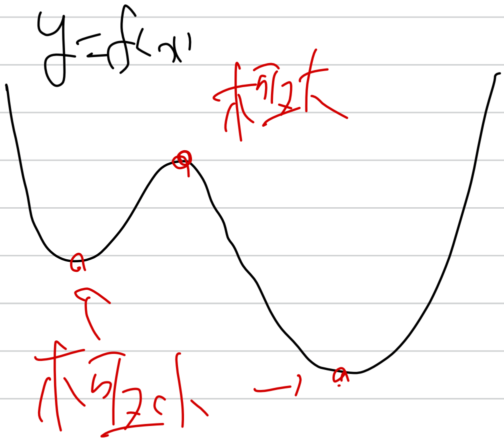
第6回 極値問題（川平23章）

あらすじ

極値 = 局所的な最大（最小）



どこで極値になる?

↓

いっぱい方法がある

理論

① ヘッセ行列を使った方法、

② ラグランジュ未定乗数法、

実践（プログラミング）

③ 勾配降下法

etc…

なぜ重要??

→ とどのつまり、機械学習・深層学習でやっていることは極値をもとめること!!

（損失関数の極小点）

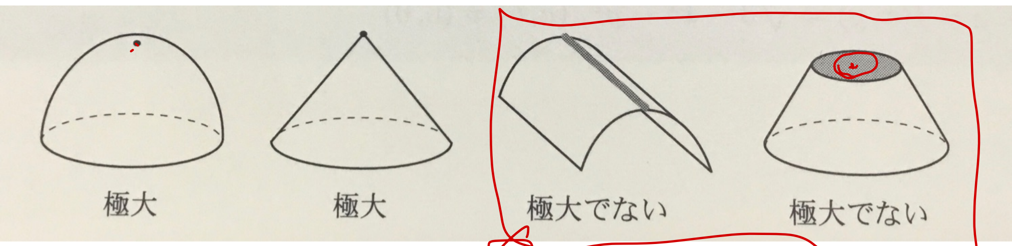
定義)

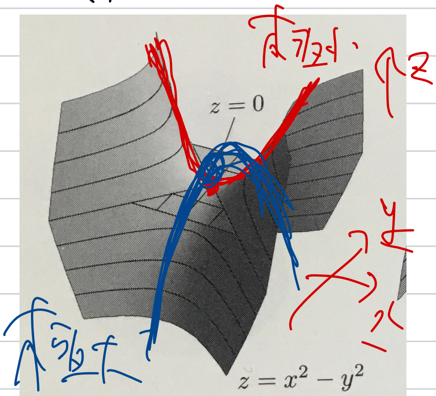
・$f(x,y)$ が点 (a,b) で極大であるとは、
(a,b) を含む十分小さな円板上で $(x,y)\neq(a,b)$ なら
$f(x,y)<f(a,b)$ となること。
このときの $f(a,b)$ の値を極大値という

・$f(x,y)$ が点 (a,b) で極小であるとは、
(a,b) を含む十分小さな円板上で $(x,y)\neq(a,b)$ なら
$f(x,y)>f(a,b)$ となること。
このときの $f(a,b)$ の値を極小値という

・極大値と極小値を合わせて極値。
極値をとる点を極値点という。

・$f(x,y)$ が点 (a,b) で鞍点（あんてん）(Saddle Point) とは
ある方向で点 (a,b) が極大であり
違うある方向で点 (a,b) が極小であること。

