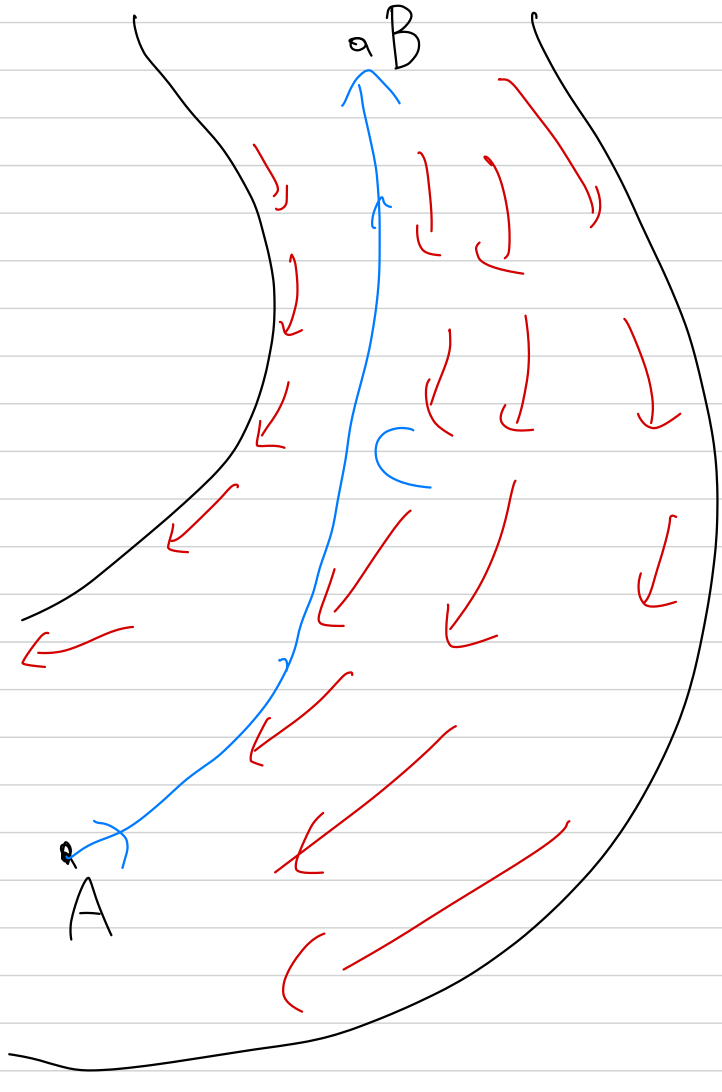
第13回 線積分とグリーンの定理

(川手 11, 29章)

あらすじ

川上り



・AからBへ行きたい

・川の抵抗を小さくしたい

ベクトル場 (u, v) として

$$\int_C u\,dx + v\,dy$$

を小さくする

これってどういういみ?

