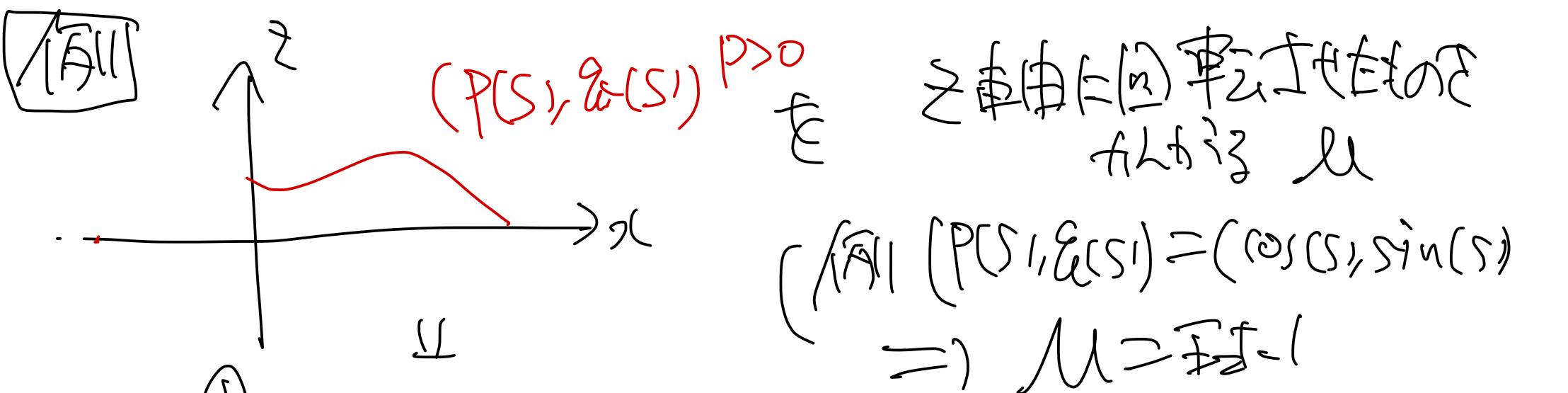
$$h = \begin{pmatrix} dh \\ \dots \\ dc \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{固有値の平均} = -L - \lambda$$

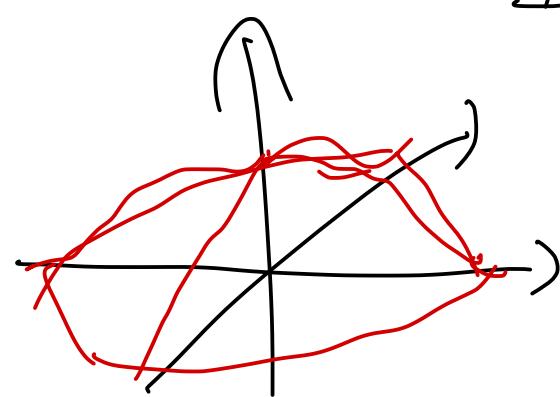
$$\text{積} = \det(h)$$

$$K = \frac{\det(h)}{\det(g)}$$

$\times f^2$



$$\begin{aligned} (\text{AII } (P(S), q(S)) = (\cos(S), \sin(S)) \\ \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$X = (P(u^1) \cos u^2, P(u^1) \sin u^2, q(u^1))$$

$$X_1 = (P'(u^1) \cos u^2, P'(u^1) \sin u^2, q'_1(u^1)) \quad (P, q_1 は u^1 の関数)$$

$$X_2 = (-P(u^1) \sin u^2, P(u^1) \cos u^2, 0).$$

$$\sim g = \begin{pmatrix} X_1 X_1 & X_1 X_2 \\ X_2 X_1 & X_2 X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'^2 + q'^2 & 0 \\ 0 & P^2 \end{pmatrix} \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} (P'^2 + q'^2)^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma = (-q'^1 \cos u^2, -q'^1 \sin u^2, P')$$

$$X_{11} = (P'' \cos u^2, P'' \sin u^2, q'')$$

$$X_{12} = (-P' \sin u^2, P' \cos u^2, 0)$$

$$X_{22} = (-P \cos u^2, -P \sin u^2, 0)$$

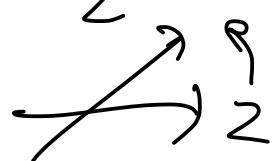
$$h = \begin{pmatrix} \langle X_{11}, P \rangle & \langle X_{12}, P \rangle \\ \langle X_{21}, P \rangle & \langle X_{22}, P \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P' q'' - P'' q' & 0 \\ 0 & P q' \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2} h_{12} [q''] = \frac{1}{2} \left( \frac{P' q'' - P'' q'}{P'^2 + q'^2} + \frac{q'}{P} \right)$$

$$K = \frac{\text{deeh}}{\text{deeg}} = \frac{(P' q'' - P'' q') q'}{P (P'^2 + q'^2)}$$

Pup  $\rightarrow$  主因数の求め方は  $\sqrt{H + K^2}$  ( $= 65$  附近)

$Z^1$   $\rightarrow$  主因数は  $2 \in T(u)$  で  $z^1 = \sqrt{H + K^2}$  の最大値



$$H = \frac{\text{最大} + \text{最小}}{2}$$

$$K = \frac{\text{最大} \times \text{最小}}{2}$$

$$\boxed{[F(12)]} \quad X = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$$

$$\Rightarrow X_1 = (1, 0, f_1) \quad X_{11} = (0, 0, f_{11})$$

$$X_2 = (0, 1, f_2) \quad X_{12} = (0, 0, f_{12})$$

$$Y = \frac{(-f_1, -f_2, 1)}{(+f_1)^2 + (f_2)^2} \quad X_{22} = (0, 0, f_{22})$$

$$\Rightarrow g = \begin{pmatrix} X_1 X_1 & X_1 X_2 \\ X_2 X_1 & X_2 X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (+f_1^2 & f_1 f_2 \\ f_2 & +f_2^2) \end{pmatrix}$$

