第 1 回. 多変数の連続写像 (川平先生の本, 第 16 章の内容)

岩井雅崇, 2020/10/06

1 いくつかの準備

以下の用語に関して興味のない人は読み飛ばして良い.

1. xy 平面上の点 (a,b) と正の数 $r>0$ について, 点 (a,b) 中心の半径 r の (閉) 円板を
$$B_{(a,b)}(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leqq r\} \quad \text{とする.}$$
2. $a<b$ かつ $c<d$ について,
$$[a,b]\times[c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b \text{ かつ } c \leqq y \leqq d\} \quad \text{とする.}$$

以下 $E \subset \mathbb{R}^2$ を集合とする.

3. $(a,b) \in E$ が E の<u>内点</u>とは, ある正の数 $r>0$ があって $B_{(a,b)}(r) \subset E$ となること.
4. E が<u>開集合</u>とは, 任意の (全ての)$(a,b) \in E$ について (a,b) は E の内点となること.
5. E が<u>閉集合</u>とは, $\mathbb{R}^2 \setminus E$[1] が開集合であること.
6. E が<u>有界</u>とは, ある正の数 $M>0$ があって, $E \subset [-M,M]\times[-M,M]$ となること.
7. E が<u>連結</u>とは, E の任意の 2 点が E 内の折れ線で結べること.
8. E が<u>領域</u>とは, E が連結な開集合であること.

例 1.
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$ は開集合, 有界, 連結, 領域. でも閉集合ではない.
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1\}$ は閉集合, 有界, 連結. でも開集合ではない.
- $\mathbb{R}^2$ は開集合, 閉集合, 連結, 領域. でも有界ではない.

9. 関数 $f(x,y)$ の値が定まる集合を f の<u>定義域</u>といい,
$$\{k \in \mathbb{R} : f(x,y)=k \text{ となる } (x,y) \text{ が定義域内に存在 }\}$$
を f の<u>値域</u>という.
10. <u>f が領域 E 上の関数</u>とは, E が f の定義域に含まれることである. このとき
$$\begin{array}{cccc} f: & E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \quad \text{とかく.}$$

例 2. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ の定義域は $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1\}$. 値域は $[0,1]$.

[1] $\mathbb{R}^2 \setminus E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \notin E\}$ と定義する.

2　極限と連続性

定義 3. (x,y) が (a,b) に限りなく近づくとは $(x,y) \neq (a,b)$ かつ

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \to 0$$

となるように変化すること．以後，$(x,y) \to (a,b)$ とかく．

定義 4. $f(x,y)$ を領域 D 上の関数とする．$f(x,y)$ が $(x,y) \to (a,b)$ のとき実数 A に収束するとは (x,y) が (a,b) に近づくとき，$f(x,y)$ が A に限りなく近づくことである．このとき

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A \quad \text{または} \quad f(x,y) \to A \ ((x,y) \to (a,b)) \quad \text{とかく．}$$

定義 5. $f(x,y)$ を領域 D 上の関数とする．f が $(a,b) \in D$ で連続とは

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \quad \text{となること．}$$

f が D 上で連続とは f が任意の点 $(a,b) \in D$ で連続となること．

例 6.
- $f(x,y) = x+y$, $f(x,y) = e^{x+y^2}$．これらは $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数．(みんながよく知っている関数は連続関数.)
- $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ は定理 8 より $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の連続関数.
- $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を次で定義する．

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 1 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

f は $(0,0)$ で連続ではない．

なぜなら $(0,y) \to (0,0)$ という近づけ方をすると，$f(0,y) = -1 \to -1$ であるため，$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) \neq f(0,0)$ より連続ではない．

定理 7. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = B$ とする．このとき以下が成り立つ．

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \{f(x,y)+g(x,y)\} = A+B.$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = AB.$$

.

$$B \neq 0 \text{ のとき, } \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B}.$$

定理 8. 関数 f, g が点 (a,b) で連続であるとする. このとき以下が成り立つ.

