

第12回 広義積分, ガンマ関数.

12

(11年12, 27章)

あと!! かなりたいてはガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

この正しさ

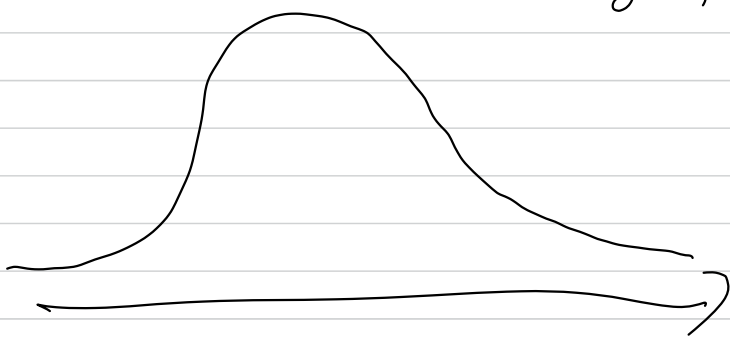
$$= \sqrt{\pi}$$

これを求める

なぜこれが重要

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ 標準正态分布}$$

$y=f(x)$ (fは1次元の確率分布)
これにしたがう



$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \right)$$

(定義) 広義積分

$f(x)$ を $[a, b)$ 上の連続関数とする ($b = +\infty$ も可)

左極限 $\lim_{z \rightarrow b-0} \int_a^z f(x) dx$ が存在すると

広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ は収束するといふ。

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{z \rightarrow b-0} \int_a^z f(x) dx \quad \text{と定める。}$$

左極限が存在しないときは

$\int_a^b f(x) dx$ は発散するといふ。

この積分を 広義積分 といふ。

(例1) p は実数とする.

正無限積分 $\int_1^{\infty} x^p dx$ が収束するかどうかを調べる.

$$p+1 = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{1}{z^2} \rightarrow 0 \quad z \rightarrow \infty$$

$$-1/3, 1, \dots \rightarrow 0$$

$$z^0 = 1 \rightarrow 0$$

(解) $p \neq -1$ のとき, $1 < z < \infty$.

$$\int_1^z x^p dx = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} \right]_1^z$$

$$= \frac{1}{p+1} (z^{p+1} - 1)$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow \infty} \int_1^z x^p dx = \frac{1}{p+1} \left(\lim_{z \rightarrow \infty} z^{p+1} - 1 \right)$$

$p+1 \leq 0$ のときは収束する, $\therefore p < -1$ のときは収束

$p+1 > 0$ のときは発散する $\therefore p > -1$ のときは発散
(収束しない)

• $p = -1$ のとき

$$\int_1^z x^{-1} dx = [\log x]_1^z = \log z - 1$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow \infty} \int_1^z x^{-1} dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \log z - 1 = \infty$$

発散する

(例12) 収束条件 (1). $\int_0^1 x^p dx$ が 1/2 収束する条件 (12).

(12) $p \neq -1$ のとき $0 < z < 1$ とする.

$$p+1=2 \cdot z^2 \rightarrow 0 \quad z \rightarrow 0$$

$$\int_z^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} (1 - z^{p+1})$$

$$-1/5, 1, \quad p+1=0 \quad 1 \rightarrow \infty \quad z \rightarrow 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 0+0} \int_z^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} (1 - \lim_{z \rightarrow 0+0} z^{p+1})$$

$p+1 \geq 0$ のときは収束, よって $p > -1$ のときは収束
 $p+1 < 0$ のときは発散, よって $p < -1$ のときは発散

$p = -1$ のとき

$$\int_z^1 x^{-1} dx = [\log x]_z^1 = -\log z$$

$$\text{よって } \lim_{z \rightarrow 0+0} \int_z^1 x^{-1} dx = \lim_{z \rightarrow 0+0} (-\log z) \quad \text{発散}$$