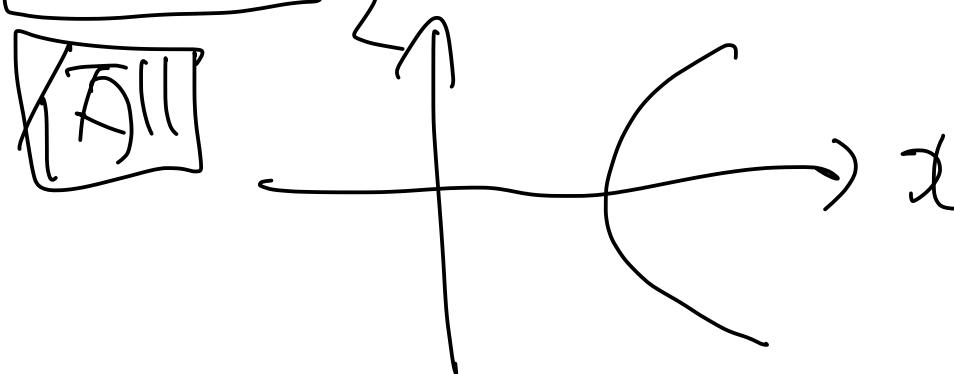
$$h = \begin{pmatrix} X_{11} P & X_{12} P \\ X_{21} P & X_{22} P \end{pmatrix} = \frac{1}{+f_1^2 + f_2^2} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

よる Gaus  $\sum K_{ij}$  dot Hessf (Locally Elliptic (ローカル))

$\boxed{[th]} \quad K > 0 \Leftrightarrow \text{凸 } f, \quad K < 0 \text{ 鞍状 } f?$

$H=0 \Rightarrow K<0 \Rightarrow \text{鞍状 } f$

Dot 平均曲率 = 0 の曲面を極小曲面



$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{P'Q'' - P''Q'}{P'^2 + Q'^2} + \frac{Q'}{P} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{-\cosh t}{(\sinh t)^2 + 1} + \frac{1}{\cosh t} \right)$$

$$\left( (\sinh t)^2 + 1 = \cosh^2 t \right)$$

Catenoid

Catenoid とくに

$$x = \cosh z$$

$$P = \cosh t \quad P' = \sinh t \quad P'' = \cosh t.$$

$$Q = t \quad Q' = 1 \quad Q'' = 0$$

例 4.0.2. 平均曲率一定の回転面は、次の 6 つに分類される (Figure 1 参照) :

平面, 球面, 円柱, catenoid (懸垂面), unduloid, nodoid.  
catenoid, unduloid, nodoid の母線は、それぞれ、放物線、橢円、双曲線を直線に沿って転がしたときの焦点の軌跡として得られる。これは、平均曲率一定回転面の母線が満たす 2 階の常微分方程式を研究することにより証明される。これらの曲面は、この性質を発見した 19 世紀のフランスの数学者 Delaunay にちなんで、Delaunay 曲面と呼ばれる。

21



unduloid の一部 (右図) とその母線



nodoid の一部 (右図) とその母線

$$A(X) = \int_{\Sigma} \sqrt{f+g} \, du' du^2 \quad \text{と } X \text{ の面積を表す} \quad (\delta A = \int f \, du' du)$$

$$X(\varepsilon)(u) = (-\varepsilon_0 \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} X(0, u) &= X(u) && \forall u \in \mathbb{I} \\ X(\varepsilon, \zeta) &= X(\zeta) && \forall \zeta \in \partial \Sigma \quad \forall \varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_0) \end{aligned}$$

$$\delta X := \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \quad \text{と } X \text{ の変分の定義とする}$$

$$X(\varepsilon) = X + (\beta + f) \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \begin{cases} \beta \in T_p M \\ f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{と書く。}$$

$$\boxed{Thm} \quad \delta A = \frac{d}{d\varepsilon} (A(X(\varepsilon))) \Big|_{\varepsilon=0} = -2 \int_{\Sigma} f + f d\Sigma$$

$$f = \left\langle \frac{\partial X(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \nu \right\rangle$$

$\boxed{Cor}$   $f$  が正負の曲面  $\Leftrightarrow \delta A = 0 \Leftrightarrow$  面積が極値となる。

$$\boxed{\text{PF}} \quad \delta(\sqrt{detg}) = \frac{1}{2} (Heg)^{-1} \delta \det g = \frac{1}{2} (\det g)^{-\frac{1}{2}} \delta (g_{11}g_{22} - g_{12}^2) \\ = \frac{1}{2} (\det g)^{-\frac{1}{2}} [g_{11}g_{22} + g_{11}g_{22} - 2g_{12}g_{12}]$$

$$\delta g_{2j} = \delta(X_2, X_j) = \langle \delta X_2, X_j \rangle + \langle X_2, \delta X_j \rangle \\ = \langle \zeta_2 + f\nu_2, X_j \rangle + \langle X_2, \zeta_j + f\nu_j \rangle$$

$$\langle \gamma, X_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \zeta_2 + f\nu_2, X_j \rangle + \langle X_2, \zeta_j + f\nu_j \rangle$$

$$\langle f\nu_2, X_j \rangle = -f(X_2, X_j) \rightarrow \Rightarrow \langle \zeta_2, X_j \rangle + \langle \zeta_j, X_2 \rangle - 2fh_{2j} \\ = -fh_{2j}$$

$$\therefore \delta(\delta\Sigma) = \frac{1}{2(\det g)} \left[ g_{22} \{ 2\langle \zeta_1, X_2 \rangle - 2fh_{11} \} + g_{11} \{ 2\langle \zeta_2, X_1 \rangle - 2fh_{22} \} \right. \\ \left. + 2g_{12} \{ \langle \zeta_1, X_2 \rangle + \langle \zeta_2, X_1 \rangle - 2fh_{12} \} \right]$$

$$= \left( \langle \zeta_2, X_1 \rangle g^{21} - fh_{2j} g^{21} \right) \delta\Sigma$$

$$= (\operatorname{div} \zeta - 2f(t)) \delta\Sigma$$

$$SA = \int_{\Sigma} f(d\Sigma) = \int_{\Sigma} (\{i\sqrt{g} - 2f\} d\Sigma$$

$$\Rightarrow -2 \int_{\Sigma} f d\Sigma$$

$$\left( \int_{\Sigma} d\tau \sqrt{g} d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \langle \vec{\gamma}, h \rangle ds = 0 \right) \text{ for } h|_{\partial\Sigma} = 0.$$