オイラー
ラグランジュ
方程式

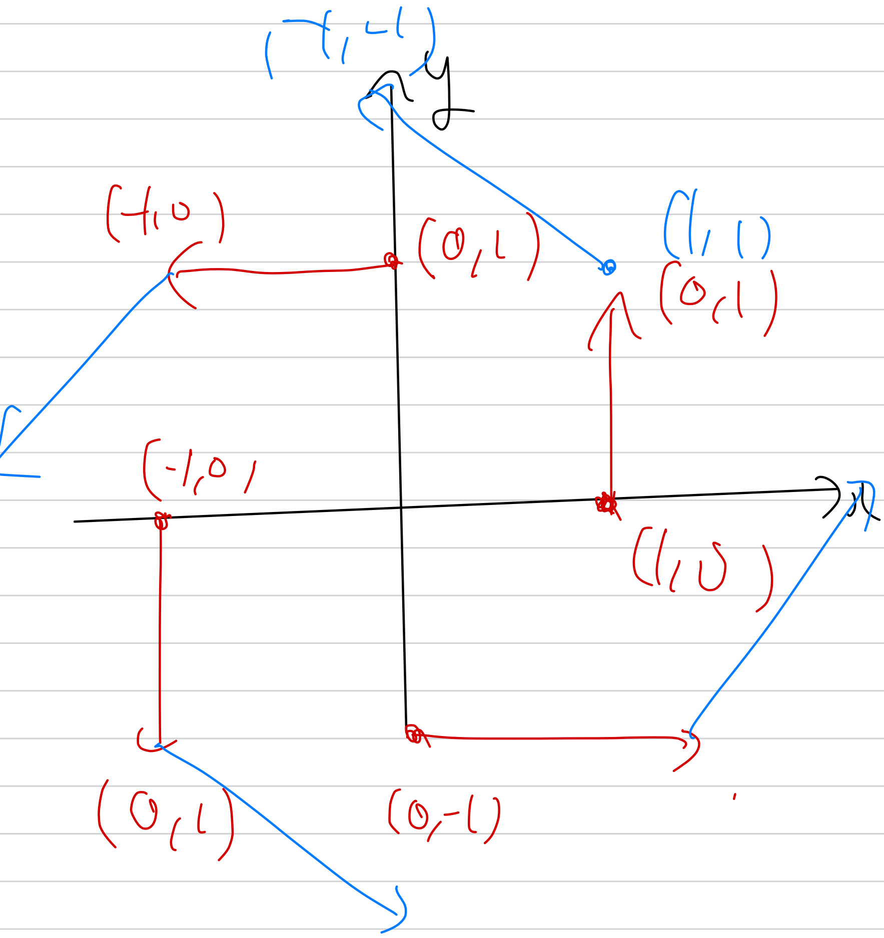
定義) $D\subset\mathbb{R}^2$ を領域とする

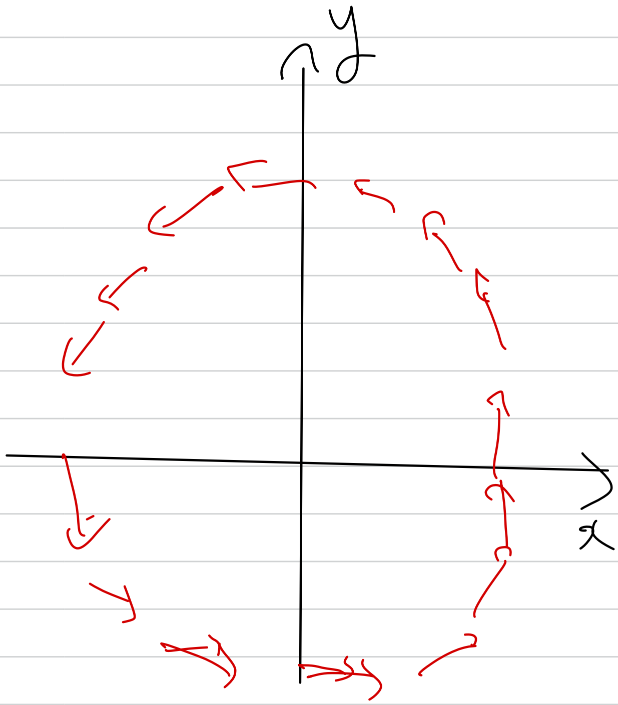
・$u(x,y)$, $v(x,y)$ を D 上の C^n 級関数として、

$$V: D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y))$$

を D 上の C^n 級ベクトル場という

例1) $$V: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (-y, x)$$





反時計まわりのウインド

定義)

・関数 $\vec{p} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto \vec{p}(t) = (x(t), y(t))$

が滑らかな曲線、

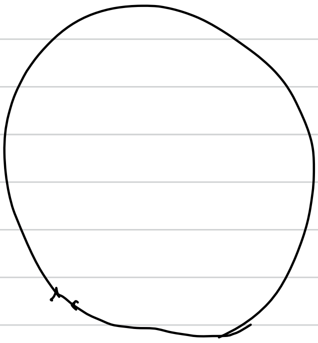
① $x(t), y(t)$ が (a, b) 上 C^1 級.

