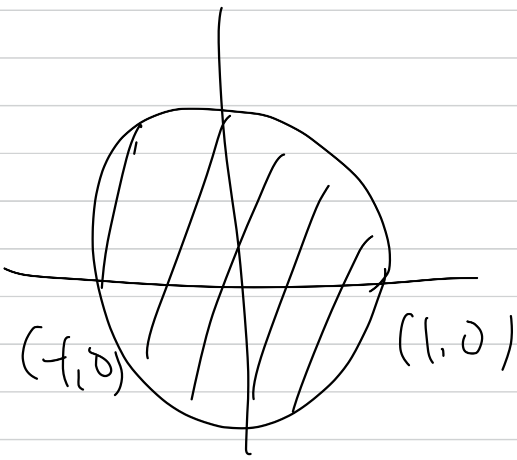
第11回 多重積分の変数変換公式 (川平27章) 11

あらすじ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$

$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ をもとめよ.



第10回のやり方だと

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{array}{l} -1\le x\le 1 \\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2}\end{array}\right\}$$

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy=\int_{-1}^{1}\boxed{\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2}\,dy\right)}dx.$$

e^{-y^2}の不定積分がわからず手づまり

実は $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ という極座標変換で計算できる!!

(定義)

・ $E \subset \mathbb{R}^2$ を集合とする。$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ が E の境界であるとは、任意の正の数 $r>0$ について、

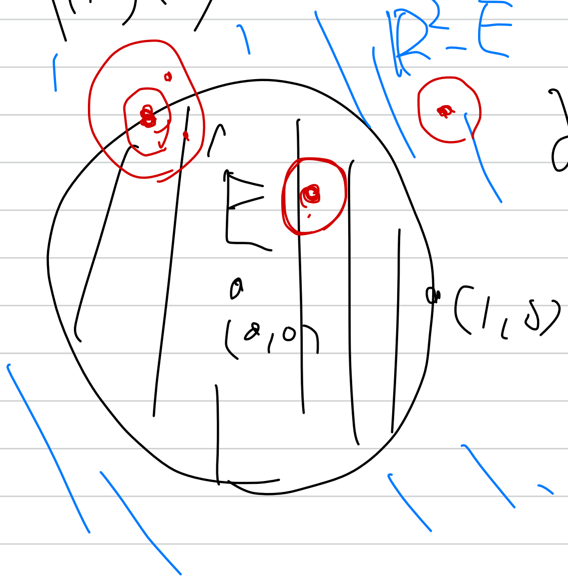
$B_{(a,b)}(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq r\}$ とすると

$\boxed{B_{(a,b)}(r) \cap E \neq \phi}$ かつ $B_{(a,b)}(r) \cap (\mathbb{R}^2 - E) \neq \phi$ なること

($(z,w) \in E$ かつ $(z,w) \in B_{(a,b)}(r)$ なる点 (z,w) が存在すること)

・ E の境界集合を ∂E とかく。

例(1) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

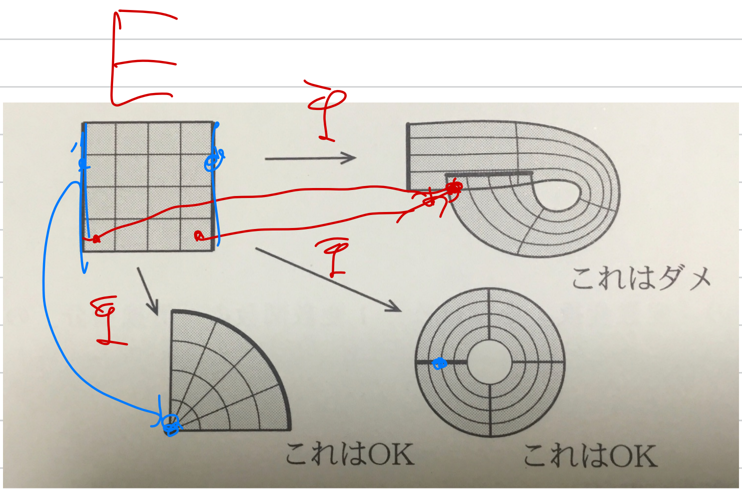


$\partial E = E$ の境界
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$

(定義)
E を面積確定な有界閉集合とする。
変数変換 $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ とする。
$(u, v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$