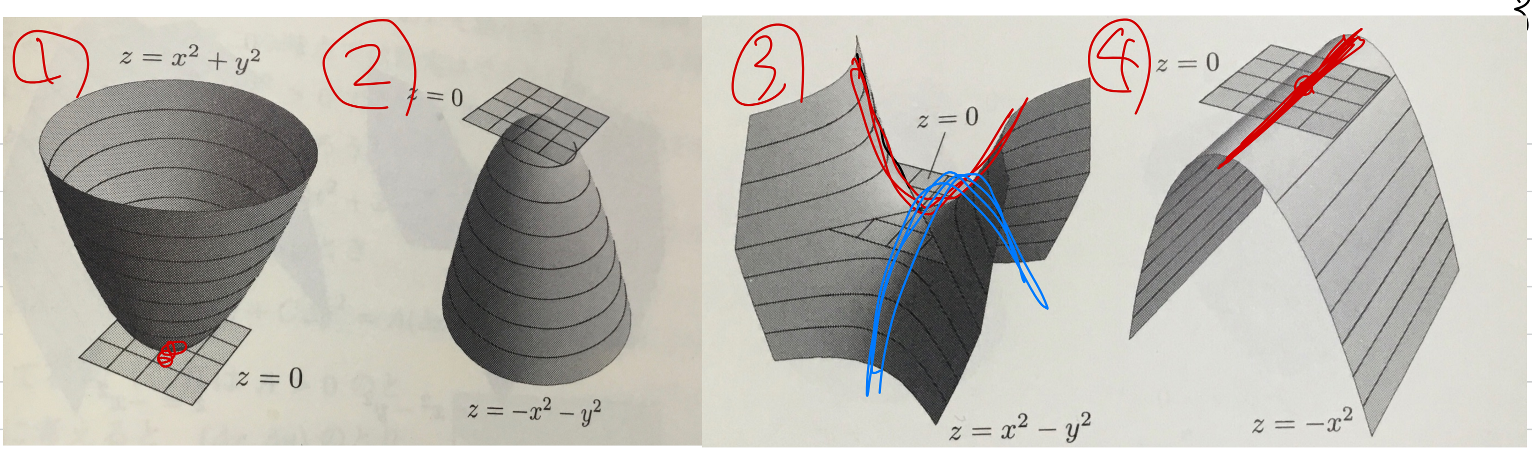




$z=x^2-y^2$

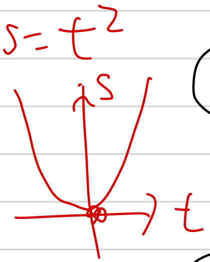
注意) ・この2つも極大ということもある。

・鞍点は極大でも極小でもない。



(例) ① $f(x,y)=x^2+y^2$.

極値点 $(0,0)$, 極値 0 極小点,



② $f(x,y)=-x^2-y^2$.

極値点 $(0,0)$ 極値 0 極大点

③ $f(x,y)=x^2-y^2$. $(0,0)$ は鞍点

証) $f(t,0)=t^2$ より $(0,0)$ は $(t,0)$ という方向で極小,

$f(0,t)=-t^2$ より $(0,0)$ は $(0,t)$ という方向で極大.

④ $f(x,y)=-x^2$

極値点 なし

($f(0,t)=0$ より $(0,0)$ は極大で無い

(t は任意の t)

命題1

$f(x,y)$ を C^1 級関数とする

$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0.$$

(証明は後回し)

(例)

① $\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$

② $\frac{\partial f}{\partial x}=-2x\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

極値

③ $\frac{\partial f}{\partial x}=2x\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

④ $\frac{\partial f}{\partial x}=-2x\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

極値でない

命題1だけでは

- "極大"、"極小"がわからん。
- 極値でないものもでる

(定義)

C^2 級関数 $f(x,y)$ について

$$H(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

を f のヘッセ行列という。

$$D_f = \det H(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

をヘッシアン(判別式)という

(補)

$$\begin{pmatrix} \text{Hesse.} & \text{Jacobi} & \text{Tannaka} & \text{Sasaki} \\ \text{Hessian} & \text{Jacobian} & \text{Tannakian} & \text{Sasakian} \end{pmatrix}$$

定理1 ヘッシアンによる極値判定法

C^2級関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ とする。

(i) $D_f(a,b) > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ のとき (a,b) で極小

(ii) $D_f(a,b) > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ のとき (a,b) で極大

(iii) $D_f(a,b) < 0$ のとき (a,b) は f の鞍点
(極値でない)

(例)

① $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $D_f = 4$ (i) 極小

② $H(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $D_f = 4$ (ii) 極大

③ $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $D_f = -4$ (iii) 鞍点

④ $H(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $D_f = 0$ 適用外

(例) $f(x,y)=x^3-y^3-3x+12y$ について。
極大点、極小点をもつ点があれば
その座標と極値を求めよ
また その極値が極小値か極大値のどちらであるか示せ。

