第 2 回. 多変数関数の微分 (川平先生の本, 第 17・18 章の内容)

岩井雅崇, 2020/10/13

1 全微分

定義 1. 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能とは, ある定数 A, B があって

$$E(x,y) = f(x,y) - \{f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)\} \text{ とするとき,}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|E(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0 \text{ となること.}$$

$z = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)$ を $f(x,y)$ の点 (a,b) での接平面の方程式といい, その 3 次元グラフを接平面という.
f が領域 D の任意の点で全微分可能であるとき, f は D 上で全微分可能であるという.

例 2. $f(x,y) = -(x^2+y^2)$ は点 $(0,0)$ で全微分可能.
(証.) $A = B = 0$ とする. $E(x,y) = -(x^2+y^2) - \{0 + 0(x-0) + 0(y-0)\} = -(x^2+y^2)$ より,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|E(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0.$$

よって全微分可能.
接平面の方程式は

$$z = 0 + 0(x-0) + 0(y-0) = 0$$

2 偏微分

定義 3. 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で偏微分可能とは, 2 つの極限

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}, \quad B = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} \text{ が存在すること.}$$

A, B を $f(x,y)$ の (a,b) での偏微分係数と呼び,

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \text{ とかく.}$$

f が領域 D の任意の点で偏微分可能であるとき, f は D 上で偏微分可能であるという.

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ は $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x,y)=(a,b)}$ とかくこともある.

定義 4. D 上で偏微分可能な関数 f について

$$\begin{array}{rccc} \frac{\partial f}{\partial x}: & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \frac{\partial f}{\partial y}: & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

を $f(x,y)$ の偏導関数という.

例 5.

- $f(x,y) = x^2y^3$ は $\mathbb{R}^2$ で偏微分可能. 偏導関数は $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$ である.
- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ は $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$ 上で偏微分可能. 偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \text{ である.}$$

定義 6. f を領域 D 上の関数とする. f が D 上で偏微分可能であり, その偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が D 上で連続であるとき, f は C^1 級であるという.

例 7. $f(x,y) = x^2y^3$ は C^1 級である. (みんながよく知っている関数は C^1 級関数.)

3 全微分, 偏微分, C^1 級の関係

定理 8. f を領域 D 上の関数とする. f が D 上で C^1 級ならば全微分可能である.
特に D 上で C^1 級な関数 f と $(a,b) \in D$ において, $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ とするとき,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|E(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0.$$

ここで $E(x,y) = f(x,y) - \{f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)\}$ とする.(定義 1 と同様.)

定理 9. f を領域 D 上の関数とする. f が D 上で全微分可能なら, 偏微分可能である.
特に定義 1 の状況下において, $(a,b) \in D$ について, $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ である.

定理 10. f を領域 D 上の関数とする. f が D 上で全微分可能なら, 連続である.

例 11. $f(x,y) = -(x^2+y^2)$ は C^1 級関数. よって全微分可能. 点 $(0,0)$ での偏微分係数は $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. 接平面の方程式は $z = 0 + A(x-0) + B(y-0) = 0$.

注意 12. 「全微分可能だが C^1 級でない関数」, 「偏微分可能だが全微分可能でない関数」, 「連続だが全微分可能でない関数」, 「連続だが偏微分可能でない関数」. 「偏微分可能だが連続でない関数」などなど, いろいろな例がある.

例 **13.** 偏微分可能だが全微分可能でない関数の例.

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & x\neq 0 \text{ かつ } y\neq 0\\ 1 & x=0 \text{ または } y=0\end{cases}$$

f は $(0,0)$ で偏微分可能. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1}{x}=0$ より定義 3 の極限が存在するから.

しかし f は $(0,0)$ で全微分可能ではない. もし全微分可能ならば

$$E(x,y)=f(x,y)-\{f(0,0)+0(x-0)+0(y-0)\}=f(x,y)-1$$

とすると, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|E(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ となる. よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=1$ となるが, これは $(t,t)\to(0,0)$ の f の極限を考えると矛盾である. [1]

[1] f は $(0,0)$ で連続ではないからでも言える. (もし全微分可能ならば定理 10 より f は $(0,0)$ で連続でないといけない.)