

解約強度が ステップ関数型の資産価格依存性を持つ場合の 変額年金保険の 最低保証に係る責任準備金評価式

JARIP 第17回 研究発表大会
2019年11月9日

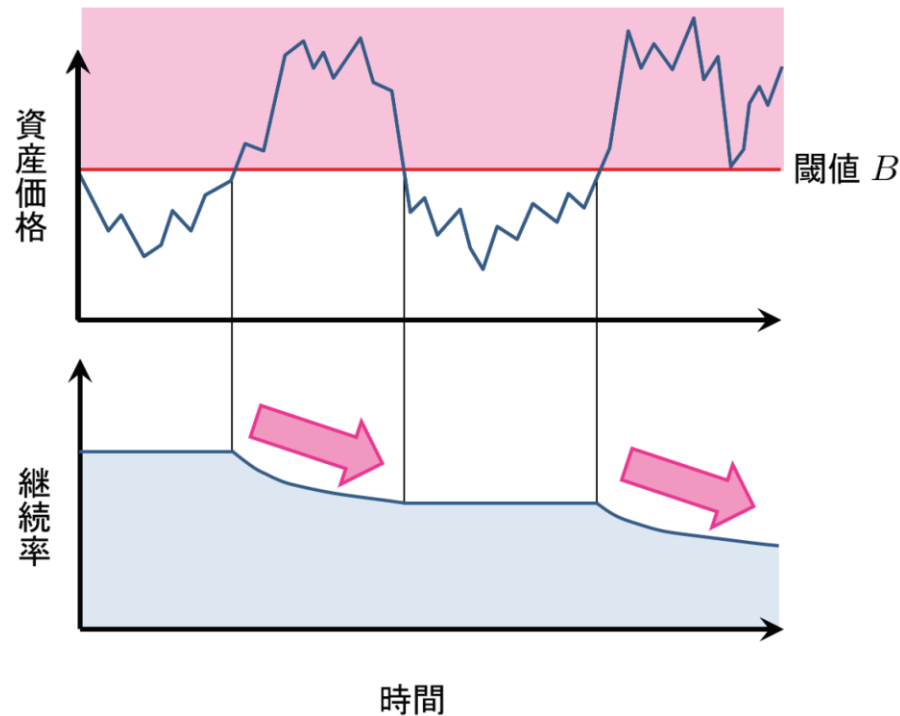
第一生命保険株式会社 塚本 昌也

概要

- 資産価格が閾値以上であるときに一定率で解約が発生。
- 資産価格が閾値未満であるときは解約が発生しない。

という前提の下での、

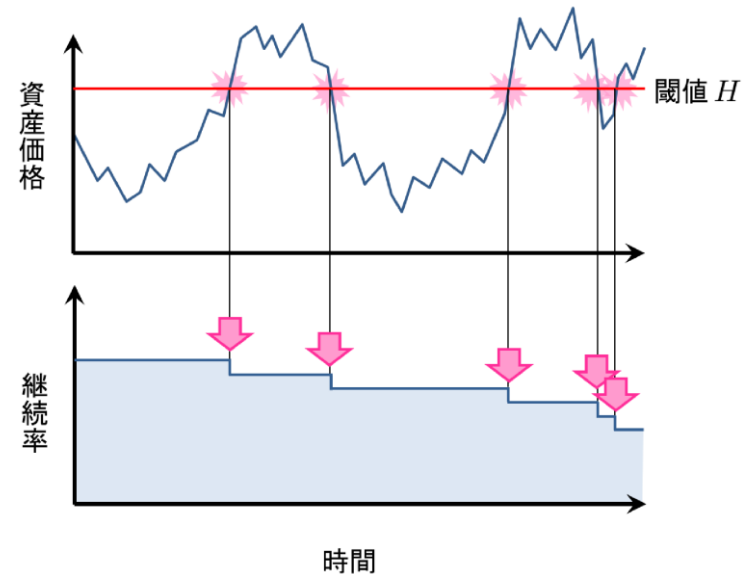
変額年金保険の最低保証に係る責任準備金評価式を提案する。



主な参考文献

- 井澤(2014), 変額年金の最低保証オプションに関する一考察, 日本アクチュアリー会会報

- 「資産価格がある閾値に一致する瞬間に解約が発生する」という前提の下で、最低保証 V の評価式を導出。
- 動的解約下の最低保証 V 評価式を導出した、数少ない研究例。



- Linetsky (1999), Step options, *Mathematical Finance*

- ステップオプション: 「原資産価格がある閾値以上(または未満)の領域に滞在している時間に応じてペイオフが減衰するようなオプション」を提案、その価格式を導出。
- ステップオプションは、もともとノックアウト型バリアオプションの拡張を意図して提案されたものだが、数学的な構造は動的解約下の変額年金保険の最低保証オプションと同様。
- その価格式や導出方法を、変額年金保険の最低保証 V の評価式へと応用が可能。

従来の最低保証V評価式

(ここでは満期 T での生存給付のみ考える。死亡は考えない。)

- 責任準備金 = 給付現価 - 収入現価
- 給付現価 = $e^{-rT} K N(-d_-) - e^{-qT} S N(-d_+)$
- 収入現価 = $\int_0^T q S e^{(r-q)t} e^{-rt} dt = S (1 - e^{-qT})$

□ Black-Scholesモデルに基づくプットオプションの価格公式を使用。

□ 解約率は考慮していない。

従来の最低保証V評価式の課題

- 変額年金保険では一般に、解約時に最低保証V相当額の清算(契約者への返還)が行われない。
- すなわち、無解約返戻金型保険と同じ構造。解約損益が発生し得る。
- 本来は予定解約率を考慮すべきところ。

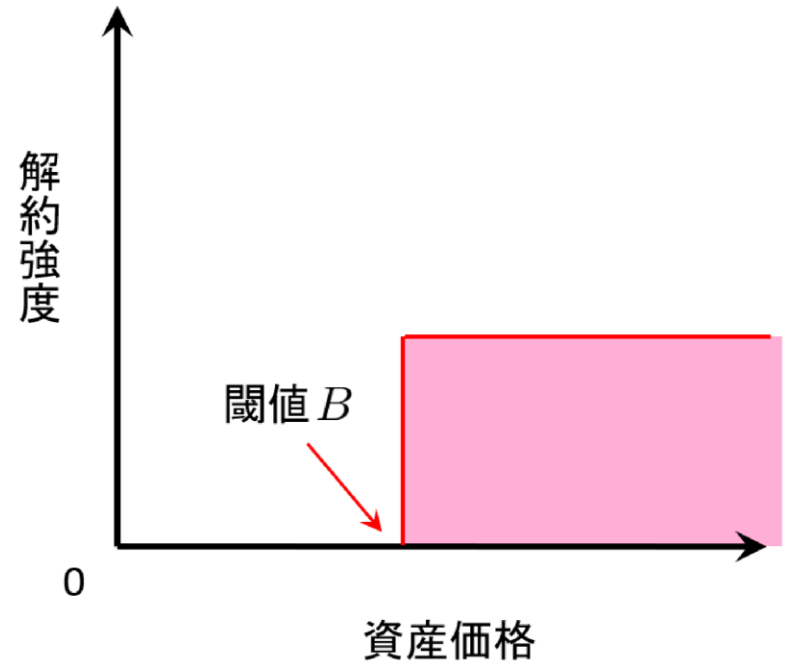
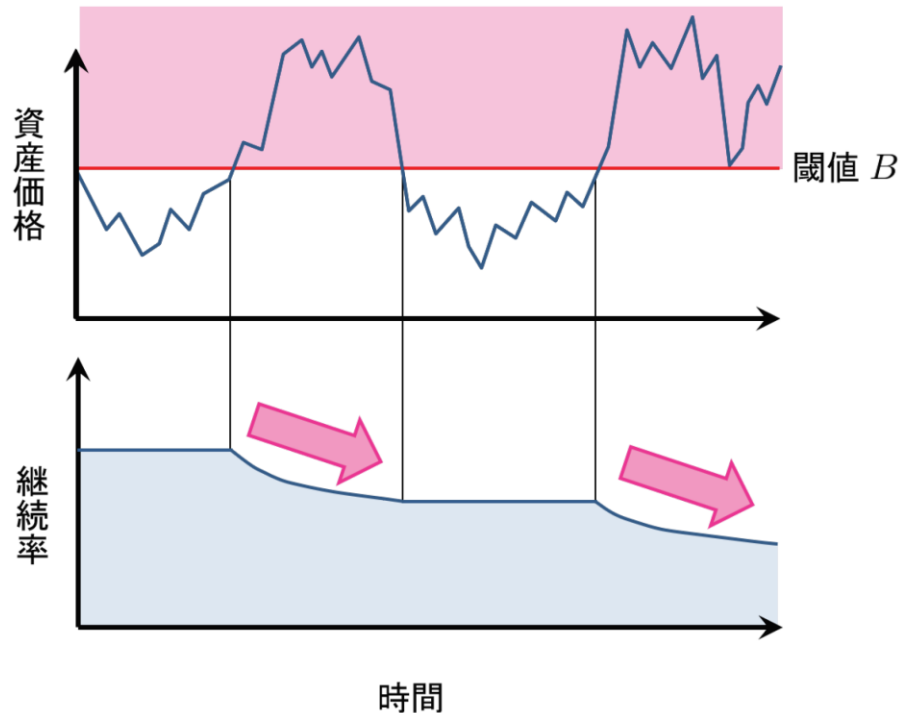
しかし、予定解約率を考慮することは困難とされてきた。

