第 9 回. 可測性と可積分性 (川平先生の本, 第 25 章の内容)

岩井雅崇, 2020/12/08

1　はじめに

この回の内容はかなり難しいので, 積分の理論を気にせず計算だけしたい人はこの回の内容を読み飛ばして, 次の回の内容に移って良い. (最後の誤差評価は使えるかもしれませんが...)

また証明等を少々省略するので, 詳しくリーマン積分を理解したい人は次の文献を見てほしい.

- 杉浦光夫 解析入門 1 (東京大学出版会)

動画冒頭に述べたルベーグ積分を理解したい人は次の文献を見てほしい. (めちゃくちゃ難しいですが...)

- 伊藤清三 ルベーグ積分入門 (裳華房)
- Terence Tao *An introduction to measure theory* available at `https://terrytao.files.wordpress.com/2011/01/measure-book1.pdf`

リーマン積分もルベーグ積分もどちらも計算上は違いはないので, 積分の理論を気にせず, 計算だけしたい場合は気にしなくて良いです.

2　リーマン積分の定義

この節では $D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\}$ とする.

- 関数 $f(x, y)$ が D 上で有界であるとは, ある正の数 $M > 0$ があって, 任意の $(x, y) \in D$ について $|f(x, y)| < M$ となること.

以下, 関数 $f(x, y)$ が D 上で有界であるとする.

- Δ が D の分割とは, ある正の自然数 m, n と

$$a = x_0 < x_1 < \ldots, x_{m-1} < x_m = b,\ \ c = y_0 < y_1 < \ldots, y_{n-1} < y_n = d, \text{ となる}$$

  数の組 $(a, x_1, \ldots, x_{m-1}, b), (c, y_1, \ldots, y_{n-1}, d)$ のこと.

  以下 $\Delta = \{(a, x_1, \ldots, x_{m-1}, b), (c, y_1, \ldots, y_{n-1}, d)\}$ とかく. (この授業だけの記号である.)

- Δ を D の分割として, Δ の長さを

$$|\Delta| = \max_{1\leqq i\leqq m, 1\leqq j\leqq n} \{|x_i - x_{i-1}|, |y_j - y_{j-1}|\} \text{ とする.}$$

- Δ を D の分割とする. $1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n$ となる自然数 i, j について

$$M_{ij} = \max\{f(x, y) : x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\},$$

$$m_{ij} = \min\{f(x,y) : x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\} \text{ とし, }$$[1]

$$S_\Delta = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \quad T_\Delta = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \text{ とおく.}$$

定義から $T_\Delta \leqq S_\Delta$ となる.

定理 1 (ダルブーの定理)**.** ある実数 S, T があって,

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta = S, \quad \lim_{|\Delta|\to 0} T_\Delta = T.$$

[2]

定義 2. $D = [a,b] \times [c,d]$ かつ $f(x,y)$ を D 上の有界関数とする.
f が D 上でリーマン積分可能 (リーマン可積分)とは $S = T$ となること. このとき,

$$S = \iint_D f(x,y)dxdy \text{ と表す.}$$

S を $f(x,y)$ の D 上での重積分といい, D を積分領域, f を被積分関数という.

以下, リーマン積分可能を単に積分可能ということにする.

例 3.
- $D = [a,b] \times [c,d]$ とし, f を D 上での連続関数とする. このとき f は D 上で積分可能.(みんながよく知っている関数は積分可能.)
- $D = [0,1] \times [0,1]$ とし, D 上の有界関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \text{ も } y \text{ も共に有理数} \\ 0 & \text{上以外} \end{cases}$$

とおくとき, 任意の D の分割 Δ について, $S_\Delta = 1$ であり, $T_\Delta = 0$ である. よって $S = 1$ かつ $T = 0$ より, f は D 上で積分可能ではない. [3]

[1]最大値最小値の存在は自明ではないので実は間違い. 本当は上限 (sup) と下限 (inf) を用いて

$$M_{ij} = \sup\{f(x,y) : x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\}, \; m_{ij} = \inf\{f(x,y) : x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\}$$

と書く. (おそらく上限や下限を習ってないと思うので, 今回は max, min で定義します.)

[2]$\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta = S$ の意味は, Δ の長さが 0 になるように分割をとっていくと, S_Δ は S に限りなく近くという意味である.

[3]ルベーグ積分は可能になる. 積分値は 0 となる. ルベーグ積分はいい感じにリーマン積分を包含する概念である.

3 一般集合上での積分

定義 4. $D \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とし, ある正の数 $M > 0$ を $D \subset [-M, M] \times [-M, M]$ となるようにとる. $\tilde{D} = [-M, M] \times [-M, M]$ とおく.
$f(x, y)$ を D 上の有界関数として, f が D 上リーマン積分可能 (リーマン可積分) とは

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

とおくとき, $\tilde{f}$ が $\tilde{D}$ 上で積分可能であること. このとき

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(x, y) dxdy \text{ と定義する.}$$

定義 5. $D \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とする. D が面積確定 (ジョルダン可測)とは D 上の定数関数 $f(x, y) = 1$ が D 上で (リーマン) 積分可能であること. このとき

$$\mathrm{Area}(D) = \iint_D dxdy = \iint_D 1 dxdy \text{ と表す.}$$

例 **6.**

- $D = [a, b] \times [c, d]$ とすると D は面積確定である. 面積 $\mathrm{Area}(D) = (b - a)(d - c)$ である.
- $\phi_1(x), \phi_2(x)$ を $\phi_1(x) \leqq \phi_2(x)$ となる $[a, b]$ 上の連続関数とする.
  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b, \phi_1(x) \leqq y \leqq \phi_2(x)\}$ とおくとき, D は面積確定で,

  $$\mathrm{Area}(D) = \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\} dx \text{ となる.}[4]$$

  特に半径 1 の円は $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2}\}$ と書けるので, $\mathrm{Area}(D) = \pi$ となる.[5] (みんながよく知っている図形は面積確定.)
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x$ も y も共に有理数 $\}$ とおくとき, 例 3 から D は面積確定ではない.

