第12回 広義積分, ガンマ関数.

(川平 12, 27章)

あらすじ　やりたいことはガウス積分

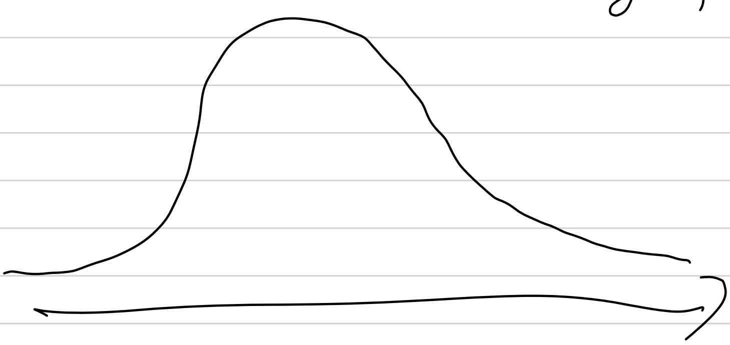
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx} \boxed{= \sqrt{\pi}} \text{ を示すこと}$$

これの正当性　　これを求める

なぜこれが重要

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$ 標準正規分布

$y=f(x)$ (だいたいのデータの分布はこれにしたがう)



$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1\right)$$

(定義) 広義積分

$f(x)$ を $[a, b)$ 上の連続関数とする $\left(\begin{array}{c}b=+\infty \\ \text{も許す}\end{array}\right)$

左極限 $\displaystyle\lim_{z \to b-0} \int_a^z f(x)\,dx$ が存在するとき

広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するといい

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z \to b-0} \int_a^z f(x)\,dx$$ とする。

極限が存在しないときは

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は発散するという

これ積分を広義積分という。

(例) pを実数とする。
広義積分 $\int_1^{\infty} x^p dx$ がいつ収束するか調べよ

$p+1=-2$ のとき $\frac{1}{z^2} \to 0$ $(z \to \infty)$
$-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$ $\to 0$
$z^p = 1 \to 0$

(解)・$p \neq -1$ のとき、$1 < z$ として

$$\int_1^z x^p dx = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1}\right]_1^z$$
$$= \frac{1}{p+1}\left(z^{p+1} - 1\right)$$

よって $\lim_{z \to +\infty} \int_1^z x^p dx = \frac{1}{p+1}\left(\lim_{z \to \infty} z^{p+1} - 1\right)$ より

$p+1 \leqq 0$ のとき収束する、よって $p < -1$ のとき収束、
$p+1 > 0$ のとき発散する (収束しない) よって $p > -1$ のとき発散

・$p = -1$ のとき

$$\int_1^z x^{-1} dx = \left[\log x\right]_1^z = \log z - 1$$

よって $\lim_{z \to +\infty} \int_1^z x^{-1} dx = \lim_{z \to +\infty} \log z - 1$ で
発散する

(例112) pを実数として、$\int_0^1 x^p dx$がいつ収束するかしらべよ。

(解) $p \neq -1$のとき　$0<z<1$として、

$$\int_z^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}(1-z^{p+1})$$

$$\lim_{z\to 0+0}\int_z^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}\left(1-\lim_{z\to 0+0} z^{p+1}\right)$$

