正則接ベクトル束が正値性を持つ複素代数多様体の研究

岩井雅崇

東北大学数理科学連携研究センター 助教
大阪市立大学数学研究所 兼任研究員

2022 年 3 月 16 日

講演内容

1. 分野全体の概要
   複素代数多様体の分類問題・極小モデル理論 (MMP)
2. 研究内容紹介
   接ベクトル束 T_X の曲率が 0 以上の複素代数多様体の分類
   - 特異計量への一般化
   - 葉層構造への一般化

研究分野の概要

私の専門は複素幾何で, 特に (複素) 代数多様体を研究しています.

定義

(複素) 代数多様体 $=$ $\mathbb{CP}^N$ の複素部分多様体

定理 (Chow 49)

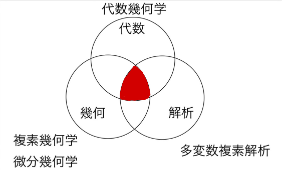
ある同次多項式 $F_1(t_0,\dots,t_N),\dots,F_l(t_0,\dots,t_N)$ があって, 代数多様体は次のようにかける.

$$\{(x_0,\dots,x_N)\in\mathbb{CP}^N|F_1(x_0,\dots,x_N)=\cdots=F_l(x_0,\dots,x_N)=0\}$$

(例). $X=\{(x_0,\dots,x_3)\in\mathbb{CP}^3\,|\,x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0\}$

三つの方向から研究ができる.

- 代数幾何学 (代数)
- 複素幾何学・微分幾何学 (幾何)
- 多変数複素解析 (解析)

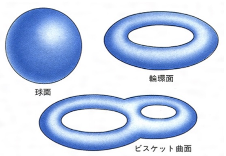


分野全体の大きな問題

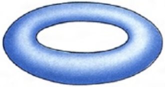
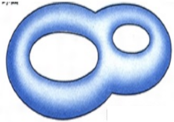
大きな問題

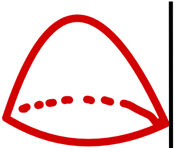
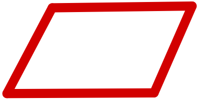
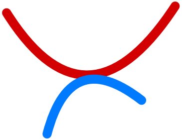
代数多様体を分類せよ.

- 複素 1 次元の場合. (1880-1910 年代)
  穴の数で分類ができる.
- 複素 2 次元の場合. (1960 年代)
  Enriques・小平邦彦により分類された.
- 複素 3 次元の場合. (1970-90 年代)
  多くの数学者により分類手法が確立された.
  (極小モデルプログラム)



1 次元の場合の分類

			
穴の数	0	1	2 以上
リッチ曲率	正	0	負

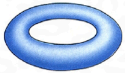
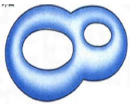
局所的には……			
	$\mathbb{R}^3 \supset S^2$ から誘導される計量 (Fubini-Study metric)	$\mathbb{C}$ のEuclid計量から誘導される計量. $(\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma)$	単位円板のPoincare計量から誘導される計量 $(\mathbb{D} \to \mathbb{D}/\Gamma)$

まとめ

複素 1 次元代数多様体は

- 正のリッチ曲率を持った多様体
- 0 のリッチ曲率を持った多様体
- 負のリッチ曲率を持った多様体

に分類できる.

			
穴の数	0	1	2 以上
リッチ曲率	正	0	負

Fano　Calabi-Yau　一般型

極小モデルプログラム (MMP)

定理

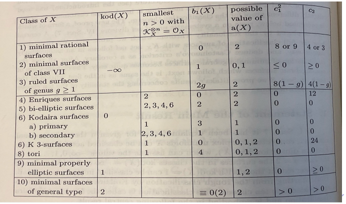
3 次元以下の代数多様体 X について, ある代数多様体 Y とある双有理写像 (”ほぼ同型写像”)

$$X \dashrightarrow Y$$

があって Y は次の *3* つで構成される.

- 正のリッチ曲率を持った多様体 (*Fano* 多様体)
- *0* のリッチ曲率を持った多様体 (*Calabi-Yau* 多様体)
- 負のリッチ曲率を持った多様体 (一般型多様体)

2 次元の場合, Y は右のように分類できる.
(Enriques-Kodaira classification.)