- 解約率が資産価格に依存する性質(動的解約)があるため。
- 動的解約を踏まえた評価式の解析解を得るのが困難(と言われてきた)。

□ 本研究で、簡易な動的解約下での評価式を提案

本研究で仮定する動的解約構造

- 資産価格が閾値 B 以上であるときに一定率で解約が発生。
- 資産価格が閾値 B 未満であるときは解約が発生しない。



特に、 $B = K$ (給付の最低保証額) と設定すると、
「最低保証オプションがアウトオブザマネーのときのみ一定率で解約が発生」となる。

本研究で提案する最低保証V評価式

$$\text{給付現価} = e^{-\gamma T - \nu x} (K \Psi_{\rho}(-\nu; -k, -x, T) - B \Psi_{\rho}(-(\nu + \sigma); -k, -x, T))$$

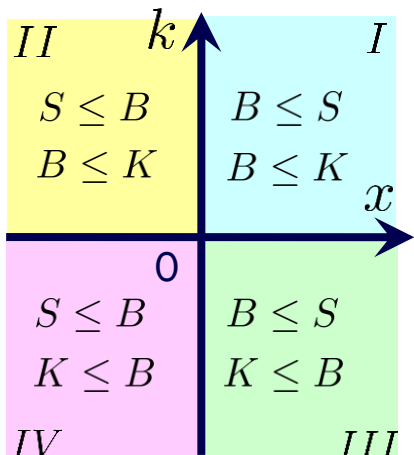
$$\text{収入現価} = qB \int_0^T e^{-\gamma t - \nu x} \Psi_{\rho}(-(\nu + \sigma); -\infty, -x, t) dt$$

ρ : 資産価格が解約開始バリア以上のときの解約強度.

$x = \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S}{B} \right)$: 評価時点 (時刻 0) における資産価格 S を対数変換したもの.

$k = \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{K}{B} \right)$: 給付の最低保証額 K を対数変換したもの. $\nu = \frac{1}{\sigma} \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right)$, $\gamma = r + \frac{\nu^2}{2}$

Ψ は x, k の符号
によって異なる関数



$$\Psi_{\rho}^I(\nu; k, x, T) = e^{\nu x + \nu^2 T/2} N(d_1) - e^{-\nu x + \nu^2 T/2} N(d_3) + e^{-\nu x} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho}(T-t)^{3/2}} \left[\nu N(d_5) + t^{-1/2} N'(d_5) \right] dt$$

$$\Psi_{\rho}^{II}(\nu; k, x, T) = \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho}(T-t)^{3/2}} [\nu C_1 N(d_7) + C_2 N'(d_7)] e^{-x^2/[2(T-t)]} dt$$

$$\Psi_{\rho}^{III}(\nu; k, x, T) = \Psi_{\rho}^I(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; -k, -x, T)]$$

$$\Psi_{\rho}^{IV}(\nu; k, x, T) = \Psi_{\rho}^{II}(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^I(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^I(-\nu; -k, -x, T)]$$

証明の流れ (給付現価のみ)

1. 給付現価を「給付の割引現在価値」の「リスク中立測度の下での期待値」として書く。
2. 1. で得た式から変形を行い、関数 $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ の積分を含む形で書く。
3. Kacの公式より、 $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ のLaplace変換 $G_\rho(z, x; s)$ が満たす常微分方程式を導出。
4. 3. の常微分方程式を解き、 $G_\rho(z, x; s)$ を得る。
5. $G_\rho(z, x; s)$ をLaplace逆変換し、 $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ を得る。
6. $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ の具体形を用いて2. の式の積分を行い、給付現価の評価式を得る。

証明 1 / 6: 期待値表現

1. 給付現価を「給付の割引現在価値」の「リスク中立測度の下での期待値」として書く。

$$P_{\rho}^{+}(S; T, K, B) = e^{-rT} \mathbb{E}_x \left[\underbrace{e^{-\rho \tau_B^{+}}}_{\text{解約による減衰を表す部分}} \underbrace{\max(K - S_T, 0)}_{\text{満期における最低保証給付額}} \right]$$

給付現価

資産価格が解約開始バリアBを上回っていた時間
(occupation time)

$$\tau_B^{+} = \int_0^T \mathbf{1}_{\{S_t \geq B\}} dt$$

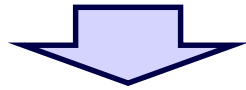
資産価格モデル
(幾何Brown運動)

$$S_t = S e^{\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} = S e^{\sigma(\nu t + W_t)}$$

証明 2 / 6 : 式変形

2. 給付現価の式変形を行い、関数 $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ の積分を含む形で書く。

$$P_\rho^+(S; T, K, B) = e^{-rT} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \tau_B^+} \max(K - S_T, 0) \right]$$



Girsanovの定理、記号の書き換えなど

$$P_\rho^+(S; T, K, B) = e^{-\gamma T - \nu x} (K \Psi_\rho(-\nu; -k, -x, T) - B \Psi_\rho(-(\nu + \sigma); -k, -x, T))$$

$$\Psi_\rho(\nu; k, x, T) = \mathbb{E}_x \left[e^{\nu W_T - \rho \Gamma_T^-} \mathbf{1}_{\{W_T \geq k\}} \right]$$

$$= \int_k^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho(z, x; T) dz$$

: 正規分布の
累積分布関数に近いもの

$$\mathcal{K}_\rho(z, x; T) = \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-} \delta(W_T - z) \right]$$

: Brown運動の
推移確率密度関数に近いもの

$$\Gamma_T^- = \int_0^T \mathbf{1}_{\{W_t \leq 0\}} dt$$

: occupation time

証明 3 / 6: Kacの公式によるODE導出

3. $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ のLaplace変換 $G_\rho(z, x; s)$ を導入する。

$$\begin{aligned} G_\rho(z, x; s) &= \int_0^\infty e^{-sT} \mathcal{K}_\rho(z, x; T) dT \\ &= \int_0^\infty e^{-sT} \mathbb{E}_x \left[\exp \left(-\rho \int_0^T \mathbf{1}_{\{W_t \leq 0\}} dt \right) \delta(W_T - z) \right] dT \end{aligned}$$

Kacの公式(*)により、 $G_\rho(z, x; s)$ は下の常微分方程式の解である。

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_\rho}{\partial x^2} - [s + \rho \underline{H(-x)}] G_\rho = -\delta(z - x)$$

$$\underline{H(x)} = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

$$[\text{境界条件}] \lim_{x \rightarrow \infty} G_\rho(z, x; s) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G_\rho(z, x; s) = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} (G_\rho(z, \epsilon; s) - G_\rho(z, -\epsilon; s)) = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left(\frac{\partial G_\rho}{\partial x}(z, \epsilon; s) - \frac{\partial G_\rho}{\partial x}(z, -\epsilon; s) \right) = 0$$