[定理] $a > 0$ とする

① $\int_a^\infty x^p dx$ は $p < -1$ のときは収束, $p \geq -1$ のときは発散

② $\int_0^a x^p dx$ は $p > -1$ のときは収束, $p \leq -1$ のときは発散

(定理) $f(x)$ を $[a, b)$ 上連続関数とする

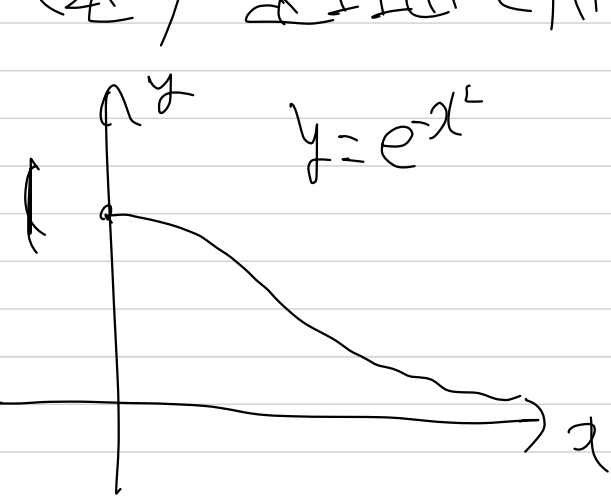
① $b = +\infty$ とする. ある $\lambda > 1$ があて $f(x)x^\lambda$ が $[a, +\infty)$ 上有界ならば
広義積分 $\int_a^\infty f(x) dx$ は収束する.

② b を実数とする. ある $\mu < 1$ があて $f(x)(x-b)^\mu$ が $[a, b)$ 上有界ならば
広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ は収束する.

$[a, b)$ 上の関数 $f(x)$ が有界とは.
ある正の数 $M > 0$ があて, 任意の $x \in [a, b)$ には
 $|f(x)| < M$ となること

(例) 広義積分 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ が収束することを示す.

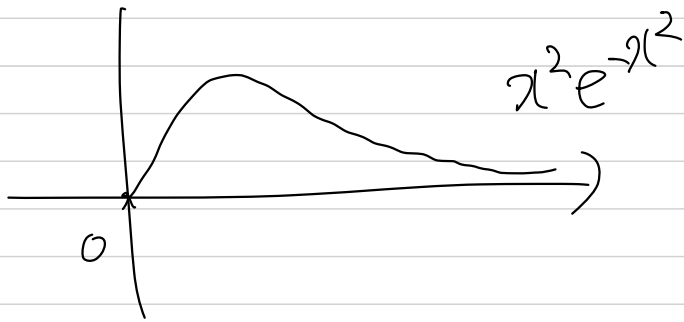
(証) 定理①を用いる.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} x^2 = 0 \quad \text{よ、}$$

$e^{-x^2} x^2$ は $[0, \infty)$ 上有界

($e^{-x^2} x^2$ は $[0, \infty)$ 上連続)



定理① より ($\lambda = 2 > 1$)
収束する.

(例12) $S > 0$ について

$\Gamma(S) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{S-1} dx$ である (ガンマ関数)
 $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{S-1}$ が収束することを示す。

(証明) $\Gamma(S) = \int_1^{\infty} e^{-x} x^{S-1} dx + \int_0^1 e^{-x} x^{S-1} dx$.

① と ② が収束を示す

① $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} x^{S-1}) \cdot x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^{S+1} = 0$

よって $(e^{-x} x^{S-1}) \cdot x^2$ は $[1, \infty)$ 上有界. ($S=2 > 1$)
定理① より収束する。

② $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x} x^{S-1}) \cdot x^{1-S} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$
 $\mu = 1-S < 1$

よって $(e^{-x} x^{S-1}) \cdot x^{1-S}$ は $(0, 1]$ 上有界

よって定理② より収束する

(1513) $p > 0, q > 0$ に対して

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (\text{1' の問題})$$

$B(p, q)$ が 4 収束する ことを示せ.

$$(25) B(p, q) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^p (1-x)^{q-1} dx$$

① と ② が 4 収束する ことを示す

①

②

$$\text{①} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^{p-1} (1-x)^{q-1}) \cdot x^{1-p} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{q-1} = 1$$

$$\mu = 1-p < 1$$

定理 ② より 4 収束.

$$\text{②} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^{p-1} (1-x)^{q-1}) (1-x)^{1-q} = \lim_{x \rightarrow 1} x^p = 1$$

$$\mu = 1-q < 1$$

定理 ② より 4 収束.