$p+1 \geqq 0$のときは収束、よって$p>-1$のとき収束

$p+1<0$のときは発散　よって$p<-1$のとき発散

$p+1=2$ $\therefore z^2 \xrightarrow[z\to 0]{} 0$

$-1.5, 1,$

$p+1=0$ $1 \xrightarrow[z\to 0]{} 1$

$p=-1$のとき

$$\int_z^1 x^{-1}dx = [\log x]_z^1 = -\log z$$

よって $\lim_{z\to 0+0}\int_z^1 x^{-1}dx = \lim_{z\to 0+0}(-\log z)$ 発散する

[定理]　$a>0$とする

① $\int_a^\infty x^p dx$は$p<-1$のとき収束、$p\geqq -1$のとき発散

② $\int_0^a x^p dx$は$p>-1$のとき収束、$p\leqq -1$のとき発散

(定理) $f(x)$ を $[a, b)$ 上連続な関数とする

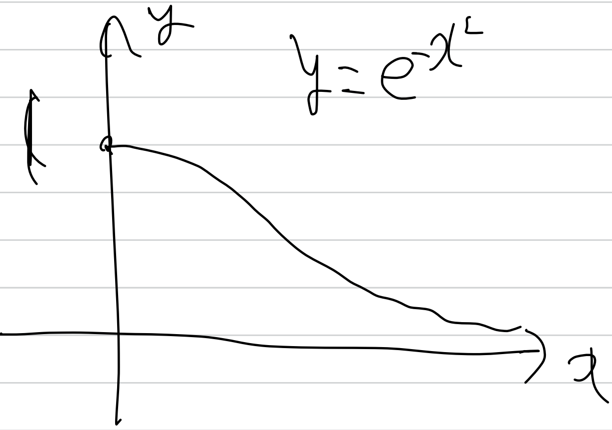
① $b=+\infty$ とする。ある $\lambda>1$ があって $f(x)x^{\lambda}$ が $[a, +\infty)$ 上有界ならば
広義積分 $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ は収束する。

② b を実数とする。ある $\mu<1$ があって $f(x)(x-b)^{\mu}$ が $[a, b)$ 上有界ならば
広義積分 $\int_a^{b} f(x)\,dx$ は収束する。

$[a, b)$ 上の関数 $g(x)$ が有界とは、
ある正の数 $M>0$ があって、任意の $x\in[a, b)$ について
$|g(x)| < M$ となること

(例) 広義積分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ が収束することを示せ。

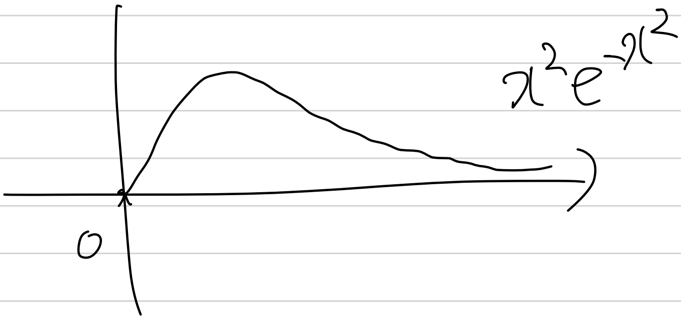
(証) 定理① を用いる。



$\underline{\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}x^2 = 0}$ より

$e^{-x^2}x^2$ は $\underline{[0,\infty)}$ 上有界

($e^{-x^2}x^2$ は $\underline{[0,\infty)\text{上連続}}$)



定理① より ($\lambda=2>1$)

収束する。

(例12) $s>0$ について

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$$ とする (ガンマ関数)

$\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}$ が収束することを示せ.

(証) $\Gamma(s)=\underbrace{\boxed{\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx}}_{①}+\underbrace{\boxed{\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx}}_{②}$.

①と②の収束を示す

① $\lim_{x\to\infty}(e^{-x}x^{s-1})\cdot x^2=\lim_{x\to\infty}e^{-x}x^{s+1}=0$

よって, $(e^{-x}x^{s-1})\cdot x^2$ は $[1,\infty)$ 上有界. $(\lambda=2>1)$

定理① より収束する.

② $\lim_{x\to 0}(e^{-x}x^{s-1})\cdot x^{1-s}=\lim_{x\to 0}e^{-x}=1$

$\mu=1-s<1$

よって $(e^{-x}x^{s-1})\cdot x^{1-s}$ は $(0,1]$ 上有界

よって定理② より収束する

(例13) $p>0,\ q>0$ について

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$ (ベータ関数) とする

$B(p,q)$ が収束することを示せ。

(証) $$B(p,q)=\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}_{①}+\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p}(1-x)^{q-1}\,dx}_{②}$$

① と ② が収束することを示す

① $$\lim_{x\to 0}\left(x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right)\cdot x^{1-p}=\lim_{x\to 0}(1-x)^{q-1}=1$$