(*) Karatzas and Shreve, 1991, Brownian Motion and Stochastic Calculus など参照。

証明 4 / 6 : ODEの解

4. $G_\rho(z, x; s)$ のODEを解く。

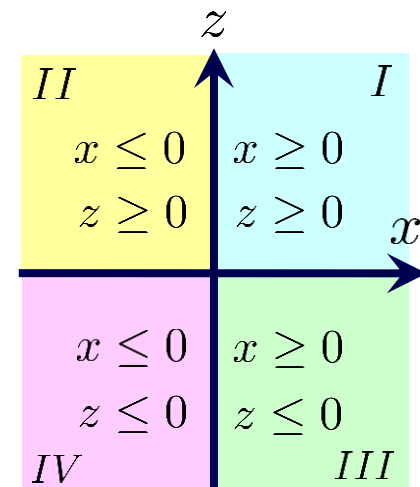
(区分的には定数係数の2階の非斉次ODEとみなす)

$$G_\rho^I(z, x; s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \left(e^{-|z-x|\sqrt{2s}} - \frac{\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{-(z+x)\sqrt{2s}} \right)$$

$$G_\rho^{II}(z, x; s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{x\sqrt{2(s+\rho)} - z\sqrt{2s}}$$

$$G_\rho^{III}(z, x; s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{z\sqrt{2(s+\rho)} - x\sqrt{2s}}$$

$$G_\rho^{IV}(z, x; s) = \frac{1}{\sqrt{2(s+\rho)}} \left(e^{-|z-x|\sqrt{2(s+\rho)}} + \frac{\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{(z+x)\sqrt{2(s+\rho)}} \right)$$



証明 5 / 6 : Laplace逆変換

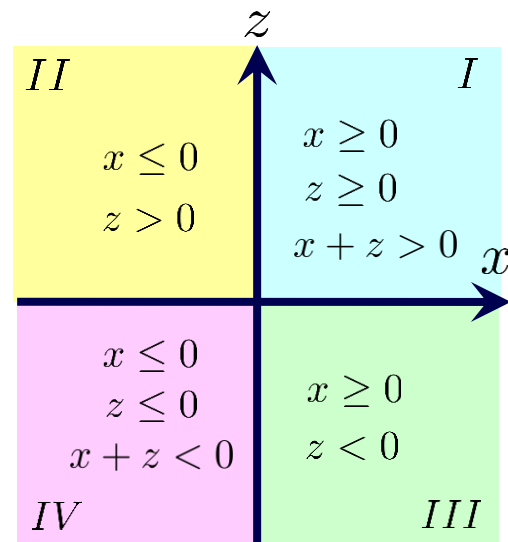
5. $G_\rho(z, x; s)$ をLaplace逆変換し、 $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ を得る。

$$\mathcal{K}_\rho^I(z, x; T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left(e^{-(z-x)^2/2T} - e^{-(z+x)^2/2T} \right) + \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) (z+x)}{2\pi\rho(T-t)^{3/2}t^{3/2}} e^{-(z+x)^2/2t} dt$$

$$\mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T) = \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) [z(1 - x^2/(T-t)) + x(1 - z^2/t)]}{2\pi\rho(T-t)^{3/2}t^{3/2}} e^{-z^2/2t - x^2/[2(T-t)]} dt$$

$$\mathcal{K}_\rho^{III}(z, x; T) = e^{-\rho T} \mathcal{K}_{-\rho}^{II}(-z, -x; T)$$

$$\mathcal{K}_\rho^{IV}(z, x; T) = e^{-\rho T} \mathcal{K}_{-\rho}^I(-z, -x; T)$$



Laplace逆変換の公式

$$\mathcal{L}_T^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi T}} e^{-a^2/4T}, \quad \mathcal{L}_T^{-1} \left\{ e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{a}{2\sqrt{\pi T^{3/2}}} e^{-a^2/4T},$$

$$\mathcal{L}_T^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s+a} + \sqrt{s}} \right\} = \frac{1 - e^{-aT}}{2a\sqrt{\pi T^{3/2}}}, \quad \mathcal{L}_T^{-1} \left\{ \sqrt{s} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{(a^2 - 2T)}{4\sqrt{\pi T^{5/2}}} e^{-a^2/4T}$$

等

証明 6 / 6 : 積分計算

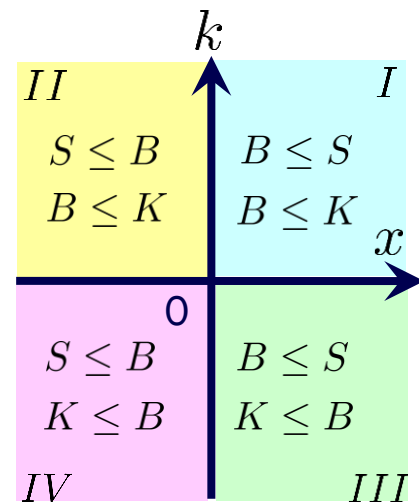
6. $\Psi_\rho(\nu; k, x, T) = \int_k^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho(z, x; T) dz$ の積分計算を行い、 $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ を得る。

$$\begin{aligned} \Psi_\rho^I(\nu; k, x, T) &= e^{\nu x + \nu^2 T/2} N(d_1) - e^{-\nu x + \nu^2 T/2} N(d_3) \\ &\quad + e^{-\nu x} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi}\rho(T-t)^{3/2}} \left[\nu N(d_5) + t^{-1/2} N'(d_5) \right] dt \end{aligned}$$

$$\Psi_\rho^{II}(\nu; k, x, T) = \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi}\rho(T-t)^{3/2}} [\nu C_1 N(d_7) + C_2 N'(d_7)] e^{-x^2/[2(T-t)]} dt$$

$$\Psi_\rho^{III}(\nu; k, x, T) = \Psi_\rho^I(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; -k, -x, T)]$$

$$\Psi_\rho^{IV}(\nu; k, x, T) = \Psi_\rho^{II}(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^I(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^I(-\nu; -k, -x, T)]$$



(再掲)本研究で提案する最低保証V評価式

$$\text{給付現価} = e^{-\gamma T - \nu x} (K \Psi_{\rho}(-\nu; -k, -x, T) - B \Psi_{\rho}(-(\nu + \sigma); -k, -x, T))$$

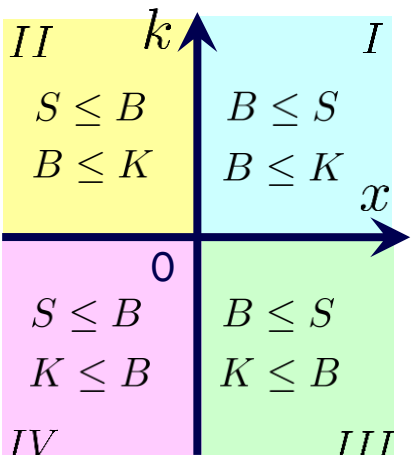
$$\text{収入現価} = qB \int_0^T e^{-\gamma t - \nu x} \Psi_{\rho}(-(\nu + \sigma); -\infty, -x, t) dt$$

ρ : 資産価格が解約開始バリア以上のときの解約強度.

$x = \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S}{B} \right)$: 評価時点 (時刻 0) における資産価格 S を対数変換したもの.

$k = \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{K}{B} \right)$: 給付の最低保証額 K を対数変換したもの. $\nu = \frac{1}{\sigma} \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right)$, $\gamma = r + \frac{\nu^2}{2}$

Ψ は x, k の符号
によって異なる関数



$$\Psi_{\rho}^I(\nu; k, x, T) = e^{\nu x + \nu^2 T/2} N(d_1) - e^{-\nu x + \nu^2 T/2} N(d_3) + e^{-\nu x} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho}(T-t)^{3/2}} \left[\nu N(d_5) + t^{-1/2} N'(d_5) \right] dt$$

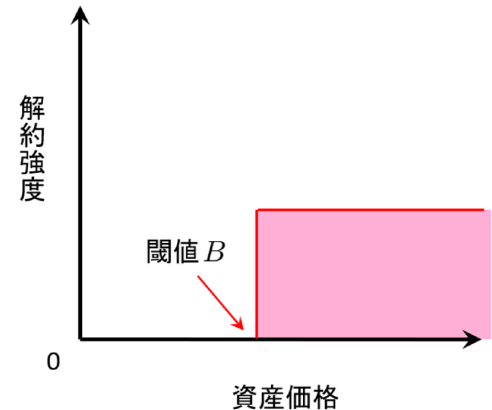
$$\Psi_{\rho}^{II}(\nu; k, x, T) = \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho}(T-t)^{3/2}} [\nu C_1 N(d_7) + C_2 N'(d_7)] e^{-x^2/[2(T-t)]} dt$$

$$\Psi_{\rho}^{III}(\nu; k, x, T) = \Psi_{\rho}^I(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; -k, -x, T)]$$

$$\Psi_{\rho}^{IV}(\nu; k, x, T) = \Psi_{\rho}^{II}(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^I(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^I(-\nu; -k, -x, T)]$$

数値計算例①

- まず、解約開始バリア B を動かした場合の給付現価・収入現価の変化を見る。



【計算前提】

$B = 70 \sim 130$: 解約開始バリア. 資産価格がこの水準以上のときに解約が発生.