定理 7. D を面積確定な有界閉集合とし, f を D 上で連続とするとき, f は D 上で積分可能である.

以上から, みんながよく知っている図形の上での, みんながよく知っている関数の積分は可能である.

[4] 第 10 回の資料によりわかる.
[5] これも第 10 回の資料によりわかる.

4　重積分の性質.

命題 8. D, D_1, D_2 を面積確定な有界閉集合とし, $f(x,y), g(x,y)$ を連続関数とする.

1. $\mathrm{Area}(D_1 \cap D_2) = 0$ ならば
$$\iint_{D_1 \cup D_2} f dxdy = \iint_{D_1} f dxdy + \iint_{D_2} f dxdy.$$

2. D 上 $f(x,y) \leqq g(x,y)$ のとき,
$$\iint_D f dxdy \leqq \iint_D g dxdy.$$

3. α を実数とするとき,
$$\iint_D \{f+g\} dxdy = \iint_D f dxdy + \iint_D g dxdy, \quad \iint_D \alpha f dxdy = \alpha \iint_D f dxdy.$$

4. ある実数 $M > 0$ があって, D 上で $|f(x,y)| \leqq M$ のとき,
$$\iint_D f dxdy \leqq M \mathrm{Area}(D).$$

5　数値積分の精度

定理 9. $D = [a,b] \times [c,d]$ とし, f を D 上の C^1 級関数とする.
$\max_{(x,y)\in D} \left\{ |\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)|, |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \right\} \leqq K_1$ となる実数 K_1 をとる.
Δ を D の分割とすると,
$$(S_\Delta - T_\Delta) \leqq 2K_1 \mathrm{Area}(D)|\Delta| = 2K_1(b-a)(d-c)|\Delta| \text{ となる.}$$

定理 10 (区分求積法)**.** $D = [a,b] \times [c,d]$ とし, f を D 上の C^1 級関数, $N > 0$ を正の自然数とする. $\max_{(x,y)\in D} \left\{ |\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)|, |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \right\} \leqq K_1$ となる実数 K_1 をとる.
$$I = \iint_D f dxdy, \quad \Sigma_N = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} f\left(a + i\frac{(b-a)}{N}, c + j\frac{(d-c)}{N}\right) \frac{(b-a)(d-c)}{N^2} \text{ とおくとき,}$$
$$|I - \Sigma_N| \leqq \frac{K_1(b-a)(d-c)\{b-a+d-c\}}{N}.$$
とくに $\lim_{N\to\infty} \Sigma_N = I$ となる.

例 **11.** $D=[0,1]\times[0,1]$ とし，$f(x,y)=x^2+y^2$ とする．

$$\max_{(x,y)\in D}\left\{|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)|,|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)|\right\}=\max_{(x,y)\in D}\{|2x|,|2y|\}=2$$

より，$K_1=2$ と取れる．

N を正の自然数とすると，$I=\iint_D f dxdy,=\frac{2}{3}$，$\frac{K_1(b-a)(d-c)\{b-a+d-c\}}{N}=\frac{4}{N}$，

$\Sigma_N=\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^N f\left(\frac{i}{N},\frac{j}{N}\right)=\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^N\frac{i^2+j^2}{N^4}$ であるので．$|I-\Sigma_N|=\left|\frac{2}{3}-\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^N\frac{i^2+j^2}{N^4}\right|\leqq\frac{4}{N}$．

第 10 回. 累次積分 (川平先生の本, 第 26 章の内容)

岩井雅崇, 2020/12/15

6 縦線領域と累次積分

定義 12. $\phi_1(x), \phi_2(x)$ を $\phi_1(x) \leqq \phi_2(x)$ となる $[a,b]$ 上の連続関数とする.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b, \phi_1(x) \leqq y \leqq \phi_2(x)\}$$

で表せられる領域を縦線領域という.

例 13.
- $D = [a,b] \times [c,d]$ は縦線領域. $\phi_1(x) = c$, $\phi_2(x) = d$ とすれば良い.
- 縦線領域 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\}$ とおくと D は原点中心の半径 1 の円.

定理 14. 縦線領域を $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b, \phi_1(x) \leqq y \leqq \phi_2(x)\}$ とし, $f(x,y)$ を D 上の連続関数とする. このとき, $f(x,y)$ は D 上で積分可能であり,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \text{ となる.}$$

これを$f(x,y)$ の累次積分という.
特に D は面積確定で

$$\mathrm{Area}(D) = \iint_D dxdy = \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\}dx.$$

例 15. $D = [0,1] \times [0,1]$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ とする. $\iint_D f(x,y)dxdy$ を求めよ.
(解.) $\phi_1(x) = 0, \phi_2(x) = 1$ とすると上の定理より,

$$\iint_D x^2+y^2dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 + y^2dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_0^1 x^2+\frac{1}{3}dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

例 16. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\}$ とする. $\mathrm{Area}(D) = \iint_D dxdy$ を求めよ.
(解.) $\phi_1(x) = -\sqrt{1-x^2}, \phi_2(x) = \sqrt{1-x^2}$ とすると上の定理より,

$$\iint_D dxdy = \int_{-1}^1 \left\{ \sqrt{1-x^2} - \left(-\sqrt{1-x^2} \right) \right\} dx = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \pi.$$

つまり半径 1 の円の面積は π.