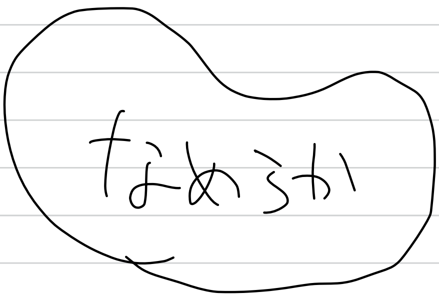
② 任意の $c \in (a, b)$ について、速度ベクトル $\frac{d\vec{p}}{dt}(c) = \left(\frac{dx}{dt}(c), \frac{dy}{dt}(c)\right)$ がゼロベクトル $\vec{0}$ でない.

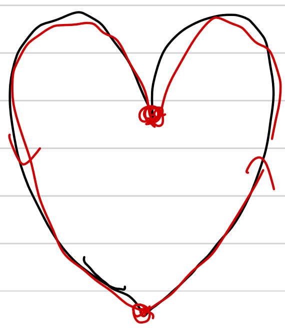
・$C = \vec{p}(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ が区分的に滑らかな曲線とは、

滑らかな曲線を端点で結んだもの

例) 円周 なめらか　　長方形の周 区分的になめらか







定義) $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし、
D 上の C^1 級ベクトル場を
$V(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ とする。

D 内の滑らかな曲線 $C: \vec{p}(t) = (x(t), y(t))$
$(a \leq t \leq b)$ について

V の曲線 C に沿った線積分を

$$\int_C V(\vec{p}) \cdot d\vec{p} = \int_a^b \left(V(\vec{p}(t)) \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right) dt$$

(内積)

$$= \int_a^b \left(u(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + v(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt$$

とする

$\int_C V(\vec{p}) \cdot d\vec{p}$ を $\int_C u\,dx + v\,dy$ とかくこともある。

(区分的になめらかな曲線については
和をとる)

(例1) $V: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto (2x, 2y)$

$C: \vec{p}(t) = (t, t^2) \quad (0 \leq t \leq 1)$.

V の C に沿った線積分の値を求めよ.

(解)

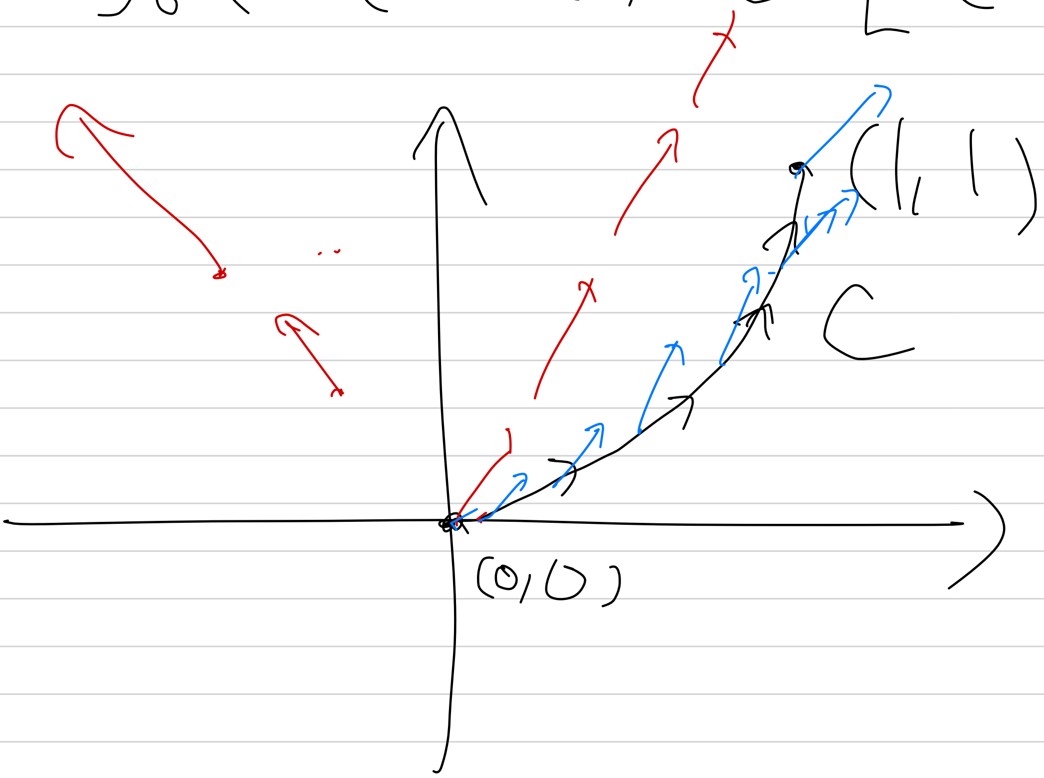
$V(\vec{p}(t)) = (2x, 2y) = (2t, 2t^2)$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = (1, 2t)$