$S = 100$: 評価時点 (時刻 0) における資産価格.

$T = 10$: オプション満期 (変額年金保険の満期).

$K = 100$: オプションの権利行使価格 (変額年金保険の給付の最低保証額).

$r = 0.01$: 無リスク金利.

$q \approx 0.0033575088$: 最低保証料率.

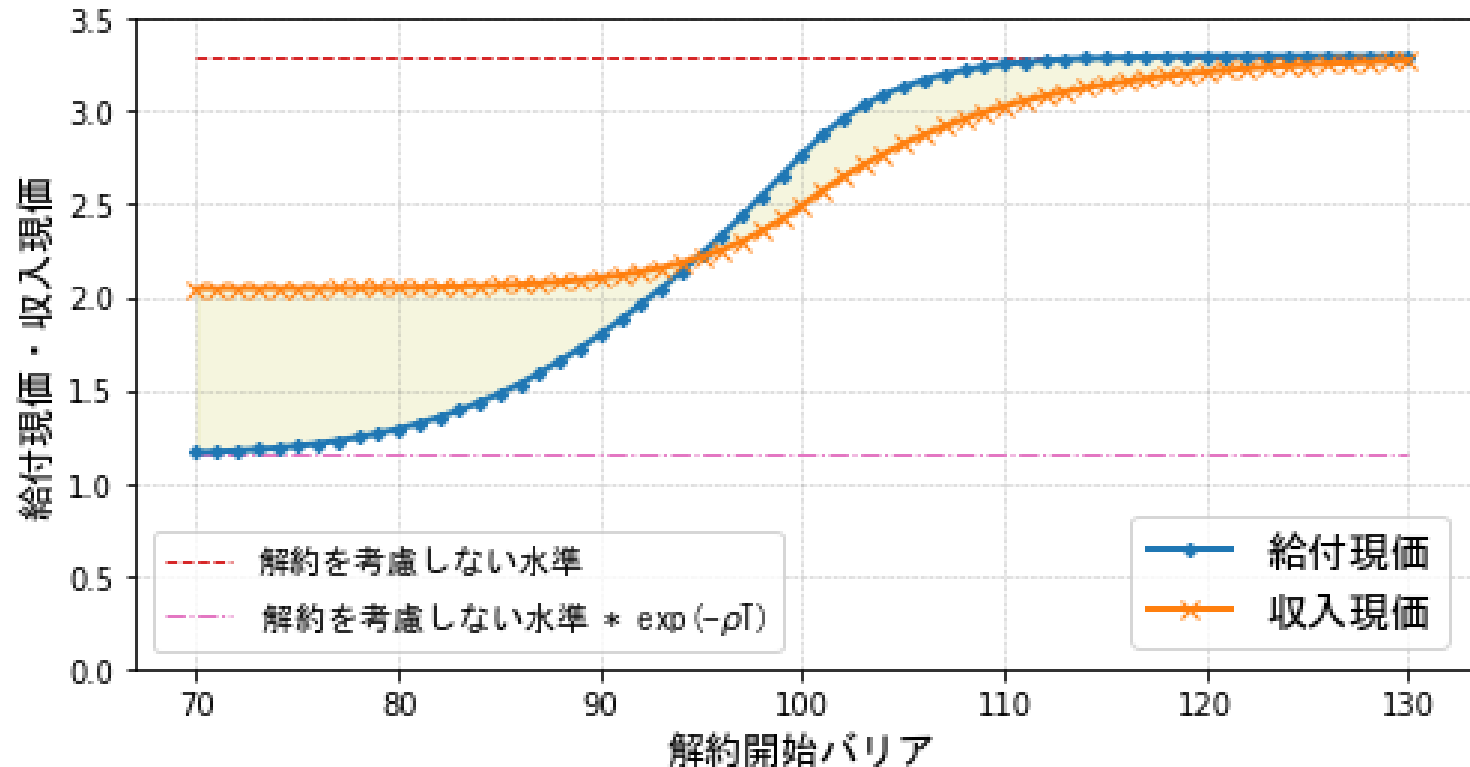
$\sigma = 0.05$: 資産価格のボラティリティ.

$\rho = -\log(0.9) \approx 0.10536052$: 資産価格が解約開始バリアを上回っているときの解約強度.

もし解約が無かった場合に、給付現価と収入現価が等しくなる(収支相等する)ような最低保証料率

数値計算例①

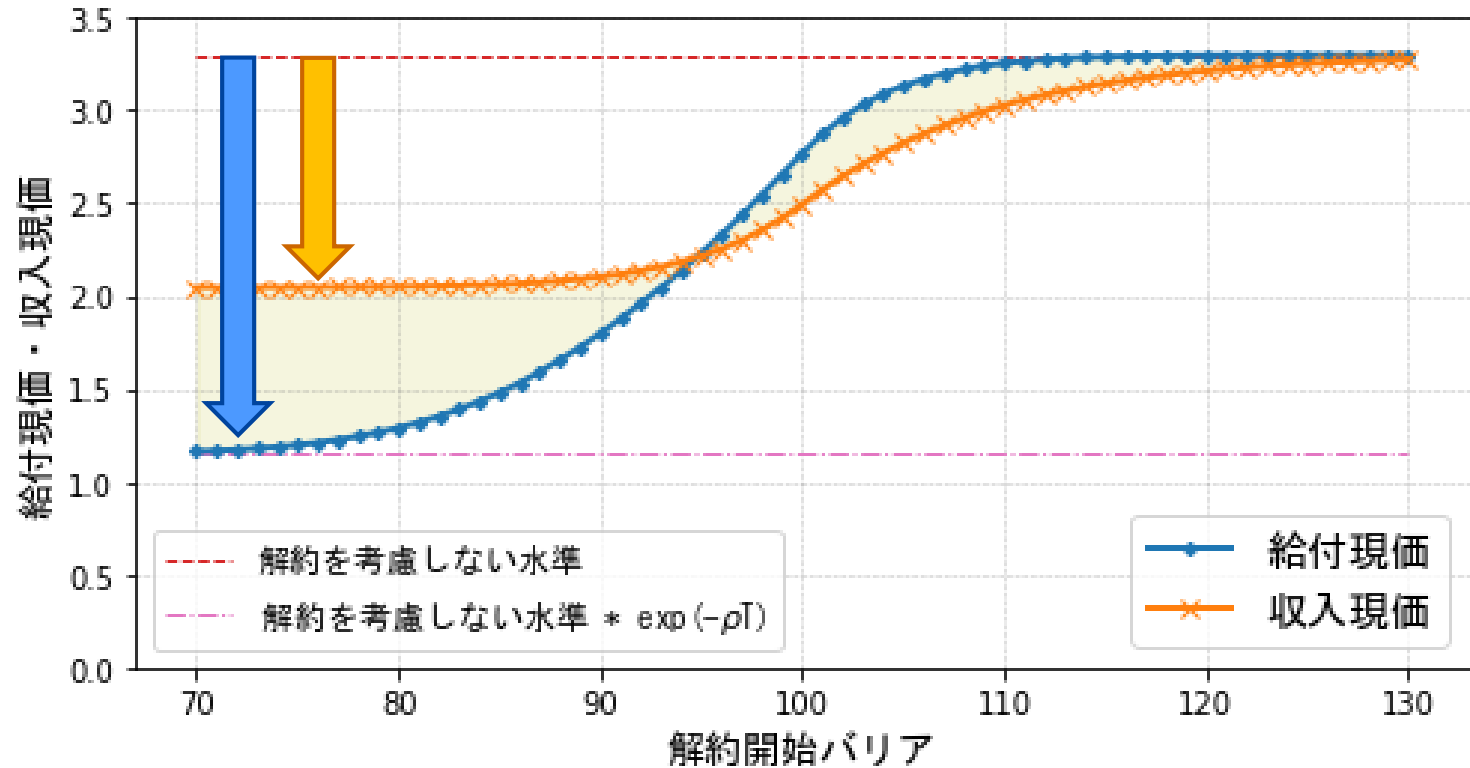
- 解約開始バリアBを動かした場合の給付現価・収入現価の変化



- 解約開始バリアBを低くするほど、給付現価・収入現価ともに小さくなる(グラフは右上がりになる)。
- 解約開始バリアBが十分大きい水準では、給付現価・収入現価ともに、解約が全くない場合の水準に近づく。