例 **17.** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq x \leqq 1, x^2 \leqq y \leqq 1\}$ とし，$f(x,y) = xe^{-y^2}$ とするとき，$\iint_D f(x,y)dxdy$ を求めよ．

(解.) 普通に定理を適用すると，

$$\iint_D xe^{-y^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 xe^{-y^2}dy \right) dx$$

となるが，e^{-y^2} の不定積分がわからないため，ここで手詰まりとなる．

そこで $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq x \leqq \sqrt{y}\}$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\iint_D xe^{-y^2}dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} xe^{-y^2}dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2e^{-y^2}}{2} \right]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{ye^{-y^2}}{2}dy = \left[\frac{-e^{-y^2}}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

第 11 回. 多重積分の変数変換公式 (川平先生の本, 第 27 章の内容)

岩井雅崇, 2020/12/22

7 変数変換公式

定義 18. $E \subset \mathbb{R}^2$ を集合とする. 点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ が E の境界であるとは. 任意の正の数 $r > 0$ について $B_{(a,b)}(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leqq r\}$ とするとき, $B_{(a,b)}(r) \cap E \neq \phi$ かつ $B_{(a,b)}(r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus E) \neq \phi$ となること. E の境界の点からなる集合を ∂E とする.

[6]

例 19. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1\}$ とする. このとき E の境界の点の集合は

$$\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} = 1\} \text{ となる.}$$

定義 20. $E \subset \mathbb{R}^2$ を面積確定な有界閉集合とし, 変数変換 Φ を次の通りとする.

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

Φ が重積分の変数変換の条件を満たすとは, 次の条件 (1)-(3) を満たすこと.
[条件 (1).] $x(u,v), y(u,v)$ は C^1 級である.
[条件 (2).] $D = \Phi(E)$ とするとき, E の境界以外で Φ は 1 対 1 写像.
[条件 (3).] Φ のヤコビ行列

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

とし, ヤコビアンを $\det D\Phi = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)$ とするとき, $\det D\Phi$ は E の境界以外で 0 にならない.

例 21.

- $E = [0,1] \times [0,1]$ とし,

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u+v, v) \end{array}$$

  とすると, 条件 (1)-(3) を満たす. 特に $D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ かつ $\det D\Phi = 1 \neq 0$ である.

- $E = [0,1] \times [0,1]$ とし,

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u+v, u+v) \end{array}$$

[6] $B_{(a,b)}(r) \cap E \neq \phi$ とは $B_{(a,b)}(r) \cap E$ が空集合でないこと. つまり, ある元 $(c,d) \in B_{(a,b)}(r) \cap E$ が存在すること.

とすると, 条件 (3) を満たさない. 実際 $D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ かつ $\det D\Phi = 0$ である.

- $E = [0,1] \times [0, 2\pi]$ とし,

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たし. $D = \Phi(E) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1\}$ となる. 特に $D\Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ かつ $\det D\Phi = r$ である.[7]

- $E = [0,1] \times [0, 4\pi]$ とし,

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

とすると, 条件 (2) を満たさない. [8]

定理 22 (多重積分の変数変換公式)**.** $E \subset \mathbb{R}^2$ を面積確定な有界閉集合とし, 変数変換 Φ を次の通りとする.

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

Φ は重積分の変数変換の条件 (条件 (1)-(3)) を満たすとする.
関数 $f(x,y)$ が $D = \Phi(E)$ 上で積分可能であるとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v))|\det D\Phi|dudv \text{ となる.}$$

例 **23.** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1\}$ とする. $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.
(解.) $E = [0,1] \times [0, 2\pi]$ とし,

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たし. $D = \Phi(E)$ かつ $\det D\Phi = r$ である.

---

[7] この例では $E \setminus \partial E = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$ であるため, E の境界以外の集合である $E \setminus \partial E$ 上で $\det D\Phi = r$ は 0 ではない.

[8] $\Phi(\frac{1}{2}, \pi) = \Phi(\frac{1}{2}, 3\pi) = (-\frac{1}{2}, 0)$ であるため 1 対 1 ではない. 1 対 1 に関しては第 4 回授業を参照のこと.

以上より多重積分の変数変換の公式から

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy &= \iint_E e^{-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}|r|drd\theta \\ &= \iint_E e^{-r^2}rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 e^{-r^2}rdr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1-e^{-1}}{2}d\theta = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

例 **24.** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x+2y|\leqq 1, |x-y|\leqq 1\}$ とする. $\iint_D (x-y)^2dxdy$ を求めよ.
(解.) $E=[-1,1]\times[-1,1]$ とし,

$$\begin{array}{cccc}\Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\frac{u+2v}{3}, \frac{u-v}{3})\end{array}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たし, $D=\Phi(E)$ かつ $D\Phi=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ かつ $\det D\Phi=-\frac{1}{3}\neq 0$ である. 以上より多重積分の変数変換の公式から,

$$\begin{aligned}\iint_D (x-y)^2dxdy &= \iint_E\left(\frac{u+2v}{3}-\frac{(u-v)}{3}\right)^2\left|-\frac{1}{3}\right|dudv \\ &= \iint_E\frac{v^2}{3}dudv = \int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1\frac{v^2}{3}dv\right)du = \int_{-1}^1\left[\frac{v^3}{9}\right]_{-1}^1 du = \int_{-1}^1\frac{2}{9}du = \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

第12回. 広義積分とガンマ関数 (川平先生の本, 第12・27章の内容)

岩井雅崇, 2021/01/12

8 広義積分

この回は1変数の積分に関しても取り扱う.(ガウス積分以外は1変数の積分の話である.)