定理の証明(根拠略)

① 有限性より、ある正の数 $M > 0$ があって、
任意の $x \in [a, \infty)$ に対して $|f(x)x^{\lambda}| < M$ となる。

よって $a < p < q < \infty$ となる p, q に対して

$$\begin{aligned} \left| \int_p^q f(x) dx \right| &\leq \int_p^q |f(x)| dx \\ &< M \int_p^q x^{-\lambda} dx \end{aligned}$$

— $\lambda < -1$ より $\int_a^{\infty} x^{-\lambda} dx$ は収束する。

よって p を十分大きくすると $\int_p^{\infty} x^{-\lambda} dx$ はいくらでも小さくなる。

p を十分大きくすると $\left| \int_p^q f(x) dx \right|$ は
いくらでも小さくなる。

$\int_a^{\infty} f(x) dx$ は収束する

一致収束性

② も同じ

応用から積分)

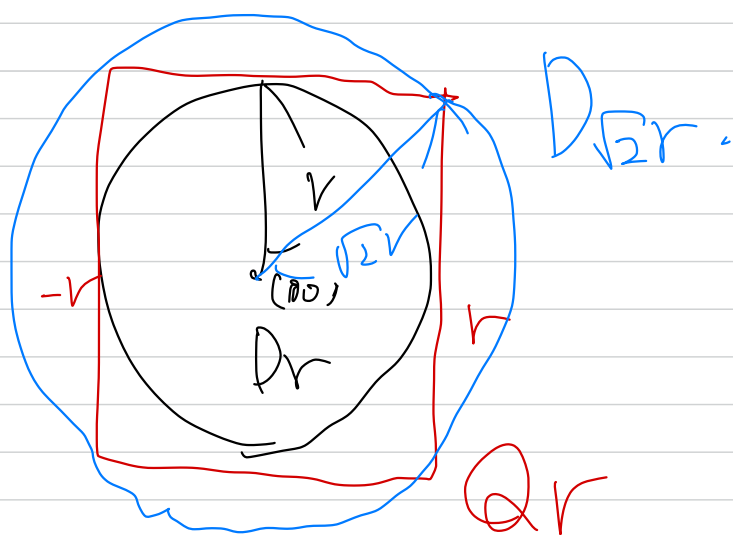
定理 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(証明) r 正の数とし

$$D_r = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq r\}$$

$$Q_r = [-r, r] \times [-r, r] \text{ とする}$$

$$D_r \subset Q_r \subset D_{\sqrt{2}r}$$



$r > 0$

$$\iint_{D_r} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{Q_r} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{D_{\sqrt{2}r}} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

~~証明~~

$\iint_{D_r} e^{-x^2-y^2} dx dy$ は 極座標変換

$$E_r = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \quad \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_r} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{E_r} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r e^{-r^2} r dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^r d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - e^{-r^2}) d\theta \\ &= \pi (1 - e^{-r^2}) \end{aligned}$$

1/2 2π $I_r = \int_{-r}^r e^{-x^2} dx$ に対して

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_r = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (\text{値が存在する})$$

$$\begin{aligned} \iint_{Q_r} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-r}^r \left(\int_{-r}^r e^{-x^2-y^2} dy \right) dx \\ &= \int_{-r}^r e^{-x^2} \left(\int_{-r}^r e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \int_{-r}^r I_r e^{-x^2} dx = I_r^2 \end{aligned}$$

★1b}

$$\pi(1 - e^{-r^2}) \leq I_r^2 \leq \pi(1 - e^{-2r^2})$$

$r \rightarrow \infty$ とする

$$\pi \leq \lim_{r \rightarrow \infty} I_r^2 \leq \pi.$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} I_r = \sqrt{\pi}$$

4

ガンマ関数・ベータ関数.