数値計算例①

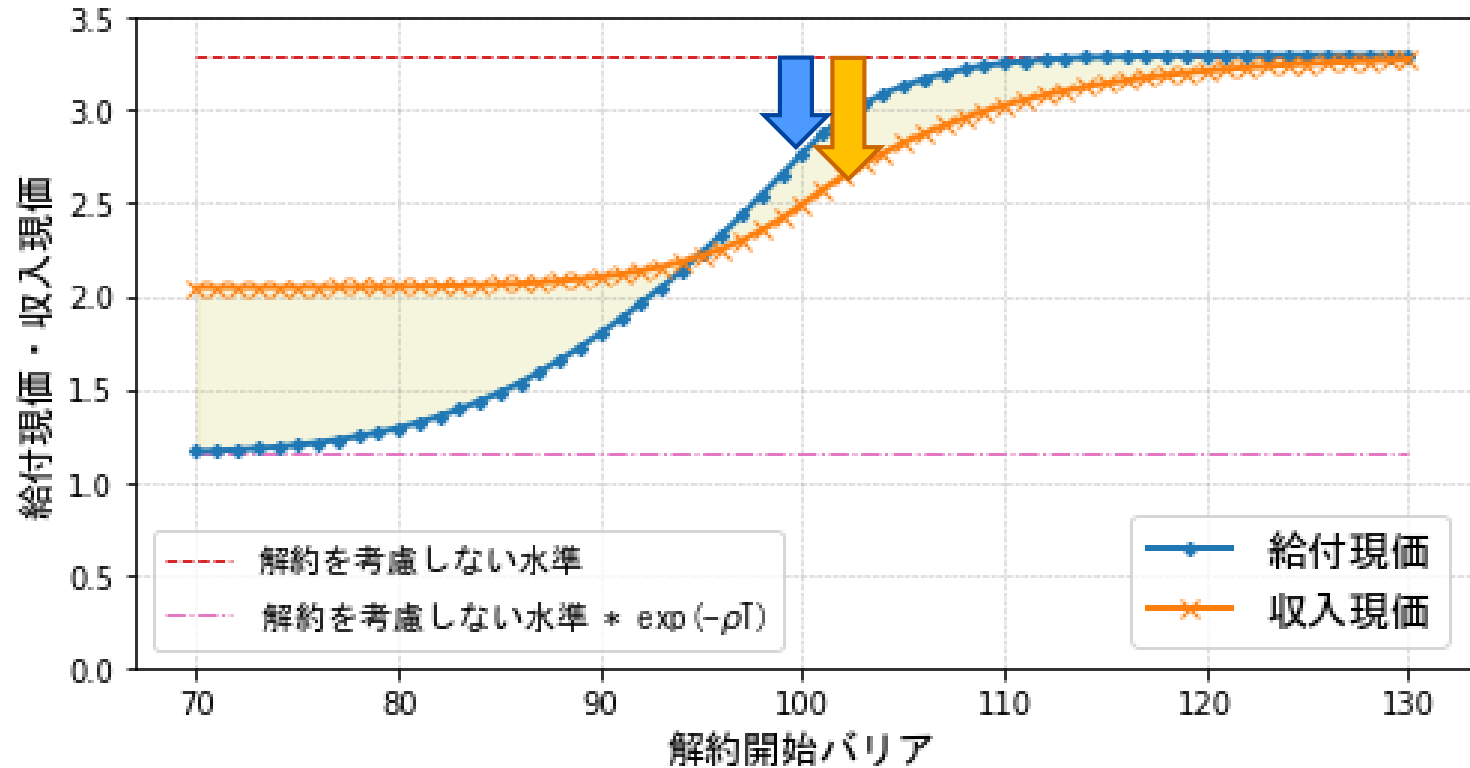
- 解約開始バリアBを動かした場合の給付現価・収入現価の変化



- 解約開始バリアBがある程度低いとき ($B \leq 95$) は、給付現価の減少幅のほうが収入現価の減少幅より大きい。

数値計算例①

- 解約開始バリアBを動かした場合の給付現価・収入現価の変化



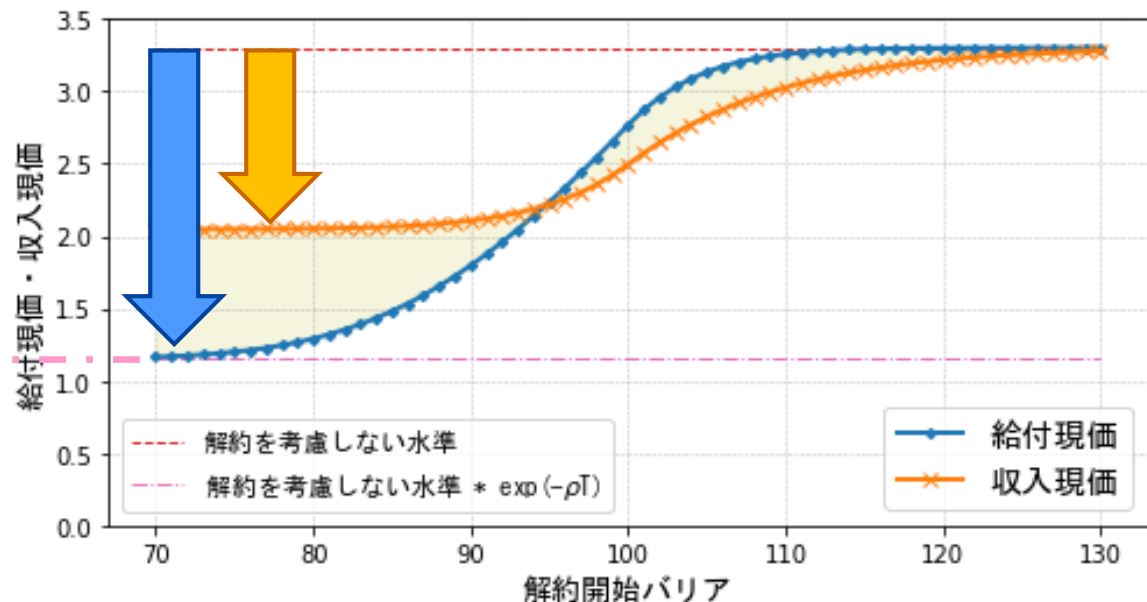
- 解約開始バリアBがある程度高いとき ($B \geq 95$) は、収入現価の減少幅のほうが給付現価の減少幅より大きい。

数値計算例①

□ 解約開始バリア B がある程度低いとき($B \leq 95$)は、給付現価の減少幅のほうが収入現価の減少幅より大きい。

- 解約開始バリア B がある程度低いとき($B \leq 95$)は、資産価格の水準に依らずほとんど常に解約が発生する。
- 収入は時刻 $0 \sim T$ の全体にわたってキャッシュフローが発生するが、一方で給付は満期 T でのみキャッシュフローが存在する。この時刻のズレにより、給付現価は収入現価より解約による割引効果が大きく働く。

