第9回 可測性と可積分性（川平25章）

(注) この回の内容は難しいので一度で理解しなくてよい（理解できなくても大丈夫!!）

あらすじ

"積分"は難しい!! → 計算だけでいい → 10回へ
→ 理論をしりたい

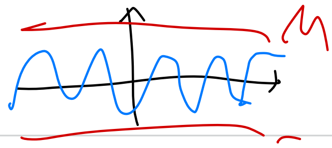
リーマン積分	ルベーグ積分
授業でやる	数学科にいったらやる
積分を定義 ↓ **図形の面積**を定義 ⋮	**集合の面積**を定義 ↓ 積分を定義 ⋮
くせもの	
・古いが一応今でもやる。 ・今回やるのはこっち	・理論的に使いやすい。 （$\lim_{n\to\infty}$ と $\int$ の交換とか） ・リーマン積分を包含するすごい積分。

どちらの積分も計算上で問題がおこることはない。

1-1 リーマン積分の定義

以下 1-1では
$$D=[a,b]\times[c,d]=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a\leq x\leq b \\ c\leq y\leq d \end{array}\right\}$$
fをD上 有界な関数とする。

(ある正の数 $M>0$があって, 任意の$(x,y)\in D$について $|f(x,y)|<M$)

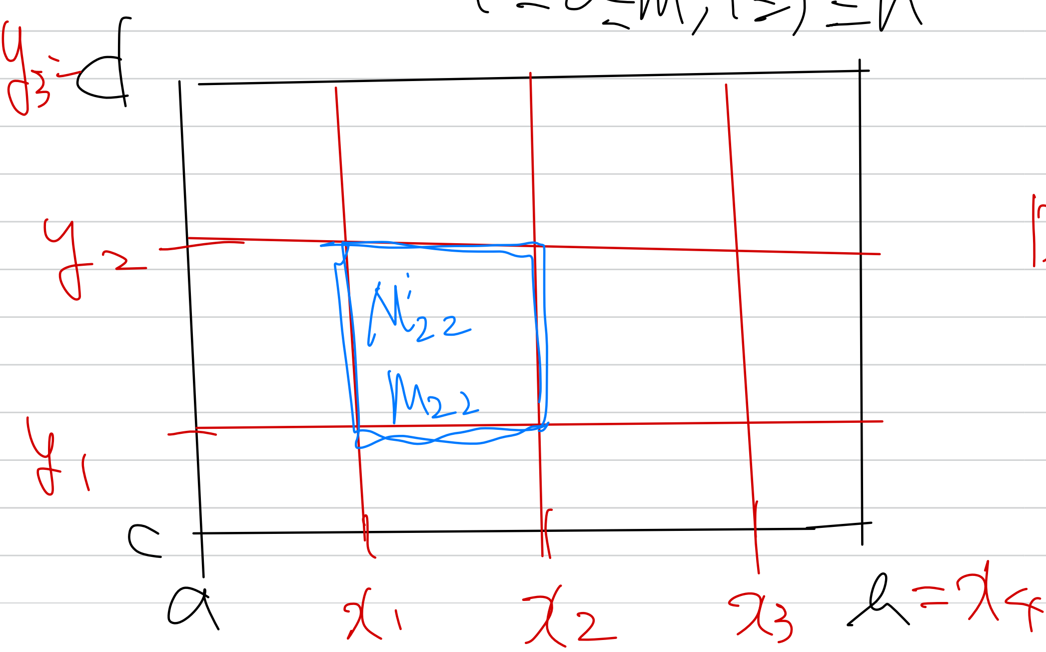


・ΔがDの分割とは, ある自然数 $m>0$, $n>0$と.
$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$$
$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=d$$
となる正の数の組 $(a,x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},b)$, $(c,y_1,\ldots,y_{n-1},d)$ のこと.

$\Delta=\{(a,x_1,\ldots,x_{m-1},b),(c,y_1,\ldots,y_{n-1},d)\}$とかく.

この授業だけの記号.

・Dの分割Δについて、Δの長さを
$$|\Delta|=\max_{1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n}\{|x_i-x_{i-1}|,|y_j-y_{j-1}|\}$$
とする



Dは12こにわかれる

・Dの分割Δと $1\leqq i\leqq m$, $1\leqq j\leqq n$ なる自然数 i, j について.

$$M_{ij} = \boxed{\max}\{f(x,y) \mid x_{i-1}\leqq x\leqq x_i,\ y_{j-1}\leqq y\leqq y_j\}$$

$$m_{ij} = \boxed{\min}\{f(x,y) \mid x_{i-1}\leqq x\leqq x_i,\ y_{j-1}\leqq y\leqq y_j\}$$

(本当はまちがい)

とし、

$$S_\Delta = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$T_\Delta = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$T_\Delta \leqq S_\Delta$$ となる

(定理)(ダルブーの定理)

ある実数 S, T があって

$$\boxed{\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta} = S, \quad \lim_{|\Delta|\to 0} T_\Delta = T$$

$|\Delta|$の長さが0になるように Δの分割を細かくすると

S_Δ は S に限りなく近づく.