$$\int V(\vec{p}) \cdot d\vec{p}$$

$$= \int_0^1 \left(V(\vec{p}) \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right) dt$$

$$= \int_0^1 (2t + 4t^3)\, dt = \left[t^2 + t^4 \right]_0^1 = 2$$



(例12) $D \subset \mathbb{R}^2$ 領域とする

F：D上の C^1級関数とする

勾配ベクトル場 $\nabla F : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

D内の滑らかな曲線 $C : \vec{p}(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$ とすると

$$\int_C \nabla F \cdot d\vec{p} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d F(\vec{p}(t))}{dt} \cdot dt$$

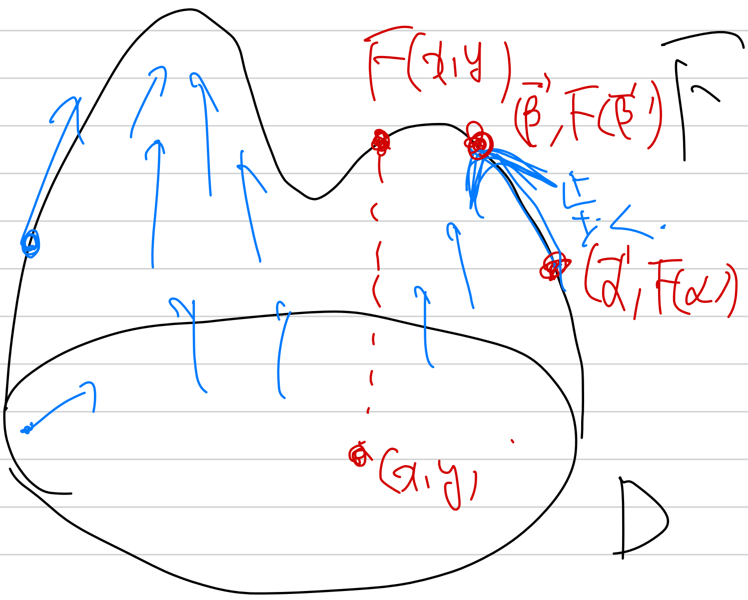
$$= F(\vec{p}(b)) - F(\vec{p}(a))$$

よって $\vec{\alpha} = (x(a), y(a)) = \vec{p}(a)$

$\vec{\beta} = (x(b), y(b)) = \vec{p}(b)$ とおくと

$$\int_C \nabla F \cdot d\vec{p} = F(\vec{\beta}) - F(\vec{\alpha})$$

山



$F: D \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto$ x,yでの山の高さ

$\nabla F(x,y) =$ (x,y)からみて"一番急な方向"