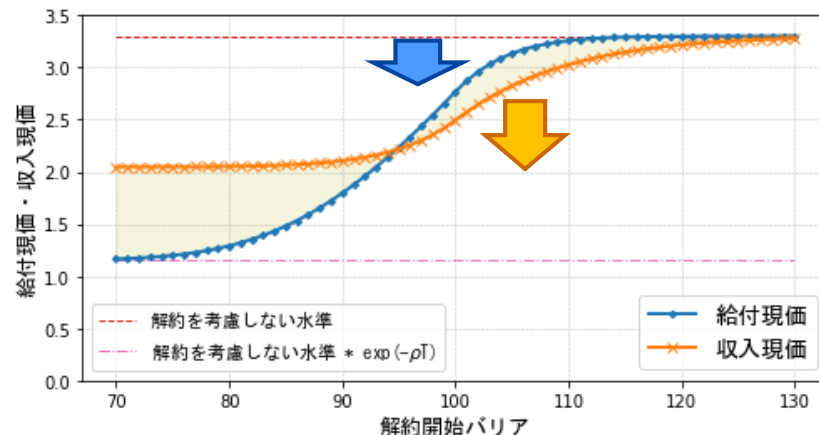
給付現価は
 $e^{-\rho T}$ 倍水準に近づく



数値計算例①

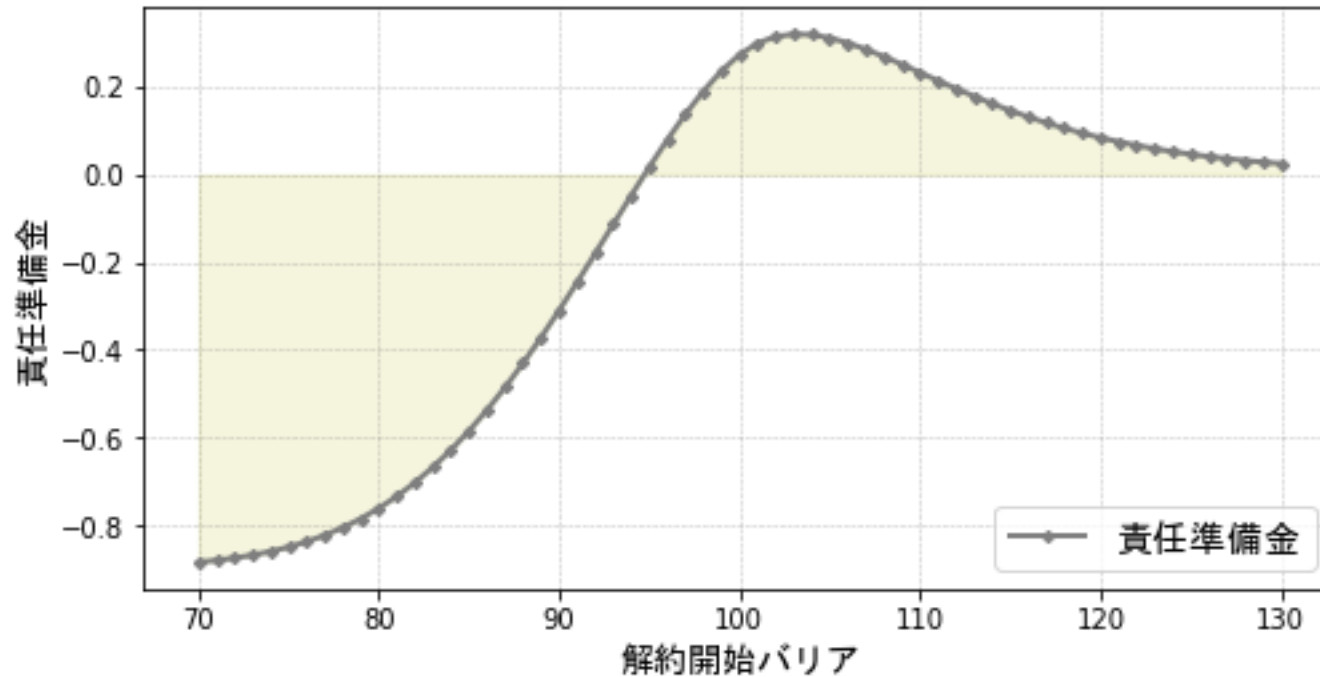
□ 解約開始バリア B がある程度高いとき($B \geq 95$)は、収入現価の減少幅のほうが給付現価の減少幅より大きい。

- 解約開始バリア B がある程度高いとき($B \geq 95$)は、資産価格が高いときのみ解約が発生する。
- 資産価格が高いとき = 満期において最低保証給付が発生する可能性が低い。
 - よって、給付現価は解約による割引の影響を受けにくい。
- 一方で、資産価格が高いとき = 高い最低保証料収入が見込まれる。
 - 最低保証料収入は資産価格に比例して連続的に徴収するため、資産価格が高いときに大きな収入が見込まれるが、そのようなときに解約が発生することで、収入現価は大きく減少する。



数値計算例①

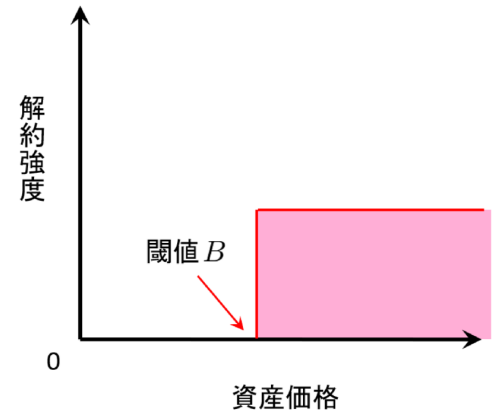
- 解約開始バリアBを動かした場合の最低保証に係る責任準備金の変化。



- 給付現価・収入現価が変動した結果として、解約開始バリアBがある程度高いとき ($B \geq 95$) は、責任準備金が高くなる。
- すなわち、従来の評価手法では積立不足があった可能性が示唆される。

数値計算例②

- 解約開始バリア B を動かしつつ、給付現価と収入現価が等しくなるような(収支相等するような)最低保証料率を逆算する。



【計算前提】(最低保証料率以外、先程と同じ)

$B = 70 \sim 130$: 解約開始バリア. 資産価格がこの水準以上のときに解約が発生.

$S = 100$: 評価時点(時刻 0)における資産価格.

$T = 10$: オプション満期(変額年金保険の満期).

$K = 100$: オプションの権利行使価格(変額年金保険の給付の最低保証額).

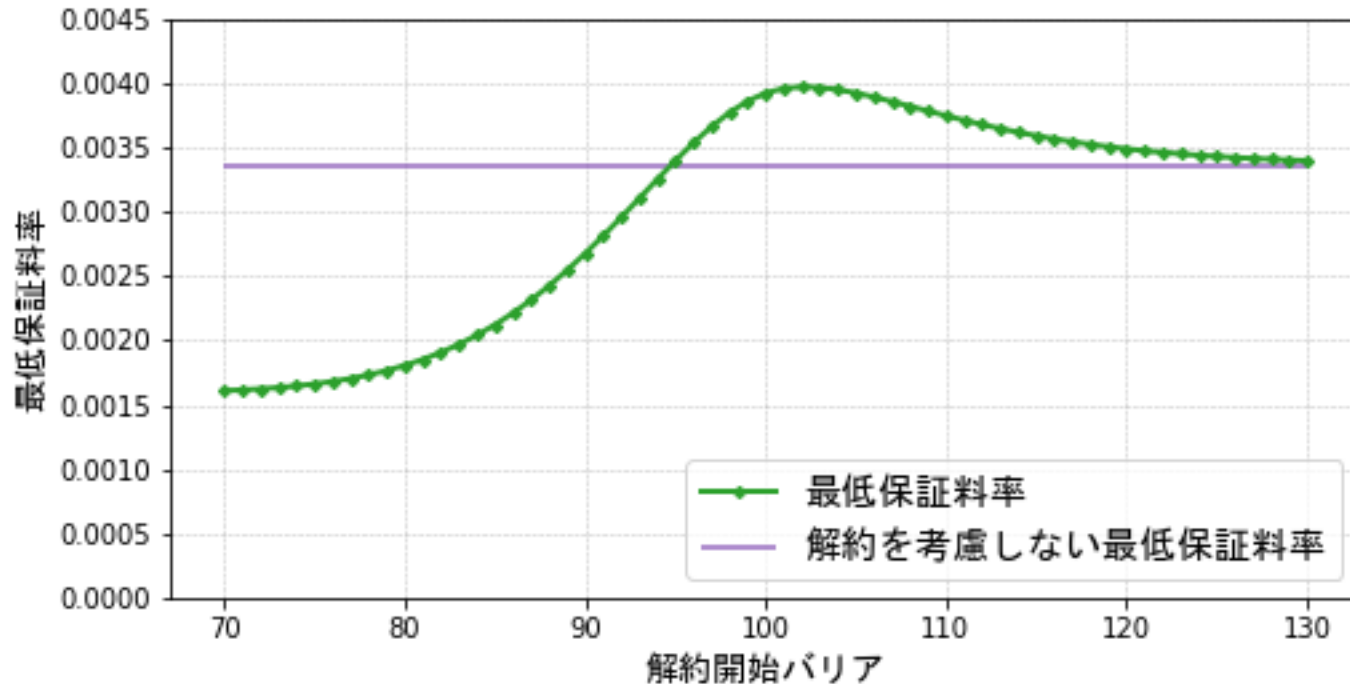
$r = 0.01$: 無リスク金利.

$\sigma = 0.05$: 資産価格のボラティリティ.

$\rho = -\log(0.9) \approx 0.10536052$: 資産価格が解約開始バリアを上回っているときの解約強度.