(定義) $D=[a,b]\times[c,d]$, fをD上有界な関数とする。
fがD上リーマン積分可能(リーマン可積分)とは、
$S=T$ となること。($\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} T_\Delta$)

このとき $S=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ と表わす。

Sを$f(x,y)$のD上の重積分といい
Dを積分領域, fを被積分関数という

[以下 リーマン積分可能を単に積分可能という]

(例)

① $D=[a,b]\times[c,d]$, f を D 上有界関数とする

f が D 上連続ならば f は D 上積分可能

($M_{ij}-m_{ij}$ を十分小さくできるから (一様連続より))

みなさんがよく知っている関数は積分できる。

② $D=[0,1]\times[0,1]$ とし.

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & x \text{ と } y \text{ はともに有理数}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}.$$

f は D 上リーマン積分可能ではない。

[証] Δ を D の分割とする $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$ とし

$$M_{ij}=\max\{f(x,y)\mid x_{i-1}\leq x\leq x_i,\ y_{j-1}\leq y\leq y_j\}=1$$

$$m_{ij}=\min\{f(x,y)\mid \quad \vdots \quad \}=0$$

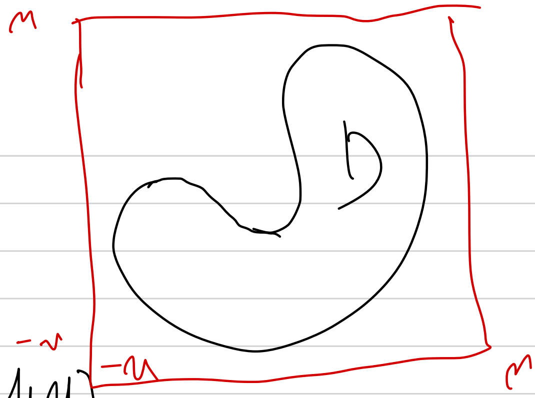
$$S_\Delta=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}M_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})=1$$

$$T_\Delta=0$$

$\therefore$ $S=1$, $T=0$ $S\neq T$ より リーマン積分可能でない。

1-2 一般の集合の積分



(定義)

$D \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とする

ある正の数 $M>0$ を $D \subset [-M,M]\times[-M,M]$ となるようにとり、$\tilde{D} = [-M,M]\times[-M,M]$ とする

$f(x,y)$ を D 上の有界関数として、

f が D 上（リーマン）積分可能とは

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\notin D \end{cases}$$ とおき、

$\tilde{f}$ が $\tilde{D}$ 上積分可能であること。

このとき

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(x,y)\,dxdy$$

と定義する

(定義) $D \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とする

D が面積確定(ジョルダン可測)とは

D 上の定数関数 $f(x,y)=1$ が

D 上(リーマン)積分可能であること.

$$\mathrm{Area}(D) = \iint_D 1\,dxdy = \iint_D dxdy$$ と表わす.

(例1) $D = [a,b] \times [c,d]$ とすると 面積確定で

$$\mathrm{Area}(D) = (b-a)(d-c).$$

(例2) $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ を. $\phi_1(x) \leqq \phi_2(x)$ となる連続関数とする

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b \quad \phi_1(x) \leqq y \leqq \phi_2(x)\}$$

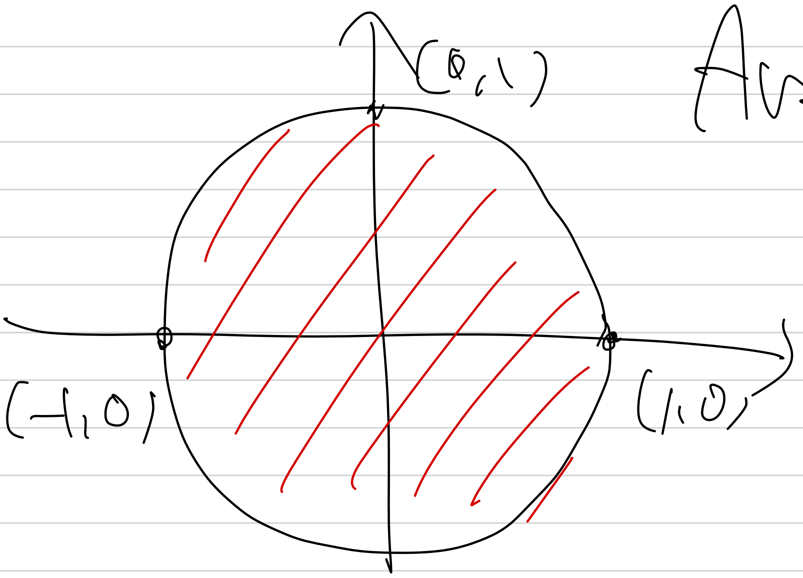
D は面積確定で

$$\mathrm{Area}(D) = \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\}\,dx$$

(詳しくは第10回で)

たとえば

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} -1 \leqq x \leqq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\}$$ とすると



$\mathrm{Area}(D) = \pi$.