(定義)

• $S > 0$ に対して $\Gamma(S) = \int_0^\infty e^{-x} x^{S-1} dx$ とする
これをガンマ関数という

• $p > 0, q > 0$ に対して $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ とする
これをベータ関数という

(公式) ① $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(1) = 1$
 s 是自然数 $\Gamma(n+1) = n!$

② $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
 s 是自然数 $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$

($(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\dots \cdot 3 \cdot 1$) $5!! = 5 \times 3 \times 1 = 15$
 $6!! = 6 \times 4 \times 2 = 48$

③ $B(p, q) = B(q, p)$

④ $B(p, q) = B(p+1, q) + B(p, q+1)$

$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q)$

$B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q)$

⑤ $B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2p-1} (\sin t)^{2q-1} dt$

⑥ $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

⑦ $B(1, 1) = 1$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$

l, m 是自然数

$B(l, m) = \frac{(l-1)! (m-1)!}{(l+m-1)!}$

(3.7)

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \Gamma(s+1) &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^{(s+1)-1} dx \\
 &= \int_0^{\infty} (-e^{-x})' x^{(s+1)-1} dx \\
 &= [-e^{-x} x^{(s+1)-1}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \\
 (s > 0) \quad &= s \Gamma(s)
 \end{aligned}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 1$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{-1} \cdot 2t dt. & x = t^2, \quad \frac{dx}{dt} = 2t dt \\
 &= 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) &= \Gamma\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) + 1\right) \\
 &= \frac{2n-1}{2} \cdot \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx & x=1-t \\
 &= \int_1^0 (1-t)^{p-1} t^{q-1} (-dt) & \frac{dx}{dt} = -1 \\
 &= \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt = B(q, p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad x^{p-1} (1-x)^q &= x^{p-1} (1-x)^{q-1} (1-x) \\
 &= x^{p-1} (1-x)^{q-1} - x^p (1-x)^{q-1}
 \end{aligned}$$

$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx$

$$B(p, q+1) = B(p, q) - B(p+1, q)$$

故 $B(p+1, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1} dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 x^p \left(-\frac{1}{q} (1-x)^q \right)' dx \\
 &= \left[-\frac{1}{q} x^p (1-x)^q \right]_0^1 + \frac{p}{q} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\
 &= \frac{p}{q} B(p, q)
 \end{aligned}$$

$$\therefore B(p, q+1) = B(p, q) - \frac{p}{q} B(p, q)$$

$$\therefore B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q)$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx & x &= \cos^2 t \\
 & & \frac{dx}{dt} &= -2 \cos t (-\sin t) \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos t)^{p-1} (\sin t)^{2q-1} 2 \cos t (-\sin t) dt \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{p-1} (\sin t)^{2q-1} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \Gamma(p) &= \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx & x &= t^2 \\
 &= \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2p-2} 2t dt & \frac{dx}{dt} &= 2t \\
 &= 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2p-1} dt \quad \text{or } 1)
 \end{aligned}$$

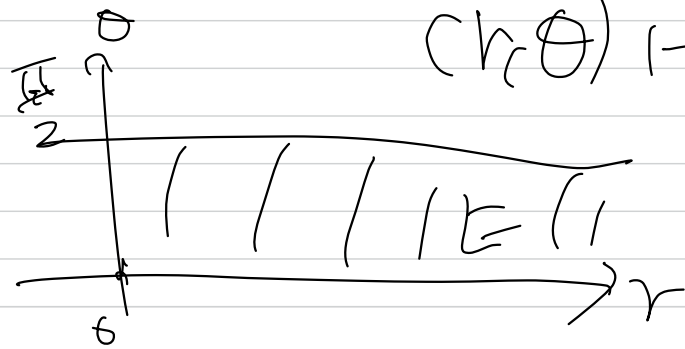
$$\begin{aligned}
 \Gamma(p) \Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1} dy \\
 &= 4 \iint_D e^{-x^2-y^2} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy
 \end{aligned}$$