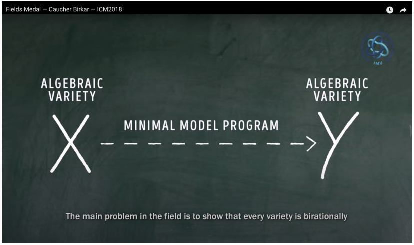
Class of X	kod(X)	smallest $n > 0$ with $\mathcal{K}_X^{\otimes n} = \mathcal{O}_X$	$b_1(X)$	possible value of a(X)	c_1^2	c_2
1) minimal rational surfaces	$-\infty$		0	2	8 or 9	4 or 3
2) minimal surfaces of class VII			1	0, 1	≤ 0	≥ 0
3) ruled surfaces of genus $g \geq 1$			$2g$	2	$8(1-g)$	$4(1-g)$
4) Enriques surfaces	0	2	0	2	0	12
5) bi-elliptic surfaces		2, 3, 4, 6	2	2	0	0
6) Kodaira surfaces						
a) primary		1	3	1	0	0
b) secondary		2, 3, 4, 6	1	1	0	0
6) K 3-surfaces		1	0	0, 1, 2	0	24
8) tori		1	4	0, 1, 2	0	0
9) minimal properly elliptic surfaces	1			1, 2	0	≥ 0
10) minimal surfaces of general type	2		$\equiv 0(2)$	2	> 0	> 0

予想

4次元以上の代数多様体もこのように分類・構成できるか?

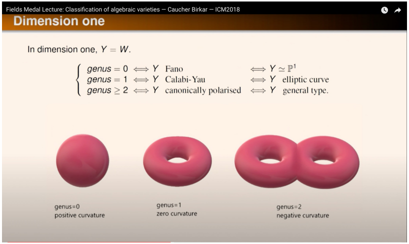
詳しいことを知りたい人は...

- Fields Medal - Caucher Birkar - ICM2018
`https://www.youtube.com/watch?v=KPTEkNZ4XCk`
- Fields Medal Lecture: Classification of algebraic varieties - Caucher Birkar - ICM2018
`https://www.youtube.com/watch?v=dvp17QM69Ug`



Fields Medal — Caucher Birkar — ICM2018

The main problem in the field is to show that every variety is birationally



Fields Medal Lecture: Classification of algebraic varieties — Caucher Birkar — ICM2018

Dimension one

In dimension one, $Y = W$.

$$\begin{cases} genus = 0 \iff Y \text{ Fano} & \iff Y \simeq \mathbb{P}^1 \\ genus = 1 \iff Y \text{ Calabi-Yau} & \iff Y \text{ elliptic curve} \\ genus \geq 2 \iff Y \text{ canonically polarised} & \iff Y \text{ general type.} \end{cases}$$

私の研究内容について

研究内容

適切な意味で0以上の曲率を持つ多様体が

- リッチ曲率正の多様体と
- リッチ曲率0の多様体

に分解されることを調べる.

4次元以上の代数多様体の分類につながる.

特徴

- 接ベクトル束 T_X の曲率が0以上の場合を扱う.
- 特異計量の手法を用いる.

特異計量とは

特異計量 = 滑らかな計量の極限

- 多変数複素解析の多重劣調和関数から来ている計量.
- regularity の落ちた計量で $+\infty$ になる部分を許容する計量.

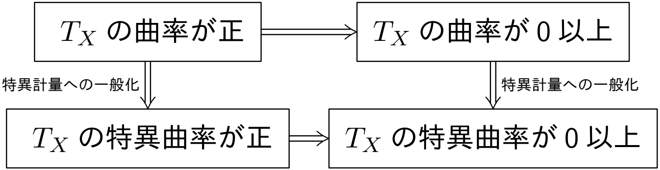
定理 (Demailly 93, I.21)

直線束・ベクトル束において, 代数多様体の分類 (*MMP*) で用いられる代数的な正値性が, 特異計量を用いて記述できる.

先行研究

定理

1. [*Mori 79, Siu-Yau 80.*] (*Frankel* 予想, *Hartshorne* 予想) T_X の曲率が正ならば, X は $\mathbb{CP}^n$ である.
2. [*Mok 88, Demailly-Peternell-Schneider 94.*] T_X の曲率が *0* 以上ならば, X は下の二つに分解される.
   - *Fano* 多様体. (リッチ曲率が正)
   - トーラス. (リッチ曲率が *0*)



T_X の曲率が正 ⟹ T_X の曲率が 0 以上

T_X の曲率が正 ⟹（特異計量への一般化）T_X の特異曲率が正

T_X の曲率が 0 以上 ⟹（特異計量への一般化）T_X の特異曲率が 0 以上

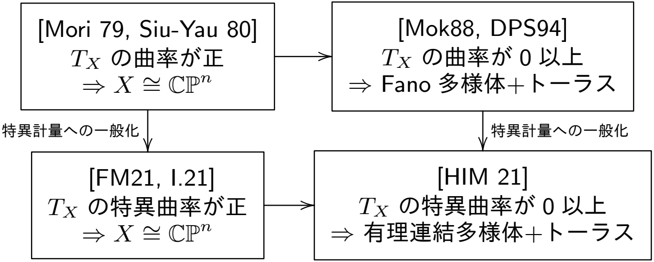
T_X の特異曲率が正 ⟹ T_X の特異曲率が 0 以上

論文 [I.21][HIIM 21] で T_X の特異曲率が
正・0 以上の場合の構造が分かった.

