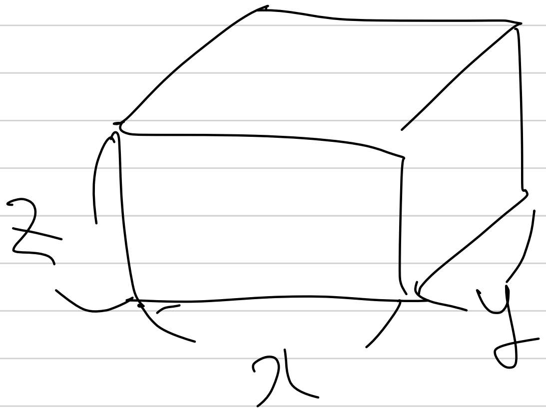
第8回 ラグランジュ未定乗数法

(11月2日(木))

あらすじ　ゆうパック



たて x cm
よこ y cm
たかさ z cm

$x+y+z \leqq 170$cm かつ 重さ25kgまでしか送れない

(30kgになると別料金)(重量ゆうパック)

Q. ゆうパックでおくれる最大の箱の体積は?
(重さは考慮しない)

数学的には (≦が本当だが=にした方が大きい)

$x+y+z=170$ をみたす (x,y,z) について
$V(x,y,z)=xyz$ の最大値をもとめよ

条件つき極値問題

(定理) ラグランジュ未定乗数法.

$f(x,y)$, $g(x,y)$ を領域 D 上の C^1 級関数とする

$g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ が 点 (a,b) で極値をもって

$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b), \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\right) \neq (0,0)$ とする.

このとき ある定数 λ があって.

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)$ となる

(定理の使い方)

$F(x,y,t) = f(x,y) - t\,g(x,y)$ とおく.

(a,b) が $g=0$ での f の極値か $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b), \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\right) \neq (0,0)$ とするとき.

ある λ があって.

$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,\lambda) = 0$ となる.

また $\frac{\partial F}{\partial t}(a,b,\lambda) = g(a,b) = 0$ となる.

ラグランジュ未定乗数法を用いた
極値のもとめかた
($g=0$ での f の極値)

手順1 $g(a,b)=\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)=0$
なる点 (a,b) をもとめる.

手順2 $F(x,y,t)=f(x,y)-tg(x,y)$ とおく.
$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,\lambda)=\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,\lambda)=\frac{\partial F}{\partial t}(a,b,\lambda)=0$ なる
点 (a,b,λ) をもとめる

手順3 上の点 (a,b) たちについて
極大・極小かしらべる

↳ 一般的な方法はない.
(例の方法などがある)

(例1) $f(x,y)=xy$, $g(x,y)=x^2+y^2-1$ とし, $g(x,y)=0$ のもとでの f の極値をもとめよ.

(解) $\boxed{1}$ $\frac{\partial g}{\partial x}=2x$ $\frac{\partial g}{\partial y}=2y$ より

$g=\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=0$ なる点 (a,b) は存在しない

$\boxed{2}$ $F(x,y,t)=f(x,y)-tg(x,y)$

$=xy-t(x^2+y^2-1)$ とおく.

$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,\lambda)=\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,\lambda)=\frac{\partial F}{\partial t}(a,b,\lambda)=0$ なる点を求める

$\frac{\partial F}{\partial x}=y-2xt=0$ --①

$\frac{\partial F}{\partial y}=x-2yt=0$ --②

$\frac{\partial F}{\partial t}=-(x^2+y^2-1)=0$ --③

①と②より $x-4xt^2=0$. $x=0$ または $t=\pm\frac{1}{2}$

- $x=0$ のとき ①より $y=0$, ③に矛盾.
- $t=+\frac{1}{2}$ のとき $y=x$, ③より $(x,y)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

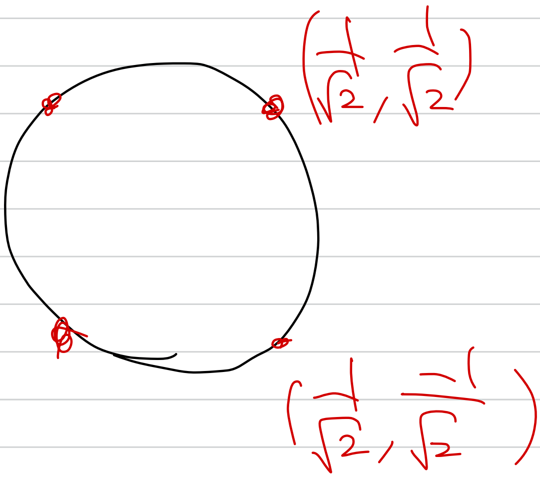
  $t=-\frac{1}{2}$ のとき $y=-x$, ③より $(x,y)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$\boxed{3}$ これら4点は極値の候補!