(解) $\boxed{\text{手順1}}$ $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ なる点 (a,b) を求める

$\boxed{\text{手順2}}$ $D_f(a,b)$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ を求めて、
定理1を適用する。

$\boxed{1}$ $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3.$ $\frac{\partial f}{\partial y}=-3y^2+12.$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ なる点は

$(1,2),\ (1,-2),\ (-1,2),\ (-1,-2).$

$\boxed{2}$

$$H(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x & 0\\ 0 & -6y\end{pmatrix}$$

$$D_f=-36xy$$

(1) 点 $(1,2)$ で $Df(1,2) = -72 < 0$ 鞍点

(2) 点 $(1,-2)$ で $Df(1,-2) = 72 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-2) = 6 > 0$ 極小点

$f(1,-2) = 1^3 - (-2)^3 - 3 + 12(-2) = -18$

(3) 点 $(-1,2)$ で $Df(-1,2) = 72 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2) = -6 < 0$ 極大点

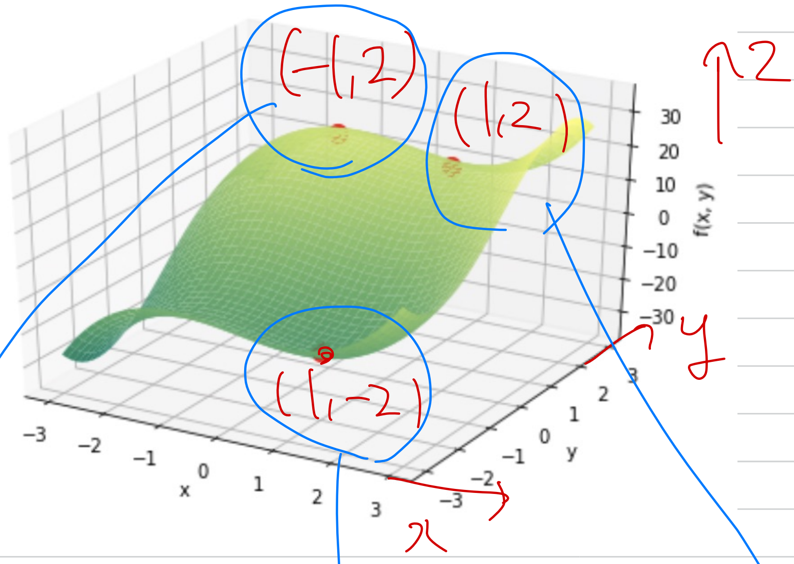
$f(-1,2) = 18$

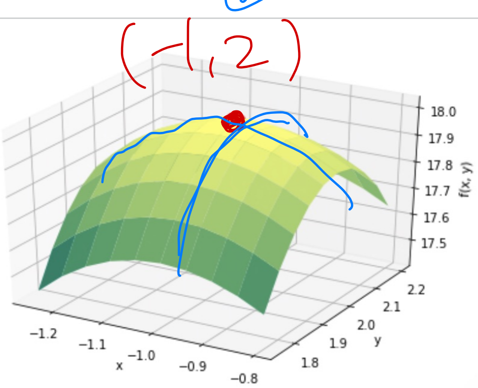
(4) 点 $(-1,-2)$ で $Df(-1,-2) = -72 < 0$ 鞍点