$\mu=1-p<1$

定理② より収束。

② $$\lim_{x\to 1}\left(x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right)(1-x)^{1-q}=\lim_{x\to 1}x^{p-1}=1$$

$\mu=1-q<1$

定理② より収束。

定理 の証明(概略)

① 有界性より ある正の数 $M>0$ があって、
任意の $x\in[a,\infty)$ について $|f(x)x^{\lambda}|<M$ となる。

よって $a<p<q<\infty$ となる p,q について

$$\left|\int_p^q f(x)dx\right| \leqq \int_p^q |f(x)|dx$$
$$< M\int_p^q x^{-\lambda}dx$$

$-\lambda<-1$ より $\int_a^\infty x^{-\lambda}dx$ は収束する。

よって pを十分大きくとると $\int_p^\infty x^{-\lambda}dx$ はいくらでも小さくなる。

pを十分大きくとると $\left|\int_p^q f(x)dx\right|$ は
いくらでも小さくなるので
$\int_a^\infty f(x)dx$ は収束する

コーシー列
完備性

② も同じ

応用(ガウス積分)

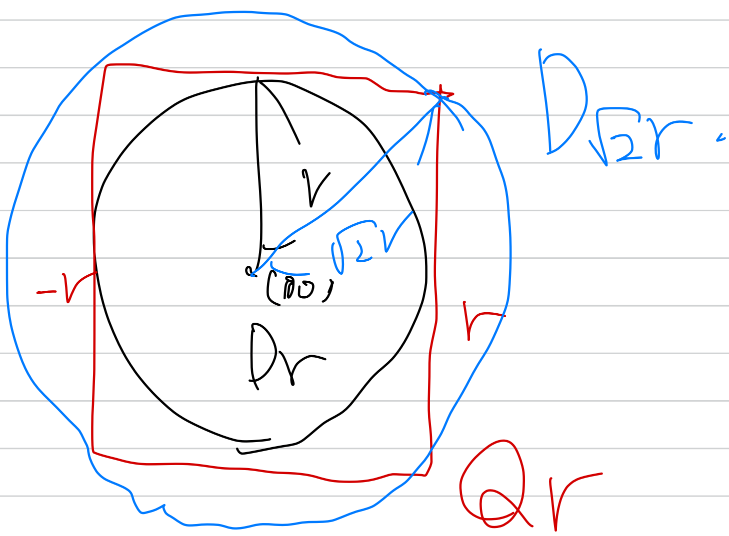
定理 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

(証) rを正の数として

$$D_r = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq r\}$$

$$Q_r = [-r,r] \times [-r,r]$$ とすると

$D_r \subset Q_r \subset D_{\sqrt{2}r}$ となる



(A)

よって

$$\iint_{D_r} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \iint_{Q_r} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \iint_{D_{\sqrt{2}r}} e^{-x^2-y^2}dxdy$$ となる

$\iint_{D_r} e^{-x^2-y^2}dxdy$ は極座標変換

$E_r = \left\{(\rho, \theta) \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \leqq \rho \leqq r \\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \end{matrix}\right\}$ $\quad x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ により、

$$\iint_{D_r} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{E_r} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^r$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-e^{-r^2})d\theta$$

$$= \pi\left(1-e^{-r^2}\right)$$

一方で $I_r = \int_{-r}^{r} e^{-x^2}dx$ とおくと

$$\lim_{r\to\infty} I_r = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \quad (値が存在する)$$

$$\iint_{Q_r} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{-r}^{r}\left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2-y^2}dy\right)dx$$

$$= \int_{-r}^{r} e^{-x^2}\left(\int_{-r}^{r} e^{-y^2}dy\right)dx$$

$$= \int_{-r}^{r} I_r e^{-x^2}dx = I_r^2.$$

※より

$$\pi(1-e^{-r^2}) \leqq I_r^2 \leqq \pi(1-e^{-2r^2})$$

$r\to\infty$ とすると

$$\pi \leqq \lim_{r\to\infty} I_r^2 \leqq \pi.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{r\to\infty} I_r = \sqrt{\pi}$$

ガンマ関数・ベータ関数.