- $f(x,y) + g(x,y)$ や $f(x,y)g(x,y)$ は (a,b) で連続.
- $g(a,b) \neq 0$ のとき, $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ は (a,b) で連続.

3 最大最小の存在

定理 9. 有界な閉集合 D 上で連続な関数 f は最大値・最小値を持つ.

例 10. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1\}$ とすると D は有界閉集合. $f(x,y) = x$ とすると f は連続. 実際, D 上で f は最大値 1, 最小値 -1 を持つ.

第 2 回. 多変数関数の微分 (川平先生の本, 第 17・18 章の内容)

岩井雅崇, 2020/10/13

4 全微分

定義 11. 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能とは, ある定数 A, B があって

$$E(x,y) = f(x,y) - \{f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)\} \text{ とするとき,}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|E(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0 \text{ となること.}$$

$z = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)$ を $f(x,y)$ の点 (a,b) での接平面の方程式といい, その 3 次元グラフを接平面という.
f が領域 D の任意の点で全微分可能であるとき, f は D 上で全微分可能であるという.

例 12. $f(x,y) = -(x^2+y^2)$ は点 $(0,0)$ で全微分可能.
(証.) $A = B = 0$ とする. $E(x,y) = -(x^2+y^2) - \{0 + 0(x-0) + 0(y-0)\} = -(x^2+y^2)$ より,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|E(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0.$$

よって全微分可能.
接平面の方程式は

$$z = 0 + 0(x-0) + 0(y-0) = 0$$

5 偏微分

定義 13. 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で偏微分可能とは, 2 つの極限

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}, \quad B = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b} \text{ が存在すること.}$$

A, B を $f(x,y)$ の (a,b) での偏微分係数と呼び,

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \text{ とかく.}$$

f が領域 D の任意の点で偏微分可能であるとき, f は D 上で偏微分可能であるという.

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ は $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x,y)=(a,b)}$ とかくこともある.

定義 14. D 上で偏微分可能な関数 f について

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial x}: & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial y}: & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

を $f(x,y)$ の偏導関数という.

例 15.

- $f(x,y) = x^2y^3$ は $\mathbb{R}^2$ で偏微分可能. 偏導関数は $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$ である.
- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ は $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$ 上で偏微分可能. 偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \text{ である.}$$

定義 16. f を領域 D 上の関数とする. f が D 上で偏微分可能であり, その偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ が D 上で連続であるとき, f は C^1 級であるという.

例 17. $f(x,y) = x^2y^3$ は C^1 級である. (みんながよく知っている関数は C^1 級関数.)

6 全微分, 偏微分, C^1 級の関係

定理 18. f を領域 D 上の関数とする. f が D 上で C^1 級ならば全微分可能である.
特に D 上で C^1 級な関数 f と $(a,b) \in D$ において, $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ とするとき,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|E(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0.$$

ここで $E(x,y) = f(x,y) - \{f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)\}$ とする.(定義 11 と同様.)

定理 19. f を領域 D 上の関数とする. f が D 上で全微分可能なら, 偏微分可能である.
特に定義 11 の状況下において, $(a,b) \in D$ について, $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ である.

定理 20. f を領域 D 上の関数とする. f が D 上で全微分可能なら, 連続である.

例 21. $f(x,y) = -(x^2+y^2)$ は C^1 級関数. よって全微分可能. 点 $(0,0)$ での偏微分係数は $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. 接平面の方程式は $z = 0 + A(x-0) + B(y-0) = 0$.

注意 22. 「全微分可能だが C^1 級でない関数」, 「偏微分可能だが全微分可能でない関数」, 「連続だが全微分可能でない関数」, 「連続だが偏微分可能でない関数」. 「偏微分可能だが連続でない関数」などなど, いろいろな例がある.

例 **23.** 偏微分可能だが全微分可能でない関数の例.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \text{ かつ } y \neq 0 \\ 1 & x = 0 \text{ または } y = 0 \end{cases}$$

f は $(0,0)$ で偏微分可能. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x} = 0$ より定義 13 の極限が存在するから.