Φが重積分の変数変換の条件をみたすとは、
次の条件①〜③をみたすこと

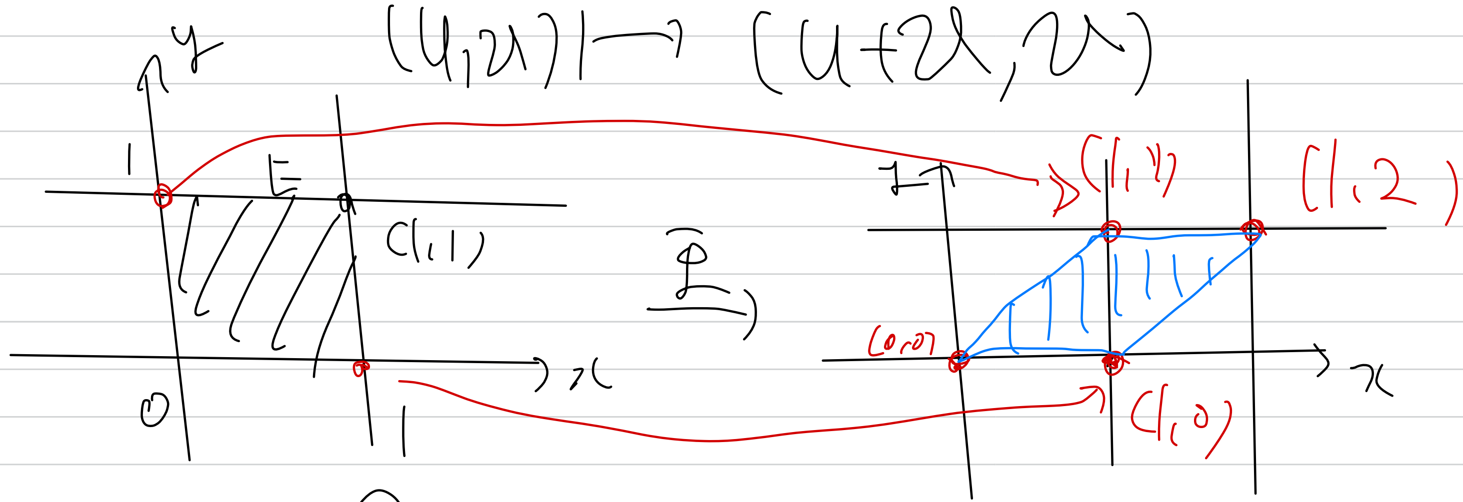
① $x(u,v), y(u,v)$ がC^1級
② $D = \Phi(E)$ とすると Eの境界以外で Φは1対1写像。
$\left(\Phi(u_1, v_1) = \Phi(u_2, v_2) \text{ ならば } (u_1, v_1) = (u_2, v_2) \right)$
③ Φのヤコビ行列を $D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ とし
ヤコビアンを $\det D\Phi = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)$
とすると $\det D\Phi$ はEの境界以外で0でない



(例1) $E = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1\}$

$\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(u,v) \longmapsto (u+v,\ v)$



