第 11 回. 多重積分の変数変換公式 (川平先生の本, 第 27 章の内容)

岩井雅崇, 2020/12/22

1　変数変換公式

定義 1. $E \subset \mathbb{R}^2$ を集合とする. 点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ が E の境界であるとは. 任意の正の数 $r > 0$ について $B_{(a,b)}(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leqq r\}$ とするとき, $B_{(a,b)}(r) \cap E \neq \phi$ かつ $B_{(a,b)}(r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus E) \neq \phi$ となること. E の境界の点からなる集合を ∂E とする.

[1]

例 2. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1\}$ とする. このとき E の境界の点の集合は

$$\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} = 1\} \text{ となる.}$$

定義 3. $E \subset \mathbb{R}^2$ を面積確定な有界閉集合とし, 変数変換 Φ を次の通りとする.

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

Φ が重積分の変数変換の条件を満たすとは, 次の条件 (1)-(3) を満たすこと.
[条件 (1).] $x(u,v), y(u,v)$ は C^1 級である.
[条件 (2).] $D = \Phi(E)$ とするとき, E の境界以外で Φ は 1 対 1 写像.
[条件 (3).] Φ のヤコビ行列

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

とし, ヤコビアンを $\det D\Phi = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)$ とするとき, $\det D\Phi$ は E の境界以外で 0 にならない.

例 4.

- $E = [0,1] \times [0,1]$ とし,

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u+v, v) \end{array}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たす. 特に $D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ かつ $\det D\Phi = 1 \neq 0$ である.

- $E = [0,1] \times [0,1]$ とし,

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u+v, u+v) \end{array}$$

[1] $B_{(a,b)}(r) \cap E \neq \phi$ とは $B_{(a,b)}(r) \cap E$ が空集合でないこと. つまり, ある元 $(c,d) \in B_{(a,b)}(r) \cap E$ が存在すること.

とすると, 条件 (3) を満たさない. 実際 $D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ かつ $\det D\Phi = 0$ である.

- $E = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ とし,

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たし. $D = \Phi(E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leqq 1\}$ となる. 特に $D\Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ かつ $\det D\Phi = r$ である.[2]

- $E = [0, 1] \times [0, 4\pi]$ とし,

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

とすると, 条件 (2) を満たさない. [3]

定理 5 (多重積分の変数変換公式)**.** $E \subset \mathbb{R}^2$ を面積確定な有界閉集合とし, 変数変換 Φ を次の通りとする.

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u, v) & \longmapsto & (x(u, v), y(u, v)) \end{array}$$

Φ は重積分の変数変換の条件 (条件 (1)-(3)) を満たすとする.
関数 $f(x, y)$ が $D = \Phi(E)$ 上で積分可能であるとき

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v))|\det D\Phi|dudv \text{ となる.}$$

例 6. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leqq 1\}$ とする. $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.
(解.) $E = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ とし,

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たし. $D = \Phi(E)$ かつ $\det D\Phi = r$ である.

[2] この例では $E \setminus \partial E = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$ であるため, E の境界以外の集合である $E \setminus \partial E$ 上で $\det D\Phi = r$ は 0 ではない.

[3] $\Phi(\frac{1}{2}, \pi) = \Phi(\frac{1}{2}, 3\pi) = (-\frac{1}{2}, 0)$ であるため 1 対 1 ではない. 1 対 1 に関しては第 4 回授業を参照のこと.

以上より多重積分の変数変換の公式から

$$
\begin{aligned}
\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy &= \iint_E e^{-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2} |r| drd\theta \\
&= \iint_E e^{-r^2} rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 e^{-r^2} rdr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1-e^{-1}}{2} d\theta = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right).
\end{aligned}
$$

例 7. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+2y| \leqq 1, |x-y| \leqq 1\}$ とする. $\iint_D (x-y)^2 dxdy$ を求めよ.
(解.) $E = [-1,1] \times [-1,1]$ とし,

$$
\begin{array}{cccc}
\Phi : & E & \to & \mathbb{R}^2 \\
 & (u,v) & \longmapsto & (\frac{u+2v}{3}, \frac{u-v}{3})
\end{array}
$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たし, $D = \Phi(E)$ かつ $D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ かつ $\det D\Phi = -\frac{1}{3} \neq 0$ である. 以上より多重積分の変数変換の公式から,

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x-y)^2 dxdy &= \iint_E \left(\frac{u+2v}{3} - \frac{(u-v)}{3} \right)^2 \left| -\frac{1}{3} \right| dudv \\
&= \iint_E \frac{v^2}{3} dudv = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{v^2}{3} dv \right) du = \int_{-1}^1 \left[\frac{v^3}{9} \right]_{-1}^1 du = \int_{-1}^1 \frac{2}{9} du = \frac{4}{9}.
\end{aligned}
$$