(本当に極大?極小??)

$(: g(x,y)=0$

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0\}$$



S 有界閉集合.

fはS上連続.

fはS上最大値,最小値をもつ

それをとる点は $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のどれか.

実際

最大 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$ $\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$

最小 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$ $\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$

よって $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で 極大値 $\frac{1}{2}$.

$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で 極小値 $-\frac{1}{2}$ をとる.

応用　ラグランジュ未定乗数法（3変数）

$f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ を C^1 級関数とし

$F(x,y,z,t) = f(x,y,z) - t\,g(x,y,z)$ とおく。

$g(x,y,z)=0$ のもと $f(x,y,z)$ が点 (a,b,c) で極値をもつとする。

$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b,c), \frac{\partial g}{\partial y}(a,b,c), \frac{\partial g}{\partial z}(a,b,c)\right) \neq (0,0,0)$ なら、

ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ があって

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c,\lambda)$$
$$= \frac{\partial F}{\partial t}(a,b,c,\lambda) = 0$$ となる

/ $g(x,y,z)=0$ のもとの $f(x,y,z)$ の極値の候補は

① $g = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$ の解 (a,b,c)

② $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ の解 (a,b,c,λ)

となる。

(例) ゆうパック.

$f(x,y,z)=xyz$, $g(x,y,z)=x+y+z-170$.

$g(x,y,z)=0$ のもとで f の最大値を求めよ.

(解) $\boxed{1}$ $\frac{\partial g}{\partial x}=1$ より $g=\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial z}=0$ の解は存在しない.

$\boxed{2.}$ $F(x,y,z,t)=f(x,y,z)-tg(x,y,z)$ とする

$=xyz-t(x+y+z-170)$.

$\frac{\partial F}{\partial x}=yz-t=0$ --- ①

$\frac{\partial F}{\partial y}=xz-t=0$ --- ②

$\frac{\partial F}{\partial z}=xy-t=0$ -- ③

$\frac{\partial F}{\partial t}=-(x+y+z-170)=0$ -- ④

①と②より $z(x-y)=0$

$z=0$ なら $t=0$, ③ $xy=0$. $x=0$ または $y=0$.

$\therefore$ $(x,y,z,t)=(170,0,0,0)$, $(0,170,0,0)$.

$z\neq 0$ なら $x=y$, 同様に $x(z-y)=0$ をえる.

$x=0$ なら $(x,y,z,t)=(0,0,170,0)$.

$x\neq 0$ なら $x=y=z$, ④より $x=y=z=\frac{170}{3}$

$(x,y,z,t)=\left(\frac{170}{3},\frac{170}{3},\frac{170}{3},\left(\frac{170}{3}\right)^3\right)$

最大値をとる点は

$(x,y,z)=(170,0,0),(0,170,0)$

$(0,0,170),\left(\frac{170}{3},\frac{170}{3},\frac{170}{3}\right)$ のどれか

計算すると

$f(170,0,0)=0$

$f(0,170,0)=0$

$f(0,0,170)=0$

$f\left(\frac{170}{3},\frac{170}{3},\frac{170}{3}\right)=\left(\frac{170}{3}\right)^3$ より

$\left(\frac{170}{3},\frac{170}{3},\frac{170}{3}\right)$ で最大値 $\left(\frac{170}{3}\right)^3$ をとる。

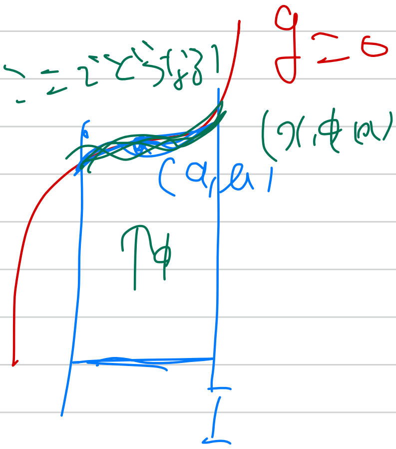
$\boxed{\text{正方形が一番体積が大きい}}$

ラグランジュ未定乗数法の証明(2変数)

(略) (a, b) を $g(x,y)=0$ のもとでの $f(x,y)$ の極値とし、

$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b), \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\right) \neq (0,0)$ とする。

$\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$ としてよい



陰関数定理より

aをふくむ開区間 I と

$\phi: I \to \mathbb{R}$ があって、

① $\phi(a) = b$

② $g(x, \phi(x)) = 0$

③ $\frac{d\phi}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \phi(x))}$

今 $F: I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, \phi(x))$ を考えると

仮定から F は a で極値をもつ。

$\frac{dF}{dx}(a) = 0$.

$$0 = \frac{dF}{dx}(a) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\varphi}{dx}\bigg|_{(x,y)=(a,b)}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}$$

よって、$\lambda = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}$ とおけばよい。