1 多変数の連続写像（川平 第16章）

1-1 いくつかの記号の準備

・xy 平面の点 (a,b)，正の数 $r>0$ について，

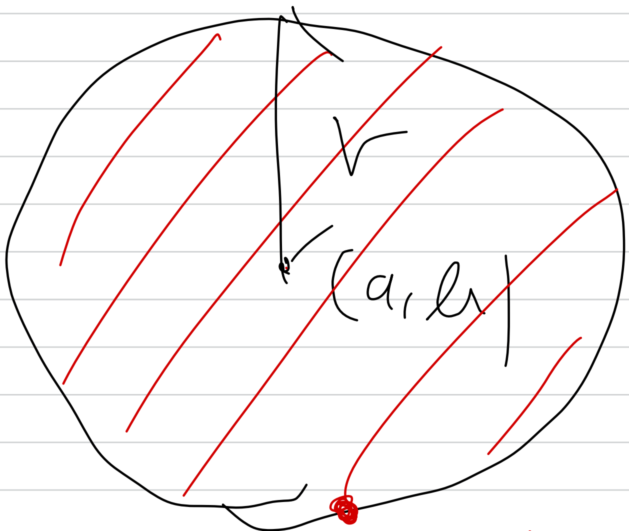
$$B_{(a,b)}(r) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \le r\}$$

（この非常にだけ記号）　（これを閉円板という）とする。

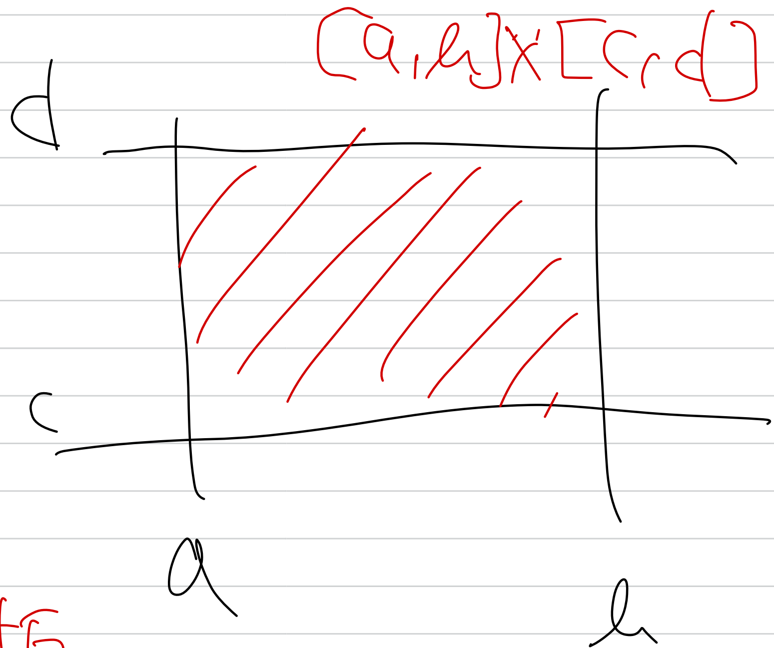
・$a<b$，$c<d$ となる実数について，

$$[a,b]\times[c,d] = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a\le x\le b \text{ かつ} \\ c\le y\le d \end{array}\right\}$$

と定義する



境界も閉円板に含まれる。



(2) 集合 $E \subset \mathbb{R}^2$ について.

- (a,b) が E の内点とは
  十分小さな $r>0$ があって $B_{(a,b)}(r) \subset E$ となること

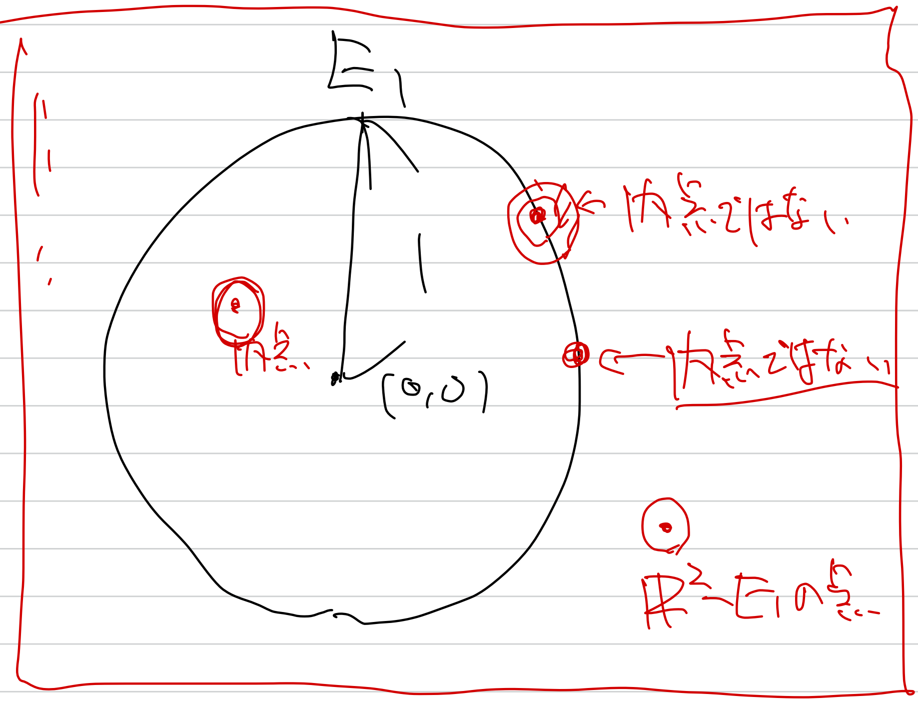
- E が $\mathbb{R}^2$ の開集合とは.
  E のすべての点が内点であること