しかし f は $(0,0)$ で全微分可能ではない. もし全微分可能ならば

$$E(x,y) = f(x,y) - \{f(0,0) + 0(x-0) + 0(y-0)\} = f(x,y) - 1$$

とすると, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|E(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ となる. よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ となるが, これは $(t,t) \to (0,0)$ の f の極限を考えると矛盾である. [2]

[2] f は $(0,0)$ で連続ではないからでも言える. (もし全微分可能ならば定理 20 より f は $(0,0)$ で連続でないといけない.)

第3回. 合成関数の微分と連鎖律 (川平先生の本, 第19・20・21章の内容)

岩井雅崇, 2020/10/20

定理 24. $f(x,y)$ を領域 D 上の C^1 級関数とする. $x = x(t)$, $y = y(t)$ を t に関する C^1 級関数とし, $z(t) = f(x(t), y(t))$ とするとき,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

例 25. $f(x,y) = 2x^3 y$, $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = f(x(t), y(t))$ とする. このとき

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3, \frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = \cos t, \quad \text{より}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 6\cos^2 t \sin t(-\sin t) + 2\cos^3 t \cos t = -6\cos^2 t \sin^2 t + 2\cos^4 t.$$

定義 26. 領域 D 上の C^1 級関数を $x(u,v)$, $y(u,v)$ とする.

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

を C^1 級変数変換という.

例 27.

- a, b, c, d を定数とする. $\Phi(u,v) = (au + bv, cu + dv)$ は C^1 級変数変換である. これを1次変換という.
- $\Phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$ も C^1 級変数変換である. これを極座標変換という.

定理 28. 領域 D 上の C^1 級変数変換を

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

とし, 領域 $E(\subset \Phi(D))$ 上の C^1 級関数を $f(x,y)$ とする.
領域 D 上の C^1 級 $g(u,v)$ を

$$\begin{array}{rccc} g = f\circ\Phi: & D & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & f(x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

で定めるとき, 各偏導関数は以下の通りになる.

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

行列の記法を用いると以下のようにかける.

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

例 **29.** $f(x,y)$ を C^1 級関数とし,C^1 級変数変換を $(x(u,v), y(u,v)) = (u\cos v, u\sin v)$ とする. $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ とするとき, $\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}$ を $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を用いてあらわせ.

(解.)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v,\ \frac{\partial x}{\partial v} = -u\sin v,\ \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v,\ \frac{\partial y}{\partial v} = u\cos v,\ \text{より}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \cos v\frac{\partial f}{\partial x} + \sin v\frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = -u\sin v\frac{\partial f}{\partial x} + u\cos v\frac{\partial f}{\partial y}.$$

第 4 回. ヤコビ行列・微分演算子・ラプラシアン (川平先生の本, 第 20・22 章の内容)

岩井雅崇, 2020/10/27

7 ヤコビ行列

定義 30. 領域 D 上の C^1 級変数変換

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

について, Φ のヤコビ行列 $D\Phi$ を次で定める.

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

例 **31.**

- a, b, c, d を定数とする. 1 次変換 $\Phi(u,v) = (au+bv, cu+dv)$ について, $D\Phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- 極座標変換 $\Phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$ について, $D\Phi = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$.

定義 32. C^1 級変数変換を $(x,y) = \Phi(u,v)$, $(z,w) = \Psi(x,y)$ とする.

1. 合成変換 $\Psi \circ \Phi$ を $(z,w) = \Psi \circ \Phi(u,v) = \Psi(x(u,v), y(u,v))$ とする.
2. C^1 級変数変換を $(x,y) = \Phi(u,v)$ が 1 対 1 であるとき, ある C^1 級変数変換 $(u,v) = \Omega(x,y)$ があって $(u,v) = \Omega \circ \Phi(u,v)$ となる. この Ω を Φ の逆変換といい Φ^{-1} とかく.

