第5回 テイラー展開 (川平22章)

(定義) $f(x,y)$ を C^1 級関数とする

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ を f の1階偏導関数という
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ が C^1 級であるとき、これらの偏導関数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

これらを f の2階偏導関数という

同様に $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$ …

これらを f の3階偏導関数という。

n階も同様。

- 関数 $f(x,y)$ が C^n 級 $(n=1,2,3,\cdots)$ とは f の n 階偏導関数が存在し、連続であること。

- $f(x,y)$ が C^∞ 級とは すべての $n=1,2,3,\cdots$ について f が C^n 級となること。

(定理) $f(x,y)$ が C^2 級ならば

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

とくに C^∞ 級関数 $f(x,y)$ について、
自由に偏微分の順序交換ができる。

(証明) f を領域 D 上の C^2 級関数とし
$(a,b) \in D$ を固定する。
h,k 十分小さな正の数とする (あとで $(h,k)\to(0,0)$ とする)

$$Q = \frac{1}{hk}\Big[\{f(a+h,b+k) - f(a+h,b)\} - \{f(a,b+k) - f(a,b)\}\Big]$$

を考える。
$(h,k)\to(0,0)$ を2通りの方法で計算する。

① $K(x,y) = f(x,y) - f(x,b)$ とおくと。

$$Q = \frac{1}{hk}\left[K(a+h,b+k) - K(a,b+k)\right]$$

平均値の定理より θ $(0 \leqq \theta \leqq h)$ があって

$$Q = \frac{1}{hk}\frac{\partial K}{\partial x}(a+\theta, b+k)\, h$$

$$= \frac{1}{k}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta, b)\right]$$

再度平均値の定理より

ある ρ $(0 \leqq \rho \leqq k)$ があって、 $\frac{\partial^2 f(a+\theta, b+\rho)}{\partial y \partial x}$

$$Q = \frac{1}{k}\frac{\partial^2 f(a+\theta, b+\rho)}{\partial y \partial x}\cdot k = \cancel{\frac{\partial^2 f(\theta, \rho)}{\partial y \partial x}}$$

$$\therefore \lim_{(h,k)\to(0,0)} Q = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}.$$

② $L(x,y) = f(x,y) - f(a,y)$ とおくと

$$Q = \frac{1}{hk}\left[L(a+h, b+k) - L(a+h, b)\right]$$

となる。

同様の議論より、

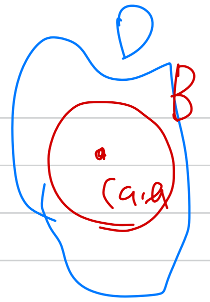
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} Q = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}$$

$$\| $$

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}$$

//

(定理) 2変数のテイラー展開



f を 領域 D 上の C^2 級関数とする

$(a,b)\in D$ を固定し, 点 (a,b) 中心 半径 $r>0$ の円板 $B_{(a,b)}(r)\subset D$ を考える

にんいの $(x,y)\in B_{(a,b)}(r)$ について,

(a,b) と (x,y) を結ぶ線分上の点 (a',b') があって,

$$f(x,y)=\underline{f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}$$

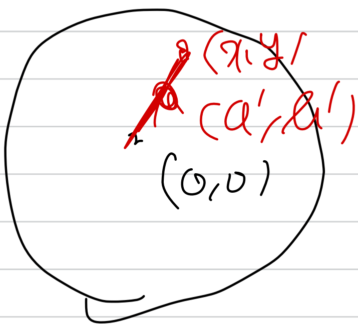
1次関数

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a',b')(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a',b')(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a',b')(y-b)^2\right\}$$

剰余項

(例1) $f(x,y)=e^{x+y}$. $(a,b)=(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$$



任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ について

(x,y) と $(0,0)$ 結ぶ線分上の点 (a',b') があって.

$$f(x,y)=1+x+y$$
$$+\frac{1}{2}\left(e^{a'+b'}x^2+2e^{a'+b'}xy+e^{a'+b'}y^2\right)$$