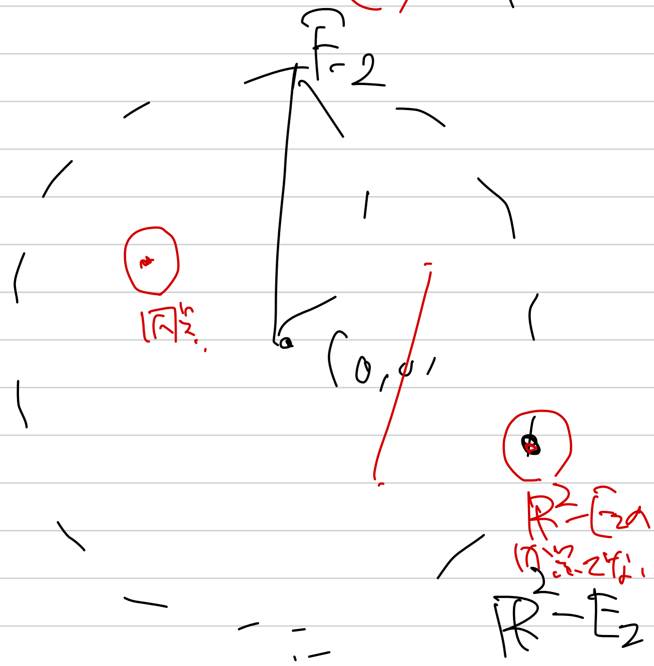
- E が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であるとは.
  $\mathbb{R}^2 \setminus E$ が $\mathbb{R}^2$ の開集合であること.

$$\mathbb{R}^2 \setminus E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \notin E\}$$

〈例〉 $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$

$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$





	E_1	E_2
内点の集合	E_2	E_2
開集合か?	×	○
閉集合か?	○	×

(3) $E \subset \mathbb{R}^2$とする

- Eが有界とは十分大きな$M>0$があって
$E \subset [-M, M] \times [-M, M]$となること。

- Eが領域とは連結な開集合であること
(E内の任意の2点がE内の折れ線で結べること)

- (例). 左のE_1, E_2はともに有界
  - 人間がかく図形は全て有界
  - E_2は領域

(4) 関数$f(x,y)$の値が定まる(x,y)の集合を
fの定義域という。

$\{k \in \mathbb{R} \mid f(x,y)=k$ となる(x,y)が定義域に存在$\}$。

これをfの値域という。

fがE上の関数とは
Eがfの定義域に含まれることとし、

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

とかく。

例

$z=f(x,y)$	定義域	値域
$f(x,y)=x+y$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}$
$f(x,y)=\sin(x+y)$	$\mathbb{R}^2$	$[-1,1]$
$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$	$[0,1]$

1.2. 極限と連続性

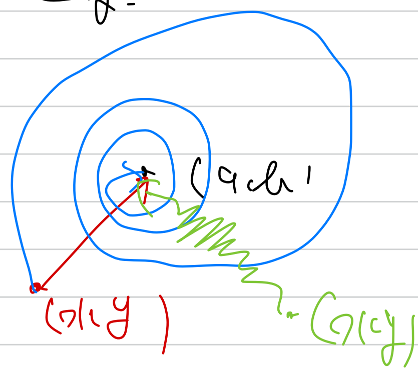
(定義)

・(x,y) が (a,b) に限りなく近づく とは

$(x,y) \neq (a,b)$ かつ

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \longrightarrow 0$

となるように変化すること。



関数 $f(x,y)$ について、

・$(x,y) \longrightarrow (a,b)$ のとき $f(x,y)$ が実数 $A \in \mathbb{R}$ に収束するとは

(x,y) が (a,b) に近づくとき $f(x,y)$ が A に限りなく近づくこと

このとき $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$ または $f(x,y) \to A$ $((x,y)\to(a,b))$ とかく

・f を領域 D 上の関数として、

f が D の点 (a,b) で連続 とは

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$ となること。

・f が D 上連続とは、D 上のすべての点で f が連続 となること。

例 (1)