$$\boxed{\int_C \nabla F \cdot d\vec{p} = F(\vec{\beta}) - F(\vec{\alpha})}$$

"急な方向にそってあるいていったとき"の高さの和

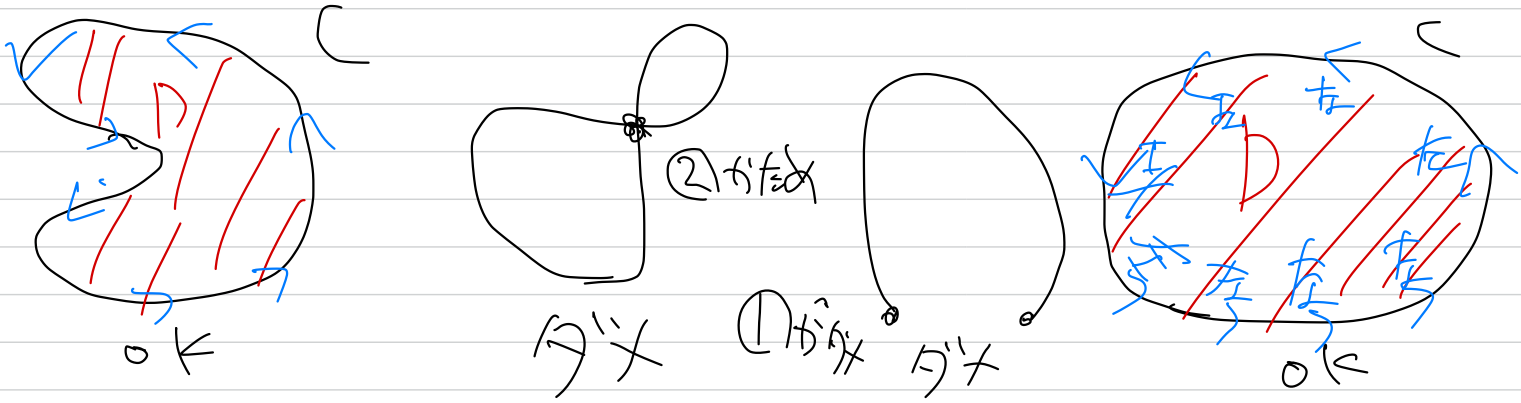
（どれだけ高くなったか）

(定義) 区分的に滑らかな曲線 $C: \vec{p}(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$

Cが単純閉曲線であるとは 1〜2について。

① 始点と終点が一致 $(\vec{p}(a)=\vec{p}(b))$

② 自己交差しない $(a<s<t<b \Rightarrow \vec{p}(s)\neq\vec{p}(t))$



定理(グリーンの定理)

・$\mathbb{R}^2 \supset C: \vec{p}(t)=(x(t),y(t))$ $(a \leqq t \leqq b)$ を単純閉曲線、

$\mathbb{R}^2 \supset D$ をCで囲まれる有界閉集合とする

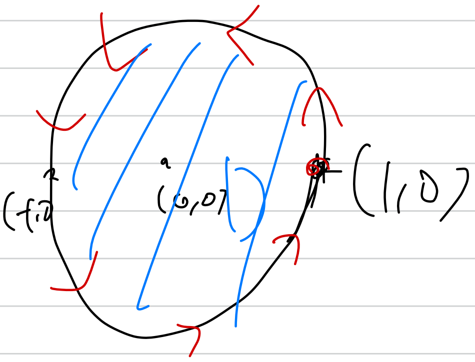
・Cの進行方向の左側にDがあるとする

$V(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ をDを含む開集合上で定義されたC^1級ベクトル場とするとき

$$\int_C V(\vec{p})\cdot d\vec{p} = \int_C u\,dx + v\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

とくに $\mathrm{Area}(D) = \int_C x\,dy = \int_C -y\,dx$ $\left((u,v)=(0,x) \text{ or } (-y,0)\right)$

例1 $C: \vec{p}(t) = (\cos t, \sin t)$ $0 \le t \le 2\pi$



$V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, -2xy)$

$\int_C V(\vec{p}) \cdot d\vec{p} = \int_C (x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy$

