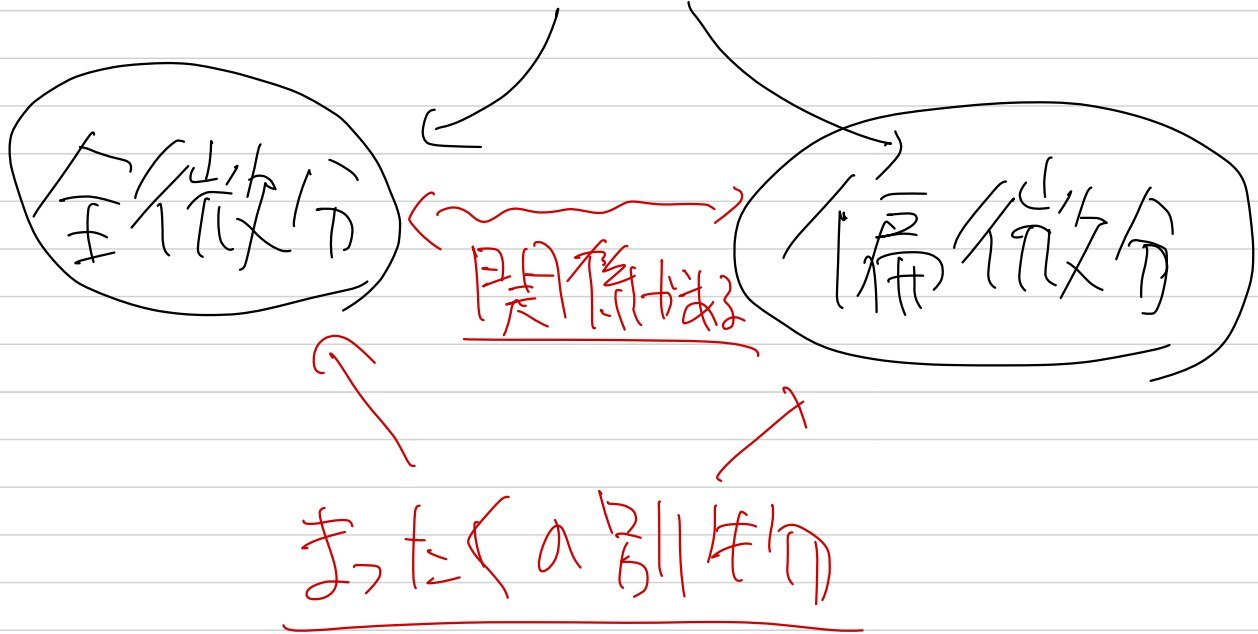


第2回 変数関数の微分

(11年 第17・18章)

(あらすじ) 変数の微分を変数に拡張!



(定義) 全微分.

- 関数 $f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能とあるとき、
ある定数 A, B が存在し、

$$E(x, y) = f(x, y) - \{ f(a, b) + A(x-a) + B(y-b) \}.$$

とあるとき、

(全微分可能の記号)

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{|E(x, y)|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0 \quad \text{とあるとき}$$

- $f(x, y)$ が全領域 D 上のすべての点で
全微分可能であるとき
 $f(x, y)$ は D 上全微分可能であるという。

- 上の状況下において、

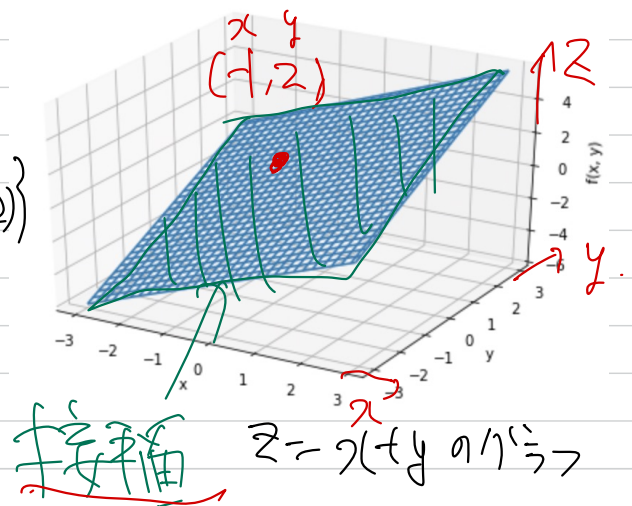
$$z = f(a, b) + A(x-a) + B(y-b) \quad \text{とあるとき}$$

