# 第 1 回. 多変数の連続写像 (川平先生の本, 第 16 章の内容)

岩井雅崇, 2020/10/06

## 1　いくつかの準備

以下の用語に関して興味のない人は読み飛ばして良い.

1. $xy$ 平面上の点 $(a,b)$ と正の数 $r>0$ について, 点 $(a,b)$ 中心の半径 $r$ の (閉) 円板を
$$B_{(a,b)}(r)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\leqq r\} \quad \text{とする.}$$
2. $a<b$ かつ $c<d$ について,
$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leqq x\leqq b \text{ かつ } c\leqq y\leqq d\} \quad \text{とする.}$$

以下 $E\subset\mathbb{R}^2$ を集合とする.

3. $(a,b)\in E$ が $E$ の<u>内点</u>とは, ある正の数 $r>0$ があって $B_{(a,b)}(r)\subset E$ となること.
4. $E$ が<u>開集合</u>とは, 任意の (全ての)$(a,b)\in E$ について $(a,b)$ は $E$ の内点となること.
5. $E$ が<u>閉集合</u>とは, $\mathbb{R}^2\setminus E$[1] が開集合であること.
6. $E$ が<u>有界</u>とは, ある正の数 $M>0$ があって, $E\subset[-M,M]\times[-M,M]$ となること.
7. $E$ が<u>連結</u>とは, $E$ の任意の 2 点が $E$ 内の折れ線で結べること.
8. $E$ が<u>領域</u>とは, $E$ が連結な開集合であること.

**例 1.**
- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2}<1\}$ は開集合, 有界, 連結, 領域. でも閉集合ではない.
- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2}\leqq 1\}$ は閉集合, 有界, 連結. でも開集合ではない.
- $\mathbb{R}^2$ は開集合, 閉集合, 連結, 領域. でも有界ではない.

9. 関数 $f(x,y)$ の値が定まる集合を $f$ の<u>定義域</u>といい,
$$\{k\in\mathbb{R} : f(x,y)=k \text{ となる } (x,y) \text{ が定義域内に存在 }\}$$
を $f$ の<u>値域</u>という.
10. <u>$f$ が領域 $E$ 上の関数</u>とは, $E$ が $f$ の定義域に含まれることである. このとき
$$\begin{array}{cccc} f: & E & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \quad \text{とかく.}$$

**例 2.** $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ の定義域は $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2}\leqq 1\}$. 値域は $[0,1]$.

[1] $\mathbb{R}^2\setminus E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\notin E\}$ と定義する.

## 2　極限と連続性

**定義 3.** $(x,y)$ が $(a,b)$ に限りなく近づくとは $(x,y) \neq (a,b)$ かつ

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \to 0$$

となるように変化すること．以後，$(x,y) \to (a,b)$ とかく．

**定義 4.** $f(x,y)$ を領域 $D$ 上の関数とする．$f(x,y)$ が $(x,y) \to (a,b)$ のとき実数 $A$ に収束するとは $(x,y)$ が $(a,b)$ に近づくとき，$f(x,y)$ が $A$ に限りなく近づくことである．このとき

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A \quad \text{または} \quad f(x,y) \to A \ ((x,y)\to(a,b)) \quad \text{とかく．}$$

**定義 5.** $f(x,y)$ を領域 $D$ 上の関数とする．$f$ が $(a,b) \in D$ で連続とは

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \quad \text{となること．}$$

$f$ が $D$ 上で連続とは $f$ が任意の点 $(a,b) \in D$ で連続となること．

**例 6.**
- $f(x,y) = x+y$, $f(x,y) = e^{x+y^2}$．これらは $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数．(みんながよく知っている関数は連続関数.)
- $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ は定理 8 より $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の連続関数.
- $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を次で定義する.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 1 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

  $f$ は $(0,0)$ で連続ではない.

  なぜなら $(0,y) \to (0,0)$ という近づけ方をすると，$f(0,y) = -1 \to -1$ であるため，$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) \neq f(0,0)$ より連続ではない.

**定理 7.** $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = B$ とする．このとき以下が成り立つ.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \{f(x,y)+g(x,y)\} = A+B.$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = AB.$$

.

$$B \neq 0 \text{ のとき}, \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B}.$$

**定理 8.** 関数 $f, g$ が点 $(a,b)$ で連続であるとする．このとき以下が成り立つ．

- $f(x,y) + g(x,y)$ や $f(x,y)g(x,y)$ は $(a,b)$ で連続.
- $g(a,b) \neq 0$ のとき, $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ は $(a,b)$ で連続.

## 3 最大最小の存在

**定理 9.** 有界な閉集合 $D$ 上で連続な関数 $f$ は最大値・最小値を持つ.

**例 10.** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1\}$ とすると $D$ は有界閉集合．$f(x,y) = x$ とすると $f$ は連続．実際, $D$ 上で $f$ は最大値 $1$, 最小値 -1 を持つ.