第10回 累次積分 (川平26章)

<u>あらすじ</u> 前回の授業では

$\iint_D f\,dxdy$ を定義した.

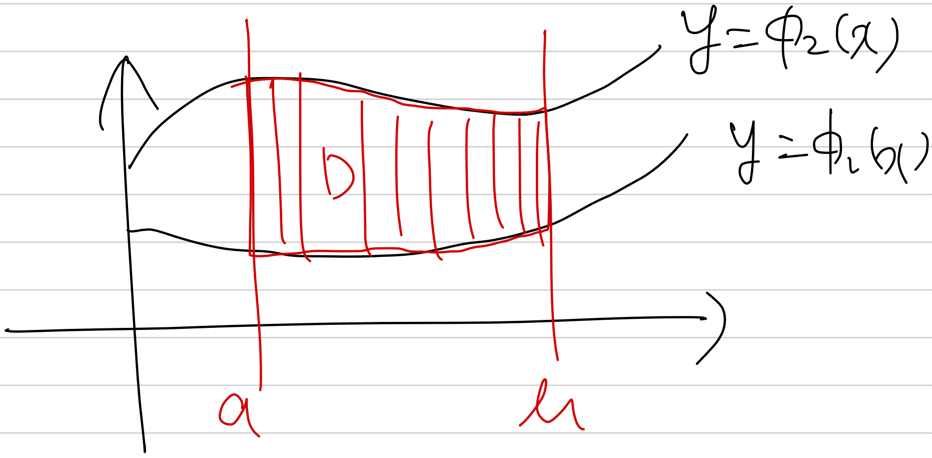
→ 計算ができない...

これを計算できるテクニックが累次積分!!

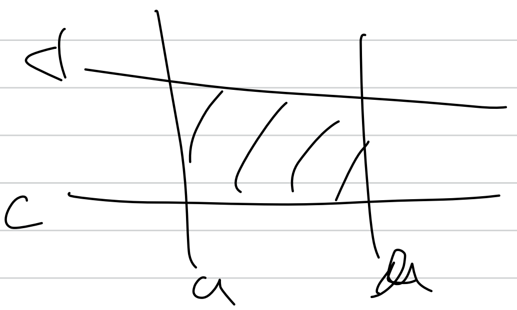
(定義) ϕ_1, ϕ_2 を $[a, b]$ 上の連続関数で
$\phi_1(x) \leqq \phi_2(x)$ とする。

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b,\ \phi_1(x) \leqq y \leqq \phi_2(x)\}$$

で表わされる集合を縦線領域という

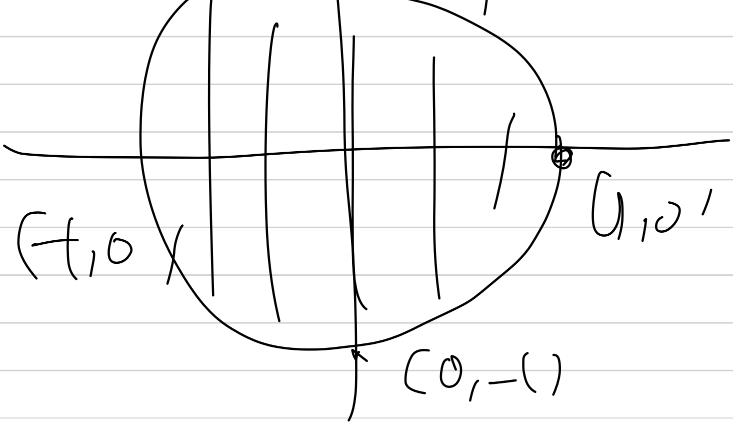


(例1) $c < d$ なる定数について、$\phi_1(x) = c$, $\phi_2(x) = d$ とおく



$$D = [a, b] \times [c, d]$$

(例2) $a = -1$, $b = 1$, $\phi_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $\phi_2(x) = \sqrt{1-x^2}$



Dは半径1の円.

定理
縦線領域 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqq x\leqq b,\ \phi_1(x)\leqq y\leqq \phi_2(x)\}$
とし、$f(x,y)$を D上の連続関数とする。
このとき $f(x,y)$は D上 積分可能で、

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$$

これを $f(x,y)$の累次積分という

とくに Dは 面積確定で、

$$\mathrm{Area}(D) = \iint_D 1\,dxdy = \int_a^b \{\phi_2(x)-\phi_1(x)\}\,dx$$

(証明はのちほど)

(例1) $D=\{(x,y) \mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$

$f(x,y) = x^2+y^2$.

$\iint_D f\,dxdy$ を求めよ.

(解) $\varphi_1(x)=0$, $\varphi_2(x)=1$ とすれば

定理より

$$\iint_D f\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2+y^2\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 x^2+\frac{1}{3}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

//

(例12) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqq x\leqq 1, \frac{x}{2}\leqq y\leqq x\}$ とおき

$f(x,y)=3xy^2$ とし、

$\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を求めよ。

(解) $\phi_1(x)=\frac{x}{2}$, $\phi_2(x)=x$ とすると定理から

$$\iint_D f\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} 3xy^2\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy^3\right]_{\frac{x}{2}}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 x^4 - x\left(\frac{x}{2}\right)^3 dx$$

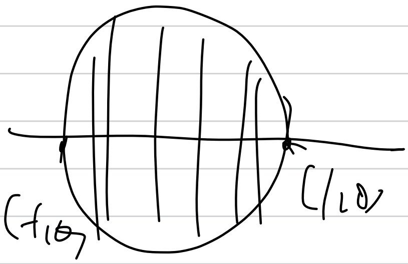
$$= \int_0^1 x^4 - \frac{x^4}{8}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{7}{8}x^4\,dx$$

$$= \left[\frac{7}{40}x^5\right]_0^1 = \frac{7}{40} \quad //$$

例13) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leqq x\leqq 1, -\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2}\}$

$\mathrm{Area}(D)=\iint_D dxdy$ をもとめよ。



解) $\iint_D dxdy = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}-\left(-\sqrt{1-x^2}\right)dx$

$x=\cos t$

$\frac{dx}{dt}=-\sin t$

$= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$

$= 2\int_{\pi}^{0}-(\sin t)^2dt$

$= \int_0^{\pi} 2(\sin t)^2dt$

$= \int_0^{\pi}(1-\cos 2t)dt$

$= \left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$

半径1の円の面積はπ

例11(4) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\}$.