Gauss curvature

$$M \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow g_M = g_{\mathbb{R}^3/M} \text{ Riemann metric}$$

$\Rightarrow$  Levi-Civita Connection

$$(\nabla_{X^i} X^j = P_{i,j}^k X^k) \quad \text{クリストフエル}$$

$$\Rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \text{ ベビヤンキ}$$

**定理 (リーマン幾何学の基本定理)** — レヴィ-チヴィタ接続は以下の5つの性質を満たす。また $M$ 上のベクトル場の組に $M$ 上のベクトル場を対応させる汎関数で以下の5つの性質をすべて満たすものはレヴィ-チヴィタ接続に限られる [4][5] :

1.  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$  (関数に関する左線形性)
2.  $\nabla_X (aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$  (実数に関する右線形性)
3.  $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$  (ライプニッツ則)
4.  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  (捻れなし)
5.  $Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$  (計量との両立)

**定理** — リーマン多様体 $(M, g)$ のレヴィ-チヴィタ接続の曲率は以下を満たす [32] :

- $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$
- $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$
- ビアンキの第一恒等式 :  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
- ビアンキの第二恒等式 [33] :  
 $(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$

$$P_p = T_p M \xrightarrow{\chi_3} T_p M \rightarrow$$

定理 —  $M$ に局所座標 $(x^1, \dots, x^m)$ を取るとき、以下が成立する（インシュタインの縮約で表記）：

$$\frac{\nabla}{dt} v(t) = \left( \frac{d}{dt} v^i(t) + \frac{dx^j(t)}{dt} v^k(t) \Gamma_{jk}^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \dots (1)$$

$$\text{where } \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \dots (2)$$

 定理 —  $R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^\ell}\right) \frac{\partial}{\partial x^j} = R^i_{jkl} \frac{\partial}{\partial x^i}$  と成分表示すると [注 8]、以下が成立する [34] :

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{\ell j}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{\ell j} - \Gamma^i_{\ell m} \Gamma^m_{kj}$$

S sectional curvature,

$$g(e_1, R(e_1, e_2) e_2)$$

$$\stackrel{||}{g_{ij} R^i_{jkl}} \stackrel{||}{g^{ij} g^{kl}}$$

Gauss curv

$$e_1 = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot e_2 = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$e_1, e_2$  正規直交基底

Gauss Curvature = Sectional curvature

# 断面曲率、リッチ曲率、スカラー曲率 [編集]

$\nabla$ をリーマン多様体 $(M, g)$ のレヴィ-チヴィタ接続とし、 $P$ を $M$ の点とし、 $v, w \in T_P M$ とし、  
に $e_1, \dots, e_m$ を $T_P M$ の基底とする。

定義 —

- $\text{Sec}_P(v, w) := \frac{g_P(R_P(v, w)w, v)}{g_P(v, v)g_P(w, w) - g_P(v, w)^2}$  を点 $P$ における $v, w$ に関する**断面曲率** (英: sectional curvature) という<sup>[39]</sup>。
- $\text{Ric}_P(v, w) := \sum_i g_P(R_P(e_i, v)w, e_i)$  を点 $P$ における $v, w$ に関する**リッチ曲率** (英: Ricci curvature) という<sup>[40]</sup>。
- $S_P := \sum_{i,j} g_P(R_P(e_i, e_j)e_j, e_i) = \sum_j \text{Ric}_P(e_j, e_j)$  を点 $P$ における**スカラー曲率** (英: scalar curvature) という<sup>[40]</sup>。

$$\begin{aligned} & R^{\text{Ric}}_{ijkl} \\ & g^{ij} R^{\text{Ric}}_{ijkl} \\ & g^{kl} g^{ij} R^{\text{Ric}}_{ijkl} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{Sectional curv} \Leftarrow \text{Griffiths positive} \\ \text{positive} \\ \text{Ricci positive} \Leftarrow \det E \text{ positive} \\ \text{Scalar pos} \Leftarrow \text{frank \circ fide} = G(E)(f) \text{ positive.} \end{array}$$

$$\text{Sec} = \text{Ric}.$$

$$n=4, T^4 M \text{ rich.}$$

$$R^{\text{Ric}}$$

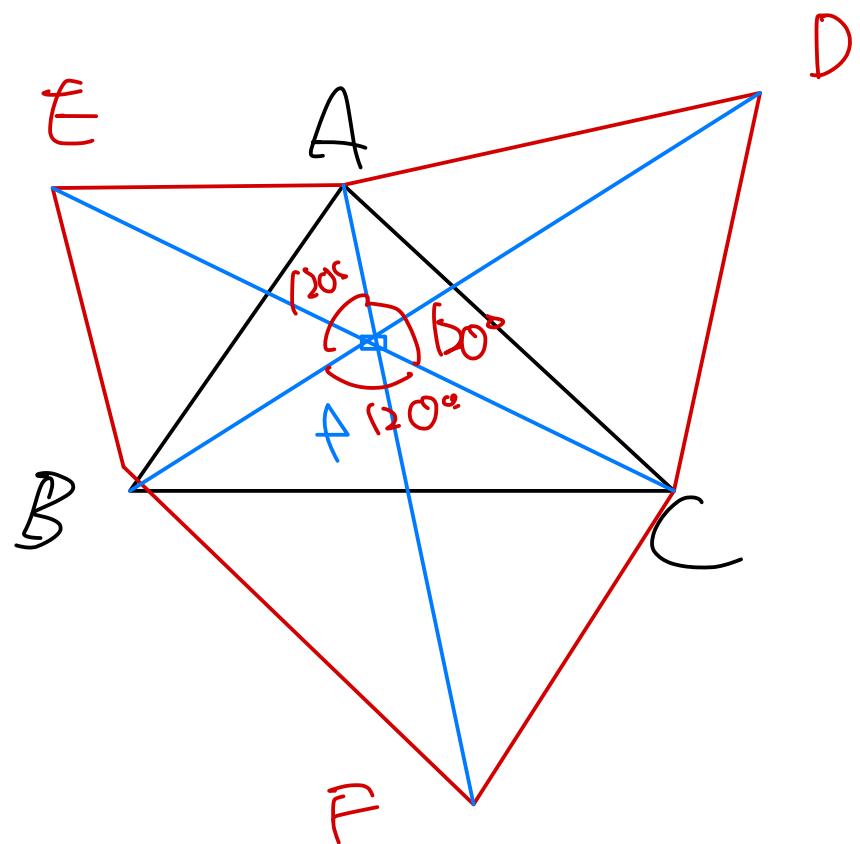




$\sum_{i=1}^n (R - \sin A_i) + \dots$

証明

内角がすべて  $120^\circ$  の正三角形  $ABC$  は  
内部に  $A$ pt  $P$  で  $BP+CP$  を最小にする点をもつ。  
これが下のようになります

