第 10 回. 累次積分 (川平先生の本, 第 26 章の内容)

岩井雅崇, 2020/12/15

1　縦線領域と累次積分

定義 1. $\phi_1(x), \phi_2(x)$ を $\phi_1(x) \leqq \phi_2(x)$ となる $[a,b]$ 上の連続関数とする.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b, \phi_1(x) \leqq y \leqq \phi_2(x)\}$$

で表せられる領域を縦線領域という.

例 2.
- $D = [a,b] \times [c,d]$ は縦線領域. $\phi_1(x) = c$, $\phi_2(x) = d$ とすれば良い.
- 縦線領域 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\}$ とおくと D は原点中心の半径 1 の円.

定理 3. 縦線領域を $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b, \phi_1(x) \leqq y \leqq \phi_2(x)\}$ とし, $f(x,y)$ を D 上の連続関数とする. このとき, $f(x,y)$ は D 上で積分可能であり,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \text{ となる.}$$

これを$f(x,y)$ の累次積分という.
特に D は面積確定で

$$\mathrm{Area}(D) = \iint_D dxdy = \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\}dx.$$

例 4. $D = [0,1] \times [0,1]$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ とする. $\iint_D f(x,y)dxdy$ を求めよ.
(解.) $\phi_1(x) = 0, \phi_2(x) = 1$ とすると上の定理より,

$$\iint_D x^2+y^2 dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 + y^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_0^1 x^2 + \frac{1}{3} dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

例 5. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\}$ とする. $\mathrm{Area}(D) = \iint_D dxdy$ を求めよ.
(解.) $\phi_1(x) = -\sqrt{1-x^2}, \phi_2(x) = \sqrt{1-x^2}$ とすると上の定理より,

$$\iint_D dxdy = \int_{-1}^1 \left\{ \sqrt{1-x^2} - \left(-\sqrt{1-x^2} \right) \right\} dx = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi.$$

つまり半径 1 の円の面積は π.

例 **6.** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq x \leqq 1, x^2 \leqq y \leqq 1\}$ とし，$f(x,y) = xe^{-y^2}$ とするとき，$\iint_D f(x,y)dxdy$ を求めよ．

(解.) 普通に定理を適用すると,

$$\iint_D xe^{-y^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 xe^{-y^2}dy\right)dx$$

となるが, e^{-y^2} の不定積分がわからないため, ここで手詰まりとなる.

そこで $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq x \leqq \sqrt{y}\}$ に注意すると,

$$\begin{aligned}\iint_D xe^{-y^2}dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} xe^{-y^2}dx\right)dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2e^{-y^2}}{2}\right]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{ye^{-y^2}}{2}dy = \left[\frac{-e^{-y^2}}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$