第14章 面積分と体積分, 表面積と体積

(川平 11, 28章)

あらすじ

滑らかな曲線 $C: \vec{p}(t) = (x(t), y(t))$ $(a \leqq t \leqq b)$ について

曲線の長さ

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \underbrace{\left\| \frac{d\vec{p}}{dt} \right\|}_{\text{(ベクトルの長さ)}} dt$$

で与えられるのであった。

表面積、体積に拡張する

(定義)

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$ について、

- $\vec{a}$の長さ $\|\vec{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$、
- 外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ を

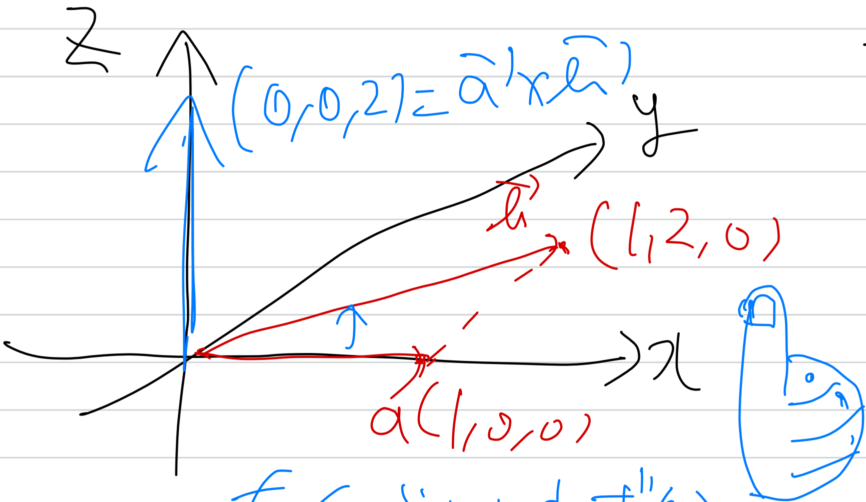
$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

とする

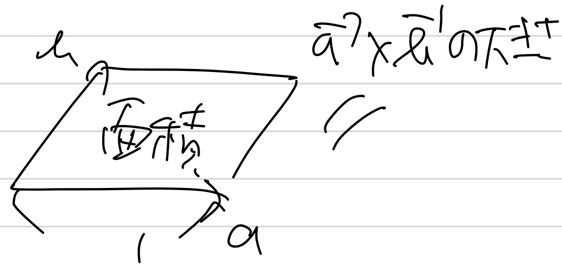
(例1) $\vec{a}=(1,0,0)$　$\vec{b}=(1,2,0)$

$\|\vec{a}\|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$　$\|\vec{b}\|=\sqrt{1^2+2^2+0}=\sqrt{5}$

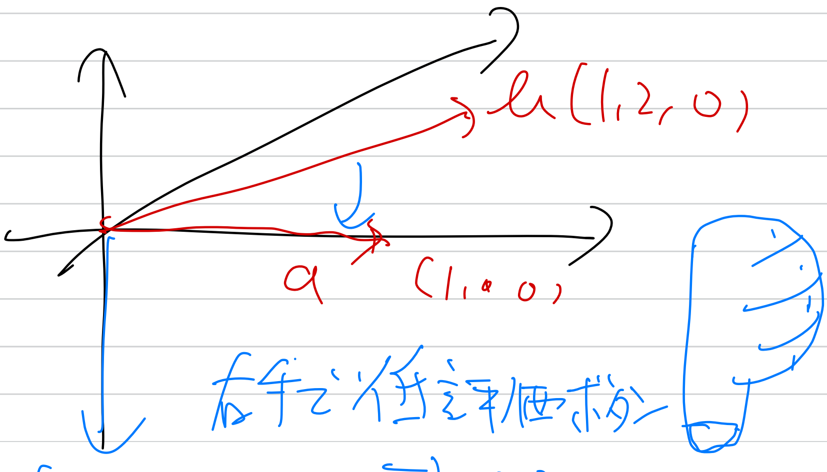
$\vec{a}\times\vec{b}=(0,0,2)$



右手でいいねボタン
(高評価)



$\vec{b}\times\vec{a}=(0,0,-2)$



右手で低評価ボタン

$(0,0,-2)=\vec{b}\times\vec{a}$

面積分

(定義).