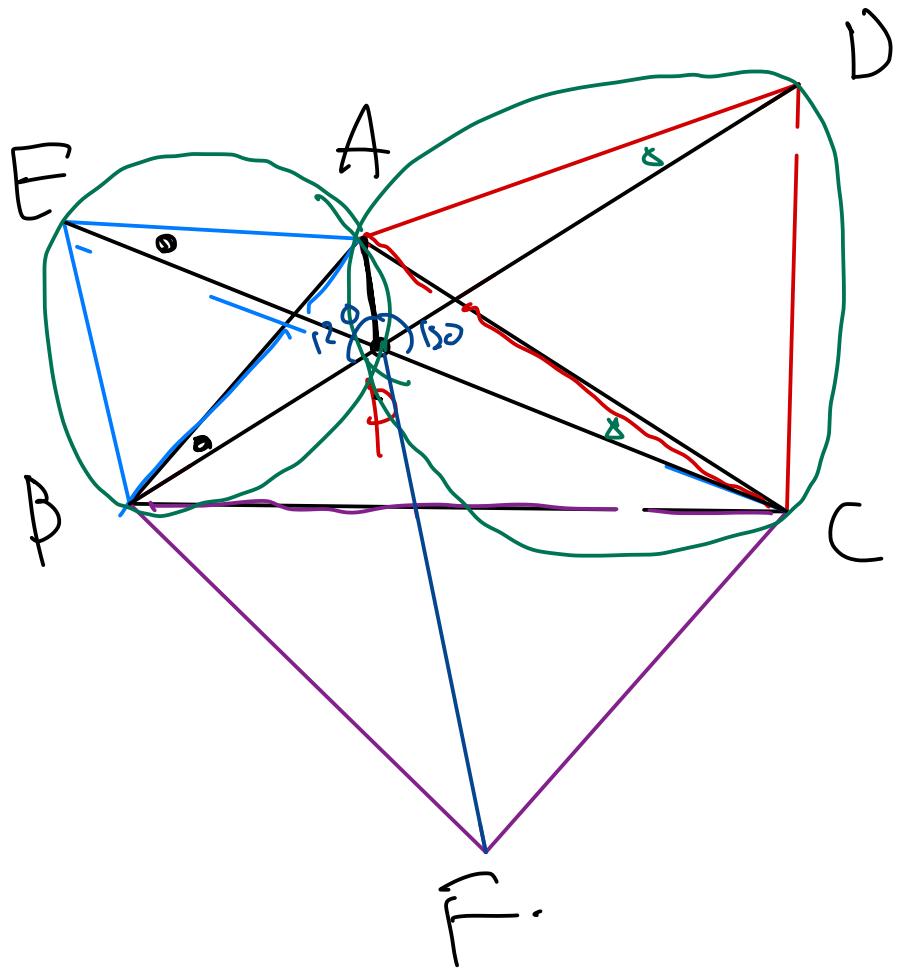


$\triangle ADC, \triangle AEB,$   
 $\triangle FCB$  正三角形  $\times 2$

$AF \times BD \times EC$  の交点  
が  $P$  です。

( $120^\circ$  は  $60^\circ$  の2倍)

Pの存在性



$\triangle ACD, \triangle AEB, \triangle BCF$  正三角形

$\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle AEC$

(二等辺の角)

$\Rightarrow$  同角の逆より  $AEBP$  は四点共

$\Rightarrow \angle APB = 120^\circ$

$\Rightarrow$  同様に  $\angle APC = 120^\circ$

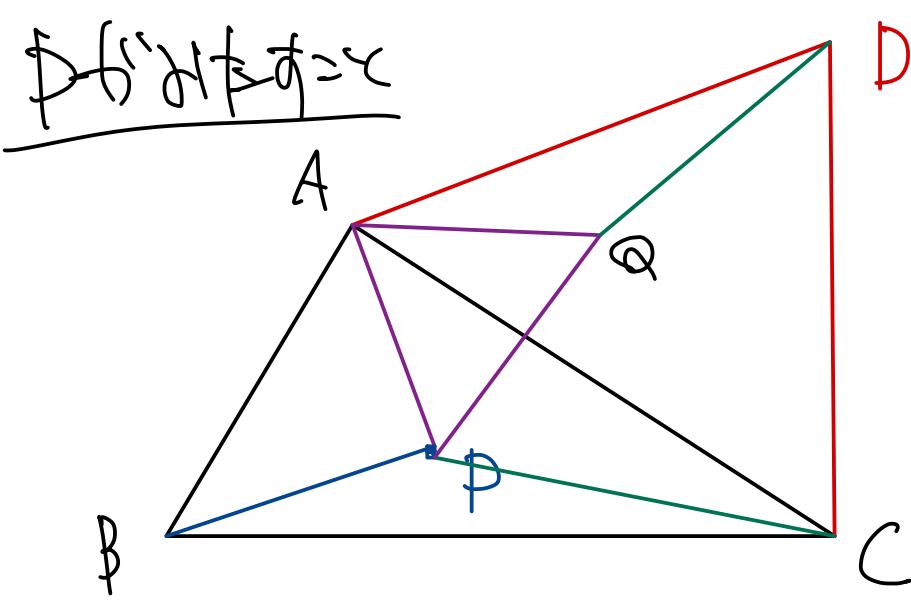
$\Rightarrow \angle BPC = 120^\circ$

$\Rightarrow$   $ABPC$  は四点共 (逆)