を求めよ

解) ふつうにやると

$$\int_C V(\vec{p}) \cdot d\vec{p} = \int_0^{2\pi} \{(\cos^2 t - \sin^2 t)(-\sin t) - 2\cos t \sin t \cos t\}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin t(\sin^2 t - 3\cos^2 t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin t(1 - 4\cos^2 t)\,dt$$

$$= \left[-\cos t + \frac{4}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = 0$$

グリーンの定理をもちいると

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy) = -2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (-2y - (-2y))\,dxdy$$

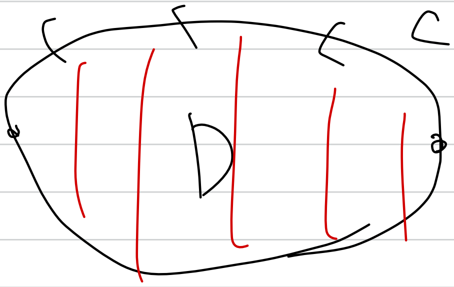
$$= 0$$

一致

(例1.2) 楕円の面積

a, b を正の数として

$$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$



$$= \left\{(x,y) \;\middle|\; -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\}$$

Area(D)を求めよ。

普通にすると

$$\iint_D dxdy = \int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} - \left(-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) dx$$

$$= \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\, dx \qquad x = a\cos t,\ \frac{dx}{dt} = -a\sin t$$

$$= \int_{\pi}^{0} -2ab\sin^2 t\, dt$$

$$= 2ab \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

グリーンの定理

$C : \vec{p}(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ より

$-\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\mathrm{Area}(D) = \int_C x\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\, dt$$

$$= ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi ab$$

証 $\boxed{\int_C u\,dx = -\iint_D \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy}$ と こっちを示す。

$\int_C v\,dy = \iint_D \frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy$ を示せばよい

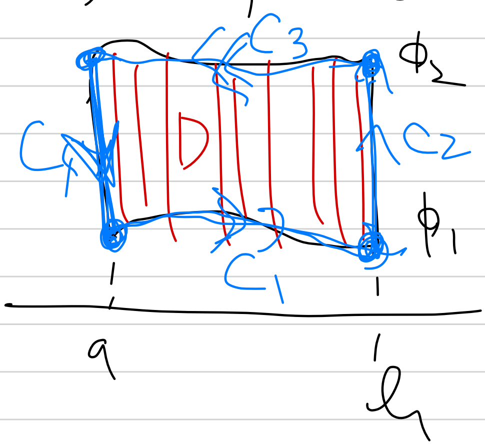
$V : D \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ とする。

① Dが縦線領域のとき

$\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ 連続関数, $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$

$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ のとき



このときCは下の C_1, C_2, C_3, C_4 をつないだもの

$C_1 : \vec{p}(t) = (a+t(b-a),\ \phi_1(a+t(b-a)))$ $(0 \leq t \leq 1)$

$C_2 : \vec{p}(t) = (b,\ \phi_1(b)+t(\phi_2(b)-\phi_1(b)))$ 〃

$C_3 : \vec{p}(t) = (b+t(a-b),\ \phi_2(b+t(a-b)))$ 〃

$C_4 : \vec{p}(t) = (a,\ \phi_2(a)+t(\phi_1(a)-\phi_2(a)))$ 〃

$$\int_{C_1} u\,dx = \int_0^1 \left(u(x, \phi_1(x)) \frac{dx}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b u(x, \phi_1(x))\,dx. \quad \left(\text{置換積分}\right)$$

$$\int_{C_2} u\,dx = \int_{C_4} u\,dx = 0$$

$$\int_{C_3} u\,dx = \int_0^1 \left(u(x, \phi_2(x)) \frac{dx}{dt} \right) dt$$

$$= \int_b^a u(x, \phi_2(x))\,dx$$

$$\int_C u\,dx = \int_{C_1} u\,dx + \int_{C_2} u\,dx + \int_{C_3} u\,dx + \int_{C_4} u\,dx$$

