第2回 多変数関数の微分

(川平 第17・18章)

(あらすじ) 1変数の微分を多変数に拡張!

全微分　　関係ある　　偏微分

まったくの別物

(定義) 全微分.

・関数 $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能とは
ある定数 A, B が存在し、

$$E(x,y) = f(x,y) - \{f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)\}$$

(分野特有の記号)

とおくとき、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|E(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

となること

・$f(x,y)$ が領域 D 上のすべての点で
全微分可能であるとき
$f(x,y)$ は D 上全微分可能であるという.

・上の状況下において,
$z = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)$ とおくとき
これを $f(x,y)$ の (a,b) での接平面の方程式といい

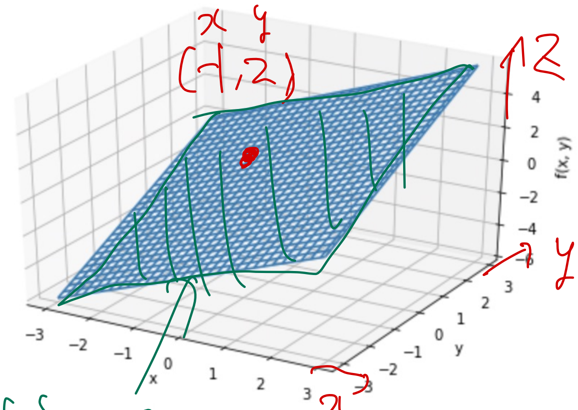
この3次元グラフを接平面という.

例(1) ① $f(x,y)=x+y$. 点$(-1,2)$で全微分可能.

(証) $A=1,\ B=1$ とする.

$$E(x,y)=(x+y)-\{(-1+2)+1(x+1)+1(y-2)\}$$
$$=0.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|E(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

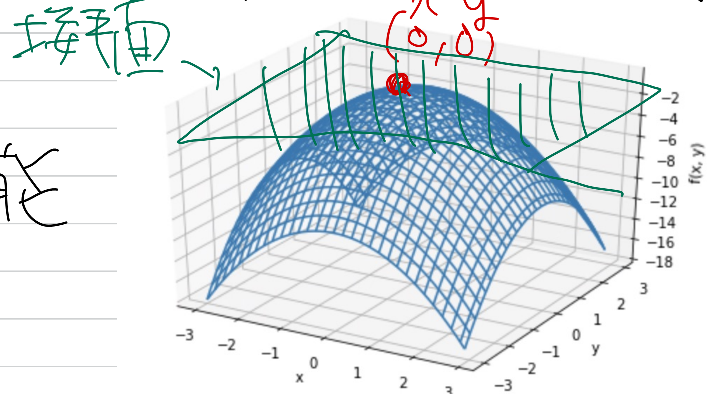


接平面 $z=x+y$ のグラフ

接平面の方程式 $z=1+1(x-(-1))+1(y-2)=x+y$

② $f(x,y)=-x^2-y^2$.

点$(0,0)$で全微分可能



(証) $A=0,\ B=0$ とする

$z=-x^2-y^2$のグラフ.

$$E(x,y)=-x^2-y^2-\{0+0(x-0)+0(y-0)\}$$
$$=-x^2-y^2.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|E(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0$$

接平面の方程式 $z=0+0(x-0)+0(y-0)=0$

"全微分可能とは接平面で近似できる
ということ"

(疑問) どのようにして A, B を取ってきたの?
⇝ "偏微分" をもちいる.

(定義) 偏微分

- 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で偏微分可能とは 2つの極限

$$A = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}, \quad B = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b}$$

が存在すること.

このとき A, B を $f(x,y)$ の (a,b) での偏微分係数といい

∂ $$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$ とかく

- f を領域 D 上の関数として, D 上全ての点で f が偏微分可能であるとき
f は D 上偏微分可能であるという.

- $$\frac{\partial f}{\partial x} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

を $f(x,y)$ の偏導関数.

(注, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ を $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)}$ とかくこともある)

(例1) ① $f(x,y) = x^2y^3$ 点(a,b)を固定

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{x^2b^3 - a^2b^3}{x-a} = 2ab^3$$

($\frac{\partial f}{\partial x}$の)

つまり偏微分のやり方は "yを定数だと思って" "$x \longmapsto x^2y^3$" をxにかんして微分する。

偏導関数
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2.$$

(例2) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2-y^2)}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}$$
$$= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

(例3) $f(x,y) = x^2+y^2$

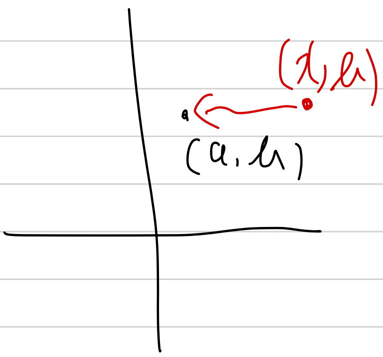
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