$\Rightarrow \angle FPC = \angle FBC = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle APF = \angle APC + \angle CPF = 180^\circ$

$\Rightarrow$  -

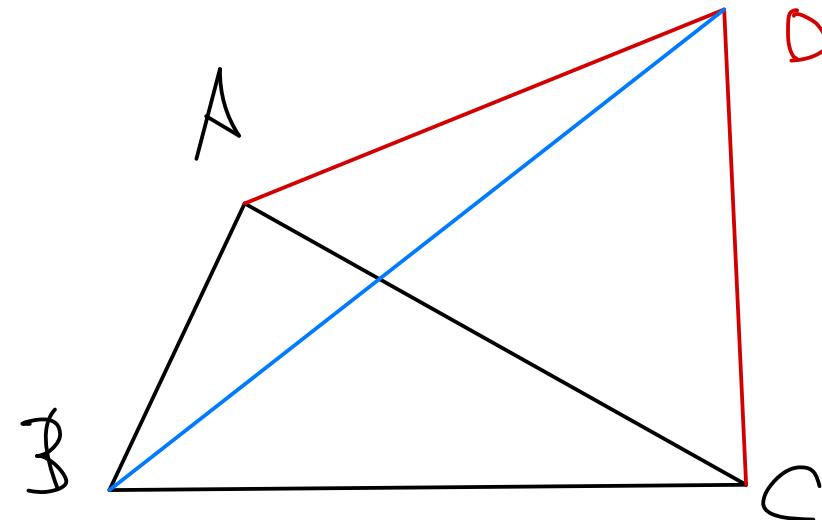


$\triangle ABC$  を  $\triangle APQ$  に

$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ABC$   
相似

$\Rightarrow \triangle APQ \sim \triangle ABC$   
相似

$\Rightarrow \triangle AQD \cong \triangle APC$   
 $(\cong)$



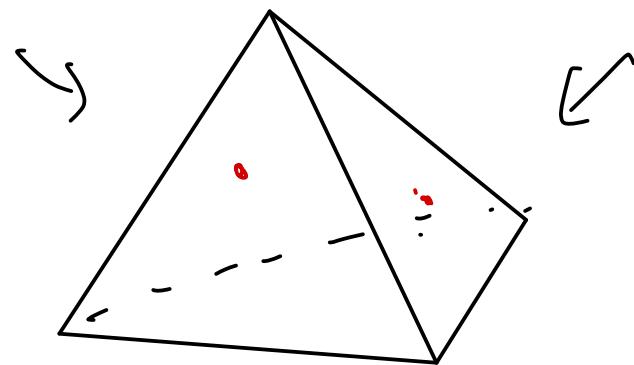
$$\begin{aligned} &\Rightarrow AP = PQ, QD = PC \\ &\Rightarrow BP + AP + CP \\ &= BP + PQ + QD > BD \end{aligned}$$

$\therefore P$  は  $BD$  上にある

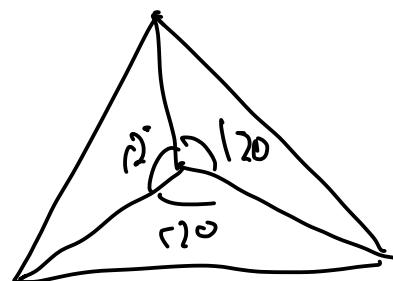
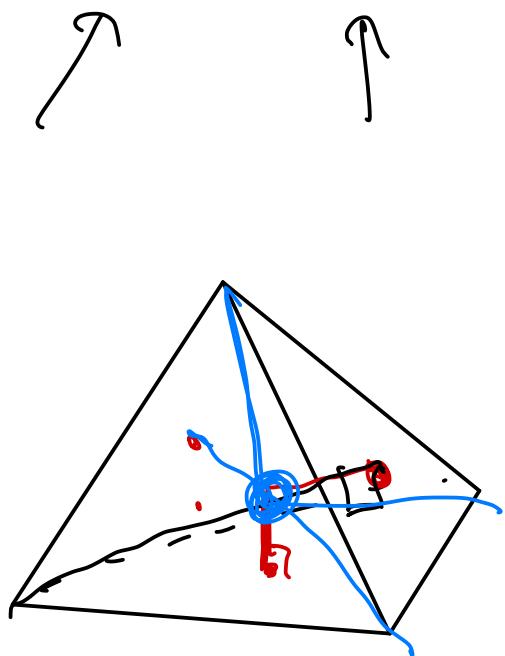
同様に  $P$  は  $AC$  上にある  
 $\Rightarrow I$  (マニラ) が  $\triangle ABC$  の内点

応用

# 正四面体の重心の石けん法



との視点からも三才法に  
なるべきである。  
(重心=なるべき)

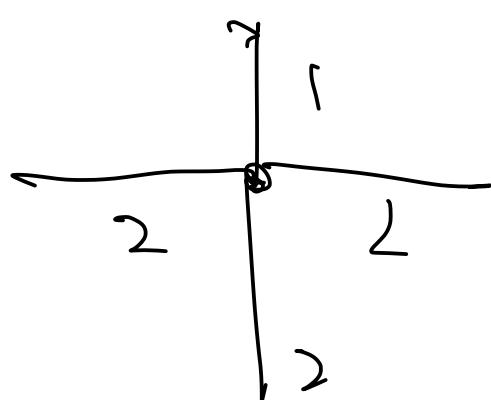
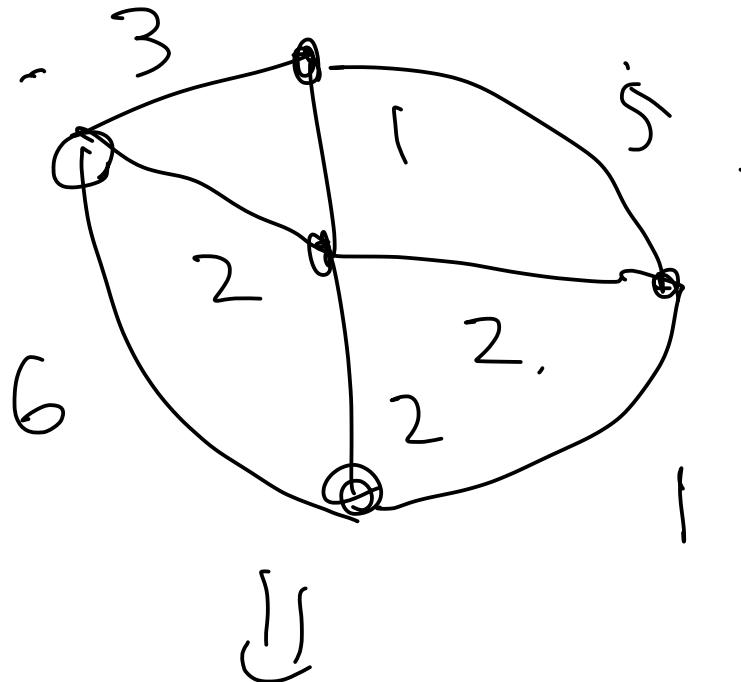