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ が閉領域とは
ある領域 D があって $\Omega = D \cup \partial D$ となること。

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を閉領域とし $x(s,t), y(s,t), z(s,t)$ を
Ω 上の連続関数とする

$$\vec{p} : \Omega \to \mathbb{R}^3$$
$$(s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$ として

$$S = \{(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \mid (s,t) \in \Omega\}$$ を
$\mathbb{R}^3$ 内の曲面という

$\mathbb{R}^3$内の

- 曲面 $S = \vec{p}(s,t)$ $((s,t)\in R)$ について

Sが$\mathbb{R}^3$内の滑らかな曲面とは①②を満たすこと

① $x(s,t), y(s,t), z(s,t)$ がC^1級

② $\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial s} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial s}, \dfrac{\partial y}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial s}\right), \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial t}, \dfrac{\partial y}{\partial t}, \dfrac{\partial z}{\partial t}\right)$ として

$\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial s}$ と $\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial t}$ が一次独立である

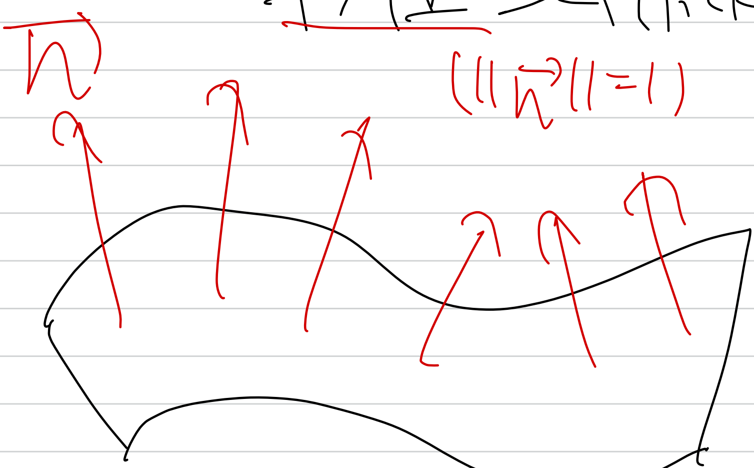
(※ $\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial t} \neq \vec{0}$) (すべての$(s,t)\in R$について)

- Sを滑らかな曲面として

$$\vec{n} = \vec{n}(s,t) = \frac{\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial t}}{\left\| \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\|}$$ を

単位法線ベクトルという

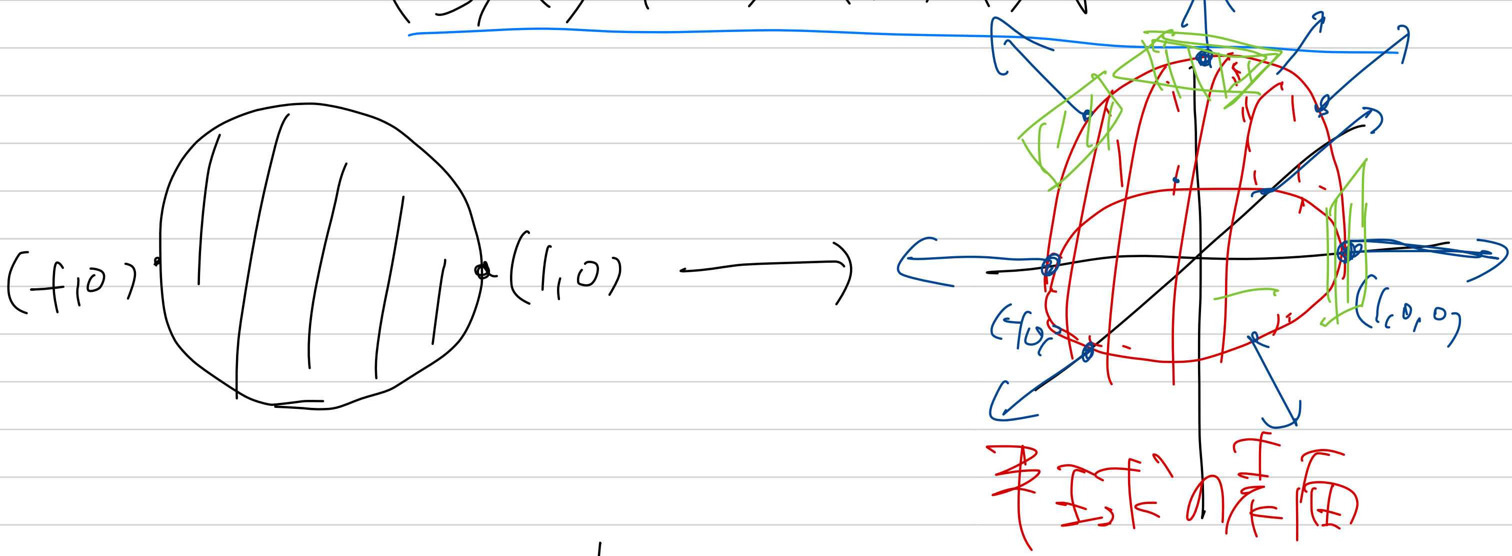
$(\|\vec{n}\| = 1)$



(例) $\Omega = \{(s,t) \mid \sqrt{s^2+t^2} \leq 1\}$

$\vec{p} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(s,t) \longmapsto (s, t, \sqrt{1-s^2-t^2})$