[3]

定理 33. C^1 級変数変換を $(x,y) = \Phi(u,v)$, $(z,w) = \Psi(x,y)$ についてその合成変換を $(z,w) = \Psi \circ \Phi(u,v)$ とするとき,

$$D(\Psi \circ \Phi) = D\Psi D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

[3] C^1 級変数変換を Φ が 1 対 1 とは $\Phi(u_1,v_1) = \Phi(u_2,v_2)$ ならば $(u_1,v_1) = (u_2,v_2)$ となること. この定義においての逆関数の存在は逆関数定理 (第 7 回) によりわかる.

特に Φ の逆関数が存在するとき, $\det D\Phi \neq 0$ ならば

$$D\Phi^{-1} = (D\Phi)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}.$$

例 **34.** 極座標変換 $\Phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$ について, $D\Phi = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$ より,

$$D\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ \frac{-\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

8　n 階偏導関数・C^n 級

定義 **35.** $f(x,y)$ を C^1 級関数とする.

- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を f の 1 階偏導関数という.
- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が C^1 級であるとき, これらの導関数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

  を f の 2 階偏導関数という.

- 同様に, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$ や $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y\partial x}\right)$ などが考えられるが, これらを f の 3 階偏導関数という. n 階偏導関数も同様である.
- n を正の自然数とする. $f(x,y)$ が C^n 級であるとは f の n 階偏導関数が存在し連続であること.
- $f(x,y)$ が C^∞ 級とは, 全ての正の自然数 n について $f(x,y)$ が C^n 級であること.

みんながよく知っている関数は C^∞ 級関数. ($x^2+1, \sin x, \log x, e^x$ などなど...)

例 **36.** $f(x,y) = x^2y^3$. C^∞ 級関数. 偏導関数は以下の通り.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3, \frac{\partial f}{\partial x\partial y} = 6xy^2, \frac{\partial f}{\partial y\partial x} = 6xy^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y.$$

定理 37. $f(x,y)$ が C^2 級関数ならば

$$\frac{\partial f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y\partial x}.$$

特に, $f(x,y)$ が C^∞ 級関数ならば, 自由に偏微分の順序交換ができる.

9 微分演算子・ラプラシアン

定義 38 (この授業だけの定義)**.** m を正の自然数とし $a_{ij}(x,y)$ を関数として

$$D = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{m-j} a_{ij}(x,y)\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial^j}{\partial y^j}\right)$$

と書ける作用素を微分演算子という.
D は C^∞ 関数 f に対して次のように作用する.

$$Df = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{m-j} a_{ij}(x,y)\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\partial y^j}$$

例 39. $D_1 = \frac{\partial}{\partial x}, D_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$ とおく. これらは微分演算子. $D_1D_2 = x\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$ だが $D_2D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + x\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$ である. 特に $D_1D_2 \neq D_2D_1$.

定義 40.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

と書ける微分演算子をラプラシアンという.

例 41. 極座標変換 $(x(u,v), y(u,v)) = (u\cos v, u\sin v)$ とする. このとき,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

第 5 回. テイラー展開 (川平先生の本, 第 22 章の内容)

岩井雅崇, 2020/11/10

定理 42. f を領域 D 上の C^2 級関数とし, $(a,b) \in D$ とする. 点 (a,b) 中心の半径 $r > 0$ の円板 $B \subset D$ を一つとる.
任意の $(x,y) \in B$ について (a,b) と (x,y) を結ぶ線分上の点 (a',b') があって,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a',b')(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a',b')(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a',b')(y-b)^2\right\}. \end{aligned}$$

定理 43. f を領域 D 上の C^∞ 級関数とし, $(a,b) \in D$ とする. 点 (a,b) 中心の半径 $r > 0$ の円板 $B \subset D$ を一つとる.
任意の $(x,y) \in B$ について (a,b) と (x,y) を結ぶ線分上の点 (a',b') があって,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right\} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left\{\sum_{i=0}^{n} {}_nC_r \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a',b')(x-a)^i(y-b)^{n-i}\right\}. \end{aligned}$$