☆ 終了

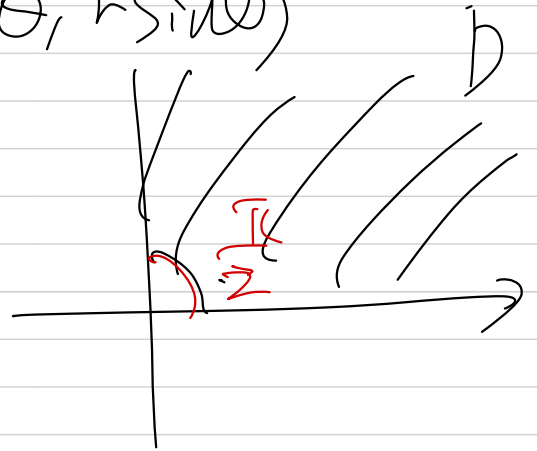
$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$\Phi: E \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

$$(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$



Φ



$$D = \Phi(E)$$

変数変換公式 (第11回 p11)

$$\star) = 4 \iint_E e^{-r^2} r^{2p-1} r^{2q-1} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} r dr d\theta$$

$$= 4 \iint_E e^{-r^2} r^{2p+2q-1} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} dr d\theta$$

$$= \left(2 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr \right) \cdot \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta \right)$$

$$= \Gamma(p+q) \cdot B(p+q)$$

$$\therefore B(p+q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\textcircled{1} B(1,1) = \frac{\Gamma(1) \cdot \Gamma(1)}{\Gamma(2)}$$

$$= \frac{1 \cdot 1}{1!} = 1$$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \pi$$

$$B(l, m) = \frac{\Gamma(l) \Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} = \frac{(l-1)! (m-1)!}{(l+m-1)!}$$

(151) n を自然数とする。

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt \text{ を求めよ。}$$

(解) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2(\frac{n+1}{2}-1)} (\sin t)^{2 \cdot \frac{1}{2}-1} dt$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\textcircled{n} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

① n が偶数なとき, $n = 2m$ とする

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m-1)!!}{2^m} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \Gamma(m+1) = m!$$

よって $(m!) 2^m = (2m)!! = n!!$ となるから

$$I_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(2m-1)!!}{2^m (m!)} \frac{\pi}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \text{ } n \text{ 为奇数 } a \neq \pm 1 \quad n = 2m+1 \in (2.$$

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma(m+1) = m!$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \Gamma\left(m+1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m+1)!!}{2^{m+1}} \sqrt{\pi}$$

$$I_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{2^{m+1} (m!)}{(2m+1)!! \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \frac{2^m (m!)}{(2m+1)!!}$$

$$= \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right)$$

(IA)12) 7) 1) 2/2 式

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt \quad \text{かつ}$$

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{上 } (\cos t)^{2m+2} \leq (\cos t)^{2m+1} \leq (\cos t)^{2m}$$

$$\text{よって } I_{2m+2} \leq I_{2m+1} \leq I_{2m}$$

IA)12) 7) 1) 2/2 式

$$\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \leq \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!} \text{ かつ}$

$$\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \cdot \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!} = \frac{2m+1}{2m+2}$$

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \cdot \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!} = \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} \cdot \frac{(2(m-1))^2}{(2(m-1)+1)(2(m-1)-1)} \cdots \frac{2}{3 \cdot 1}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{4m^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4(m-1)^2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

★おさ

$$\frac{2m+1}{2m+2} \frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4m^2}} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4(m-1)^2}} \right) \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \\ \leq \frac{\pi}{2}$$

$m \rightarrow \infty$ とすると 1 は \pm の $\frac{1}{2}$ の有理数

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4m^2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4(m-1)^2}\right)} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