(定義)

- $s>0$ について $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ とする
  これをガンマ関数という
- $p>0,\ q>0$ について $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ とする
  これをベータ関数という

(公式) ① $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(1) = 1$

とくに n を自然数として. $\Gamma(n+1) = n!$

② $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

とくに n を自然数として. $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$

$\left((2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdots\cdot 3\cdot 1 \right)$ $5!! = 5\times3\times1 = 15$

$6!! = 6\times4\times2 = 48$

③ $B(p,q) = B(q,p)$

④ $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$

$B(p+1,q) = \frac{p}{p+q} B(p,q)$

$B(p,q+1) = \frac{q}{p+q} B(p,q)$

⑤ $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2p-1} (\sin t)^{2q-1} dt.$

⑥ $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$

⑦ $B(1,1) = 1$, $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$

l, m を自然数として

$$B(l,m) = \frac{(l-1)!\,(m-1)!}{(l+m-1)!}$$

(3-7)

① $\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^{(s+1)-1} dx$

$= \int_0^\infty (-e^{-x})' x^{(s+1)-1} dx$

($s>0$) $= \left[-e^{-x} x^{(s+1)-1}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$

$= s\Gamma(s)$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$

② $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx$

$x = t^2$

$= \int_0^\infty e^{-t^2} t^{-1} \cdot 2t\,dt$ $\frac{dx}{dt} = 2t\,dt$

$= 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt$

$= \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(\frac{1}{2}+n) = \Gamma((n-\frac{1}{2})+1)$

$= \frac{2n-1}{2} \cdot \Gamma(n-\frac{1}{2})$

$= \underbrace{\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{n\text{コ}} \Gamma(\frac{1}{2})$

$= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$

③ $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$　　$x=1-t$

$=\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}(-dt)$　　$\frac{dx}{dt}=-1$

$=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=B(q,p)$

④ $x^{p-1}(1-x)^q=x^{p-1}(1-x)^{q-1}(1-x)$

$=x^{p-1}(1-x)^{q-1}-x^p(1-x)^{q-1}$

$\int_0^1$で積分して

$B(p,q+1)=B(p,q)-B(p+1,q)$

また $B(p+1,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx$

$=\int_0^1 x^p\left(-\frac{1}{q}(1-x)^q\right)'dx$

$=\left[-\frac{1}{q}x^p(1-x)^q\right]_0^1+\frac{p}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx$

$=\frac{p}{q}B(p,q+1)$

$\therefore B(p,q+1)=B(p,q)-\frac{p}{q}B(p,q+1)$

$\therefore B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)$

⑤ $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ 　　$x = \cos^2 t$, $\frac{dx}{dt} = 2\cos t(-\sin t)$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos t)^{2p-2} (\sin t)^{2q-1}\, 2\cos t(-\sin t)\,dt$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2p-1} (\sin t)^{2q-1}\,dt$

⑥ $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\,dx$ 　　$x = t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$

$= \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2p-2}\, 2t\,dt$

$= 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2p-1}\,dt$ より,

$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1}\,dy$

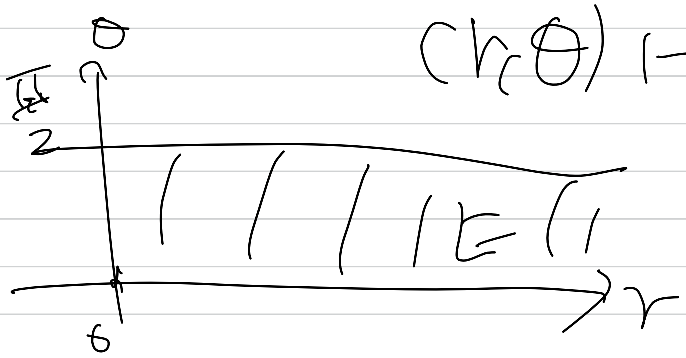
$= \boxed{4\iint_D e^{-x^2-y^2} x^{2p-1} y^{2q-1}\,dx\,dy}$