得られた結果 1 -特異計量への一般化-

定理

1. [*Fulger-Murayama 21, I.21.*]
   T_X の特異曲率が正ならば, X は $\mathbb{CP}^n$ である.
2. [*Hosono-I.-Matsumura 21.*]
   T_X の特異曲率が *0* 以上ならば, X は下の二つに分解される.
   - 有理連結多様体. (リッチ曲率が正の仲間)
   - トーラス. (リッチ曲率が *0*)



[Mori 79, Siu-Yau 80]
T_X の曲率が正
$\Rightarrow X \cong \mathbb{CP}^n$

[Mok88, DPS94]
T_X の曲率が 0 以上
$\Rightarrow$ Fano 多様体+トーラス

特異計量への一般化

特異計量への一般化

[FM21, I.21]
T_X の特異曲率が正
$\Rightarrow X \cong \mathbb{CP}^n$

[HIM 21]
T_X の特異曲率が 0 以上
$\Rightarrow$ 有理連結多様体+トーラス

2次元代数多様体に対する分類

定理 (HIM 21.)

X を *2* 次元 (極小) 代数多様体とする.
T_X の特異曲率が *0* 以上ならば, X は以下のいずれかである.

1. (有限被覆を除いて)*2* 次元トーラス.
2. $\mathbb{CP}^1$ 上の $\mathbb{CP}^1$ 束.
3. *1* 次元トーラス上の $\mathbb{CP}^1$ 束.
4. $\mathbb{CP}^2$.

X が極小ではない場合も, ある程度分類できている.

得られた結果 2 -葉層構造への一般化-

接ベクトル束 T_X の (特異) 曲率が 0 以上の場合はほぼ分かった.

問題

T_X の部分束 $\mathcal{F}$ について, $\mathcal{F}$ の (特異) 曲率が 0 以上の場合,
X の構造はどうなるだろうか?

- この問題は Peternell による問題から来ている.
- $\mathcal{F} = T_X$ の場合は先行研究・前研究からわかっている.
  →上の問題はこれら研究のある種の一般化.

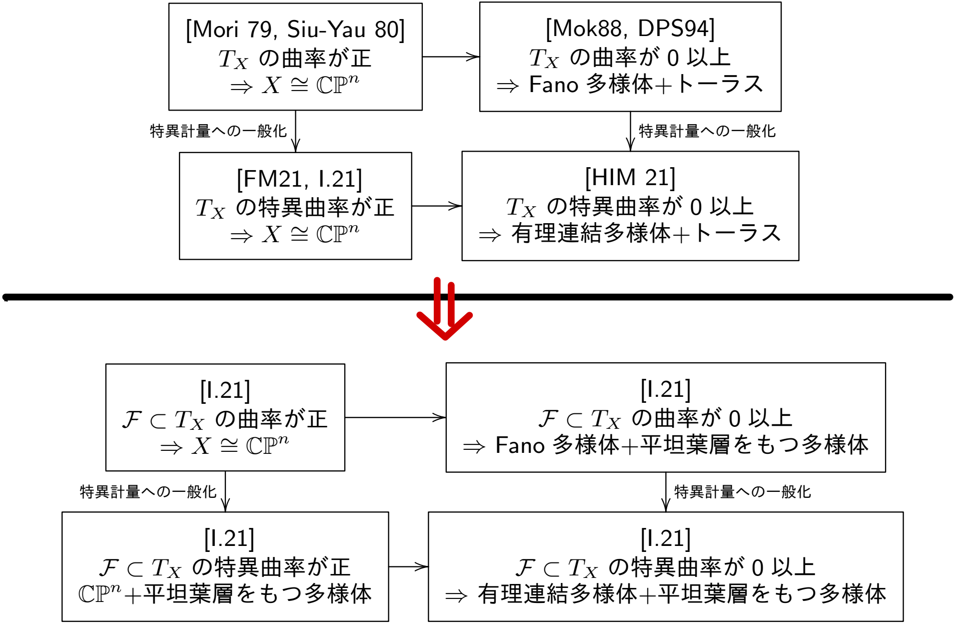
論文 [I.21] で $\mathcal{F}$ が葉層構造を持つ場合の構造が分かった.