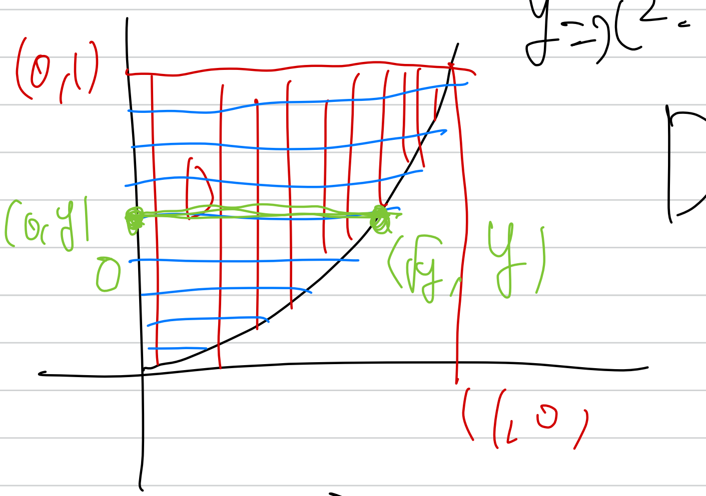
$f(x,y) = xe^{-y^2}$ として、

$\iint_D f\,dxdy$ を求めよ

(解) $\iint_D f\,dxdy = \int_0^1 \boxed{\left(\int_{x^2}^1 xe^{-y^2}\,dy \right)} dx$

e^{-y^2} の不定積分がわからず 手づまり

D



$D = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{y} \end{array} \right\}$

に注意すると

$$\iint xe^{-y^2}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} xe^{-y^2}\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} e^{-y^2} \right]_0^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{2} e^{-y^2}\,dy$$

$$= \left[\frac{-e^{-y^2}}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

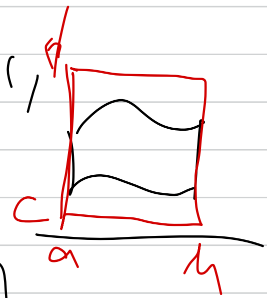
(定理の証明) 興味なければとばしてよい

$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$は$[a,b]$上連続, $[a,b]$上リーマン積分可

Dは面積確定

fはD上連続, Dは有界閉集合より,

fはD上積分可能



今 $c<d$ なる定数で $D\subset[a,b]\times[c,d]$

となるようにとり $\tilde{D}=[a,b]\times[c,d]$ とする

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in\tilde{D} \\ 0 & (x,y)\notin\tilde{D}\end{cases}$$

$\iint_D f\,dxdy = \iint_{\tilde{D}}\tilde{f}\,dxdy$ であり

$\tilde{f}$は$\tilde{D}$上積分可能

Dの分割 $\Delta=\{(a,x_1,\dots,x_{m-1},b),(c,y_1,\dots,y_{n-1},d)\}$ とする.

$1\le i\le m$, $1\le j\le n$について, $D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ とする.

$M_{ij}=\max\limits_{(x,y)\in D_{ij}}\tilde{f}(x,y)$, $m_{ij}=\min\limits_{(x,y)\in D_{ij}}\tilde{f}(x,y)$ とする

$x \in [x_{i-1}, x_i]$を固定する。

すると任意の $y \in [y_{j-1}, y_j]$ について、$m_{ij} \leqq \tilde{f}(x,y) \leqq M_{ij}$。

よって $\tilde{f}(x,y)$ が $[y_{j-1}, y_j]$ 上積分可能より

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} m_{ij} \leqq \int_{y_{j-1}}^{y_j} \tilde{f}(x,y)\,dy \leqq M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

$$\therefore \quad m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leqq \int_{y_{j-1}}^{y_j} \tilde{f}(x,y)\,dy \leqq M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

$j=1 \sim n$ までたして、(☆)

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leqq \int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

ここで $F(x) = \displaystyle\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy$ とする。

$F(x)$ の $[a,b]$ 上での積分を考える

$1 \leqq i \leqq m$ について、$M_i = \displaystyle\max_{x_{i-1} \leqq x \leqq x_i} F(x)$

$m_i = \displaystyle\min_{x_{i-1} \leqq x \leqq x_i} F(x)$ とする。

☆の不等式から

前回の記号

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = T_\Delta$$

$$\leq \boxed{\sum_{i=1}^{m} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{m} M_i(x_i - x_{i-1})}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = S_\Delta$$

$|\Delta| \to 0$ の極限を考えると

$$\lim_{|\Delta|\to 0} T_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}\,dxdy$$

よってはさみうちの原理より

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{m} m_i(x_i - x_{i-1}) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{m} M_i(x_i - x_{i-1})$$

(定義)

$$= \int_a^b F(x)dx$$

$$\therefore \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}\,dxdy = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f dy\right)dx$$

$$\iint_{\tilde{D}} \tilde{f}\,dxdy = \iint_D f\,dxdy.$$

//