定義 25. $f(x)$ を $[a,b)$ 上の連続関数とする.($b=+\infty$ も許す.) 左極限 $\lim_{z\to b-0}\int_a^z f(x)dx$ が存在するとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束するといい

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{z\to b-0}\int_a^z f(x)dx \text{ とする.}$$

この積分を広義積分という. 極限が存在しないときは, $\int_a^b f(x)dx$ は発散するという.

例 26.
- $\int_1^\infty x^p dx$ は $p<-1$ のとき収束し, $p \geqq -1$ のとき発散する.
- $\int_0^1 x^p dx$ は $p>-1$ のとき収束し, $p \leqq -1$ のとき発散する.

定理 27. $f(x)$ を $[a,b)$ 上の連続関数とする.

1. $b=+\infty$ のとき, ある $\lambda>1$ があって, $f(x)x^\lambda$ が $[a,+\infty)$ 上で有界ならば, 広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ は収束する.
2. b が実数のとき ($b<+\infty$ のとき), ある $\mu<1$ があって, $f(x)(x-b)^\mu$ が $[a,b)$ 上で有界ならば, 広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束する.

[9]

例 28. 広義積分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ は収束する. $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}x^2=0$ から, $e^{-x^2}x^2$ は $[0,+\infty)$ 上で有界のため, $\lambda=2$ として定理27を適応すれば良い.

例 29. 実数 $s>0$ について, 広義積分 $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.
(証.) $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx = \int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx + \int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ より両方の広義積分が収束することを示す.
(1). $\lim_{x\to\infty}(e^{-x}x^{s-1})x^2 = \lim_{x\to\infty} e^{-x}x^{s+1} = 0$ より定理27から広義積分 $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.
(2). $\lim_{x\to 0}(e^{-x}x^{s-1})x^{1-s} = \lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$ であり, $1-s<1$ のため, 定理27から広義積分 $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.

定理 30 (ガウス積分)**.**

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

[9] 関数 $g(x)$ が $[a,b)$ 上で有界とは, ある正の数 $M>0$ があって, 任意の $x\in[a,b)$ について $|g(x)|<M$ となること.

9　ガンマ関数とベータ関数

定義 31.

- $s>0$ なる実数 s について, ガンマ関数 $\Gamma(s)$を

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \text{ と定義する.}$$

- $p>0, q>0$ なる実数 p,q について, ベータ関数 $B(p,q)$を

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \text{ と定義する.}$$

ガンマ関数, ベータ関数においての広義積分が収束することは定理 27 から分かる. ガンマ関数は階乗の概念の一般化と思って良い.

定理 32. ガンマ関数 $\Gamma(s)$, ベータ関数 $B(p,q)$ について次が成り立つ.

1. $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s), \Gamma(1)=1$. 特に正の自然数 n について $\Gamma(n+1)=n!$.
2. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. 特に正の自然数 n について $\Gamma(\frac{1}{2}+n)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.
3. $B(p,q)=B(q,p)$.
4. $B(p,q)=B(p+1,q)+B(p,q+1)$, $B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q)$, $B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)$.
5. $B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2p-1}(\sin t)^{2q-1}dt$.
6. $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
7. $B(1,1)=1$, $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\pi$. 特に l,m を正の自然数として, $B(l,m)=\frac{(l-1)!(m-1)!}{(l+m-1)!}$.

[10]

例 33. n を自然数として,

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^n dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^n dt \text{ の値を求めよ.}$$

(解.) 定理 32 から

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2(\frac{n+1}{2})-1}(\sin t)^{2(\frac{1}{2})-1}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)}=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ となる.}$$

[10] $n!!$ は二重階乗と呼ばれる. n を正の自然数として, $(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1$, $(2n)!!=(2n)(2n-2)\cdots4\cdot2$ である. 便宜上 $0!!=1$ とする.($0!=1$ であるので.)

(1). n が偶数のとき. $n=2m$ とおくと, 定理 32 から

$$I_n=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{(2m-1)!!\sqrt{\pi}}{2^m(m!)}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\text{ である.}$$

(2).n が奇数のとき. $n=2m+1$ とおくと, 定理 32 から

$$I_n=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{2^{m+1}(m!)}{(2m+1)!!\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{(n-1)!!}{n!!}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\text{ である.}$$

例 **34** (ウォリスの公式)**.**

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}&=\lim_{m\to\infty}\frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)}\cdot\frac{(2(m-1))^2}{(2m-1)(2m-3)}\cdots\frac{2^2}{3\cdot 1}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(1-\frac{1}{4m^2})}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{4(m-1)^2})}\cdots\frac{1}{(1-\frac{1}{4})}\text{ となる.}\end{aligned}$$

[11] つまり

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdots\quad\text{である.}$$

(証.) $J(m)=\frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)}\cdot\frac{(2(m-1))^2}{(2m-1)(2m-3)}\cdots\frac{2^2}{3\cdot 1}$ とおく. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^n dt$ とおくと, $I_{2m+2}\leqq I_{2m+1}\leqq I_{2m}$ より, 例 33 から

$$\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\frac{\pi}{2}\leqq\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\leqq\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}\text{ である.}$$

この不等式の両辺に $\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}$ をかけると

$$\frac{2m+1}{2m+2}\frac{\pi}{2}\leqq J(m)\leqq\frac{\pi}{2}$$

であるため, $\lim_{m\to\infty}J(m)=\frac{\pi}{2}$ である.

