相対的な設定での藤田予想について

岩井 雅崇　(東大数理)*

1. 相対的な設定での藤田予想

Popa と Schnell は次のような予想を提示した。

予想 1.1 (Popa-Schnell 予想). $f\colon X \to Y$ を射影的複素多様体の間の全射とする。Y の次元を n とし L を Y 上の豊富な直線束とする。

この時、$b \geq a(n+1)$ を満たす任意の正整数 a, b について、$f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ は大域切断で生成されるか？

f が恒等写像であり $a = 1$ の時、Popa-Schnell 予想は藤田予想と同じである。藤田予想と同様に Popa-Schnell 予想は未解決である。Popa-Schnell 予想に関しては以下のような進展がある。L が大域切断で生成される豊富な直線束の時、Popa と Schnell がこの予想が正しいことを証明した。L が豊富な場合、Dutta が $b \geq a(\frac{n^2+n}{2}+1)$ を満たす任意の正整数 a, b について、$f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ が Y 上の一般点で大域切断で生成されることを示した。同時期に Deng が $b \geq a(n+1) + n^2 - n$ を満たす任意の正整数 a, b について、$f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ が Y 上の一般点で大域切断で生成されることを示した。

2. 主定理

定理 2.1 (I.17). $f\colon X \to Y$ を射影的複素多様体の間の全射とする。Y の次元を n とし L を Y 上の豊富な直線束とする。

この時、$b \geq a(n+1) + \frac{n^2-n}{2}$ を満たす任意の正整数 a, b について、$f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ は f の正則値上で大域切断で生成される。

本研究によって Deng の評価よりも良い評価や、$f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ が f の正則値で大域切断で生成されることが得られた。この結果から、f が滑らかな射である時には $b \geq a(n+1) + \frac{n^2-n}{2}$ を満たす任意の正整数 a, b について、$f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ が大域切断で生成されることがわかる。以上により、Popa-Schnell 予想に関する部分的解決が得られた。

また少し特異点を許した代数多様体においても次のような結果を得た。この結果に関しては、Dutta と村山によって講演者と独立に示されている。

定理 2.2 (I.17, DM.17). (X, Δ) を射影的正規代数多様体と有効因子の川又ログ末端的 $\mathbb{Q}$ 分解的な組とし、Y を非特異射影代数多様体とする。$f\colon X \to Y$ を全射とし、Y の次元を n、L を Y 上の豊富な直線束とする。

この時、$a(K_X + \Delta)$ がカルティエ因子であり、$b \geq a(n+1) + \frac{n^2-n}{2}$ を満たす任意の正整数 a, b について、$f_*(\mathcal{O}(a(K_X + \Delta)) \otimes L^{\otimes b}$ は Y 上の一般点で大域切断で生成される。

3. 証明のアイデア

示すことは、任意の正則値 $y \in Y$ と任意の正則切断 $0 \neq s_y \in H^0(X_y, K_X^{\otimes a} \otimes f^*L^{\otimes b}|_{X_y})$ について、ある X 上の大域切断 $S \in H^0(X, K_X^{\otimes a} \otimes f^*L^{\otimes b})$ があって $S|_{X_y} = s_y$ を示せばよい。証明は主に 3 パート分かれる。

1. $M = K_X^{\otimes a-1} \otimes f^*L^{\otimes b}$ に良い特異エルミート計量 h を入れる。具体的には正則切断に関して良い振る舞いを行うベルグマン型の特異エルミート計量を入れる。

---

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院 数理科学研究科
e-mail: masataka@ms.u-tokyo.ac.jp

2. あるユークリッド開集合 $y \in U$ と $s_U \in H^0(f^{-1}(U), K_X^{\otimes a} \otimes f^*L^{\otimes b}|_{-1(U)})$ で $s_U|_{X_y} = s_y$ となるものの存在を示す。これには先ほどの h の取り方と y が正則値であることによって、大沢竹腰型の L^2 拡張定理から存在が言える。

3. y の近くで 1 であり U 以外の点では 0 になる C^∞ 関数 ρ をとり、$\alpha = \bar{\partial}(\rho s_U)$ と置く。$\bar{\partial}$-方程式と呼ばれる微分方程式を重みつきでとくことで、$\beta|_{X_y} = 0$ かつ $\bar{\partial}\beta = \alpha$ を満たす β を取ることができる。これにより $S = \rho s_y - \beta$ とすれば、$S \in H^0(X, K_X^{\otimes a} \otimes f^*L^{\otimes b})$ があって $S|_{X_y} = s_y$ となっている。

特異点がある多様体でも特異点解消を使えば、非特異代数多様体の時に帰着できるため、同様の議論ができる。ただし、微分方程式を解く際に川又ログ末端的の条件が鍵になってくる。実際、ログ標準的の場合ではこの証明ではうまくいかない。Duttaと村山は [DM.17] において、ログ標準的の場合でも同様の結果を得ている。(ただし証明方法はこの証明とは全く別である。)

参考文献

[Deng] Y. Deng. *Applications of the Ohsawa-Takegoshi Extension Theorem to Direct Image Problems.* arXiv:1703.07279v2

[Dutta] Y. Dutta. *On the effective freeness of the direct images of pluricanonical bundles.* arXiv:1701.08830v3

[DM] Y. Dutta, T. Murayama. *Effective generation and twisted weak positivity of direct images.* arXiv:1712.08723v1

[Iwa] M. Iwai. *On the global generation of direct images of pluri-adjoint line bundles* arXiv:1712.06293v2

[PS] M. Popa, C. Schnell. *On direct images of pluricanonical bundles.* Algebra Number Theory. **8** (2014), no. 9, 2273-2295.