(☆) とする

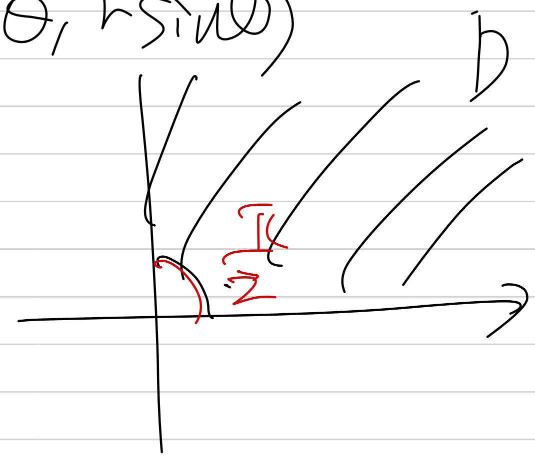
$$E = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r,\ 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\}$$

$$\Phi : E \to \mathbb{R}^2$$

$$(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$



$$\xrightarrow{\Phi}$$



$$D = \Phi(E)$$

変数変換公式(第11回より)

$$(*) = 4\iint_E e^{-r^2} r^{2p-1} \cdot r^{2q-1} \cdot (\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 4\iint_E e^{-r^2} r^{2p+2q-1} (\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1}\, dr\, d\theta$$

$$= \left(2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1}\, dr\right) \cdot \left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1}\, d\theta\right)$$

$$= \Gamma(p+q) \cdot B(p+q)$$

$$\therefore\ B(p+q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

(7) $B(1,1) = \dfrac{\Gamma(1)\cdot\Gamma(1)}{\Gamma(2)}$

$$= \frac{1\cdot 1}{1!} = 1$$

$$B\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi$$

$$B(l,m) = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} = \frac{(l-1)!\,(m-1)!}{(l+m-1)!}$$

(例1) nを自然数とする。

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$ を求めよ。

(解) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} (\sin t)^{2\cdot\frac{1}{2}-1} dt$

$= \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(h) $= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$

(i) nが偶数のとき，$n=2m$として

$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi}$

$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \Gamma(m+1) = m!$

よって $(m!)2^m = (2m)!! = n!!$ に注意すると

$I_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(2m-1)!!}{2^m(m!)} \frac{\pi}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

$= \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$ //

② nが奇数のとき　$n=2m+1$として、

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\Gamma(m+1)=m!$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)=\Gamma\left((m+1)+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m+1)!!}{2^{m+1}}\sqrt{\pi}$$

$$I_n=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{2^{m+1}(m!)}{(2m+1)!!\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$=\frac{2^m(m!)}{(2m+1)!!}$$

$$=\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

$$=\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

(例12) ウォリス公式

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$ とおくと

$[0, \frac{\pi}{2}]$ 上 $(\cos t)^{2m+2} \leq (\cos t)^{2m-1} \leq (\cos t)^{2m}$

よって $I_{2m+2} \leq I_{2m+1} \leq I_{2m}$

上の例より

$$\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\frac{\pi}{2} \leq \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \leq \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}$$

※

$\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}$ かけると

$$\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \cdot \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!} = \frac{2m+1}{2m+2}$$

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \cdot \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}$$

$$= \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} \cdot \frac{(2(m-1))^2}{(2(m-1)+1)(2(m-1)-1)} \cdots \frac{2}{3 \cdot 1}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4m^2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4(m-1)^2}} \cdots \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

＊から

$$\frac{2n+1}{2n+2}\frac{\pi}{2} \leqq \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4n^2}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4(n-1)^2}}\right)\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$\leqq \frac{\pi}{2}$$

$n \to \infty$ とすると はさみうちの原理から

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4(n-1)^2}\right)}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

ウォリスの公式

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\,4}{3\,5}\cdot\frac{6\,6}{5\,7}\cdot\frac{8\,8}{7\cdot 9}\cdots}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots}$$ テイラー展開から

（マチンの公式とかではやくもとめる）