数値計算例②

- 解約開始バリアBを動かした場合の収支相等最低保証料率の変化。



- 数値計算例①の責任準備金と似たグラフ形状。
- 解約開始バリアBがある程度高いとき ($B \geq 95$) は、収支相等するために要する最低保証料率が高くなる。
- すなわち、従来の最低保証料率では不足があった可能性が示唆される。

まとめ

- 資産価格が閾値以上であるときに一定率で解約が発生。
- 資産価格が閾値未満であるときは解約が発生しない。

という前提の下での、

変額年金保険の最低保証に係る責任準備金評価式を提案した。

- 給付現価は1重の定積分、収入現価は2重の定積分を含む形の数式表現が得られた。
- 解約開始バリア B がある程度高いとき(B =最低保証額 K の場合含む)、責任準備金評価額、もしくは収支相等最低保証料率が高くなった。
- すなわち、従来の責任準備金評価額、もしくは最低保証料率では不足がある可能性が示唆された。
- 「高い最低保証料収入が見込まれ、かつ将来の最低保証給付が発生する可能性が低い状態」で解約が発生しやすく、保険会社にとって不利な構造であるため。

(再掲)本研究で提案する最低保証V評価式

$$\text{給付現価} = e^{-\gamma T - \nu x} (K \Psi_{\rho}(-\nu; -k, -x, T) - B \Psi_{\rho}(-(\nu + \sigma); -k, -x, T))$$

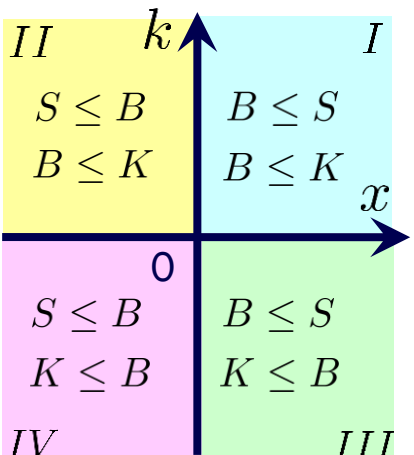
$$\text{収入現価} = qB \int_0^T e^{-\gamma t - \nu x} \Psi_{\rho}(-(\nu + \sigma); -\infty, -x, t) dt$$

ρ : 資産価格が解約開始バリア以上のときの解約強度.

$x = \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S}{B} \right)$: 評価時点 (時刻 0) における資産価格 S を対数変換したもの.

$k = \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{K}{B} \right)$: 給付の最低保証額 K を対数変換したもの. $\nu = \frac{1}{\sigma} \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right)$, $\gamma = r + \frac{\nu^2}{2}$

Ψ は x, k の符号
によって異なる関数



$$\Psi_{\rho}^I(\nu; k, x, T) = e^{\nu x + \nu^2 T/2} N(d_1) - e^{-\nu x + \nu^2 T/2} N(d_3) + e^{-\nu x} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho}(T-t)^{3/2}} \left[\nu N(d_5) + t^{-1/2} N'(d_5) \right] dt$$

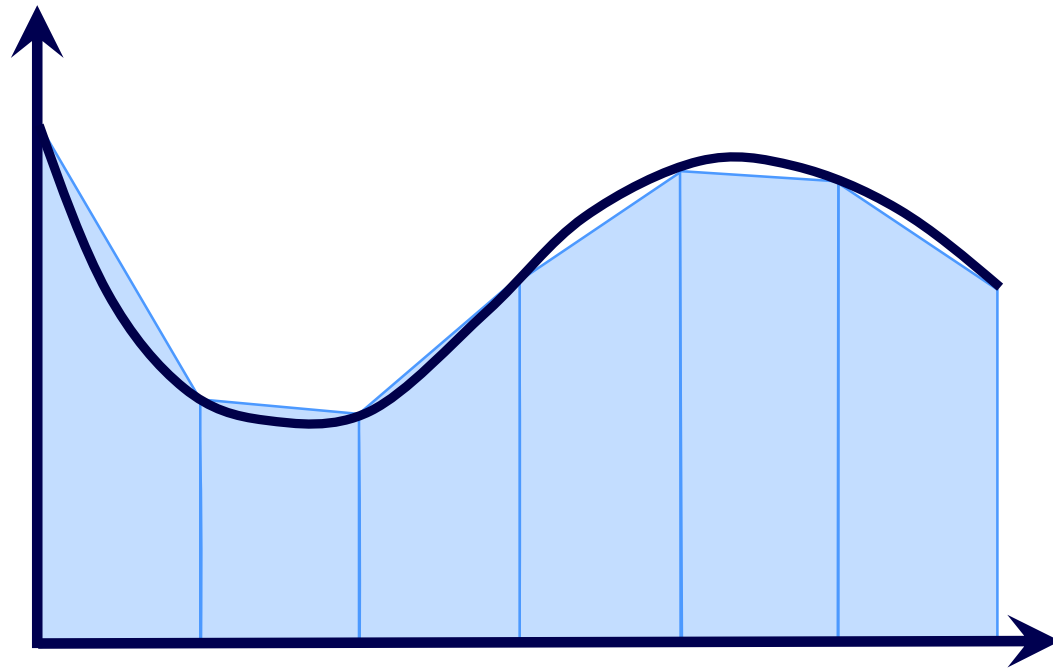
$$\Psi_{\rho}^{II}(\nu; k, x, T) = \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho}(T-t)^{3/2}} [\nu C_1 N(d_7) + C_2 N'(d_7)] e^{-x^2/[2(T-t)]} dt$$

$$\Psi_{\rho}^{III}(\nu; k, x, T) = \Psi_{\rho}^I(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; -k, -x, T)]$$

$$\Psi_{\rho}^{IV}(\nu; k, x, T) = \Psi_{\rho}^{II}(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^I(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^I(-\nu; -k, -x, T)]$$

補足①：評価式に含まれる数値積分の取り扱い

- ・ 給付現価は1重の数値積分、収入現価は2重の数値積分が必要。
- ・ 数値積分法は、台形積分が最も単純。



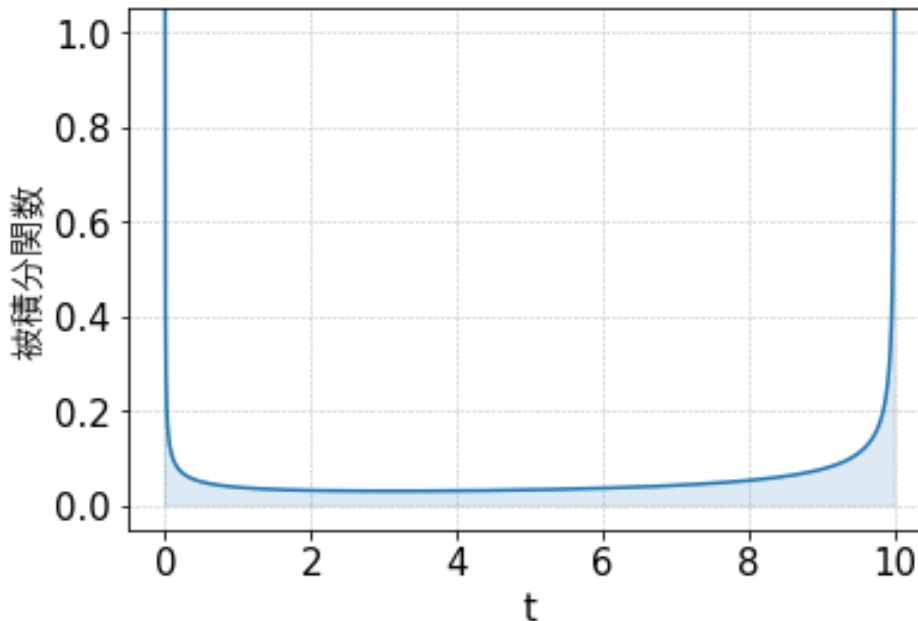
短冊状に区切った台形の面積の総和 \simeq 積分値

高い精度を出すには、区切りの数を多くする必要がある。

補足①：評価式に含まれる数値積分の取り扱い

- 一部の被積分関数は端点で特異であるため、台形積分では精度の高い計算が困難。

$$\Psi_{\rho}^I(\nu; k, x, T) = e^{\nu x + \nu^2 T/2} N(d_1) - e^{-\nu x + \nu^2 T/2} N(d_3) \\ + e^{-\nu x} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi}\rho(T-t)^{3/2}} \left[\nu N(d_5) + t^{-1/2} N'(d_5) \right] dt$$

