第3回 合成関数の微分・連鎖律

（川平 第19,20,21章）

あらすじ　$f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上 C^1 級関数

$x = x(t)$、としたとき

$$\frac{df(x(t))}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

これを拡張したい！

① $x = x(t)$, $y = y(t)$ として、$\dfrac{df(x(t), y(t))}{dt}$ を求めたい。

② $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ として、

$\dfrac{\partial f(x(s,t), y(s,t))}{\partial s}$, $\dfrac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial t}$ を求めたい！

ヤコビ行列をもちいるとかんたんにかける。

連鎖律の使用例

（バックプロパゲーション（誤差逆伝播法））

（機械学習、深層学習（ディープラーニング）、AI…）

(定理) $f(x,y)$ をD上の C^1 級関数とする。
$x=x(t)$, $y=y(t)$ を t にかんする C^1 級 関数とする。
$z(t)=f(x(t),y(t))$ とするとき

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

(例1) $f(x,y)=2x^3y$, $x(t)=\cos t$
$y(t)=\sin t$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2x^3,\ \frac{dx}{dt}=-\sin t,\ \frac{dy}{dt}=\cos t.$$

$$\frac{df(x(t),y(t))}{dt}=6\cos^2 t\sin t(-\sin t)$$

$$+2\cos^3 t\cos t.$$

$$=-6\cos^2 t\sin^2 t+2\cos^3 t\cos t$$

(証明) $c \in \mathbb{R}$ を固定する.

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{z(c+h)-z(c)}{h}$ を計算する.

$$\frac{z(c+h)-z(c)}{h} = \frac{1}{h}\left\{f(x(c+h),y(c+h)) - f(x(c),y(c))\right\}$$

$$= \boxed{\frac{1}{h}\left\{f(x(c+h),y(c+h)) - f(x(c),y(c+h))\right\}}$$ $=E_1$ とおく

$$+ \boxed{\frac{1}{h}\left\{f(x(c),y(c+h)) - f(x(c),y(c))\right\}}$$ E_2 とおく.

$\displaystyle\lim_{h\to0} E_1 = \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(x(c),y(c))}$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x(c),y(c))\,\frac{dx}{dt}(c)$, $\displaystyle\lim_{h\to0} E_2 = \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}(x(c),y(c))}$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x(c),y(c))\,\frac{dy}{dt}(c)$ を示せばよい.

(I) E_1 について.

平均値の定理より $|\theta - x(c)| \le |x(c+h)-x(c)|$ なる θ があって.

$$E_1 = \frac{1}{h}\,\frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y(c+h))\cdot\left[x(c+h)-x(c)\right]$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{\partial f}{\partial x}(x(c),y(c))\cdot\frac{dx}{dt}(c).$$

E_2 も同じ.

（定義）

領域 D 上の C^1 級関数 $x(u,v), y(u,v)$ とする

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$$ を

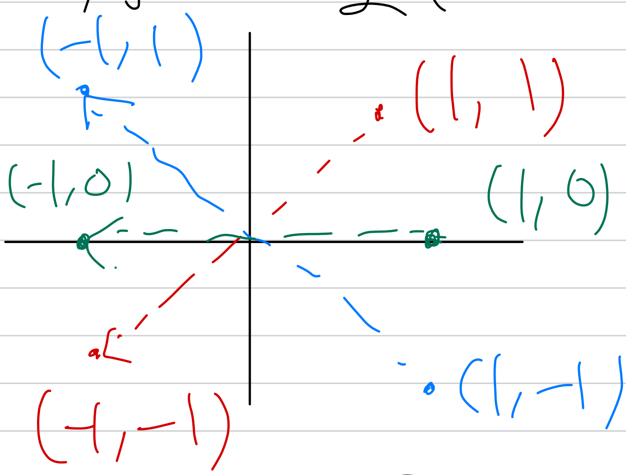
（C^1 級）変数変換とよぶ。

（例）a, b, c, d 定数。

$$\begin{cases} x(u,v) = au + bv \\ y(u,v) = cu + dv \end{cases}$$

一次変換という

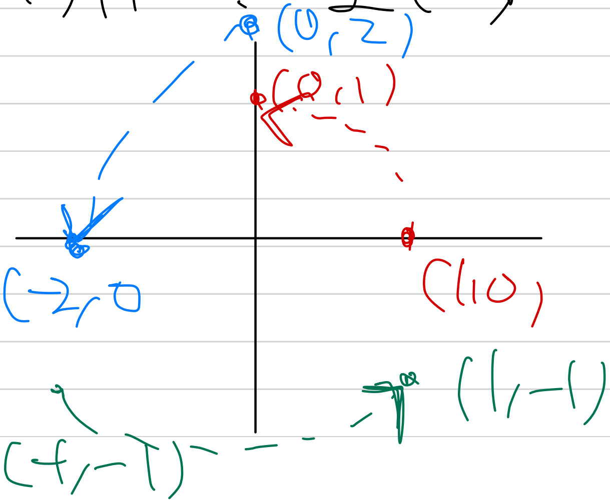
例1-1 $\Phi(u,v) = (-u, -v)$



点を原点中心として反対側にうつす変換.

