

第3回. 合成関数の微分と連鎖律 (川平先生の本, 第19・20・21章の内容)

岩井雅崇, 2020/10/20

定理 1. $f(x, y)$ を領域 D 上の C^1 級関数とする. $x = x(t)$, $y = y(t)$ を t に関する C^1 級関数とし, $z(t) = f(x(t), y(t))$ とするとき,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

例 2. $f(x, y) = 2x^3y$, $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = f(x(t), y(t))$ とする. このとき

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3, \frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = \cos t, \text{ より}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 6 \cos^2 t \sin t (-\sin t) + 2 \cos^3 t \cos t = -6 \cos^2 t \sin^2 t + 2 \cos^4 t.$$

定義 3. 領域 D 上の C^1 級関数を $x(u, v)$, $y(u, v)$ とする.

$$\begin{aligned} \Phi: D &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

を C^1 級変数変換という.

例 4. • a, b, c, d を定数とする. $\Phi(u, v) = (au + bv, cu + dv)$ は C^1 級変数変換である. これを 1 次変換という.

• $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v)$ も C^1 級変数変換である. これを極座標変換という.

定理 5. 領域 D 上の C^1 級変数変換を

$$\begin{aligned} \Phi: D &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

とし, 領域 $E(\supset \Phi(D))$ 上の C^1 級関数を $f(x, y)$ とする.

領域 D 上の C^1 級 $g(u, v)$ を

$$\begin{aligned} g = f \circ \Phi: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto f(x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

で定めるとき, 各偏導関数は以下の通りになる.

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

行列の記法を用いると以下のようにかける.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

例 6. $f(x, y)$ を C^1 級関数とし, C^1 級変数変換を $(x(u, v), y(u, v)) = (u \cos v, u \sin v)$ とする. $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ とするとき, $\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}$ を $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を用いてあらわせ.

(解.)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -u \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u \cos v, \quad \text{より}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \cos v \frac{\partial f}{\partial x} + \sin v \frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = -u \sin v \frac{\partial f}{\partial x} + u \cos v \frac{\partial f}{\partial y}.$$