第 3 回. 合成関数の微分と連鎖律 (川平先生の本, 第 19・20・21 章の内容)

岩井雅崇, 2020/10/20

定理 1. $f(x, y)$ を領域 D 上の C^1 級関数とする. $x = x(t)$, $y = y(t)$ を t に関する C^1 級関数とし, $z(t) = f(x(t), y(t))$ とするとき,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

例 2. $f(x, y) = 2x^3 y$, $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = f(x(t), y(t))$ とする. このとき

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3, \frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = \cos t, \quad \text{より}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 6\cos^2 t \sin t(-\sin t) + 2\cos^3 t \cos t = -6\cos^2 t \sin^2 t + 2\cos^4 t.$$

定義 3. 領域 D 上の C^1 級関数を $x(u, v)$, $y(u, v)$ とする.

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & D & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u, v) & \longmapsto & (x(u, v), y(u, v)) \end{array}$$

を C^1 級変数変換という.

例 4.
- a, b, c, d を定数とする. $\Phi(u, v) = (au + bv, cu + dv)$ は C^1 級変数変換である. これを 1 次変換という.
- $\Phi(u, v) = (u\cos v, u\sin v)$ も C^1 級変数変換である. これを極座標変換という.

定理 5. 領域 D 上の C^1 級変数変換を

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & D & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u, v) & \longmapsto & (x(u, v), y(u, v)) \end{array}$$

とし, 領域 $E(\subset \Phi(D))$ 上の C^1 級関数を $f(x, y)$ とする.
領域 D 上の C^1 級 $g(u, v)$ を

$$\begin{array}{rccc} g = f \circ \Phi : & D & \to & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto & f(x(u, v), y(u, v)) \end{array}$$

で定めるとき, 各偏導関数は以下の通りになる.

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.}$$

行列の記法を用いると以下のようにかける.

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}.$$

例 **6.** $f(x,y)$ を C^1 級関数とし,C^1 級変数変換を $(x(u,v),y(u,v))=(u\cos v,u\sin v)$ とする. $g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$ とするとき, $\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial v}$ を $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ を用いてあらわせ.

(解.)

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\cos v,\ \frac{\partial x}{\partial v}=-u\sin v,\ \frac{\partial y}{\partial u}=\sin v,\ \frac{\partial y}{\partial v}=u\cos v,\ \text{ より}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\cos v\frac{\partial f}{\partial x}+\sin v\frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=-u\sin v\frac{\partial f}{\partial x}+u\cos v\frac{\partial f}{\partial y}.$$