10　他の資料・動画について

以下に示す資料や動画の数学的な厳密性に関しては保証しない. (おそらく大丈夫だと思うが, 詳しく見ていないので保証はできない. 直感的なわかりやすさを第一にすると, 厳密性は二の次になるし... あと広告が出てくるリンクもあるので注意すること.)

ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ は正規分布 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ と関わりが深い. 正規分布に関しては統計でよく使うことになる. (今回その話をしようとしたが意外とまとめるのが難しかったのでやめた.)

[11] 積の記号を使って書けば,

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(1-\frac{1}{4m^2})}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{4(m-1)^2})}\cdots\frac{1}{(1-\frac{1}{4})}=\Pi_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(1-\frac{1}{4i^2})}\quad\text{である.}$$

- 株式会社 Albert の記事 https://www.albert2005.co.jp/knowledge/statistics_analysis/probability_distribution/normal_distribution
- マイナビニュース 正規分布の基本的な考え方 https://news.mynavi.jp/article/excelanalytics-57/

とか参考になるかもしれません. (偏差値・標準偏差も正規分布から来ているので調べるといいかもしれません.)

ガンマ関数に関しては YouTube にいっぱい動画があるのでそちらを参考にするといいかもしれません. 例えば

- 予備校のノリで学ぶ「大学の数学・物理」【大学数学】ガンマ関数① (定義と性質)【解析学】 https://www.youtube.com/watch?v=K-HwL3N4P5Q
- 予備校のノリで学ぶ「大学の数学・物理」【大学数学】ガンマ関数② (収束性の証明)【解析学】https://www.youtube.com/watch?v=dy40up4jnc0
- 予備校のノリで学ぶ「大学の数学・物理」【大学数学】ガンマ関数③ (n 次元球の体積)【解析学】https://www.youtube.com/watch?v=AEj6MOoAgL4&t=1001s

などが参考になるかもしれません. 特に n 次元球の体積はこの授業でやらなかったのでためになるかもしれません. [12]

[12] サムネイルにある (1.5)! の値は定理 32 の 1 と 2 から $\Gamma(\frac{3}{2}+1)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ と思えます.

第 13 回. 線積分とグリーンの定理 (川平先生の本, 第 11・29 章の内容)

岩井雅崇, 2021/01/19

11　はじめに

第 13 回と第 14 回はベクトル解析の初歩 (イントロ) に関する授業を行う. 授業準備のために, 以下の文献も参考した.

- 川平友規先生 解析学概論第三第四 (ベクトル解析) available at `http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/17W-kaiseki.html`

時々この文献を引用する.(引用する際は”川平先生の pdf” と呼ぶことにする.)

他にも第 14 回の資料の最後に参考文献を書いておいたので, 必要であれば見てほしい.

12　線積分

定義 35. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とする. $u(x,y), v(x,y)$ を D 上の C^n 級関数として,

$$\begin{array}{rccc} V: & D & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (u(x,y), v(x,y)) \end{array}$$

となる (ベクトル値の) 関数 V を<u>D 上の C^n 級ベクトル場</u>という.

例 36. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $V(x,y) = (-y,x)$ を考えると, これは反時計回りの渦まきの形になっている.

定義 37.

- 関数 $\vec{p}(t)$ を次で定める.

$$\begin{array}{rccc} \vec{p}: & [a,b] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \vec{p}(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$$

  関数 <u>$\vec{p}(t)$ が滑らかな曲線</u>とは次の 2 条件を満たすこと.

  条件 1. $x(t), y(t)$ が C^1 級.

  条件 2. 任意の $c \in (a,b)$ について, 速度ベクトル $\frac{d\vec{p}}{dt}(c) = \left(\frac{dx}{dt}(c), \frac{dy}{dt}(c)\right)$ がゼロベクトル $\vec{0} = (0,0)$ ではない.

- <u>曲線 $C : \vec{p}(t) (a \leqq t \leqq b)$ が区分的に滑らかな曲線</u>とは滑らかな曲線を端点でつないだもの.

[13]

例 **38.** 円周は滑らかな曲線であり, 長方形の周は区分的に滑らかな曲線である.

定義 39. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし, D 上の C^1 級ベクトル場を $V(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ とする. D 内の滑らかな曲線 $C : \vec{p}(t)(a \leqq t \leqq b)$ についてV の曲線 C に沿った線積分を

$$\begin{aligned}\int_C V(\vec{p})d\vec{p} &= \int_a^b \left(V(\vec{p}(t)) \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}\right) dt \\ &= \int_a^b \left(u(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + v(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}\right) dt \text{ とする.}\end{aligned}$$

この線積分 $\int_C V(\vec{p})d\vec{p}$ を $\int_C udx + vdy$ と書くこともある.