これを $f(x, y)$ の (a, b) での接平面の方程式とみる。
このようにいうのを接平面という。

(例1) ① $f(x, y) = x + y$. 点 $(-1, 2)$ で全微分可能.
 (証明) $A=1, B=1$ とする.

$$E(x, y) = (x + y) - \{(-1 + 2) + 1(x + 1) + 1(y - 2)\} = 0.$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|E(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$



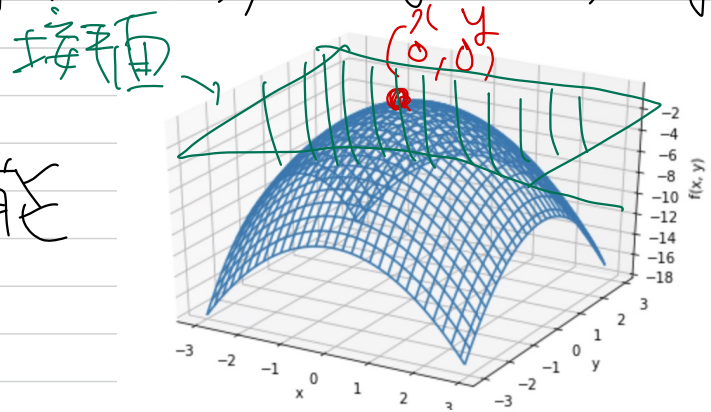
接平面の方程式 $z = 1 + 1(x - (-1)) + 1(y - 2) = x + y$

② $f(x, y) = -x^2 - y^2$.
 点 $(0, 0)$ で全微分可能

(証明) $A=0, B=0$ とする

$$E(x, y) = -x^2 - y^2 - \{0 + 0(x - 0) + 0(y - 0)\} = -x^2 - y^2.$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|E(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$