定理 (I.21)

$\mathcal{F} \subset T_X$ を部分束とし，葉層構造をもつとする．

1. $\mathcal{F}$ が曲率が正ならば，X は $\mathbb{CP}^n$ である．
2. $\mathcal{F}$ が曲率が 0 以上ならば，X は下の二つに分解される．
   - Fano 多様体．(リッチ曲率が正)
   - 平坦葉層 $\mathcal{G}$ をもつ多様体 Y (トーラスの葉層版)
3. $\mathcal{F}$ が特異曲率が正ならば，X は下の二つに分解される．
   - $\mathbb{CP}^n$
   - 平坦葉層 $\mathcal{G}$ をもつ多様体 Y
4. $\mathcal{F}$ が特異曲率が 0 以上ならば，X は下の二つに分解される．
   - 有理連結多様体．(リッチ曲率が正の仲間)
   - 平坦葉層 $\mathcal{G}$ をもつ多様体 Y

[I.21] は [Mori 79] などの先行研究・前研究の一般化となっている．



[Mori 79, Siu-Yau 80]
T_X の曲率が正
$\Rightarrow X \cong \mathbb{CP}^n$

[Mok88, DPS94]
T_X の曲率が 0 以上
$\Rightarrow$ Fano 多様体+トーラス

特異計量への一般化

特異計量への一般化

[FM21, I.21]
T_X の特異曲率が正
$\Rightarrow X \cong \mathbb{CP}^n$

[HIM 21]
T_X の特異曲率が 0 以上
$\Rightarrow$ 有理連結多様体+トーラス

$\Downarrow$

[I.21]
$\mathcal{F} \subset T_X$ の曲率が正
$\Rightarrow X \cong \mathbb{CP}^n$

[I.21]
$\mathcal{F} \subset T_X$ の曲率が 0 以上
$\Rightarrow$ Fano 多様体+平坦葉層をもつ多様体

特異計量への一般化

特異計量への一般化

[I.21]
$\mathcal{F} \subset T_X$ の特異曲率が正
$\mathbb{CP}^n$+平坦葉層をもつ多様体

[I.21]
$\mathcal{F} \subset T_X$ の特異曲率が 0 以上
$\Rightarrow$ 有理連結多様体+平坦葉層をもつ多様体

2 次元代数多様体に対する分類

定理 (Touzet 08 + HIM 21 + I.21)

X を 2 次元 (極小) 代数多様体とし, $\mathcal{F} \subset T_X$ を部分束とする. $\mathcal{F}$ の特異曲率が 0 以上ならば, 以下のいずれかである.

1. *rank*$\mathcal{F} = 1$ かつ $c_1(\mathcal{F}) \neq 0$ ケース
    - *1 次元代数多様体上の* $\mathbb{CP}^1$ *束.*
2. *rank*$\mathcal{F} = 1$ かつ $c_1(\mathcal{F}) = 0$ ケース
    - *1 次元トーラス上の* $\mathbb{CP}^1$ *束.*
    - *(有限被覆を除いて)2 次元トーラス.*
    - *(有限被覆を除いて)1 次元トーラスと種数 2 以上の 1 次元代数多様体の直積.*
3. $\mathcal{F} = T_X$ ケース
    - *(有限被覆を除いて)2 次元トーラス.*
    - $\mathbb{CP}^1$ *上の* $\mathbb{CP}^1$ *束.*
    - *1 次元トーラス上の* $\mathbb{CP}^1$ *束.*
    - $\mathbb{CP}^2$*.*

まとめ・最近の話題

この分野は代数幾何学・複素幾何学 (微分幾何)・多変数複素解析の複合分野で, 色々な分野の人が参戦しています.

最近の話題

1. 代数多様体 X に特異点 (KLT 特異点) がある場合.
   •KLT 多様体の Beauville-Bogomolov 分解 (Druel19, Höring-Peternell 19, Greb-Guenancia-Kebekus 19).
   • KLT 多様体上の Nonabelian Hodge Correspondence (Greb-Kebekus-Peternell-Taji 19, 20).
   • $\det T_X$ が 0 以上の曲率を持つ KLT 多様体の構造定理 (Matsumura-Wang 21).
2. 代数多様体 X と因子 D の組 (X, D) についての研究.
   • (X, D) から誘導される orbifold 構造の研究 (Campana 04, 11, 16).
   • KLT weak Fano (X, D) の smooth locus の orbifold 基本群 $\pi_1(X_{reg}, D)$ の有限性 (Braun 21) .