これは①〜③をみたす　　$D = \Phi(E)$

① ok

② $\Phi(u_1, v_1) = \Phi(u_2, v_2)$

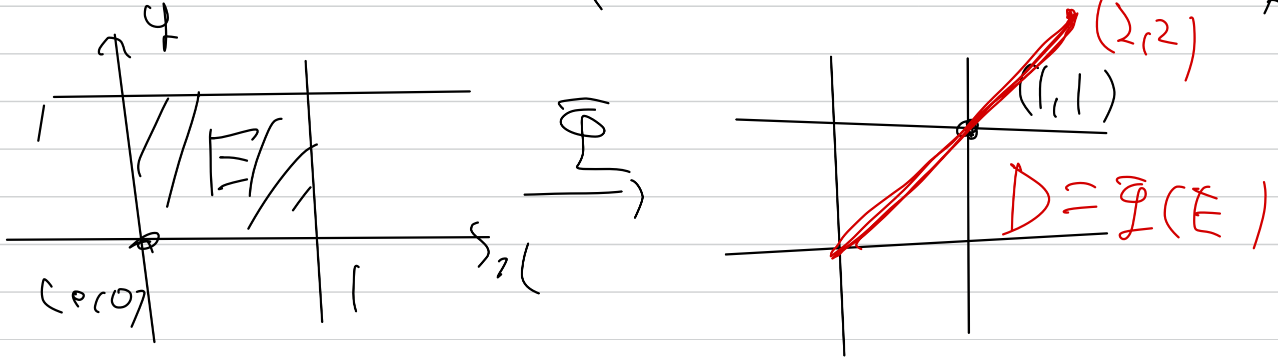
$\Rightarrow (u_1+v_1,\ v_1) = (u_2+v_2,\ v_2) \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = v_2 \\ u_2 = u_2 . \end{matrix}$

③ $D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det D\Phi = 1 \neq 0$ ok.

例2　$\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ とする.

$(u,v) \longmapsto (u+v,\ u+v)$

③をみたさない. ($D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det D\Phi = 1-1 = 0$ ダメ)