重心 = 三才法

正四面体の場合は重心に  
かたす

# 三一ART-大問題

またえりかた重ね書き グラフ



$\vdash \exists x \forall y (P(x) \wedge Q(y))$

ええさすげえす、まじめあります  
まじめなことをつづいて。。。



$$T = \sqrt{a^c \pi} \text{ 最佳体积 } z^c$$

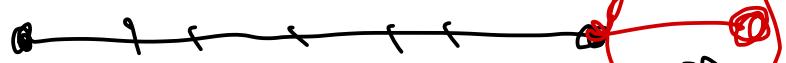
そのよがな日又のものに.

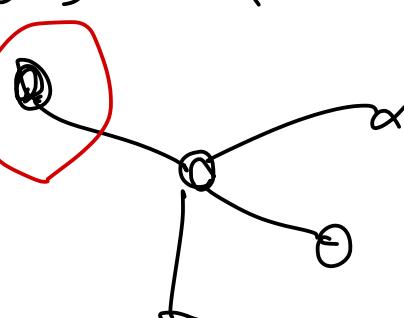
木(連続で閉鎖)をつなぐ  
(ラス水道, ドリーム方式)

[Thm] 木があるならば、 $\Gamma \vdash A$  かつ  $\Gamma \vdash B$  が成り立つ。

[Prop] 木でない場合は  $\Gamma \vdash A$  は成り立たない。

[Cor] すべての  $\Sigma$  が  $\Sigma \vdash A$  ならば  $A$  は閉じた。

[Def] 最長のパスをとる。  
 $\Rightarrow$  木にはもうあるのは  $y_2$  でない  $\Rightarrow$  最長のパス

[Lem] 木  $\Rightarrow$  ユニーク,  $\deg \leq 1$   上より書き込む。

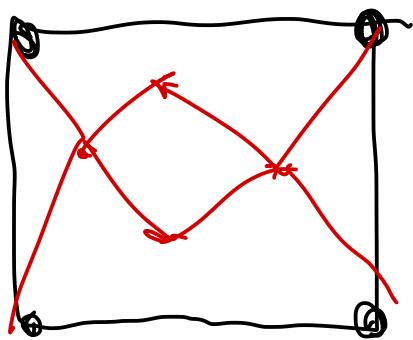
よって 木は唯一決まるがOK,  $n-1 \geq 0$  かつ

$n = n$  かつ,  $\deg = 1$  のときと(の2)が木

「単純法」である。

# 四点の巡回一周問題

正方形の四点を最初にむかって、  
A<sub>1</sub>, ..., A<sub>n-1</sub>と並んであるか?



Lem

$$n = 2$$

pf

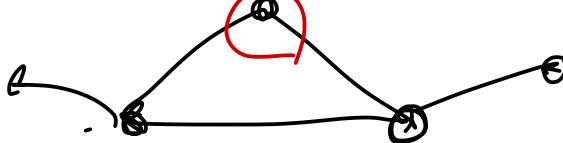
4th 点をまわんとするには閉路がありつつ、(枝が)

