第 6 回. 極値問題 (川平先生の本, 第 23 章の内容)

岩井雅崇, 2020/11/17

1　極値の定義

定義 1. $f(x,y)$ を領域 D 上の関数とする.

- $f(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ で極大であるとは, (a,b) 中心の十分小さな半径の円板上で $(x,y) \neq (a,b)$ ならば $f(x,y) < f(a,b)$ となること. このときの $f(a,b)$ の値を極大値という.
- $f(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ で極小であるとは, (a,b) 中心の十分小さな半径の円板上で $(x,y) \neq (a,b)$ ならば $f(x,y) > f(a,b)$ となること. このときの $f(a,b)$ の値を極小値という.
- 極大値, 極小値の二つ合わせて極値という. 極値をとる点 (a,b) を極値点という.
- 点 $(a,b) \in D$ が $f(x,y)$ の鞍点 (あんてん, saddle point) であるとは, ある方向で点 (a,b) が極大となり, 違うある方向で点 (a,b) が極小となること.

例 2.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$. 極値点 $(0,0)$, 極値 0, 極小値.
2. $f(x,y) = -x^2 - y^2$. 極値点 $(0,0)$, 極値 0, 極大値.
3. $f(x,y) = x^2 - y^2$. $f(t,0) = t^2$ より, $(t,0)$ の方向で見れば $(0,0)$ は極小. $f(0,t) = -t^2$ より, $(0,t)$ の方向で見れば $(0,0)$ は極大. よって $(0,0)$ は鞍点.
4. $f(x,y) = -x^2$. $f(0,t) = 0$ であるから $(0,0)$ は極大ではない.

定理 3. $f(x,y)$ を C^1 級関数とする. f が (a,b) で極値を取るならば,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$$

2　ヘッシアンを使った極値判定法

定義 4. $f(x,y)$ を C^2 級関数とする.

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

をfのヘッセ行列と呼び

$$D_f = \det H(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

をヘッシアン (Hessian)と呼ぶ. (判別式とも呼ばれる).

定理 **5.** C^2 級関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ であるとする.

1. $D_f(a,b) > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ のとき, f は点 (a,b) で極小.
2. $D_f(a,b) > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ のとき, f は点 (a,b) で極大.
3. $D_f(a,b) < 0$ の時, 点 (a,b) は f の鞍点.

例 **6.**

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$. $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $D_f = 4$. f は $(0,0)$ で極小.
2. $f(x,y) = -x^2 - y^2$. $H(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. $D_f = 4$. f は $(0,0)$ で極大.
3. $f(x,y) = x^2 - y^2$. $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. $D_f = -4$. $(0,0)$ は f の鞍点.

3 ヘッシアンを使った極値判定法のやり方

C^2 級関数 f に関して極値を求める方法は以下の通りである.

[手順 1.] $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ となる点 (a,b) を求める.

[手順 2.] $D_f(a,b)$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ を求める. そして定理 5 を適応する.

例 **7.** $f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x + 12y$ について極大点・極小点を持つ点があれば, その座標と極値を求めよ. またその極値が極小値か極大値のどちらであるか示せ.

(解.) 上の手順に基づいて極値を求める.

[手順 1.]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3, \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 12$$

より, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ となる点 (a,b) は $(1,2), (1,-2), (-1,2), (-1,-2)$.

[手順 2.]

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}, D_f = -36xy.$$

よって上の 4 点に対し $D_f(a,b)$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ を計算する.

1. $D_f(1,2) = -72 < 0$ より定理 5 から $(1,2)$ は f の鞍点.
2. $D_f(1,-2) = 72 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-2) = 6 > 0$ より定理 5 から $(1,-2)$ は f の極小点. $f(1,-2) = -18$.
3. $D_f(-1,2) = 72 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2) = -6 < 0$ より定理 5 から $(-1,2)$ は f の極大点. $f(-1,2) = 18$.
4. $D_f(-1,-2) = -72$ より定理 5 から $(-1,-2)$ は f の鞍点.

以上より, f は $(1,-2)$ で極小値 -18 をもち, f は $(-1,2)$ で極大値 18 をもつ.