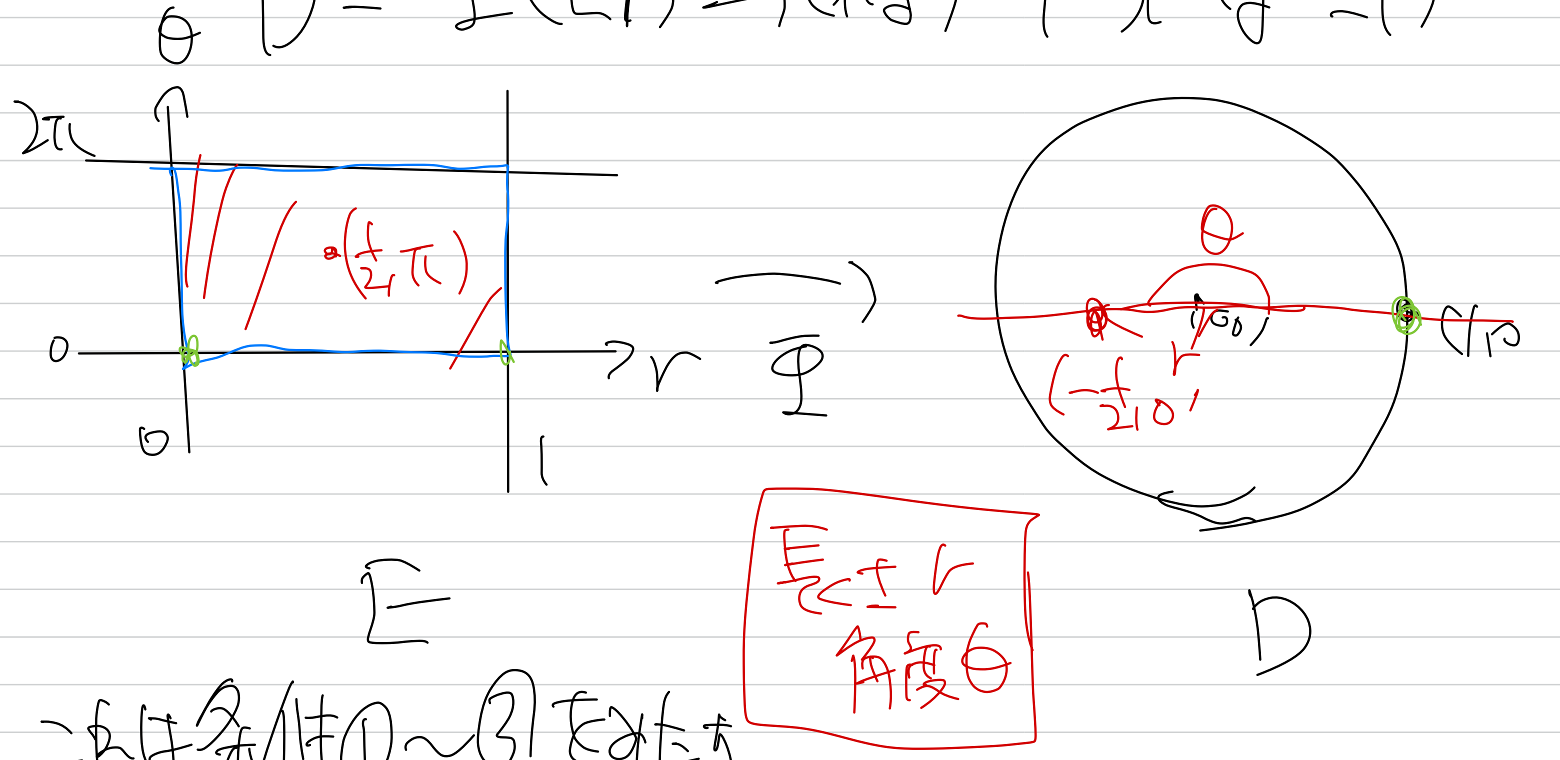


例13 $E_1 = \{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

$\Phi : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$D = \Phi(E_1) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$



これは条件①~③をみたす

① ok

② E_1の境界以外 $= \left\{(r,\theta) \;\middle|\; \begin{matrix} 0<r<1 \\ 0<\theta<2\pi \end{matrix}\right\}$

より $\Phi(r_1,\theta_1) = \Phi(r_2,\theta_2)$

$\Rightarrow (r_1\cos\theta_1,\ r_1\sin\theta_1) = (r_2\cos\theta_2,\ r_2\sin\theta_2)$