ワタリズの公式

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

テイラー展開

(24 = n の公式とか π は $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{4}$ と $\frac{1}{8}$ と $\frac{1}{16}$ と $\frac{1}{32}$ と $\frac{1}{64}$ と $\frac{1}{128}$ と $\frac{1}{256}$ と $\frac{1}{512}$ と $\frac{1}{1024}$ と $\frac{1}{2048}$ と $\frac{1}{4096}$ と $\frac{1}{8192}$ と $\frac{1}{16384}$ と $\frac{1}{32768}$ と $\frac{1}{65536}$ と $\frac{1}{131072}$ と $\frac{1}{262144}$ と $\frac{1}{524288}$ と $\frac{1}{1048576}$ と $\frac{1}{2097152}$ と $\frac{1}{4194304}$ と $\frac{1}{8388608}$ と $\frac{1}{16777216}$ と $\frac{1}{33554432}$ と $\frac{1}{67108864}$ と $\frac{1}{134217728}$ と $\frac{1}{268435456}$ と $\frac{1}{536870912}$ と $\frac{1}{1073741824}$ と $\frac{1}{2147483648}$ と $\frac{1}{4294967296}$ と $\frac{1}{8589934592}$ と $\frac{1}{17179869184}$ と $\frac{1}{34359738368}$ と $\frac{1}{68719476736}$ と $\frac{1}{137438953472}$ と $\frac{1}{274877906944}$ と $\frac{1}{549755813888}$ と $\frac{1}{1099511627776}$ と $\frac{1}{2199023255552}$ と $\frac{1}{4398046511104}$ と $\frac{1}{8796093022208}$ と $\frac{1}{17592186044416}$ と $\frac{1}{35184372088832}$ と $\frac{1}{70368744177664}$ と $\frac{1}{140737488355328}$ と $\frac{1}{281474976710656}$ と $\frac{1}{562949953421312}$ と $\frac{1}{1125899906842624}$ と $\frac{1}{2251799813685248}$ と $\frac{1}{4503599627370496}$ と $\frac{1}{9007199254740992}$ と $\frac{1}{18014398509481984}$ と $\frac{1}{36028797018963968}$ と $\frac{1}{72057594037927936}$ と $\frac{1}{144115188075855872}$ と $\frac{1}{288230376151711744}$ と $\frac{1}{576460752303423488}$ と $\frac{1}{1152921504606846976}$ と $\frac{1}{2305843009213693952}$ と $\frac{1}{4611686018427387904}$ と $\frac{1}{9223372036854775808}$ と $\frac{1}{18446744073709551616}$ と $\frac{1}{36893488147419103232}$ と $\frac{1}{73786976294838206464}$ と $\frac{1}{147573952589676412928}$ と $\frac{1}{295147905179352825856}$ と $\frac{1}{590295810358705651712}$ と $\frac{1}{1180591620717411303424}$ と $\frac{1}{2361183241434822606848}$ と $\frac{1}{4722366482869645213696}$ と $\frac{1}{9444732965739290427392}$ と $\frac{1}{18889465931478580854784}$ と $\frac{1}{37778931862957161709568}$ と $\frac{1}{75557863725914323419136}$ と $\frac{1}{151115727451828646838272}$ と $\frac{1}{302231454903657293676544}$ と $\frac{1}{604462909807314587353088}$ と $\frac{1}{1208925819614629174706176}$ と $\frac{1}{2417851639229258349412352}$ と $\frac{1}{4835703278458516698824704}$ と $\frac{1}{9671406556917033397649408}$ と $\frac{1}{19342813113834066795298816}$ と $\frac{1}{38685626227668133590597632}$ と $\frac{1}{77371252455336267181195264}$ と $\frac{1}{154742504910672534362390528}$ と $\frac{1}{309485009821345068724781056}$ と $\frac{1}{618970019642690137449562112}$ と $\frac{1}{1237940039285380274899124224}$ と $\frac{1}{2475880078570760549798248448}$ と $\frac{1}{4951760157141521099596496896}$ と $\frac{1}{9903520314283042199192993792}$ と $\frac{1}{19807040628566084398385987584}$ と $\frac{1}{39614081257132168796771975168}$ と $\frac{1}{79228162514264337593543950336}$ と $\frac{1}{158456325028528675187087900672}$ と $\frac{1}{316912650057057350374175801344}$ と $\frac{1}{633825300114114700748351602688}$ と $\frac{1}{1267650600228229401496703205376}$ と $\frac{1}{2535301200456458802993406410752}$ と $\frac{1}{5070602400912917605986812821504}$ と $\frac{1}{10141204801825835211973625643008}$ と $\frac{1}{20282409603651670423947251286016}$ と $\frac{1}{40564819207303340847894502572032}$ と $\frac{1}{81129638414606681695789005144064}$ と $\frac{1}{162259276829213363391578010288128}$ と $\frac{1}{324518553658426726783156020576256}$ と $\frac{1}{649037107316853453566312041152512}$ と $\frac{1}{1298074214633706907132624082305024}$ と $\frac{1}{2596148429267413814265248164610048}$ と $\frac{1}{5192296858534827628530496329220096}$ と $\frac{1}{10384593717069655257060992658440192}$ と $\frac{1}{20769187434139310514121985316880384}$ と $\frac{1}{41538374868278621028243970633760768}$ と $\frac{1}{83076749736557242056487941267521536}$ と $\frac{1}{166153499473114484112975882535043072}$ と $\frac{1}{332306998946228968225951765070086144}$ と $\frac{1}{664613997892457936451903530140172288}$ と $\frac{1}{1329227995784915872903807060280344576}$ と $\frac{1}{2658455991569831745807614120560689152}$ と $\frac{1}{5316911983139663491615228241121378304}$ と $\frac{1}{10633823966279326983230456482242756608}$ と $\frac{1}{21267647932558653966460912964485513216}$ と $\frac{1}{42535295865117307932921825928971026432}$ と $\frac{1}{85070591730234615865843651857942052864}$ と $\frac{1}{170141183460469231731687303715884105728}$ と $\frac{1}{340282366920938463463374607431768211456}$ と $\frac{1}{680564733841876926926749214863536422912}$ と $\frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824}$ と $\frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648}$ と $\frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296}$ と $\frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592}$ と $\frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184}$ と $\frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368}$ と $\frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736}$ と $\frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472}$ と $\frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944}$ と $\frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888}$ と $\frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776}$ と $\frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552}$ と $\frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104}$ と $\frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208}$ と $\frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416}$ と $\frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832}$ と $\frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664}$ と $\frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328}$ と $\frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656}$ と $\frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312}$ と $\frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624}$ と $\frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248}$ と $\frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496}$ と $\frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992}$ と $\frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984}$ と $\frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968}$ と $\frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936}$ と $\frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872}$ と $\frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744}$ と $\frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488}$ と $\frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976}$ と $\frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952}$ と $\frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904}$ と $\frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808}$ と $\frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616}$ と $\frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232}$ と $\frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464}$ と $\frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928}$ と $\frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856}$ と $\frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712}$ と $\frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424}$ と $\frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848}$ と $\frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696}$ と $\frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392}$ と $\frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784}$ と $\frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568}$ と $\frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136}$ と $\frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272}$ と $\frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544}$ と $\frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088}$ と $\frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176}$ と $\frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352}$ と $\frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704}$ と $\frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408}$ と $\frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816}$ と $\frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632}$ と $\frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264}$ と $\frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528}$ と $\frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056}$ と $\frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112}$ と $\frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224}$ と $\frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448}$ と $\frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896}$ と $\frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792}$ と $\frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584}$ と $\frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168}$ と $\frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336}$ と $\frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672}$ と $\frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344}$ と $\frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688}$ と $\frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376}$ と $\frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752}$ と $\frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504}$ と $\frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008}$ と $\frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016}$ と $\frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032}$ と $\frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064}$ と $\frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128}$ と $\frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256}$ と $\frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512}$ と $\frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024}$ と $\frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048}$ と $\frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096}$ と $\frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192}$ と $\frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384}$ と $\frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768}$ と $\frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536}$ と $\frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072}$ と $\frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144}$ と $\frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288}$ と $\frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576}$ と $\frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152}$ と $\frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304}$ と $\frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608}$ と $\frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216}$ と $\frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432}$ と $\frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864}$ と $\frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728}$ と $\frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456}$ と $\frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912}$ と $\frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824}$ と $\frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648}$ と $\frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296}$ と $\frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592}$ と $\frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184}$ と $\frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368}$ と $\frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736}$ と $\frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472}$ と $\frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944}$ と $\frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888}$ と $\frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776}$ と $\frac{1}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552}$ と $\frac{1}{7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104}$ と $\frac{1}{1413477651822707463666638000594334812661987$