$R_n = \frac{1}{n!}\left\{\sum_{i=0}^{n} {}_nC_r \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a',b')(x-a)^i(y-b)^{n-i}\right\}$ を<u>剰余項</u>という.
特に剰余項について, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right\} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left\{\sum_{i=0}^{n} {}_nC_r \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a,b)(x-a)^i(y-b)^{n-i}\right\} \\ &\quad + \cdots. \end{aligned}$$

例 44. $f(x,y) = e^{x+y}$ とする. $\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(0,0) = 1$ であり $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ より

$$e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{1}{2}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + \cdots + \frac{1}{n!}(x+y)^n + \cdots.$$

第 6 回. 極値問題 (川平先生の本, 第 23 章の内容)

岩井雅崇, 2020/11/17

10　極値の定義

定義 45. $f(x,y)$ を領域 D 上の関数とする.

- $f(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ で極大であるとは, (a,b) 中心の十分小さな半径の円板上で $(x,y) \neq (a,b)$ ならば $f(x,y) < f(a,b)$ となること. このときの $f(a,b)$ の値を極大値という.
- $f(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ で極小であるとは, (a,b) 中心の十分小さな半径の円板上で $(x,y) \neq (a,b)$ ならば $f(x,y) > f(a,b)$ となること. このときの $f(a,b)$ の値を極小値という.
- 極大値, 極小値の二つ合わせて極値という. 極値をとる点 (a,b) を極値点という.
- 点 $(a,b) \in D$ が $f(x,y)$ の鞍点 (あんてん, saddle point) であるとは, ある方向で点 (a,b) が極大となり, 違うある方向で点 (a,b) が極小となること.

例 46.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$. 極値点 $(0,0)$, 極値 0, 極小値.
2. $f(x,y) = -x^2 - y^2$. 極値点 $(0,0)$, 極値 0, 極大値.
3. $f(x,y) = x^2 - y^2$. $f(t,0) = t^2$ より, $(t,0)$ の方向で見れば $(0,0)$ は極小. $f(0,t) = -t^2$ より, $(0,t)$ の方向で見れば $(0,0)$ は極大. よって $(0,0)$ は鞍点.
4. $f(x,y) = -x^2$. $f(0,t) = 0$ であるから $(0,0)$ は極大ではない.

定理 47. $f(x,y)$ を C^1 級関数とする. f が (a,b) で極値を取るならば,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$$

11　ヘッシアンを使った極値判定法

定義 48. $f(x,y)$ を C^2 級関数とする.

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

をfのヘッセ行列と呼び

$$D_f = \det H(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

をヘッシアン (Hessian)と呼ぶ. (判別式とも呼ばれる).

定理 49. C^2 級関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ であるとする.

1. $D_f(a,b) > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ のとき, f は点 (a,b) で極小.
2. $D_f(a,b) > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ のとき, f は点 (a,b) で極大.
3. $D_f(a,b) < 0$ の時, 点 (a,b) は f の鞍点.

例 50.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$. $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $D_f = 4$. f は $(0,0)$ で極小.
2. $f(x,y) = -x^2 - y^2$. $H(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. $D_f = 4$. f は $(0,0)$ で極大.
3. $f(x,y) = x^2 - y^2$. $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. $D_f = -4$. $(0,0)$ は f の鞍点.

12 ヘッシアンを使った極値判定法のやり方

C^2 級関数 f に関して極値を求める方法は以下の通りである.

[手順 1.] $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ となる点 (a,b) を求める.

[手順 2.] $D_f(a,b)$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ を求める. そして定理 49 を適応する.

例 51. $f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x + 12y$ について極大点・極小点を持つ点があれば, その座標と極値を求めよ. またその極値が極小値か極大値のどちらであるか示せ.

(解.) 上の手順に基づいて極値を求める.

[手順 1.]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3, \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 12$$

より, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ となる点 (a,b) は $(1,2), (1,-2), (-1,2), (-1,-2)$.

[手順 2.]

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}, D_f = -36xy.$$

よって上の 4 点に対し $D_f(a,b)$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ を計算する.