[14]

例 **40.** C^1 級ベクトル場 $V(x, y) = (2x, 2y)$ とし, 滑らかな曲線 $C : \vec{p}(t) = (t, t^2)(0 \leqq t \leqq 1)$ とする. V の C に沿った線積分 $\int_C V(\vec{p})d\vec{p} = \int_C 2xdx + 2ydy$ の値を求めよ.
(解.) $V(\vec{p}(t)) = (2t, 2t^2)$ かつ $\frac{d\vec{p}}{dt} = (1, 2t)$ より,

$$\int_C 2xdx + 2ydy = \int_C \left(V(\vec{p}(t)) \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}\right) dt = \int_0^1 (2t \cdot 1 + 2t^2 \cdot 2t)dt = \int_0^1 (2t + 4t^3)dt = 2.$$

例 **41** (ハイキングの原理)**.** $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし. $F(x, y) : D \to \mathbb{R}$ を C^1 級関数とする.
勾配ベクトル場を $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ と定める. D 内の滑らかな曲線 $C : \vec{p}(t)(a \leqq t \leqq b)$ とするとき

$$\int_C \nabla F(\vec{p})d\vec{p} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) dt = \int_a^b \frac{dF}{dt}(\vec{p}(t))dt = F(\vec{p}(b)) - F(\vec{p}(a)).$$

つまり, $\vec{\alpha} = \vec{p}(a)$, $\vec{\beta} = \vec{p}(b)$ とおくと, $\int_C \nabla F(\vec{p})d\vec{p} = F(\vec{\beta}) - F(\vec{\alpha})$ である.

13　グリーンの定理

定義 42. $\mathbb{R}^2$ 内の区分的に滑らかな曲線 $C : \vec{p}(t)(a \leqq t \leqq b)$ が単純閉曲線とは次の二つの条件を満たすこと.

条件 1. 始点と終点が一致する.(つまり $\vec{p}(a) = \vec{p}(b)$.)

条件 2. 自己交差しない.(つまり $a < s < t < b$ なる s, t について $\vec{p}(s) \neq \vec{p}(t)$.)

[13]"曲線 $C : \vec{p}(t)(a \leq t \leq b)$ が区分的に滑らかな曲線" という定義を厳密にいうなら,「有限個の $c \in (a, b)$ を除いて, $x(t), y(t)$ が C^1 級であり, 速度ベクトル $\frac{d\vec{p}}{dt}(t) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right)$ がゼロベクトル $\vec{0}$ ではない」.

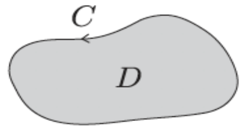
[14]線積分 $\int_C V(\vec{p})d\vec{p}$ を $\int_C udx + vdy$ と書くのは, (向きを込めた場合) この積分がパラメーターの取り方に寄らないからである. 詳しくは川平先生の pdf の命題 4.2 を参照せよ. (連鎖律からすぐに分かるのだが...)

定理 43 (グリーンの定理)**.** $\mathbb{R}^2$ 内の単純閉曲線 $C : \vec{p}(t) = (x(t), y(t))(a \leqq t \leqq b)$ について $D \subset \mathbb{R}^2$ を C で囲まれる有界な閉集合とする. C の進行方向の左側に D があると仮定する. D を含む開集合上で定義された C^1 級ベクトル場 $V(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ について以下が成り立つ.

$$\int_C V(\vec{p})d\vec{p} = \int_C udx + vdy = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy$$

特に $\mathrm{Area}(D) = \int_C xdy = \int_C -ydx$ が成り立つ.

$D \subset \mathbb{R}^2$ を C で囲まれる有界閉集合および, C の進行方向の左側に D があるとは右の図のようなことが成り立つことである



例 44. $C : \vec{p}(t) = (\cos t, \sin t)(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ とし, $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $V(x, y) = (x^2 - y^2, -2xy)$ とする.
線積分 $\int_C V(\vec{p})d\vec{p} = \int_C (x^2 - y^2)dx - 2xydy$ を求めよ.
(解.) 普通に計算すると,

$$\int_C V(\vec{p})d\vec{p} = \int_0^{2\pi} \left\{(\cos^2 t - \sin^2 t)\frac{dx}{dt} - (2\sin t\cos t)\frac{dy}{dt}\right\} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left\{-\cos^2 t\sin t + \sin^3 t - 2\sin t\cos^2 t\right\} dt = (\text{計算略}) = 0$$

グリーンの定理を使う方法は以下のようになる.

C で囲まれた領域 D とすると, D は原点中心の半径 1 の円である. $V(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x^2 - y^2, -2xy)$ は D を含む開集合上で定義された C^1 級ベクトル場である.[15] よってグリーンの定理の仮定を満たす.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(-2xy)}{\partial x} = -2y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = -2y \text{ であるため,}$$

$$\int_C (x^2 - y^2)dx - 2xydy = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (-2y + 2y)\, dxdy = 0.$$

例 45. a, b を正の数として, 楕円 D を下で定める.

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leqq x \leqq a, -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leqq y \leqq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right\}.$$

D の面積 $\mathrm{Area}(D)$ を求めよ.
(解.) 普通に計算すると,

$$\mathrm{Area}(D) = \int_D dxdy = \int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - (-b)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) dx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = (\text{計算略}) = \pi ab.$$

[15] 今回は D を含む開集合として $\mathbb{R}^2$ が取れる.

グリーンの定理を使うと以下の通りになる．$C : \vec{p}(t) = (a\cos t, b\sin t)(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ と置けば，楕円 D は C で囲まれた領域となる．よってグリーンの定理が使えて，$\frac{dy}{dt} = b\cos t$ のため，

$$\mathrm{Area}(D) = \int_C x dy = \int_0^{2\pi} a\cos t \frac{dy}{dt} dt = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t dt = \pi ab.$$

となる．(どちらが楽かは皆さんに委ねます.)

第 14 回. 面積分と体積分, 表面積と体積 (川平先生の本, 第 11・28 章の内容)

岩井雅崇, 2021/01/26

14　はじめに

第 13 回と第 14 回はベクトル解析の初歩 (イントロ) に関する授業を行う. 授業準備のために, 以下の文献も参考した.

