第 4 回. ヤコビ行列・微分演算子・ラプラシアン (川平先生の本, 第 20・22 章の内容)

岩井雅崇, 2020/10/27

1　ヤコビ行列

定義 1. 領域 D 上の C^1 級変数変換

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & D & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

について, Φ のヤコビ行列 $D\Phi$ を次で定める.

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

例 2.

- a,b,c,d を定数とする. 1 次変換 $\Phi(u,v) = (au+bv, cu+dv)$ について, $D\Phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- 極座標変換 $\Phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$ について, $D\Phi = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$.

定義 3. C^1 級変数変換を $(x,y) = \Phi(u,v)$, $(z,w) = \Psi(x,y)$ とする.

1. 合成変換 $\Psi\circ\Phi$ を $(z,w) = \Psi\circ\Phi(u,v) = \Psi(x(u,v), y(u,v))$ とする.
2. C^1 級変数変換を $(x,y) = \Phi(u,v)$ が 1 対 1 であるとき, ある C^1 級変数変換 $(u,v) = \Omega(x,y)$ があって $(u,v) = \Omega\circ\Phi(u,v)$ となる. この Ω を Φ の逆変換といい Φ^{-1} とかく.

[1]

定理 4. C^1 級変数変換を $(x,y) = \Phi(u,v)$, $(z,w) = \Psi(x,y)$ についてその合成変換を $(z,w) = \Psi\circ\Phi(u,v)$ とするとき,

$$D(\Psi\circ\Phi) = D\Psi D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

[1] C^1 級変数変換を Φ が 1 対 1 とは $\Phi(u_1,v_1) = \Phi(u_2,v_2)$ ならば $(u_1,v_1) = (u_2,v_2)$ となること. この定義においての逆関数の存在は逆関数定理 (第 7 回) によりわかる.

特に Φ の逆関数が存在するとき, $\det D\Phi \neq 0$ ならば

$$D\Phi^{-1} = (D\Phi)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}.$$

例 **5.** 極座標変換 $\Phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$ について, $D\Phi = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$ より,

$$D\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ \frac{-\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

2 n 階偏導関数・C^n 級

定義 **6.** $f(x,y)$ を C^1 級関数とする.

- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を f の 1 階偏導関数という.
- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が C^1 級であるとき, これらの導関数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

  を f の 2 階偏導関数という.
- 同様に, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$ や $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$ などが考えられるが, これらを f の 3 階偏導関数という. n 階偏導関数も同様である.
- n を正の自然数とする. $f(x,y)$ が C^n 級であるとは f の n 階偏導関数が存在し連続であること.
- $f(x,y)$ が C^∞ 級とは, 全ての正の自然数 n について $f(x,y)$ が C^n 級であること.

みんながよく知っている関数は C^∞ 級関数. ($x^2+1, \sin x, \log x, e^x$ などなど...)

例 **7.** $f(x,y) = x^2y^3$. C^∞ 級関数. 偏導関数は以下の通り.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y.$$

定理 **8.** $f(x,y)$ が C^2 級関数ならば

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

特に, $f(x,y)$ が C^∞ 級関数ならば, 自由に偏微分の順序交換ができる.

3 微分演算子・ラプラシアン

定義 **9** (この授業だけの定義)**.** m を正の自然数とし $a_{ij}(x,y)$ を関数として

$$D = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{m-j} a_{ij}(x,y) \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\right) \left(\frac{\partial^j}{\partial y^j}\right)$$

と書ける作用素を微分演算子という.
D は C^∞ 関数 f に対して次のように作用する.

$$Df = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{m-j} a_{ij}(x,y) \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}$$

例 **10.** $D_1 = \frac{\partial}{\partial x}, D_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$ とおく. これらは微分演算子. $D_1D_2 = x\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$ だが $D_2D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + x\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$ である. 特に $D_1D_2 \neq D_2D_1$.

定義 **11.**

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

と書ける微分演算子をラプラシアンという.

例 **12.** 極座標変換 $(x(u,v), y(u,v)) = (u\cos v, u\sin v)$ とする. このとき,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$