1. $D_f(1,2) = -72 < 0$ より定理 49 から $(1,2)$ は f の鞍点.
2. $D_f(1,-2) = 72 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-2) = 6 > 0$ より定理 49 から $(1,-2)$ は f の極小点. $f(1,-2) = -18$.
3. $D_f(-1,2) = 72 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2) = -6 < 0$ より定理 49 から $(-1,2)$ は f の極大点. $f(-1,2) = 18$.
4. $D_f(-1,-2) = -72$ より定理 49 から $(-1,-2)$ は f の鞍点.

以上より, f は $(1,-2)$ で極小値 -18 をもち, f は $(-1,2)$ で極大値 18 をもつ.

第 7 回. 陰関数定理と逆関数定理 (川平先生の本, 第 24 章の内容)

岩井雅崇, 2020/11/24

13 陰関数定理

定理 **52.** $f(x,y)$ を C^1 級関数とし, 点 (a,b) で $f(a,b)=0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$ とする.
この時 a を含む開区間 I と I 上の C^1 級関数 $\phi : I \to \mathbb{R}$ があって次の 3 つを満たす.

1. $b=\phi(a)$.
2. 任意の $x\in I$ について, $f(x,\phi(x))=0$.
3. $\frac{d\phi}{dx}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))}$. 特に $\frac{d\phi}{dx}(a)=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}$.

   $f(x,\phi(x))=0$ となる関数 $y=\phi(x)$ を$\underline{f(x,y)=0 \text{ の陰関数}}$という.

この定理によって, 陰関数が分からなくとも $\frac{d\phi}{dx}(a)$ が計算できる.

例 **53.** $f(x,y)=x^3-3xy+y^3-1$ とする. 曲線 $f(x,y)=0$ の $(1,0)$ での接線の方程式を求めよ.
(解.)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y, \frac{\partial f}{\partial y}=-3x+3y^2 \text{ である.}$$

よって $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\neq 0$ より, 陰関数 $\phi : I \to \mathbb{R}$ があって,

$$\phi(1)=0, f(x,\phi(x))=0, \frac{d\phi}{dx}(1)=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)}=1.$$

よって $y=\phi(x)$ の $(1,0)$ での接線の方程式は

$$y=\frac{d\phi}{dx}(1)(x-1)=x-1 \quad \text{である.}$$

14 逆関数定理

定理 **54.** Φ を領域 D 上の C^1 級変数変換とし $D\Phi$ を Φ のヤコビ行列とする.
$(a,b)\in D$ で $\det(D\Phi(a,b))\neq 0$ ならば, (a,b) を含む小さな円板上で Φ は逆変換 Φ^{-1} をもち $D\Phi^{-1}=(D\Phi)^{-1}$ となる.

逆関数定理から陰関数定理が導かれる.

第 8 回. ラグランジュ未定乗数法 (川平先生の本, 第 24 章の内容)

岩井雅崇, 2020/12/01

15 ラグランジュ未定乗数法

定理 55. $f(x,y)$, $g(x,y)$ を領域 D 上の C^1 級関数とする. $g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値を持つとし, $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b), \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\right) \neq (0,0)$ とする.
このとき, ある定数 λ があって

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \text{ となる.}$$

上の定理 57 から $F(x,y,t) = f(x,y) - tg(x,y)$ とするとき, $g(x,y)=0$ のもとでの $f(x,y)$ の極値の候補は以下の 2 つである.

1. $g(a,b) = \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0$ となる点 (a,b).
2. ある λ があって $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial t}(a,b,\lambda) = 0$ となる点 (a,b).

16 ラグランジュ未定乗数法の使い方

$g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ の極値を求める手順は以下の通りである.

[手順 1.] $g(a,b) = \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0$ となる点 (a,b) を求める.

[手順 2.] $F(x,y,t) = f(x,y) - tg(x,y)$ とおいて, $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial t}(a,b,\lambda) = 0$ となる点 (a,b,λ) を求める.

