第 12 回追加資料. 広義積分の収束性の判定方法 (川平先生の本, 第 12 章の内容)

岩井雅崇, 2021/01/12

広義積分の収束の判定法に関して, 少々説明が不足していると感じたため, 追加の資料を作りました. 期末レポートの第 6 問を解答する際のヒントになれればと思います.

1 広義積分の判定法のおさらい

定理 1. $f(x)$ を $[a,b)$ 上の連続関数とする.

1. $b=+\infty$ のとき, ある $\lambda>1$ があって, $f(x)x^{\lambda}$ が $[a,+\infty)$ 上で有界ならば, 広義積分 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ は収束する.
2. b が実数のとき ($b<+\infty$ のとき), ある $\mu<1$ があって, $f(x)(x-b)^{\mu}$ が $[a,b)$ 上で有界ならば, 広義積分 $\int_a^{b} f(x)dx$ は収束する.

関数 $f(x)$ が $[a,b)$ 上で有界とは, ある正の数 $M>0$ があって, 任意の $x\in[a,b)$ について $|f(x)|<M$ となること.

定理 1(広義積分の収束判定法) を使うにあたって, 「$f(x)x^{\lambda}$ が $[a,+\infty)$ 上で有界であること」や「$f(x)(x-b)^{\mu}$ が $[a,b)$ 上で有界であること」を示さないといけません. これに関しては次の主張が成り立ちます.

主張 2. a,b を実数とする.

1. $f(x)$ を $[a,+\infty)$ 上の連続関数とする. ある実数 C があって, $\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=C$ ならば $f(x)$ は $[a,+\infty)$ 上で有界.
2. $f(x)$ を $[a,b)$ 上の連続関数とする. ある実数 C があって, $\lim_{x\to b}|f(x)|=C$ ならば $f(x)$ は $[a,b)$ 上で有界.

(主張 2 の証明.) (2) のみ証明します. (1) も同様です.

$\lim_{x\to b}|f(x)|=C$ より, $\delta<\frac{b-a}{2}$ となる正の数 $\delta>0$ があって, 任意の $x\in(b-\delta,b)$ について $|f(x)|<C+1$ となる.(x が b の近くにあれば $|f(x)|$ は C に近いからです). 一方 $[a,b-\frac{\delta}{2}]$ 上で $f(x)$ は連続であるので, $[a,b-\frac{\delta}{2}]$ 上で $f(x)$ は最大値 A, 最小値 B を持つ. [1]

よって $M=\max\{|A|+1,|B|+1,C+1\}$ とおけば, 任意の $x\in[a,b)$ について $|f(x)|<M$ となり, $f(x)$ は有界です.

2 広義積分の判定法の使い方.

実際に授業でやった例で見ていきます.

[1]講義第一回目でやりました. 最大最小の存在に関する定理です.

例 3. 実数 $s>0$ について, 広義積分 $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.
(証.) $f(x)=e^{-x}x^{s-1}$, $\mu=1-s$ とおくと, $\lim_{x\to 0}|f(x)x^{\mu}|=\lim_{x\to 0}e^{-x}=1$ である. よって, 主張 2 から $f(x)x^{\mu}$ は $(0,1]$ 上で有界である. $\mu=1-s<1$ のため, 定理 1 から広義積分 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.

例 4. 実数 $s>0$ について, 広義積分 $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.
(証.) $f(x)=e^{-x}x^{s-1}$, $\lambda=2$ とおくと, $\lim_{x\to\infty}|f(x)x^{\lambda}|=\lim_{x\to\infty}e^{-x}x^{s+1}=0$ である. よって, 主張 2 から $f(x)x^{\lambda}$ は $[1,+\infty)$ 上で有界である. $\lambda=2>1$ のため, 定理 1 から広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.

以上から実数 $s>0$ について, 広義積分 $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.

例 5. $p>0, q>0$ なる実数 p,q について, 広義積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ は収束する.
(証.) $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, $\mu=1-p$ とおくと, $\lim_{x\to 0}|f(x)x^{\mu}|=\lim_{x\to 0}(1-x)^{q-1}=1$ である. よって, 主張 2 から $f(x)(x-0)^{\mu}$ は $(0,\frac{1}{2}]$ 上で有界である. $\mu=1-p<1$ のため, 定理 1 から広義積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ は収束する.

例 6. $p>0, q>0$ なる実数 p,q について, 広義積分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ は収束する
(証.) $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, $\mu=1-q$ とおくと, $\lim_{x\to 1}|f(x)(1-x)^{\mu}|=\lim_{x\to 1}x^{p-1}=1$ である. よって, 主張 2 から $f(x)(1-x)^{\mu}$ は $[\frac{1}{2},1)$ 上で有界である. $|f(x)(1-x)^{\mu}|=|f(x)(x-1)^{\mu}|$ であるので, $f(x)(x-1)^{\mu}$ は $[\frac{1}{2},1)$ 上で有界である. 以上より, $\mu=1-q<1$ のため, 定理 1 から広義積分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ は収束する.

以上から $p>0, q>0$ なる実数 p,q について, 広義積分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ は収束する.

まとめると次のようになります.

1. $f(x)$ を $[a,\infty)$ 上の連続関数とする.「広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ は収束する」ことを示すには, ある $\lambda>1$ で $\lim_{x\to\infty}|f(x)x^{\lambda}|=C$ (C は実数) となるものを探せば良い. (ただし解答の書き方は上の例のようにすること.)
2. $f(x)$ を $[a,b)$ 上の連続関数とする.「広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束する」ことを示すには, ある $\mu<1$ で $\lim_{x\to b}|f(x)(x-b)^{\mu}|=C$ (C は実数) となるものを探せば良い. (ただし解答の書き方は上の例のようにすること.)