第 13 回. 線積分とグリーンの定理 (川平先生の本, 第 11・29 章の内容)

岩井雅崇, 2021/01/19

1 はじめに

第 13 回と第 14 回はベクトル解析の初歩 (イントロ) に関する授業を行う. 授業準備のために, 以下の文献も参考した.

- 川平友規先生 解析学概論第三第四 (ベクトル解析) available at `http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/17W-kaiseki.html`

時々この文献を引用する.(引用する際は"川平先生の pdf"と呼ぶことにする.)

他にも第 14 回の資料の最後に参考文献を書いておいたので, 必要であれば見てほしい.

2 線積分

定義 1. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とする. $u(x,y), v(x,y)$ を D 上の C^n 級関数として,

$$\begin{array}{cccc} V: & D & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (u(x,y), v(x,y)) \end{array}$$

となる (ベクトル値の) 関数 V をD 上の C^n 級ベクトル場という.

例 2. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $V(x,y) = (-y, x)$ を考えると, これは反時計回りの渦まきの形になっている.

定義 3.

- 関数 $\vec{p}(t)$ を次で定める.

$$\begin{array}{cccc} \vec{p}: & [a,b] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \vec{p}(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$$

  関数 $\vec{p}(t)$ が滑らかな曲線とは次の 2 条件を満たすこと.

  条件 1. $x(t), y(t)$ が C^1 級.

  条件 2. 任意の $c \in (a,b)$ について, 速度ベクトル $\frac{d\vec{p}}{dt}(c) = \left(\frac{dx}{dt}(c), \frac{dy}{dt}(c)\right)$ がゼロベクトル $\vec{0} = (0,0)$ ではない.

- 曲線 $C : \vec{p}(t)(a \leqq t \leqq b)$ が区分的に滑らかな曲線とは滑らかな曲線を端点でつないだもの.

[1]

例 **4.** 円周は滑らかな曲線であり, 長方形の周は区分的に滑らかな曲線である.

定義 5. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし, D 上の C^1 級ベクトル場を $V(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ とする. D 内の滑らかな曲線 $C : \vec{p}(t)(a \leqq t \leqq b)$ について<u>V の曲線 C に沿った線積分</u>を

$$\begin{aligned}\int_C V(\vec{p})d\vec{p} &= \int_a^b \left(V(\vec{p}(t)) \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left(u(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + v(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt \text{ とする.}\end{aligned}$$

この線積分 $\int_C V(\vec{p})d\vec{p}$ を $\int_C udx + vdy$ と書くこともある.

[2]

例 **6.** C^1 級ベクトル場 $V(x,y) = (2x, 2y)$ とし, 滑らかな曲線 $C : \vec{p}(t) = (t, t^2)(0 \leqq t \leqq 1)$ とする. V の C に沿った線積分 $\int_C V(\vec{p})d\vec{p} = \int_C 2xdx + 2ydy$ の値を求めよ.
(解.) $V(\vec{p}(t)) = (2t, 2t^2)$ かつ $\frac{d\vec{p}}{dt} = (1, 2t)$ より,

$$\int_C 2xdx + 2ydy = \int_C \left(V(\vec{p}(t)) \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right) dt = \int_0^1 (2t \cdot 1 + 2t^2 \cdot 2t)dt = \int_0^1 (2t + 4t^3)dt = 2.$$

例 **7** (ハイキングの原理)**.** $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし. $F(x,y) : D \to \mathbb{R}$ を C^1 級関数とする.
<u>勾配ベクトル場を $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$ と定める.</u> D 内の滑らかな曲線 $C : \vec{p}(t)(a \leqq t \leqq b)$ とするとき

$$\int_C \nabla F(\vec{p})d\vec{p} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} \right) dt = \int_a^b \frac{dF}{dt}(\vec{p}(t))dt = F(\vec{p}(b)) - F(\vec{p}(a)).$$

つまり, $\vec{\alpha} = \vec{p}(a)$, $\vec{\beta} = \vec{p}(b)$ とおくと, $\int_C \nabla F(\vec{p})d\vec{p} = F(\vec{\beta}) - F(\vec{\alpha})$ である.

3　グリーンの定理

定義 8. $\mathbb{R}^2$ 内の区分的に滑らかな曲線 $C : \vec{p}(t)(a \leqq t \leqq b)$ が<u>単純閉曲線</u>とは次の二つの条件を満たすこと.