[手順 3.] 手順 1, 手順 2 で求めた点 (a,b) について, その値が極値であるかどうか調べる. 一般的な方法はないが, 例 56 のように「最大値の存在」と「最大値, 最小値であれば極値である」ことを用いる方法もある.

例 56. $f(x,y) = xy, g(x,y) = x^2+y^2-1$ とする. $g(x,y)=0$ のもとでの $f(x,y)$ の極値を求めよ. つまり $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$ とするとき, f の S 上での極値を求めよ.
(解.) 上の手順通りに求める.
[手順 1.] $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$ より, $g(a,b) = \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0$ となる点は存在しない.
[手順 2.] $F(x,y,t) = f(x,y) - tg(x,y) = xy - t(x^2+y^2-1)$ とおく. 以下の方程式を解く.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - 2xt = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = x - 2yt = 0, \frac{\partial F}{\partial t} = -(x^2+y^2-1) = 0.$$

すると $(x,y) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の 4 点が極値の候補となる.

[手順 3.] S は有界閉集合より, f は S 上で連続であるため, 第 1 回でやった定理より, f は S 上で最大値・最小値を持つ. よって $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の中に最大値をとる点や最小値をとる点がある.

実際計算すると,

$$f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\frac{1}{2},f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=-\frac{1}{2},$$

であるため, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で f は極大値 (最大値)$\frac{1}{2}$ をとり, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で f は極小値 (最小値)$-\frac{1}{2}$ をとる.

17　ラグランジュ未定乗数法 3 変数の場合

定理 57. $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ を領域 $D\subset\mathbb{R}^3$ 上の C^1 級関数とし, $F(x,y,t)=f(x,y,z)-tg(x,y,z)$ とおく. $g(x,y,z)=0$ のもとで $f(x,y,z)$ が点 (a,b,c) で極値を持つとし, $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b,c),\frac{\partial g}{\partial y}(a,b,c),\frac{\partial g}{\partial z}(a,b,c)\right)\neq(0,0,0)$ とする.
このとき, ある定数 λ があって,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c,\lambda)=\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c,\lambda)=\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c,\lambda)=\frac{\partial F}{\partial t}(a,b,c,\lambda)=0 \text{ となる.}$$

例 58. $f(x,y,z)=xyz,g(x,y,z)=x+y+z-170$ とする. $g(x,y,z)=0$ のもとで f の最大値を求めよ. つまり $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:g(x,y,z)=0\}$ とするとき, f の S 上での最大値を求めよ. ただし f が S 上で最大値を持つことは認めて良い.

(解.)　手順通りに求める.

[手順 1.] $\frac{\partial g}{\partial x}=1$ より $g(a,b,c)=\frac{\partial g}{\partial x}(a,b,c)=\frac{\partial g}{\partial y}(a,b,c)=\frac{\partial g}{\partial z}(a,b,c)=0$ となる点 (a,b,c) は存在しない.

[手順 2.] $F(x,y,t)=f(x,y,z)-tg(x,y,z)=xyz-t(x+y+z-170)$ とする. 以下の方程式を解く.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=yz-t=0,\frac{\partial F}{\partial y}=xz-t=0,\frac{\partial F}{\partial z}=xy-t=0,\frac{\partial F}{\partial t}=-(x+y+z-170)=0.$$

すると $(x,y,z)=(170,0,0),(0,170,0),(0,170,0),(\frac{170}{3},\frac{170}{3},\frac{170}{3})$ の 4 点が極値の候補となる.

[手順 3.] 最大値が存在し, 最大値は極値であるため, 上の 4 点の中に最大値をとる点が存在する. 実際計算すると,

$$f(170,0,0)=0,f(0,170,0)=0,f(0,170,0)=0,f\left(\frac{170}{3},\frac{170}{3},\frac{170}{3}\right)=\left(\frac{170}{3}\right)^3$$

であるため, $(\frac{170}{3},\frac{170}{3},\frac{170}{3})$ で f は最大値 $(\frac{170}{3})^3$ をとる.