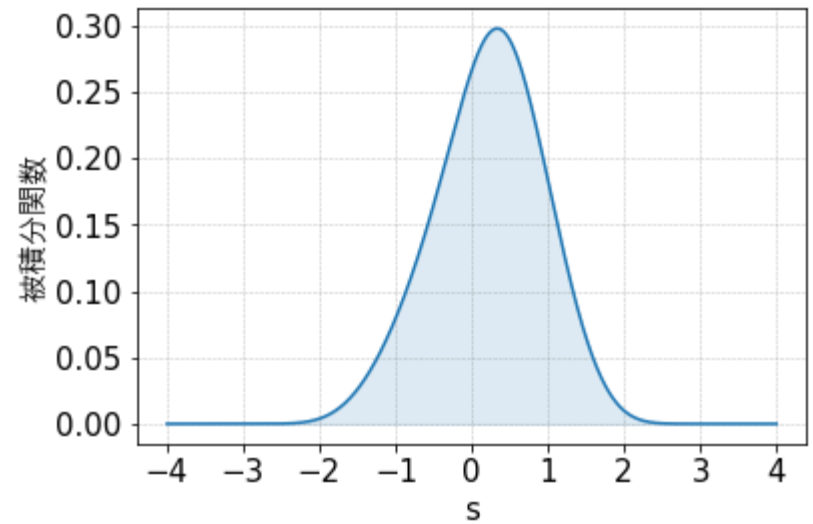
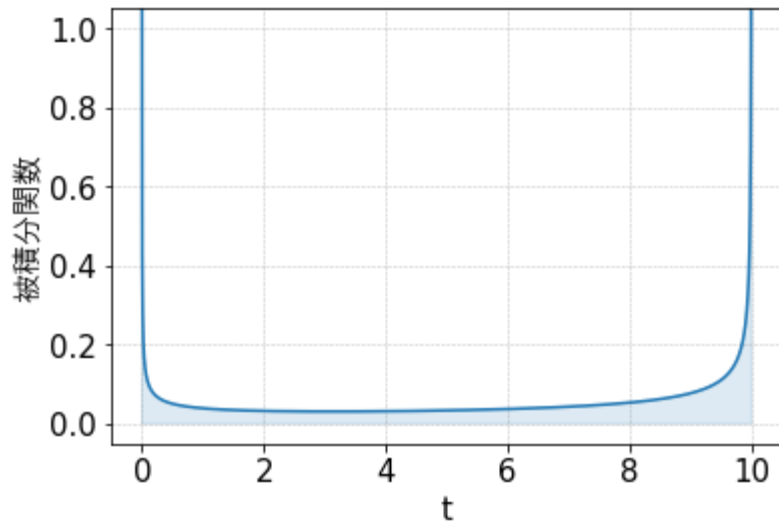


$x \rightarrow 0$ における $\frac{1}{\sqrt{x}}$ と
同じ速さで ∞ に発散

補足①：二重指数関数型数値積分(DE)公式

- DE公式(*)により、特異点があっても高速・高精度な数値積分が可能。

変数変換: $t = \frac{T}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right) + \frac{T}{2}, \quad dt = \frac{T}{2} \frac{\frac{\pi}{2} \cosh(s)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right)} ds$

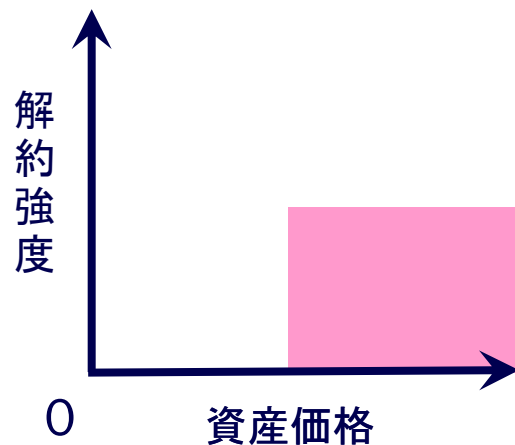


$$\int_0^T f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{T}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right) + \frac{T}{2}\right) \frac{\frac{\pi}{2} \cosh(s)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right)} ds$$

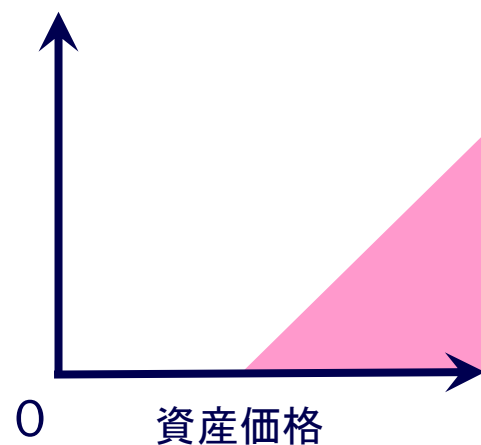
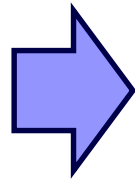
(*) Takahasi and Mori, 1974, Double exponential formulas for numerical integration, 杉原正顯, 室田一雄, 2012, 数値計算法の数理 など参照。

補足②：より一般的な動的解約構造

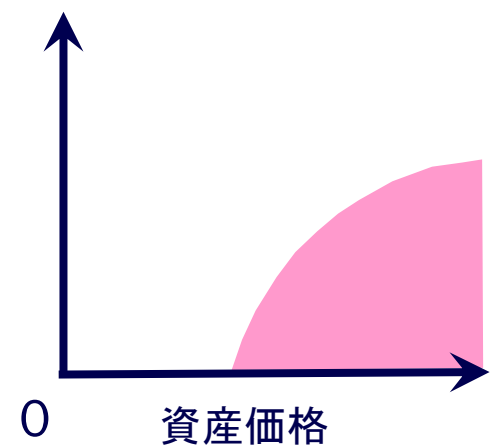
- 今後の課題として、より一般的な動的解約構造においても責任準備金の評価式を得られないのか。
 - あるいは、どのような動的解約構造であれば評価式が得られるのか。
- という疑問が生じる。



本研究：ステップ関数



より一般的な形状



補足②：評価式を得るまでのハードル

【本研究での評価式導出の流れ】

1. 給付現価を「給付の割引現在価値」の「リスク中立測度の下での期待値」として書く。
2. 1. で得た式から変形を行い、関数 $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ の積分を含む形で書く。
3. Kacの公式より、 $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ のLaplace変換 $G_\rho(z, x; s)$ が満たす常微分方程式を導出。
4. 3. の常微分方程式を解き、 $G_\rho(z, x; s)$ を得る。
5. $G_\rho(z, x; s)$ をLaplace逆変換し、 $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ を得る。
6. $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ の具体形を用いて2. の式の積分を行い、給付現価の評価式を得る。

ODEが解けるかどうか

Laplace逆変換ができるかどうか

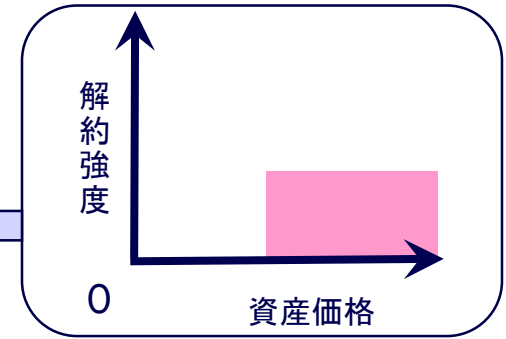
積分ができるかどうか

補足②：本研究で導出した常微分方程式

解約強度が資産価格のステップ関数であることから、

$G_\rho(z, x; s)$ の中に W_t のステップ関数が表れる。

$$\begin{aligned} G_\rho(z, x; s) &= \int_0^\infty e^{-sT} \mathcal{K}_\rho(z, x; T) dT \\ &= \int_0^\infty e^{-sT} \mathbb{E}_x \left[\exp \left(-\rho \int_0^T \mathbf{1}_{\{W_t \leq 0\}} dt \right) \delta(W_T - z) \right] dT \end{aligned}$$



Kacの公式により、この W_t の関数が
常微分方程式の係数部分に現れる。

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_\rho}{\partial x^2} - [s + \rho H(-x)] G_\rho = -\delta(z - x)$$

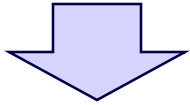
これは「区分的には定数係数」なので、比較的簡単な解析解を得ることができた。

幸い、その後のLaplace逆変換と積分も(1重の定積分が残るものの)可能。

補足②：より一般的な動的解約構造

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_\rho}{\partial x^2} - [s + f(x)] G_\rho = -\delta(z - x)$$

一般的な動的解約構造においては、
常微分方程式の係数が、定数ではなく x の関数になる。



この常微分方程式の解を得ること、更にその後のLaplace逆変換と積分を行うことが急激に困難になる。

このようなハードルを越え、最低保証V評価式が得られるような動的解約構造がステップ関数以外にも存在するかどうかは、未解決の問題。

〔多段ステップ関数なら
うまく行くかもしれない〕