例13) $D = \{ (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid x$ と y はともに有理数$\}$

D は面積確定でない

(注) みんながよく知っている図形は面積確定と思ってよい

（定理）

Dを面積確定な有界閉集合とし、fをD上連続な関数とするとき
fはD上積分可能となる

（みんながよく知っている図形上で、みんながよく知っている関数は積分できる）

1-3 重積分の性質

D, D_1, D_2 を面積確定な有界閉集合とし、
$f(x,y), g(x,y)$ を連続関数とする。

① $\mathrm{Area}(D_1 \cap D_2) = 0$ なら

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f\,dxdy = \iint_{D_1} f\,dxdy + \iint_{D_2} f\,dxdy$$

② D 上 $f(x,y) \leqq g(x,y)$ なら

$$\iint_D f\,dxdy \leqq \iint_D g\,dxdy.$$

③ α を実数とするとき

- $$\iint_D \{f+g\}\,dxdy = \iint_D f\,dxdy + \iint_D g\,dxdy$$
- $$\iint_D \alpha f\,dxdy = \alpha \iint_D f\,dxdy.$$

④ ある実数 $M>0$ があって, D 上 $|f(x,y)| \leqq M$ となれば

$$\iint_D f\,dxdy \leqq M\,\mathrm{Area}(D).$$

1-4 数値積分の精度

【定理】 $D=[a,b]\times[c,d]$ とし、
f を D 上の C^1 級関数とする。

$I=\iint_D f\,dxdy$ とする。ある $K_1>0$ があって、

$$\max_{(x,y)\in D}\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|,\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\right\}\leqq K_1 \text{ とする。}$$

このとき、任意の D の分割 Δ について、

$$(S_\Delta-T_\Delta)\leqq 2K_1\,\mathrm{Area}(D)|\Delta|$$
$$=2K_1(b-a)(d-c)|\Delta|$$

とくに分割 Δ_N が N 等分、つまり
$1\leqq i\leqq N$ について $x_i=a+i\left(\frac{b-a}{N}\right)$
$1\leqq j\leqq N$ について $y_j=c+j\left(\frac{d-c}{N}\right)$、
となる分割について、

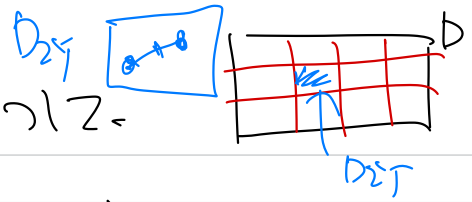
$$\Sigma_N=\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}f(x_i,y_j)\frac{(b-a)(d-c)}{N^2} \text{ とすると、}$$

$$|I-\Sigma_N|\leqq\frac{K(b-a)(d-c)\{b-a+d-c\}}{N}$$

となる

$$\lim_{N\to\infty}\Sigma_N=I \text{ となる（区分求積法）}$$

(証) $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ について



$D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ とする

$(z_1, w_1) \in D_{ij}$ を $M_{ij} = f(z_1, w_1)$ となる点として

$(z_2, w_2) \in D_{ij}$ を $m_{ij} = f(z_2, w_2)$ となる点とする.

平均値の定理から (z_1, w_1) と (z_2, w_2) を結ぶ線分上の点 (z', w') があって

$$(M_{ij} - m_{ij}) = f(z_1, w_1) - f(z_2, w_2)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(z', w')(z_1 - z_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(z', w')\cancel{(z_1 - z_2)}\,(w_1 - w_2)$$

よって

$$(M_{ij} - m_{ij}) \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}(z', w')\right| |z_1 - z_2| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(z', w')\right| \cancel{|z_1 - z_2|}\,|w_1 - w_2|$$

$$\le 2K_1 |\Delta|$$

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (M_{ij} - m_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$\le 2K_1 |\Delta| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$= 2K_1 |\Delta| (b - a)(d - c) \quad //$$

分割がN等分のときは

※から

$$|M_{ij} - m_{ij}| \leq K_1 |z_1 - z_2| + K_1 |w_1 - w_2|$$

$$\leq K_1 \{ |x_i - x_{i-1}| + |y_j - y_{j-1}| \}$$

$$= K_1 \frac{(b-a+d-c)}{N}$$

よって

$$S_\Delta - T_\Delta = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (M_{ij} - m_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$\leq \frac{K_1 \{b-a+d-c\}(b-a)(d-c)}{N}$$

//

例(1) $D=[0,1]\times[0,1]$ $f(x,y)=x^2+y^2$,

$$\iint_D f\,dxdy = \frac{2}{3}$$ (第10回より)

$$\Sigma_N = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{f(\frac{i}{N},\frac{j}{N})}{N^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{i^2+j^2}{N^4}.$$

$$K_1 = \max_{(x,y)\in D}(|2x|,|2y|) = 2.$$

$$2\underbrace{K_1}_{2}\underbrace{\mathrm{Area}(D)}_{1}\underbrace{|\Delta|}_{\frac{1}{N}} = \frac{4}{N}$$

$$\frac{K_1\,\mathrm{Area}(D)\{b-a+d-c\}}{N} = \frac{4}{N}$$

よって $\left|\frac{2}{3}-\Sigma_N\right| \leq \frac{4}{N}$

(プログラミング例を資料のように
つけておきます)