第 5 回. テイラー展開 (川平先生の本, 第 22 章の内容)

岩井雅崇, 2020/11/10

定理 1. f を領域 D 上の C^2 級関数とし, $(a,b) \in D$ とする. 点 (a,b) 中心の半径 $r > 0$ の円板 $B \subset D$ を一つとる.
任意の $(x,y) \in B$ について (a,b) と (x,y) を結ぶ線分上の点 (a',b') があって,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a',b')(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a',b')(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a',b')(y-b)^2\right\}. \end{aligned}$$

定理 2. f を領域 D 上の C^∞ 級関数とし, $(a,b) \in D$ とする. 点 (a,b) 中心の半径 $r > 0$ の円板 $B \subset D$ を一つとる.
任意の $(x,y) \in B$ について (a,b) と (x,y) を結ぶ線分上の点 (a',b') があって,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right\} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left\{\sum_{i=0}^{n} {}_nC_r \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a',b')(x-a)^i(y-b)^{n-i}\right\}. \end{aligned}$$

$R_n = \frac{1}{n!}\left\{\sum_{i=0}^{n} {}_nC_r \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a',b')(x-a)^i(y-b)^{n-i}\right\}$ を<u>剰余項</u>という.
特に剰余項について, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right\} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left\{\sum_{i=0}^{n} {}_nC_r \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a,b)(x-a)^i(y-b)^{n-i}\right\} \\ &\quad + \cdots. \end{aligned}$$

例 3. $f(x,y) = e^{x+y}$ とする. $\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(0,0) = 1$ であり $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ より

$$e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{1}{2}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + \cdots + \frac{1}{n!}(x+y)^n + \cdots.$$