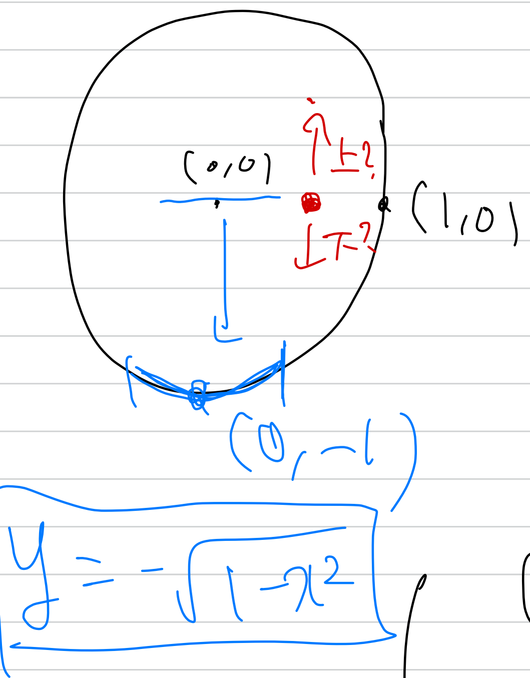
第7回 陰関数定理と逆関数定理

(川平 2章)

<u>あらすじ</u> 例えば $x^2+y^2=1$ を $y=(x\text{の式})$ と表したい。



全体であらわすのは無理そう

($\pm\sqrt{1-x^2}$, ±の違いがある)

局所的にはいけそう!

(0,−1)の近くでは

$$y=-\sqrt{1-x^2} \quad \text{とかける}$$

これが 陰関数定理

($F(x,y)=0$ について、局所的に $y=(x\text{の式})$ とかけることを保証する)

(定理) 陰関数定理

$f(x,y)$ を C^1 級関数とし

$f(a,b)=0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$ となる (a,b) をとる.

このとき a を含む開区間 I と I 上の C^1 級関数

$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ があって,

(1) $b=\varphi(a)$

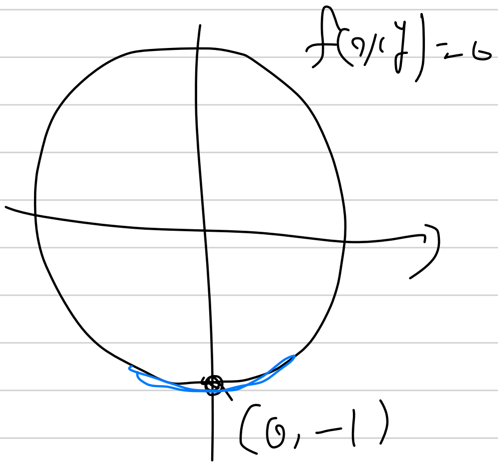
(2) $\underline{f(x,\varphi(x))=0 \quad (x\in I)}$

(このとき $y=\varphi(x)$ を $f(x,y)=0$ の陰関数という)

(3) $$\frac{d\varphi}{dx}(x)=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$$

とくに $$\frac{d\varphi}{dx}(a)=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}$$

例1) $f(x,y) = x^2+y^2-1$ $\quad (a,b)=(0,-1)$



$f(0,-1)=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1) = -2 \neq 0.$

陰関数定理より

十分小さな $\varepsilon>0$ で

$\phi : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1級関数があり

(1) $\phi(0)=-1$, (2) $f(x,\phi(x))=0$. となる.

実際、 $\phi(x) = -\sqrt{1-x^2}$ がそれにあたる.

$$\left(\begin{array}{l} \phi(0)=-1 \\ f(x,\phi(x)) = x^2+\left(-\sqrt{1-x^2}\right)^2-1=0 \end{array}\right)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(3)より

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))} = \frac{-2x}{2\phi(x)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

一致してる

例112　$\phi(x)$がわからなくても$\frac{d\phi}{dx}$はわかる。

・$f(x,y)=x^3-3xy+y^3-1$ とする。
曲線 $f(x,y)=0$ の$(1,0)$での
接線の方程式を求めよ。

(解) $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y$，$\frac{\partial f}{\partial y}=-3x+3y^2$。

$f(1,0)=0$　$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=-3\neq 0$ より
ある陰関数$y=\phi(x)$があって、

① $\phi(1)=0$，② $f(x,\phi(x))=0$

③ $\frac{d\phi}{dx}(1)=\dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)}=\dfrac{-3}{-3}=1$

($f(x,\phi(x))$の図形は局所的に$y=\phi(x)$となる)

よって、$y=\phi(x)$の接線の方程式を求めればよい。

$$y=\frac{d\phi}{dx}(1)(x-1)+0=x-1$$

$$y=x-1 \quad //$$

($\phi(x)$はわからないが$\phi'(1)$はわかる)

(定理) 逆関数定理

Dを領域とし、

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto (\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y))$$

を C^1級変数変換とする。

D内の点(a,b)とし、$D\Phi$をΦのヤコビ行列とする

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\det D\Phi(a,b) \neq 0$ ならば

(a,b)をふくむ十分小さな開域で

Φは逆変換Φ^{-1}をもち

$$D\Phi^{-1} = (D\Phi)^{-1}$$ となる。

(局所的に逆関数がある)

(証明はむずかしいので省略)

・逆関数定理から陰関数定理が成立する証明.

(証) $f(x,y)$ を領域 D 上の C^1 級関数とし、
$f(a,b)=0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$ なる点 (a,b) をとる

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad C^1\text{級変数変換}$$
$$(x,y) \longmapsto (x, f(x,y))$$

$$D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

$\det D\Phi(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ より、

(a,b) を含む十分小さな円板 U があって、
Φ は U 上で逆変換 Φ^{-1} をもつ。

$V = \Phi(U)$ として、

$$\Phi^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \longmapsto (g(u,v), h(u,v)) \text{ とおくと}$$

$$\Phi \circ \Phi^{-1}(u,v) = (u,v)$$

$$(u,v) = \Phi \circ \Phi^{-1}(u,v) = (g(u,v), f(u,h(u,v)))$$

$\therefore\ u = g(u,v)$, $\boxed{v = f(u,h(u,v))}$ ①

$$(x,y) = \Phi^{-1} \circ \Phi(x,y) = (g(x,f(x,y)), h(x,f(x,y)))$$

$\therefore\ x = g(x,f(x,y))$, $\boxed{y = h(x,f(x,y))}$ ☆

今 a をふくむ区間 I と b をふくむ区間 J で $I \times J \subset U$ となる δ をとる。

$$\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto h(x,0)$$

とする

$(a,0) \in V$

$(f(a,b)=0)$

① $\phi(a) = h(a,0)$

$= h(a,f(a,b)) \overset{(☆)}{=} b$

② $f(x,\phi(x)) = f(x,h(x,0)) \overset{①}{=} 0$

③ $D\Phi^{-1} = (D\Phi)^{-1}$ より

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \boxed{\frac{\partial h}{\partial u}} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \\ \underline{-\frac{\partial f}{\partial x}} & 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x}(x,0) = \frac{\partial h}{\partial u}(u,0)$$

$$= \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))} \quad //$$