接平面の方程式 $z = 0 + 0(x - 0) + 0(y - 0) = 0$

"全微分可能"とは接平面で近似できる
 ということ

(疑問) どのようにして A, B を取っていいの?
~~~~> "偏微分" をとる.

(定義) 偏微分

- 関数  $f(x, y)$  が  $(a, b)$  で偏微分可能とは  
2つの極限

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}, \quad B = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

が存在すること.

このとき  $A, B$  を  $f(x, y)$  の  $(a, b)$  での偏微分係数と

2  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  とかく

- $f$  を領域  $D$  上の関数として,  $D$  上全ての点で  
 $f$  が偏微分可能であるとき  
 $f$  は  $D$  上偏微分可能であるという.

a  $\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : D \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

を  $f(x, y)$  の偏導関数.

$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) \in \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x, y) = (a, b)}$  とかく = ともある

(例1) ①  $f(x, y) = x^2 y^3$  点  $(a, b)$  を固定点

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 b^3 - a^2 b^3}{x - a} = 2ab^3$$

( $\frac{\partial f}{\partial x}$ )

つまり偏微分のやり方は、"yを定数"と見、  
"x  $\rightarrow$   $x^2 y^3$ " を x にかんじて微分する。

偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$   
 $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2$

(例1) ②  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(1 - x^2 - y^2)}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$= \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

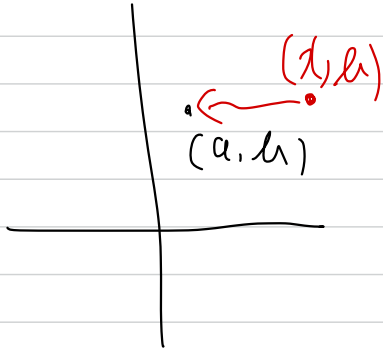
(例1) ③  $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

**[定理]** 全微分可能な偏微分可能  
 $f(x, y)$  が  $(a, b)$  で全微分可能であるとき,  
 $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  かつ  $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  となる.  
 (特に偏微分可能)

(証明) 点  $(a, b)$  で全微分可能から、ある  $A, B$  があつて、

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \left| \frac{f(x, y) - \{f(a, b) + A(x-a) + B(y-b)\}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \right| = 0$$


 今  $(x, b) \rightarrow (a, b)$  とする制限を  
 考へてみる.

$$\lim_{(x, b) \rightarrow (a, b)} \left| \frac{f(x, b) - f(a, b) - A(x-a)}{x-a} \right| = 0$$

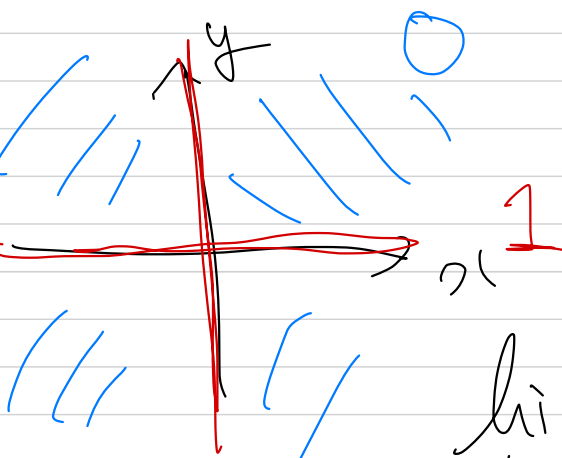
$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x-a} - A \right| = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x-a} = A$$

偏微分可能

(例1) 偏微分可能であるが全微分可能でない例.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \text{ か } y \neq 0 \\ 1 & x = 0 \text{ か } y = 0 \end{cases}$$



$(0, 0)$  で  $f$  は偏微分可能.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

∴  $(0, 0)$  で全微分可能ではない.

(定理法) もし全微分可能なら,  $A = B = 0$  か,

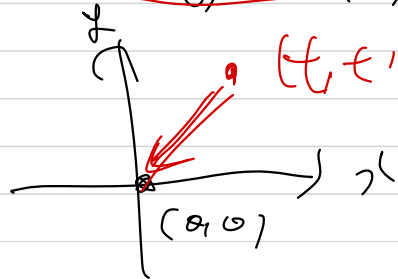
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y) - \{f(0, 0) + A(x-0) + B(y-0)\}|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\therefore \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y) - 1|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\therefore \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 1$$

∴  $(x, y) = (t, t)$  と ( $t \rightarrow 0$  の極限) とすると

$$\lim_{(t, t) \rightarrow (0, 0)} f(t, t) = 0 \neq 1$$





(定義)  $C^1$ 級.

$f$  を 2次元域  $D$  上の関数とする

$f$  が  $D$  上 すべての点で偏微分可能であり

偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  が  $D$  上連続であるとき

$f$  を  $C^1$ 級という

(例1)  $x^2y^3, \sin(x^2+y^2), e^{x^2+y^2}$  etc...

だいたい目にする関数は  $C^1$ 級

(この授業で扱っている関数はほぼ特殊)

[定理]  $f$  が 2次元域  $D$  上  $C^1$ 級ならば  
 $D$  上 全微分可能.

とくに 点  $(a, b) \in D$  において.

$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  とおけば

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{|E(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0 \quad \text{となる}$$

(例1)  $f(x,y) = x+y$   $C^1$ 級  $(a,b) = (1,2)$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 1, B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 1$$

(例12)  $f(x,y) = x^2 - y^2$   $C^1$ 級  $(a,b) = (0,0)$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, B = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$



[定理の証明]  $(a, b) \in D$  を固定.

$$B(a, r)(r) \subset \bar{D} \text{ かつ } \exists \text{ の数 } r > 0 \text{ をとる.}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \quad \chi(z)$$

$$E(x,y) = \underbrace{f(a,y) - f(a,h) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,h)(y-h)}_{\in \mathcal{O}(\|y-h\|^2)} + \underbrace{f(x,h) - f(a,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,h)(x-a)}_{\in \mathcal{O}(\|x-a\|^2)} \in \mathcal{O}(\|x-a\|^2 + \|y-h\|^2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{|E_1(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{|E_2(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \stackrel{+}{=} 0$$

① 平均値の定理 より、ある  $\theta$  が ある、 $(x, \theta) \in B(a, r)$  とする。  
 (左辺と右辺)  

$$f(x, y) - f(x, h) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \theta)(y - h) \text{ となる。}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{|E_1(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left| \frac{(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \right|$$

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right|$$

② 同様、

(注) 全微分可能で  $\phi$  級でない例がある)

(定理) 全微分可能ならば連続である

(証明)  $f$  が  $(a, b)$  で全微分可能とすると

$$\begin{aligned} & \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) - f(a, b) \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} E(x, y) + \underbrace{A(x-a)} + \underbrace{B(y-b)} = 0 \end{aligned}$$

(例)  $C^1$ 級  $\Rightarrow$  全微分可能  $\Rightarrow$  連続  
 $\Downarrow$   
偏微分可能