$\Rightarrow$  4th =

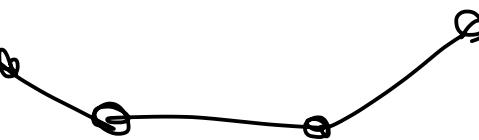
木

$\Rightarrow$  5th = n+3 =

∴ n点の時は 5つ以上3点、ある

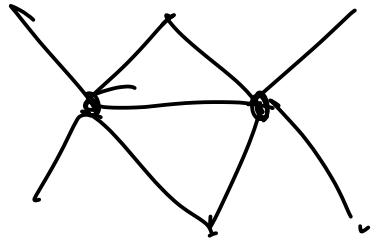


$\Rightarrow$



よし

$\Rightarrow \sum P \geq$



$$\frac{3n+4}{2} \geq n+1$$

左辺  
 $\sum d = 6n + 4$   
 $\sum d = 2n + 2$   
 など

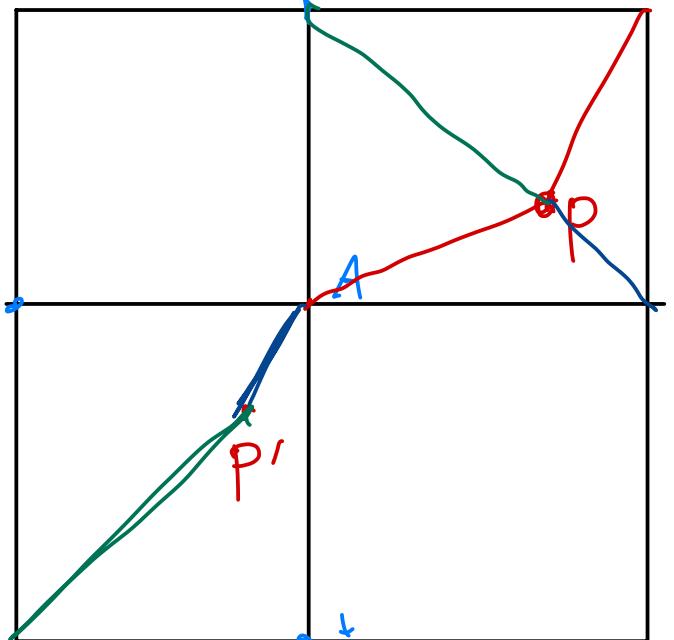
Double count

$$\Rightarrow \frac{3n+4}{2} \leq n+3 \Rightarrow n \leq 2.$$

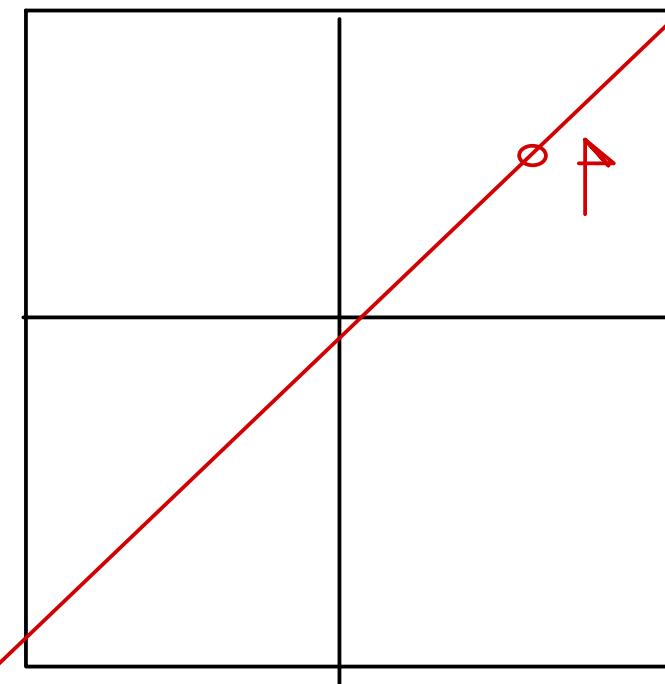

---

次は  $n=1, 2$  の場合

$$n=1$$

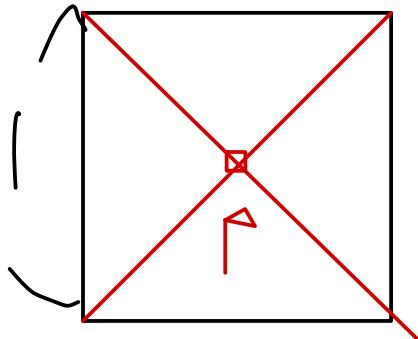


$\Rightarrow$



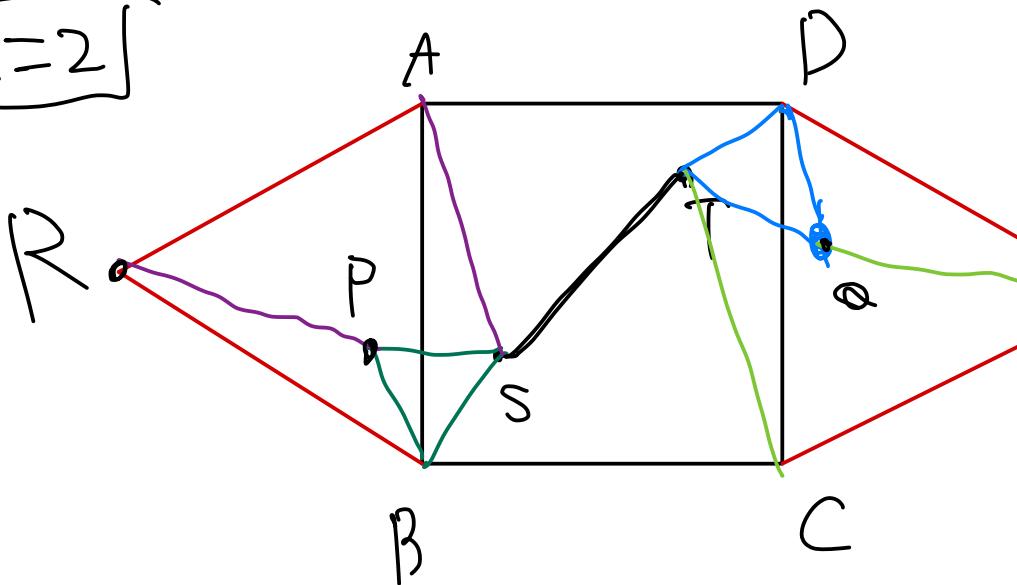
P は大(小)角線 上にある

$\Rightarrow$



$$P\text{は}:=2^{\circ}\text{R}+2\sqrt{2}=2.8.$$

$n=2$



ASf BSTfST + TDfTC

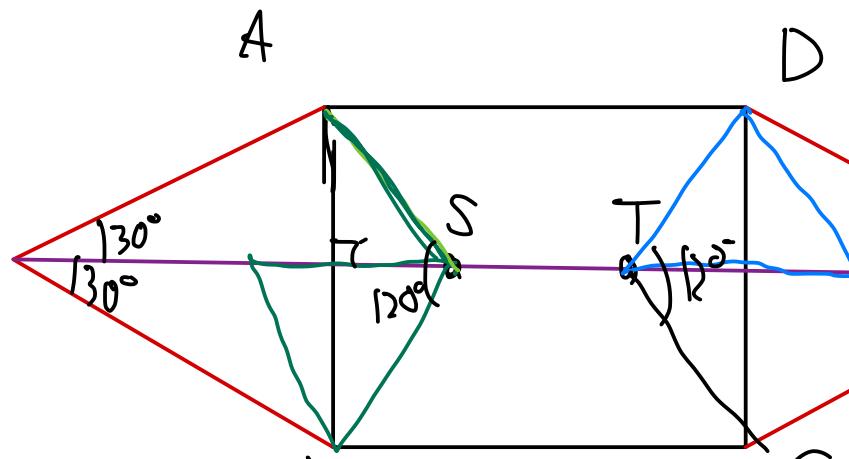
II

PR + SP + ST + TQ + SR'

R'

V  
R R'