【定理】全微分可能ならば偏微分可能

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であるとき、
$A=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ かつ $B=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ となる。
（特に偏微分可能）

（証）点(a,b)で全微分可能から、あるA, Bがあって、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left|\frac{f(x,y)-\{f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)\}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\right|=0$$



今 $(x,b)\to(a,b)$ となる極限を考えると、

$$\lim_{(x,b)\to(a,b)}\left|\frac{f(x,b)-f(a,b)-A(x-a)}{|x-a|}\right|=0$$

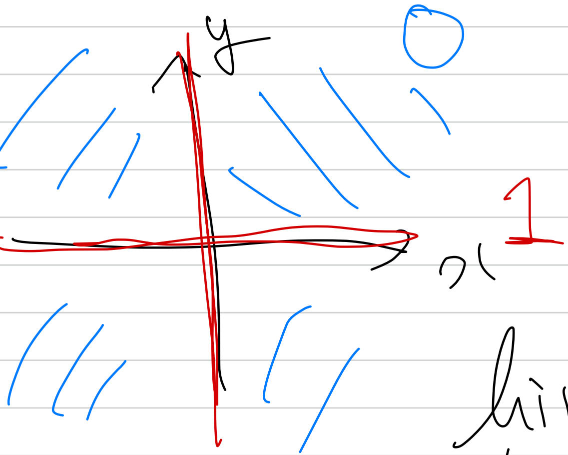
$$\therefore \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}-A\right|=0$$

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=A$$

偏微分可能

(例1) 偏微分可能であるが全微分可能でない例.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \text{ かつ } y \neq 0 \\ 1 & x = 0 \text{ かつ } y = 0 \end{cases}$$



$(0,0)$ では f は偏微分可能.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1-1}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

でも $(0,0)$ で全微分可能ではない

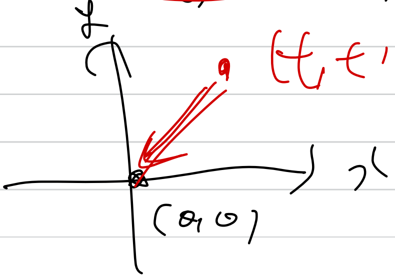
(背理法) もし全微分可能なら $A = B = 0$ かつ

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|f(x,y) - \{f(0,0) + A(x-0) + B(y-0)\}|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

よって

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|f(x,y) - 1|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\therefore \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 1.$$



今 $(x,y) = (t,t)$ として $t \to 0$ の極限を考えると

$$\lim_{(t,t) \to (0,0)} f(t,t) = 0 \neq 1$$

(定義) C^1 級

f を領域 D 上の関数とする
f が D 上すべての点で偏微分可能であり
偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が D 上連続であるとき
f を C^1 級という

(例) x^2y^3, $\sin(x^2+y^2)$, $e^{x^2+y^2}$ etc...
だいたい目にする関数は C^1 級
(この授業で扱っている関数はきわめて特殊)

[定理] f が領域 D 上 C^1 級ならば
D 上全微分可能
とくに 点 $(a,b) \in D$ において
$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ とおけば

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|E(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$ となる

(例1) $f(x,y) = x+y$ C^1 級 $(a,b) = (1,2)$
$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 1$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 1$

(例2) $f(x,y) = -x^2-y^2$ C^1 級 $(a,b) = (0,0)$
$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,

[定理の証明] $(a,b)\in D$ を固定し，
$B_{(a,b)}(r)\subset D$ となる正の数 $r>0$ をとる：
$A=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $B=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ とし，

$$E(x,y)=\underbrace{f(x,y)-f(x,b)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}_{E_1\text{とおく}}$$
$$+\underbrace{f(x,b)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)}_{E_2\text{とおく}} \text{ とおく．}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{|E_1(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{|E_2(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$ を示す

① 平均値の定理より (C¹級だから) ある θ があって $(b\leqq\theta\leqq y)$ $(x,\theta)\in B_{(a,b)}(r)$ かつ

$$f(x,y)-f(x,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\theta)(y-b) \text{ となる．}$$

よって
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{|E_1(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=\lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|\frac{(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\right|_{\leqq 1}$$
$$\cdot\lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\theta)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|$$
(連続性)。(C¹級)
$$=0 \quad //$$

② も同様．

((注) 全微分可能でC¹級でない例がある)

(定理) 全微分可能ならば連続である

(証) f が (a,b) で全微分可能とすると

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) - f(a,b)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(a,b)} \underline{E(x,y)} + \underline{A(x-a)} + \underline{B(y-b)} = 0$$

まとめ C^1級 $\underset{\text{ならば}}{\Longrightarrow}$ 全微分可能 $\Rightarrow$ 連続

$\Downarrow$

偏微分可能