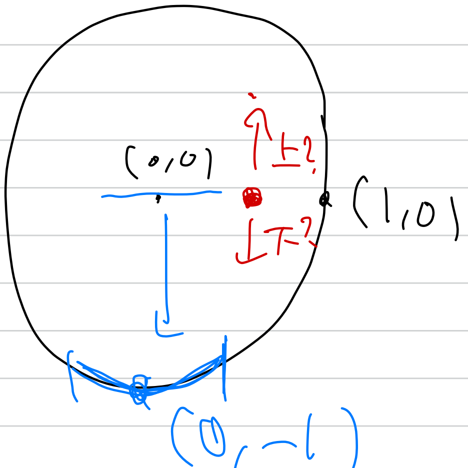
第7回 陰関数定理と逆関数定理

(川平 2章)

あらすじ　例えば $x^2+y^2=1$ を $y=(x\text{の式})$ と表わしたい



$\boxed{y=-\sqrt{1-x^2}}$

全体であらわすのは無理そう

($\pm\sqrt{1-x^2}$, ±の違いがある?)

局所的にはいけそう!

(0,−1)の近くでは

$$y=-\sqrt{1-x^2} \quad \text{とかける}$$

これが 陰関数定理

($F(x,y)=0$ について、局所的に $y=(x\text{の式})$ とかけることを保証する)

(定理) 陰関数定理

$f(x,y)$ を C^1 級関数とし

$f(a,b)=0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$ となる (a,b) をとる.

このとき a を含む開区間 I と I 上の C^1 級関数

$\varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}$ があって,

(1) $b=\varphi(a)$

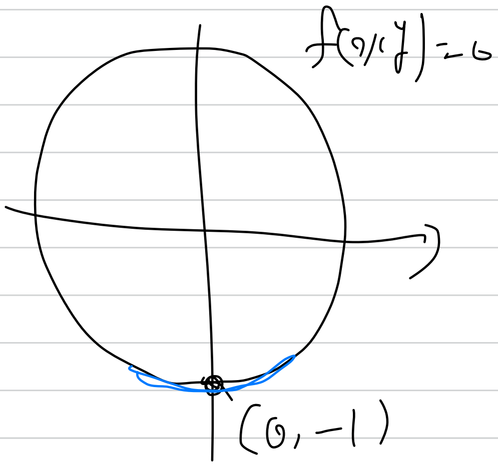
(2) $f(x,\varphi(x))=0 \quad (x\in I)$

(このとき $y=\varphi(x)$ を $f(x,y)=0$ の陰関数という)

(3) $$\frac{d\varphi}{dx}(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$$

とくに $$\frac{d\varphi}{dx}(a)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}$$

例1) $f(x,y) = x^2+y^2-1 \quad (a,b)=(0,-1)$



$$f(0,-1)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1) = -2 \neq 0.$$

陰関数定理より

十分小さな $\varepsilon>0$ で

$\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1 級関数があり

(1) $\phi(0) = -1$, (2) $f(x, \phi(x)) = 0$. となる.

実際、$\phi(x) = -\sqrt{1-x^2}$ がそれにあたる.

$$\left(\begin{array}{l} \phi(0) = -1 \\ f(x,\phi(x)) = x^2 + \left(-\sqrt{1-x^2}\right)^2 - 1 = 0 \end{array} \right)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(3) より

$$\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))} = \frac{-2x}{2\phi(x)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

一致してる

例112　$\phi(x)$がわからなくても $\frac{d\phi}{dx}$ はわかる.

・$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 - 1$ とする.
曲線 $f(x, y) = 0$ の $(1, 0)$ での
接線の方程式を求めよ.

(解) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 3y^2$.

$f(1, 0) = 0$　$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = -3 \neq 0$ より
ある陰関数 $y = \phi(x)$ があって,

① $\phi(1) = 0$, ② $f(x, \phi(x)) = 0$

③ $$\frac{d\phi}{dx}(1) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)} = \frac{-3}{-3} = 1$$

($f(x, \phi(x))$ の図形は局所的に $y = \phi(x)$ とかける)

よって. $y = \phi(x)$ の接線の方程式を求めればよい.

$$y = \frac{d\phi}{dx}(1)(x - 1) + 0 = x - 1$$

$$y = x - 1 \quad //$$

($\phi(x)$ はわからないが $\phi'(1)$ はわかる)

（定理）逆関数定理.

Dを領域とし.

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto (\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y))$$

を C^1 級 変数変換 とする.

D内の点 (a,b) とし, $D\Phi$ を Φ のヤコビ行列とする

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\det D\Phi(a,b) \neq 0$ ならば

(a,b) をふくむ十分小さな開領域で

Φ は逆変換 Φ^{-1} をもち,

$$D\Phi^{-1} = (D\Phi)^{-1}$$ となる。

（局所的に逆関数がある）

（証明はむずかしいので省略）

・逆関数定理から陰関数定理が成立する証明.

(証) $f(x,y)$ を領域 D 上の C^1 級関数とし、
$f(a,b)=0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$ なる点 (a,b) をとる

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad C^1\text{級変数変換}$$
$$(x,y) \longmapsto (x, f(x,y))$$

$$D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\det D\Phi(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$ より、
(a,b) を含む十分小さな円板 U があって
Φ は U 上で逆変換 Φ^{-1} をもつ。

$V=\Phi(U)$ として

$$\Phi^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \longmapsto (g(u,v), h(u,v)) \text{ とおくと}$$

$$\Phi\circ\Phi^{-1}(u,v) = (u,v)$$

$(u,v) = \Phi \circ \Phi^{-1}(u,v) = (g(u,v), f(u,h(u,v)))$

$\therefore\ u = g(u,v),\ \therefore\ \boxed{v = f(u,h(u,v))}$ ①

$(x,y) = \Phi^{-1} \circ \Phi(x,y) = (g(x,f(x,y)), h(x,f(x,y)))$

$\therefore\ x = g(x,f(x,y)),\ \boxed{y = h(x,f(x,y))}$ ☆

今 a をふくむ区間 I と b をふくむ区間 J で
$I \times J \subset U$ となるものをとる。

$\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ とする
$x \longmapsto h(x,0)$

$(a,0) \in V$
$(f(a,b)=0)$

① $\phi(a) = h(a,0)$
$= h(a,f(a,b)) \overset{☆}{=} b$

② $f(x,\phi(x)) = f(x,h(x,0)) \overset{①}{=} 0$

③ $D\Phi^{-1} = (D\Phi)^{-1}$ より

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \boxed{\frac{\partial h}{\partial u}} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x} & 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$\frac{\phi(x)}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial h}{\partial u}(u, 0)$$

$$= \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))} \quad //$$