条件 1. 始点と終点が一致する.(つまり $\vec{p}(a) = \vec{p}(b)$.)

条件 2. 自己交差しない.(つまり $a < s < t < b$ なる s, t について $\vec{p}(s) \neq \vec{p}(t)$.)

[1]"曲線 $C : \vec{p}(t)(a \leqq t \leqq b)$ が区分的に滑らかな曲線" という定義を厳密にいうなら,「有限個の $c \in (a,b)$ を除いて, $x(t), y(t)$ が C^1 級であり, 速度ベクトル $\frac{d\vec{p}}{dt}(t) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right)$ がゼロベクトル $\vec{0}$ ではない」.

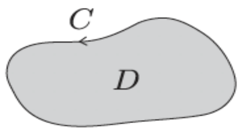
[2]線積分 $\int_C V(\vec{p})d\vec{p}$ を $\int_C udx + vdy$ と書くのは, (向きを込めた場合) この積分がパラメーターの取り方に寄らないからである. 詳しくは川平先生の pdf の命題 4.2 を参照せよ. (連鎖律からすぐに分かるのだが...)

定理 9 (グリーンの定理)**.** $\mathbb{R}^2$ 内の単純閉曲線 $C : \vec{p}(t) = (x(t), y(t))(a \leqq t \leqq b)$ について $D \subset \mathbb{R}^2$ を C で囲まれる有界な閉集合とする. C の進行方向の左側に D があると仮定する. D を含む開集合上で定義された C^1 級ベクトル場 $V(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ について以下が成り立つ.

$$\int_C V(\vec{p})d\vec{p} = \int_C udx + vdy = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\text{特に } \mathrm{Area}(D) = \int_C xdy = \int_C -ydx \text{ が成り立つ.}$$

$D \subset \mathbb{R}^2$ を C で囲まれる有界閉集合および, C の進行方向の左側に D があるとは右の図のようなことが成り立つことである



例 10. $C : \vec{p}(t) = (\cos t, \sin t)(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ とし, $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $V(x, y) = (x^2 - y^2, -2xy)$ とする.
線積分 $\int_C V(\vec{p})d\vec{p} = \int_C (x^2 - y^2)dx - 2xydy$ を求めよ.
(解.) 普通に計算すると,

$$\begin{aligned}\int_C V(\vec{p})d\vec{p} &= \int_0^{2\pi} \left\{(\cos^2 t - \sin^2 t)\frac{dx}{dt} - (2\sin t\cos t)\frac{dy}{dt}\right\} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{-\cos^2 t\sin t + \sin^3 t - 2\sin t\cos^2 t\right\} dt = (\text{計算略}) = 0\end{aligned}$$

グリーンの定理を使う方法は以下のようになる.

C で囲まれた領域 D とすると, D は原点中心の半径 1 の円である. $V(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x^2 - y^2, -2xy)$ は D を含む開集合上で定義された C^1 級ベクトル場である.[3] よってグリーンの定理の仮定を満たす.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(-2xy)}{\partial x} = -2y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = -2y \text{ であるため,}$$

$$\int_C (x^2 - y^2)dx - 2xydy = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (-2y + 2y)\, dxdy = 0.$$

例 11. a, b を正の数として, 楕円 D を下で定める.

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leqq x \leqq a, -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leqq y \leqq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right\}.$$

D の面積 $\mathrm{Area}(D)$ を求めよ.
(解.) 普通に計算すると,

$$\mathrm{Area}(D) = \int_D dxdy = \int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - (-b)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) dx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = (\text{計算略}) = \pi ab.$$

[3] 今回は D を含む開集合として $\mathbb{R}^2$ が取れる.

グリーンの定理を使うと以下の通りになる. $C : \vec{p}(t) = (a\cos t, b\sin t)(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ と置けば, 楕円 D は C で囲まれた領域となる. よってグリーンの定理が使えて, $\frac{dy}{dt} = b\cos t$ のため,

$$\mathrm{Area}(D) = \int_C x dy = \int_0^{2\pi} a\cos t \frac{dy}{dt} dt = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t dt = \pi ab.$$

となる. (どちらが楽かは皆さんに委ねます.)