相対的な設定での藤田予想について

岩井 雅崇　(東大数理)*

1. 相対的な設定での藤田予想

Popa と Schnell は次のような予想を提示した。

予想 1.1 (Popa-Schnell 予想)**.** $f\colon X \to Y$ を射影的複素多様体の間の全射とする。Y の次元を n とし L を Y 上の豊富な直線束とする。

この時、$b \geq a(n+1)$ を満たす任意の正整数 a, b について、$f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ は大域切断で生成されるか？

f が恒等写像であり $a = 1$ の時、Popa-Schnell 予想は藤田予想と同じである。藤田予想と同様に Popa-Schnell 予想は未解決である。Popa-Schnell 予想に関しては以下のような進展がある。L が大域切断で生成される豊富な直線束の時、Popa と Schnell がこの予想が正しいことを証明した。L が豊富な場合、Dutta が $b \geq a(\frac{n^2+n}{2}+1)$ を満たす任意の正整数 a, b について、$f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ が Y 上の一般点で大域切断で生成されることを示した。同時期に Deng が $b \geq a(n+1)+n^2-n$ を満たす任意の正整数 a, b について、$f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ が Y 上の一般点で大域切断で生成されることを示した。

2. 主定理

定理 2.1 (I.17)**.** $f\colon X \to Y$ を射影的複素多様体の間の全射とする。Y の次元を n とし L を Y 上の豊富な直線束とする。

この時、$b \geq a(n+1)+\frac{n^2-n}{2}$ を満たす任意の正整数 a, b について、$f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ は f の正則値上で大域切断で生成される。

本研究によって Deng の評価よりも良い評価や、$f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ が f の正則値で大域切断で生成されることが得られた。この結果から、f が滑らかな射である時には $b \geq a(n+1)+\frac{n^2-n}{2}$ を満たす任意の正整数 a, b について、$f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ が大域切断で生成されることがわかる。以上により、Popa-Schnell 予想に関する部分的解決が得られた。

また少し特異点を許した代数多様体においても次のような結果を得た。この結果に関しては、Dutta と村山によって講演者と独立に示されている。

定理 2.2 (I.17, DM.17)**.** (X, Δ) を射影的正規代数多様体と有効因子の川又ログ末端的 $\mathbb{Q}$ 分解的な組とし、Y を非特異射影代数多様体とする。$f\colon X \to Y$ を全射とし、Y の次元を n、L を Y 上の豊富な直線束とする。

この時、$b \geq a(n+1)+\frac{n^2-n}{2}$ を満たす任意の正整数 a, b について、$f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ は Y 上の一般点で大域切断で生成される。

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院 数理科学研究科
e-mail: `masataka@ms.u-tokyo.ac.jp`