- 川平友規先生 解析学概論第三第四 (ベクトル解析) available at `http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/17W-kaiseki.html`

時々この文献を引用する.(引用する際は"川平先生の pdf" と呼ぶことにする.)

15　曲線の長さ (復習)

定義 46. $\mathbb{R}^2$ 内の滑らかな曲線 $C : \vec{p}(t) = (x(t), y(t))(a \leqq t \leqq b)$ について. 曲線 C の長さ $l(C)$ を

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \int_a^b \left|\left|\frac{d\vec{p}(t)}{dt}\right|\right| dt \text{ と定義する.}$$

16　面積分

定義 47. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ とする.

- ベクトル $\vec{a}$ の長さ $||\vec{a}||$を $||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ とする.
- 外積 $\vec{a} \times \vec{b}$を

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \text{ とする.}$$

例 48. $\vec{a} = (1, 0, 0), \vec{b} = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ とする.
$||\vec{a}|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$ かつ, $||\vec{b}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$ である.
また, $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 2)$ かつ, $\vec{b} \times \vec{a} = (0, 0, -2)$ である.

定義 49 (川平先生の pdf 6 章 (プリント 06) 参照)**.**

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ が閉領域とは, ある領域 D があって, $\Omega = D \cup \partial D$ となること. (つまり Ω が D と D の境界の和集合となること.)
- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を閉領域とし, $x(s, t), y(s, t), z(s, t)$ を Ω 上の連続関数とする.

$$\begin{array}{rccc} \vec{p}: & \Omega & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (s,t) & \longmapsto & (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \end{array}$$

という関数 $\vec{p}(s,t)$ を考える.

$$S = \{\vec{p}(s,t) : (s,t) \in \Omega\} = \{(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) : (s,t) \in \Omega\}$$

を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面という.

- $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $S : \vec{p}(s,t)((s,t) \in \Omega)$ について, S が $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面であるとは, 次の二つの条件を満たすこと.

条件 1. $x(s,t), y(s,t), z(s,t)$ は C^1 級.

条件 2. $\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}\right)$ と $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right)$ が一次独立となる. (つまり $\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \neq \vec{0}$ となること.)

- $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面 $S : \vec{p}(s,t)((s,t) \in \Omega)$ について

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}}{\left\|\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}\right\|}$$ を単位法線ベクトルという.

例 50. $\Omega = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{s^2+t^2} \leqq 1\}$ とする. これは閉領域である.[16]

$$\begin{array}{rccc} \vec{p}: & \Omega & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (s,t) & \longmapsto & (s, t, \sqrt{1-s^2-t^2}) \end{array}$$ とすると,

$$S = \{\vec{p}(s,t) : (s,t) \in \Omega\} = \{(x,y,z) : 0 \leqq z, x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

つまり S は原点中心半径 1 の球の上半分の表面である.

また $\frac{\partial \vec{p}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$ を計算すると,

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} = \left(1, 0, \frac{-s}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\right),\ \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \left(0, 1, \frac{-t}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\right)$$ であるため,

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \left(\frac{s}{\sqrt{1-s^2-t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1-s^2-t^2}}, 1\right).$$

よって Ω 上で $\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \neq \vec{0}$ より S は滑らかな曲面である.

$$\left\|\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}\right\| = \sqrt{\frac{s^2}{1-s^2-t^2} + \frac{t^2}{1-s^2-t^2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-s^2-t^2}}$$ であるため,

単位法線ベクトルは $$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}}{\left\|\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}\right\|} = (s, t, \sqrt{1-s^2-t^2})$$ となる.

[16] $D = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{s^2+t^2} < 1\}$ とすれば $\Omega = D \cup \partial D$ となる.

定義 51 (川平先生の pdf 6 章 (プリント 06) 参照)**.**
$\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面 $S : \vec{p}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))((s,t) \in \Omega)$ とし, $F(x,y,z)$ を S を含む開集合上で定義された C^1 級関数とする. 関数 F の曲面 S 上での面積分を

$$\begin{aligned}\iint_S F(\vec{p})dA &= \iint_\Omega F(\vec{p}(s,t)) \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| dsdt \\ &= \iint_\Omega F(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| dsdt \text{ と定義する.}\end{aligned}$$

特に S の表面積 $\mathrm{Area}(S)$ を

$$\mathrm{Area}(S) = \iint_S 1dA = \iint_\Omega \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| dsdt \text{ と定義する.}$$

例 52. $S = \{\vec{p}(s,t) : (s,t) \in \Omega\} = \{(x,y,z) : 0 \leqq z, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とするとき, S の表面積 $\mathrm{Area}(S) = \iint_S dA$ を求めよ.

(解.) 例 50 から, $\Omega = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{s^2+t^2} \leqq 1\}$, $\vec{p}(s,t) = (s, t, \sqrt{1-s^2-t^2})$ とすると, $S = \{\vec{p}(s,t) : (s,t) \in \Omega\}$ かつ $\left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1-s^2-t^2}}$ である.

以上より,

$$\iint_S dA = \iint_\Omega \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| dsdt = \iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{1-s^2-t^2}} dsdt = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} drd\theta = 2\pi.$$

よって, S(原点中心の半径 1 の球の表面の上半分) の表面積は 2π である.

これにより原点中心の半径 1 の球の表面積は $2\pi \times 2 = 4\pi$ である.

