第4回 ヤコビ行列, 微分演算子 ラプラシアン

(川平 20, 22章)

(定義) C^1級 変数変換

$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ について.

Φの ヤコビ行列を

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

とする.

(例1) a, b, c, d 定数とし.

$\Phi(u,v) = (au+bv, cu+dv)$ とする.

$$D\Phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

となる

(例2) $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

なぜこれを定義するのか? 〜〜> わかりやすくなるから.

[定義]

・C^1級変数変換

$(x,y)=\Phi(u,v)$, $(z,w)=\Psi(x,y)$ について

合成変換 $(u,v)\overset{\Phi}{\mapsto}(x,y)\xrightarrow{\Psi}(z,w)$ とし.

$$(z,w)=\Psi\circ\Phi(u,v)=\Psi(x(u,v),y(u,v))$$ とする.

・とくに $(x,y)=\Phi(u,v)$ が <u>1対1 であるとき</u>

($\Phi(u_1,v_1)=\Phi(u_2,v_2)$ ならば $(u_1,v_1)=(u_2,v_2)$)

ある C^1級変数変換 $(u,v)=\Omega(x,y)$ があって,

$$\Omega\circ\Phi(u,v)=(u,v)$$ となる.

この Ω を Φ^{-1} とかき Φ の逆変換という.

(例1) $\Phi(u,v)=(u+v,\ u-v)$

$\Psi(x,y)=(-x,\ y)$

$\Psi\circ\Phi(u,v)=\Psi(u+v,\ u-v)$

$=(-u-v,\ u-v)$.

また $\Phi^{-1}(x,y)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y,\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$となり

$\Phi^{-1}\circ\Phi(u,v)=\Phi^{-1}(u+v,\ u-v)$

$=\left(\frac{1}{2}(u+v)+\frac{1}{2}(u-v),\ \frac{1}{2}(u+v)-\frac{1}{2}(u-v)\right)$

$=(u,\ v)$

(定理)

C^1級変数変換

$(x,y)=\Phi(u,v)$, $(z,w)=\Psi(x,y)$について

合成変換 $(z,w)=\Psi\circ\Phi(u,v)$ とするとき

$$D(\Psi\circ\Phi)=(D\Psi)(D\Phi)$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$ となる.

特に Φの逆関数が存在するとき.

$\det D\Phi\neq 0$ ならば

$$D(\Phi^{-1})=(D\Phi)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1}$$ となる

(注) chain ruleに同じ.

例11　極座標変換 ($(x,y)=\Phi(r,\theta)$)

$(x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおく。

(Φ^{-1}が存在する領域をこうぶ)

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det D\Phi = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

よって $r \neq 0$ ならば

$$D(\Phi^{-1}) = (D\Phi)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$(r,\theta) = \Phi^{-1}(x,y)$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \frac{-\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Φ^{-1} をかくのはむずかしいが

$D\Phi^{-1}$ を r,θ で表すのはかんたん!!

「応用」 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 　 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

これらをfの2階偏導関数という。

同様に $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$

これらをfの3階偏導関数という。

n階も同様。

- 関数 $f(x,y)$ が C^n 級 $(n=1,2,3,\cdots)$ と
  fのn階偏導関数が存在し、連続であること

- $f(x,y)$ が C^∞ 級とは すべての $n=1,2,3,\cdots$
  についてfが C^n 級となること。

(例1) $\begin{cases} \cdot\ C^n \text{級ならば } C^{n-1} \text{級} \\ \cdot\ C^n \text{級ならば連続} \\ \cdot\ C^\infty \text{級ならば } C^n \text{級} \end{cases}$

・みなさんがよく知っている関数は C^∞ 級
$(x^2+1, \sin x, \cos x, e^x, \log x, \frac{1}{x} \cdots)$

(例2) $f(x,y) = x^2y^3$ C^∞ 級。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = 6y^2 = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} = 6y^2}$$

(定理) $f(x,y)$ が C^2 級ならば

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

とくに C^∞ 級関数 $f(x,y)$ について

自由に偏微分の順序交換ができる。

(証明は次回)

(定義) 微分演算子 (このゼミ資料のみの定義)

・mを自然数として、

$$D = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{m-j} a_{ij}(x,y) \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial^j}{\partial y^j}\right)$$

($a_{ij}(x,y)$は関数)

このように書ける作用素を微分演算子という。

・DはC^∞級関数$f(x,y)$に次のように作用する

$$Df = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{m-j} a_{ij}(x,y) \left(\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}\right)$$

(例1) $\frac{\partial}{\partial x}$, $x\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ などは

〃偏微分演算子.

・$D_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $D_2=x\frac{\partial}{\partial x}$ とする.

f: C^∞級関数とすると

$$D_1D_2f=D_1(D_2f)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f.$$

$$D_2D_1f=D_2(D_1f)$$
$$=x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f.$$

$\therefore$ $D_1D_2=\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$D_2D_1=x\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$D_1D_2\neq D_2D_1$ (非可換)

定義 ラプラシアン

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

とかける微分演算子をラプラシアンという

(余談) 見かける

ラプラス方程式 $\Delta f = 0$

ポアソン方程式 $\Delta f = \varphi$.

- 極座標ラプラシアン -

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ という変換を考える

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

(準備) f を C^∞ 級関数とし

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\boxed{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}}$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)f, \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)f\right)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\boxed{\cos\theta \frac{\partial}{\partial r}} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

$$= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\right) - \cos\theta \boxed{\frac{\partial}{\partial r}}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

$$- \frac{\sin\theta}{r}\boxed{\frac{\partial}{\partial \theta}}\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

$$= \cos^2\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}$$

$$+ \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r}$$

$$+ \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\sin\theta}{r}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$= \cos^2\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$- \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

$$= \sin^2\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$+ \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

//