一般の場合は？

（定理）
f を領域 D 上の C^2 級関数とする

$(a,b)\in D$ を固定し，点 (a,b) 中心半径 $r>0$ の円板 $B_{(a,b)}(r)\subset D$ を考える

任意の $(x,y)\in B_{(a,b)}(r)$ について，
(a,b) と (x,y) を結ぶ線分上の点 (a',b') があって，

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(a,b) \\
&+ \frac{1}{1!}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right\} \\
&+ \frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right\} \\
&+ \cdots \\
&+ \boxed{\frac{1}{n!}\left\{\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i \frac{\partial^n f(a',b')}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(x-a)^i(y-b)^{n-i}\right\}}
\end{aligned}
$$

$${}_nC_i=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

R_n とかく．

R_n を剰余項という

$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$ ならば $f(x, y)$ は次のように表せる

$f(x, y)$

$= f(a, b)$

$+ \frac{1}{1!} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b) \right\}$

$+ \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(a, b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2}(y-b)^2 \right\}$

$+ \cdots$

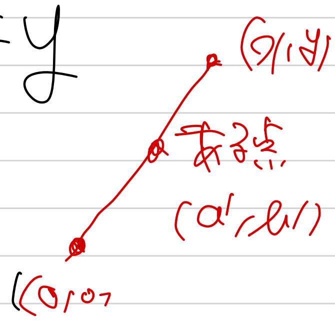
$+ \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i \frac{\partial^n f(a, b)}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(x-a)^i (y-b)^{n-i} \right\}$

$+ \cdots$

つまり f は x と y の多項式（べき級数）
で表せる

(例11) $f(x,y)=e^{x+y}$ $\quad (a,b)=(0,0)$

n 自然数 $\quad \dfrac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}} = e^{x+y}$



$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくと

$$|R_n| = \left|\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} e^{a'+b'} x^i y^{n-i}\right|$$

$$\leqq \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} e^{2r} r^n$$

$(a'+b' \leqq 2r)$
$$= \frac{2^n e^{2r} r^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

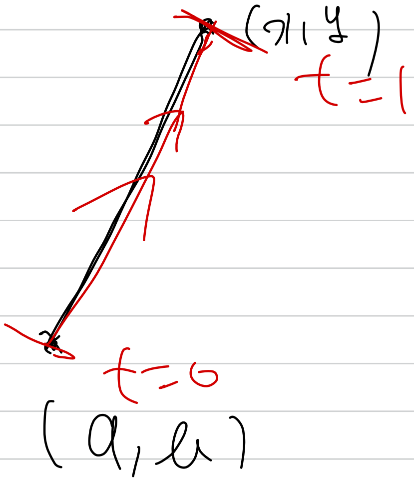
$$\therefore \lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

テイラー展開は

$$f(x,y) = 1 + (x+y) + \frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2) + \cdots + \frac{1}{n!}(x+y)^n + \cdots$$

$$\left(e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \right)$$

(定理の証明)



(x, y) 固定, (a, b) 固定.

$$I : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$

$$I(t) = (\underbrace{a + t(x-a)}_{x(t)},\ \underbrace{b + t(y-b)}_{y(t)})$$

$$I(0) = (a, b)$$
$$I(1) = (x, y)$$

$I(t)$は (x, y) と (a, b) を結ぶ線分

$F(t) = f(x(t), y(t))$ とおく.

1変数のテイラー展開より

ある θ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ があって

$$F(1) = F(0) + \frac{dF}{dt}(0) + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dt^2}(\theta)$$

$$F(0) = f(x(0), y(0)) = f(a, b)$$

$$\frac{dF}{dt}(0) = \left.\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\right|_{t=0}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b)$$

$a' = a + \theta(x-a)$　$b' = b + \theta(y-b)$ とおく。

$$\frac{d^2 F}{dt^2}(\theta) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt}\right)\Bigg|_{t=\theta}$$

$\frac{dx(t)}{dt} = x-a$.

$$= \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx(t)}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy(t)}{dt}\right\}\Bigg|_{t=\theta}$$

$$= \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)\right\}\Bigg|_{t=\theta}$$

$$= \frac{\partial^2 f(a', b')}{\partial x^2}(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f(a', b')}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a', b')(y-b)^2.$$

//

(n回も同じ)