$S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1,\ z \geqq 0\}$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} = \left(1, 0, \frac{-s}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \left(0, 1, \frac{-t}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \left(\frac{s}{\sqrt{1-s^2-t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1-s^2-t^2}}, 1\right)$$

Sは滑らか

$$\left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| = \sqrt{\frac{s^2}{1-s^2-t^2} + \frac{t^2}{1-s^2-t^2} + 1} = \sqrt{\frac{1}{1-s^2-t^2}}$$

$$\vec{n} = (s, t, \sqrt{1-s^2-t^2})$$

(定義) 面積分

滑らかな曲面をS = $\vec{p}(s,t)$, $((s,t) \in \Omega)$とする。

$F(x,y,z)$をSを含む開集合上でC^1級な関数とする

関数Fの曲面Sでの面積分を

$$\iint_S F(\vec{p})\,dA = \iint_\Omega F(\vec{p}(s,t)) \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| ds\,dt$$

とする

とくに

$$\iint_S dA = \iint_\Omega \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| ds\,dt$$ を

表面積という

(例) $S = \{(x,y,z) \mid z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2=1\}$ の上 $\iint_S dA$ を求めよ。

半球の表面
球の半分の表面

(解) $\Omega = \{(s,t) \mid \sqrt{s^2+t^2} \leq 1\}$,

$\vec{P} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(s,t) \longmapsto (s, t, \sqrt{1-s^2-t^2})$ とすると

$$\left\| \frac{\partial \vec{P}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1-s^2-t^2}}$$ よって。

$$\iint_S dA = \iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{1-s^2-t^2}} \, ds\,dt$$

$s = r\cos\theta$
$t = r\sin\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \right) d\theta$$

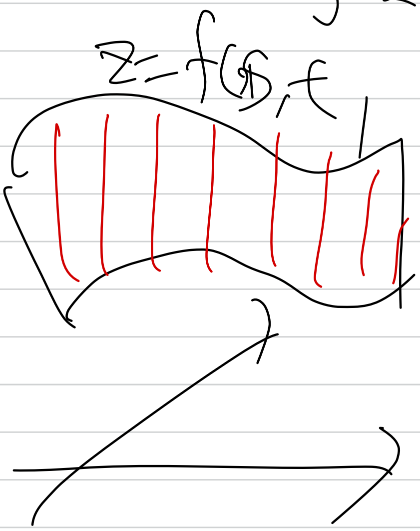
$$= \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 d\theta = 2\pi$$

半径1の球の表面積 $= 2\pi \times 2 = 4\pi$

半径rの球の表面積 $= 4\pi r^2$.

(例12) Ω を開領域とし

$$f: \Omega \to \mathbb{R}, \quad (s,t) \mapsto f(s,t)$$ C^1級関数とする



このとき $S = \{(s,t,f(s,t)) \mid (s,t) \in \Omega\}$

は滑らかな曲面となり

表面積は $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2+1}\, ds\, dt$

となる

(証) $\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial s} = \left(1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial s}\right), \quad \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \left(0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial t}\right)$

$\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \left(-\dfrac{\partial f}{\partial s}, -\dfrac{\partial f}{\partial t}, 1\right)$ ∴ S は滑らか

$$\left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2+1} \neq 0$$

よって表面積は

$$\iint_S dA = \iint_\Omega \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2+1}\, ds\, dt$$

定義（体積分）

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を開領域，
  $\phi_1, \phi_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ を $\phi_1(x,y) \leqq \phi_2(x,y)$ となる
  連続関数とする．

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} (x,y) \in \Omega \\ \phi_1(x,y) \leqq z \leqq \phi_2(x,y) \end{array} \right\}$$