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$$ 定義域 $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$$

f は $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 上連続 (後でやる定理から)

$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 1 & (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき $g(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上連続.

g は $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 上連続 かつ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = 1$ より

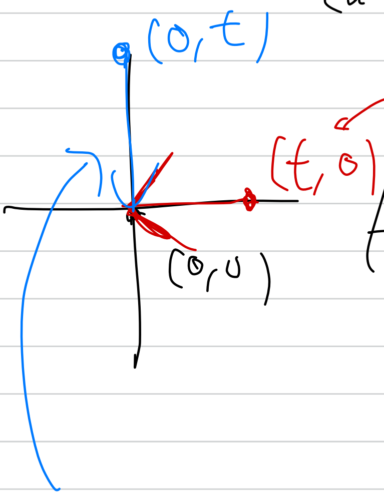
g は $(0,0)$ でも連続

(2) 極限が存在しない例

$f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 定義域: $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない

(背理法) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A$ となる実数 A があったとする.



① $(x,y)=(t,0)$ として $t\to 0$ として近づけると

$$A = \lim_{(t,0)\to(0,0)} f(t,0) = \lim_{(t,0)\to(0,0)} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

$A=1$ となる.

② $(x,y)=(0,t)$ として $t\to 0$ として近づけると

$$A = \lim_{(0,t)\to(0,0)} f(0,t) = \lim_{(0,t)\to(0,0)} \frac{-t^2}{t^2} = -1$$

$A=-1$ となる　矛盾 $_{//}$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \text{ のとき} \\ 1 & (x,y)=(0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

$g(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない.

(3) $\mathbb{R}^2$上の関数 $f(x,y)$を

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\text{のとき}\\ 0 & (x,y)=(0,0)\text{のとき}\end{cases}$$

$f(x,y)$は$(0,0)$で連続か?

(答) 連続である。

点(x,y)が$(0,0)$に限りなく近づくとして、$r=\sqrt{x^2+y^2}$とおく。

$$0\leq\left|\frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|\underset{\text{(三角不等式)}}{\leq}\frac{|2x^3|+|y^3|}{|x^2+y^2|}\underset{\left(\substack{|x|\leq r\\ |y|\leq r}\right)}{\leq}\frac{2r^3+r^3}{r^2}=3r$$

$(x,y)\to(0,0)$　　$r\to0$

よって

$$0\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|\leq\lim_{r\to0}3r=0$$

$$\therefore\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$$

$(0,0)$で連続。

fは$\mathbb{R}^2$上連続。

公式&定理.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = B$ とする.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \{f(x,y) + g(x,y)\} = A + B.$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = AB$$

$B \neq 0$ のとき　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B}$

(2) 関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ が (a,b) で連続のとき.

・ $f(x,y) + g(x,y)$ や $f(x,y)g(x,y)$ は (a,b) で連続.

・ $g(a,b) \neq 0$ のとき, $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ も (a,b) で連続.

例(1) $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2}$ について.

f は $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 上連続.

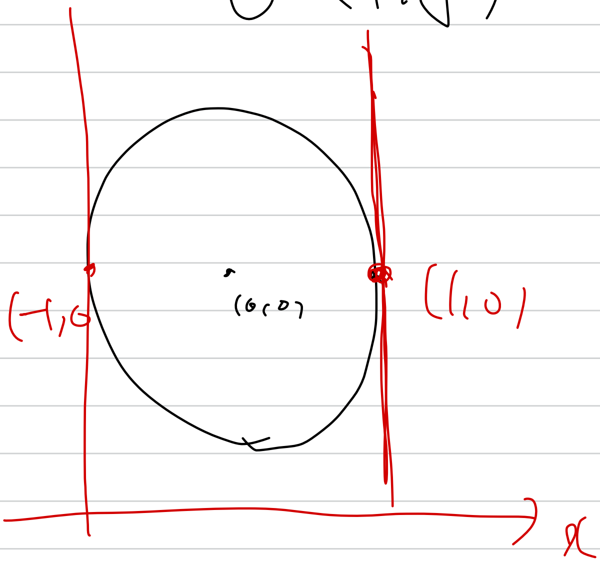
1-3 最大最小の存在.

(定理) 有界な閉集合D上で連続な関数$f(x,y)$は最大値,最小値をもつ.

(例1) $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$.

有界な閉集合.

$f(x,y) = x$.

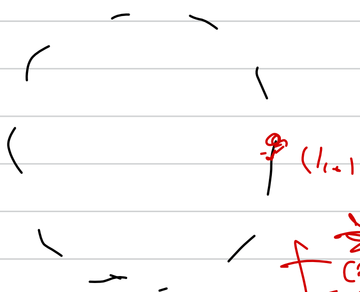


最大値 1

最小値 -1

$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$

最大値 最小値 なし



境界(円周)がE_2は含まれてない