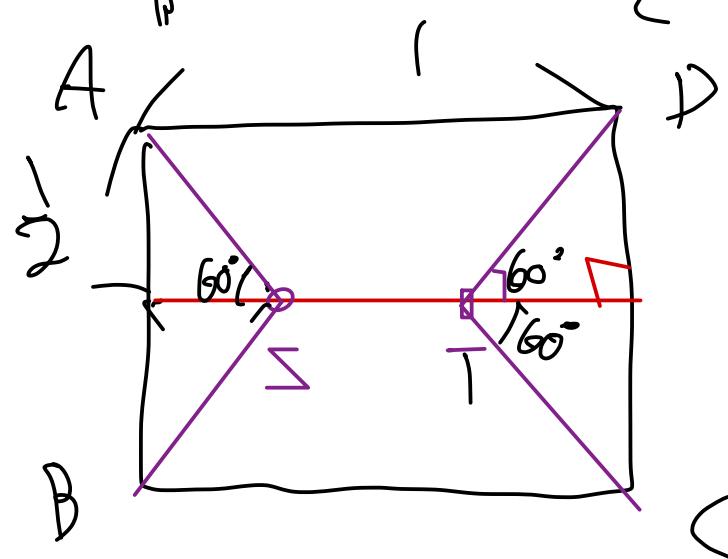
S, T は RR' 上にある



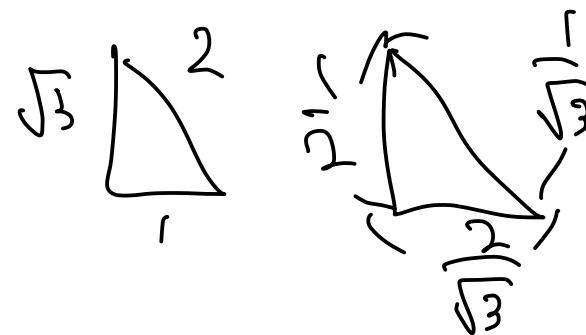
$$AS = BS$$

(平行2等辺三角形)

$$\Rightarrow \angle ASB = 120^\circ$$



ST // 平面ABC (ST // 平面ADC)



$$AS = BS = CT = DT = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

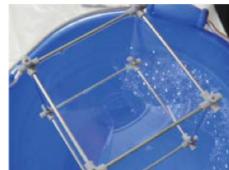
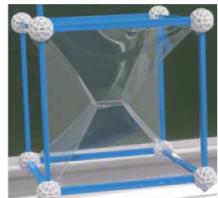
$$ST = \left| -\frac{1}{\sqrt{3}} \right|$$

$$\Rightarrow ASfBS + ST + DTfTC = \left| -\frac{1}{\sqrt{3}} \right| + \frac{4}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{3}}$$

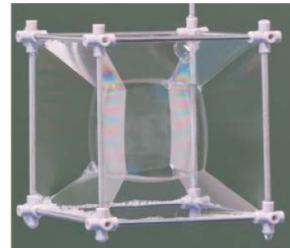
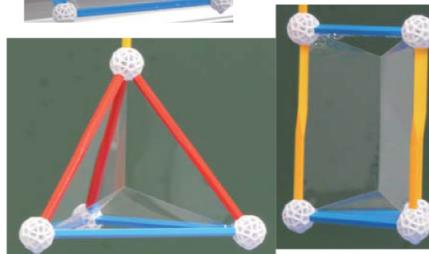
∴  $n=2$  のほうがより大きい。  $= 1 + \sqrt{3} \approx 2,6 \dots$

## 石けんまくの秘密(2)

石けんまくは、いつも $120^\circ$ でしか交わらない！



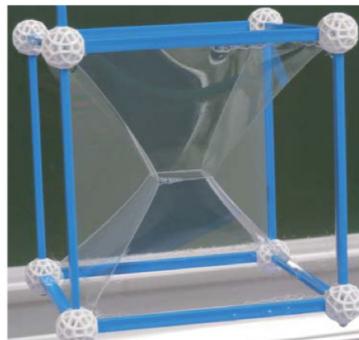
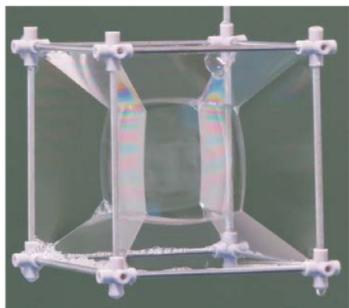
泡も！



???

### 今日のお話

下の写真は、立方体の形をした針金のわくに石けんのまくを張らせたものです。右は中に正方形が、左は中に球形ではないシャボン玉ができます！

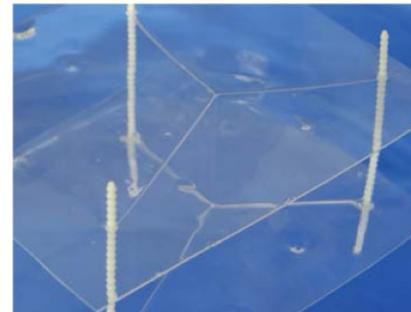


今日は、石けんまくやシャボン玉が面積最小という性質を使って上の現象が起こる理由を説明します。

こうは三八付よ、と  
すへつうみたもの

## 石けんまくは答えを知っている？

上の3点A, B, Cの状況を、プラスチックの板と棒で作る。それを、石けん液につけてそっと引き上げると、下図のような膜(まく)が張る。石けん膜は、膜にかかる力ができるだけ小さくなるように、すなわち、面積ができるだけ小さくなるよう形になる。したがって、プラスチックの板を上から見たときの膜の線の長さの和が最小になっている！つまり、三まいのまくが互いに $120^\circ$ で交わっている！

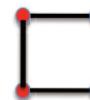


右の図のような四点をつなぐ  
最短のネットワークは？



互いに $120^\circ$ の角を成す線分たちより成ります！

つまり、下の図の(3)が正解です。



(1)



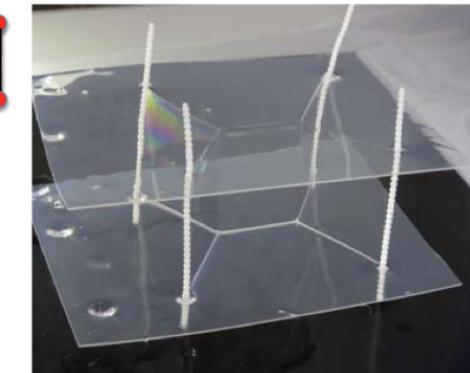
(2)



(3)



(4)



右の写真：  
石けんまくも答えを  
知っていますね！