となる領域を z 方向の線領域という．

- K を z 方向の線領域とし
  $F(x,y,z)$ を K を含むある開集合上で連続な
  関数とする．

F の K 上での体積分を

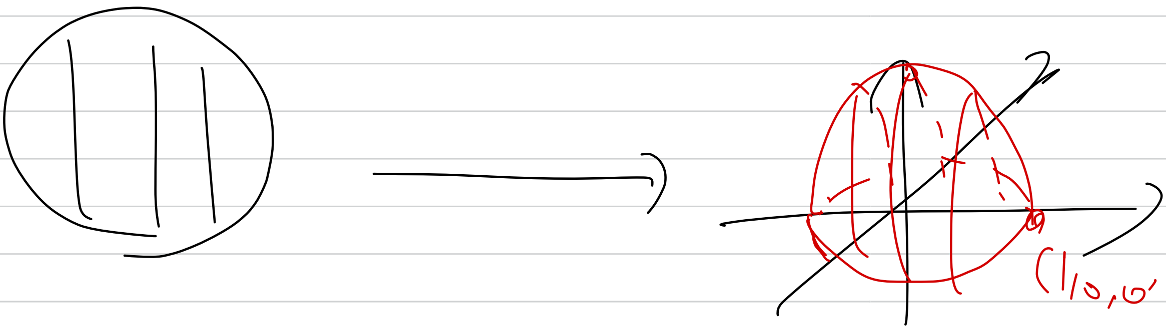
$$\iiint_K F(x,y,z)\,dxdydz$$
$$= \iint_\Omega \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz \right) dxdy \text{ と定める}$$

K の体積を

$$\mathrm{Vol}(K) = \iiint_K 1\,dxdydz$$
$$= \iint_\Omega \{ \phi_2(x,y) - \phi_1(x,y) \}\,dxdy \text{ と定める}$$

例) $\Omega = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$

$\phi_1(x,y) = 0 \quad \phi_2(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$



$K = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in \Omega,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$ とする

$Vol(K)$ (Kは半径1の球の上半分)

$= \iiint_K dxdydz$

$= \iint_\Omega \sqrt{1-x^2-y^2}\, dxdy \qquad x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r\, dr \right) d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 d\theta$

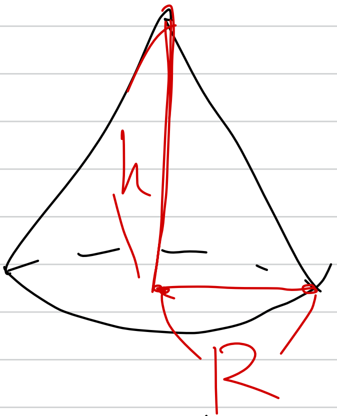
$= \frac{2\pi}{3}$

半径1の球の体積 $= \frac{2\pi}{3} \times 2 = \frac{4}{3}\pi$

半径rの球の体積 $= \frac{4}{3}\pi r^3$

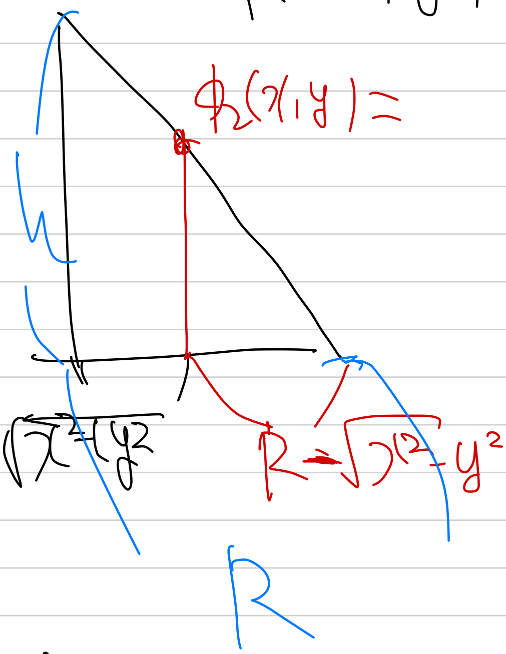
(例12)　円錐の体積

高さh，底面の半径Rの円錐の体積を求めよ



小学校では…　$\underbrace{\pi R^2}_{\text{底面積}} \times \underbrace{h}_{\text{高さ}} \times \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{なぞの}\frac{1}{3}} = \frac{\pi R^2 h}{3}$

$$K = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sqrt{x^2+y^2} \leq R \\ 0 \leq z \leq \underbrace{h\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)}_{\varphi_2(x,y)} \end{array} \right\}$$



$$\mathrm{Vol}(K) = \iiint_K dx\,dy\,dz$$
$$= \iint_\Omega h\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right) dx\,dy$$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \times (2$

$$Vol(K) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R h\left(1-\frac{r}{R}\right)r\,dr\,d\theta\right.$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \left(hr - \frac{hr^2}{R}\right)dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{hr^2}{2} - \frac{hr^3}{3R}\right]_0^R d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{hR^2}{2} - \frac{hR^2}{3}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{hR^2}{6}\,d\theta = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)2$$