第 7 回. 陰関数定理と逆関数定理 (川平先生の本, 第 24 章の内容)

岩井雅崇, 2020/11/24

1 陰関数定理

定理 1. $f(x,y)$ を C^1 級関数とし, 点 (a,b) で $f(a,b)=0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ とする.
この時 a を含む開区間 I と I 上の C^1 級関数 $\phi : I \to \mathbb{R}$ があって次の 3 つを満たす.

1. $b = \phi(a)$.
2. 任意の $x \in I$ について, $f(x, \phi(x)) = 0$.
3. $\frac{d\phi}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))}$. 特に $\frac{d\phi}{dx}(a) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}$.

   $f(x,\phi(x)) = 0$ となる関数 $y = \phi(x)$ を$\underline{f(x,y)=0\text{ の陰関数}}$という.

この定理によって, 陰関数が分からなくとも $\frac{d\phi}{dx}(a)$ が計算できる.

例 **2.** $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 - 1$ とする. 曲線 $f(x,y)=0$ の $(1,0)$ での接線の方程式を求めよ.
(解.)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 3y^2 \text{ である.}$$

よって $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \neq 0$ より, 陰関数 $\phi : I \to \mathbb{R}$ があって,

$$\phi(1) = 0, f(x,\phi(x)) = 0, \frac{d\phi}{dx}(1) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)} = 1.$$

よって $y = \phi(x)$ の $(1,0)$ での接線の方程式は

$$y = \frac{d\phi}{dx}(1)(x-1) = x - 1 \quad \text{である.}$$

2 逆関数定理

定理 3. Φ を領域 D 上の C^1 級変数変換とし $D\Phi$ を Φ のヤコビ行列とする.
$(a,b) \in D$ で $\det(D\Phi(a,b)) \neq 0$ ならば, (a,b) を含む小さな円板上で Φ は逆変換 Φ^{-1} をもち $D\Phi^{-1} = (D\Phi)^{-1}$ となる.

逆関数定理から陰関数定理が導かれる.