より一般に原点中心の半径 $r > 0$ の球の表面積は $4\pi r^2$ である.[17]

定理 53. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を閉領域とし, $f(s,t)$ を Ω 上の非負の C^1 級関数とする.
このとき $S = \{(s,t,f(s,t)) : (s,t) \in \Omega\}$ は滑らかな曲面となり, 曲面積 $\mathrm{Area}(S)$ は

$$\mathrm{Area}(S) = \iint_\Omega \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + 1} \right) dsdt \text{ で与えられる.}$$

17 体積分

定義 54 (川平先生の pdf 11 章 (プリント 11) 参照)**.**

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ が閉領域とし, ϕ_1, ϕ_2 を $\phi_1(x,y) \leqq \phi_2(x,y)$ となる Ω 上の連続関数とする.

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, \phi_1(x,y) \leqq z \leqq \phi_2(x,y)\}$$

[17] 厳密にやるなら $\Omega = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{s^2+t^2} \leqq r\}, \vec{p}(s,t) = (s,t,\sqrt{r^2-s^2-t^2})$ として同じ計算をする.

となる有界閉集合 K をz 方向の線領域という.

- K を z 方向の線領域とし, $F(x,y,z)$ を K を含むある開集合上で定義された C^1 級関数とする. $F(x,y,z)$ の K 上での体積分を

$$\iiint_K F(x,y,z)dxdydz = \iint_\Omega \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} F(x,y,z)dz \right) dxdy \text{ と定義する.}$$

特にK の体積 $\mathrm{Vol}(K)$を

$$\mathrm{Vol}(K) = \iiint_K 1dxdydz = \iint_\Omega \{\phi_2(x,y) - \phi_1(x,y)\} dxdy \text{ と定義する.}$$

例 **55.** $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqq z, x^2+y^2+z^2 \leqq 1\}$ とする. K の体積 $\mathrm{Vol}(K) = \iiint_K 1dxdydz$ を求めよ.

(解.) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1\}$ とし, $\phi_1(x,y) = 0, \phi_2(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ とすると, $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, \phi_1(x,y) \leqq z \leqq \phi_2(x,y)\}$ となる. よって,

$$\iiint_K 1dxdydz = \iint_\Omega \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{1-r^2}\right) rdrd\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

よって, K(原点中心の半径 1 の球の上半分) の体積は $\frac{2\pi}{3}$ である.

これにより原点中心の半径 1 の球の体積は $\frac{2\pi}{3} \times 2 = \frac{4\pi}{3}$ である.

より一般に原点中心の半径 $r > 0$ の球の表面積は $\frac{4\pi r^3}{3}$ である.[18]

例 **56.** 底面の半径 $R > 0$, 高さが $h > 0$ の円錐の体積を求めよ.

(解.) 小学校でやった知識を用いると, (円錐の体積) = (底面積) $\times$ (高さ) $\times \frac{1}{3}$ により, 体積は $\pi R^2 \times h \times \frac{1}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$.

体積分を使うと次の通りである. $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leqq R\}$ とすると, 円錐は

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, 0 \leqq z \leqq h\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)\right\}$$

という z 方向の線領域 K で表せられる. 以上より,

$$\mathrm{Vol}(K) = \iint_\Omega h\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right) dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R h\left(1-\frac{r}{R}\right) rdr\right) d\theta = (\text{計算略}) = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

よって 底面の半径 $R > 0$, 高さが $h > 0$ の円錐の体積は $\frac{\pi R^2 h}{3}$ である.[19]

[18]厳密にやるなら $\Omega = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{s^2+t^2} \leqq r\}$, $\phi_1(x,y) = -\sqrt{r^2-x^2-y^2}$, $\phi_2(x,y) = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$ として同じ計算をする.

[19]小学校以来, なぜ $\frac{1}{3}$ が出てくるのだろうと思った人も多いかもしれないが, これは積分による結果で出たものである. あともっと簡単な求め方もある.

18 最後に

第 13 回と第 14 回はベクトル解析の初歩 (イントロ) に関する授業を行った．ベクトル解析は電磁気学などいろいろなところでお世話になる.(もしかしたら電磁気学や他の授業で詳しく学ぶかもしれません.)

ベクトル解析に関して, より詳しいことを学びたい人は

- 川平友規先生 解析学概論第三第四 (ベクトル解析) available at `http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/17W-kaiseki.html`

を参考にすると良い．図などが綺麗に揃っててものすごく分かり易かった.

空間内の曲線や曲面に関しては

- 小林昭七 曲線と曲面の微分幾何 (裳華房)

が数学的に厳密で良いかもしれない.

私が 10 年前にベクトル解析を学んだときに使った本は

- 渡辺正 ベクトル解析の基礎と応用 新数理ライブラリＭ 5 (サイエンス社)

である．結構ラフに書いていて, 数学的な厳密性抜きで学べた気がする．もっともこの本に限らず, ネットで調べれば色々な本が見つかるので, 各自調べてみて吟味してください．[20]

他にも”予備校のノリで学ぶ「大学の数学・物理」”チャンネルに再生リスト”ベクトル解析”や”電磁気学”があるので, ベクトル解析につまづいたらこちらで補うのもいいかもしれません．(直感的にものすごくわかりやすかったです).

[20]「スバラシク実力がつくと評判のベクトル解析キャンパス・ゼミー大学の数学がこんなに分かる!単位なんて楽に取れる! (マセマ出版社)」という本もありますし...
もしかしたら私の授業の内容を「スバラシク実力がつくと評判の微分積分キャンパス・ゼミー大学の数学がこんなに分かる!単位なんて楽に取れる!(マセマ出版社)」という本で勉強している人がいるかもしれません．もしこの本読んで私の授業の単位を楽に取れた場合はご一報ください．以後の授業の参考にいたします.