$$= \int_a^b u(x, \phi_1(x))\,dx + \int_b^a u(x, \phi_2(x))\,dx$$

$$= -\int_a^b \left\{ u(x, \phi_2(x)) - u(x, \phi_1(x)) \right\} dx$$

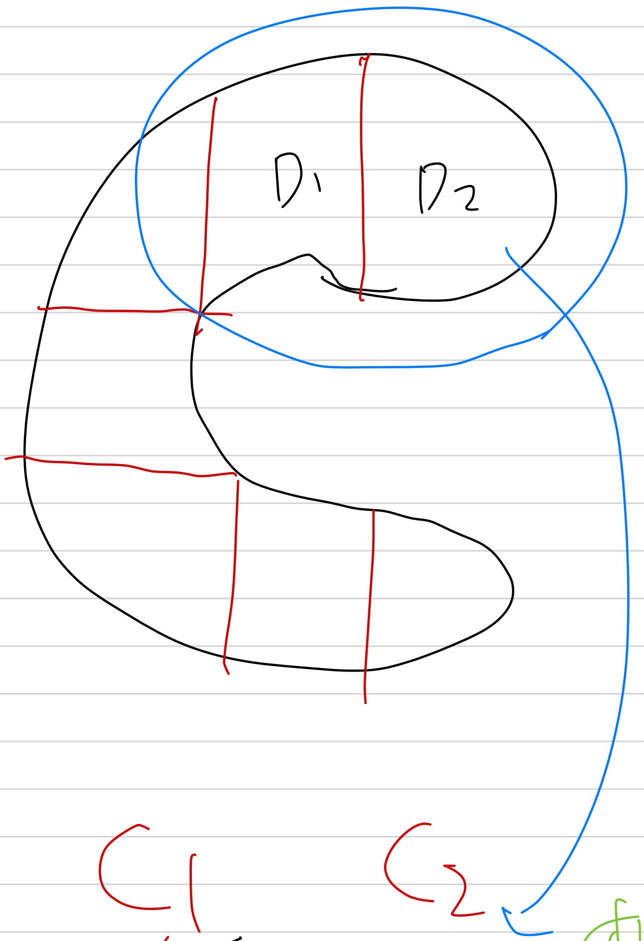
$$= -\int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= -\iint_D \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy$$

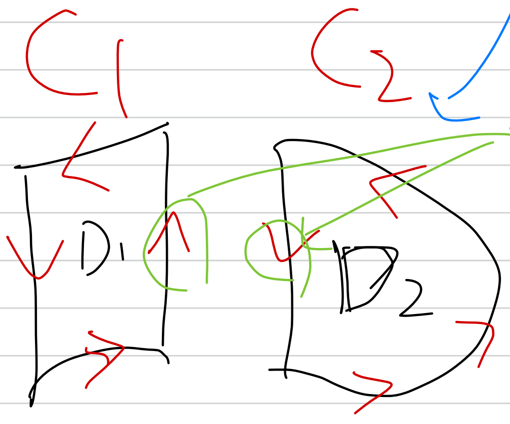
//

② 一般領域の場合。

有限個の分割で縦線領域と横線領域の和にできる



$$\int_{C_1} u\,dx + \int_{C_2} u\,dx = \int_C u\,dx$$



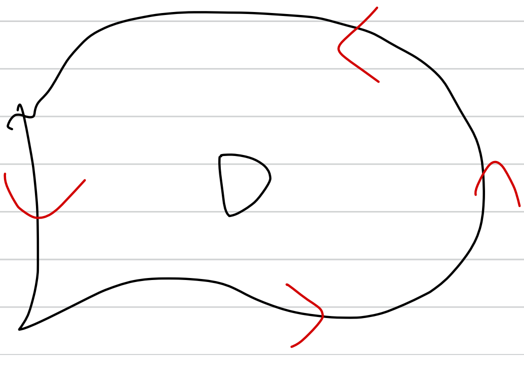
相殺する

$$\iint_{D_1} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \iint_{D_2} -\frac{\partial u}{\partial y}dx$$

$$= -\int_D \frac{\partial u}{\partial y}dx$$

uとい

$D = D_1 + D_2$



C 図.

//