第 8 回. ラグランジュ未定乗数法 (川平先生の本, 第 24 章の内容)

岩井雅崇, 2020/12/01

1　ラグランジュ未定乗数法

定理 1. $f(x,y)$, $g(x,y)$ を領域 D 上の C^1 級関数とする. $g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値を持つとし, $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b), \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\right) \neq (0,0)$ とする.
このとき, ある定数 λ があって

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \text{ となる.}$$

上の定理 3 から $F(x,y,t) = f(x,y) - tg(x,y)$ とするとき, $g(x,y)=0$ のもとでの $f(x,y)$ の極値の候補は以下の 2 つである.

1. $g(a,b) = \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0$ となる点 (a,b).
2. ある λ があって $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial t}(a,b,\lambda) = 0$ となる点 (a,b).

2　ラグランジュ未定乗数法の使い方

$g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ の極値を求める手順は以下の通りである.

[手順 1.] $g(a,b) = \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0$ となる点 (a,b) を求める.

[手順 2.] $F(x,y,t) = f(x,y) - tg(x,y)$ とおいて, $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial t}(a,b,\lambda) = 0$ となる点 (a,b,λ) を求める.

[手順 3.] 手順 1, 手順 2 で求めた点 (a,b) について, その値が極値であるかどうか調べる. 一般的な方法はないが, 例 2 のように「最大値の存在」と「最大値, 最小値であれば極値である」ことを用いる方法もある.

例 2. $f(x,y) = xy, g(x,y) = x^2+y^2-1$ とする. $g(x,y)=0$ のもとでの $f(x,y)$ の極値を求めよ. つまり $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$ とするとき, f の S 上での極値を求めよ.
(解.)　上の手順通りに求める.
[手順 1.] $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$ より, $g(a,b) = \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0$ となる点は存在しない.
[手順 2.] $F(x,y,t) = f(x,y) - tg(x,y) = xy - t(x^2+y^2-1)$ とおく. 以下の方程式を解く.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - 2xt = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = x - 2yt = 0, \frac{\partial F}{\partial t} = -(x^2+y^2-1) = 0.$$

すると $(x,y) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の 4 点が極値の候補となる.

[手順 3.] S は有界閉集合より, f は S 上で連続であるため, 第 1 回でやった定理より, f は S 上で最大値・最小値を持つ. よって $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の中に最大値をとる点や最小値をとる点がある.

実際計算すると,

$$f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\frac{1}{2}, f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=-\frac{1}{2},$$

であるため, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で f は極大値 (最大値)$\frac{1}{2}$ をとり, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で f は極小値 (最小値)$-\frac{1}{2}$ をとる.

3 ラグランジュ未定乗数法 3 変数の場合

定理 3. $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ を領域 $D\subset\mathbb{R}^3$ 上の C^1 級関数とし, $F(x,y,t)=f(x,y,z)-tg(x,y,z)$ とおく. $g(x,y,z)=0$ のもとで $f(x,y,z)$ が点 (a,b,c) で極値を持つとし, $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b,c),\frac{\partial g}{\partial y}(a,b,c),\frac{\partial g}{\partial z}(a,b,c)\right)\neq(0,0,0)$ とする.
このとき, ある定数 λ があって,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c,\lambda)=\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c,\lambda)=\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c,\lambda)=\frac{\partial F}{\partial t}(a,b,c,\lambda)=0 \text{ となる.}$$

例 **4.** $0\leqq x, 0\leqq y, 0\leqq z$ なる実数 x,y,z について, $f(x,y,z)=xyz, g(x,y,z)=x+y+z-170$ とする. $g(x,y,z)=0$ のもとで f の最大値を求めよ. つまり $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : g(x,y,z)=0\}$ とするとき, f の S 上での最大値を求めよ. ただし f が S 上で最大値を持つことは認めて良い.

(解.) 手順通りに求める.

[手順 1.] $\frac{\partial g}{\partial x}=1$ より $g(a,b,c)=\frac{\partial g}{\partial x}(a,b,c)=\frac{\partial g}{\partial y}(a,b,c)=\frac{\partial g}{\partial z}(a,b,c)=0$ となる点 (a,b,c) は存在しない.

[手順 2.] $F(x,y,t)=f(x,y,z)-tg(x,y,z)=xyz-t(x+y+z-170)$ とする. 以下の方程式を解く.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=yz-t=0, \frac{\partial F}{\partial y}=xz-t=0, \frac{\partial F}{\partial z}=xy-t=0, \frac{\partial F}{\partial t}=-(x+y+z-170)=0.$$

すると $(x,y,z)=(170,0,0),(0,170,0),(0,170,0),(\frac{170}{3},\frac{170}{3},\frac{170}{3})$ の 4 点が極値の候補となる.

[手順 3.] 最大値が存在し, 最大値は極値であるため, 上の 4 点の中に最大値をとる点が存在する. 実際計算すると,

$$f(170,0,0)=0, f(0,170,0)=0, f(0,170,0)=0, f\left(\frac{170}{3},\frac{170}{3},\frac{170}{3}\right)=\left(\frac{170}{3}\right)^3$$

であるため, $(\frac{170}{3},\frac{170}{3},\frac{170}{3})$ で f は最大値 $(\frac{170}{3})^3$ をとる.