$\Rightarrow r_1 = r_2,\quad \theta_1 = \theta_2 \qquad (0<\theta<2\pi)$

③ $D\Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

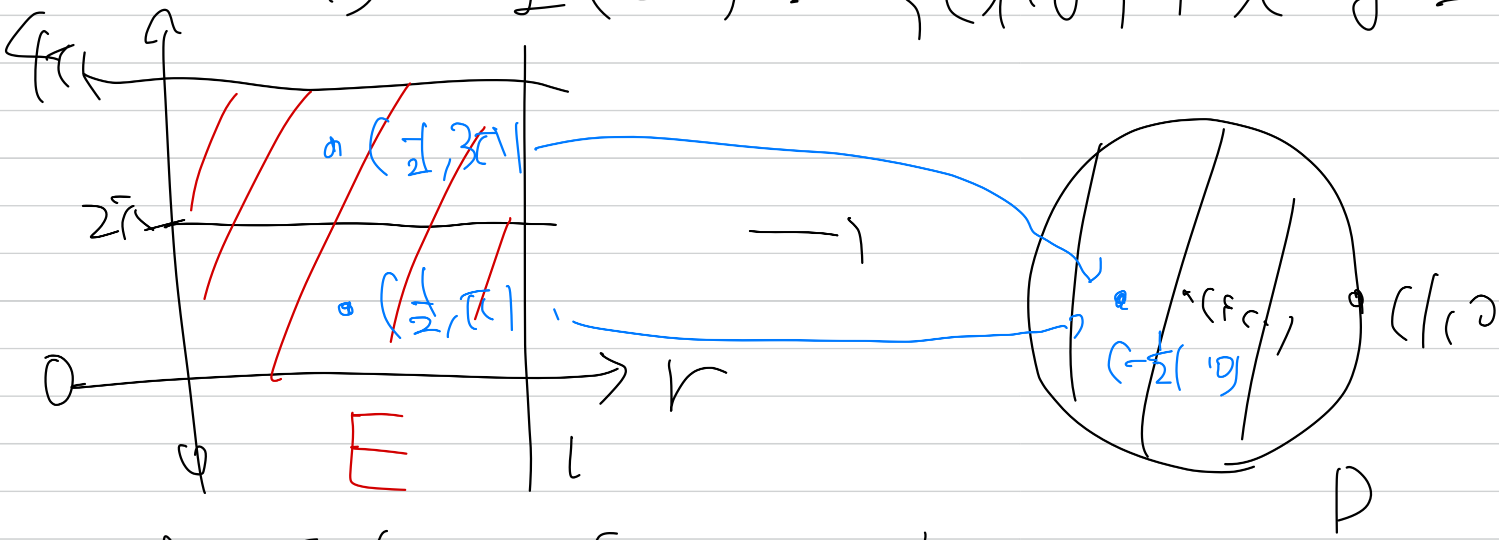
$\det D\Phi = r \neq 0$ (Eの境界以外で

(反例) $E_2 = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 4\pi\}$

$\Phi : E_2 \to \mathbb{R}^2$

$(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$D = \Phi(E) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$



これは条件②をみたさない

$\Phi(\frac{1}{2}, 3\pi) = (-\frac{1}{2}, 0)$

$\Phi(\frac{1}{2}, \pi) = (-\frac{1}{2}, 0)$

Eの境界以外でも
1対1でなくなる

（定理）変数変換公式

変数変換 $\Phi : E \to \mathbb{R}^2$

$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ とし

$D = \Phi(E)$ とする

Φは重積分の変数変換の条件（①〜③）を
みたすとする。

$f(x,y)$がD上積分可能であるとき

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_E f(x(u,v), y(u,v))\,\underline{|\det D\Phi|}\,dudv$$

(例) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$ とする

$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ を求めよ

(解) $E=\{(r,\theta)\mid 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$ とする

$$\Phi: E \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r,\theta)\longmapsto (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

$D=\Phi(E)$ で条件①〜③をみたす.

$\det D\Phi = r$ より

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy \overset{\text{定理}}{=} \iint_E e^{-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}|r|\,drd\theta$$

$$=\iint_E e^{-r^2}r\,drd\theta$$

(系10.2) $$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 e^{-r^2}r\,dr\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^1 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-e^{-1}}{2}\right)d\theta$$

$$=\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$$ //

例112 $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} |x+2y| \leq 1 \\ |x-y| \leq 1 \end{array} \right\}$ とする

$\iint_D (x-y)^2 \, dxdy$ を求めよ.

(解) $E = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid |u| \leq 1, |v| \leq 1 \}$ とする

やること.

$\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ という変換で

$(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$

$D = \Phi(E)$ なるものがほしいから

$\begin{cases} x(u,v) + 2y(u,v) = u \\ x(u,v) - y(u,v) = v \end{cases}$ となるものをみつける.

(x と y について とく)

$x = \frac{1}{3}(u+2v)$

$y = \frac{1}{3}(u-v)$ がある.

よって $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(u,v) \longmapsto \left(\frac{1}{3}(u+2v), \frac{1}{3}(u-v) \right)$ とおくと

$\Phi(E) = D$ で

$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ で $\det D\Phi = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{3} \neq 0$

①〜③の条件をみたす

よって変数変換公式より

$$\iint_D (x-y)^2\,dxdy$$

$$= \iint_E \left(\frac{1}{3}(u+2v) - \frac{1}{3}(u-v) \right)^2 \left| -\frac{1}{3} \right| dudv$$

$$= \iint_E v^2 \frac{1}{3}\,dudv$$

第10回

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \frac{v^2}{3} dv \right) du$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{v^3}{9} \right]_{-1}^{1} du$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{2}{9}\,du = \frac{4}{9}$$

//