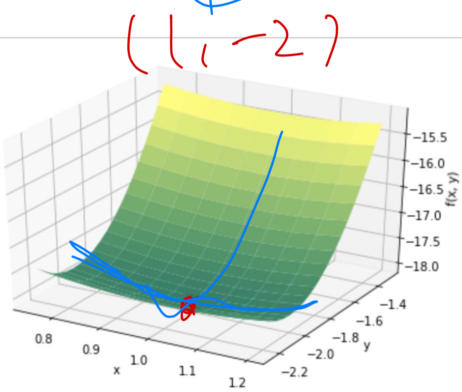
答 $(1,-2)$ で 極小値 -18

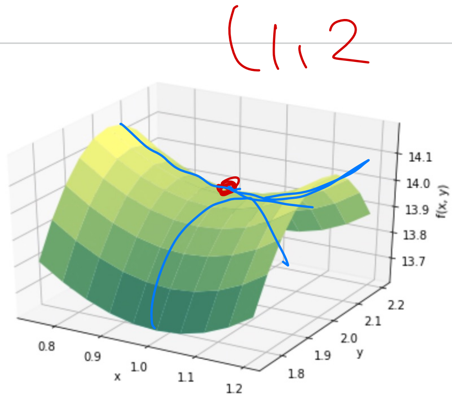
$(-1,2)$ で 極大値 18

$z = f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x + 12y$









極大　　　　極小　　　　鞍点

－命題1の証明－

$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるとする.

ある正の数 $r>0$ があって.

$$F : [a-r, a+r] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ を考える}$$
$$x \longmapsto f(x,b)$$

すべての $x \in (a-r, a+r)$ で $F(x) < F(a)$ となる
($x \neq a$ のとき)

$F(x)$ は $x=a$ で極値をとるため

$$\frac{dF}{dx}(a) = 0 \quad (\text{1年 命題 7.3})$$

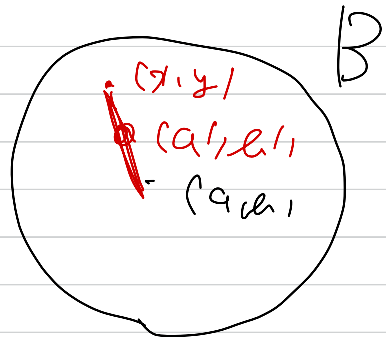
$$\frac{dF}{dx}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \quad //$$

-定理1の証明-

点 (a,b) で $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ とし、

点 (a,b) 中心、半径 r の円板を $B=B_{(a,b)}(r)$ とする。

テイラー展開の定理より



任意の $(x,y)\in B$ について、(x,y) と (a,b) を結ぶ線分上の点 (a',b') があって、

$$f(x,y)-f(a,b)$$
$$=\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a',b')(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a',b')(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a',b')(y-b)^2\right)}_{R}$$

今 $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a',b')$ $B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a',b')$

$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a',b')$

$x-a=h$, $y-b=k$ とおき

$$R(x,y)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)$$ となる。

(a,b) の近くで $R(x,y)>0 \Leftrightarrow (a,b)$ は極小点

$R(x,y)<0 \Leftrightarrow (a,b)$ は極大点

(i)の場合 ($Df>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0$)

C^2級より $A>0$ $AC-B^2>0$ としより

$$R(x,y)=\frac{1}{2}\left(\underbrace{A}_{>0}\left(h-\frac{B}{A}k\right)^2+\underbrace{\frac{AC-B^2}{A}}_{>0}k^2\right)>0$$

$(h,k)\neq(0,0)$ なら

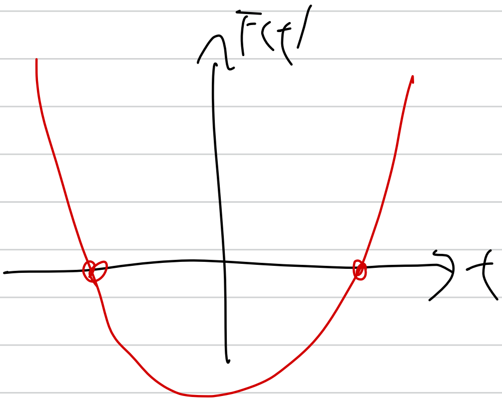
∴ 極小。

($Df>0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0$)

(ii) 上の式より $R(x,y)<0$ となる。

(iii)の場合、$AC-B^2<0$ としより、

$$F(t)=At^2+2Bt+C$$



$F(t_1)>0$ なる点 t_1 と

$F(t_2)<0$ なる点 t_2 がある。

$$R(a+t_1k,\ b+k)=\frac{k^2}{2}(At_1^2+2Bt_1+C)>0$$

この方向で極小。

$$R(a+t_2k,\ b+k)=\frac{k^2}{2}(At_2^2+2Bt_2+C)<0$$

この方向で極大

(a,b)は鞍点 //