例1-2 $\Phi(u,v) = (-v, u)$

点を90°反時計回りにうつす変換.

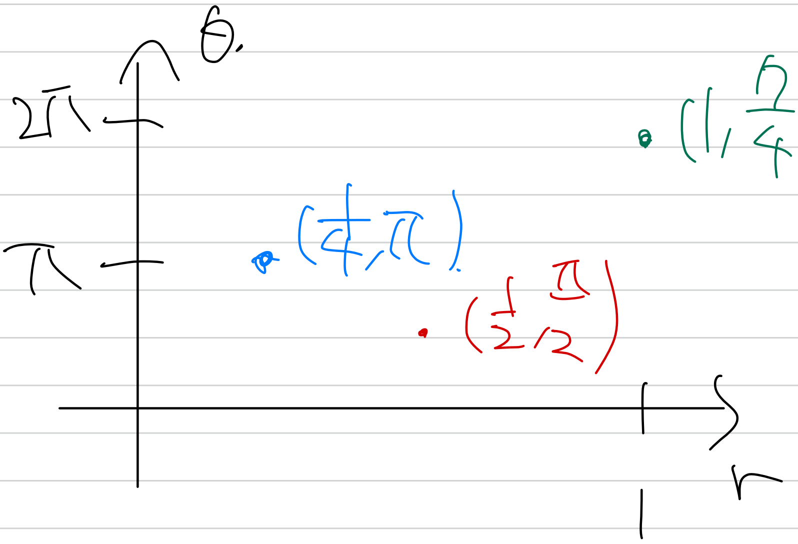


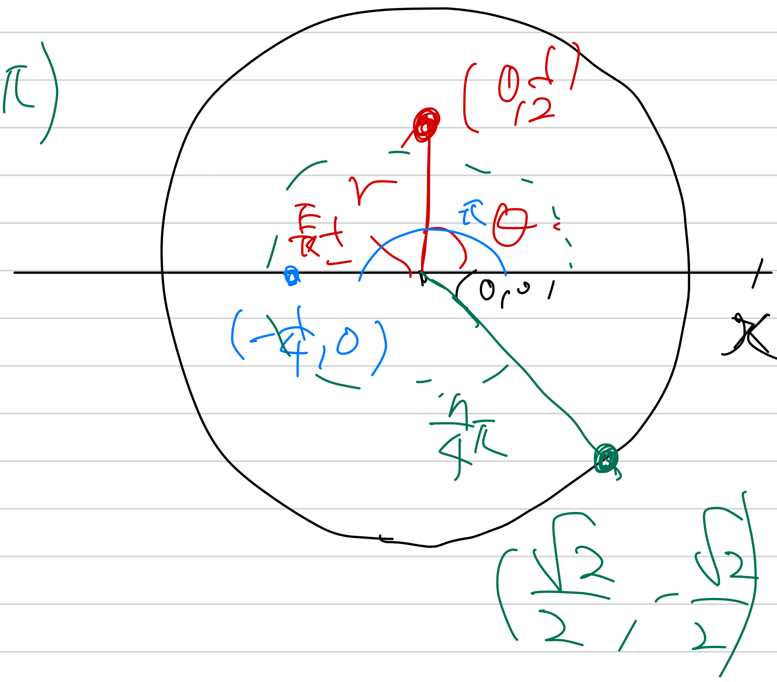
(例12) $\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$ 極座標変換という

区画を円板にうつす

$E = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta < 2\pi\}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1\}$





(r 長さ, θ は角度)

(定理) 連鎖律 chain rule.

領域 D 上の C^1 級変数変換

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$$ とする.

$(E \subset \Phi(D))$

領域 E 上の C^1 級関数を $f(x,y)$ とする.

このとき $g = f \circ \Phi(u,v) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ (C^1 級)

$$(u,v) \longmapsto f(x(u,v), y(u,v))$$ とするとき

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

となる

行列の記号を用いると

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}}$$

Φのヤコビ行列という

(証) 1変数に同じ.

(例11) $f(x,y)$ を C^1 級関数.

$$x(u,v) = u+v$$
$$y(u,v) = u-v$$ とする

$F(u,v) = f(x(u,v),\ y(u,v))$ とするとき

$\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$ を $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表わせ.

(解) $\frac{\partial x}{\partial u} = 1 \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 1$

$\frac{\partial y}{\partial u} = 1 \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -1$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

(例1,2) $f(x,y)$ を C^1級関数とし

$$x(r,\theta) = r\cos\theta$$
$$y(r,\theta) = r\sin\theta$$

$F(r,\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$ とするとき

$\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}$ を $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表わせ.

(解) $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta,\ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta.$

$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta.$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \left(\cos\theta \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}} + \sin\theta \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}},\ -r\sin\theta \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}} + r\cos\theta \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}}\right)$$

(r, θ のかんすう)